Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра теплогазоснабжения, вентиляции и гидравлики

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Конспект лекций

Составитель
К.И. ЗУЕВ

Владимир 2011

УДК 53.072.2
ББК 22.365.5
О75

Рецензент

Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
А.И. Евдокимов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Основы теории подобия : конспект лекций / Владим. гос. ун-т ;
О75 сост. К. И. Зуев. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 51 с.

Рассмотрены вопросы применения теории подобия и метода анализа размерностей при моделировании гидравлических процессов, процессов конвективного тепломассообмена и проектирования лопастных нагнетателей. Соответствует программе курса «Основы теории подобия».

Предназначен для студентов очной и заочной форм обучения специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 53.072.2
ББК 22.365.5

Введение

Конспект лекций «Основы теории подобия» предназначен для студентов очной и заочной форм обучения специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция». Ввиду ограниченного количества литературы по данному предмету книга поможет студентам в решении практических заданий и подготовке к экзамену по данному курсу.

Конспект лекций состоит из четырех частей в соответствии с вопросами, рассматриваемыми по специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция». Первая часть раскрывает основные определения теории подобия и метода анализа размерности. Во второй части рассматриваются вопросы гидродинамического подобия и критерии подобия, используемые при моделировании гидродинамических процессов. В третьей части раскрываются вопросы подобия процессов конвективного тепломассообмена и критерии подобия, используемые при моделировании этих процессов, а в четвертой части – вопросы подобия лопастных нагнетателей и критерии подобия, используемые при моделировании и конструировании лопастных нагнетателей.

В конце даны примеры решения задач по данному курсу и задания для заочников, а также тесты для проверки и закрепления знаний.

1. ПОДОБИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ

1.1. Описание явлений с помощью размерных и безразмерных величин

Понятие о физическом подобии явлений, протекающих в природе и в технических устройствах, играет в современных научных исследованиях и проектных разработках в области аэродинамики, теплообмена и массообмена весьма значительную роль. Соображения, основанные на представлениях о физическом подобии, привели к установлению ряда безразмерных комплексов, применение которых стало необходимым как при постановке эксперимента и его обобщении, так и при аналитических исследованиях.

Одним из инженерных методов проектирования сложных гидроаэродинамических, тепловых и диффузионных аппаратов и устройств (элементы и комплексы гидротехнических сооружений, суда, самолеты, топливосжигающие устройства, паровые котлы, турбомашины, теплообменные аппараты, ректификационные колонны и т. п.) является их изучение на моделях. В более простых случаях удается воспроизвести практически весь комплекс наиболее важных процессов, протекающих в образце (например при моделировании течений несжимаемой жидкости в каналах, воздушных завес и т. п.). В более сложных случаях, в частности при проектировании мощного парового котла, моделируются отдельные элементы агрегата, причем зачастую в абстрагированном от реальных условий виде (изотермическое моделирование камер сгорания, моделирование работы турбомашин путем продувки плоских решеток в аэродинамических трубах и т. п.). Поэтому практика моделирования требует от экспериментатора и проектировщика не только глубоких знаний по существу рассматриваемых проблем, но и специальных сведений по применению принципов физического подобия и правил моделирования физико-химических процессов с использованием размерных и безразмерных величин.

Принципиальное различие между размерными и безразмерными величинами заключается в том, что, оперируя с размерными величинами, мы применяем для численного определения данной размерной величины в самых разнообразных явлениях один и тот же по существу произвольный масштаб (эталон метра, эталон килограмма и т. п.), а при численном определении данной безразмерной величины применяется некоторый «внутренний» масштаб, органически связанный с рассматриваемым явлением.

Так, например, любое течение газа можно численно характеризовать скоростью, выраженной в метрах в секунду. Характеризуя же скорость течения безразмерным числом М, т. е. отношением скорости течения к скорости распространения звука в данной среде, сразу получаем представление об области течения (дозвуковая, трансзвуковая, сверхзвуковая) и о ряде явлений, возникающих в этой области (влияние сжимаемости, аэродинамический нагрев, вероятность появления скачков уплотнения и т. п.). В физических исследованиях в качестве основных единиц измерения принимаются единицы длины, времени и массы. В системе СИ к ним добавляются единицы силы тока, силы света и термодинамической температуры.

В технических расчетах до последнего времени чаще всего пользуются единицами измерения длины, времени и силы. В этом случае единица массы, как и единицы скорости, энергии, площади, вязкости и другие, являются производными. В ряде случаев применяются специальные единицы измерения для характеристики той или иной величины (калория, градус, вольт, пуаз и т. п.). Однако такого рода единицы измерения также могут быть выражены через три первичные основные единицы измерения.

Единицы измерения производных величин и единицы измерения основных величин связаны друг с другом формулой размерности, которая имеет вид степенных одночленов. Так, например, при трех основных единицах измерения α, β и γ производная единица

$$\varphi = \alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c.$$

Законы природы не могут зависеть от выбора тех или иных систем измерений. Следовательно, количественные связи между различными величинами должны иметь определенную структуру, в которой только численные значения постоянных могут меняться в зависимости от выбранной системы единиц измерений.

1.2. Метод подобия и эксперимент

В зависимости от объема предварительных знаний об изучаемом процессе соотношение экспериментального исследования и теоретического анализа различно. Могут иметь место следующие случаи.

1. Проводятся первичные опыты, которые вскрывают основные качественные особенности рассматриваемого процесса и выявляют параметры, наиболее существенно влияющие на его протекание. При этом обычно выявляются параметры, имеющие определенную размерность (давление, плотность, скорость течения, энтальпия, константы равновесия и т. п.). Описывается физическая модель.

2. Переход от физической модели к математической связан с большими трудностями. На этом этапе определяются основные расчетные коэффициенты (гидравлического сопротивления, теплоотдачи и т. п.) и составляется перечень размерных параметров, совокупность кото-

рых практически однозначно определяет величину соответствующей расчетной характеристики. Эксперименты имеют целью установление эмпирических связей между известными величинами и накопление сведений о процессе для выявления описывающих его общих закономерностей. Количественный анализ может быть проведен по двум направлениям. Первое – поиск известных уравнений (дифференциальных, алгебраических и т.д.), определяющих процесс и соответствующих постановке задачи. Второе – вывод соотношений, характеризующих процесс в общих чертах (используя метод размерностей).

3. С помощью первого направления формулируется математическая модель изучаемого явления, т. е. составляются описывающие его системы уравнений. Но так как они описывают множество таких же процессов, одинаковых по физической природе, необходимо сформулировать условия единственности решения. Такими условиями считаются начальные и граничные условия, которые формулируются к этим уравнениям на основе уже известного перечня независимых параметров процесса. При этом, естественно, более глубокое теоретическое осмысливание изучаемого процесса позволяет также более детально исследовать и условия его однозначности. В том случае, когда возможно достаточно общее аналитическое решение основных уравнений, опыты имеют целью апробацию полученного решения и уточнение расчетных коэффициентов.

4. Кроме независимых переменных в уравнениях, исследователь располагает совокупностью постоянных параметров, которые тоже являются аргументами задачи. Рассматривая отдельные величины, входящие в уравнения, взятые порознь, вне связи с другими величинами, мы не получим правильного представления о той роли, которую они играют в развитии процесса.

Например, характер движения жидкости зависит от соотношения между тремя силами: силами вязкого трения, силой тяжести и силой инерции. При этом отношение инерционной силы к силе вязкого трения изменяется как скорость течения и размеры системы в первой степени, а отношение инерционной силы к силе тяжести возрастает как квадрат скорости и убывает обратно первой степени размеров. Следовательно, существенны не отдельные величины, а их комбинации, соответствующие этим воздействиям.

Поэтому первоначальные величины надо вводить не как разрозненное множество индивидуальных параметров, а в виде комплексов, в самой структуре которых отражено взаимодействие различных влияний. Только сгруппировав первоначальные величины по определенным законам в комплексы, мы получаем средства количественного исследования, адекватные физической модели процесса. Кроме этого при экспериментальных исследованиях очень трудно изменять одну переменную и остальные поддерживать на постоянном уровне, так как они взаимосвязаны. Полученный комплекс даст новую комплексную переменную, отражающую взаимосвязь нескольких параметров, по которой можно определять изменения, происходящие в исследуемом процессе. Такие комплексы носят названия обобщенных переменных. Они должны быть безразмерными, чтобы характеризовать подобные процессы.

5. Для перехода к безразмерным комплексам можно применить метод масштабных преобразований. Выбираются существенные для данного процесса величины, входящие в уравнения, и граничные (или начальные) условия в качестве масштабов преобразования. Уравнения и условия единственности решения приводятся к безразмерному виду. В уравнения войдут безразмерные комплексы, которые могут быть использованы при количественном анализе исследуемого процесса и быть критериями подобия подобных процессов.

В зависимости от объема предварительных знаний о процессе приложение к нему метода подобия основывается на анализе безразмерной формы основных уравнений.

В том и другом случае получается некоторая система безразмерных критериев подобия, связь между которыми и следует изучать в эксперименте. При этом резко уменьшается объем экспериментов.

1.3. Применение метода анализа размерностей

В основе этого метода лежит так называемая Пи-теорема, или теорема Бэкингема, которая заключается в следующем: ***функциональная зависимость между n физическими размерными величинами всегда может быть преобразована в уравнение, содержащее m безразмерных комбинаций тех же физических величин (так называемых***

чисел π), причем m всегда меньше n. Разность n-m=z представляет собой число первичных (основных) единиц, например в механике и гидромеханике – единицы длины, времени и массы, т. е. z = 3, а в теплотехнике к перечисленным единицам добавляется еще температура, следовательно z = 4.

Был рассмотрен такой случай, когда уравнение Бернулли, записанное в размерных величинах, связывало между собой пять размерных переменных: v_1 ,p_1 ,v_2, p_2 и h_M. А после приведения этого уравнения к безразмерному виду в нем остались лишь две безразмерные переменные: число Эйлера Eu и коэффициент потерь ζ.

Рассмотрим получение формулы Дарси – Вейсбаха.

Очевидно, что на потерю давления на трение в трубе $P_{тр} = h_{тр}\,\rho g$ влияют (или могут влиять) следующие факторы: длина l и диаметр d трубы, средняя скорость течения v, свойства жидкости ρ и μ и средняя высота бугорков шероховатости Δ на стенках трубы.

Запишем интересующую функцию в виде

$$P_{тр} = f_1\,(l,\ d,\ v,\ \rho,\ \mu,\ \Delta).$$

Число переменных n = 7, следовательно, в соответствии с Пи-теоремой $m = n\text{-}z$ = 7-3 = 4 и вместо предыдущего можем записать

$$\pi = \varphi(\pi_1,\ \pi_2\ ,\ \pi_3),$$

где π, π_1, π_2 и π_3 - безразмерные комплексы, вид которых найдем следующим путем.

