Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. И. Дубровин, А. Ю. Тухтамирзаев

ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ.
1-й СЕМЕСТР

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2011

УДК 51
ББК 22.1
Д79

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного гуманитарного университета
Ю.А. Алхутов

Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
В.И. Данченко

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Дубровин, Н. И.

Д79 Задачник по математике. 1-й семестр / Н. И. Дубровин, А. Ю. Тухтамирзаев ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 67 с.
ISBN 978-5-9984-0159-9

Приведены индивидуальные задания к типовым расчетам по следующим разделам: линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, функции нескольких переменных.

Предназначен для студентов первого семестра обучения всех инженерных специальностей, а также бакалавров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 7. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0159-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал задачника соответствует программе первого семестра по высшей математике инженерных специальностей. Каждый раздел имеет свою нумерацию; в каждом задании – 30 вариантов. В начале раздела приведены решения некоторых наиболее трудных типовых задач, которые призваны помочь справиться с типовым расчетом.

В издании использованы следующие обозначения. Поле действительных чисел отмечается символом $\boldsymbol{R}$. В разделе 1 через (X, Y, Z) обозначаются координаты вектора, а через (x, y, z) – координаты точки трехмерного евклидова пространства, например x_A есть первая координата точки A. Знаки $\perp$ и $\parallel$ обозначают перпендикулярность и коллинеарность (т.е. параллельность или совпадение) прямых и плоскостей; $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – стандартный базис трехмерного евклидова пространства, т.е. векторы единичной длины, направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно. Знаки скалярного и векторного произведения обозначаются точкой и крестиком – "$\cdot$, $\times$". Расстояние между точками, прямыми и (или) плоскостями отмечается так: $\rho(\ \dots\ ,\dots\ )$. В третьем разделе y_x' означает производную функции $y(x)$ по переменной x, а $y(x)\ |_{x\,=\,x_0}$ – результат подстановки в функцию $y(x)$ числа x_0 вместо переменной x (т.е. $y(x_0)$). В последнем, четвертом разделе символом $\in$ обозначается принадлежность элемента множеству, а символ $\Leftrightarrow$ заменяет слова «тогда и только тогда» или «в том и только том случае».

При составлении заданий и задач было использовано пособие Н.И. Дубровина «Задания к типовым расчетам по математике».

Раздел 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Примеры решения задач

Задача 1. Найти площадь ΔABC, если $A(1,-3,2)$, $B(4,0,-5)$, $C(1,0,-1)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = \{4-1, 0+3, -5-2\} = \{3;3;-7\}$; $\overrightarrow{AC} = \{0;3;-3\}$.

Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} k =$$

$$= 12i + 9j + 9k = \{12;9;9\}.$$

Тогда площадь ΔABC равна

$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+9^2+9^2} = \frac{3\sqrt{34}}{2} \approx 8{,}746.$

Ответ: $S \approx 8{,}746$.

Задача 2. Найти уравнение высоты, опущенной из точки $P(5,-3{,}1)$ на плоскость π: $2x+7y-z+4=0$.

Решение. Вектор $\vec{n} = \{2,7,-1\}$ перпендикулярен плоскости π и, значит, коллинеарен искомой прямой l.

Ответ: каноническое уравнение прямой l:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-1}{-1}.$$

Задача 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1,0,2), N(3,-1,4)$ и перпендикулярной плоскости π: $7x-2y++3z=0$.

Решение. $\vec{n} = 7\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \perp \pi$, поэтому $\vec{n} \parallel \tau$, где τ – искомая плоскость. Вектор $\overrightarrow{MN}(2,-1,2)$ также коллинеарен проскости τ. Следовательно, вектор

$$\overrightarrow{MN} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i + 11j + 3k$$

перпендикулярен этой плоскости. Тогда задача сводится к стандартной: найти уравнение плоскости τ, проходящей через точку M и перпендикулярной вектору с координатами $(1,11,3)$. Получаем уравнение плоскости

$$\tau: 1\cdot(x-1) + 11\cdot(y-0) + 3\cdot(z-2) = 0.$$

Ответ: $\tau: x + 11y + 3z - 7 = 0$.

Задача 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $l_1\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{5}$ и $l_2\colon \frac{x+1}{4} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-8}{3}$ и уравнение их общего перпендикуляра.

Решение. Общая точка прямой l_1 есть $A(3t+1, -2, 5t)$, а прямой $l_2 -$ $B(4u-1, u+9, 3u+8)$. Здесь $t, u \in \boldsymbol{R}$. Находим параметры t и u так, чтобы вектор $\overrightarrow{AB}$ был перпендикулярен к l_1 и l_2 одновременно. Так как вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(4u-3t-2, u++11, 3u-5t+2)$ и $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{m} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно, то для u и t получаем систему двух линейных уравнений: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{m} = 0$ или

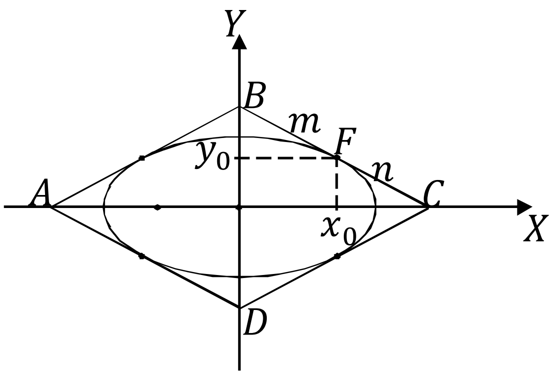
$$\begin{cases} (4u-3t-2)\cdot 3 + (3u-5t+3)\cdot 5 = 0, \\ (4u-3t-2)\cdot 4 + (u+11)\cdot 1 + (3u-5t+3)\cdot 3 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $u = 0, t = 1$; $A(4, -2, 5), B(-1, 9, 8)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = -5\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} +$ $+3\boldsymbol{k}$. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно

$$\rho(l_1, l_2) = \sqrt{(-5)^2 + 11^2 + 3^2} = \sqrt{155} \approx 12{,}45.$$

Ответ: $\rho(l_1, l_2) \approx 12{,}45$. Каноническое уравнение общего перпендикуляра: $\frac{x-4}{-5} = \frac{y+2}{11} = \frac{z-5}{3}$.

Задача 5. В ромб с диагоналями $2d_1$, $2d_2$ вписан эллипс $(d_1 \geq d_2)$ (рисунок). Точка касания делит сторону ромба в отношении $m\colon n$. Найти каноническое уравнение эллипса.



Решение. Выберем систему координат, как указано на рисунке; координаты точки касания в первом квадранте обозначим x_0, y_0. Так как $BF\colon FC = m\colon n$ по условию, то $\frac{x_0}{d_1 - x_0} = \frac{m}{n}$. Отсюда $x_0 = \frac{d_1 m}{m+n}$. Аналогично $y_0 = \frac{d_2 n}{m+n}$. Пусть каноническое уравнение эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Требуется найти a и b. Тангенс угла наклона прямой BC равен d_2/d_1, что совпадает с производной в точке x_0 функции $y(x)$, заданной неявно соотношением (1). Дифференцируя (1) по x, считая y функцией переменной x и подставляя $x = x_0$ и $y'(x_0) = -d_2/d_1$, получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{d_2}{d_1} = 0. \qquad (2)$$

Кроме того,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3) представляют линейную систему двух уравнений относительно неизвестных $1/a^2$, $1/b^2$. Решая ее, получим

$$a^2 = x_0^2 + x_0 y_0 \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1^2 m^2}{(m+n)^2} + \frac{d_1 d_2 mn}{(m+n)^2} \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1^2 m^2 + d_2^2 mn}{(m+n)^2};$$

$$b^2 = y_0^2 + y_0 x_0 \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_2^2 n^2 + d_1^2 mn}{(m+n)^2}.$$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{d_1^2 m^2 + d_2^2 mn}}{m+n}$, $b = \frac{\sqrt{d_2^2 n^2 + d_1^2 mn}}{m+n}$.

<u>*Задача 6*</u>. Написать уравнение биссектрисы угла ABC, где $A(1,3)$, $B(-2,0)$, $C(5,-1)$.

Решение. Найдем $\overrightarrow{BA} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{BC} = 7\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$. Пусть вектор $\vec{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$ коллинеарен биссектрисе угла ABC. Тогда косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$ будет равен косинусу угла между векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}$; откуда

$$\frac{3X + 3Y}{\sqrt{3^2 + 3^2}\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{7X + (-1)Y}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

или $3\sqrt{50}(X + Y) = 3\sqrt{2}(7X - Y)$, откуда $3Y = X$. Следовательно, в качестве направляющего вектора биссектрисы можно взять $3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Тогда $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1}$ - каноническое уравнение биссектрисы.

Ответ: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ - уравнение биссектрисы.

<u>Задача 7</u>. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 2y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

Решение. Сначала систему приводим к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножаем на -2, -3 и прибавляем ко второму и третьему уравнению соответственно:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ -3y - 7z = -5, \\ -3y - 7z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3y + 7z = 5. \end{cases}$$

Далее, вычитая из третьего уравнения второе, получаем ступенчатый вид. Число ненулевых уравнений ($= 2$) меньше, чем число неизвестных ($= 3$); отсюда следует, что система неопределена. Для того чтобы записать формулу общего решения, объявим неизвестную z свободной; x и y выражаются тогда через z.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{5}{3}z + \frac{2}{3}, \\ y = -\frac{7}{3}z + \frac{5}{3}, \end{cases} \qquad z \in \boldsymbol{R}.$

<u>Задача 8</u>. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора пространства $\boldsymbol{R}^3$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) + 4(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5.$$

Определяем собственные векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$, соответствующие найденным характеристическим числам λ_1, λ_2, λ_3 из системы однородных уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{p}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Здесь E − единичная $3 \times 3 -$ *матрица*.

Получаем

1) $\lambda_1 = 2$ $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \\ 2y - z = 0; \end{cases}$ $x = 2t,\ y = -1,\ z = -2t;$ $\vec{p}_1 = (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})t;$

2) $\lambda_2 = -1$ $\begin{cases} 4x + 2y = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ 2y + 2z = 0; \end{cases}$ $x = t,\ y = -2t, z = 2t;$ $\vec{p}_2 = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})t;$

3) $\lambda_3 = 5$ $\begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 2y - 4z = 0. \end{cases}$ $x = 2t,\ y = 2t,\ z = t;$ $\vec{p}_3 = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})t.$

Ответ. Собственные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$; соответствующие им собственные векторы − $\vec{p}_1 = (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})t$, $\vec{p}_2 = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})t$, $\vec{p}_3 = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})t$, $(t \in \boldsymbol{R},\ t \neq 0)$.

Задания

1. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирами-

ды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) площадь S грани $A_1A_2A_3$;

3) объем V пирамиды;

4) уравнение плоскости π грани $A_1A_2A_3$;

5) угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(-2;0;2)$, $A_2(2;3;14)$, $A_3(-6;-3;14)$, $A_4(1;-4;14)$.
1.2. $A_1(-1;-1;0)$, $A_2(11;2;-4)$, $A_3(11;-4;4)$, $A_4(1;3;3)$.
1.3. $A_1(-2;0;0)$, $A_2(-1;2-2)$, $A_3(-12;-2;11)$, $A_4(1;-3;3)$.
1.4. $A_1(-2;0;1)$, $A_2(0;1;-1)$, $A_3(-4;2;0)$, $A_4(-1;3;2)$.
1.5. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(1;1;-1)$, $A_3(4;-2;-1)$, $A_4(2;3;2)$.
1.6. $A_1(2;1;-2)$, $A_2(4;-4;12)$, $A_3(-8;-10;0)$, $A_4(3;-3;-1)$.
1.7. $A_1(-2;-1;-2)$, $A_2(-1;1;0)$, $A_3(0;-3;-1)$, $A_4(1;0;-3)$.
1.8. $A_1(0;1;1)$, $A_2(2;0;-1)$, $A_3(2;-9;-10)$, $A_4(2;-2;6)$.
1.9. $A_1(-2;0;2)$, $A_2(-4;-1;4)$, $A_3(0;-2;3)$, $A_4(0;5;5)$.
1.10. $A_1(-2;2;0)$, $A_2(12;4;5)$, $A_3(-4;-9;10)$, $A_4(0;-4;-2)$.
1.11. $A_1(0;1;1)$, $A_2(2;-4;-13)$, $A_3(10;12;3)$, $A_4(3;-1;0)$.
1.12. $A_1(1;2;-2)$, $A_2(3;3;-4)$, $A_3(2;4;0)$, $A_4(3;-3;2)$.
1.13. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(12;-21;11)$, $A_3(16;-22;14)$, $A_4(-3;0;6)$.
1.14. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(-1;-3;4)$, $A_3(-5;13;0)$, $A_4(3;4;1)$.
1.15. $A_1(-2;0;-2)$, $A_2(-3;2;-4)$, $A_3(-7;-14;0)$, $A_4(-1;2;7)$.
1.16. $A_1(2;0;-2)$, $A_2(-2;8;-3)$, $A_3(9;4;2)$, $A_4(10;1;-8)$.
1.17. $A_1(0;-2;-2)$, $A_2(-4;10;-5)$, $A_3(-12;6;-11)$, $A_4(-9;6;10)$.
1.18. $A_1(-2;1;0)$, $A_2(-4;0;-2)$, $A_3(-12;-10;2)$, $A_4(-2;2;7)$.
1.19. $A_1(2;2;0)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(-8;-9;2)$, $A_4(2;-2;1)$.
1.20. $A_1(2;1;2)$, $A_2(-3;-13;4)$, $A_3(12;-1;13)$, $A_4(-1;3;7)$.
1.21. $A_1(-1;1;0)$, $A_2(0;3;2)$, $A_3(1;2;-2)$, $A_4(5;-3;-2)$.
1.22. $A_1(3;0;2)$, $A_2(2;2;0)$, $A_3(5;-1;0)$, $A_4(3;4;3)$.
1.23. $A_1(-1;2;0)$, $A_2(1;3;2)$, $A_3(-6;4;-14)$, $A_4(-1;5;3)$.
1.24. $A_1(2;2;10)$, $A_2(4;-3;15)$, $A_3(-8;9;3)$, $A_4(3;-2;2)$.
1.25. $A_1(2;0;-2)$, $A_2(6;2;-6)$, $A_3(-2;4;-4)$, $A_4(-2;10;-8)$.
1.26. $A_1(0;1;2)$, $A_2(4;3;-2)$, $A_3(-4;5;0)$, $A_4(2;7;4)$.
1.27. $A_1(-1;1;2)$, $A_2(3;3;-2)$, $A_3(-5;5;0)$, $A_4(1;7;4)$.
1.28. $A_1(-1;3;2)$, $A_2(1;4;4)$, $A_3(-6;5;-12)$, $A_4(-1;6;5)$.
1.29. $A_1(-1;-2;-2)$, $A_2(1;-1;-4)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(4;-3;4)$.
1.30. $A_1(-2;-1;-2)$, $A_2(-1;1;-4)$, $A_3(-12;-3;9)$, $A_4(1;-4;1)$.

2. Заданы плоскость π и точка M. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точку M параллельно плоскости π. Найти

расстояние ρ между плоскостями.

