

Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

Н. А. Троицкая

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

В двух частях

Часть 1

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Владимир 2010

УДК 514
ББК 22.151.34
Т 70

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент
зав. кафедрой технического творчества
Владимирского государственного гуманитарного университета
А. Х. Раздобреев

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
дизайна и технической графики
Владимирского государственного гуманитарного университета
Н. С. Семёнова

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Троицкая, Н. А.

Т70 Начертательная геометрия : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Троицкая ;
Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 84 с.
ISBN 978-5-9984-0032-2

Системно изложены теоретические положения всех способов изображений, используемых в начертательной геометрии (прямоугольных, аксонометрических, перспективных проекций и проекций с числовыми отметками), выделены особенности каждого вида проекций. Приведены вопросы для контроля усвоения знаний, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов 1-го курса специальностей 150900 – технология оборудования и автоматизация машиностроительного производства, 151001– технология машиностроения, 230201 – информационные системы и технологии (системы поддержки принятия решений), 270102 – промышленное и гражданское строительство всех форм обучения и др.

Ил. 103. Библиогр.: 10 назв.

УДК 514
ББК 22.151.34

ISBN 978-5-9984-0032-2

© Владимирский государственный
университет, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Использование системного подхода как сознательно применяемого общенаучного метода началось в психологии и педагогике и захватило все науки. Первоочередная задача при системном подходе – поиск принципиальной схемы расчленения объекта изучения, которая при сохранении целого обеспечивает возможность его анализа.

Сделана попытка разработать структуру и содержание курса начертательной геометрии на системной основе. При этом объект изучения расчленён на основные структурные единицы курса и на правила их сочетания и преобразования.

К основным структурным единицам (ОГО) относят точку, линию (прямую и кривую), поверхность (плоскую и кривую) и деталь (предмет, пространственную фигуру), а к правилам сочетания – их взаимное положение.

При изучении взаимного положения точки, линии и других структурных единиц вводят понятие общности – полной (принадлежность), частичной (пересечение) или отсутствие таковой.

В учебном пособии параллельно излагаются сведения обо всех способах проецирования. Это даёт возможность выбора способа решения задач в зависимости от специализации студентов (перспектива – для архитекторов, числовые отметки – для студентов автотранспортного факультета, прямоугольные проекции – для машиностроителей).

Подробное изложение материала позволит студентам использовать пособие при самостоятельном изучении предмета.

Учебное пособие по начертательной геометрии состоит из двух частей.

Первая часть содержит четыре главы. В первой главе способы проецирования не затрагиваются, а представлены наглядные изображения кривых линий и поверхностей. Это даёт возможность при изучении дальнейших глав опираться на уже знакомые образы.

Во второй главе рассмотрены аппараты центрального и параллельного проецирования. Особое внимание уделено инвариантам проецирования, что облегчает изложение последующего материала, уменьшая количество примеров.

Глава третья говорит о получении обратимых проекций для всех способов проецирования, применяемых в начертательной геометрии: проекции с числовыми отметками, прямоугольные проекции, аксонометрические и центральные проекции.

Четвертая глава рассматривает качественные (положение в пространстве) и некоторые количественные (размерные) характеристики основных геометрических образов (ОГО – точка, линия, поверхность) в аксонометрических, прямоугольных, перспективных проекциях и в проекциях с числовыми отметками.

Приложение рассматривает понятия «координаты», «масштабы» и раскрывает некоторые математические положения курса элементарной геометрии.

Вторая часть будет содержать шесть глав.

В пятой главе будет рассмотрено взаимное расположение основных геометрических образов, будут введены такие понятия, как полная или частичная общность, отсутствие общности. Задачи будут решаться с использованием обобщенного алгоритма с применением посредников.

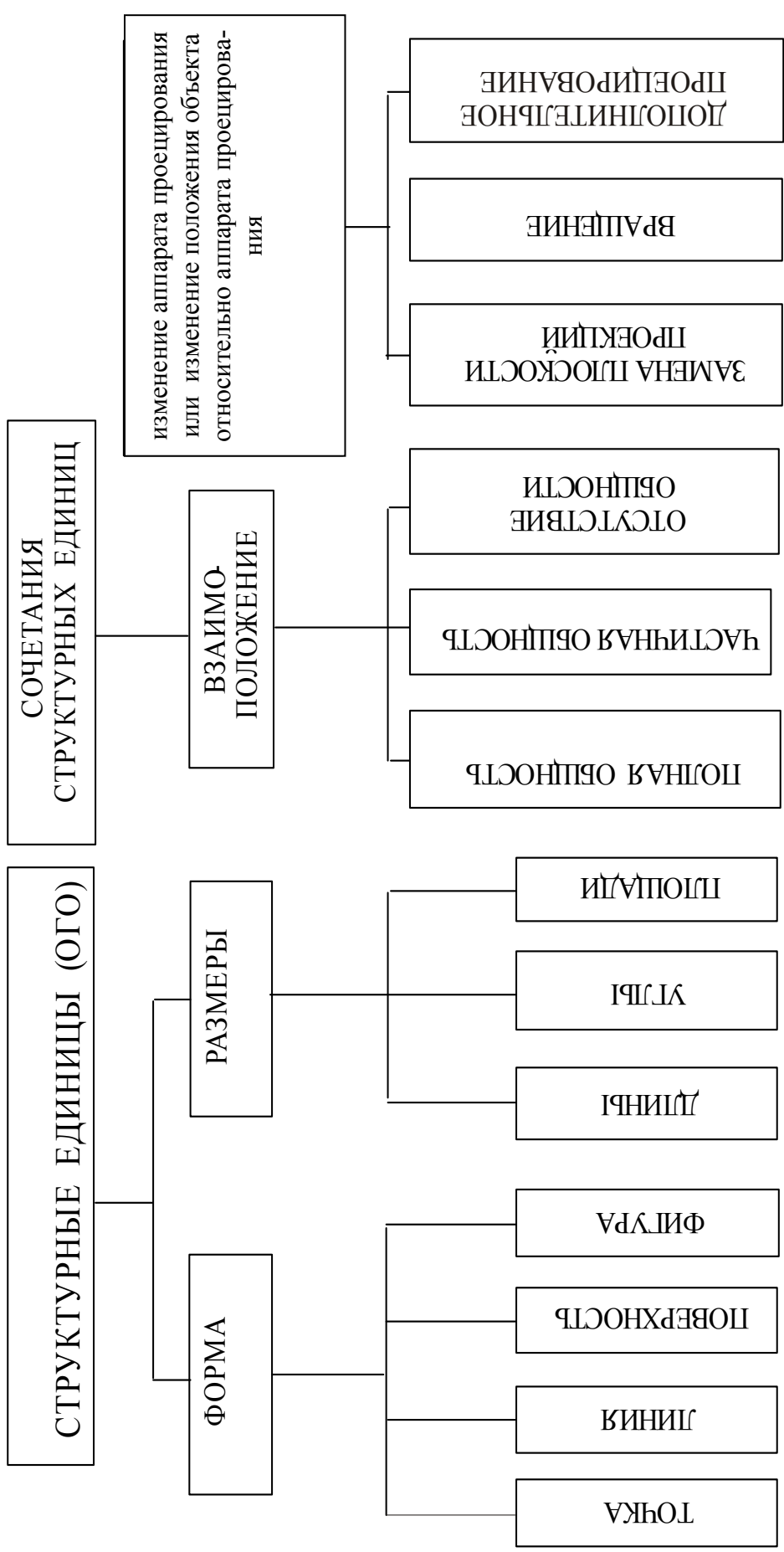
Глава шестая будет содержать способы изменения и измерения качественных и количественных характеристик ОГО. К ним отнесены: изменение проекции объекта с помощью замены способа проецирования или замены плоскостей проекций, а также изменение положения объекта (вращение вокруг проецирующих осей, плоскопараллельный перенос и вращение вокруг линий уровня); задачи на построение разверток поверхностей.

В главах седьмой, восьмой и девятой будут рассмотрены более подробно задачи, решаемые с применением аксонометрических и центральных проекций а также проекций с числовыми отметками.

В десятой главе будут описаны правила построения теней во всех проекциях.

В каждой главе будут представлены вопросы для повторения.

Учебное пособие может быть использовано в качестве самоучителя всеми студентами, изучающими курс начертательной геометрии и инженерной графики.



Количественные характеристики

Качественные характеристики

ВВЕДЕНИЕ

Человечество с незапамятных времен, задолго до возникновения письменности, пыталось отобразить свою деятельность и предметы деятельности с помощью изображений на скалах, стенах пещер и т.п. Собственно и письменность возникла как сжатое изображение процесса деятельности (иероглифы). Дошедшая до нас старинная живопись продолжает волновать нас не меньше, чем своих современников. У Виктора Гюго уже в письменном виде дано впечатляющее описание мирового шедевра – собора Парижской богородицы. Это описание занимает несколько страниц книги, и каждый читающий в силу своего воображения и жизненного опыта представляет этот собор. Но нет никакой уверенности, что даже два человека по описанию одинаково представят его форму, не говоря уже о размерах. Это можно сделать лишь по графическому изображению. На рис. 1 мы видим географический чертеж, выполненный

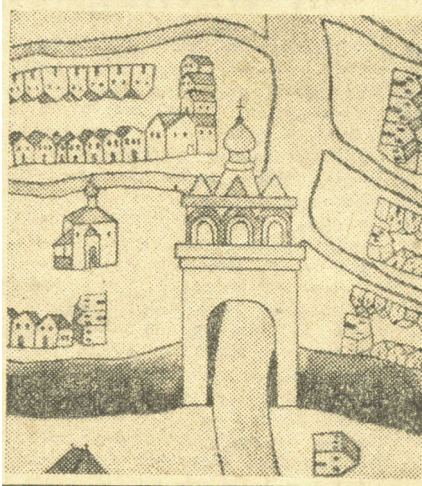


Рис. 1

в самом начале XVIII века. На нем изображены стены и башни Печерного города и Золотых ворот города Владимира. По этому чертежу пока тоже невозможно представить истинный облик города. На рис. 24 представлены

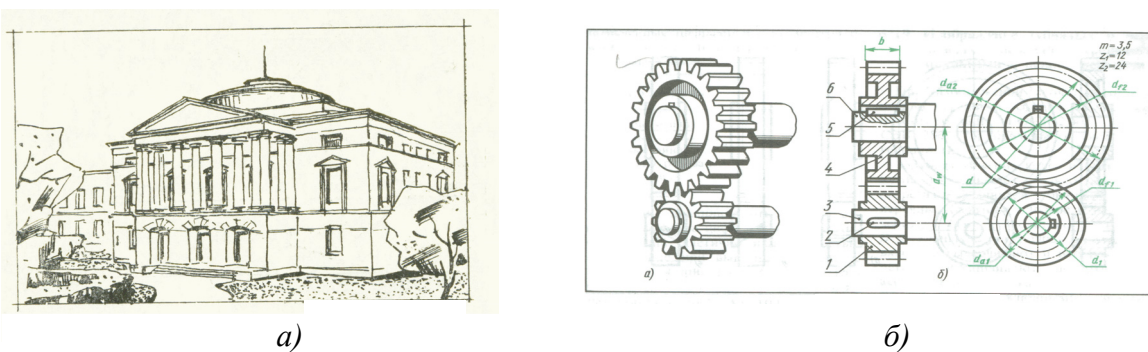


Рис. 2

различные изображения, выполненные в наше время (перспективное изображение здания, сборочный чертёж, чертёж детали, изображение границы земляных работ). Все они выполнены на плоскости. Вероятно, каждый из вас встречался с изображениями, которые выполнены на иных

поверхностях (купол церкви – сфера; панорама, диорама – цилиндрическая поверхность).

Вы, возможно, встречались и с другими изображениями (чертежами), по которым изготавливают машины, самолеты, строят дороги, мосты, здания и другие сооружения. Почему одни изображения лишь воздействуют на наши чувства, давая наглядное представление, а другие определяют форму, размеры, дают возможность однозначно воплотить изображение в изделие или сооружение рук человеческих?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать законы графического отображения объектов на плоскость или другую поверхность.

Этим и занимается начертательная геометрия. Она изучает законы графического отображения пространственных предметов, имеющих три измерения (длину, ширину и высоту), на плоскость или другую поверхность, имеющую лишь два измерения. Это прямая задача начертательной геометрии.

Знание этих законов, а также правил и приёмов дает возможность однозначно решать и обратную задачу – определение по двумерному изображению формы, размеров и взаимоположения элементов, исследование изменения их положений. В данном пособии рассмотрены лишь проекции на плоскость.