Из числа n переменных выберем три с независимыми размерностями, включающими в себя три основные единицы (длины L, времени T и массы M), например d, v и ρ; их размерности в системе LTM таковы:

$$[d] = L,$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[\rho] = ML^{-1}.$$

Выразим числа π, π_1, π_2 и π_3 делением на выбранные три переменные в некоторых степенях x, y и z (с соответствующими индексами) остальных четырех переменных, а именно: p_{Tp}, l, μ и Δ , которые имеют следующие размерности:

$$[p]=M/LT^2,$$
$$[l]=L,[\Delta]=L,$$
$$[\mu]=M/LT.$$

Таким образом, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\pi=\frac{p_{Tp}}{d^x\cdot v^y\cdot\rho^z}; \qquad \pi_1=\frac{l}{d^{x_1}\cdot v^{y_1}\cdot\rho^{z_1}};\\
&\pi_2=\frac{\mu}{d^{x_2}\cdot v^{y_2}\cdot\rho^{z_2}}; \qquad \pi_3=\frac{\Delta}{d^{x_3}\cdot v^{y_3}\cdot\rho^{z_3}}.
\end{aligned}\right\}$$

Найдем все 12 показателей степеней из условия безразмерности всех чисел π, т. е. сравнением размерностей при L, T и M во всех четырех выражениях, а именно:

показатели степени при L:

$-1=x+y-3z;\quad 1=x_1+y_1-3z_1;$

$-1=x_2+y_2-3z_2;\quad 1=x_3+y_3-3z_3;$

показатели степени при T:

$-2=-y;\quad 0=-y_1;\quad -1=-y_2;\quad 0=-y_3;$

показатели степени при M:

$1=z;\quad 0=z_1,\quad 1=z_2;\quad 0=z_3.$

Решая совместно полученные уравнения, получаем:

$x=0;\quad y=2;\quad z=1;$

$x_1=1;\ y_1=0;\ z_1=0;$

$x_2=1;\ y_2=1;\ z_2=1;$

$x_3=1;\ y_3=0;\ z_3=0.$

Таким образом, теперь мы можем записать

$$\frac{p_{mp}}{\rho v^2}=\varphi\left(\frac{l}{d};\ \frac{\mu}{dv\rho};\ \frac{\Delta}{d}\right)$$

или, учитывая пропорциональность между $p_{тр}$ и l/d и выражение числа Рейнольдса, находим:

$$h_{mp}=\frac{p_{mp}}{\rho g}=\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\varphi_1\left(\mathrm{Re},\Delta/d\right).$$

Обозначив функцию φ_1 через λ_T, окончательно получим:

$$h_{TP} = \lambda_T \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g},$$

где $\lambda_T = \varphi_1 \left(\mathrm{Re}, \frac{\Delta}{d}\right)$.

Таким образом, получили формулу Дарси-Вейсбаха, а также информацию о том, какими факторами определяется коэффициент Дарси λ_T.

1.4. Соотношение между теорией подобия и анализом размерностей

С помощью аппарата анализа размерностей задача о структуре обобщенных переменных решается по следующей схеме:

1. Определяется тип задачи и выбирается система размерностей.
2. Составляется перечень величин, существенных для процесса (включая размерные постоянные).
3. Определяется число обобщенных переменных (как разность между общим числом величин и числом первичных величин).
4. Формулы размерности преобразуются в степенные комплексы.
5. Исключаются первичные величины, не входящие в перечень величин, существенных для процесса.

На этом заканчивается стадия решения, связанная с применением аппарата размерностей. Все остальные операции (выделение комплексов-аргументов и комплексов-функций, построение параметрических критериев) основаны на соображениях, не соприкасающихся с понятием размерности.

В этой схеме принципиальное значение имеют два момента:

1. Определение типа задачи (соответственно выбор системы размерностей).

Из-за неправильного понимания физического содержания задачи будет неверно определена совокупность первичных величин.

2. Составление перечня существенных величин.

Возможно искажение анализа протекания процесса при недостатке существенных величин либо при их избытке.

Различие двух форм обобщенного анализа – теории подобия и анализа размерностей – это прежде всего различие в объеме предварительных знаний.

Применимость теории подобия существенным образом зависит от возможности правильно (в аналитическом смысле) поставить задачу или, по крайней мере, составить систему основных уравнений и на основании физических соображений сформулировать условия единственности решения. Обработка этих уравнений позволяет найти обобщенные переменные в виде комплексов величин, объединяемых в одно целое именно теми связями, которые заложены уже в самой модели процесса и в неявной форме выражены в уравнениях.

Предпосылки применимости анализа размерностей существенно слабее. Важная особенность анализа размерностей заключается в том, что он опирается на аппарат, не требующий привлечения уравнений задачи. Для его применения достаточно знать, в какой системе общих соотношений выступают величины, существенные для процесса.

Сущность различия между теорией подобия и анализом размерностей заключается в том, что аппарат теории подобия применяется к уравнениям процесса, а аппарат анализа размерностей – к определительным уравнениям (формулам размерности). Если уравнения процесса неизвестны, то применение анализа размерностей становится неизбежным.

2. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

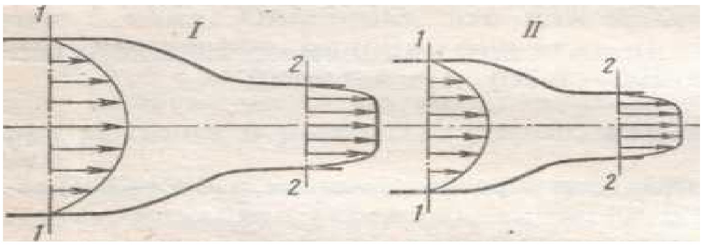
Условия гидродинамического подобия. Основные критерии подобия

При изучении движения реальных жидкостей встречается много трудностей, потому что на характер движения и происходящие при этом процессы влияют многие факторы. Важный этап этого изучения - отбор определяющих для изучаемого процесса факторов. Следующий этап изучения - это установление зависимости интересующей величины от системы выбранных определяющих факторов. Этот этап может выполняться двумя путями: аналитическим, основанным на законах механики и физики, и экспериментальным. Первый путь применим для ограниченного числа задач и обычно лишь для упрощенных моделей явлений. Другой путь, экспериментальный, в принципе может учесть многие факторы, но он требует научно обоснованной постановки опытов, планирования эксперимента, ограничения его объема необходимым минимумом и систематизации результатов опытов. При этом должно быть обосновано моделирование явлений.

Эти задачи позволяет решать так называемая теория ***гидродинамического подобия,*** т. е. подобия потоков несжимаемой жидкости.

Гидродинамическое подобие складывается из трех составляющих: геометрического подобия, кинематического и динамического.

Геометрическое подобие, как известно из геометрии, представляет собой пропорциональность сходственных размеров и равенство соответствующих углов. В гидравлике под геометрическим подобием понимают подобие тех поверхностей, которые ограничивают потоки, т. е. подобие русел (или каналов). При этом предполагают подобными не только рассматриваемые участки русел, но и расположенные непосредственно перед ними и за ними, которые влияют на характер течения в рассматриваемых участках.



Подобные потоки

Отношение двух сходственных размеров подобных русел (см. рисунок) назовем линейным масштабом и обозначим через κ_L. Эта величина одинакова (idem) для подобных русел I и II, т. е.

$$\kappa_L = L_I / L_{II} = idem.$$

Кинематическое подобие означает пропорциональность местных скоростей в сходственных точках и равенство углов, характеризующих направление этих скоростей

$$\frac{v_{\mathrm{I}}}{v_{\mathrm{II}}} = \frac{v_x}{v_{x\mathrm{II}}} = \frac{v_{y\mathrm{I}}}{v_{y\mathrm{II}}} = \frac{v_{z\mathrm{I}}}{v_{z\mathrm{II}}} = k_v = idem,$$

где k_v - масштаб скоростей, одинаковый при кинематическом подобии.

Так как $v = L / T$, $k_v = k_L / k_T$ (где T - время, k_T - масштаб времени), из кинематического подобия вытекает геометрическое подобие линий тока. Очевидно, что для кинематического подобия требуется геометрическое подобие русел.

Динамическое подобие – это пропорциональность сил, действующих на сходственные объемы в кинематически подобных потоках, и равенство углов, характеризующих направление этих сил.

В потоках жидкостей обычно действуют разные силы: силы давления, вязкости (трения), тяжести и др. Соблюдение их пропорциональности означает полное гидродинамическое подобие. Осуществление на практике полного гидродинамического подобия оказывается весьма затруднительным, поэтому обычно имеют дело с частичным (неполным) подобием, при котором соблюдается пропорциональность лишь основных, главных сил.

Для напорных течений в закрытых руслах, т.е. для потоков в трубах, в гидромашинах и тому подобных, такими силами, как показывает анализ, являются силы давления, вязкости и силы инерции. На жидкость действует также сила тяжести, но в напорных потоках ее действие проявляется через давление, т. е. оно сводится к соответствующему изменению давления. Поэтому, рассматривая так называемое приведенное давление $p_{пр} = p + \rho gz$, тем самым учитываем силу тяжести.

Силы инерции определяются произведением массы на ускорение, т. е. $F = ma$, а их отношение в подобных потоках равно масштабу сил

$$k_F = \frac{F_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{II}}} = \frac{(m \cdot a)_{\mathrm{I}}}{(m \cdot a)_{\mathrm{II}}} = \frac{k_\rho \cdot k_L^3 \cdot k_L}{k_T^2} = k_\rho \cdot k_L^3 \cdot k_v,$$

где k_ρ - масштаб плотностей.

Таким образом, силы инерции пропорциональны плотности, скорости во второй степени и размеру L во второй степени, который, в свою очередь, пропорционален площади S

$$F_{ин} \approx \rho \cdot S \cdot v^2.$$

Заметим, что этому же произведению $\rho{\cdot}S{\cdot}v^2$ пропорциональны силы, с которыми поток воздействует (или способен воздействовать) на преграды, лопасти гидромашин, обтекаемые тела. Примем силы инерции за основу и будем другие силы, действующие на жидкость, сравнивать с инерционными, т. е. с выражением $\rho{\cdot}S{\cdot}v^2$.

Таким образом, для гидродинамических подобных потоков I и II имеем

$$\left(\frac{F}{\rho \cdot S \cdot v^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{F}{\rho \cdot S \cdot v^2}\right)_{\mathrm{II}} = Ne = idem. \qquad (2.1)$$

Это отношение, одинаковое для подобных потоков, называют числом Ньютона. Здесь под F подразумевается основная сила: сила давления, вязкости, тяжести или др. Следовательно, соотношение представляет собой общий вид закона гидродинамического подобия. Рассмотрим три характерных случая воздействия на движущуюся жидкость основных сил и найдем условия подобия потоков.

1. На жидкость действуют лишь силы давления и инерции.

Тогда $F = \Delta pS \sim \Delta pL^2$ и условие (2.1) примет вид

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{II}} = Eu = idem,$$

где Δp – некоторая разность давлений (или просто давление); Eu – безразмерный критерий, называемый числом Эйлера.

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в данном случае является равенство для них чисел Эйлера.

Из предыдущего ясен ***физический смысл числа Эйлера: это есть величина, пропорциональная отношению сил давления к силам инерции.***

2. На жидкость действуют силы вязкости, давления и инерции.