2.1. $\pi: x+2y+2z+1=0$, $M(6,7,-3)$.
2.2. $\pi: -4x+3z-3=0$, $M(5,-9,-9)$.
2.3. $\pi: 8x+y-4z-6=0$, $M(4,7,6)$.
2.4. $\pi: 3x-6y-2z+5=0$, $M(-1,-9,7)$.
2.5. $\pi: -2x-y-2z+6=0$, $M(-8,-8,0)$.
2.6. $\pi: -4x-8y-z+6=0$, $M(2,3,-8)$.
2.7. $\pi: 4x+4y+2z-1=0$, $M(2,-1,0)$.
2.8. $\pi: -3x+6y-2z-2=0$, $M(9,-8,-7)$.
2.9. $\pi: -4x-8y-z+1=0$, $M(-8,-6,0)$.
2.10. $\pi: 4x+8y-z-1=0$, $M(9,4,4)$.
2.11. $\pi: -6x-3y+6z-6=0$, $M(-8,-3,-4)$.
2.12. $\pi: 2x-4y+4z-3=0$, $M(2,5,1)$.
2.13. $\pi: -2x-9y-6z=0$, $M(2,1,-4)$.
2.14. $\pi: -6x-8z+5=0$, $M(-8,0,-4)$.
2.15. $\pi: -6x-9y-2z=0$, $M(-4,5,6)$.
2.16. $\pi: 6x-3y+2z-3=0$, $M(3,7,-4)$.
2.17. $\pi: 4x+4y+2z+5=0$, $M(1,-9,-9)$.
2.18. $\pi: 4x-8y-z-9=0$, $M(6,3,0)$.
2.19. $\pi: -9x-6y-2z+4=0$, $M(-6,-8,-2)$.
2.20. $\pi: -6x+8y-9=0$, $M(-3,-3,-7)$.
2.21. $\pi: -8x+y+4z-7=0$, $M(9,-9,4)$.
2.22. $\pi: 6x-2y+3z+4=0$, $M(6,-3,-6)$.
2.23. $\pi: -8x+6y+z-8=0$, $M(-2,-8,-8)$.
2.24. $\pi: 6x-2y-9z-1=0$, $M(4,-3,-9)$.
2.25. $\pi: 4x-2y+4z=0$, $M(4,0,-7)$.
2.26. $\pi: 2x-6y+3z-4=0$, $M(-5,\ 6,-9)$.
2.27. $\pi: -4x+7y+4z-7=0$, $M(3,8,2)$.
2.28. $\pi: -8x+4y-z+6=0$, $M(6,-6,-3)$.
2.29. $\pi: -6x+3y-6z+3=0$, $M(-3,-4,3)$.
2.30. $\pi: 8x+6y-6=0$, $M(3,7,-7)$.

3. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости π.

3.1. $\pi: 4x-4y+z+1=0$, $M_1(2;\ -4;2)$, $M_2(-4;5;0)$.
3.2. $\pi: 4x-3y-z-3=0$, $M_1(-4;\ 5;-4)$, $M_2(-1;-4;-4)$.
3.3. $\pi: 4x-4y+z+1=0$, $M_1(2;\ -4;2)$, $M_2(-4;5;0)$.
3.4. $\pi: 4x+2y-5z=0$, $M_1(-4;\ 4;-5)$, $M_2(-3;3;0)$.

3.5. $\pi: x-2y+5z+3=0,$ $M_1(2;\ -4;1),$ $M_2(-4;0;-1).$
3.6. $\pi: 4x+y-5z+5=0,$ $M_1(2;\ 2;\ 4),$ $M_2(3;4;-4).$
3.7. $\pi: -3x+4z+4=0,$ $M_1(5;\ 1;4),$ $M_2(0;3;2).$
3.8. $\pi: -2x+2y+2=0,$ $M_1(-5;\ 3;-2),$ $M_2(3;0;1).$
3.9. $\pi: -5x-5y+3z+4=0,$ $M_1(3;\ -5;-3),$ $M_2(3;-4;-1).$
3.10. $\pi: -x+5z+4=0,$ $M_1(-1;\ -5;1),$ $M_2(5;-1;3).$
3.11. $\pi: -5x-2y+2z-3=0,$ $M_1(3;2;-3),$ $M_2(2;-2;5).$
3.12. $\pi: 3y+3z-4=0,$ $M_1(2;\ -5;3),$ $M_2(-1;5;-3).$
3.13. $\pi: -4x+3y-2z+3=0,$ $M_1(4;\ -3;-5),$ $M_2(-1;0;4).$
3.14. $\pi: -3y-2z-5=0,$ $M_1(-4;\ 4;-3),$ $M_2(-2;2;3).$
3.15. $\pi: -3x+y+4=0,$ $M_1(-2;\ -5;0),$ $M_2(-3;-3;-2).$
3.16. $\pi: -x-4y-2z+5=0,$ $M_1(-1;\ -3;-1),$ $M_2(4;3;2).$
3.17. $\pi: 5x+5y-3z-2=0,$ $M_1(0;\ -1;-2),$ $M_2(2;0;3).$
3.18. $\pi: -5x+4y+3z-2=0,$ $M_1(3;\ -1;-1),$ $M_2(2;0;-2).$
3.19. $\pi: 2x+y+2=0,$ $M_1(-3;\ -5;1),$ $M_2(3;0;2).$
3.20. $\pi: -2x-2y-4z-1=0,$ $M_1(2;\ 0;4),$ $M_2(1;0;-1).$
3.21. $\pi: 3x-4y+z=0,$ $M_1(-4;\ 0;1),$ $M_2(1;5;3).$
3.22. $\pi: -2x-y-3=0,$ $M_1(-5;\ 1;1),$ $M_2(-2;-5;-1).$
3.23. $\pi: -x+5y+z-3=0,$ $M_1(2;\ 4;-2),$ $M_2(-1;-3;2).$
3.24. $\pi: 4x-4y+z+1=0,$ $M_1(2;\ -4;2),$ $M_2(-4;5;0).$
3.25. $\pi: -5x+4y-2z-3=0,$ $M_1(3;\ 3;-3),$ $M_2(5;-2;-4).$
3.26. $\pi: -x+y+3z+3=0,$ $M_1(-1;\ 2;-3),$ $M_2(4;2;3).$
3.27. $\pi: -2x+3y+2z+2=0,$ $M_1(-3;\ 1;-4),$ $M_2(-5;-2;4).$
3.28. $\pi: x-5y+z+2=0,$ $M_1(5;\ 4;4),$ $M_2(3;-5;-4).$
3.29. $\pi: 5x-y-2z-1=0,$ $M_1(-1;\ 0;2),$ $M_2(3;0;-1).$
3.30. $\pi: 2x-4y-3z+2=0,$ $M_1(4;\ -3;-3),$ $M_2(3;3;2).$

4. Даны прямая l и точка M Написать:

1) уравнение плоскости π, проходящей через прямую l и точку M;

2) уравнение плоскости τ, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l;

3) канонические уравнения прямой h, проходящей через точку M перпендикулярно к l.

4.1. l: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $M(2;0;2)$.

4.2. l: $\frac{x}{4}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{-4}$, $M(1;-1;-3)$.

4.3. l: $\frac{x}{25}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-10}$, $M(1;-3;1)$.

4.4. l: $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-1}{11}$, $M(-4;1;2)$.

4.5. l: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$, $M(-1;3;-1)$.

4.6. l: $\frac{x}{-25}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{10}$, $M(-1;0;0)$.

4.7. l: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-2}$, $M(-1;1;0)$.

4.8. l: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$, $M(3;2;-1)$.

4.9. l: $\frac{x+1}{18}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-6}$, $M(0;-1;0)$.

4.10. l: $\frac{x+2}{10}=\frac{y+1}{-11}=\frac{z+1}{-2}$, $M(-1;-3;-3)$.

4.11. l: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$, $M(-2;2;-4)$.

4.12. l: $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{-4}$, $M(-1;1;-1)$.

4.13. l: $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z+1}{-11}$, $M(2;1;-3)$.

4.14. l: $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z}{14}$, $M(1;3;0)$.

4.15. l: $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+2}{-14}=\frac{z+1}{5}$, $M(-1;-2;0)$.

4.16. l: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{-14}$, $M(0;1;-2)$.

4.17. l: $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{6}$, $M(1;0;-2)$.

4.18. l: $\frac{x+2}{9}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{6}$, $M(-1;-1;-2)$.

4.19. l: $\frac{x+2}{16}=\frac{y+2}{12}=\frac{z+2}{15}$, $M(2;1;-1)$.

4.20. l: $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{4}$, $M(-1;0;0)$.

4.21. l: $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-1}{-5}$, $M(1;2;0)$.

4.22. l: $\frac{x-1}{12}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{4}$, $\mathrm{M}(1;0;-5)$.

4.23. l: $\frac{x-2}{-7}=\frac{y}{-4}=\frac{z+2}{4}$, $M(1;-4;-1)$.

4.24. l: $\frac{x}{-5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{14}$, $M(-1;1;1)$.

4.25. l: $\frac{x-1}{-6}=\frac{y}{18}=\frac{z}{5}$, $M(1;1;-1)$.

4.26. l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$, $M(2;-5;0)$.

4.27. l: $\frac{x}{-6}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-2}{-18}$, $M(0;-1;1)$.

4.28. l: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{2}$, $M(-3;1;-2)$.

4.29. l: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-2}$, $M(-3;1;1)$.

4.30. l: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-2}{-14}$, $M(2;0;0)$.

5. Даны уравнения прямых l_1 и l_2.

1) убедиться в том, что прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся;

2) составить уравнение плоскости π, проходящей через l_1 параллельно l_2;

3) найти расстояние ρ между прямыми l_1 и l_2;

4) составить канонические уравнения общего перпендикуляра h прямых l_1 и l_2.

5.1. l_1: $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-1}{-5}$, l_2: $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-6}{2}$.

5.2. l_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$, l_2: $\frac{x+16}{-14}=\frac{y-13}{2}=\frac{z-7}{-5}$.

5.3. l_1: $\frac{x-1}{-9}=\frac{y-2}{12}=\frac{z}{-20}$, l_2: $\frac{x+6}{12}=\frac{y-3}{-16}=\frac{z+1}{21}$.

5.4. l_1: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$, l_2: $\frac{x-14}{14}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-5}$.

5.5. l_1: $\frac{x}{10}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{25}$, l_2: $\frac{x-23}{10}=\frac{y-38}{-25}=\frac{z-15}{-2}$.

5.6. l_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-12}$, l_2: $\frac{x-25}{8}=\frac{y}{-9}=\frac{z-2}{12}$.

5.7. l_1: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-2}{-12}$, l_2: $\frac{x+3}{12}=\frac{y-28}{-8}=\frac{z-7}{-9}$.

5.8. l_1: $\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{-2}$, l_2: $\frac{x-8}{6}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+17}{9}$.

5.9. l_1: $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{6}$, l_2: $\frac{x+13}{2}=\frac{y-12}{6}=\frac{z+3}{-3}$.

5.10. l_1: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$, l_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+8}{2}$.

5.11. l_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-8}$, l_2: $\frac{x-2}{7}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+11}{4}$.

5.12. l_1: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$, l_2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{-2}$.

5.13. l_1: $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2}$, l_2: $\frac{x+18}{7}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z}{6}$.

5.14. l_1: $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-6}$, l_2: $\frac{x-9}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+6}{-2}$.

5.15. l_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{12}=\frac{z+1}{12}$, l_2: $\frac{x-1}{11}=\frac{y+39}{-24}=\frac{z-2}{12}$.

5.16. l_1: $\frac{x-1}{-8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$, l_2: $\frac{x-12}{1}=\frac{y+9}{8}=\frac{z+11}{4}$.

5.17. $l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{14} = \frac{z+2}{5}$, $\quad l_2: \frac{x-15}{-5} = \frac{y+5}{-14} = \frac{z-5}{-2}$.

5.18. $l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$, $\quad l_2: \frac{x+7}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+17}{-2}$.

5.19. $l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$, $\quad l_2: \frac{x-10}{2} = \frac{y+11}{-5} = \frac{z-10}{14}$.

5.20. $l_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{8}$, $\quad l_2: \frac{x-4}{4} = \frac{y-9}{8} = \frac{z-13}{1}$.

5.21. $l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-8}$, $\quad l_2: \frac{x-9}{4} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-13}{1}$.

5.22. $l_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $\quad l_2: \frac{x-15}{10} = \frac{y+12}{2} = \frac{z-11}{11}$.

5.23. $l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-12} = \frac{z}{3}$, $\quad l_2: \frac{x-18}{-9} = \frac{y}{12} = \frac{z+7}{-8}$.

5.24. $l_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-8}$, $\quad l_2: \frac{x+1}{-7} = \frac{y-11}{4} = \frac{z+9}{-4}$.

5.25. $l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, $\quad l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

5.26. $l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z}{1}$, $\quad l_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-13}{-1} = \frac{z-11}{8}$.

5.27. $l_1: \frac{x+2}{-12} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{12}$, $\quad l_2: \frac{x-3}{9} = \frac{y-1}{-12} = \frac{z-29}{8}$.

5.28. $l_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{12}$, $\quad l_2: \frac{x-17}{3} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z}{-12}$.

5.29. $l_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-8}$, $\quad l_2: \frac{x-3}{8} = \frac{y-4}{9} = \frac{z-14}{4}$.

5.30. $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}$, $\quad l_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+9}{-1} = \frac{z-14}{8}$.

6. В ромб с диагоналями d_1 и d_2 вписан эллипс так, что больший из диаметров эллипса лежит на большей из диагоналей ромба. Сторона ромба в точке касания с эллипсом делится в отношении $n{:}\,m$. Вычислить:

1) координаты фокусов эллипса;

2) полуоси эллипса;

3) эксцентриситет эллипса;

4) длины фокальных радиусов, проведенных в точку касания;

5) угол между указанными фокальными радиусами с точностью до 1 градуса;

6) координаты точки касания в I-м квадранте.

Написать уравнения прямых, проходящих через указанную точку касания, и фокусы эллипса.

6.1. $d_1 = 80, d_2 = 16,\ \ n = 1, m = 7$.

6.2. $d_1 = 36, d_2 = 18, \quad n = 5, m = 4.$
6.3. $d_1 = 20, d_2 = 10, \quad n = 2, m = 3.$
6.4. $d_1 = 16, d_2 = 8, \quad n = 1, m = 3.$
6.5. $d_1 = 54, d_2 = 18, \quad n = 1, m = 8.$
6.6. $d_1 = 36, d_2 = 18, \quad n = 2, m = 7.$
6.7. $d_1 = 90, d_2 = 36, \quad n = 8, m = 1.$
6.8. $d_1 = 70, d_2 = 10, \quad n = 1, m = 4.$
6.9. $d_1 = 80, d_2 = 48, \quad n = 5, m = 3.$
6.10. $d_1 = 160, d_2 = 120, \quad n = 9, m = 11.$
6.11. $d_1 = 12, d_2 = 4, \quad n = 1, m = 1.$
6.12. $d_1 = 30, d_2 = 10, n = 1, m = 4.$
6.13. $d_1 = 140, d_2 = 20, n = 1, m = 9.$
6.14. $d_1 = 54, d_2 = 36, n = 4, m = 5.$
6.15. $d_1 = 80, d_2 = 16, n = 1, m = 7.$
6.16. $d_1 = 128, d_2 = 32, n = 1, m = 15.$
6.17. $d_1 = 72, d_2 = 18, n = 2, m = 7.$
6.18. $d_1 = 90, d_2 = 18, n = 5, m = 4.$
6.19. $d_1 = 80, d_2 = 10, n = 2, m = 3.$
6.20. $d_1 = 64, d_2 = 32, n = 5, m = 11.$
6.21. $d_1 = 48, d_2 = 16, n = 1, m = 7.$
6.22. $d_1 = 96, d_2 = 64, n = 5, m = 11.$
6.23. $d_1 = 40, d_2 = 30, n = 2, m = 3.$
6.24. $d_1 = 56, d_2 = 32, n = 1, m = 3.$
6.25. $d_1 = 250, d_2 = 300, n = 16, m = 9.$
6.26. $d_1 = 36, d_2 = 28, n = 1, m = 1.$
6.27. $d_1 = 144, d_2 = 18, n = 2, m = 7.$
6.28. $d_1 = 70, d_2 = 40, n = 4, m = 1.$
6.29. $d_1 = 180, d_2 = 108, n = 5, m = 13.$
6.30. $d_1 = 90, d_2 = 20, \quad n = 4, m = 1.$

7. Даны координаты вершин четырехугольника $ABCD$.