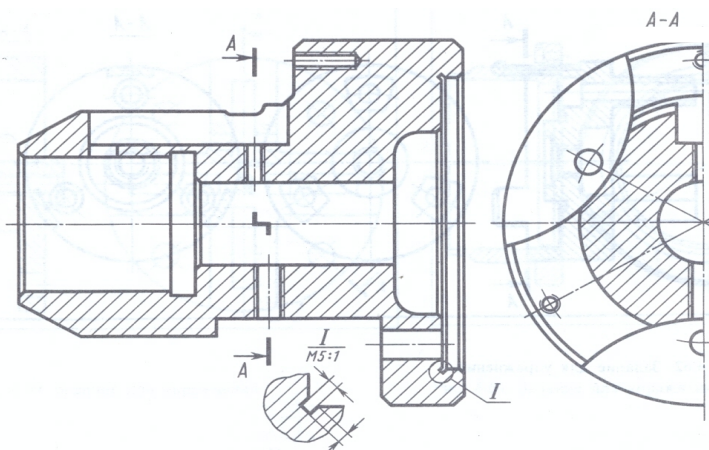


Рис. 3

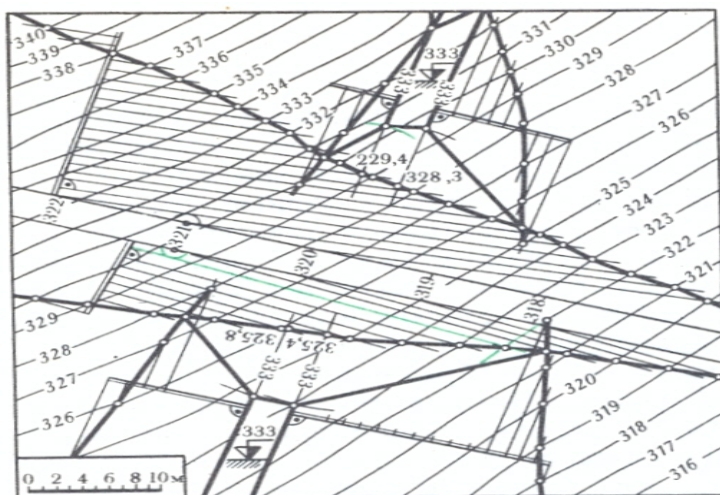


Рис. 4

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $A, B, C \dots 1, 2, 3 \dots$ – точки в пространстве
- $A^1, A^2, A^3 \dots 1^1, 1^2, 1^3 \dots$ – новое положение точек в пространстве
- $a, b, c \dots$ – линии в пространстве
- (AB) – линия в пространстве, заданная точками A и B
- $[AB]$ – отрезок в пространстве
- $\alpha, \beta, \gamma \dots$ – плоскости и поверхности в пространстве
- $\pi, \pi_1, \pi_2, \kappa$ – плоскости проекций
- $A_1, A^1_1, A_2, A_3, A_4 \dots A_K, 1_1, 1_2$ – проекции точек
- S – центр проецирования
- s – направление проецирования (проецирующий луч)
- h – горизонталь
- f – фронталь
- p – профильная прямая
- $\alpha\pi_1, \alpha\pi_2, \alpha\pi_3$ – следы плоскостей
- \perp – перпендикулярность
- \parallel – параллельность
- \in – принадлежность элемента ($A \in \beta$ – точка A принадлежит поверхности β)
- \subset – принадлежность множества ($b \subset \beta$ – линия b принадлежит поверхности β)
- $|||$ – натуральная величина, ($|AB|$ – натуральная величина отрезка AB)
- \curvearrowright – знак вращения

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

Из всего разнообразия геометрических образов, входящих в состав предметов, можно выделить основные: точку, линию, поверхность и пространственную фигуру (тело). Прямую линию будем рассматривать как частный случай линии, а плоскость – как частный случай поверхности.

§ 1.1. Точка. Линии

Точка, по Евклиду, – это то, что не имеет ни длины, ни ширины, ни толщины (высоты). Точку можно определить как результат пересечения двух линий или трех плоскостей (вершина многогранника).

Траектория непрерывно движущейся точки в пространстве называется линией (рис.5). Если точка движется по определенному закону, получается закономерная линия – окружность, эллипс, парабола, гипербола, синусоида, винтовая линия и др. Закономерные и не закономерные линии



Рис. 5

можно подразделить на плоские и пространственные. У плоской линии все точки принадлежат одной плоскости (прямая, окружность, эллипс, гипербола и др.). Одной из характеристик линии является так называемый «порядок» линии. В математике порядок определяется степенью уравнения, которым можно задать линию. В геометрии порядок определяется максимальным количеством точек, полученных при пересечении с плоскостью (точки могут быть действительными и мнимыми (бесконечно удаленными)). Прямая линия пересекается с плоскостью в одной точке – значит, она первого порядка, а окружность, эллипс, парабола и др. – второго порядка.

Особые точки на плоской кривой линии

Плоская кривая линия в каждой точке имеет касательную и нормаль. Касательная (t) – это предельное положение секущей, а нормаль (n) – перпендикуляр к ней в точке касания (M) (рис. 6).

Дугу кривой, имеющую в каждой точке определенную касательную и не имеющую особых точек, называют *гладкой* (рис. 6, а). Точки M^1 , M^2 и M – обыкновенные точки. Остальные точки, изображенные на рис. 6, – *особые*.

Точка перегиба M (рис. 6, б): у неё одна касательная и одна нормаль, ветви кривой лежат по разные стороны от касательной.

Точка возврата первого рода, или точка заострения (рис. 6, в).

Точка возврата второго рода, или «клюв» (рис. 6, з).

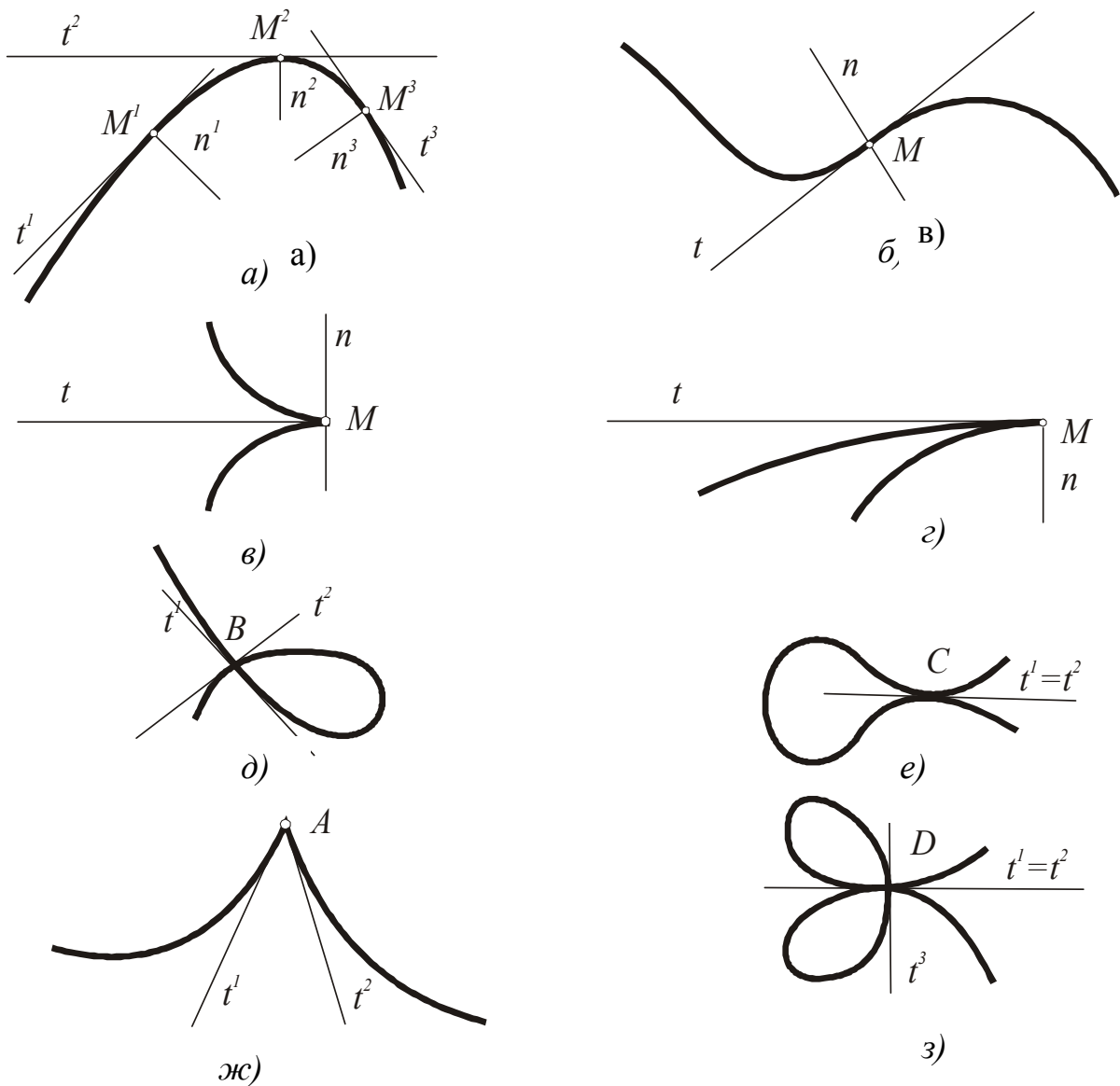


Рис. 6

Угловая точка A, или точка излома, имеет две касательные (рис. 6, ж).

Узловые точки (рис. 6, д, е, з): *B* – с двумя касательными, *C* – с совпадающими касательными, *D* – тройная.

Плоские кривые второго порядка

Рассмотрим подробнее изображения плоских кривых второго порядка.

У гиперболы две оси симметрии и две несобственные точки. С удалением от вершины ветви гиперболы стремятся к параллельности с асимптотами (1 3) и (2 4). На рис. 9 показано построение асимптот. Они являются диагоналями прямоугольника (1 2 3 4). Построение касательной зависит от линий, связывающих точку с фокусами. Например, касательная в точке M является биссектрисой угла FMF^1 , а нормаль – перпендикулярна ей.

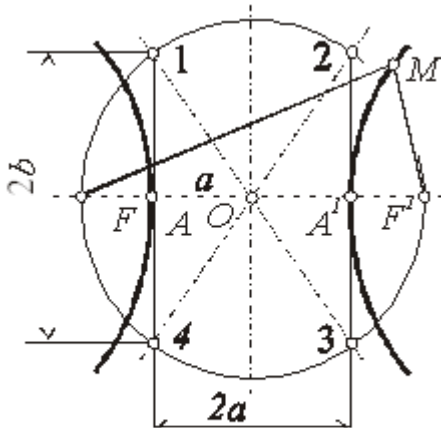


Рис. 9

Пространственные кривые

Типичным представителем пространственной линии является *винтовая линия, или гелиса* (рис. 10). При перемещении в пространстве любая точка (M) совершает сложное движение:

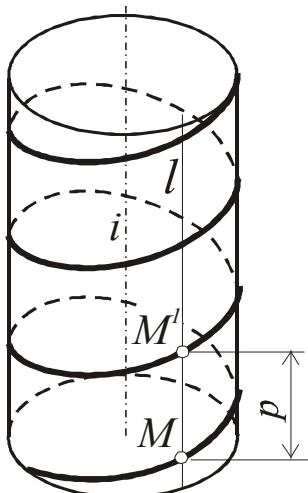


Рис. 10

равномерно движется по образующей l , которая в свою очередь равномерно вращается вокруг оси цилиндра (i). При перемещении образующей на один оборот точка поднимется на величину p – шаг гелисы. При перемещении образующей на пол-оборота точка поднимется на величину, равную половине шага и т.д. Участок кривой от M до M' называется витком. Построенная на рис. 10 цилиндрическая винтовая линия называется правой. При противоположном направлении навивки получим левую винтовую линию. Если взять образующую конической поверхности, получим коническую винтовую линию.

Цилиндрическая винтовая линия обладает свойством сдвигаемости, т.е. может передвигаться сама по себе. Две дуги одинаковой длины одной и той же винтовой линии совпадают при наложении. Этим свойством так же обладают прямая и окружность.

Обводы

В технике встречаются сложные кривые поверхности (например, по-

верхности самолетов, автомобилей, судов и т.д.), сечениями которых являются составные кривые – *обводы*.

Обводом называется линия, составленная из дуг различных кривых (окружностей, эллипсов и др.), состыкованных между собой. Точки соединения называются *узлами обвода*. Чтобы обвод получился *гладким*, узел должен иметь одну общую касательную (касательные двух дуг совпадают) – такие точки называются *точками сопряжения*.

Построить обвод, состоящий из дуг окружностей, достаточно просто, опираясь на свойство окружностей и касательных к ним (рис. 11).

Даны узловые точки A, B, C, D и касательная t в точке A .

Узловые точки будут точками сопряжений дуг окружностей. Центр первой дуги, определяемый точками A и B , должен находиться на перпендикуляре n к заданной касательной t в точке A и лежать на срединном перпендикуляре l к хорде (AB) . На пересечении построенных линий получим точку O^1 – центр первой дуги. Поскольку точка сопряжения B лежит на линии, соединяющей центры, центр O^2 второй дуги будет лежать на пересечении линии (BO^1) и срединного перпендикуляра (T^2O^2) хорды (BC) . В точке B получили внутреннее сопряжение дуг. Дальнейшее построение аналогично рассмотренному (в данном примере C – точка перегиба).