Тогда

$$F = \mu\ (dv/dy)\ S \sim v{\cdot}p\ (v/L)\ L^2 \sim v{\cdot}p{\cdot}v{\cdot}L$$

и условие (2.1) после деления последнего выражения на $p\ {\cdot}v^2\ {\cdot}L^2$ примет вид

$$\left(\frac{v}{\upsilon \cdot L}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{v}{\upsilon \cdot L}\right)_{\mathrm{II}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\upsilon \cdot L}{v}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\upsilon \cdot L}{v}\right)_{\mathrm{II}} = Re = idem.$$

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в рассматриваемом случае будет равенство чисел Рейнольдса, подсчитанных для сходственных сечений потоков. Последнее условие считается особенно важным в данном курсе, так как им устанавливается основной критерий подобия напорных потоков - число Рейнольдса. За характерный размер L при подсчете числа Рейнольдса должен приниматься поперечный размер потока, например, диаметр сечения.

Из предыдущего ясен ***физический смысл числа Рейнольдса: это есть величина, пропорциональная отношению сил вязкости к силам инерции.***

3. На жидкость действуют силы тяжести, давления и инерции. Тогда $F \sim p \cdot g \cdot L^3$ и условие (2.1) принимает вид

$$\left(\frac{\rho \cdot d \cdot L^3}{\rho \cdot v^2 \cdot L^3}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{\rho \cdot d \cdot L^3}{\rho \cdot v^2 \cdot L^3}\right)_{\text{II}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{v^2}{g \cdot L}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{v^2}{g \cdot L}\right)_{\text{II}} = Fr = idem, \quad (2.2)$$

где Fr – безразмерный критерий, называемый числом Фруда.

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в данном случае является равенство чисел Фруда.

Из предыдущего ясно, что ***число Фруда – это величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам тяжести.***

Критерий Фруда важен при рассмотрении безнапорных течений в открытых руслах, для напорных течений его можно не учитывать.

Для установления связи между гидродинамическим подобием и основным уравнением гидравлики - уравнением Бернулли - рассмотрим два напорных потока I и II, которые подобны друг другу гидродинамически (см. рисунок), и отметим на них сходственные сечения 1-1 и 2-2.

Запишем уравнение Бернулли для тех же сечений 1-1 и 2-2 одного из напорных потоков вязкой жидкости, подобных гидродинамически. Будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \varsigma_1 \frac{v_2^2}{2g}.$$

После приведения этого уравнения к безразмерному виду подобно предыдущему получим

$$2(p_1 - p_2)/(\rho \upsilon_2^2) = 2Eu = \alpha_2 - \alpha_1 (S_2^2 / S_1^2) + \zeta.$$

Число *Eu* одинаково для рассматриваемых подобных потоков вследствие их динамического подобия; коэффициенты Кориолиса a_1 и a_2 одинаковы из-за кинематического подобия, следовательно, одинаковым будет и коэффициент потерь ζ, а также все уравнение.

Если же рассматривать подобные потоки в трубах постоянного сечения, то одинаковым будет коэффициент потерь на трение по длине (λ).

Итак, в подобных напорных потоках имеем равенство безразмерных коэффициентов и чисел a, ζ, λ, *Eu*, *Re* и некоторых других, которые будут введены в рассмотрение ниже. Изменение числа *Re* означает, что изменяется соотношение основных сил в потоке, в связи с чем указанные коэффициенты могут также несколько измениться. Поэтому все коэффициенты следует рассматривать как функции основного и определяющего критерия для напорных потоков вязкой жидкости - числа Рейнольдса *Re* (хотя в некоторых интервалах числа *Re* эти коэффициенты могут оставаться постоянными).

При экспериментальных исследованиях и моделировании напорных течений в лабораторных условиях необходимо, во-первых, обеспечить геометрическое подобие модели (I) и натуры (II), включая условия входа и выхода, и, во-вторых, соблюсти равенство чисел Рейнольдса: $Re_{\mathrm{I}} = Re_{\mathrm{II}}$. Из второго условия получаем необходимую скорость потока при эксперименте

$$\upsilon_{\mathrm{I}} = \upsilon_{\mathrm{II}} (L_{\mathrm{II}} \cdot \nu_{\mathrm{I}}) / (L_{\mathrm{I}} \cdot \nu_{\mathrm{II}}).$$

В частном случае при $\nu_{\mathrm{I}} = \nu_{\mathrm{II}}$ скорость при эксперименте должна быть больше натурной в $L_{\mathrm{II}}/L_{\mathrm{I}}$ раз. Применяя менее вязкую жидкость (или ту же жидкость, но при повышенной температуре), можно снизить скорость ν_{I}.

Помимо перечисленных основных критериев подобия (*Eu, Re, Fr*), в гидравлике применяют и другие критерии для особых случаев течения жидкости. Так, при рассмотрении течений, связанных с поверхностным натяжением (например при распаде струи на капли, при впрыскивании топлива в ДВС), вводят критерий Вебера (*We*), равный отношению сил поверхностного натяжения к силам инерции. Для этого случая условие (2.1) принимает вид

$$We = \sigma \cdot L/(p \cdot v^{2} \cdot L^{2}) = \sigma/(p \cdot v^{2} \cdot L) = idem.$$

При рассмотрении неустановившихся (нестационарных) периодических течений с периодом T (например, течений в трубопроводе, присоединенном к поршневому насосу) вводят критерий Струхаля (Sh), учитывающий силы инерции от нестационарности, называемые локальными. Последние пропорциональны массе (pL^3) и ускорению dv/dt, которое, в свою очередь, пропорционально v/T. Следовательно, условие (2.1) для этого случая принимает вид

$$p \cdot L^{3} \cdot v/(p \cdot v^{2} \cdot L^{2} \cdot T) = L/(v \cdot T) = idem \quad \text{или} \quad Sh = v \cdot (T/L) = idem.$$

При рассмотрении движений жидкости с учетом ее сжимаемости (например движений эмульсий) вводят критерий Маха (M), учитывающий силы упругости. Последние пропорциональны площади (L^2) и объемному модулю упругости $K = p \cdot c^2$. Поэтому силы упругости пропорциональны pc^2L^2 и условие (2.1) принимает вид

$$P \cdot c^{2} \cdot L^{2}/(p \cdot v^{2} \cdot L^{2}) = c^{2}/(v^{2}) = idem \quad \text{или} \quad M = v/c = idem.$$

Критерий Маха имеет очень большое значение при рассмотрении движений газа. Чем ближе число M к единице, тем больше влияние сжимаемости газа при его движении.

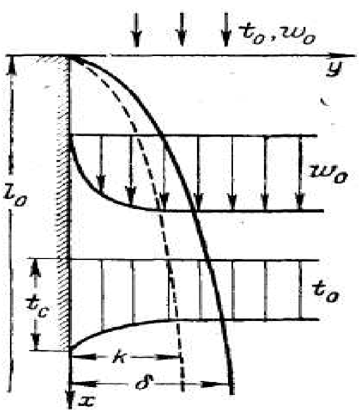
3. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения полной системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. При изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование. Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно.

С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе. Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов. Имеется несколько методов выполнения этой операции. Мы воспользуемся одним из них – методом масштабных преобразований.

3.1. Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных

На рисунке показана поверхность твердого тела, омываемая несжимаемой жидкостью, температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны соответственно t_0 и w_0. Размер тела *l*о задан.



К постановке краевой задачи конвективного теплообмена

Температура поверхности тела равна t_c. Для определенности примем, что $t_c > to$. Будем полагать, что физические параметры жидкости постоянны (учтем только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Расположим оси координат так, как показано на рисунке. Для простоты примем, что ось O_y нормальна к поверхности тела, а ось O_x направлена вдоль тела и вертикальна.

При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси O_y и O_z будут равны нулю $(g_y=g_z = 0)$. Размер тела вдоль оси O_z намного больше l_o.

При принятых условиях поля температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в приближении пограничного слоя. Учтем дополнительно подъемную силу $\rho \cdot g \cdot \beta \cdot V$, считая ее соизмеримой с вязкостным членом $\mu\{d^2 w_x/dy^2)$. Введем также обозначение $\theta = t - t_0$, где t_0 – температура жидкости (заметим, что $dt = d\,\theta$, так как t_0 = const).

Уравнение энергии $$w_x \frac{d\theta}{dx} + w_y \frac{d\theta}{dy} = a \frac{d^2\theta}{dy^2}.$$

Уравнение движения $$w_x \frac{dw_x}{dx} + w_y \frac{dw_x}{dy} = \nu \frac{d^2 w_x}{dy^2} + g \cdot \beta \cdot V.$$

Уравнение сплошности $$\frac{dw_x}{dx} + \frac{dw_y}{dy} = 0.$$

Напишем граничные условия

1) Вдали от тела $(y = \infty)$ $\theta_x = \theta_y = 0$; $w_x = w_0$; $w_y = 0$.
2) На поверхности тела ($y = 0$, $0 <= x <= l_0$, $-\infty < z < +\infty$)

   $\theta = \theta c = t_c — t_0$ = const; $w_x = w_y = w_z = 0$.

В уравнениях и условиях однозначности можно различить три вида величин:

н е з а в и с и м ы е п е р е м е н н ы е – это координаты x, y;

з а в и с и м ы е п е р е м е н н ы е – это θ, w_x и w_y, они однозначно определяются значениями независимых переменных, если заданы величины, входящие в условия однозначности;

п о с т о я н н ы е в е л и ч и н ы – это w_0, t_0,, lо, θс, v, a, $g\beta$ и др., они задаются условиями однозначности и для определенной задачи являются постоянными, не зависящими от других переменных, от задачи к задаче они могут меняться. Постоянными эти величины называют потому, что они не являются функцией независимых переменных.

Величины, содержащиеся в уравнениях и условиях однозначности, можно сгруппировать в комплексы. Число безразмерных комплексов будет меньше числа размерных величин.

Для приведения к безразмерному виду выберем масштабы приведения. В качестве масштабов удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности. Для линейных величин выберем какой-либо характерный размер, например длину поверхности теплообмена $l_о$, для скорости w_0, для температуры $\theta_с$.