1) проверить без построения чертежа, что четырехугольник выпуклый;

2) в каком отношении диагонали делятся в точке пересечения?

7.1. $A(5; -1), \quad B(1; -1), \quad C(2; 5), \quad D(22; 13).$
7.2. $A(17; 6), \quad B(0; -3), \quad C(-16; -5), D(-4; 9).$
7.3. $A(-1; 7), \quad B(-14; 7), \quad C(17; -17), D(14; 0).$
7.4. $A(-1; 23), \quad B(12; 5), \quad C(6; -5), \quad D(-12; -1).$

7.5. $A(0;-3)$, $B(-10;-5)$, $C(-9;6)$, $D(0;5)$.
7.6. $A(-1;9)$, $B(-9;15)$, $C(-5;-3)$, $D(-2;1)$.
7.7. $A(2;8)$, $B(8;0)$, $C(-7;-10)$, $D(-16;-8)$.
7.8. $A(-1;2)$, $B(15;-5)$, $C(-11;-3)$, $D(-18;6)$.
7.9. $A(-3;-10)$, $B(6;-13)$, $C(5;-2)$, $D(-1;8)$.
7.10. $A(-2;-6)$, $B(2;-4)$, $C(4;12)$, $D(-6;12)$.
7.11. $A(-2;3)$, $B(11;16)$, $C(2;-9)$, $D(-16;-20)$.
7.12. $A(-12;-8)$, $B(-5;1)$, $C(12;0)$, $D(5;-9)$.
7.13. $A(-6;-12)$, $B(11;-10)$, $C(2;4)$, $D(-16;8)$.
7.14. $A(-6;-14)$, $B(12;-10)$, $C(1;0)$, $D(-15;8)$.
7.15. $A(-4;1)$, $B(-4;-6)$, $C(2;-5)$, $D(20;12)$.
7.16. $A(4;3)$, $B(-3;4)$, $C(-4;-5)$, $D(5;-4)$.
7.17. $A(3;-5)$, $B(-11;-17)$, $C(0;4)$, $D(13;19)$.
7.18. $A(-9;-1)$, $B(-1;8)$, $C(27;-10)$, $D(7;-16)$.
7.19. $A(3;13)$, $B(10;-3)$, $C(-6;-5)$, $D(-10;7)$.
7.20. $A(6;8)$, $B(2;8)$, $C(-5;-14)$, $D(6;-28)$.
7.21. $A(0;1)$, $B(2;-15)$, $C(-21;-6)$, $D(-5;6)$.
7.22. $A(6;4)$, $B(20;-7)$, $C(-4;-6)$, $D(-24;4)$.
7.23. $A(13;13)$, $B(3;-2)$, $C(-20;-9)$, $D(-5;6)$.
7.24. $A(-10;0)$, $B(1;7)$, $C(6;-8)$, $D(-8;-11)$.
7.25. $A(-2;-2)$, $B(-6;4)$, $C(4;4)$, $D(18;-12)$.
7.26. $A(-12;-19)$, $B(3;-14)$, $C(10;14)$, $D(-5;2)$.
7.27. $A(-10;-3)$, $B(-3;10)$, $C(18;4)$, $D(4;-4)$.
7.28. $A(-10;2)$, $B(-7;-4)$, $C(8;-7)$, $D(0;3)$.
7.29. $A(-1;12)$, $B(-5;1)$, $C(-10;-24)$, $D(-2;-2)$.
7.30. $A(2;-1)$, $B(1;2)$, $C(8;5)$, $D(19;-4)$.

8. Дана гипербола $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

1) построить график;

2) привести уравнение к каноническому виду и вычислить параметры гиперболы;

3) найти координаты фокусов в исходной системе координат.

8.1. $y = \frac{8x-38}{x-5}$. 8.2. $y = \frac{-8x+80}{x-9}$. 8.3. $y = \frac{2x+34}{x+8}$.
8.4. $y = \frac{7x-54}{x-8}$. 8.5. $y = \frac{-5x-17}{x+7}$. 8.6. $y = \frac{2x+4}{x+1}$.
8.7. $y = \frac{-2x+26}{x-4}$. 8.8. $y = \frac{-3x+53}{x-7}$. 8.9. $y = \frac{-8x+18}{x-2}$.
8.10. $y = \frac{-6x-22}{x+4}$. 8.11. $y = \frac{8x-54}{x-7}$. 8.12. $y = \frac{-9x+27}{x-1}$.

8.13. $y = \frac{-7x-24}{x+6}$. 8.14. $y = \frac{-3x+35}{x-1}$. 8.15. $y = \frac{2x+48}{x+8}$.
8.16. $y = \frac{-5x+17}{x+3}$. 8.17. $y = \frac{-4x-4}{x+3}$. 8.18. $y = \frac{-9x+44}{x-4}$.
8.19. $y = \frac{8x+42}{x+3}$. 8.20. $y = \frac{-3x+39}{x-7}$. 8.21. $y = \frac{-3x+14}{x+6}$.
8.22. $y = \frac{-6x-4}{x+6}$. 8.23. $y = \frac{-8x+72}{x-8}$. 8.24. $y = \frac{-4x+38}{x-5}$.
8.25. $y = \frac{4x-18}{x-9}$. 8.26. $y = \frac{-2x-8}{x+5}$. 8.27. $y = \frac{-8x+42}{x-5}$.
8.28. $y = \frac{7x+38}{x+4}$. 8.29. $y = \frac{8x-54}{x-9}$. 8.30. $y = \frac{-4x+20}{x-3}$.

9. Найти координаты фокуса и указать систему координат, в которой уравнение заданной параболы имеет канонический вид.

9.1. $y = 2{,}5x^2 + 5x + 4{,}5$. 9.2. $y = x^2 - 3x + 2$.
9.3. $y = -1{,}5x^2 - 3x - 2{,}5$. 9.4. $y = -0{,}5x^2 + 2x + 6$.
9.5. $y = 0{,}5x^2 - 4x + 8$. 9.6. $y = 2x^2 + 6x + 4$.
9.7. $y = -0{,}5x^2 - 2x - 0{,}5$. 9.8. $y = -x^2 + 2x + 8$.
9.9. $y = -0{,}5x^2 + x + 7{,}5$. 9.10. $y = x^2 + 4x + 3$.
9.11. $y = -1{,}5x^2 - 1{,}5x + 3$. 9.12. $y = 2{,}5x^2 - 2{,}5x - 5$.
9.13. $y = 0{,}5x^2 - 3{,}5x + 5$. 9.14. $y = x^2 + 4x + 6$.
9.15. $y =- x^2 - 2x - 6$. 9.16. $y = -0{,}5x^2 + x - 3{,}5$.
9.17. $y = -x^2 + 2x - 2$. 9.18. $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$.
9.19. $y = x^2 - 4x - 5$. 9.20. $y = -2x^2 - 8x - 6$.
9.21. $y = 0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3$. 9.22. $y = -x^2 - 4x - 9$.
9.23. $y = -0{,}5x^2 - 2x - 6$. 9.24. $y =- x^2 + 5x - 4$.
9.25. $y = 2{,}5x^2 - 5x + 5{,}5$. 9.26. $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 6$.
9.27. $y = -2{,}5x^2 - 5x - 3{,}5$. 9.28. $y = 0{,}5x^2 + 3x + 4$.
9.29. $y = 0{,}5x^2 - 2x + 5$. 9.30. $y = -0{,}5x^2 + x - 5{,}5$.

10. Даны три точки A, B, C:

1) проверить, что эти три точки не лежат на одной прямой, т.е. образуют треугольник;

2) вычислить параметры треугольника (площадь, периметр, величину угла (C) с точностью до одного градуса);

3) написать уравнение описанной окружности;

4) написать уравнение биссектрисы угла (C);

5) написать уравнения двух перпендикуляров, опущенных из точек A и B на биссектрису угла (C), и вычислить расстояние между ними.

10.1. $A(15;-13)$, $B(7;-13)$, $C(14;14)$.
10.2. $A(24;1)$, $B(18;7)$, $C(12;-5)$.
10.3. $A(6;21)$, $B(0;21)$, $C(-1;14)$.
10.4. $A(-1;-2)$, $B(-19;-2)$, $C(-10;-5)$.
10.5. $A(1;-3)$, $B(-17;9)$, $C(-10;8)$.
10.6. $A(1;-8)$, $B(7;-2)$, $C(13,-4)$.
10.7. $A(-18;2)$, $B(-10;-6)$, $C(-4;0)$.
10.8. $A(-4;5)$, $B(-12;5)$, $C(-8{,}7)$.
10.9. $A(-15;14)$, $B(-7;-10)$, $C(-5;4)$.
10.10. $A(-6;-19)$, $B(0;-19)$, $C(1;-12)$.
10.11. $A(-15;13)$, $B(-7;13)$, $C(-14;14)$.
10.12. $A(-23;-2)$, $B(-5;-2)$, $C(-14;1)$.
10.13. $A(-4;-22)$, $B(2;-22)$, $C(-1;-13)$.
10.14. $A(11;6)$, $B(17;0)$, $C(3;-2)$.
10.15. $A(-22;8)$, $B(-16;2)$, $C(-10;14)$.
10.16. $A(5;21)$, $B(-13;9)$, $C(-2;12)$.
10.17. $A(7;2)$, $B(-9;18)$, $C(-5;6)$.
10.18. $A(14;1)$, $B(20;-5)$, $C(8;-1)$.
10.19. $A(15;11)$, $B(21;11)$, $C(14;12)$.
10.20. $A(-3;20)$, $B(3;20)$, $C(4;13)$.
10.21. $A(-4;9)$, $B(-12;-15)$, $C(-2;-5)$.
10.22. $A(2;-18)$, $B(20;-12)$, $C(6;-14)$.
10.23. $A(16;16)$, $B(8;16)$, $C(7;13)$.
10.24. $A(-2;-5)$, $B(-8;-5)$, $C(-9;-6)$.
10.25. $A(18;9)$, $B(6;3)$, $C(10;3)$.
10.26. $A(7;11)$, $B(-3;1)$, $C(1;7)$.
10.27. $A(-16;-4)$, $B(2;-10)$, $C(-2;-6)$.
10.28. $A(-5;-19)$, $B(-13;-19)$, $C(-9;-11)$.
10.29. $A(3;-13)$, $B(21;-1)$, $C(10;-4)$.
10.30. $A(8;-18)$, $B(0;6)$, $C(10;-4)$.

11. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

11.1. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 24, \\ 8x_1 - 9x_2 + x_3 = -126, \\ 9x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -33. \end{cases}$ 11.2. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 - x_3 = -41, \\ -7x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -27, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = -41. \end{cases}$

11.3. $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 35, \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = -18, \\ 4x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 39. \end{cases}$ 11.4. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 9x_3 = -{,}3 \\ -9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -1, \\ -7x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 40. \end{cases}$

11.5. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 6x_3 = -63, \\ -7x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 63, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

11.6. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -38, \\ 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 8, \\ -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 75. \end{cases}$

11.7. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -64, \\ -7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 50, \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

11.8. $\begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 8x_3 = -88, \\ -6x_1 + 8x_2 - x_3 = -54, \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 81. \end{cases}$

11.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = -48, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

11.10. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 51, \\ 3x_1 - 7x_2 - 9x_3 = -36, \\ 8x_1 + 5x_2 - x_3 = -84. \end{cases}$

11.11. $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 = -36, \\ -8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 41, \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -31. \end{cases}$

11.12. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 29, \\ -7x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 157, \\ -6x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 120. \end{cases}$

11.13. $\begin{cases} -5x_1 + 8x_2 - x_3 = 2, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 = 49, \\ -7x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 11. \end{cases}$

11.14. $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 - x_3 = 51, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 50, \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 56. \end{cases}$

11.15. $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 34, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 9x_1 - 2x_2 - x_3 = -10. \end{cases}$

11.16. $\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 7x_3 = 35, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -15, \\ -6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -41. \end{cases}$

11.17. $\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 115, \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -14, \\ 8x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 10; \end{cases}$

11.18. $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 15, \\ 9x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 107, \\ -7x_1 - 9x_2 + 8x_3 = -146. \end{cases}$

11.19. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ -4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 24, \\ -7x_1 + 2x_2 + x_3 = -16. \end{cases}$

11.20. $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 28, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -86, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$

11.21. $\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 - x_3 = 17; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ -6x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 42. \end{cases}$

11.22. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - 8x_3 = 14, \\ -9x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 66, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20. \end{cases}$

11.23. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 9x_3 = 21, \\ 3x_1 - 7x_2 - x_3 = -39, \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6. \end{cases}$

11.24. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -2, \\ 9x_1 + x_2 - 7x_3 = 56, \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

11.25. $\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 37, \\ 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 44, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 66. \end{cases}$

11.26. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 = -17, \\ 8x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 21, \\ 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -109. \end{cases}$

11.27. $\begin{cases} -7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 28, \\ 6x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 123, \\ -8x_1 - 6x_2 - 9x_3 = -94. \end{cases}$

11.28. $\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 36, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

11.29. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0, \\ -7x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -21, \\ -6x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -6. \end{cases}$

11.30. $\begin{cases} -9x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 19, \\ -4x_1 - 6x_2 - 7x_3 = -95, \\ 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -43. \end{cases}$

12. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

12.1. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -51, \\ -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -21, \\ -x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = 46, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -26. \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} -4x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 57, \\ 7x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -75, \\ 5x_1 - 6x_2 + 9x_3 - 9x_4 = -111, \\ -2x_1 - 9x_2 - x_3 - 5x_4 = -65. \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} -x_1 - 8x_2 - 8x_3 - x_4 = 38, \\ -9x_1 - 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 70, \\ -6x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 65, \\ -7x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 29. \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 8x_4 = -67, \\ 7x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 8x_4 = -175, \\ -3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 23x_4 = -243. \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 51, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 41, \\ -4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -16, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 14x_4 = 76. \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} -6x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -36, \\ 6x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 4, \\ 7x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 35, \\ 7x_1 + 13x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -40, \\ 7x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 75, \\ -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -11, \\ -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 24. \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 26, \\ -5x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -55, \\ 7x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 77, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 48. \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -100, \\ -9x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 51, \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -27. \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -149, \\ -6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 = -85, \\ -3x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -45, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 45. \end{cases}$

12.11. $\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + x_4 = -41, \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 8x_4 = -13, \\ 5x_1 + 8x_2 - 8x_3 - x_4 = -44. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} -4x_1 - 9x_2 - x_3 - 8x_4 = 5, \\ -9x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 45, \\ 7x_1 - 8x_2 - 7x_3 + x_4 = -80, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -10. \end{cases}$

12.13. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - x_3 - x_4 = -22, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = -6, \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -12, \\ -6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 24. \end{cases}$