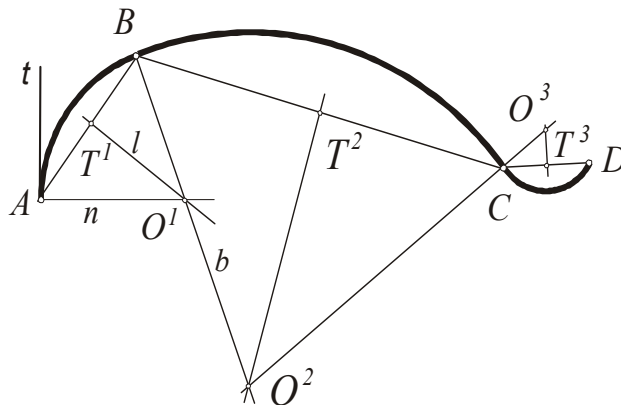


Рис. 11

В инженерной практике часто встречаются обводы, составленные из кривых второго порядка. Объясняется это тем, что последние детально изучены и для их построения разработаны графоаналитические алгоритмы. Кривая второго порядка определяется пятью параметрами и, значит, её можно задать любыми пятью условиями: пятью точками, тремя точками и двумя касательными и т.д.

§ 1.2. Поверхности

В общем случае поверхность – это граница, отделяющая одну среду от другой (например, поверхность воды, стола и других предметов).

Линейчатые поверхности

В геометрии поверхность можно определить как совокупность последовательных положений линии, непрерывно движущейся в пространстве (кинематический способ). Эта линия (*образующая*) может оставаться неизменной, а может менять свою форму (деформироваться). Если образующая – прямая линия, то получится поверхность, которую называют *линейчатой* (призматические, цилиндрические, конические и другие поверхности). Если образующая перемещается случайно, то получается неупорядоченная поверхность. Для задания такой поверхности необходимо иметь фиксированное положение образующих, чем их больше, тем точнее будет представлена форма поверхности. Совокупность таких образующих называется *каркасом поверхности* (рис. 12, а).

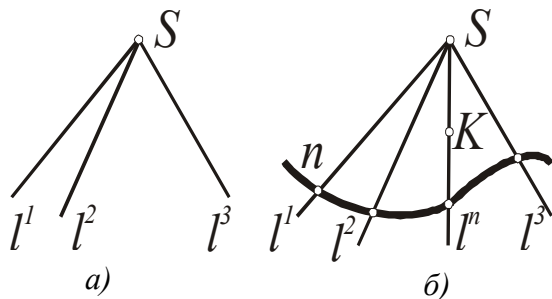


Рис.12

Так как практически мы не можем задать все образующие, а лишь ограниченное количество, то поверхность, в этом случае, будет определена приближенно. Каркас такой неупорядоченной поверхности принято называть *дискретным*, или прерывистым.

Если образующая движется по определенному закону, то поверхность принято называть *закономерной*. Для ее задания необходимо иметь хотя бы одно положение образующей и закон ее перемещения. В зависимости от закона перемещения можно получить поверхности вращения, винтовые, торсовые, с плоскостью параллелизма и множество других поверхностей.

Теоретически закон перемещения образующей можно задать линией (одной или несколькими), которая называется *направляющей* (рис. 12, б) – линия n . В зависимости от формы направляющей (кривая или ломаная) получаются криволинейная или гранная поверхность. Совокупность образующих и направляющих линий позволяет получить непрерывный каркас, т. к. мы можем построить любую промежуточную образующую, используя закон ее получения.

Критерий полноты задания поверхности – возможность построения на ней произвольной точки. Например, между образующими l^2 и l^3 с помощью промежуточной образующей l^n , нанесена точка K , принадлежащая заданной поверхности (см. рис. 12, б). Можно любую точку на

направляющей n соединить с S и на ней задать точку, чего нельзя сделать в случае задания поверхности дискретным каркасом (см. рис. 12, а).

Закономерную поверхность можно задать не каркасом, а определителем. **Совокупность постоянных геометрических элементов и их отношений, позволяющих однозначно определить (построить) поверхность, называется определителем поверхности.** Он состоит из двух частей: геометрической и алгоритмической – α (Γ) (A).

Геометрическая часть (Γ) представляет собой совокупность геометрических элементов (точек, линий, плоскостей), а алгоритмическая (A) – отношение этих элементов и перечень операций, выполнив которые можно построить каркас поверхности.

Например, определитель **конической поверхности** общего вида α (рис. 13, а) запишется следующим образом:

$$(\Gamma): \alpha (n, S); \quad (A): (S \in l^i \cap n),$$

где $\alpha (n, S)$ – геометрический определитель поверхности α , S – вершина конической поверхности, n – направляющая, $(S \in l^i \cap n)$ – алгоритмический определитель, который читается следующим образом: через точку S проходит любая (l -тая) образующая – l^i , которая в свою очередь пересекается с направляющей n .

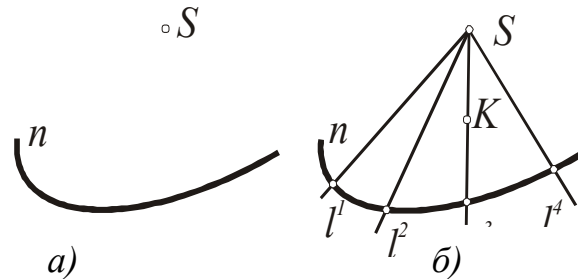


Рис. 13

Для построения каркаса проводят необходимое количество образующих. На рис. 13, б построены четыре образующие – l^1 , l^2 , l^3 и l^4 . Точки пересечения их с направляющей n показаны, но не обозначены. Для того чтобы убедиться в однозначном задании поверхности, на ней указана точка K ($K \in l^3$).

Если вместо криволинейной направляющей взять ломаную линию, то при тех же определителях получим **пирамидальную поверхность**. Если вершину конуса (пирамиды) удалить в **бесконечность** (в несобственную точку), то получим **цилиндрическую** (призматическую) поверхность.

Ее определитель можно записать так: (Γ): $\beta (n, S)$; (A): $(S // l^i \cap n)$.

На рис. 14, а дано изображение призматической поверхности β , за-

данной геометрическим определителем, а на рис. 14, б – каркасом.

Для построения каркаса параллельно заданному направлению S провели ряд образующих $l^1 \dots l^4$, пересекающихся с заданной направляющей в характерных точках 1...4. Цилиндрическая и коническая поверхности общего вида превратятся в плоскость (плоскую поверхность), если направляющей будет прямая линия.

На рис. 15, а показана **плоскость**, заданная определителем (Г): $(n, S); (A): (S // l^i \cap n)$. На рис. 15, б задано несколько образующих. Таким образом, плоскость можно рассматривать как частный случай поверхности. Рассматривая рис. 15, б можно заметить, что **для задания плоскости** достаточно иметь направляющую прямую n и всего одну образующую, т.е. **две пересекающиеся прямые**.

В практике еще принято задавать плоскость тремя точками, прямой и точкой, не лежащей на ней, двумя параллельными прямыми, плоской фигурой. На рис. 15, в плоскость задана треугольником – $\Delta (ABC)$.

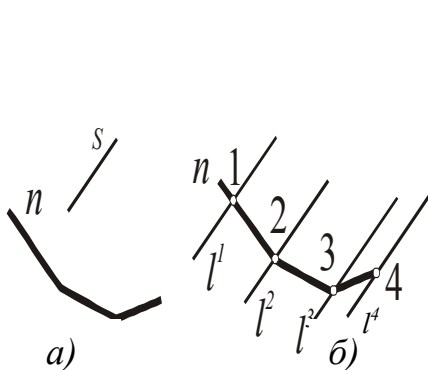


Рис. 14

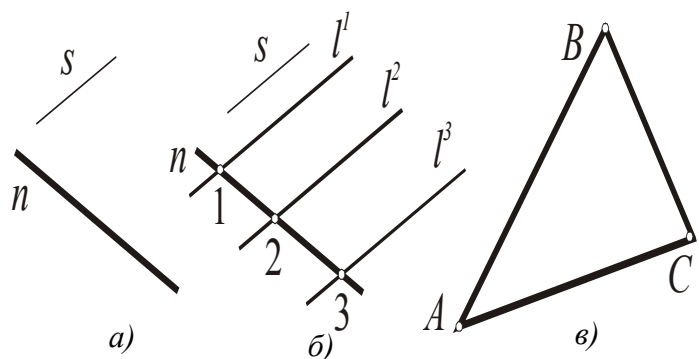


Рис. 15

Поверхности вращения

Если мы будем вращать образующую вокруг какой-нибудь оси, то получим поверхность, которая получила название **поверхности вращения**. Когда вращается произвольная линия (пространственная или плоская), получается поверхность вращения общего вида (рис. 16).

Определитель нашей поверхности ϕ (рис. 16, а) включает в себя плоскую образующую l , ось вращения i , лежащую в той же плоскости,

и условие, что эта образующая вращается вокруг оси. Геометрический определитель запишем так: (Г): $\varphi(\cup i, l)$. Алгоритмический определитель можно описать словами, или условиться обозначать ось вращения латинской буквой i , а знак вращения – \cup . Тогда алгоритмический определитель выглядит так: (А): $(l \cup i)$.

Каждая точка образующей перемещается в пространстве по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 16, б). Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая параллель называется *экватором*, наименьшая – *горлом*. На рис. 16, б горло получилось при вращении точки B , а экватор – D .

Линия пересечения поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, называется *меридианом*. На рис. 1.16, б плоскость α пересекает поверхность по заданной образующей l . Это следствие того, что образующая является плоской кривой и ось вращения лежит в той же плоскости. При отсутствии хотя бы одного условия меридиан не совпадет с образующей.

Точку на поверхности вращения удобнее задавать на параллели. На рис. 16, б точка K лежит на параллели, проходящей через точку C образующей l , а O^3 – центр окружности.

При вращении прямой линии в зависимости от ее положения относительно оси вращения получаются **конус вращения** (рис. 17), **цилиндр вращения** (рис. 18), **гиперboloид вращения** (рис. 19).

На рис. 17, а по-

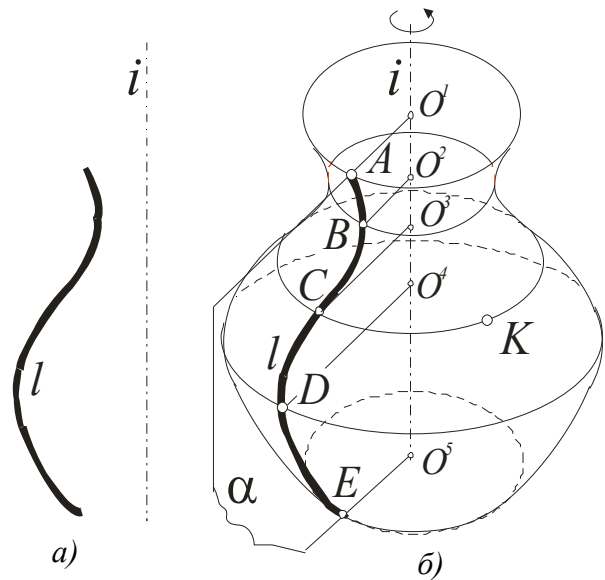


Рис. 16

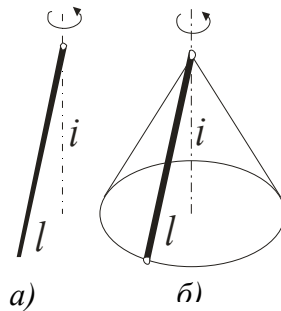


Рис. 17

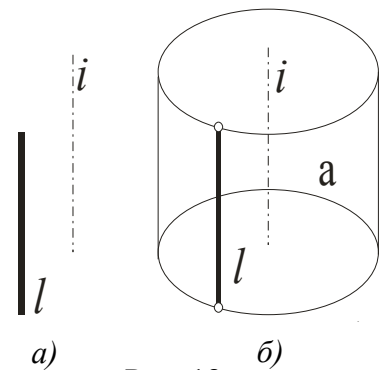


Рис. 18

верхность задана определителем $(\Gamma): \alpha(\mathcal{U}i, l)$. Образующая пересекает ось в точке, которая при вращении образует вершину прямого кругового конуса (рис. 17, б): $(A): (l\mathcal{U}i; l \cap i = S)$. На рис. 18, а образующая параллельна оси: $(\Gamma): \beta(\mathcal{U}i, l)$, $(A): (l\mathcal{U}i) (l \parallel i)$. При ее вращении получим прямой круговой цилиндр.

Интересно ведет себя образующая, скрещивающаяся с осью вращения (рис. 19, а). Определитель поверхности $(\Gamma): \chi(\mathcal{U}i, l)$, $(A): (l\mathcal{U}i; li \div i)$. На рис. 19, б показано несколько положений образующей $l(l^1 \dots l^3)$. Точка C

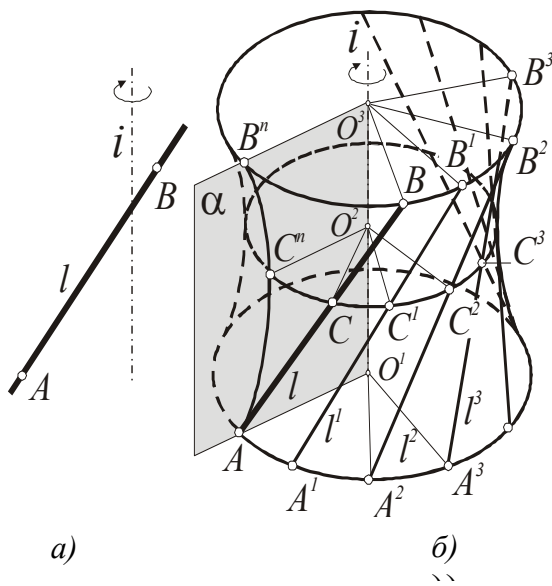


Рис.19

на ней – ближайшая к оси вращения – занимает последовательно положения $(C^1 \dots C^3)$ и принадлежит горлу поверхности. Меридиональная плоскость α проведена через нижнюю точку образующей – A . Видно, что точка C образующей удалена от плоскости α на угол CO^2C^n . Пока точка C при вращении «дойдет» до меридиональной плоскости, точки на отрезке $[AC]$ постепенно пересекают ее, образуя участок меридиана (AC^n) . Вращаясь дальше, отрезок $[CB]$ формирует

остальную часть меридиана $(C^n B^n)$. Мы не будем доказывать, что этой кривой будет гипербола.