Обозначим безразмерные величины

$$X=x/l_0\ ,\quad Y=y/l_0\ ,\quad W_x=w_x/w_0\ ,\ W_y=w_y/w_0\ ,\ \Theta=\theta/\theta_c\ .$$

Тогда $x = l_0 \cdot X, \quad y = l_0 \cdot Y, \quad w_x = W_x\, w_0, \quad w_y = w_0\, W_y\ ,\ \theta = \theta_c \Theta.$ (3.1)

Подставим в уравнения значения величин согласно равенствам (3.1). Преобразуем уравнение энергии

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}=\frac{d}{d(l_0Y)}\left[\frac{d(V_c)}{d(l_0Y)}\right]=\frac{V_c}{l_0^2}\cdot\frac{d^2\Theta}{dY^2}\,.$$

В результате подстановки равенств после умножения левой и правой частей уравнения энергии на $l_0{}^2/a$ будем иметь

$$\frac{w_0\cdot l_0}{a}\left(W_x\frac{dW_x}{dX}+W_y\frac{dW_x}{dY}\right)=\frac{d^2\Theta}{dY^2}\,.$$

Аналогично преобразуем и уравнение движения. После подстановки равенства (3.1) в уравнение движения умножим его на $l^2_o/(\nu \cdot w_0)$. В результате получим

$$\frac{w_0\cdot l_0}{\nu}\left(W_x\frac{dW_x}{dX}+W_y\frac{dW_x}{dY}\right)=\frac{d^2W_x}{dY^2}+\frac{g\cdot\beta\cdot V_c\cdot l_0^2}{\nu\cdot w_0}\,.$$

Сделаем следующее преобразование комплекса, входящего в последнее уравнение:

$$\frac{g\cdot\beta\cdot V_c\cdot l_0^2}{\nu\cdot w_0}\Theta=\frac{g\cdot\beta\cdot V_c\cdot l_0^3}{\nu^2}\cdot\frac{\nu}{w_0\cdot l_0}\Theta\,.$$

Учитывая эти преобразования, окончательно получаем:

$$\frac{w_0l_0}{\nu}\left(W_x\frac{dW_x}{dX}+W_y\frac{dW_x}{dY}\right)=\frac{d^2W_x}{dY^2}+\frac{g\beta V_cl_0^3}{\nu^2}\frac{\nu}{w_0l_0}\Theta\,.$$

После преобразования уравнения сплошности получим

$$\frac{w_0\cdot l_0}{\nu}\left(\frac{dW_x}{dX}+\frac{dW_y}{dY}\right)=0\ ,\ \text{следовательно}\ \left(\frac{dW_x}{dX}+\frac{dW_y}{dY}\right)=0\,.$$

Приводя к безразмерному виду граничные условия, получаем:

1) Вдали от тела ($У=\infty$) $\Theta=0$, $W_x=1$, $W_y=0$. (3.2)

2) На поверхности тела ($У$=0, 0<=x<=1). (3.3)

$$\Theta=\Theta_c=1, \quad W_x= W_y=0.$$

Из условий (3.2) и (3.3) следует, что, несмотря на то что величины и другие, входящие в размерные граничные условия могут иметь различные числовые значения, каждая из безразмерных величин θ_c, θ_0 и др. имеет в рассматриваемом случае вполне конкретное числовое значение.

При известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению

$$\alpha=-\frac{\lambda}{t_c-t_0}\left(\frac{dt}{dy}\right)_{y=0}.$$

Приводя к записи в безразмерных переменных $\frac{\alpha\cdot l_0}{\lambda}$, получаем:

$$\frac{\alpha l_0}{D}=-\left(\frac{d\Theta}{dY}\right)_{Y=0}.$$

3.2. Безразмерные переменные (числа подобия) и уравнения подобия

Помимо безразмерных величин θ, W_{Xi} W_y и безразмерных координат, составленных из однородных физических величин, в уравнения входят также безразмерные комплексы, состоящие из разнородных физических величин:

$$\frac{\alpha\cdot l_0}{\lambda};\quad \frac{w_0\cdot l_0}{\nu};\quad \frac{w_0\cdot l_0}{\alpha};\quad \frac{g\cdot\beta\cdot V_0\cdot l_0^3}{\nu^2}.$$

Этим комплексам, называемым числами подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие гидродинамики или теплопередачи.

1. Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$Nu=\frac{\alpha\cdot l_0}{\lambda_ж}$$

и называют числом Н у с с е л ь т а, или безразмерным коэффициентом теплоотдачи. Число Нуссельта характеризует теплообмен на границе стенка - жидкость. В задачах конвективного теплообмена число Nu

обычно искомая величина, поскольку в него входит определяемая величина a.

Несмотря на внешнее сходство с числом Био (Bi)

$$Bi=(\acute{\alpha}_p\cdot \delta)/\lambda_{cm},$$

используемым при изучении теплопроводности, число Нуссельта существенно отличается от него. В число Bi входит коэффициент теплопроводности твердого тела; в число Nu — коэффициент теплопроводности жидкости. Кроме того, в число Био коэффициент теплоотдачи вводится как величина, заданная в условиях однозначности, мы же рассматриваем коэффициент теплоотдачи, входящий в Nu, как величину искомую.

2. Безразмерный комплекс

$$Re = \frac{w_0 \cdot l_0}{\nu}$$

называют ***числом Рейнольдса*. *Оно характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости.*** Число Рейнольдса – важная характеристика как изотермического, так и неизотермического процессов течения жидкости.

3. Третий безразмерный комплекс обозначают

$$Pe = \frac{w_0 \cdot l_0}{a}$$

и называют ***числом Пекле***. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{w_0 \cdot l_0}{a} = \frac{\rho \cdot c_p \cdot w_0 \cdot V}{(\lambda / l_0) V}.$$

Здесь ***числитель характеризует теплоту, переносимую конвекцией, а знаменатель - теплоту, переносимую теплопроводностью***.

4. Безразмерный комплекс

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot V_0 \cdot l_0^3}{\nu^2}$$

называют ***числом Грасгофа*. *Оно характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей.***

Используя введенные обозначения, систему безразмерных дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
& Nu = -\left(\frac{d\Theta}{dY}\right); \\
& Pe\left(W_x \frac{d\Theta}{dX} + W_y \frac{d\Theta}{dY}\right) = \frac{d^2\Theta}{dY^2}; \\
& Re\left(W_x \frac{dW_x}{dX} + W_y \frac{dW_x}{dY}\right) = \frac{Gr}{Re}\cdot\Theta + \frac{d^2W_x}{dY^2}; \\
& \left(\frac{dW_x}{dX} + \frac{dW_y}{dY}\right) = 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

Безразмерные величины Θ, W_x, W_y, *X, У, Nu, Re, Pe, Gr* можно рассматривать как новые переменные.

Их можно разделить на три группы:

– независимые переменные - это безразмерные координаты *X*, *У*;

– зависимые переменные - это *Nu*, Θ, W_x, W_y ; они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в условия однозначности;

– постоянные величины - это *Pe, Re, Gr*; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными. Действительно, числа *Pe, Re* и *Gr* состоят только из величин, входящих в условия задачи.

В результате можно написать

$$
\left.
\begin{aligned}
& Nu=f_1\,(X_c, У_c, Pe, Re, Gr); \\
& Re=f_2(X, У, Pe, Re, Gr); \\
& W_x=f_3(X, У, Pe, Re, Gr); \\
& W_y=f\{X, У, Pe, Re, Gr).
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.4)
$$

Уравнения (3.4) называют уравнениями подобия.

Здесь X_c , $У_c$ соответствуют поверхности теплоотдачи (стенки). Нахождение *а* (или *Nu*) для точек пространства, не лежащих на поверхности стенки, не имеет смысла. В рассматриваемой задаче $У_c = 0$.

Если в уравнении движения учесть член - $\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}$, то в результате приведения к безразмерной записи появился бы и член

$$\frac{l_0}{\rho \cdot w_0} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\rho \cdot w_0^2} \frac{w_0 \cdot l_0}{\nu} \right) = \frac{d}{dx}(Eu, \mathrm{Re}).$$

5. Безразмерный комплекс

$$Eu = \frac{p}{\rho \cdot w_0^2}$$

называют **числом Эйлера**. ***Это число характеризует соотношение сил давления и сил инерции.***

Необходимо отметить, что при неизменной формулировке задачи новые безразмерные величины могут быть получены соответствующим комбинированием старых безразмерных комплексов, однако при этом число переменных под знаком функции не должно измениться.

Например

$$Pe = RePr = \frac{w_0 \cdot l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a}.$$

Числу Прандтля можно придать определенный физический смысл.

Уравнение энергии

$$w_x \frac{d\theta}{dx} + w_y \frac{dw_x}{dy} = a \frac{d^2\theta}{dy^2}$$

и уравнение движения

$$w_x \frac{dw_x}{dx} + w_y \frac{dw_x}{dy} = \nu \frac{d^2 w_x}{dy^2} + g \cdot \beta \cdot V.$$

При $a = \nu$ расчетные поля температур и скоростей будут подобны, если только аналогичны и условия однозначности. Условию $a = \nu$ соответствует равенство $Pr = 1$. Таким образом, ***при определенных условиях числу Прандтля может быть придан смысл меры подобия полей температур и скоростей.***

В зависимости от значения числа Pr жидкости делят на три группы: жидкости с числами $Pr < 1$ (жидкие металлы), теплоносители с $Pr = 1$ (неметаллические капельные жидкости при больших температурах и газы), жидкости с числами $Pr > 1$ (неметаллические капельные жидкости).

Учитывая, что $Pe=Re\cdot Pr$, уравнения подобия можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} Nu &= F_1 (X_c, У_c, Pe, Re, Gr); \\ Re &= F_2(X, У, Pe, Re, Gr); \\ W_x &= F_3(X, У, Pe, Re, Gr); \\ W_y &= F\{X, У, Pe, Re, Gr). \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Исходя из уравнений (3.5), безразмерные переменные можно разделить на два вида:

– определяемые - что числа, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми являются a, θ,: w_x и w_y, следовательно, определяемыми будут Nu, θ, W_x и W_y;

– определяющие - это числа, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются X, $У$, Re, $Pг$ (или Pe) и Gr.

3.3. Условия подобия физических процессов

Полученная система безразмерных дифференциальных уравнений, так же как и исходная система размерных уравнений, описывает бесконечное множество конкретных процессов конвективного теплообмена. Частные особенности различных явлений одного и того же класса определяются с помощью условий однозначности.

Проведенный анализ системы безразмерных дифференциальных уравнений и условий однозначности делает более понятными общие условия подобия физических процессов, сформулированные ниже в виде трех правил:

1. Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т. е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях.

3. Одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Из первого и второго условий подобия следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми (тождественными) безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

Первых двух условий недостаточно для установления физического подобия. Нужно добавить условие, что одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение , т. е.

$$X = idem,\ Y=idem,\ Re = idem,\ Pr = idem,\ Gr = idem.$$

Так как подобные процессы характеризуются одинаковыми функциями $Nu=f_1(X_c,Re,Pr)$ или $\Theta=f_2(X,Y,Re,Pr)$ и т. д. и численно равными определяющими переменными, то определяемые одноименные переменные подобных процессов также будут иметь одинаковые значения, т. е.

$$Nu = idem,\ \ Re = idem,\ \ W_x = idem,\ \ W_y = idem \text{ и т. д.}$$

Таким образом, критериями подобия по существу являются определяющие безразмерные переменные, составленные из постоянных величин, не являющихся функцией независимых переменных.

Следствия из условий подобия:

1) Если процессы А и Б подобны, то любая физическая величина φ в данной точке процесса А пропорциональна соответствующей величине в сходственной точке процесса Б, т. е.

$$\varphi_A = C_\varphi \cdot \varphi_Б.$$

2) Подобные процессы можно рассматривать как один и тот же процесс, но взятый в различном масштабе, причем масштабы разноименных величин могут быть неодинаковыми.

3.4. Метод анализа размерностей

Необходимой предпосылкой теории подобия будет математическое описание изучаемого процесса в виде дифференциальных (или интегродифференциальных) уравнений и условий однозначности.

Из математической формулировки задачи следует перечень существенных для рассматриваемого процесса физических величин. Если перечень установлен, то числа подобия могут быть выявлены методом анализа размерностей.

Иногда список размерных величин устанавливают интуитивно, без строгой формулировки краевой задачи. В этом случае возможны ошибки. Напомним, что в основе метода анализа размерностей лежит Пи-теорема, которая гласит:

Физическое уравнение, содержащее n > 2 размерных величин, из которых к>1 величин имеют независимую размерность, после приведения к безразмерному виду будет содержать n-k безразмерных величин.

Можно различать два вида физических величин: первичные (основные) и вторичные (производные).