12.14. $\begin{cases} -6x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -17, \\ -2x_1 - 9x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -75, \\ -9x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 12, \\ -4x_1 - 6x_2 - 4x_3 + x_4 = -68. \end{cases}$

12.15. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 103, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -18, \\ -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -120. \end{cases}$

12.16. $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -48, \\ -4x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 56, \\ -8x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 39, \\ -5x_1 + 3x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 47. \end{cases}$

12.17. $\begin{cases} -8x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 60, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 = -46, \\ -7x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -11, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

12.18 . $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -21, \\ -6x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 72, \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -76, \\ 7x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 52. \end{cases}$

12.21. $\begin{cases} -7x_1+3x_2-6x_3-5x_4=21, \\ 6x_1-8x_2-7x_3-3x_4=-130, \\ 6x_1-9x_2-6x_3-3x_4=-132, \\ -6x_1+4x_2-5x_3-7x_4=40. \end{cases}$

12.22. $\begin{cases} -3x_1-6x_2+x_3-5x_4=37, \\ 7x_1-8x_2+6x_3+2x_4=58, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-7x_4=47, \\ 8x_1+2x_2-8x_3-2x_4=100. \end{cases}$

12.23. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+6x_3-5x_4=-63, \\ 2x_1+7x_2+9x_3-8x_4=-79, \\ -6x_1+7x_2-3x_3-5x_4=0, \\ 7x_1+4x_2+7x_3+7x_4=14. \end{cases}$

12.24. $\begin{cases} 4x_1-8x_2-5x_3-9x_4=96, \\ x_1+6x_2-8x_3-8x_4=32, \\ -7x_1+8x_2+x_3-3x_4=-10, \\ 2x_1+5x_2+8x_3+7x_4=-87. \end{cases}$

12.25. $\begin{cases} -9x_1+5x_2-6x_3-9x_4=-1, \\ -3x_1-9x_2-9x_3-6x_4=60, \\ -x_1+5x_2+5x_3-8x_4=60, \\ 5x_1-8x_2+x_3+9x_4=-6. \end{cases}$

12.26. $\begin{cases} -3x_1+3x_2+7x_3-6x_4=62, \\ -3x_1+9x_2-2x_3+x_4=77, \\ 8x_1+x_2+4x_3-x_4=12, \\ -3x_1-8x_2+4x_3-7x_4=-40. \end{cases}$

12.27. $\begin{cases} 9x_1-4x_2-2x_3-5x_4=25, \\ 5x_1-3x_2+5x_3-9x_4=-41, \\ 2x_1-8x_2+4x_3+7x_4=48, \\ -x_1-7x_2+5x_3+9x_4=41. \end{cases}$

12.28. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=-7, \\ 7x_1+x_2+5x_3-7x_4=-23, \\ -6x_1-4x_2-x_3+3x_4=4, \\ -x_1+6x_3-7x_4=-26. \end{cases}$

12.29. $\begin{cases} -5x_1-4x_2-x_3+2x_4=42, \\ -2x_1+6x_2-9x_3+x_4=118, \\ -x_1-x_2+x_3+5x_4=20, \\ -5x_1-2x_2-8x_3+2x_4=111. \end{cases}$

12.30. $\begin{cases} -3x_1+6x_2+2x_3-9x_4=35, \\ 8x_1-9x_2+4x_3-8x_4=-121, \\ 4x_1+7x_2-x_3-x_4=43, \\ 9x_1+4x_2+5x_3-18x_4=-43. \end{cases}$

13. Вычислить определитель.

13.1. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

13. 2. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 5 \\ -5 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

13.3. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ -5 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

13. 4. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

13.5. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

13.6. $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

13.7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

13.8. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

13.9. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

13.10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

13.11. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ 13.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

13.13. $\begin{vmatrix} -5 & -2 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \\ -5 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 13.14. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

13.15. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ 13.16. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

13.17. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -5 & -5 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 13.18. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

13.19. $\begin{vmatrix} -4 & -5 & -1 & 4 \\ 4 & -5 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ 13.20. $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

13.21. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ 13.22. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

13.23. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 13.24. $\begin{vmatrix} -4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

13.25. $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 13.26. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

13.27. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ 13.28. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

13.29. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ 13.30. $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

14. Найти обратную матрицу.

14.1. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & -4 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ 14.2. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

14.3. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 1 & -5 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 14.4. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

14.5. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ 14.6. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

14.7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ 14.8. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -6 & 1 & -3 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

14.9. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & -6 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 14.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -6 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

14.11. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ 14.12. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 5 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

14.13. $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 14.14. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14.15. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ 14.16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

14.17. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 14.18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

14.19. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -6 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 14.20. $\begin{pmatrix} -6 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

14.21. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ 14.22. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

14.23. $\begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 14.24. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

14.25. $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 14.26. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

14.27. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ 14.28. $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -3 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

14.29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 14.30. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

15. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы.

15.1. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 15.2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ 15.3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

15.4. $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 15.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ 15.6. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

15.7. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ 15.8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ 15.9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

15.10. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ 15.11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 15.12. $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

15.13. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 15.14. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 15.15. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

15.16. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 15.17. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 15.18. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

15.19. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 15.20. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 15.21. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -4 & -1 & -4 \\ -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

15.22. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 15.23. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 15.24. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

15.25. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 15.26. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -5 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 15.27. $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

15.28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 15.29. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ 15.30. $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Раздел 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Примеры решения задач

Напомним, что графики функций а) $f(-x)$, б) $-f(x)$, в) $f(x-a)$, г) $f(x+A)$, д) $f(kx)$, е) $|f(x)|$ получаются из графика функции $f(x)$ с помощью следующих геометрических преобразований: а) отражения относительно оси OY, б) отражения относительно оси OX, в) сдвига вдоль оси OX на a единиц, г) сдвига вдоль оси OY на A единиц, д) гомотетии вдоль оси OX в $1/k$ раз $(k \neq 0)$, е) отражения относительно оси OX той части графика, которая лежит ниже этой оси.

Задача 1. Используя элементарные преобразования, построить график функции $y = \left|x^2 - 3x\right| + 2$.

Решение. Сначала строим график параболы $f(x) = x^2 - 3x$ (рис. 1). Затем применяем последовательно преобразования «е» и «г» - сдвиг по оси на 2 единицы (рис. 1).

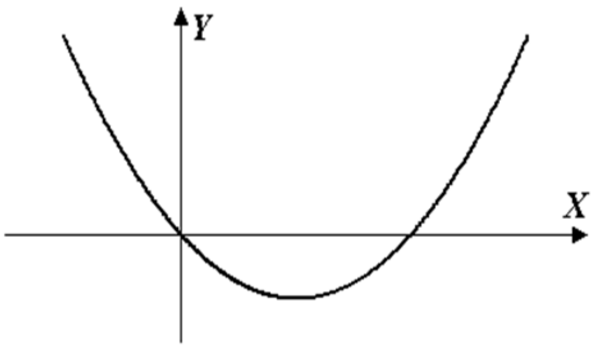


Рис. 1

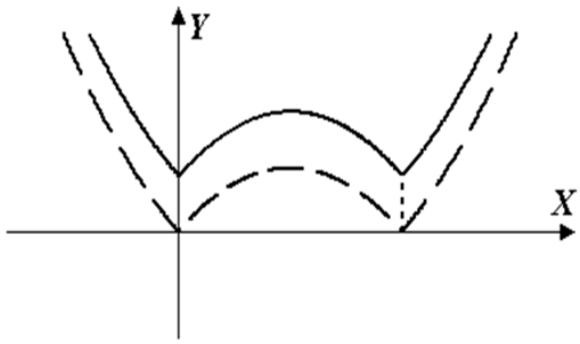


Рис. 2

Приведем некоторые арифметические формулы, которые можно доказать методом математической индукции:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \qquad (2)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (3)$$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}, \qquad (a\neq 1). (4)$$

Задача 2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Решение. Используя формулу (3) получим

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $1/3$.

Напомним, что порядком малости бесконечно малой величины (далее б.м.) $\beta(x)$ относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ $(x\to a)$ называется такое натуральное число n, что существует, и предел отношения $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)^n}$ при $x\to a$ не равен 0. Обозначим через $V_\alpha(\beta)$ порядок малости б.м. β относительно б.м. α.

Тогда

$$V_\alpha(\beta_1\beta_2)=V_\alpha(\beta_1)+V_\alpha(\beta_2) \qquad (5)$$

для любых б.м. β_1, β_2, для которых определены порядки малости относительно α. Действительно, если $n_1=V_\alpha(\beta_1)$, $n_2=V_\alpha(\beta_2)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha^{n_1+n_2}}=\lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\alpha^{n_1}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_2}{\alpha^{n_2}}\neq 0,$$

что доказывает равенство (5).

Задача 3. Определить порядок малости б.м. $\beta(x)=(\cos 2x-$

$-1)(e^x - - e^{-x})(\sin x - \mathrm{tg} x)$ относительно $\alpha(x) = x$ при $x \to 0$.

Решение. $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$. Так как $V_x(\sin x) = 1$ согласно первому замечательному пределу, то $V_x(\cos 2x - 1) = V_x(\sin x) + + V_x(\sin x) = = 2$. Далее, $e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$, т. к. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$, то $V_x(e^x - e^{-x}) = 1$. Функцию $\sin x - \mathrm{tg} x$ преобразуем так: $\sin x - \mathrm{tg}\, x = = \frac{1}{\cos x}(\cos x - 1)\sin x$. Уже доказано, что $V_x(\cos x - 1) = 2$. Так как $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$ и $V_x(\sin x) = 1$, то $V_x(\sin x - \mathrm{tg}\, x) = 2 + 1 = 3$ ввиду равенства (1). Окончательно

$$V_x(\beta) = V_x(\cos 2x - 1) + V_x(e^x - e^{-x}) + V_x(\sin x - \mathrm{tg}\, x) = 2 + + 1 + 3 = 6.$$

Ответ: порядок малости $\beta(x)$ относительно x $(x \to 0)$ равен 6.

<u>Задача 4</u>. Вычислить $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

Решение. Обозначим $\alpha(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$, $\beta(x) = \frac{sinx}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \frac{0^2 - 2\cdot 0 + 3}{0^2 - 3\cdot 0 + 2} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \beta(x) = 1$$

в силу непрерывности функции $\alpha(x)$ и первого замечательного предела. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\alpha(x)^{\beta(x)}\right) = \lim_{x\to 0} [\beta(x) \ln \alpha(x)] = 1 \cdot \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{3}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x)^{\beta(x)} = e^{\ln\frac{3}{2}} = \frac{3}{2},$$

где использована непрерывность функций $\ln x$ и e^x.

Ответ: 3/2.

<u>Задача 5</u>. Локализовать какой-либо корень уравнения $e^x = x + 2$ с точностью до 0,1.

Решение. Локализовать корень x_0 с точностью до ε – значит найти такое число x^*, что $x_0 \in (x^* - \varepsilon,\ x^* + \varepsilon)$. Тогда $x_0 \approx x^*$ с точностью ε. Заметим, что

$$e^x|_{x=0} < (x+2)\,|_{x=0} \text{ и } e^x|_{x=2} < (x+2)\,|_{x=2}\,.$$

Так как функции e^x и $x + 2$ непрерывны, то по теореме Больцано-Коши существует корень $x_0 \in (0, 2)$ уравнения $e^x = x + 2$. Для локализации этого корня будем использовать метод дихотомии (деления пополам). Вычисления сведем в таблицу.

x	0	2	1	1,5	1,25	1,125	…
e^x	1	7,39	2,72	4,48	3,49	3,08	…
$x+2$	2	4	3	3,5	3,25	3,125	…
$e^x\ ?\ x+2$	$<$	$>$	$<$	$>$	$>$	$<$	…

В таблице, начиная со столбца $x = 1$, выбор значения осуществляется по правилу $x = (a + b)/2$, где a, b - значения переменной x в предыдущих столбцах с условием, что неравенства в последней строке, соответствующие a и b, - разного смысла и разность $|b - a|$ при этом наименьшая. Так как $x_0 \in (1{,}125; 1{,}25)$ и интервал $(1{,}125; 1{,}25)$ содержится в интервале $(1{,}15 - 0{,}1;\ 1{,}15 + 0{,}1)$, то $x^* = 1{,}15$ - искомая точка.

Ответ: один из корней уравнения $e^x = x + 2$ содержится в интервале $(1{,}15 - 0{,}1;\ 1{,}15 + 0{,}1)$.

Задания

1. Для заданной функции $f(x)$ и числа x_0:

1) найти область допустимых значений (ОДЗ) функции $f(x)$;

2) элементарными преобразованиями (см. задачу 1) построить график функции $f(x)$;

3) если x_0 принадлежит ОДЗ, то найти число δ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < 0{,}1$, как только $|x - x_0| < \delta$; если же x_0 не принадлежит ОДЗ, то найти число δ такое, что $|f(x)| > 50$, как только $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

1.1. $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, $x_0 = -1$.

1.2. $f(x) = \sin\left|2x + \frac{\pi}{3}\right|$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

1.3. $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$, $x_0 = 0$.

1.4. $f(x) = \frac{|x-1|}{x+1}$, $x_0 = -1$.

1.5. $f(x) = \sin\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right|$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

1.6. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x_0 = 2$.

1.7. $f(x) = \frac{x-1}{|x+1|}$, $x_0 = -1$.

1.8. $f(x) = \sin\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1.9. $f(x) = x^2 + |3x - 2|$, $x_0 = 1$.

1.10. $f(x)=\frac{|x|-1}{x+1}$, $x_0=1$.
1.11. $f(x)=\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.
1.12. $f(x)=|x^2+3x|-2$, $x_0=-2$.
1.13. $f(x)=\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$, $x_0=2$.
1.14. $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$, $x_0=-\frac{2\pi}{3}$.
1.15. $f(x)=|x^2+5x-6|$, $x_0=0$.
1.16. $f(x)=\frac{|x+2|}{x-2}$, $x_0=2$.
1.17. $f(x)=\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|$, $x_0=0$.
1.18. $f(x)=x^2+5|x|-6$, $x_0=-1$.
1.19. $f(x)=\frac{x+2}{|x+2|}$, $x_0=2$.
1.20. $f(x)=\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.
1.21. $f(x)=x^2-|5x-6|$, $x_0=1$.
1.22. $f(x)=\frac{|x|+2}{x-2}$, $x_0=3$.
1.23. $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2|\mathrm{x}|\right)$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$.
1.24. $f(x)=|x^2+5x|-6$, $x_0=-3$.
1.25. $f(x)=\frac{x+2}{|x|-2}$, $x_0=2$.
1.26. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $x_0=0$.
1.27. $f(x)=\mathrm{tg}\,|x|$, $x_0=0$.
1.28. $f(x)=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$, $x_0=2$.
1.29. $f(x)=e^{-|x|}$, $x_0=0$.
1.30. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x_0=1$.

2. Вычислить предел последовательности.

2.1. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
2.2. $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.
2.3. $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)-\frac{2n+3}{2}$.
2.4. $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.
2.5. $\frac{1}{\sqrt{9n^4+1}}\sum_{k=1}^{n}(k+1)$.
2.6. $\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.
2.7. $\frac{1}{n+3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-\mathrm{n}$.
2.8. $\frac{1+4+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.
2.9. $\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.
2.10. $\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(n-1)(3n)!}$.
2.11. $\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.
2.12. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k/\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$.
2.13. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+3)$.
2.14. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2k+1)$.

2.15. $\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$.