Гиперболоид вращения можно получить вращением вокруг той же оси гиперболы $(A B^n)$.

При вращении окружности вокруг оси, расположенной в ее плоскости, может получиться сфера или тор (открытый или закрытый).

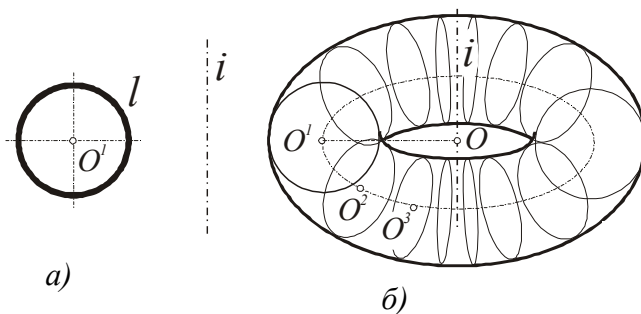


Рис. 20

На рис. 20, а, б показано получение открытого **тора**. Ось вращения в данном случае не пересекается с окружностью – образующей линией. (Тот же тор можно получить, вращая вместо окружности сферу). Если

ось вращения проходит по окружности, получится закрытый тор, он может быть образован вращением большей или меньшей части окружности.

Поверхности с ребром возврата

При перемещении прямолинейной образующей, которая во всех положениях является касательной к некоторой пространственной кривой линии, называемой ребром возврата, получается **торсовая поверхность**.

На рис. 21 показан частный случай торсовой поверхности, образованной перемещением прямой линии l ($l^1, l^2 \dots l^6 \dots$) касательной к цилиндрической винтовой линии в точках 1, 2 ... 6 и т.д. На рисунке показана лишь нижняя часть поверхности, но продолжив касательные в противоположную сторону, мы получим вторую часть поверхности. Ребро возврата является направляющей торса и её задания достаточно для определения самой поверхности. Геометрический определитель торса:

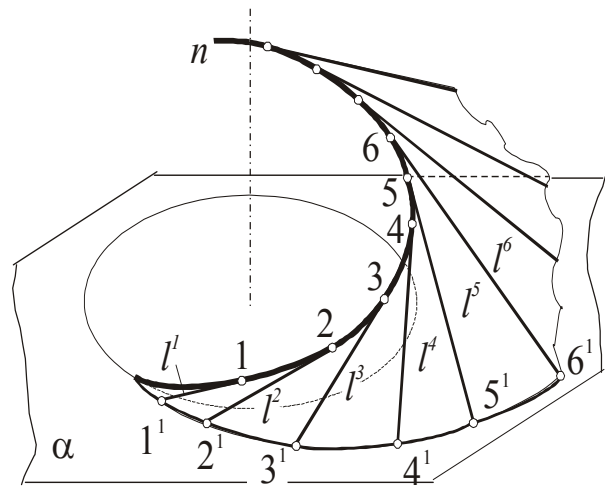


Рис. 21

Геометрический определитель торса: $\chi(n)$, алгоритмический определитель: $\chi(l \cap n)$.

Поверхности с плоскостями параллелизма

В технике и строительстве часто применяют поверхности, у которых закон перемещения образующей задан не одной, а **двумя направляющими** и **плоскостью параллелизма** (направляющей плоскостью). Образующая (прямая линия), перемещающаяся по этим направляющим, во всех своих положениях сохраняет параллельность заданной плоскости параллелизма. В зависимости от формы направляющих (прямая, кривая, окружность и т.д.) получается

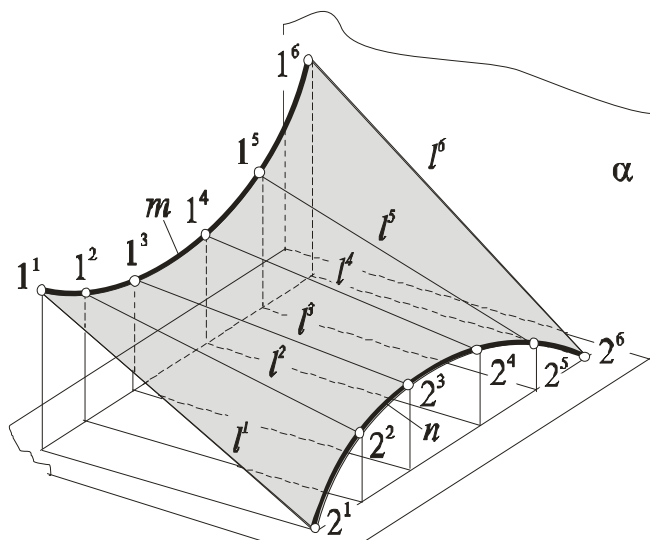


Рис. 22

коноид, цилиндроид и косая плоскость (гиперболический параболоид). Так, если обе направляющих – кривые линии, то полученная поверхность называется цилиндроидом (рис. 22). Все показанные на рисунке положения образующих $l(l^1, l^2 \dots l^6)$ параллельны направляющей плоскости α . В точках $1(1^1, 2^1 \dots 6^1)$ и $2(2^1, 2^2 \dots 2^6)$ образующая при движении пересекается с направляющими m и n . Определитель такой поверхности:

$$(Г): \gamma(m, n, \alpha);$$

$$(А): (m \cap l^i \cap n; l^i \parallel \alpha),$$

где: m и n – направляющие линии, α – плоскость параллелизма, l^i – произвольная образующая.

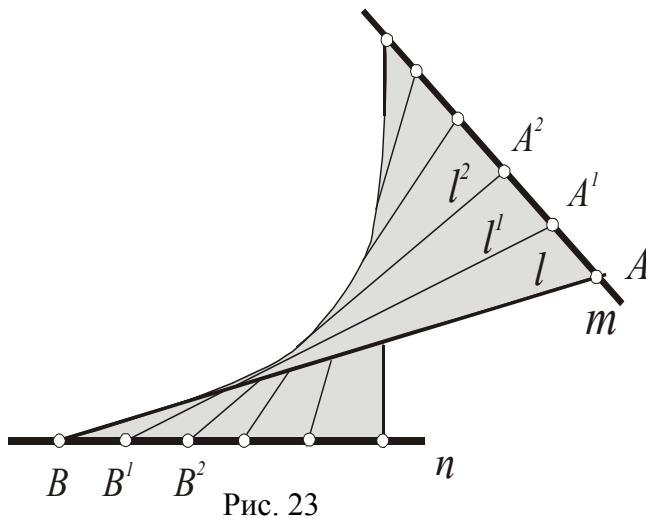


Рис. 23

Если одна из направляющих будет кривой, а вторая – прямой линией, то мы получим коноид.

При двух прямолинейных направляющих (рис. 23) возникает косая плоскость. Выражение определителя при этом останется прежним. На рисунке показано несколько положений образующей $l(l^1, l^2)$, а плоскость параллелизма не показана.

Косая плоскость называется еще гиперболическим параболоидом и является очень интересной поверхностью, которая, пересекаясь с плоскостью, кроме прямых дает гиперболу и параболу.

Форму цилиндроидов имеют конструкции воздухопроводов, переходные патрубки, отвальные поверхности плугов и культиваторов в сельхозорудиях и др.

Оболочки покрытий промышленных и общественных зданий, элементы мостов, их опор и других гидротехнических сооружений изготавливают в виде коноидов.

Поверхностями коноидов оформляют арки окон и дверей в стенах зданий, проемы в цилиндрических башнях водозаборных сооружений. В кораблестроении коноиды используются при конструировании носовой части ледоколов, катеров на подводных крыльях и т.д. В машиностроении коноидами являются поверхности шнеков, конических прямоугольных пружин и т.д.

Косые плоскости наиболее широко применяются в архитектуре в качестве покрытий зданий и сооружений. Стена набережной при переходе от наклонной стены к вертикальной тоже является косой плоскостью.

Винтовые поверхности

При винтовом перемещении образующей линии, пересекающейся с осью вращения, получим **винтовую поверхность** (рис. 24). Определителем поверхности φ в данном случае служат ось i , винтовая направляющая n и горизонтальная образующая l с выделенным на ней отрезком $[AB]$: $(\Gamma): \varphi(\cup i, n, l)$; $(A): (i \cap l \cap n)$.

На рисунке показано восемь положений образующей OA .

Если образующей является прямая линия, то полученная поверхность называется **геликоидом**. В зависимости от угла наклона образующей к оси геликоида подразделяются на прямые (угол наклона образующей равен 90^0) и наклонные (угол не равен 90^0). На рис. 24 показан прямой геликоид. Поскольку образующая все время остается горизонтальной, горизонтальную плоскость можно считать плоскостью параллелизма, а прямую i и винтовую линию l – направляющими. При таком взгляде на поверхность прямолинейный геликоид можно отнести к коноидам. Торсовую поверхность на рис. 21 также можно назвать торс-геликоидом, так как ее направляющей является гелиса.

У наклонного геликоида образующие при перемещении сохраняют постоянный угол наклона к плоскости, перпендикулярной оси, что дает возможность использовать в качестве направляющей поверхности конус.

Винтовые поверхности получили широкое применение в технике. Винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, рабочие органы судовых и воздушных винтов, конструкции винтовых аппарелей и лестниц являются примерами использования винтовых поверхностей. При винтовом перемещении кривой линии получают нелинейчатые винтовые поверхности.

Например, при перемещении окружности или сферы, в зависимости от ее положения относительно винтовой линии или оси винта, могут получиться: винтовой столб, винтовой цилиндр и др. [1].

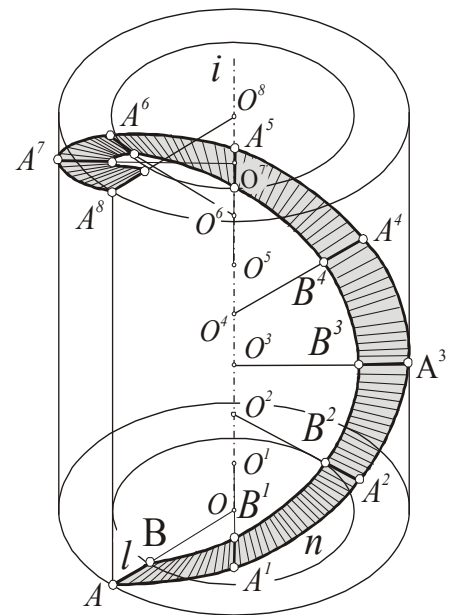


Рис. 24

Циклические поверхности

Существует множество поверхностей, образованных перемещением окружности постоянного или переменного радиусов, которые называются **циклическими поверхностями**. Законы изменения и перемещения окружностей имеют много вариантов.

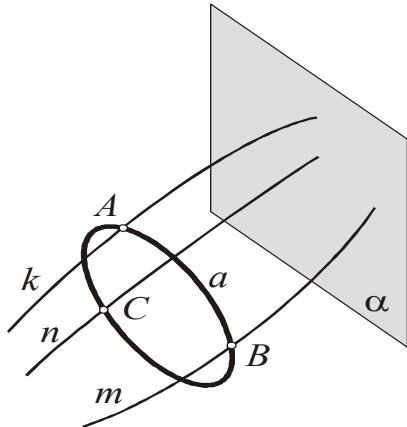


Рис. 25

На рис. 25 показан один из возможных вариантов задания циклической поверхности. Ее геометрический определитель имеет три направляющих и плоскость параллелизма: (Г): $\chi(k, m, n, \alpha)$.

Алгоритмический определитель: в каждый момент окружность определяется тремя точками, лежащими в плоскости, параллельной плоскости параллелизма α : (А): $(A, B, C) \subset a \parallel \alpha$.

В том случае, когда криволинейная образующая b остается перпендикулярной к направляющей m , поверхность называют **каналовой**, $\phi(m, b)$ (рис. 26, 27). На рис. 26 поверхность образована движением окружности постоянного радиуса, а на рис. 27 – переменного.