Первичные величины характеризуют какое-либо физическое явление непосредственно, без связи с другими величинами. Вторичными считаются величины, которые выражаются через первичные согласно определениям или физическим законам. Так, например, если длина и время – первичные величины, т. е. если длину нельзя выразить через время (и наоборот), то скорость, представляющая собой по определению отношение длины ко времени, является вторичной, производной величиной.

Выбор первичных величин, вообще говоря, произволен. В системе СИ за первичные выбраны длина L, масса M, время Г, температура θ, сила тока I, сила света J. При выборе первичных величин большое значение имеет вопрос об удобстве их применения.

Символическое выражение производной величины через основные (первичные) называется размерностью. О размерности можно говорить только применительно к определенной системе первичных величин. Размерность можно представить в виде степенной формулы. Применительно к системе СИ формула размерности имеет вид

$$[\varphi] = L^{n_1} \cdot M^{n_2} \cdot T^{n_3} \cdot \theta^{n_4} \cdot I^{n_5} \cdot J^{n_6}, \qquad (3.6)$$

где [φ] – производная единица измерения; n – действительные числа. Размерность вторичной величины относительно данной первичной i может быть охарактеризована значением показателя степени n при этой первичной величине. Поэтому безразмерные числа часто называют величинами с нулевой размерностью, так как для них все показатели степени в формуле размерности равны нулю. Согласно формуле (3.6) размерность первичной величины можно принять равной единице (берется относительно себя).

Выбор единиц измерения первичных величин (основных единиц измерения) произволен и определяется вопросами удобства их использования.

Выбор перечня первичных величин и их единиц измерения является необходимым и основным шагом на пути создания системы единиц измерения.

Рассмотрим пример использования метода размерностей. Определим безразмерные переменные, соответствующие математической формулировке задачи. Из этой задачи следует, что

$$V = f(x, y, V_c, L_0, w_0, \nu, a, g, \varphi).$$

В списке величин, существенных для рассматриваемого процесса, представлено девять переменных (n = 9). В рассматриваемом нами примере использованы три первичные величины системы единиц измерения СИ: длина, время, температура (k = 3).

Пользуясь возможностью произвольного выбора основных единиц измерения, разделим переменные, входящие в уравнение, на две группы: на величины с независимой размерностью (основные) и на величины с зависимой размерностью (производные). Мы как бы создаем новую систему единиц измерения (специально для рассматриваемой задачи). Первый шаг на этом пути – выбор перечня первичных величин (величин с независимой размерностью).

За величины с независимой размерностью выберем постоянные

$$[l_0] = L; \quad [V_c] = \theta; \quad [\nu] = L^2 T^{-1}.$$

Размерность остальных величин выразим через них согласно формуле размерности

$$[x_0] = [l_0]; \quad [y] = [l_0]; \quad [w_0] = -l_0 \cdot T^{-1} = [l_0]^{-1} \cdot [\nu]; \quad [a] = [l_0]^2 \cdot T^{-1} = [\nu];$$

$$[\theta] = [\theta_c]; \quad [g \cdot \beta] = [l_0] \cdot [\theta]^{-1} \cdot T^{-2} = [l_0]^{-3} \cdot [\nu]^2 \cdot [\theta]^{-1}. \qquad (3.7)$$

Назначим единицы измерения величин с независимой размерностью. За основные единицы измерения в данном случае удобно выбрать числовые значения постоянных l_0, Θ_c и ν, заданные в условиях однозначности. Новые числовые значения физических величин X, Θ и др. получают путем сравнения с новым стандартом, т. е. $X=x/l_O$, $\Theta=\theta/\theta_c$ и т.д. Физический процесс не зависит от выбора единиц измерения, поэтому уравнение (3.7) должно сохранить свою структуру при различных значениях масштабов пересчета. В новых числовых значениях переменных уравнение (3.7) может быть записано следующим образом:

$$\frac{V}{V_c}=f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0},\frac{V_c}{V_c},\frac{l_0}{l_0},\frac{w_0}{\nu\cdot l_0^{-1}},\frac{\nu}{\nu},\frac{a}{\nu},\frac{g\cdot\beta}{l_0^{-3}\cdot\nu^2\cdot V_c^{-1}}\right).$$

Здесь все величины-комплексы являются безразмерными. Величины, равные единице, могут быть выведены из-под знака функции.

Используем обозначения чисел подобия

$$\Theta=f\left(X,Y,Pe,Pr,Gr\right).$$

При переходе к безразмерным величинам число переменных формально сократилось от девяти до шести. Аналогичный результат был получен с помощью метода масштабных преобразований.

3.5. Моделирование процессов конвективного теплообмена

При физическом моделировании процессов изучение процесса в оригинале заменяется исследованием этого же процесса на модели. Условия моделирования, т.е. условия, которым должна удовлетворять модель и протекающий в ней процесс, дает теория подобия. Если процесс в модели будет подобен процессу в образце, то результаты исследования на модели могут быть применены к образцу. Чтобы процессы в модели и образце были подобны, необходимо осуществить сформулированные ранее условия подобия, которые не всегда могут быть выполнены.

Первое условие подобия требует иметь одинаковую физическую природу и описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями.

Второе условие подобия требует, чтобы условия однозначности подобных процессов (в образце и модели) были одинаковы во всем, кроме числовых значений постоянных, содержащихся в этих условиях.

Условия однозначности для стационарных процессов состоят:

1) из геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела, в котором протекает процесс;

2) физических условий, характеризующих физические свойства рассматриваемой среды;

3) граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах жидкости.

Изменение геометрических размеров не должно привести к качественному изменению процесса в модели и, следовательно, к нарушению первого условия подобия. Например, газ нельзя считать сплошной средой и применять для исследования его течения и теплообмена используемые нами дифференциальные уравнения конвективного теплообмена, если параметр Кнудсена l/d достаточно велик. При течении газа в трубе за характерный размер может быть принят диаметр d. Если средняя длина свободного пробега молекул l будет больше $0{,}001d$, то такое течение газа по своим свойствам отклоняется от течения сплошной среды.

Если температура жидкости на входе в образец не меняется по сечению канала, условие подобия температурных полей на входе выдержать нетрудно. Для этого достаточно, чтобы в канале, подводящем жидкость или газ к модели, не было теплообмена.

Если же температурное поле на входе имеет сложный характер, то осуществить в модели такое распределение температур труднее. Реализация подобия температурных полей на поверхности теплообмена часто также представляет определенные трудности. В этом случае вопрос о точном осуществлении граничных условий становится предметом особых забот экспериментатора.

Третье условие подобия требует, чтобы одноименные критерии подобных процессов имели одинаковое значение. Например, конвективная теплоотдача существенно зависит от характера движения жидкости или газа. При напорном движении жидкости картина течения зависит от чисел Рейнольдса. Поэтому при моделировании должно быть осуществлено равенство чисел Рейнольдса на входе в образец и модель

$$\frac{w_{0\text{мод}} \cdot l_{0\text{мод}}}{\nu_{\text{мод}}} = \frac{w_{0\text{обр}} \cdot l_{0\text{обр}}}{\nu_{\text{обр}}}.$$

Скорость жидкости в модели надо увеличивать во столько раз, во сколько уменьшены геометрические размеры модели.

Очевидно, помимо равенства критериев Рейнольдса должно быть осуществлено и равенство других критериев подобия. В частности, должно выполняться условие

$$Pr_{\text{мод}}=Pr_{\text{обр}}.$$

Последнее условие, принципиально допуская возможность замены одной жидкости другой, по существу серьезно ограничивает такую операцию. Так, например, вода только при температурах примерно от 150 до 300 °С (и, следовательно, при давлениях, больших 10^5 Па) имеет значения чисел Прандтля, близкие к числам Прандтля газов. Чтобы моделировать несжимаемые газовые течения водой, в модели приходилось бы поддерживать слишком высокое давление.

Замена одной рабочей жидкости другой еще более усложняется ввиду переменности физических параметров. Чтобы учесть влияние переменности физических параметров, необходимо изменить систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, полученную ранее. При выводе уравнений переменные значения физических параметров нельзя выносить из-под знака производных. Кроме этого, возможно, потребуется ввести уравнения зависимости физических параметров от температуры.

Согласно первому условию подобия эти уравнения, записанные в безразмерном виде, должны быть тождественными для одноименных параметров. Только в этом случае можно говорить о точном подобии.

Выполнить точное подобие процессов конвективного теплообмена в широком интервале изменения рода жидкости и температурных параметров процесса не представляется возможным. В частности, это приводит к тому, что при точном моделировании возможность замены газа капельной жидкостью практически исключается из-за неподобия полей физических параметров в образце.

В связи с этим возникает необходимость в разработке ***методов приближенного моделирования.***

Одной из возможностей приближенного моделирования является проявление так называемой ***автомодельности*** процесса относительно какого-либо критерия. Говорят, что определяемая величина ***автомодельна*** относительно критерия подобия, если она не зависит от него. Если процесс автомоделен относительно какого-либо критерия подобия, то при моделировании отпадает необходимость соблюдать равенство этого критерия для образца и модели. Явление автомодельности дает возможность упрощения дифференциальных уравнений и условий однозначности.

Ввиду трудности точного моделирования на практике часто используется приближенный ***метод локального теплового моделирования***. Особенность этого метода заключается в том, что подобие процессов стараются осуществить лишь в том месте, где производится исследование теплоотдачи. Например, если изучается теплоотдача при омывании жидкостью пучка труб, то в опытах в теплообмене может участвовать только одна из труб. Данные о теплоотдаче получают из измерений, проведенных на единичной трубе.

Предполагается, что теплоотдача испытуемой трубы в основном зависит от характера ее омывания, определяемого расположением системы труб, а не тепловыми условиями. Следует, однако, учитывать, что необоснованное применение метода локального теплового моделирования может привести к значительным ошибкам.

4. МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ЛОПАСТНЫХ НАГНЕТАТЕЛЯХ

4.1. Условия подобия лопастных нагнетателей

Теория подобия имеет большое значение при проектировании и экспериментальном исследовании лопастных нагнетателей, к которым относятся лопастные насосы и вентиляторы. Теория подобия дает возможность по известной характеристике одного нагнетателя (модельного) получить характеристику другого, если проточные полости обоих нагнетателей геометрически подобны, а также пересчитать характеристику нагнетателя с одной частоты вращения на другую.

Это облегчает экспериментальное исследование лопастного нагнетателя, давая возможность получить характеристику мощного натурного нагнетателя путем испытания его уменьшенной модели или же испытывать натурный нагнетатель на частоте вращения, отличающейся от той частоты вращения, на которой он эксплуатируется.

Применение формул подобия будет справедливо при соблюдении следующих условий:

1. **Геометрическое подобие** проточных полостей нагнетателя, включающее также подобие шероховатостей поверхности стенок внутренних каналов, зазоров в щелевых уплотнениях и толщин лопаток рабочего колеса.

2. **Кинематическое подобие** на границах потоков. Границами потока являются, в частности, его сечение у входа в нагнетатель и движущиеся лопатки колеса. Для выполнения условий кинематического подобия на границах потоков необходимо, чтобы средняя скорость жидкости $v_{вх}$ у входа в нагнетатель была пропорциональна окружной скорости рабочего колеса *u:*

Скорость абсолютного движения *v (абсолютная скорость)* равна геометрической сумме скорости *w* жидкости относительно рабочего колеса (*относительной скорости*) и окружной скорости *u* рабочего колеса (*переносной скорости*), т. е. $v=w+u$).

$$v_{вх} \sim u=\pi \cdot D \cdot n/60 \sim n \cdot L,$$

где n - частота вращения рабочего колеса; L - характерный размер насоса, например диаметр колеса.