2.16. $\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

2.17. $\frac{2}{3}-\frac{1}{(n+2)^3}\sum_{k=1}^{n} k$

2.18. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k+2^k}{6^k}$.

2.19. $\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(3k+2)$.

2.20. $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

2.21. $\frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$.

2.22. $\sum_{k=1}^{n}(2^k+1)/4^k$.

2.23. $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(5n-3)$.

2.24. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k+5^k}{10^k}$.

2.25. $\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

2.26. $\frac{5^{n+2}+3^{n+2}}{5^n+3^n}$.

2.27. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

2.28. $\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}$.

2.29. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$.

2.30. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$.

3. Дана числовая последовательность α_n. Необходимо:

1) исследовать α_n на монотонность;

2) найти $A=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$;

3) указать натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, начиная с которого выполняется неравенство $|\alpha_n-A|<\varepsilon$.

3.1. $\frac{3-n^2}{1+2n^2}$. 3.2. $\frac{4n-1}{2n+1}$. 3.3. $\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$.

3.4. $-\frac{5n}{n+1}$. 3.5. $\frac{4+2n}{1-3n}$. 3.6. $\frac{5n+15}{6-n}$.

3.7. $\frac{1+3n}{6-n}$. 3.8. $\frac{2n+1}{7n-1}$. 3.9. $\frac{7n+4}{2n+1}$.

3.10. $\frac{2n-5}{3n+1}$. 3.11. $\frac{n+1}{1-2n}$. 3.12. $\frac{2n+1}{3n-5}$.

3.13. $\frac{3n-2}{2n+1}$. 3.14. $\frac{2n-1}{2-3n}$. 3.15. $\frac{3n-1}{2n+1}$.

3.16. $\frac{8-3n^3}{1+2n^3}$. 3.17. $\frac{n+1}{7n-1}$. 3.18. $\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$.

3.19. $\frac{1-2n^3}{n^3+3}$. 3.20. $\frac{3n^2}{2-n^2}$. 3.21. $\frac{3n-1}{5n+1}$.

3.22. $\frac{4n-3}{2n+1}$. 3.23. $\frac{5n+1}{3n-5}$. 3.24. $\frac{4n^3}{n^3+1}$.

3.25. $\frac{9-n^3}{1+2n^3}$. 3.26. $\frac{4n-3}{2n+1}$. 3.27. $\frac{n}{3n-1}$.

3.28. $\frac{3n^3}{n^3-2}$. 3.29. $\frac{2-3n^2}{5n^2+4}$. 3.30. $\frac{3n^3+2}{4n^3-1}$.

4. Вычислить предел последовательности.

4.1. $\left(\frac{3n^2+4n}{3n^2-2n}\right)^{2n+5}$. 4.2. $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$. 4.3. $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

4.4. $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$. 4.5. $\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$. 4.6. $\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.

4.7. $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n^2}$. 4.8. $\left(\frac{10n-3}{10n+1}\right)^{2n+1}$. 4.9. $\left(\frac{n^2+21n-7}{n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

4.10. $\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$. 4.11. $\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{2n-1}$. 4.12. $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

4.13. $\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$. 4.14. $\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+2}\right)^{n+3}$. 4.15. $\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

4.16. $\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n}\right)^{-n+1}$. 4.17. $\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. 4.18. $\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

4.19. $\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$. 4.20. $\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{n^2}$. 4.21. $\left(\frac{2n^2-3n+7}{2n^2-5n+1}\right)^{-n^2}$.

4.22. $\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$. 4.23. $\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$. 4.24. $\left(\frac{n-7}{n+5}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

4.25. $\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$. 4.26. $\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n-4}$. 4.27. $\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{-n^2}$.

4.28. $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+2}$. 4.29. $\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{6n+1}$. 4.30. $\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+4}$.

5. Вычислить предел функции.

5.1. $\lim_{x\to-1}\frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$. 5.2. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

5.3. $\lim_{x\to-3}\frac{(2x^2+7x+3)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 5.4. $\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

5.5. $\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 5.6. $\lim_{x\to-1}\frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$.

5.7. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1-3x}{x^5+x}$. 5.8. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

5.9. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+x+2}$. 5.10. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

5.11. $\lim_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$. 5.12. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x+1}$.

5.13. $\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$. 5.14. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

5.15. $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$. 5.16. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^4-2x+1}$.

5.17. $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2x^3-x^2-1}$. 5.18. $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

5.19. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$. 5.20. $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

5.21. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. 5.22. $\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

5.23. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$. 5.24. $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

5.25. $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

5.26. $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2+3x}{(2x^2-x+1)^2}$.

5.27. $\lim_{x\to1}\frac{2x^4-x^2-1}{x^4-1}$.

5.28. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x-2}$.

5.29. $\lim_{x\to-1}\frac{x+x^2}{x^3-3x-2}$.

5.30. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$.

6. Вычислить предел функции.

6.1. $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

6.2. $\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt{x}}$.

6.3. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

6.4. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

6.5. $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

6.6. $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{4-\sqrt{x}}$.

6.7. $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

6.8. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-1-x}{x}$.

6.9. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$.

6.10. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

6.11. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$.

6.12. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$.

6.13. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$.

6.14. $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

6.15. $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

6.16. $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

6.17. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{11x-1}}{\sqrt[3]{x}}$.

6.18. $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt{x}-4)^{\frac{2}{3}}}$.

6.19. $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

6.20. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

6.21. $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

6.22. $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{8+x^3}}{2-\sqrt{x+6}}$.

6.23. $\lim_{x\to-8}\frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

6.24. $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{9+2x}-5}$.

6.25. $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$.

6.26. $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$.

6.27. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$.

6.28. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

6.29. $\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sqrt[4]{x}-1}$.

6.30. $\lim_{x\to16}\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-2}$.

7. Вычислить предел выражения $[\alpha(x)]^{\beta(x)}$ при $x\to0$.

7.1. $\lim_{x\to0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

7.2. $\lim_{x\to0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1-\cos\pi x}$.

7.3. $\lim_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$. 7.4. $\lim_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

7.5. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$. 7.6. $\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.7. $\lim_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$. 7.8. $\lim_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

7.9. $\lim_{x\to 0}(6-5\sec x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 7.10. $\lim_{x\to 0}\left(2-5^{\sin x^3}\right)^{\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{x}}$.

7.11. $\lim_{x\to 0}(3-2\sec x)^{\operatorname{cosec} x^3}$. 7.12. $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

7.13. $\lim_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 7.14. $\lim_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$.

7.15. $\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 3x}}$. 7.16. $\lim_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$.

7.17. $\lim_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{\frac{3}{x^2\sin x}}$. 7.18. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3^x}{x^3+2^x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x}}$.

7.19. $\lim_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\right)^{2\operatorname{cosec} x}$. 7.20. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

7.21. $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\,(\cos x-\cos 2x)\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$. 7.22. $\lim_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7.23. $\lim_{x\to 0}(5-4\sec x)^{(\operatorname{cosec} 3x)^2}$. 7.24. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.25. $\lim_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^{x\left(\operatorname{cosec}\sqrt[3]{x}\right)^4}$. 7.26. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.27. $\lim_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$. 7.28. $\lim_{x\to 0}(x^2+1)^{\frac{2}{\sin x}}$.

7.29. $\lim_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^2)}}$. 7.30. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Определить порядок малости бесконечно малой величины $\beta(x)$ относительно $\alpha(x)=x$ при $x\to 0$.

8.1. $\beta(x)=\ln(e-x^2)-1$. 8.2. $\beta(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$.

8.3. $\beta(x)=7^{2x}-5^{3x}$. 8.4. $\beta(x)=\sin 3x-\sin 5x$.

8.5. $\beta(x)=e^x-e^{-x}$. 8.6. $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$.

8.7. $\beta(x)=\sin\left(2\pi(x+10)\right)$. 8.8. $\beta(x)=\sin(e^{3x}-1)$.

8.9. $\beta(x)=\cos 7x-\cos 3x$. 8.10. $\beta(x)=\operatorname{tg} x\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$.

8.11. $\beta(x)=\ln(1-\arcsin 7x^2)$. 8.12. $\beta(x)=e^x+e^{-x}-2$.

8.13. $\beta(x)=(e^{\pi x}-1)\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)$. 8.14. $\beta(x)=\operatorname{tg}(e^{2x}-1)$.

8.15. $\beta(x)=\sin 3x\,(1-\cos 3x)$. 8.16. $\beta(x)=\cos 2x-\cos x$.

8.17. $\beta(x)=\operatorname{tg}\left(\pi(x+2)\right)$. 8.18. $\beta(x)=2-\sqrt{\cos x}-3^x$.

8.19. $\beta(x) = \sin 3x\,(3x^2 - 5x)$.

8.20. $\beta(x) = \operatorname{arctg}(e^{x^2} - 1)$.

8.21. $\beta(x) = \ln(1 - 2x)\operatorname{arctg} 3x$.

8.22. $\beta(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right)$.

8.23. $\beta(x) = \ln(x^2 + 1)\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)$.

8.24. $\beta(x) = \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x$.

8.25. $\beta(x) = \operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) - \ln(x + 1)$.

8.26. $\beta(x) = 1 - \sqrt{3x + 1}$.

8.27. $\beta(x) = (4^x - 9^{-x})(x + \operatorname{tg} x^2)$.

8.28. $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

8.29. $\beta(x) = (1 - \cos 2x)(\operatorname{tg} x - \sin x)$.

8.30. $\beta(x) = 1 - \cos^3 2x$.

9. Локализовать с точностью до 0,1 какой-либо корень уравнения.

9.1. $x^2 = \cos x$.

9.2. $x = \sqrt[3]{5 - x}$.

9.3. $(x + 1)^3 = 2x$.

9.4. $x^2 \cdot \operatorname{arctg} x = 1$.

9.5. $x^2 - 2 = e^x$.

9.6. $x^2 = \ln(x + 1)$.

9.7. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

9.8. $e^{-x} = \ln x$.

9.9. $x^4 + 2x - 24 = 0$.

9.10. $x^3 + 2x - 8 = 0$.

9.11. $x^3 - 3x + 1 = 0$.

9.12. $x = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x}\right)$.

9.13. $\frac{x}{5} = \ln x$.

9.14. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

9.15. $x + \sin x = 2$.

9.16. $e^x = 3x$.

9.17. $4x = 2^x$.

9.18. $x^2 = -\ln x$.

9.19. $\ln x = \operatorname{arctg} x$.

9.20. $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.

9.21. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

9.22. $x^x = 10$.

9.23. $x = 2 - \lg x$.

9.24. $x^3 + 60x - 80 = 0$.

9.25. $x = \cos 2x$.

9.26. $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

9.27. $x^4 - 2x = 2$.

9.28. $x = 10 \lg x$.

9.29. $x^6 - 3x^2 = 1 - x$.

9.30. $x^5 + x + 1 = 0$.

10. Исследовать точки разрыва функции и дать схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

10.1. $y = (x - 1)\sin\frac{1}{x^2 - 1}$.

10.2. $y = \frac{(x+1)^2}{\sin(x+1)}$.

10.3. $y = (x + 1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

10.4. $y = 4^{\frac{1}{3+x}}$.

10.5. $y = (x + 2)\operatorname{cosec}(x^2 - 4)$.

10.6. $y = \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

10.7. $y = \frac{-x^3 + \pi x^2}{2^{\sin x} - 2^{\operatorname{tg} x}}$.

10.8. $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

10.9. $y = \frac{|x-4|\sin(x+4)}{\arcsin(16-x^2)}$.

10.10. $y = \left(2^{\frac{x}{1-x}} - 1\right)^{-1}$.

10.11. $y = (1 - 2^{\operatorname{tg} x})^{-1}$.

10.12. $y = \frac{1}{\lg|x-2|}$.

10.13. $y = 7^{\frac{1}{2-x^2}}$.

10.14. $y = \frac{1}{\ln \sin x}$.

10.15. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$.

10.16. $y = \frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}-\sqrt{3}}$.

10.17. $y = \frac{\arcsin(\pi x)}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$.

10.18. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

10.19. $y = \frac{e^x-1}{x}$.

10.20. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

10.21. $y = \operatorname{arctg}\frac{11+x}{x-1}$.

10.22. $y = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2(1-x)}$.

10.23. $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sec x$.

10.24. $y = e^{\sec x}$.

10.25. $y = \frac{\arccos x}{x^2-1}$.

10.26. $y = \frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

10.27. $y = \frac{\ln(1-x^2)}{\cos 2x-1}$.

10.28. $y = \frac{1}{\ln \cos x}$.

10.29. $y = \frac{1}{x^2}(\cos 3x - \cos x)$.

10.30. $y = \sin\frac{1}{x}$.

Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить производную функции $y = x^{3^x} \cdot x^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем сначала логарифмическую производную функции y:

$$(\ln y)' = \left(3^x \ln x + \sqrt{x} \ln x\right)' = \left(3^x + \sqrt{x}\right)' \ln x + \frac{3^x + \sqrt{x}}{x} =$$

$$= \left(3^x \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln x + \frac{3^x + \sqrt{x}}{x}.$$

Так как $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то $y' = y \cdot (\ln y)'$.

Ответ: $y' = x^{3^x + \sqrt{x}} \left[\left(3^x \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln x + \frac{3^x + \sqrt{x}}{x}\right]$.

Задача 2. Найти y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2)\,, \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2 - 1}{2t} = \frac{t}{2}\,;$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{4t}.$$

Ответ: $y''_{xx} = \frac{1+t^2}{4t}$.

Задача 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y(1{,}77)$, где $y(x) = \sqrt{4x + 3}$.

Решение. Рассмотрим точку $x_0 = 1{,}75$, в которой $y\,(1{,}75) = = \sqrt{4 \cdot 1{,}75 + 3} = \sqrt{9} = 3$ и $\Delta x = 1{,}77 - 1{,}75$ мало. Заменяя $\Delta y = y(1{,}77) - y(1{,}75)$ на дифференциал в точке $x_0 = 1{,}75$ и при $\Delta x = 0{,}02$ получим:

$$y(1{,}77) \approx y(1{,}75) + dy = 3 + y_x'(1{,}75) \cdot 0{,}02 =$$
$$= 3 + \left.\frac{2}{\sqrt{4x+3}}\right|_{x=1{,}75} \cdot 0{,}02 = 3 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}02 \approx 3{,}01\,.$$

Ответ: 3,01.

Задача 4. Найти производную первого и второго порядка функции $y(x)$, заданной неявно соотношением $x^3 + y^3 = 3xy$.

Решение. Дифференцируем заданное соотношение по x, считая y функцией от x; получаем $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$. Сокращаем на 3 и решаем полученное соотношение относительно y':

$$y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Этот ответ можно использовать для вычисления производной второго порядка, но лучше продифференцировать соотношение $x^2 + y^2y' = y + xy'$ еще раз по x:

$$2x + 2y(y')^2 + y^2y'' = y' + y' + xy''.$$

Отсюда получаем

$$y'' = \frac{2y' - 2y(y')^2 - 2x}{y^2 - x} = \frac{2\left(\frac{y-x^2}{y^2-x}\right) - 2y\left(\frac{y-x^2}{y^2-x}\right)^2 - 2x}{y^2-x} =$$
$$= 2\frac{(y-x^2)(y^2-x) - y(y-x^2)^2 - x(y^2-x)^2}{(y^2-x)^3} =$$
$$= 2\frac{y^3 - x^2y^2 - yx + x^3 - y^3 + 2y^2x^2 - yx^4 - xy^4 + 2x^2y^2 - x^3}{(y^2-x)^3} =$$
$$= 2\frac{-xy^4 + 3y^2x^2 - y(x+x^4)}{(y^2-x)^3} = -2xy\frac{y^3 - 3yx + 1 + x^3}{(y^2-x)^3} =$$
$$= \frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

В последнем равенстве мы сократили $y^3 - 3yx + x^3$ в числителе дроби, используя основное соотношение между x и y.