Циклические поверхности часто используются в промышленности. Каркасы из набора окружностей используются в качестве арматуры при изготовлении деталей и элементов силовых конструкций из пластмасс. Из них получают трубопроводы и патрубки с закономерным изменением

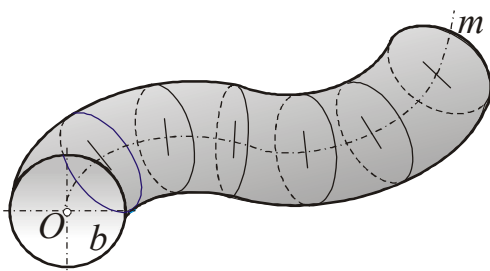


Рис. 26

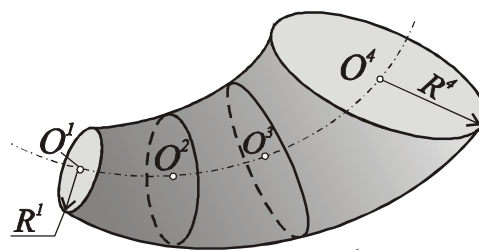


Рис. 27

сечения. При проектировании поверхностей в настоящее время часто используют сечения, состоящие из сопряженных дуг окружностей. Примером составных циклических поверхностей являются обшивки гондол турбореактивных двигателей и газовых турбин, обшивки внутренних очертаний тоннелей и др.

Поверхности параллельного переноса

Такие поверхности получаются при поступательном перемещении одной кривой (образующей) по другой кривой (направляющей). (При поступательном движении все точки кривой равномерно перемещаются по параллельным траекториям и на одинаковую величину). При этом образующие поверхности линии остаются параллельными.

На рис. 28 заданы криволинейная образующая n и направляющая m . Занимая последовательно положения n^1, n^2 и т.д, образующая пересекается с направляющей m в точках A, A^1, A^2 и т.д. Геометрический определитель поверхности состоит из двух линий, (Γ): $\varphi(m, n)$.

В алгоритмический определитель входит понятие эквидистантных (параллельных) кривых n , пересекающихся с направляющей m в точках A, A^1, A^2 и т.д.: (A): $\varphi(n^i \cap m = A^i; n^i \parallel n)$.

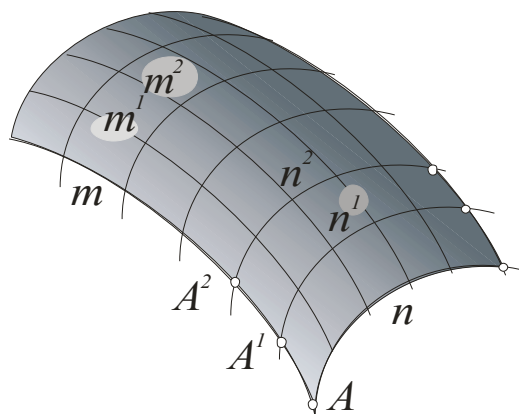


Рис. 28

Следует отметить, что n может служить направляющей, а m образующей, но поверхность от этого не изменится.

Поверхности параллельного переноса используются при создании монолитных и сборных оболочек, их каркас можно формировать при помощи передвижной опалубки, что значительно облегчает технологический процесс.

Рассмотренные примеры продемонстрировали, что одна и та же поверхность может быть получена различными способами, поэтому классификация их является довольно трудной задачей.

§ 1.3. Пространственные фигуры (тела)

Все предметы, выполненные из разных материалов, являются пространственными геометрическими телами, ограниченными со всех сторон различными поверхностями.

На рис. 29 показаны простейшие геометрические тела: a – призма, b – цилиндр, v – пирамида, z – конус, d – шар, e – открытый тор.

Призмы и пирамиды ограничены плоскими гранями.

Основаниями призмы являются многоугольники, а боковые рёбра параллельны между собой. Если боковые рёбра перпендикулярны основанию, призма называется прямой, в противном случае – наклонной; если в основании при этом лежит правильный многоугольник, то призма называется правильной. На рис. 29, *а* изображена правильная четырехугольная призма.

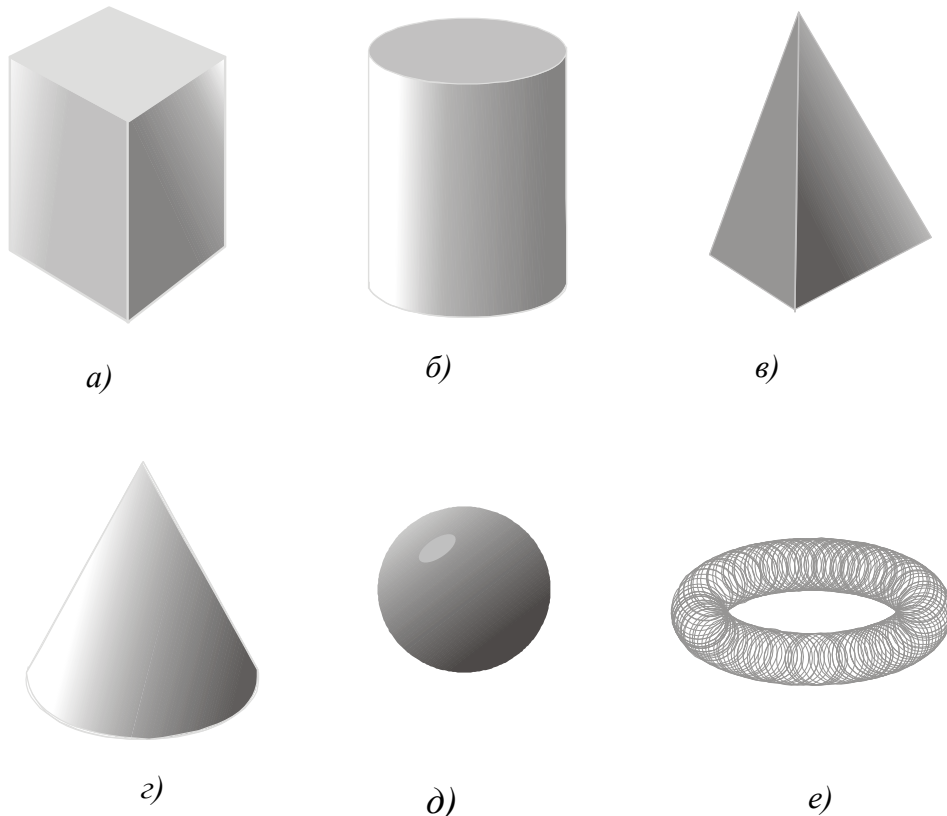


Рис. 29

При неограниченном увеличении количества сторон многоугольник стремится к замкнутой кривой, и призма превращается в цилиндр, а пирамида – в конус. Изображенные на рисунке цилиндр (рис. 29, *б*) и конус (рис. 29, *г*) называются прямыми круговыми.

Пирамиды имеют одно основание и вершину. Боковыми гранями служат треугольники. Пирамиды могут быть прямыми и наклонными, правильными и неправильными. Название пирамиды определяется количеством вершин основания. На рисунке 29, *в* представлена треугольная пирамида.

Шар (рис. 29, *д*) и тор (рис. 29, *е*) ограничены одной поверхностью.

Рис. 30 изображает детали, состоящие из сочетания различных геометрических тел.

Деталь на рис. 30, *а* состоит из тел, ограниченных поверхностями вращения (конус, шар, несколько цилиндров). Отверстия можно рассматривать как мнимые, или удаленные, геометрические тела. Поэтому при анализе состава детали можно говорить о сумме и разности простых геометрических тел.

Изображенная на рис 30, *б, в* деталь расчленена на шесть составных частей. Мы видим, что вертикальный цилиндр имеет ступенчатое отверстие, значит, из него удалены два цилиндра разных диаметров и высот. Кроме этого в нём высверлено горизонтальное отверстие. Горизонтально расположенное призматическое основание имеет полуцилиндрический вырез. Вертикально расположенная стойка, кроме цилиндрических отверстий, имеет цилиндрические закругления, представляющие собой четверти цилиндра. Накладка с тремя отверстиями по краям имеет полуцилиндрические закругления, т.е. деталь состоит из суммы четырёхугольной призмы и двух полуцилиндров, из которых удалены (вычтены) три цилиндра.

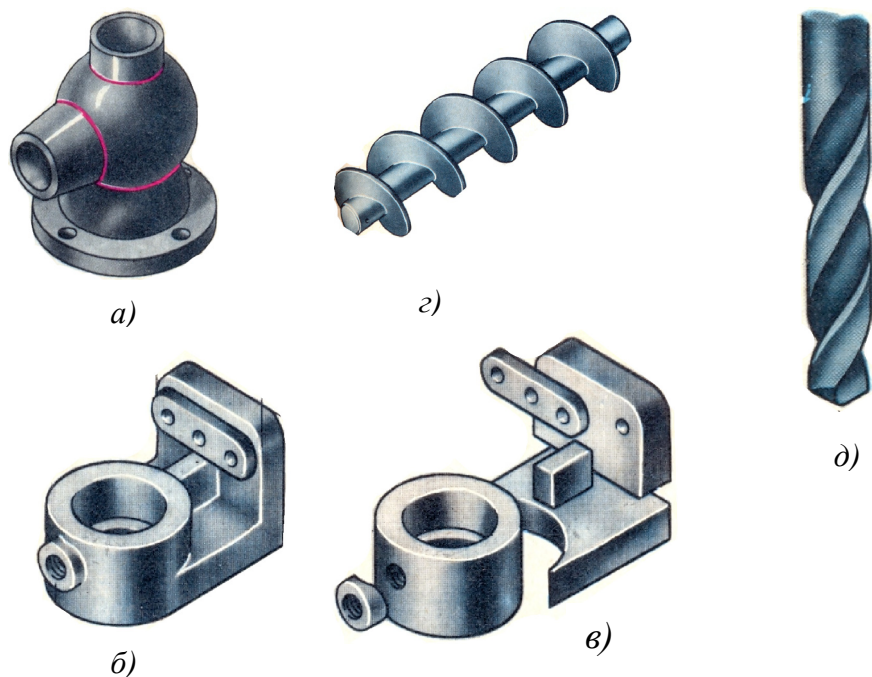


Рис. 30

На рис. 30, *г* и *д* детали ограничены цилиндрическими и винтовыми поверхностями.

Если мы сумеем выполнить изображения основных геометрических образов, то сможем изобразить любой предмет. Для этого нам необходим аппарат, позволяющий выполнять и читать чертежи. Основой построения чертежей служат проекции основных геометрических образов.

Вопросы и задания для повторения

1. Постройте кривые второго порядка: эллипс, параболу, гиперболу.
2. Что такое определитель поверхности?
3. Что такое направляющая и образующая поверхности?
4. Что является критерием полноты задания поверхности?
5. Что такое каркас поверхности?
6. Какие вы знаете простейшие геометрические тела?
7. Что такое анализ формы предмета?

Глава 2. АППАРАТ ПРОЕКЦИРОВАНИЯ

Начертательная геометрия – одна из научных дисциплин, изучающих теорию изображений.

Мы воспринимаем окружающий мир в основном с помощью зрения. Для начала рассмотрим получение изображений на сетчатке глаза. По законам оптики на сетчатку проецируется перевернутое изображение (рис. 31). Значит, в восприятии участвует мозг? (Светочувствительные клетки раздражаются, импульс передаётся по главному нерву в головной мозг; в сознании возникает реально видимое ощущение)¹.

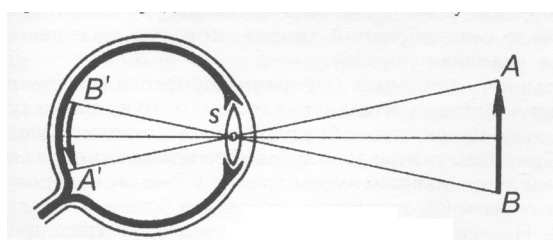


Рис. 31

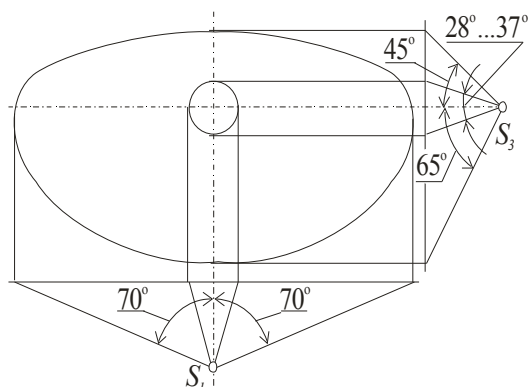


Рис. 32

При наблюдении предмета (без поворота головы) глаз охватывает пространство, ограниченное лучевым конусом зрения, вершина которого находится в оптическом центре хрусталика. Пересекаясь с расположенной вертикально поверхностью, конус зрения дает фигуру сечения, ограниченную эллипсосоподобной кривой, которая называется полем зрения (рис. 32). Крайние лучи конуса зрения образуют в горизонтальной плоскости угол 140° , а в вертикальной – 110° , причем верхний угол меньше нижнего (45° и 65°), а боковые углы равны. В центре поля зрения находится небольшой круг,

¹ Демидов В. Как мы видим то, что видим. М.: Знание, 1987.

называемый полем ясного зрения. Физиологи доказали, что чёткое восприятие (видимость) предметов глазом человека возможно при угле ясного зрения в пределах $28^\circ \dots 37^\circ$, а умеренная видимость – при угле до 53° . Дальше изображение «расплывается», и чтобы рассмотреть предмет за этим пределом мы вынуждены повернуть голову. Чтобы построить изображение предмета на плоскости (поверхности), необходим, по видимому, «аппарат», подобный глазу.