Подача нагнетателя равна произведению скорости $v_{вх}$ на площадь нормального сечения потока у входа в насос, которая пропорциональна линейному размеру L во второй степени. Отсюда

$$Q \sim v_{вх} \cdot L^2 \sim n \cdot L^3 \qquad (4.1)$$

или

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3,$$

где индексом 1 обозначены величины для первого нагнетателя, индексом 2 - для второго, геометрически подобного первому.

3. **Динамическое подобие** потоков. Динамическое подобие напорных установившихся потоков требует равенства *Re*, которое у лопастных нагнетателей обычно принимают равным $(u_2 \cdot D_2)/v$. Следствием выполнения этих условий являются:

1) кинематическое подобие во всех точках потоков; при этом любые скорости жидкости

$$v \sim v_{\text{вх}} \sim n \cdot L.$$

2) Равенство числа Эйлера *Eu*, которое для напорного движения равно $g \cdot \Delta H_{\text{ст}}/v^2$ и, следовательно, пропорционально разности статических напоров $\Delta H_{\text{ст}}$ и скорости жидкости во второй степени.

Режимы работы нагнетателя, при которых выполняются описанные условия, называются подобными. Теория подобия позволяет установить формулы пересчета параметров лопастных нагнетателей, определяющие зависимость подачи, напора, моментов сил и мощности геометрически подобных нагнетателей, работающих на подобных режимах, от их размеров и частоты вращения.

Подача нагнетателя пересчитывается по уравнению (4.1). Напор нагнетателя равен

$$H = \Delta H + \Delta v^2 / 2g,$$

где $\Delta H_{\text{ст}} = z_{\text{н}} - z_{\text{в}} + (p_n - p_в)/(p \cdot g)$ и $\Delta v^2/(2g)$ - разность соответственно статических и скоростных напоров после нагнетателя и до него.

Напор нагнетателя *H* представляет собой разность энергии единицы веса потока (жидкости или воздуха) в сечении потока насоса $(Z_н + P_н/(\rho \cdot g) + V^2_н/2g)$ и перед ним $(Z_в + P_в/(\rho \cdot g) + V^2_в/2g)$ и выражается в метрах.

Эти разности напоров пропорциональны скорости потока во второй степени

$\Delta H_{\text{ст}} \sim v^2/g$; $\Delta v^2/(2g) \sim v^2/g$, поэтому напор насоса $H \sim v^2/g$.

Принимая $g_x = g_2$, получаем:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{L_1 \cdot n_1}{L_2 \cdot n_2}\right)^2.$$

Момент сил взаимодействия потока со стенками каналов $M \sim p \cdot v^2 \cdot L^3$. Отсюда получим формулу пересчета момента сил

$$\left(\frac{M_1}{M_2}\right)=\frac{\rho_1 \cdot n_1^2 \cdot L_1^5}{\rho_2 \cdot n_2^2 \cdot L_2^5} \quad . \qquad (4.2)$$

Мощность, передаваемая от вала на рабочее колесо,

$$N_{\text{в}} = \omega \cdot M_{\text{в}} \, ,$$

где $M_{\text{в}}$ – момент сил, с которым жидкость действует на рабочее колесо (в том числе сил дискового трения).

Учитывая уравнение (4.2), находим

$$N_{\text{в}} \sim p \cdot n^3 \cdot L^5. \qquad (4.3)$$

Мощность нагнетателя превышает мощность $N_{\text{в}}$ на величину мощности, расходуемой на трение в уплотнении вала и подшипниках. Эта мощность по уравнению (4.3) не пересчитывается. Однако если насос не слишком мал, то потери на трение в уплотнениях вала и в подшипниках малы и для приближенного пересчета мощности насоса можно применять уравнение (4.3). Следовательно,

$$\frac{N_1}{N_2} \approx \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^5 .$$

При соблюдении всех условий подобия расход в щелевых уплотнениях нагнетателя пропорционален его подаче, гидравлические потери в нагнетателе, которые для подобных режимов пропорциональны скорости жидкости во второй степени, пропорциональны напору нагнетателя, дисковые потери мощности пропорциональны мощности $N_{\text{в}}$. Отсюда следует равенство для подобных режимов объемного и гидравлического КПД и приближенное равенство механического КПД

$$\eta_{01} = \eta_{02} \ ; \quad \eta_{г1} = \eta_{г2} \, ; \quad \eta_{мех1} \approx \eta_{мех2} \ ; \quad \eta_1 \approx \eta_2 \, .$$

Приведенный выше вывод формул пересчета не связан с особенностями рабочего процесса лопастного нагнетателя, поэтому формулы справедливы не только для лопастных нагнетателей, но и для других видов гидромашин (в том числе двигателей), имеющих вращающиеся рабочие органы или цикличный рабочий процесс.

Мощностью нагнетателя N (потребляемая) называется энергия, подводимая к нему от двигателя за единицу времени. Энергия, приобретенная за единицу времени жидкостью, прошедшей через нагнетатель, называется полезной мощностью нагнетателя

$$N_n = Q \cdot \rho \cdot g \cdot M,$$

$N > N_n$ на величину потерь в нагнетателе. Эти потери оцениваются КПД

$$\eta = \frac{N_n}{N}.$$

Геометрическое подобие щелевых уплотнений, шероховатости стенок и толщины лопаток не всегда выполняется. Обычно у более крупных насосов зазоры в уплотнениях, шероховатость и толщина лопаток относительно меньше, чем у малых. Равенство *Re* для модели и натуры также не всегда удается выполнить. Однако если эти отклонения от подобия невелики, то формулы пересчета дают достаточно точные результаты.

Формулы пересчета для одного и того же нагнетателя, работающего на разных частотах вращения ($L_1 = L_2$), принимают вид:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}; \qquad \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2; \qquad \frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3. \tag{4.4}$$

Так как обычно при изменении частоты вращения насоса равенство *Re* не выдерживается, то формулы (4.4) дают приближенный результат.

4.2. Пересчет характеристик лопастных нагнетателей на другую частоту вращения

Предположим, что имеется характеристика нагнетателя при частоте вращения n_1, а двигатель этого насоса работает при частоте вращения n_2, отличной от n_1. Для того чтобы судить об эксплуатационных свойствах нагнетателя, необходимо иметь его характеристику при той частоте вращения n_2, при которой он фактически будет работать.

Эту характеристику можно получить путем пересчета имеющейся характеристики на новую частоту вращения n_2 по формулам. Для этого задаются рядом значений подач Q_1 и по имеющейся характеристике нагнетателя находят соответствующие им напор H_1, мощность N_1 и КПД η_1 (рис. 4.1).

Подставив найденные для частот вращения n_x величины Q_1, H_1 N_1 и η_1 в уравнения (4.4), получают значения подачи Q_2, напора H_2, мощности N_2 и КПД η_2, которые представляют собой координаты точек характеристики нагнетателя при частоте вращения n_2. По этим координатам строят на характеристике ряд точек, соединив которые плавными кривыми, получают искомую характеристику нагнетателя при частоте вращения n_2.

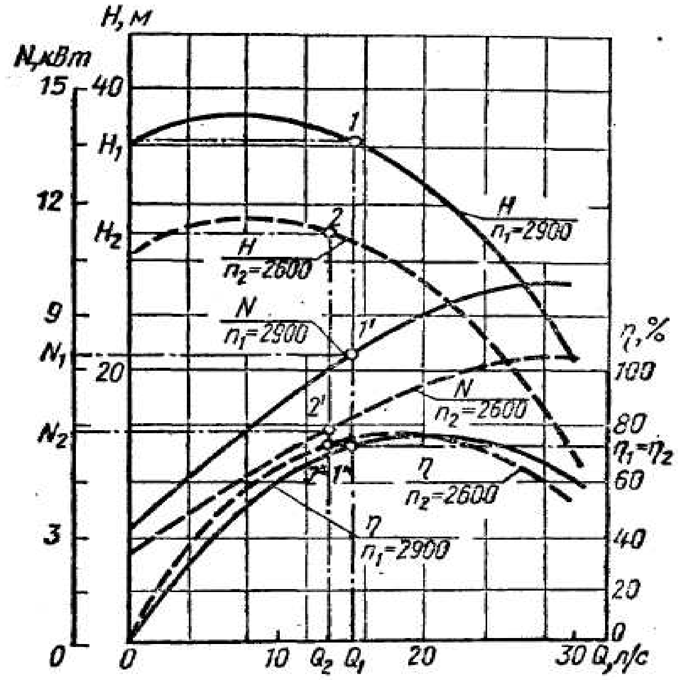


Рис. 4.1. Пересчет характеристики нагнетателя на другую частоту вращения

Найдем в координатах Q - H геометрическое место точек режимов, подобных режиму, который определяется точкой *1* (рис. 4.2). Для этого, подставив координаты Q_1 и H_1 точки *1* в уравнения (4.4), определим напор и подачу при различных значениях частоты вращения. В результате найдем ряд точек: 2, 3, 4, ..., соединив которые плавной линией, получим кривую подобных режимов работы нагнетателя. Покажем, что эта кривая представляет квадратичную параболу с вершиной в начале координат. Для этого подставим в уравнение (4.4) значения n_1/n_2

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2.$$

Следовательно, уравнение кривой подобных режимов имеет вид

$$H = s \cdot Q^2.$$

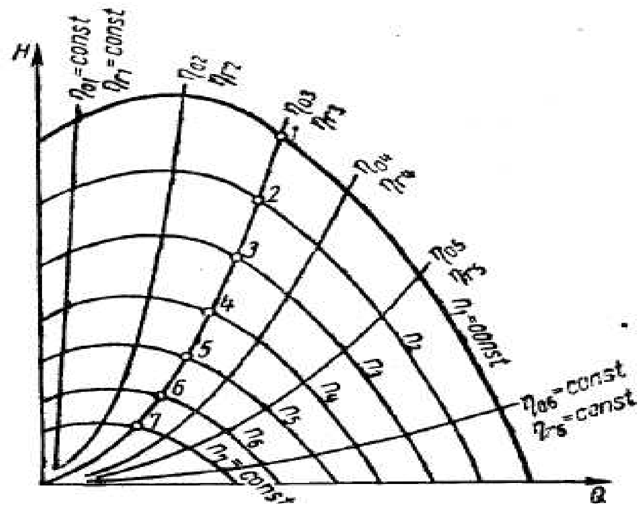


Рис. 4.2. Кривые подобных режимов

Для подобных режимов гидравлический и объемный КПД с достаточной степенью точности можно считать одинаковыми, так как с увеличением частоты вращения роль потерь на трение уменьшается.