Ответ: $y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}$; $y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$.

Существует следующий план исследования функции с параллельным построением графика:

а) общие особенности функции: область допустимых значений, четность – нечетность, периодичность, ограниченность, положительность и т.п.;

б) точки разрыва функции и их классификация;

в) исследование функции по первой производной-участки возрастания и убывания, точки экстремума;

г) исследование функции по второй производной-участки выпуклости-вогнутости, точки перегиба;

д) асимптотическое поведение функции на $\pm\infty$.

<u>Задача 5</u>. Исследовать функцию $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ и построить ее график.

Решение.

А. Функция $\frac{x-1}{x+1}$ не определена в точке $x = -1$. Так как функция $\ln z$ определена, только если $z > 0$, а $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \geq 0$, причем $\frac{x-1}{x+1} = 0$ лишь в одной точке $x = 1$, то получаем еще одну особенность – $x = 1$ – функции $y(x)$. Итак, ОДЗ - вся числовая ось, кроме точек ± 1.

Далее

$$y(-x) = \ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -y(x)\,,$$

поэтому $y(x)$ - нечетная функция, а ее график симметричен относительно начала координат. Найдем точки пересечения графика функции $y(x)$ с осью OX: $y(x) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Определим знаки функции $y(x)$ в интервалах знакопостоянства $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$ (рис. 1).

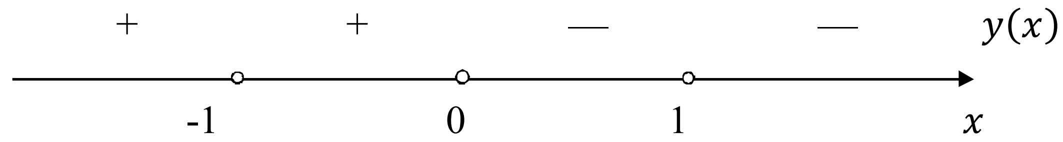


Рис. 1

Б. Так как $\lim_{x\to-1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$ и $\ln z$ - монотонно возрастающая неограниченная функция, то $x = -1$ - вертикальная асимптота и $\lim_{x\to-1} y(x) = +\infty$. В силу нечетности $x = 1$ - также вертикальная асимптота и $\lim_{x\to 1} y(x) = -\infty$.

Находим решения уравнения $y'(x) = 0$:

$\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$ или $x < -1 \;\Leftrightarrow\; |x| > 1$.

Тогда $y'(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$.

Если же $|x| < 1$, то $y'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1+x}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{x^2-1}$.

Следовательно, $y'(x) \neq 0$ в области допустимых значений. Знаки производной $y'(x)$ и участки монотонности функции $y(x)$ будут следующими (рис. 2):

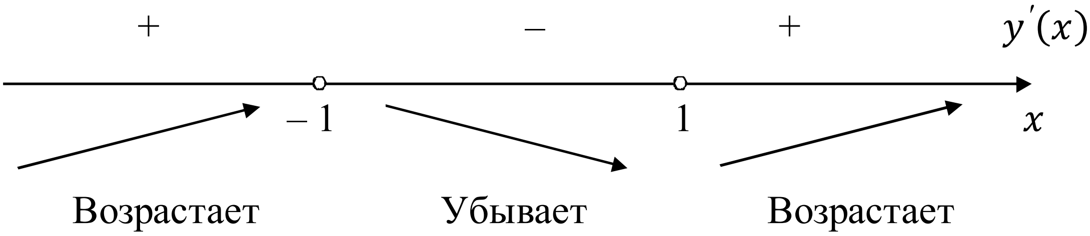


Рис. 2

Заметим, что $y'(0) = -2$ - тангенс угла наклона касательной графика функции $y(x)$ в точке $(0, 0)$.

В. Вычисляем $y'' = \left(\frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-2\ \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ и находим решения уравнения $y''(x) = 0$. Получаем один корень $x = 0$. Знаки y'' и участки выпуклости будут следующими (рис. 3):

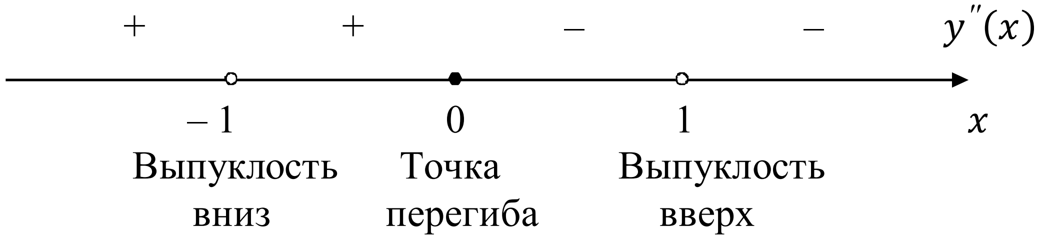


Рис. 3

Г. Так как $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \ln 1 = 0$, поэтому

– горизонтальная асимптота на .

Эскиз графика представлен на рис. 4.

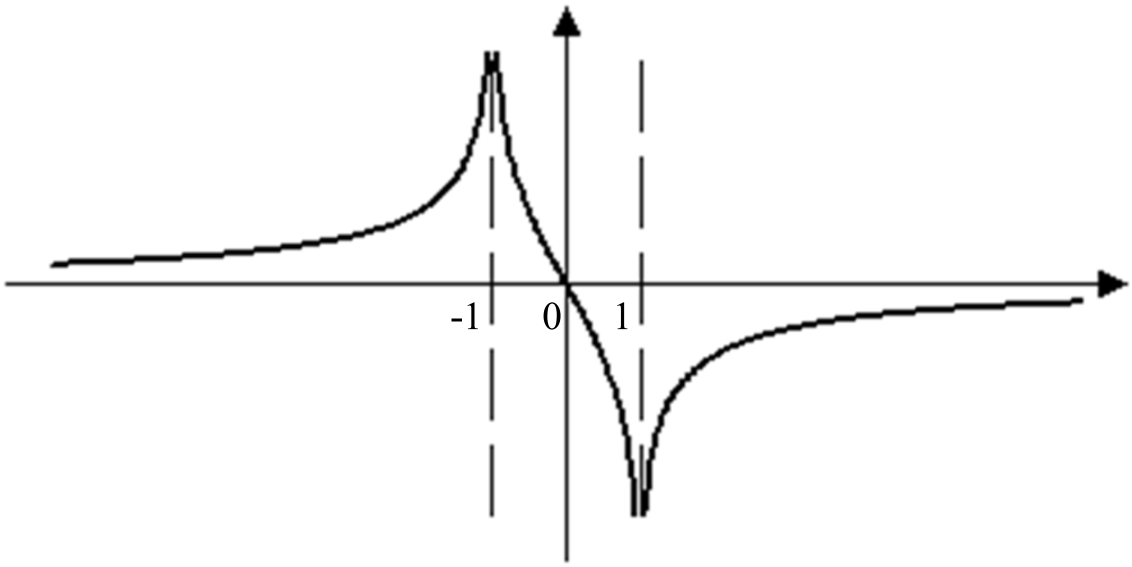


Рис. 4

Задания

1. Найти производную функции.

1.1. .

1.2. .

1.3. .

1.4. .

1.5. .

1.6.

1.7. .

1.8. .

1.9. .

1.10. .

1.11. .

1.12. .

1.13.

1.14. .

1.15. .

1.16. .

1.17. .

1.18. .

1.19.

1.20. .

1.21. .

1.22. .

1.23. $\ln\sin x + \frac{\sin^2 15x}{5\cos 3x}$.

1.24. $\operatorname{tg}\sqrt{x^3} - \frac{\cos^2 18x}{9\sin 9x}$.

1.25. $\sin\sqrt{x^3} - \frac{\cos^2 20x}{10\sin 10x}$.

1.26. $\sqrt{\ln x} - \frac{\cos^2 22x}{11\sin 11x}$.

1.27. $\sqrt{\sin 2x} - \frac{\cos^2 24x}{6\sin 6x}$.

1.28. $\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{\cos^2 26x}{2\sin 2x}$.

1.29. $\frac{1}{\ln x} - \frac{\cos^2 28x}{14\sin 14x}$.

1.30. $\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos^2 30x}{10\sin 10x}$.

2. Найти производную функции.

2.1. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

2.2. $\frac{\operatorname{arctg} 2^x}{4^x} + \frac{1}{3\cdot 8^x}$.

2.3. $\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4. $\arcsin\frac{e^x-2}{\sqrt{5}e^x}$.

2. 5. $\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$.

2.6. $\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

2.7. $\sqrt{\ln x} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\ln x} - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\ln x}}{2}$.

2.8. $\arcsin\frac{3^x-2}{(3^x-1)\sqrt{2}}$.

2.9. $\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x+1} - \sqrt{2}\ln(1+x)$.

2.10. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-9^x}}{1-3^x}$.

2.11. $\sqrt{1-\ln^2 x} - \ln x \arcsin\sqrt{1-\ln^2 x}$.

2.12. $\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{2}}$.

2.13. $\frac{1}{4}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x$.

2.14. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{x}$.

2.15. $\frac{(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}}{2} - 9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.

2.16. $\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3e^x-1}{\sqrt{6e^x}}$.

2.17. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

2.18. $\frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$.

2.19. $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin\sqrt{\frac{x-2}{2}}$.

2.20. $\frac{\sqrt{1-9^x}}{2} - \frac{\arccos 3^x}{2\cdot 9^x}$.

2.21. $\frac{2\sqrt{1-4^x}\arcsin 2^x}{4^x} + 2^{1-x}$.

2.22. $\operatorname{arctg} 2^x + \frac{5}{6}\ln\frac{4^x+1}{4^x+4}$.

2.23. $\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x + \frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$.

2.24. $\frac{\left(1+3^{2x}\right)\operatorname{arctg} 3^x - 3^x}{3^{2x}}$.

2.25. $\frac{3+x}{2}\sqrt{2x-x^2} + 3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$.

2.26. $\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

2.27. $6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{4x-x^2}$.

2.28. $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

2.29. $\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2} - x$.

2.30. $\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{2} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{e^x-1}$.

3. Найти производную функции.

3.1. $\arcsin^3(\ln x)\arccos^2\frac{1}{\ln x}$.

3.2. $\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\arccos^2\sqrt{x}}$.

3.3. $\sqrt{\arcsin^3(\ln x)}\cdot e^{-\operatorname{tg}^3 x}$.

3.4. $\arcsin^2(4^x)\cdot 4^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}$.

3.5. $\sqrt[3]{\arcsin^4\frac{2}{x}\cdot\arccos^3\frac{x}{2}}$.

3.6. $\operatorname{ctg}^4 8x\cdot\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3\frac{1}{8x}}$.

3.7. $\sqrt{\operatorname{arctg}^3\ln x}\,\operatorname{arcctg}^5\left(\frac{1}{\ln x}\right)$.

3.8. $\operatorname{tg}^3(4^x)\ln^2(\sin 4x)$.

3.9. $\sqrt{\ln(\operatorname{arctg}2x)}\cdot\operatorname{arcctg}^2(2x)$.

3.10. $2^{-\operatorname{tg}^3 2x}\cdot\arcsin^4\frac{1}{2x}$.

3.11. $\operatorname{arctg}^5\left(\frac{1}{5x}\right)\sqrt{\ln^3(10x)}$.

3.12. $\operatorname{tg}^5\frac{3}{x^2}\cdot\operatorname{arctg}^3(3x^2)$.

3.13. $\sqrt[3]{\arccos^5\left(\frac{2}{x}\right)}\cdot e^{-2\cos 2x}$.

3.14. $\operatorname{tg}^4(2^{-x^2})\arcsin^3\left(\frac{2}{x^2}\right)$.

3.15. $\sqrt{\arccos^3(2\ln x)}\cdot e^{-\operatorname{tg}^4 4x}$.

3.16. $\arccos^4\left(\frac{7}{x}\right)\cdot\sqrt{\operatorname{arctg}7x}$.

3.17. $\ln^5(\arccos 3x)\cdot\arccos^3\frac{3}{\ln x}$.

3.18. $\arcsin^3(\ln^2 x)\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^3 3x}$.

3.19. $\sqrt[3]{\ln^2(3\arcsin x)}\cdot\arccos^3\frac{3}{x}$.

3.20. $4^{-\operatorname{arctg}^4 4x}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{4}{x^2}$.

3.21. $\arcsin^6\sqrt{\ln x}\cdot\arccos^2\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

3.22. $\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^5\frac{5}{x^2}}\cdot\operatorname{arcctg}^2(5x^2)$.

3.23. $2^{\operatorname{tg}^3(2x)}\cdot\arcsin^4(\operatorname{ctg}2x)$.

3.24. $3^{-\sqrt{\operatorname{ctg}3x^2}}\cdot\operatorname{arctg}^3\left(\frac{3}{x^3}\right)$.

3.25. $\operatorname{tg}^5(3\ln x)\cdot\arcsin^2\sqrt{\ln x}$.

3.26. $2^{-\sqrt{\operatorname{ctg}2x}}\cdot\arcsin^3\left(\frac{1}{2x}\right)$.

3.27. $\sqrt[5]{\ln^4(1+\operatorname{tg}2x)}\cdot\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{2x}\right)$.

3.28. $2^{\operatorname{ctg}^4 8x}\cdot\arcsin^4\left(\frac{1}{8x}\right)$.

3.29. $\arcsin^5(3\ln^3 x)\cdot\arccos^3\left(\frac{3}{\ln x}\right)$.

3.30. $3^{\operatorname{tg}^3(3x)}\cdot\sqrt[3]{\arccos^2\frac{1}{3x}}$.

4. Найти производную функции.

4.1. $(x\cdot\sin x)^{\sin(x\cdot\sin x)}$.

4.2. $x^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.3. $(\operatorname{tg}2x)^{\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}2x}$.

4.4. $(\sin 2x)^{\operatorname{tg}2x}$.

4.5. $(\cos 2x)^{\frac{1}{4}\ln\cos 2x}$.

4.6. $x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$.

4.7. $\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

4.8. $x^{2^x}\cdot 2^x$.

4.9. $\left(\cos\sqrt{1-5x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

4.10. $(\operatorname{arctg}3x)^{\ln\sqrt[3]{x}}$.

4.11. $(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg}2x}$.

4.12. $x^{x^2}\cdot x^2$.

4.13. $\left(\arcsin\frac{3x}{\sqrt{3}}\right)^{\sin 3x}$.

4.14. $x^{2^{\cos^3\sqrt{x}}}$.

4.15. $\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

4.16. $(\operatorname{tg}3^x)^{e^{\cos^2\frac{1}{x}}}$.

4.17. $\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

4.18. $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^{e^{-\frac{1}{x}}}$.

4.19. $(\cos x^3)^{\ln\cos x^3}$.

4.20. $x^{3^{x^2}} \cdot 2^{\frac{1}{x}}$.

4.21. $(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin\frac{2}{x}}$.

4.22. $x^{2^x} \cdot x^{\frac{1}{x}}$.

4.23. $(1-x^2)^{\operatorname{ctg}^2 3x}$.

4.24. $\left(\sin\sqrt{2x}\right)^{e^{2x}}$.