§ 2.1. Центральное проецирование

При изображении какого-либо объекта на любую поверхность мы проецируем его. Это новое понятие, с которым нам предстоит познакомиться. Очевидно, любое изображение предмета можно назвать проекцией. Можно получить проекцию на любую поверхность – от плоскости до сложного рельефа. Проецирующие лучи могут быть как прямыми, так и кривыми линиями. В данном пособии, как уже говорилось, будут рассмотрены способы изображения только на плоскости. Для начала выберем аппарат проецирования, подобный глазу.

Аппарат проецирования – плоскость отображения и центр, через который проходят световые лучи (подобный хрусталику глаза).

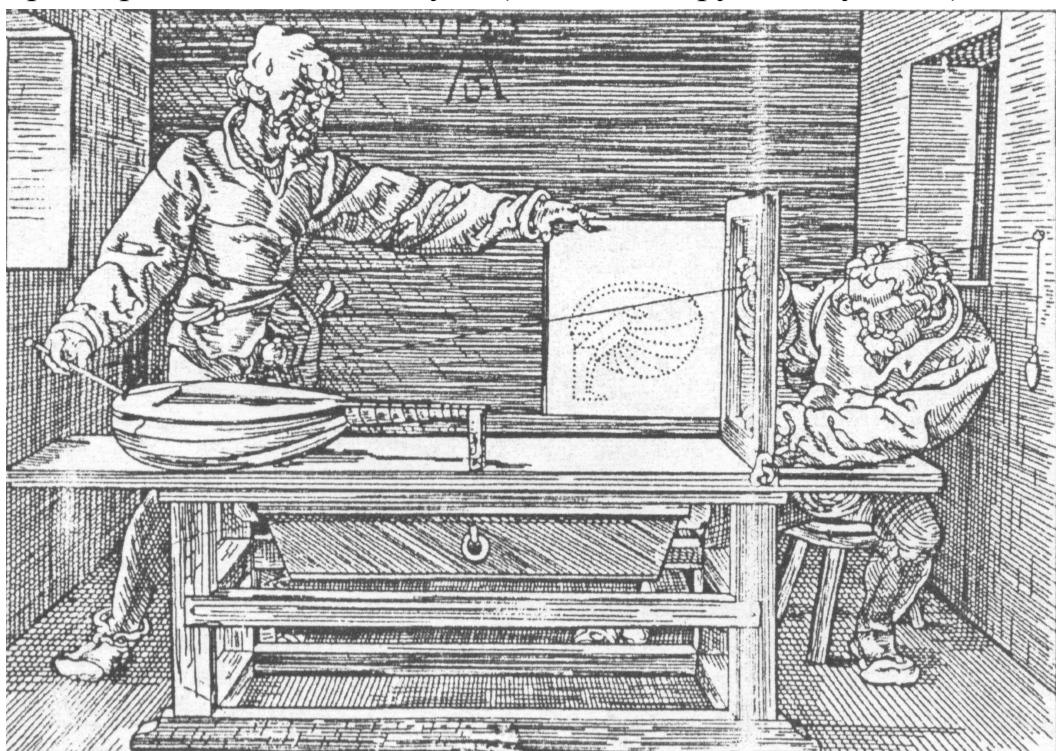


Рис. 33

Плоскость отображения принято называть *плоскостью проекций*, или *картинной* плоскостью, световые лучи – *проецирующими лучами*,

центр – *центром проецирования*. Весь аппарат называется центральным, коническим или перспективным аппаратом проецирования. Применяется центральное проецирование, в основном, для получения наглядных изображений.

Чтобы изображение не было перевернутым, как на сетчатке глаза, плоскость проекций и изображаемый предмет обычно располагают по одну сторону от центра проецирования. Используя этот аппарат, мы можем легко построить проекции предмета на плоскость проекций. Процесс получения перспективных изображений знали уже в XV веке. Один из теоретиков, художник Альбрехт Дюрер показал на гравюрах процесс получения такого изображения (рис. 33).

Проекции основных геометрических образов

Проекция предмета получается при пересечении проецирующих лучей, проходящих через все точки объекта с поверхностью, на которой строят изображение. На рис. 34, а показана схема получения центральной проекции точки A на картинную плоскость k с помощью прямолинейного проецирующего луча. Для этого достаточно провести прямую через точку зрения S и точку A до пересечения с плоскостью проекций k в точке A_k , которая и является центральной проекцией точки.

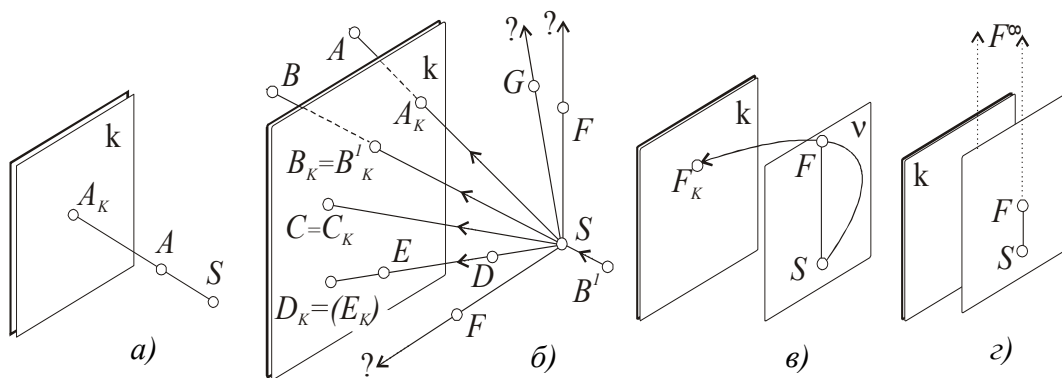


Рис. 34

На рис. 34, б показано построение проекций точек, занимающих различное положение в пространстве по отношению к аппарату проецирования.

Можно ли однозначно построить проекции любой точки, используя этот аппарат? Ответ будет отрицательным, т.к. с увеличением угла зрения точки будут выходить за рамки поля зрения, уже практически недоступной станет проекция точки G (см. рис. 34, б). Но ее еще можно по-

строить, отодвинув подальше точку зрения (S). Точки же F на рис. 34, б и 34, в вообще оказались в плоскости ν (ню), параллельной картинной плоскости проекций. Можно ли получить каким-либо способом проекции и этих точек? Оказывается, можно. Есть два пути: первый – воспользоваться криволинейным лучом, второй – вспомнить о криволинейности пространства. На первый взгляд понятие «криволинейный» луч кажется необычным. Мы привыкли к прямолинейному распространению световых лучей. Можно ли представить практически криволинейный луч? Оказывается, можно (см. рис. 34, в).

Не так давно появилось «волшебное» световолокно, которое позволяет «искривлять» пучок света. Оно лежит в основе эндоскопа – аппарата, который позволяет врачам через гибкий шланг наблюдать состояние внутренних органов человека непосредственно, без преобразования его в другую форму информации. И это не единственная область применения «волшебного» волокна.

В геометрии Евклида, которая изучается в средней школе, считается, что параллельные прямые не пересекаются. Но мы привыкли видеть, как «сходятся» на горизонте параллельные колеи дорог, как приближаются к земле и исчезают на горизонте линии электропередач. Впервые неевклидову модель пространства разработал русский математик Н. И. Лобачевский [6]. По его представлению, пучок параллельных прямых пересекается в одной точке, которая находится в бесконечности. Пересекается с плоскостью и линия, параллельная ей. И точка пересечения тоже лежит в бесконечности и является единственной. Пересекаются и параллельные плоскости по единственной, расположенной в бесконечности, прямой. Существующие в бесконечности линии и точки принято называть *несобственными*. И картинная плоскость имеет несобственные элементы. В геометрии дополненное несобственными элементами пространство принято называть проективным. Воспользуемся этим, и будем считать, что проекцией точки F на плоскость k будет удаленная в бесконечность несобственная точка F^∞ (рис. 34, з). Таким образом, наш аппарат центрального проецирования является универсальным, т.к. с его помощью можно

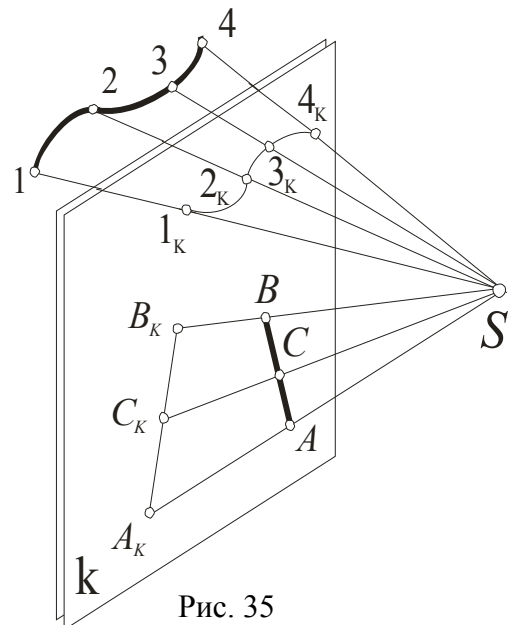


Рис. 35

построить проекции любой точки, а значит и любого объекта. К этому вопросу мы вернемся в главе 4.

Отметим, что точки, лежащие на одном проецирующем луче, называются *конкурирующими*, на рис. 34, б их проекции совпадают, $D_K = (E_K)$. Скобки означают, точка E невидима, т.к. она находится за точкой D . Точка C лежит в картинной плоскости и ее проекция совпадает с самой точкой, $C = C_K$ (см. рис. 34, б) Для построения проекции линии необходимо построить проекции ряда ее точек и соединить их между собой в той же последовательности, в какой они находятся в пространстве $(1\ 2\ 3\ 4)$ и $(1_K\ 2_K\ 3_K\ 4_K)$ (рис. 35). Чтобы спроецировать прямую линию, достаточно построить проекции двух ее точек и соединить их между собой. Если точка принадлежит линии, проекция ее принадлежит проекции этой линии, точка C на прямой (AB) и ее проекция C_K на $(A_K B_K)$, (см. рис. 35).

Линия может в пространстве занимать различные положения относительно элементов аппарата проецирования: общее, частное и особое. На рис. 35 показаны кривая и прямая линии общего положения. Они не параллельны плоскости проекций и не совпадают с направлением проецирования.

Поверхность на чертеже задается проекциями геометрических элементов, входящих в состав определителя: очерка, каркаса, параллелей и др., а плоскость – проекциями пересекающихся или параллельных прямых, любой плоской фигурой (удобнее треугольником) и др. На рис. 36, а проекция плоскости $\triangle ABC$ – треугольник $\triangle A_K B_K C_K$.

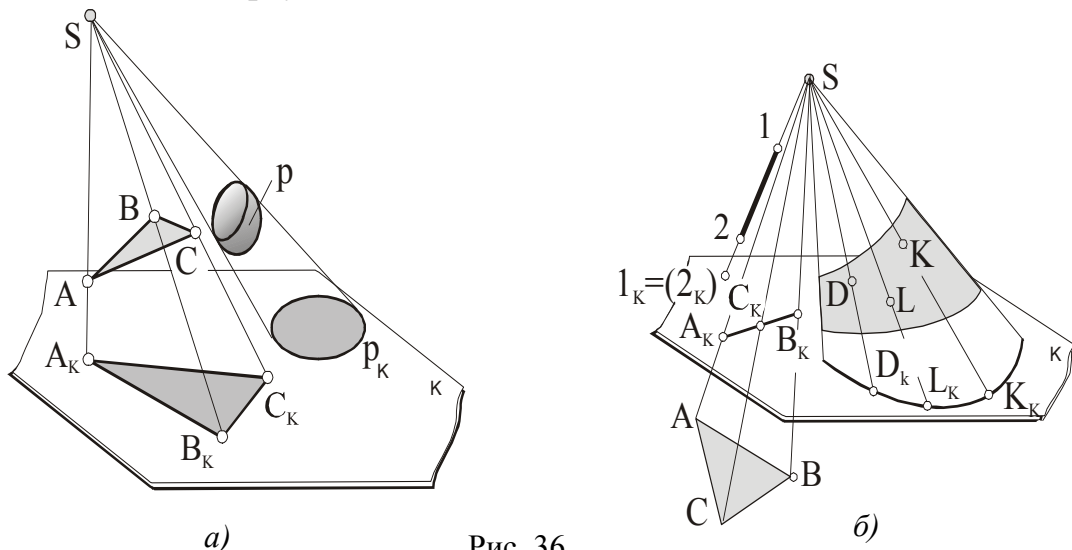


Рис. 36

Проекция поверхности $p - p_K$ получилась от пересечения конуса, касательного к поверхности с плоскостью проекций k . В этом случае говорят, что проекция поверхности задана *очерком*. Изображенные на рис. 36, а поверхности занимают общее положение относительно плоскости проек-

ций в отличие от поверхностей на рис. 36, б. Здесь поверхности занимают частное положение, которое характерно тем, что проекции поверхностей «теряют» одно измерение и **проецируются в линию**, или «**вырождаются**». И называется такая поверхность (плоскость) **проецирующей**. Если продолжить плоскость треугольника, он пересечется с плоскостью проекций по линии, совпадающей с его проекцией $A_K B_K$. Линия пересечения плоскости или поверхности с плоскостью проекций называется **следом**. В том случае, когда поверхность проецирующая, она целиком проецируется на след. Все точки проецирующих поверхностей расположены на проецирующих лучах, и, следовательно, любая линия или фигура, расположенная на поверхности, тоже проецируется на «вырожденную» проекцию. Точки D , L и K , принадлежащие отсеку конической поверхности, при проецировании из вершины конуса проецировались на **след-проекцию**.