4.3. Коэффициент быстроходности

Для использования законов подобия при определении размеров вновь проектируемого нагнетателя важно правильно выбрать прототип (модель), обладающий высокими технико-экономическими показателями на режимах, подобных заданному режиму работы проектируемого нагнетателя. Для этого необходимо найти параметр, который служил бы критерием подобия и, следовательно, был бы одинаков для всех подобных нагнетателей. Определив по заданным *H, Q* и *n* проектируемого нагнетателя этот критерий подобия и сравнив его с критериями подобия имеющихся конструкций, получим возможность подобрать необходимый нагнетатель. Ранее было определено, что

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3 \quad \text{и} \quad \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1 \cdot L_1}{n_2 \cdot L_2}\right)^2 .$$

Эти уравнения можно записать иначе

$$\frac{Q_1}{n_1 \cdot L_1^3} = \frac{Q_2}{n_2 \cdot L_2^3} = \frac{Q}{n \cdot L^3} = q\,; \tag{4.5}$$

$$\frac{H_1}{(n_1 \cdot L_1)^2} = \frac{H_2}{(n_2 \cdot L_2)^2} = \frac{H}{(n \cdot L)^2} = h\,. \tag{4.6}$$

Величины q и h одинаковы для подобных нагнетателей, работающих в подобных режимах, и, следовательно, являются критериями подобия. Однако они не могут быть определены для проектируемого нагнетателя, так как неизвестен его размер L.

Для того чтобы исключить из уравнений (4.5) и (4.6) линейный размер L, возведем правую и левую части уравнения (4.5) во вторую степень, а уравнения (4.6) - в третью и разделим их одно на другое

$$\frac{Q^2 \cdot n^6 \cdot L^6}{H^3 \cdot n^2 \cdot L^6} = \frac{n^4 \cdot Q^2}{H^3} = \frac{q^2}{h^3}\,; \qquad \frac{n\sqrt{Q}}{H^{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{q}}{h^{\frac{3}{4}}} = n_y\,.$$

Как параметры q и h, так и n_y одинаковы для геометрически подобных нагнетателей при работе их на подобных режимах независимо от плотности перемещаемой жидкости (или воздуха). Следовательно, параметр $n_У$ будет искомым критерием подобия. Его можно назвать ***удельной частотой вращения.***

При проектировании нагнетателей наибольшее распространение получил параметр n_s, называемый ***коэффициентом быстроходности***, который в 3,65 раза больше удельной частоты вращения

$$n_s = 3{,}65 \cdot n_y = 3{,}65\,\frac{n \cdot \sqrt{Q}}{H^{\frac{3}{4}}}. \qquad (4.7)$$

Коэффициент 3,65 не изменяет физического смысла n_s, который, так же как и $n_У$, является критерием (признаком) подобия нагнетателей. Входящие в уравнения (4.7) величины имеют следующие размерности: Q, м^3/с; H, м; n, об/мин.

Если нагнетатель, геометрически подобный данному, при подаче Q=0,075 м^3/с имеет напор 1 м, то его коэффициент быстроходности n_s равен частоте вращения насоса. Действительно,

$$n_s = \frac{3{,}65 \cdot n\sqrt{0{,}075}}{1^{\frac{3}{4}}} = n, \text{ т.е. } n_s \approx n_y \approx n.$$

На этом основании часто коэффициентом быстроходности называют частоту вращения нагнетателя, геометрически подобного данному, который при напоре 1 м подает 0,075 м^3/с жидкости.

Коэффициент быстроходности различен для разных режимов работы нагнетателя. Назовем коэффициент быстроходности, определенный для оптимального режима, т. е. для режима, соответствующего максимальному значению КПД, ***коэффициентом быстроходности нагнетателя***. Если нагнетатели геометрически подобны, то коэффициенты быстроходности у них одинаковы. Следовательно, равенство коэффициентов быстроходности является необходимым признаком подобия нагнетателей. Поскольку по заданным значениям параметров n, $Q_{опт}$ и $H_{опт}$ для заданного значения коэффициента быстроходности можно сконструировать нагнетатели с разными соотношениями размеров, равенство коэффициентов быстроходности не является достаточным признаком геометрического подобия нагнетателя. Однако практикой установлены для каждого коэффициента быстроходности соотношения размеров нагнетателя, обеспечивающие оптимальные технико-экономические показатели. Если ограничиться лишь этими, чаще всего применяющимися в нагнетателях соотношениями размеров, то равенство коэффициентов быстроходности становится не только необходимым, но и в известной степени достаточным признаком (критерием) геометрического подобия нагнетателей.

В практике эксплуатации вентиляторов коэффициент быстроходности n_s принято вычислять по формуле

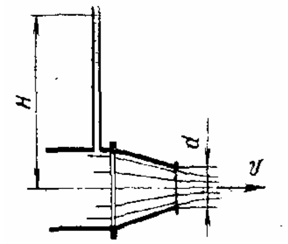
$$n_s = 5{,}5 \cdot n \cdot \sqrt{L} \,/\, P^{\frac{3}{4}},$$

где L – подача, м^3/с; P –давление, Па, n – частота вращения, об/мин.

В каталогах по вентиляторам приводится значение n_s, соответствующее оптимальному режиму работы нагнетателя. Для радиальных вентиляторов n_s= 6 ÷ 110.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ «ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ»

Примеры решения задач



Задача 1. При испытании на воде модели насадка, выходной диаметр которого $d_м$ = 30 мм, под статическим напором $H_м$ = 50 м получены расход $Q_м$ = 18 л/с и средняя скорость в сжатом сечении струи $w_м$ = 30 м/с.

Каков должен быть выходной диаметр и насадка в натуре и под каким напором H он должен работать на воде, чтобы получить Q = = 100 л/с и w = 60 м/с?

Считать, что испытания модели произведены в зоне турбулентной автомодельности, поэтому коэффициенты истечения для модели и натуры одинаковы.

Ответ, d = 50 мм; H = 200 м.

Решение

Расход через отверстие равен $Q = S \cdot \mu \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = w \cdot S$; $w = \mu \sqrt{2g \cdot H}$.

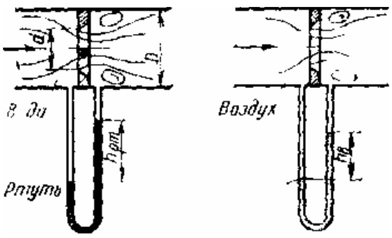
Коэффициент расхода $\mu = \dfrac{w}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H}} = \dfrac{30}{\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 50}} = 0{,}958$.

Тогда при скорости струи w = 60 м/с напор составит

$$H = \frac{w^2}{\mu^2 \cdot 2 \cdot g} = \frac{(60)^2}{(0{,}958)^2 \; 2 \cdot 9{,}8} \approx 200 \text{ м.}$$

Выходной диаметр насадка

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{w \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 3{,}14}} = 0{,}046 \text{ м} = 0{,}05 \text{ м.}$$



Задача 2. Диафрагма размерами d = 100 м и D = 200 мм, предназначенная для измерения расхода воздуха, тарируется путем испытания на воде. В результате испытаний получено, что минимальный расход воды, начиная с которого коэффициент расхода диафрагмы остается постоянным, $Q_{\min}$ = 16 л/с, и при этом показание ртутного дифманометра, измеряющего перепад давлений на диафрагме, $h_{\text{рт}}$ = 45 мм.

1. Определить $Q_{\min}$ при работе диафрагмы на воздухе.

2. Найти соответствующее этому расходу воздуха показание водяного дифманометра $h_{\text{в}}$, присоединенного к диафрагме в тех же точках.

Кинематическая вязкость воды $\nu = 10^{-2}$ Ст, динамическая вязкость воздуха $\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ П (1Пуаз = 0,1 Па·с) и его плотность ρ = 1,166 кг/м^3.

Указание. Значениям расхода $Q_{\min}$ при работе диафрагмы на различных жидкостях соответствует одинаковое число Рейнольдса, представляющее границу зоны турбулентной автомодельности.

Решение

$$Re = \frac{w_{\text{возд}} \cdot d}{\nu_{\text{возд}}} = \frac{w_{\text{вод}} \cdot d}{\nu_{\text{вод}}} = idem; \qquad \nu_{\text{возд}} = \frac{\mu_{\text{возд}}}{\rho_{\text{возд}}};$$

$$w_{\text{возд}} = \frac{w_{\text{вод}} \cdot \mu_{\text{возд}}}{\rho_{\text{возд}} \cdot \nu_{\text{вод}}}; \quad w_{\text{вод}} = \frac{Q}{S} = \frac{4 \cdot Q}{\pi (d)^2} = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{3{,}14 (0{,}1)^2} = 2{,}038 \text{ м/с};$$

$$w_{\text{возд}} = \frac{2{,}038 \cdot 1{,}82 \cdot 10^{-5}}{1{,}166 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 31{,}81 \text{ м/с};$$

$$Q_{\text{возд}} = w_{\text{возд}} \cdot S = 31{,}81 \cdot 0{,}785 \cdot 10^{-2} = 0{,}2497 \ м^3 / \text{с} \approx 250 \text{ л/с}.$$

Для подобных потоков можно принять

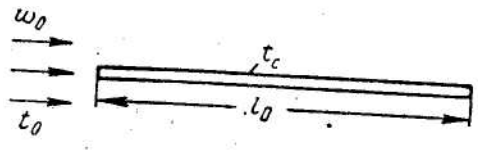
$$Eu = \frac{\Delta P_{\text{вод}}}{w_{\text{вод}}^{\ 2} \cdot \rho_{\text{вод}}} = \frac{\Delta P_{\text{возд}}}{w_{\text{возд}}^{\ 2} \cdot \rho_{\text{возд}}} = idem;$$

$$\Delta P_{\text{вод}} = g \cdot \Delta h_{\text{рт}} (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{вод}}); \quad \Delta P_{\text{возд}} = g \cdot \Delta h_{\text{вод}} (\rho_{\text{вод}} - \rho_{\text{возд}}).$$

Тогда

$$\Delta h_{\text{вод}} = \frac{\Delta h_{\text{рт}} \cdot (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{вод}})\, w_{\text{возд}}^{\ 2} \cdot \rho_{\text{возд}}}{w_{\text{вод}}^{\ 2} \cdot \rho_{\text{вод}} \cdot (\rho_{\text{вод}} - \rho_{\text{возд}})} = \frac{0{,}045 (13{,}6 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^3)\ (31{,}81)^2 \cdot 1{,}166}{(2{,}038)^2\, 10^3\, (10^3 - 1{,}166)} = 0{,}161 \text{ м}.$$

Задача 3. Тонкая пластина длиной $l_0 = 2$ м и шириной а = 1,5 м обтекается продольным потоком воздуха. Скорость и температура набегающего потока равны соответственно w_o=3 м/с;



$t_0 = 20$ °С. Температура поверхности пластины равна $t_с = 90$ °С.

Определить средний по длине коэффициент теплоотдачи и количество тепла, отдаваемое пластиной воздуху.