4.25. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$.

4.26. $\frac{x^x}{x^{\ln x}}$.

4.27. $(\arcsin 2x)^{e^{\sqrt{2x}}}$.

4.28. $\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$.

4.29. $(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$.

4.30. $\left(\sin\frac{2}{x}\right)^{5^{\frac{x}{2}}}$.

5. Найти производную y'_x.

5.1. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{t}{2}}\right), \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1}{t}\right), \\ y = \sqrt{(t^2-1} + \arcsin\frac{1}{t}. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = \ln\frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\cdot\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\right), \\ y = \arcsin\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\frac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t + \ln\cos t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln\operatorname{tg}e^t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = \frac{t^2\cdot\ln t}{1-t^2} + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg}t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg}t\cdot\ln\cos t + \operatorname{tg}t - t. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = t\cdot\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}t, \\ y = \ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

6. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

6.1. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}t, \\ y = \frac{1}{\sin 2x}. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+2\cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1+2\cos t}. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-3). \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t\,. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x = t + \sin t\,, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x = \cos 2t\,, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{7}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x = \mathrm{sh}^2\, t, \\ y = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, t}. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \mathrm{arctg}\, t. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t, \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t, \\ y = \ln(1 + t^2)\,. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} x = \arcsin t\,, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

7. Найти производную y'_x функции $y(x)$, заданной неявно.

7.1. $x - y + \mathrm{arctg}\, y = 0.$

7.2. $\frac{y}{x} = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}.$

7.3. $xy^2 = e^{\frac{y}{x}}.$

7.4. $x - y + a\sin y = 0.$

7.5. $x - y + e^y\,\mathrm{arctg}\, x = 0.$

7.6. $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0.$

7.7. $\cos(x - y) - 2x + 4y = 0.$

7.8. $\cos(xy) = \frac{y}{x}.$

7.9. $e^{x+y} = \sin\frac{y}{x}.$

7.10. $y\ln x - x\ln y = x + y.$

7.11. $x\sin y + y\sin x = 0.$

7.12. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.
7.13. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
7.14. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$.
7.15. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.
7.16. $y \sin x = \cos(x^2 - y)$.
7.17. $e^{x-y} = x \cdot y$.
7.18. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
7.19. $\ln y = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
7.20. $x \sin y - y \cos x = 0$.
7.21. $y \sin x + \cos(x - y) = \cos y$.
7.22. $xe^y + ye^x = xy$.
7.23. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$.
7.24. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$.
7.25. $x^y = y^x$.
7.26. $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$.
7.27. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.
7.28. $e^{xy} = x + y$.
7.29. $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}$.
7.30. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

8. Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной неявно.

8.1. $y = \cos(x + y)$.
8.2. $e^x - e^y = y - x$.
8.3. $y = \operatorname{tg}(x + y)$.
8.4. $xy = \ln y$.
8.5. $\cos(x + y) + x = 0$.
8.6. $ye^x + e^y = 0$.
8.7. $\ln(x + y) = x - y$.
8.8. $e^y + xy = e$.
8.9. $\operatorname{arctg}(x + y) - y = 0$.
8.10. $e^{x-y} = y$.
8.11. $x + y = e^{x-y}$.
8.12. $y = x + \ln y$.
8.13. $\ln(x + y) = y + a$.
8.14. $xy = e^y$.
8.15. $\ln(y - x) = x - y$.
8.16. $xy - \ln y = 1$.
8.17. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.
8.18. $y = 1 + xe^y$.
8.19. $\operatorname{arctg} y = x + y$.
8.20. $x^2 y = e^y$.
8.21. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
8.22. $e^{x-y} = x \cdot y$.
8.23. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$.
8.24. $e^{x+y} = x$.
8.25. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
8.26. $x - y = e^{x+y}$.

8.27. $\ln(x-y)=x+y$. 8.28. $x+y=e^{x+y}$.

8.29. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 8.30. $e^{x+y}=xy$.

9. Найти дифференциал функции $y(x)$.

9.1. $y=x\arcsin\frac{1}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

9.2. $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$.

9.3. $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$.

9.4. $y=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9.5. $y=\ln\left(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x}\right)$.

9.6. $y=\arcsin\frac{a}{x}+\ln\sqrt{x^2+a^2}$.

9.7. $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}$.

9.8. $y=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

9.9. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

9.10. $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

9.11. $y=\ln\left(2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right),\ x>0$.

9.12. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$.

9.13. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.

9.14. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)-\sqrt{x^2+3}$.

9.15. $y=\arccos\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$.

9.16. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg}x$.

9.17. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^{-x}$.

9.18. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$.

9.19. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$.

9.20. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}$.

9.21. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9.22. $y=e^{-\cos^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}$.

9.23. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

9.24. $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$.

9.25. $y=\cos x\ln\operatorname{tg}x-\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

9.26. $y = \sqrt{x} - (1 + x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
9.27. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$.
9.28. $y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}}$.
9.29. $y = \sqrt{3 + x^2} - x\ln\left(x + \sqrt{3 + x^2}\right)$.
9.30. $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x$.

10. Для заданной функции $y(x)$ и заданного числа $\bar{x}$ вычислить приближенно $y(\bar{x})$ с помощью дифференциала первого порядка.

10.1. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 27{,}54$.
10.2. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 7{,}76$.
10.3. $y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{5 - x^2}\right)$; $\bar{x} = 0{,}98$.
10.4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$; $\bar{x} = 0{,}97$.
10.5. $y = \operatorname{arctg} x$; $\bar{x} = 0{,}98$.
10.6. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 26{,}46$.
10.7. $y = x^{11}$; $\bar{x} = 1{,}021$.
10.8. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $\bar{x} = 1{,}03$.
10.9. $y = x^6$; $\bar{x} = 2{,}01$.
10.10. $y = x^7$; $\bar{x} = 1{,}996$.
10.11. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$; $\bar{x} = 1{,}016$.
10.12. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\bar{x} = 4{,}16$.
10.13. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$; $\bar{x} = 0{,}01$.
10.14. $y = x^5$; $\bar{x} = 2{,}997$.
10.15. $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\bar{x} = 1{,}58$.
10.16. $y = \sqrt[4]{x}$; $\bar{x} = 15{,}68$.
10.17. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$; $\bar{x} = 1{,}012$.
10.18. $y = \arcsin x$; $\bar{x} = 0{,}08$.
10.19. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 7{,}64$.
10.20. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$; $\bar{x} = 1{,}97$.
10.21. $y = \operatorname{arctg} x$; $\bar{x} = 1{,}05$.
10.22. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 1{,}21$.
10.23. $y = x^{21}$; $\bar{x} = 0{,}998$.
10.24. $y = \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 8{,}24$.
10.25. $y = \sqrt{4x - 1}$; $\bar{x} = 2{,}56$.
10.26. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$; $\bar{x} = 0{,}01$.
10.27. $y = x^7$; $\bar{x} = 2{,}002$.
10.28. $y = \sqrt{x^3}$; $\bar{x} = 0{,}98$.

10.29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin\frac{\pi x}{2}}$; $\qquad \bar{x} = 1{,}02.$

10.30. $y = \sqrt{x^2 + 5}$; $\qquad \bar{x} = 1{,}97.$

11. Составить уравнение нормали и касательной к графику заданной функции $f(x)$ в заданной точке x_0.

11.1. $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$; $\qquad x_0 = 2.$

11.2. $f(x) = x - x^3$; $\qquad x_0 = -1.$

11.3. $f(x) = x + \sqrt{x^3}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.4. $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $\qquad x_0 = 4.$

11.5. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $\qquad x_0 = 1.$

11.6. $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$; $\qquad x_0 = 64.$

11.7. $f(x) = 2x^2 + 3$; $\qquad x_0 = -1.$

11.8. $f(x) = x^2 - 4x$; $\qquad x_0 = 1.$

11.9. $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 + 1}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.10. $f(x) = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$; $\qquad x_0 = 1.$

11.11. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $\qquad x_0 = -2.$

11.12. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.13. $f(x) = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.14. $f(x) = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; $\qquad x_0 = 1$

11.15. $f(x) = \frac{x^2}{10} + 3$; $\qquad x_0 = 2.$

11.16. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $\qquad x_0 = -2.$

11.17. $f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$; $\qquad x_0 = 4.$

11.18. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 20$; $\qquad x_0 = -8.$

11.19. $f(x) = 8\sqrt[4]{x} - 70$; $\qquad x_0 = 16.$

11.20. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$; $\qquad x_0 = 3.$

11.21. $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3-2}$; $\qquad x_0 = 2.$

11.22. $f(x) = \frac{x^{29}+6}{x^4+1}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.23. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.24. $f(x) = \frac{x^{16}+9}{1-5x^2}$; $\qquad x_0 = 1.$

11.25. $f(x) = \frac{1}{3x+2}$; $\qquad x_0 = 2.$

11.26. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)$; $\qquad x_0 = 3.$

11.27. $f(x) = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x});$ $\quad x_0 = 1.$

11.28. $f(x) = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2;$ $\quad x_0 = 1.$

11.29. $f(x) = \frac{1}{3}(3x - 2x^3);$ $\quad x_0 = 1.$

11.30. $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3);$ $\quad x_0 = 4.$

12. Применяя правило Лопиталя, найти предел функции.

12.1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}.$ 12.2. $\lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}.$

12.3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2}{\sin^2 x}.$ 12.4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}.$

12.5. $\lim_{x\to 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}.$ 12.6. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}.$

12.7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$ 12.8. $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-e^{-x})}{e^{x^2+1}-e}.$

12.9. $\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\cos 2x}{\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2}.$ 12.10. $\lim_{x\to\pi} \frac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}.$

12.11. $\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}.$ 12.12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}.$

12.13. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$ 12.14. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}.$

12.15. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}.$ 12.16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}.$

12.17. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}.$ 12.18. $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{1-\cos x}.$

12.19. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}.$ 12.20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}.$

12.21. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$ 12.22. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$

12.23. $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$ 12.24. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}.$

12.25. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}.$ 12.26. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}.$

12.27. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}.$ 12.28. $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos\sqrt{x})}{1-\cos x}.$

12.29. $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}.$ 12.30. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}.$

13. Провести полное исследование функций и построить графики.

13.1. $y = \frac{3x^2-6x}{x-1};$ $\quad y = xe^{x+1}.$

13.2. $y = x^2\ln x;$ $\quad y = \frac{(x-1)(x-2)}{x}.$

13.3. $y = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$; $\quad y = x\ln x$.

13.4. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad y = \sqrt[3]{12x - 4x^3}$.

13.5. $y = e^{x^2-6x}$; $\quad y = \frac{4x-8}{(x-1)^2}$.

13.6. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; $\quad y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

13.7. $y = \frac{x^2}{x^2+3}$; $\quad y = \operatorname{arctg} x - x$.

13.8. $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$; $\quad y = (x-1)e^{x-1}$.

13.9. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$; $\quad y = \frac{4x}{4+x^2}$.

13.10. $y = \frac{x}{x^2+1}$; $\quad y = \frac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.

13.11. $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; $\quad y = \frac{1}{x^2-6x+5}$.

13.12. $y = \frac{x^2+8}{(x+2)^2}$; $\quad y = 2^{\frac{1}{x}}$.

13.13. $y = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; $\quad y = \sqrt{4x^2+7}$.

13.14. $y = x + 2\operatorname{arctg} x$; $\quad y = (x-1)e^{1-x}$.

13.15. $y = \frac{x-8}{(x-2)^2}$; $\quad y = (x-3)\sqrt{x}$.

13.16. $y = \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$; $\quad y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

13.17. $y = \frac{x}{x^2-1}$; $\quad y = (1+x^2)e^{-x^2}$.

13.18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$; $\quad y = (13+4x^2)e^{-x^2}$.

13.19. $y = \frac{e^{-x^2}}{x^2}$; $\quad y = \frac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$.

13.20. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$; $\quad y = \frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$.

13.21. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$; $\quad y = x - \ln(x+1)$.

13.22. $y = (x-1)^2e^x$; $\quad y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

13.23. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad y = x^2e^x$.

13.24. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; $\quad y = \frac{18x-3x^2}{(x-3)^2}$.

13.25. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$; $\quad y = \frac{x}{\ln x}$.

13.26. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$; $\quad y = xe^{-x}$.

13.27. $y = \frac{2x-1}{x^2}$; $\quad y = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$.

13.28. $y = \frac{|x-1|}{x}$; $\quad y = \frac{1}{1+x^2}$.

13.29. $y = x^3 - 3x$; $\quad y = \frac{(2x+1)x}{(x+3)(1-x)}$.

13.30. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$; $\quad y = (3x+5)e^{3x-1}$.

Раздел 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Примеры решения задач

<u>Задача 1</u>. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка и воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0\,. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим две стационарные точки: $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$. Найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\ \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Затем вычислим дискриминант $D = AC - B^2 = 36xy - 9$ для каждой стационарной точки:

$$D|_{P_1} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0;$$

$$D|_{P_2} = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0;\ \ A|_{P_2} = 6 > 0.$$

Следовательно, в силу достаточного условия экстремума в точке P_1 экстремума нет, а в точке P_2 – локальный минимум.

Ответ: (1,1) - точка локального минимума.

Точка $P(x_0, y_0)$ называется условным максимумом (минимумом) функции $z = f(x,y)$ с условием связи $\varphi(x,y) = 0$, если существует окрестность U точки P такая, что $f(x_1,y_1) \le f(x_0,y_0)$, $\big(f(x_1,y_1) \ge f(x_0,y_0)\big)$, как только $\begin{cases} (x_1,\ \ y_1) \in U \\ \varphi(x_1,\ \ y_1) = 0. \end{cases}$

Задача о вычислении условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа $L(x,y,\lambda) == f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$. Итак, система трех уравнений $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ выражает необходимое условие условного экстремума. Пусть (x_0, y_0, λ_0) - решение этой системы, а

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(P) & \varphi_y'(P) \\ \varphi_x'(P) & L_{xx}''(P,\lambda_0) & L_{xy}''(P,\lambda_0) \\ \varphi_y'(P) & L_{xy}''(P,\lambda_0) & L_{yy}''(P,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta < 0$, то $P(x_0, y_0)$ - условный максимум; в случае $\Delta > 0$ $P(x_0, y_0)$ - условный минимум.

Задача 2. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x + 2y + +\lambda(x^2 + y^2 - 5)$ и воспользуемся необходимым условием условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{dx} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{dL}{d\lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим две точки: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = 1/2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -1/2$. Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \varphi_x' = 2x, \varphi_y' = 2y;$$

то

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8(-x^2\lambda - y^2\lambda) = 8\lambda(x^2 + y^2).$$

Имеем: $\Delta(x_1, y_1, \lambda_1) = 8 \cdot \frac{1}{2}(1 + 4) = 20 > 0$ и $\Delta(x_2, y_2, \lambda_2) = = 8\left(-\frac{1}{2}\right)(1 + 4) = -20 < 0$. Следовательно, $P_1(-1, -2)$ - точка условного минимума, а $P_2(1, 2)$ - точка условного максимума.

Ответ: $(-1, -2)$ - точка условного минимума, $(1, 2)$ - точка условного максимума.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y\,(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Во-первых, отметим, что z - непрерывная функция, а $\Delta\, OAB$ (рисунок) - ограниченная замкнутая область.