Отрезок $[1\ 2]$ на рис. 36, б тоже проецирующий, его проекция «выродилась» в точку $1_K = 2_K$.

Следует отметить еще одно свойство центральных проекций – предмет, расположенный перед плоскостью проекций, изображается увеличенным, за плоскостью – уменьшенным.

Инвариантные свойства центральных проекций

Все изображаемые элементы проецируются на плоскость проекций в общем случае с искажением. При этом характер искажения зависит от способа проецирования и положения проецируемой фигуры относительно плоскости проекций. Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называются **независимыми, или инвариантными относительно выбранного способа проецирования**.

Необходимо отметить следующие инвариантные свойства центральных проекций:

1. Проекция точки – точка (см. рис. 33, 34, а).
2. Проекция точки, принадлежащей плоскости проекций, совпадает с самой точкой ($C = C_K$, см. рис. 34, а).
3. Две точки, лежащие на одном проецирующем луче, имеют общую проекцию ($D_K = E_K$, см. рис. 34, а). Такие точки называют конкурирующими.
4. Проекцией линии в общем случае является линия, проекцией отрезка – отрезок (см. рис. 35).
5. Линия, совпадающая с проецирующим лучом, проецируется в точку. Такая линия называется проецирующей (отрезок $[1\ 2]$ на рис. 36, б).
6. Отсек плоскости (поверхности) в общем случае проецируется в замкнутую фигуру (см. рис. 36, а).

7. Если через все точки поверхности (плоскости) проходят проецирующие лучи, поверхность называют проецирующей, проекция поверхности «вырождается» в линию (след-проекцию и теряет одно измерение) (см. рис. 36, б).

8. Точка пересечения линий в пространстве проецируется в точку пересечения проекций этих линий (точка A и ее проекция A_K , рис. 37.)

9. Точка касания прямой и кривой линий в пространстве и на проекции остается точкой касания их проекций (точка A и A_K , рис. 38).

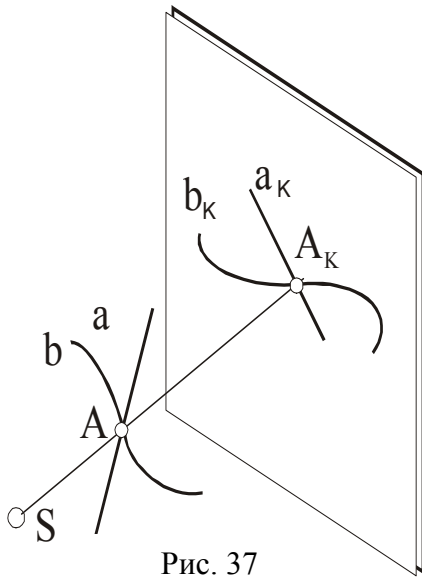


Рис. 37

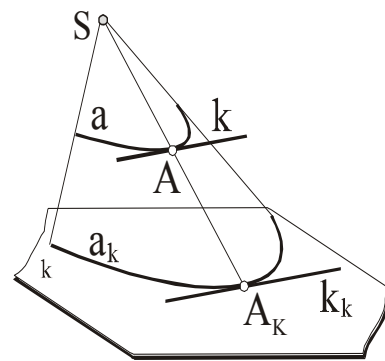


Рис. 38

§ 2.2. Параллельное проецирование

При удалении центра проецирования в бесконечность получим параллельное проецирование. В его аппарат входят плоскость проекций π и направление параллельного проецирования s с несобственным центром.

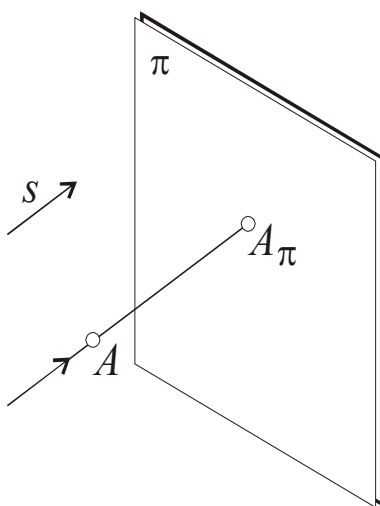


Рис. 39

Для построения проекции точки A , расположенной в пространстве (рис. 39), проводим через нее проецирующий луч, параллельный заданному направлению s , до пересечения с плоскостью проекций в точке A_π , которая и является проекцией точки A . Если направление проецирования, а соответственно, и проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций, то получатся прямоугольные проекции точек и других геометрических образов. В другом случае получим косоугольные проекции геометрических образов.

Параллельные проекции используют как для получения наглядных изображений (аксонометрия), так и в комплексных чертежах.

Параллельные проекции основных геометрических образов

На рис. 40 построены параллельные проекции точек A, B, C, D и K . Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости проекций, но построение проекций от этого не меняется.

Точка C принадлежит плоскости проекций и, следовательно, совпадает с самой точкой ($C = C_{\pi}$). Точки D и K расположены на одном луче (конкурирующие точки), их проекции совпадают ($K_{\pi} = D_{\pi}$). Заключенная в скобки проекция точки D (D_{π}) означает, что она невидима на изображении, т.к. закрыта точкой K .

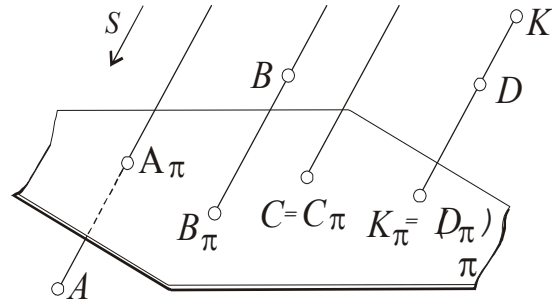


Рис. 40

Проекцией линии в общем случае является линия (кривые b и b_{π} на рис. 41). Для построения проекции кривой необходимо построить проекции достаточного количества точек, принадлежащих линии (на рисунке точки не обозначены).

Проекциями отрезков являются отрезки $[AB]$ и $[A_{\pi}B_{\pi}]$ (см. рис. 41).

Если точка в пространстве принадлежит отрезку прямой и делит его в отношении $m:n$, то проекция

точки принадлежит проекции отрезка и делит его в том же отношении $[AC]:[CB]=[A_{\pi}C_{\pi}]:[C_{\pi}B_{\pi}]$.

Отрезок $[KD]$ принадлежит проецирующей прямой, т.к. совпадает с направлением проецирования, его проекция – точка $K_{\pi} = D_{\pi}$.

Прямая EF параллельна плоскости проекций, длина проекции отрезка $[E_{\pi}F_{\pi}]$ равна отрезку $[EF]$.

На рис. 42 показаны проекции поверхности и плоскости.

В общем случае проекцией отсека поверхности ρ является замкнутый

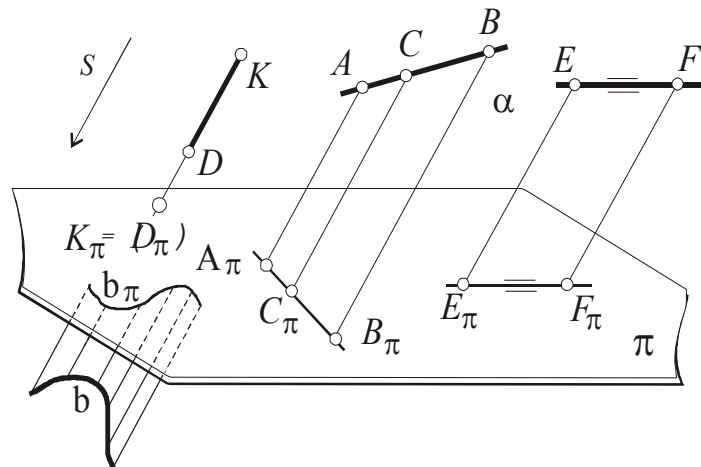


Рис. 41

участок плоскости – p_π . Если поверхность будет задана определителем, ее проекцией будут проекции элементов определителя. Проекцией треугольника ΔABC является треугольник $\Delta A_\pi B_\pi C_\pi$.

Проекция треугольника, параллельного плоскости проекций, равна самому треугольнику ($\Delta DEF = \Delta D_\pi E_\pi F_\pi$).

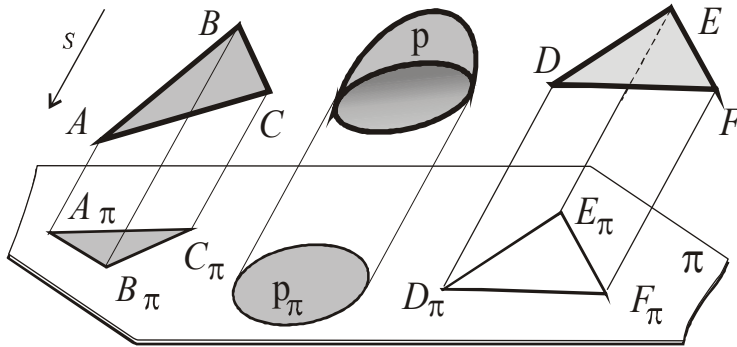


Рис. 42

Если расположить поверхности так, чтобы проецирующие лучи проходили через все их точки, получим проецирующую поверхность (плоскость). Проекция такой поверхности вырождается в линию (след-проекцию)

(рис. 43). Все элементы, расположенные на проецирующей поверхности, проецируются на ту же вырожденную линию – проекцию ($K \in p, K_\pi \in p_\pi$).

Рис. 44 представляет проекции двух линий, различно расположенных в пространстве. Точка пересечения пространственных линий проецируется в точку пересечения проекций этих линий ($N = a \cap b \Rightarrow N_\pi = a_\pi \cap b_\pi$).

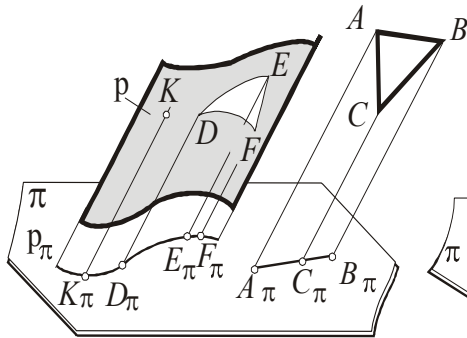


Рис. 43

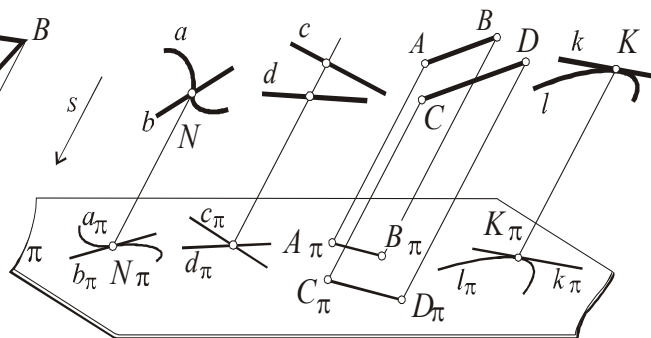


Рис. 44

Если в пространстве линии скрещиваются, то их проекции могут иметь общую точку, c и d , $c_\pi \cap d_\pi$, (см. рис. 44), однако это проекция двух конкурирующих точек. Проекции параллельных прямых остаются параллельными, а отношение проекций отрезков таких прямых равно отношению самих отрезков:

$$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow [A_\pi B_\pi] \parallel [C_\pi D_\pi]; [AB] : [CD] = [A_\pi B_\pi] : [C_\pi D_\pi].$$

Точка касания прямой и кривой линий проецируется в точку касания

их проекций. Точка K на линии l и точка $K\pi$ на проекции $l\pi$ (см. рис. 44).

Инвариантные свойства параллельных проекций

Следует отметить следующие инвариантные свойства параллельных проекций:

1. Проекция точки – точка (см. рис. 39).

2. Проекция точки, принадлежащей плоскости проекций, совпадает с самой точкой, $C = C\pi$ (см. рис. 40).

3. Две точки, лежащие на одном проецирующем луче, имеют общую проекцию, конкурирующие точки K и D , проекции $K\pi = D\pi$, (см. рис. 40).

4. Проекцией линии в общем случае является линия, проекцией отрезка – отрезок (см. рис. 41).

5. Если точка принадлежит линии, проекция точки принадлежит проекции этой линии: $C \in (AB)$, $C\pi \in (A\pi B\pi)$ (см. рис. 41):

6. Если точка делит отрезок в каком-то отношении, проекция точки делит проекцию отрезка в том же отношении (см. рис. 41):

$$[AC] : [CB] = [A\pi C\pi] : [C\pi B\pi].$$

7. Проекции параллельных в пространстве прямых также параллельны. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (см. рис. 44):

$$(AB) \parallel (CD) \Rightarrow (A\pi B\pi) \parallel (C\pi D\pi).$$

8. Проекция точки пересечения прямых в пространстве является точкой пересечения их проекций, N и $N\pi$ (см. рис. 44).