Решение

Для воздуха при $t_0 \approx 20$ °С и $\nu = 15{,}06 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; λ=2,23 · 10 $^{-2}$ ккал/(м · ч · град); $Pr = 0{,}703$, откуда

$$Re = \frac{w_0 \cdot l_0}{\nu} = \frac{3 \cdot 2}{15{,}06 \cdot 10^{-6}} = 3{,}98 \cdot 10^5.$$

В этих условиях средняя по длине теплоотдача может быть рассчитана по формуле

$$Nu = 0{,}67 \cdot Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3},$$

где

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}; \qquad Re = \frac{\omega_0 \cdot l_0}{\nu}$$

и физические параметры выбираются при температуре t_0. В рассматриваемом случае

$$Nu = 0{,}67\ (3{,}98 \cdot 10^5)^{1/2}\ (0{,}703)^{1/3} = 375$$

и коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = Nu\ \frac{\lambda}{l_0} = 375\ \frac{2{,}23 \cdot 10^{-2}}{2} = 4{,}18 \quad \text{ккал/(м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град)}.$$

Количество передаваемого тепла с обеих сторон пластины

$$Q = \alpha\ (t_c - t_0)\ F = 4{,}18\ (90 - 20)\ 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 1760 \text{ ккал/ч}.$$

Задача 4. Вычислить для условий задачи № 3 толщину гидродинамического пограничного слоя и значения местных коэффициентов теплоотдачи на расстояниях от передней кромки пластины $x = 0{,}1 l_0$; $x = 0{,}2 l_0$; $x = 0{,}5 l_0$ и $x = l_0$. Построить график зависимости толщины гидродинамического пограничного слоя $\delta_л$ и коэффициента теплоотдачи от расстояния x/l_0 .

Решение

По условиям задачи № 3 теплоотдача происходит в условиях ламинарного пограничного слоя, толщина которого и местный коэффициент теплоотдачи на расстоянии x от передней кромки пластины определяются по формулам

$$\delta_{лам} = \frac{5{,}83 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{и} \quad Nu_x = 0{,}335 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3},$$

где $Nu_x = \dfrac{\alpha_x \cdot l_0}{\lambda}$ и $Re_x = \dfrac{\omega_0 \cdot x}{\nu}$.

На расстоянии $x = 0{,}1 \cdot l_0$:

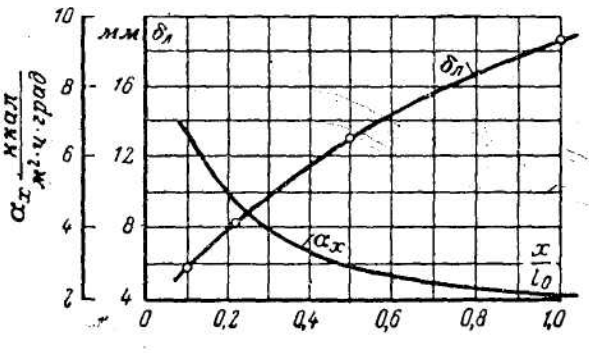
$$Re_x = \frac{\omega_0 \cdot (0{,}1 \cdot l_0)}{\nu} = \frac{3 \cdot 0{,}2}{15{,}06 \cdot 10^{-6}} = 3{,}98 \cdot 10^4;$$

$$\delta_{лам} = \frac{5{,}83 \cdot 0{,}2}{\sqrt{3{,}98 \cdot 10^4}} = 5{,}85 \cdot 10^{-3};$$

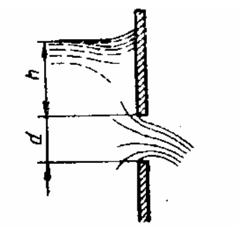
$$Nu_x = 0{,}335 \cdot (3{,}98 \cdot 10^4)^{1/2} \cdot (0{,}703)^{1/3} = 59{,}5;$$

$$\alpha_x = Nu_x \frac{\lambda}{x} = 59{,}5 \frac{2{,}23 \cdot 10^{-2}}{0{,}2} = 6{,}64 \text{ ккал/(м}^2\text{·ч·град)}.$$

Аналогичным образом рассчитывается $\delta_{лам}$ и α при $x = 0{,}2 \cdot l_0$; $x = 0{,}5 \cdot l_0$ и $x = l_0$. Результаты расчетов приведены на рисунке.



Контрольные задания



Задача 1. Истечение керосина ($\nu_к = 0{,}045$ Ст) через отверстие диаметром d моделируется на воде ($\nu_м = 0{,}01$ Ст) при соблюдении вязкостного и гравитационного подобия.

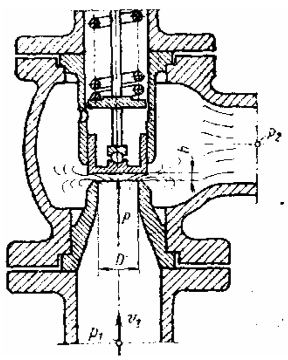
1. Определить диаметр отверстия $d_м$ для модели.

2. В каком отношении должны находиться высоты уровней для натуры h и модели $h_м$?

3. В каком отношении при выполнении этих условий будут находиться расход Q и $Q_м$?

Значение $d_м$ берется из таблицы в соответствии с номером в списке группы.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Диаметр отверстия d, мм	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Номер варианта	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Диаметр отверстия d, мм	55	60	65	70	75	80	85	90	95



Задача 2. Предохранительный клапан диаметром $D_м$ при открытии $h_м$ = 2 мм пропускает расход масла $Q_м$ под перепадом давлений $\Delta p_м = p_1 - p_2$ = 1 МПа. При этом сила давления на клапан $P_м$.

Как следует изменить диаметр клапана, чтобы при увеличении расхода той же жидкости в 4 раза требуемый перепад давлений увеличился только в 2 раза? Найти открытие клапана h и действующую на него силу P. Воспользоваться соотношением $h/h_м = D/D_м$.

Считать, что клапан работает в квадратичной зоне сопротивления.

Значения $D_м$, $Q_м$, и $P_м$ берутся из таблицы в соответствии с номером в списке группы.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Диаметр $D_м$, мм	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Расход масла $Q_м$, л/с	5	7	10	12	15	17	20	22	24	25
Сила давления $P_м$, Н	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Диаметр $D_м$, мм	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
Расход масла $Q_м$, л/с	27	30	32	34	36	38	40	42	44	46
Сила давления $P_м$, Н	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145

Задача 3. На воздушной модели парового котла, выполненной в масштабе 1/8 натуральной величины, производилось изучение теплоотдачи конвекцией. Для первого газохода модели при различных скоростях воздуха были получены следующие значения коэффициента теплоотдачи.

ω, м/с	2,0	3,14	4,65	8,8
α, ккал/м^2·ч·град	43,4	59,0	78,0	121,4

Средняя температура воздуха, проходящего через модель, $t_{жм}$ = 20 °С. Диаметр трубок модели $d_м$ = 12,5 мм. Коэффициент теплоотдачи им при обработке опытных данных был отнесен к средней арифметической разности температур между жидкостью и стенкой. На основе данных, полученных на модели, найти формулу для расчета теплоотдачи конвекции в 1-м газоходе котла в виде зависимости $Nu = f(Re)$.

Ответ: $Nu = 16{,}759\ Re^{0{,}7049}$.

Тесты для проверки знаний

I. Дать определение критерия подобия

1. Размерная величина, характеризующая состояние исследуемого процесса.
2. Величина, определяющая связь между параметрами исследуемого процесса.
3. Средняя мера относительной интенсивности двух физических эффектов, существенных для исследуемого процесса.
4. Оператор математической модели исследуемого процесса.

II. В каком случае применяется теория подобия?

1. При отсутствии математического описания исследуемого процесса.
2. Исследуемые процессы описываются похожими уравнениями.
3. Имеется математическое описание исследуемого процесса в виде дифференциальных уравнений.
4. Имеются математическое описание исследуемого процесса в виде дифференциальных уравнений и условия однозначности.

III. В каком случае применяется метод анализа размерностей?

1. При отсутствии математического описания исследуемого процесса.
2. Исследуемые процессы описываются похожими уравнениями.
3. Имеется математическое описание исследуемого процесса в виде дифференциальных уравнений.

4. Имеются математическое описание исследуемого процесса в виде дифференциальных уравнений и условия однозначности.

IV. В чем заключается полное гидродинамическое подобие?

1. Выполнение только условия геометрического подобия.
2. Выполнение только условия динамического подобия.
3. Необходимо выполнение условий геометрического и кинематического подобия.
4. Необходимо выполнение условий геометрического, кинематического и динамического подобия.

V. В чем заключается физический смысл числа Эйлера?

1. Величина, пропорциональная отношению сил тяжести к силам инерции.
2. Величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам вязкого трения.
3. Величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам давления.
4. Величина, пропорциональная отношению сил давления к силам инерции.

VI. В чем заключается физический смысл числа Рейнольдса?

1. Величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам вязкого трения.
2. Величина, пропорциональная отношению сил вязкого трения к силам инерции.
3. Величина, пропорциональная отношению сил тяжести к силам инерции.
4. Величина, пропорциональная отношению сил поверхностного натяжения к силам инерции.

VII. В чем заключается физический смысл чисел Маха и Коши?

1. Величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам упругости.

2. Величина, пропорциональная отношению сил упругости к силам инерции.

3. Величина, пропорциональная отношению сил поверхностного натяжения к силам упругости.

4. Величина, пропорциональная отношению сил упругости к силам поверхностного натяжения.

VIII. В чем состоит подобие процессов конвективного теплообмена?

1. Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми.
2. Условия однозначности должны быть одинаковыми во всем.
3. Одноименные критерии подобия должны иметь одинаковые числовые значения.
4. Выполнение всех выше перечисленных пунктов.

IX. Что характеризует число Нуссельта?

1. Отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи.
2. Соотношение между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое потока.
3. Соотношение сил вязкого трения к силам подъема.
4. Отношение внешнего термического сопротивления теплоотдачи к силам подъема.

X. В чем физический смысл числа Пекле?

1. Отношение конвективного и молекулярного переносов тепла в потоке.
2. Соотношение между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое потока жидкости.
3. Отношение сил тяжести к силам упругости.
4. Характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей.

XI. Что характеризует число Прандтля?

1. Подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей.
2. Отношение сил тяжести к силам давления.
3. Меру подобия полей температур и скоростей в конвективном теплообмене.
4. Отношение конвективного и молекулярного переносов тепла в потоке.

XII. Что является необходимым и достаточным признаком подобия вентиляторов?

1. Выполнение условия геометрического подобия.
2. Выполнение условия кинематического подобия.
3. Выполнение условия динамического подобия.
4. Выполнение вышеназванных пунктов и равенство коэффициентов быстродействия.

Библиографический список

1. **Гухман, А. А.** Введение в теорию подобия / А. А. Гухман. – М. : Машиностроение, 1973. – 296 с.
2. **Гухман, А. А.** Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена / А. А. Гухман. – М. : Машиностроение, 1974. – 304 с.
3. **Башта, Т. М.** Гидравлика, гидромашины, гидропривод / Т. М. Башта [и др.]. – М. : Машиностроение, 1982. – 423 с.
4. **Исаченко, В. П.** Теплопередача / В. П. Исаченко [и др.]. – М. : Энергия, 1975. – 511 с.
5. **Поляков, В. В.** Насосы и вентиляторы / В. В. Поляков, Л. С. Скворцов. – М. : Стройиздат, 1990. – 336 с. – ISBN 5-274-01021-0.
6. **Готгельф, И. Н.** Моделирование в применении к вентиляторостроению. Теория подобия и моделирование / И. Н. Готгельф. – М. : АН СССР, 1951. – 272 с.

Оглавление

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Конспект лекций

Составитель
Зуев Константин Иванович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.И. Тарасенко

Подписано в печать 11.04.11.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 3,02. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.