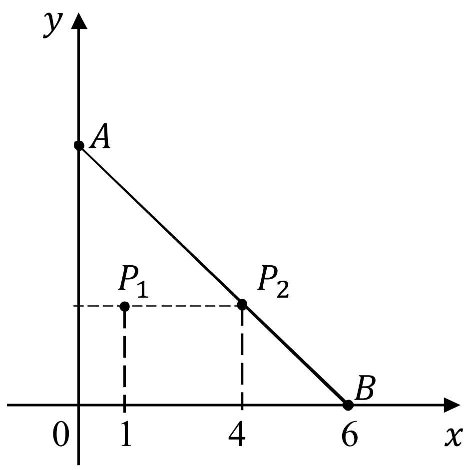
Следовательно, по теореме Вейерштрасса, существуют наибольшее и наименьшее значения функции z в $\Delta\, OAB$. Точка, в которой достигается наибольшее (наименьшее) значение, является либо стационарной точкой функции z, лежащей внутри $\Delta\, OAB$, либо стационарной точкой сужения функции z на одну из сторон $\Delta\, OAB$, либо, наконец, совпадает с одной из вершин O, A, B.

Найдем стационарные точки внутри $\Delta\, OAB$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1\,. \end{cases}$$

Ввиду того, что $x > 0$ и $y > 0$ внутри $\Delta\, OAB$, мы смогли сократить на x и y. Точка $P_1(1, 2)$ действительно лежит внутри $\Delta\, OAB$ и $z(1, 2) = 4$.

Далее, сужая функцию z на стороны OA и OB, находим, что $z|_{OA} = z|_{OB} = 0$. На стороне AB зависимость y от x такова: $y = 6 - x$; поэтому
$z|_{AB} = x^2(6 - x)(4 - x - 6 + x) = -12x^2 + 2x^3$.



Находим стационарные точки этой функции в интервале $(0, 6)$:
$(-12x^2 + 2x^3)' = 0 - 24x + 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 4.$

Из этих двух точек интервалу $(0, 6)$ принадлежит только вторая, для которой $y_2 = 6 - 4 = 2$ и $z(x_2, y_2) = 4^2 \cdot 2(4 - 4 - 2) = -64$.
Наибольшее значение функции z в $\Delta\, OAB$ совпадает с наибольшим значением в точках P_1, P_2, O, A, B, а также значением 0 в любой из внутренних точек сторон OA и OB. Не составляет труда вычислить последнее наибольшее значение: $z_{max} = 4$, так как $z\,(0) = z\,(A) = z(B) = 0$ и $0 < 4$; $-64 < 4$. Аналогично $z_{min} = -64$.

Ответ: $z_{max} = z(1, 2) = 4$;
$z_{min} = z(4, 2) = -64$.

Заметим, что при решении третьей задачи мы не пользовались достаточным условием экстремума.

Задания

1. Найти дифференциал второго порядка.

1.1. $z = e^{xy}$.
1.2. $z = e^x \cos y$.
1.3. $z = \frac{x}{y}$.
1.4. $z = x \cos y + y \sin x$.
1.5. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x + 2y$.
1.6. $z = \operatorname{arctg} xy$.
1.7. $z = x^y$.
1.8. $z = \ln xy$.
1.9. $z = \arcsin xy$.
1.10. $z = \arccos xy$.
1.11. $z = \ln(x^2 + y^2)$.
1.12. $z = \sin xy^2$.
1.13. $z = \cos x^2 y$.
1.14. $z = \operatorname{tg} xy$.
1.15. $z = e^y \sin x$.
1.16. $z = e^x \sin y$.
1.17. $z = \frac{x}{y^2}$.
1.18. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$.
1.19. $z = \operatorname{ctg}(x^2 - y^2)$.
1.20. $z = x \arcsin y^2$.
1.21. $z = y \arccos x$^2.
1.22. $z = yx^y$.
1.23. $z = xy^x$.
1.24. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.
1.25. $z = y/(x^2 + y^2)$.
1.26. $z = \frac{x+y}{x-y}$.
1.27. $z = \frac{x-y}{x+y}$.
1.28. $z = \sin \frac{xy}{x+y}$.
1.29. $z = 5x^3 + 4y^3 + 5x^2y - 7xy^2 - 2xy$.
1.30. $z = \cos \frac{xy}{x-y}$.

2. Исследовать на экстремум функцию двух переменных.

2.1. $2x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$.
2.2. $x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
2.3. $2x^3 - 3xy - y^2 + 5x - 4y$.
2.4. $3x^2y - 2xy^2 - x$.
2.5. $(x + 2)^2 + (2y - 1)^2 - x$.
2.6. $-x^2 + xy - y^2 + x - 2y$.
2.7. $4x^2 + 8xy - 4y^2 + 16x - 16y$.
2.8. $(1 - 2x)^2 - y^2 + y - 2x$.
2.9. $-2x^2 + 8xy + 8y^2 + 8x + 16y$.
2.10. $x^3y^2(a - x - y)$.
2.11. $-x^2 - xy + 8y^2 + 6x - 9y$.
2.12. $3x^2 - 3xy + 6y^2 - x$.
2.13. $3x^2 - 2xy + y^2 + x - y$.
2.14. $-2x^2 - xy - 2x + 3y$.
2.15. $x^2 + y^2 - 2x + y$.
2.16. $3x^2 + 2xy + x - y$.
2.17. $4x^2 - 2y^2 + 3xy + 2x - y$.
2.18. $-x^2 + xy - y^2 + y + 2$.
2.19. $-2x^2 + 3xy - y^2 - y + 2$.
2.20. $x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
2.21. $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0,\ y > 0)$.
2.22. $e^{x-y}(x^2 - y^2)$.
2.23. $-x^2 + 4xy - 2y^2 + y$.
2.24. $(3x - 1)^2 - y^2 + 2x + y$.
2.25. $-3x^2 - 6xy - 12y^2 - 6x + 6y$.
2.26. $e^{x+y}(x^2 + xy)$.
2.27. $5x^2 - 10xy + 5y^2 + 10x - 15y$.
2.28. $x^2 - (3y + 2)^2 - x - y$.
2.29. $-6x^2 + 12xy - 6y^2 - 6x + 6y$.
2.30. $(2x + 1)^2 + y^2$.

3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в указанных областях.

3.1. $z = 1 + x + 2y$;	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.
3.2. $z = 1 - x + 3y$;	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.
3.3. $z = 2 + 2x - y$;	$0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.
3.4. $z = 3 - x + y$;	$-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
3.5. $z = \frac{1}{2} + 2x - 3y$;	$x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1$.
3.6. $z = 1 - x + 2y$;	$0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$.
3.7. $z = 5 + 3x - 2y$;	$x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1$.
3.8. $z = -2 + 2x - 3y$;	$x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 2$.
3.9. $z = -1 + x - 2y$;	$x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 2$.
3.10. $z = xy$;	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
3.11. $z = 2 - xy$;	$x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 3$.
3.12. $z = 5 - x - y$;	$-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.
3.13. $z = 1 + xy$;	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.
3.14. $z = 1 - 8xy$;	$-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
3.15. $z = -3 + 2x - y$;	$x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1$.
3.16. $z = 2 - x + 3y$;	$x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 5$.
3.17. $z = (x - 1)^2 + y$;	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$.
3.18. $z = x - (y + 2)^2$;	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$.
3.19. $z = 2x + 3y - 1$;	$x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 2$.
3.20. $z = 3x - 2y + 1$;	$x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 2$.
3.21. $z = 4x + 2y - 5$;	$x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 5$.
3.22. $z = x + (2y - 3)^2$;	$-1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$.
3.23. $z = 4x - 5y + 2$;	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.
3.24. $z = -x - y - 6$;	$0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1$.
3.25. $z = -2x + 4y - 1$;	$x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 4$.
3.26. $z = xy + x$;	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
3.27. $z = xy + y$;	$0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0$.
3.28. $z = xy - 2x$;	$-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$.
3.29. $z = 2xy - y$;	$-3 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 3$.
3.30. $z = 2xy + x + y$;	$x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 10$.

4. Определить условные экстремумы функции двух переменных (справа указаны условия).

4.1. $z = xy$;	$x + y = 2$.
4.2. $z = x + 3y$;	$x^2 + y^2 = 1$.
4.3. $z = x^2 + y^2$;	$x + y = 1$.

4.4. $z = 2x - y + 1;$ $x^2 - y = 1.$
4.5. $z = x^2 - y^2;$ $-x + y = 2.$
4.6. $z = -x^2 + y^2;$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$
4.7. $z = x^2 - y^2 + 2y;$ $-x + y = 2.$
4.8. $z = -x^2 + y^2 + 3x;$ $x - 2y = 1.$
4.9. $z = x - 3y + 2;$ $x^2 + y^2 = 3.$
4.10. $z = xy + x + y;$ $x + y = 1.$
4.11. $z = xy - x + 2y\ ;$ $x - y = 2.$
4.12. $z = x^2 - y^2 + 2x - y\ ;$ $-x + y = 1.$
4.13. $z = -x^2 + y^2 - x + y\ ;$ $2x + y = 2.$
4.14. $z = 2x^2 - y^2 + x;$ $2x - 2y = 1.$
4.15. $z = 2x - 2y + 3\ ;$ $x^2 + 2y^2 = 1.$
4.16. $z = 3x + 2y + 1;$ $x^2 - y^2 = 2.$
4.17. $z = -x + 3y + 2\ ;$ $2x^2 + 3y^2 = 1.$
4.18. $z = 2xy + 3x - y\ ;$ $2x - 3y = 2.$
4.19. $z = xy - 3x + 2y + 1\ ;$ $-x + 2y = 2.$
4.20. $z = -2xy + 2x - 3y - 1\ ;$ $2x - 3y = 3.$
4.21. $z = 3x^2 + 2y^2 - x - y\ ;$ $x + y = 3.$
4.22. $z = -4x^2 + 4y^2 + 2y\ ;$ $x - y = 2.$
4.23. $z = 4x^2 - 4y^2 - 2x\ ;$ $-x - 2y = 2.$
4.24. $z = 5x - 3y + 2\ ;$ $x^2 + y^2 = 1.$
4.25. $z = -2x + 4y + 1\ ;$ $x^2 + y^2 = 2.$
4.26. $z = x + 4y + 8\ ;$ $2x^2 + 3y^2 = 3.$
4.27. $z = 1 - 2x - 3y - xy\ ;$ $x + 2y = 1.$
4.28. $z = 2 + y + 3xy\ ;$ $2x - 3y = 5.$
4.29. $z = -1 - x - 2y + 3xy;$ $-x + 6y = 3.$
4.30. $z = x^2 - xy + y^2;$ $x + y = 1.$

5. Найти производные сложных функций.

5.1. $z = x^2 + xy + y^2,$ $x = t^2, y = t.$
5.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2},$ $x = \sin t, y = \cos t.$
5.3. $z = \frac{y}{x},$ $x = e^t, y = 1 - e^{2t}.$
5.4. $z = xe^y,$ $y = x^2.$
5.5. $z = x^3 - 3yx,$ $y = e^x.$
5.6. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y},$ $y = \cos x.$
5.7. $z = \frac{x^2}{y},$ $x = u - 2v, y = v + 2u.$

5.8. $z = \frac{x}{y^2}$, $\quad x = u + 2v,\ y = v - 2u.$

5.9. $z = 2y + x - 1$, $\quad x = 2u - v,\ y = 3v + u.$

5.10. $z = 3x^3 - 2xy + 3$, $\quad x = 3t - 1,\ y = 2t^2 + t.$

5.11. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $\quad x = t,\ y = t^2.$

5.12. $z = \arcsin(xy)$, $\quad x = 2t,\ y = 3t - 1.$

5.13. $z = \frac{x+y}{x-y}$, $\quad y = e^{2x}.$

5.14. $z = x^2 - 4y^2$, $\quad y = \ln x.$

5.15. $z = \frac{xy+1}{x}$, $\quad y = 3x^2 + 2x - 1.$

5.16. $z = \frac{(2y+3)}{x}$, $\quad y = \frac{1}{x}.$

5.17. $z = x^2 - y$, $\quad x = 3u - 4v,\ y = 2u^2.$

5.18. $z = xy$, $\quad x = \frac{u}{v},\ y = u - v.$

5.19. $z = \sqrt{x + y}$, $\quad x = u^2 + v,\ y = 2u + 3v.$

5.20. $z = \frac{xy}{x-y}$, $\quad x = uv,\ y = u - v.$

5.21. $z = e^{xy}$, $\quad x = t,\ y = 2t.$

5.22. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $\quad x = t + 1,\ y = t^2.$

5.23. $z = xe^{y}$, $\quad x = 5t^2 - 1,\ y = 6t.$

5.24. $z = \frac{xy}{x-y}$, $\quad x = \cos t,\ y = \sin t.$

5.25. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$, $\quad x = 3t + 1,\ y = 2t - 1.$

5.26. $z = \ln\sin(x - y)$, $\quad y = x^3.$

5.27. $z = \frac{x}{3y-2x}$, $\quad y = 6x + 3.$

5.28. $z = y\ln x$, $\quad y = x^2.$

5.29. $z = x\ln y$, $\quad y = x.$

5.30. $z = x^{y}$, $\quad x = u + v,\ y = u - v.$

6. Найти производные z'_x, z'_y (либо y'_x) неявно заданных функций.

6.1. $2\cos(x - 2y) = 2y - x.$ $\quad$ 6.2. $\ln(x + y) = xy.$

6.3. $\cos(ax + by - cz) = ax + by - cz.$ $\quad$ 6.4. $z^2 = xy.$

6.5. $\arcsin(x + y) = 2x - y.$ $\quad$ 6.6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

6.7. $\arccos(x + z) = z^2 + x - y.$ $\quad$ 6.8. $\operatorname{ctg}\frac{x}{y} = \sin x.$

6.9. $z^2 - 3z + y - x = 0.$ $\quad$ 6.10. $z^3 = x + y + z.$

6.11. $x^3 + y^2 + 2x - 2y = 2.$ $\quad$ 6.12. $x^2 - 4y^2 = 4.$

6.13. $5x^2 + 6y^2 - 3x + y = 0$.

6.14. $\operatorname{arctg} y = x + y$.

6.15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

6.16. $xy + \ln y + \ln x = 0$.

6.17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$.

6.18. $y + x = e^{\frac{y}{x}}$.

6.19. $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$.

6.20. $xyz = a^3$.

6.21. $3x^3 - 6xy^2 + 5x^2y - 6y = 0$.

6.22. $\frac{x+y}{x} = y^2$.

6.23. $x^4 - 2xz^2 + 3y^2 - 4xz = 0$.

6.24. $\frac{x+y}{x-y} = y - 1$.

6.25. $z + xy = z^2 - x + y$.

6.26. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

6.27. $3x^2 - 6xy + y^2 - z^2 - z = 0$.

6.28. $\operatorname{tg} xy = y$.

6.29. $x^3 - 7x^2y + y^2 - 2y = 0$.

6.30. $y^2 = \ln(x + y)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубровин, Н. И.* Задания к типовым расчетам по математике / Н. И. Дубровин. – Владимир : Изд-во ВПИ, 1993. – 64 с.

2. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие / Б. П. Демидович. – 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та : ЧеРо, 1997. – 624 с. – ISBN 5-211-03645-X.

3. *Кузнецов, Л. А*. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2005. – 240 с. – ISBN 5-8114-0574-X.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДУБРОВИН Николай Иванович
ТУХТАМИРЗАЕВ Адхам Юлбарсмирзаевич

ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ. 1-Й СЕМЕСТР

Подписано в печать 20.04.11.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 3,49. Тираж 150 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
600000, Владимир, ул. Горького, 87.