9. Касательная к кривой линии в общем случае проецируется в виде касательной к ее проекции (см. рис. 44).

10. Проекцией поверхности в общем случае является замкнутый отсек на плоскости проекций (см. рис. 42).

11. Проекция линии или другого образа, параллельного плоскости проекций, отражает натуральную величину этого образа, т.е. проецируется без искажений: $[EF] \parallel [E\pi F\pi]$ (см. рис. 41) и $\Delta DEF \parallel \Delta D\pi E\pi F\pi$ (см. рис. 42).

12. Проекция линии или поверхности, занимающей проецирующее положение полностью совпадающее с направлением проецирования), теряет одно измерение: проекция прямой (DK) (см. рис. 41), проекции поверхности ρ и ΔABC (см. рис. 43).

13. ***Только для прямоугольного проецирования*** необходимо добавить еще один очень важный момент.

Прямой угол проецируется в натуральную величину, если хотя бы одна из его сторон параллельна плоскости проекций (вторая сторона не должна быть перпендикулярной).

Докажем это положение: Возьмём прямой угол ABC и расположим так, чтобы его сторона (AB) оказалась параллельной плоскости π (рис. 45).

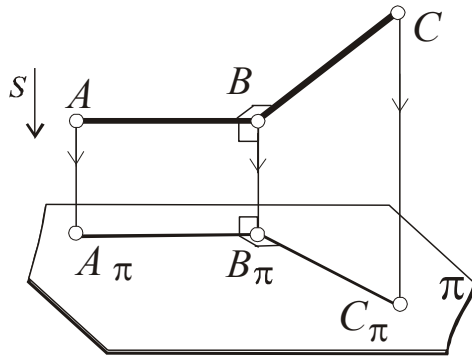


Рис. 45

Прямоугольник $ABV\pi A\pi \perp \pi$. Четырёхугольник $BCC\pi B\pi$ тоже $\perp \pi$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Заметим, что $(AB) \perp (BC)$ по условию и $(AB) \perp (BV\pi)$, значит отрезок (AB) перпендикулярен плоскости $(BCC\pi B\pi)$.

Теперь можно сделать вывод: т.к. $(A\pi B\pi) \parallel (AB)$, то и $(A\pi B\pi) \perp BCC\pi B\pi$. Значит, $\angle A\pi B\pi C\pi = 90^\circ$.

§ 2.3. Криволинейное проецирование

К аппарату криволинейного проецирования тоже следует отнести **плоскость проекций π и кривую s – направление проецирующих лучей.**

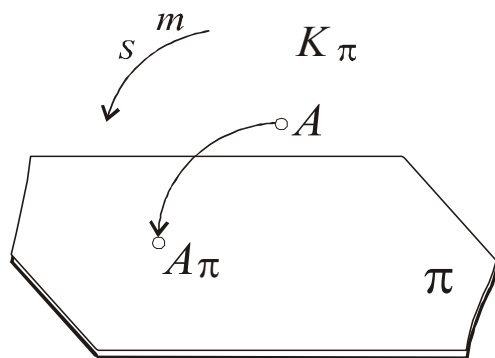


Рис. 46

На рис. 46 показан частный случай, когда направление задано дугой окружности. Построена криволинейная проекция точки A – $A\pi$. Криволинейное проецирование чаще используется как дополнительное, для упрощения решения некоторых задач. В следующих главах мы покажем возможное использование таких проекций.

Вопросы и задания для повторения

1. Как получаются проекции точки, кривой линии, поверхности?
2. Что такое инвариант проецирования?
3. Расскажите об инвариантах центрального и прямоугольного проецирования.
4. Как проецируются параллельные и пересекающиеся линии?
5. Докажите теорему о проецировании прямого угла.

Глава 3. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТИМЫХ ПРОЕКЦИЙ

§ 3.1. Проецирование по двум направлениям

Используя свойства центрального, параллельного или криволинейного проецирований, мы сможем построить проекции различных геометрических образов и их отношений, т.е. можем отобразить на плоскости (поверхности) любой объект. И, очевидно, каждый элемент может иметь только одну проекцию.

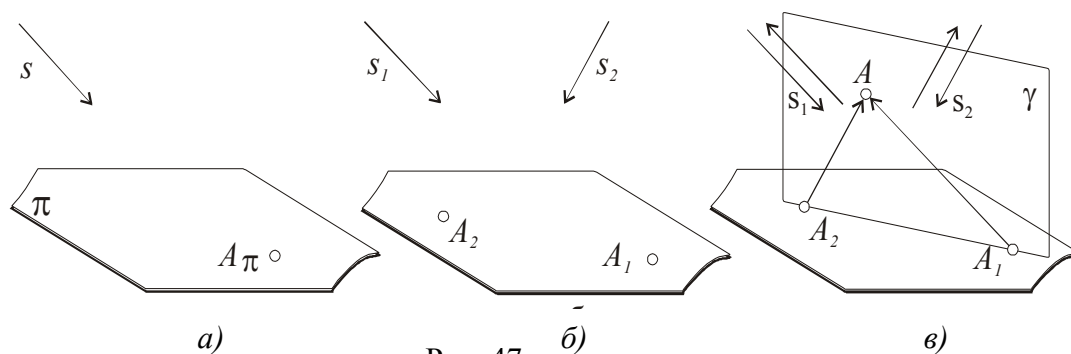


Рис. 47

Сможем ли мы по этим плоским изображениям представить положение самого объекта в пространстве, например, определить, на каком расстоянии от плоскости находилась точка A , проекция которой $A\pi$ дана на рис. 47, а? Единственное, что мы можем с уверенностью сказать, точка находилась на проецирующем луче, проведенном параллельно заданному направлению проецирования s . Мы не можем даже сказать, по какую сторону от плоскости проекций находилась точка. Значит, мы сумеем пока решить только прямую задачу начертательной геометрии – отобразить объекты, имеющие три измерения (длину, ширину и высоту), на плоскость (поверхность), имеющую лишь два измерения. В процессе построения проекций на плоскость из одного (собственного или несобственного) центра проецирования мы теряем одно измерение. Как же быть? Ответ подсказывает сама природа. Не зря же мы имеем не один, а два глаза, т.е. не один, а два центра проецирования.

На рис. 47, б точка A спроецирована по двум направлениям s_1 и s_2 , что дало две проекции A_1 и A_2 . Так как две прямые, проведенные через одну точку, задают плоскость, то по заданным проекциям и аппарату проецирования легко восстановить положение точки в пространстве. Для этого достаточно через проекции A_1 и A_2 провести обратные лучи параллельно заданному направлению, которые и пересекутся в заданной точке A на

плоскости γ (рис. 47, в). Таким образом, мы вправе назвать изображение объекта на рис. 47, б обратимым, т.к. оно дает возможность решить и обратную задачу – восстановить положение и взаимоположение объекта в пространстве по его проекциям. Применять такие проекции на практике неудобно.

§ 3.2. Проекции с числовыми отметками

Построим прямоугольные проекции точек на одну горизонтальную плоскость (рис. 48, а) и около каждой проекции отметим ее высоту, выраженную в метрических масштабных единицах с учетом положения точки относительно плоскости отображения. Точки, находящиеся над плоскостью, имеют положительную координату Z , под плоскостью – отрицательную. У точки D , лежащей на плоскости проекций, координата Z равна нулю. Мы получили так называемые проекции с числовыми отметками. Направление проецирования, перпендикулярное плоскости проекций, не указывается. Теперь по рис. 48, б однозначно можно определить положение точек в пространстве, т.к. проекция на горизонтальную плоскость задается координатами X и Y . (Точка A находится под плоскостью проекций на расстоянии трех масштабных единиц, точки B и C – над плоскостью на расстоянии соответственно четырех и шести единиц, точка D лежит на плоскости проекций).

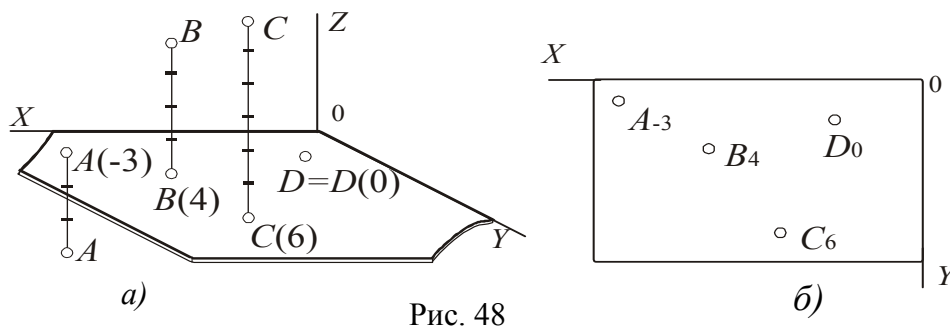


Рис. 48

Проекции с числовыми отметками широко используются в практике в том случае, когда горизонтальные размеры (размеры в плане) значительно превышают вертикальные (используются в геодезии, картографии, строительстве дорог, каналов, аэродромов, шахт и др.). В качестве плоскости проекций (нулевой плоскости) используют горизонтальную плоскость.

§ 3.3. Проекции на две и три взаимно перпендикулярные плоскости (эпюр Монжа)

Проецировать по двум направлениям удобнее не на одну, а на две взаимно перпендикулярные плоскости.

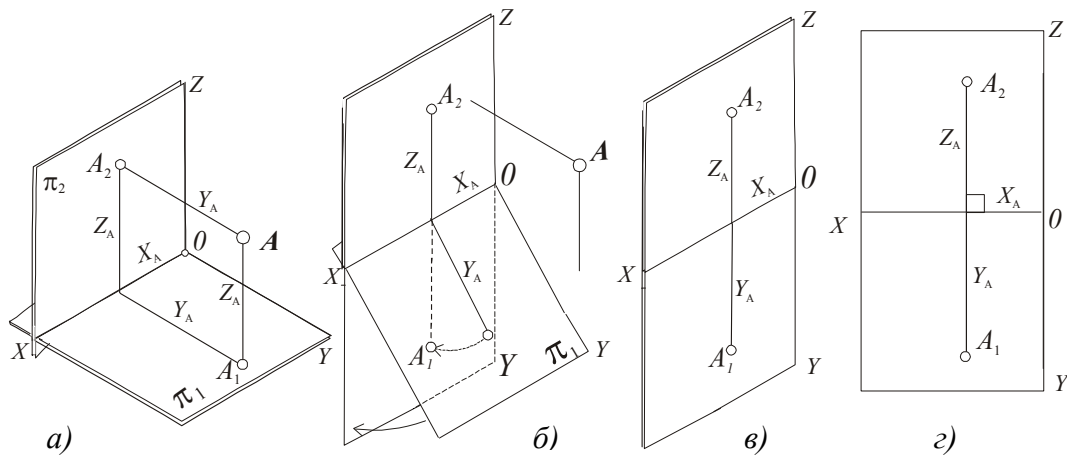


Рис. 49

На рис. 49, *a* изображены π_1 – горизонтальная плоскость проекций, π_2 – фронтальная плоскость проекций и построены прямоугольные проекции точки A . Для удобства проекции точки имеют те же индексы, что и плоскости: A_1 – горизонтальная проекция точки A , A_2 – фронтальная. Плоскость, образованная проецирующими лучами, пересекает плоскости проекций по линиям, перпендикулярным к оси, – следы проецирующей плоскости.

Мы видим, что в данной системе координат точка A задана однозначно, т.к. ее положение задано тремя координатами (x, y, z) . Но перед нами – наглядное изображение пространственной модели с искаженными углами. Чтобы перейти к плоскому чертежу, повернем горизонтальную плоскость вокруг оси OX и совместим ее с фронтальной плоскостью проекций. Ось OX останется горизонтальной, ось OY совпадет с вертикальной осью OZ (рис. 49, *б, в*).

Точка A вместе с проецирующими лучами исчезает, остается её горизонтальная проекция A_1 с координатами X_A и Y_A и фронтальная проекция A_2 , определяемая координатами X_A и Z_A (рис. 49, *в*). Следы проецирующей плоскости вытягиваются в одну линию, перпендикулярную оси, – линию связи между проекциями. Развернём теперь полученную двойную плоскость фронтально, чтобы прямые углы плоскости отображения изобразились в натуральную величину (рис 49, *з*).

Такое изображение точки называют эпюром (эпюрой) Монжа, или комплексным чертежом. Положение точки A задано на нем однозначно,

т.к. имеются три координаты, определяющие расстояние от точки до всех плоскостей проекций. Следует заметить, что расстояние от точки A до фронтальной плоскости проекций на чертеже измеряется расстоянием от оси OX до ее горизонтальной проекции (A_1), а расстояние до горизонтальной плоскости проекций – расстоянием от той же оси до фронтальной проекции точки (A_2). Этот способ получения проекций впервые описал французский ученый Гаспар Монж. Он внес важный вклад в создание

начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии².

Чтобы представить точку в пространстве, сделаем плоскости вновь перпендикулярными, проведём проецирующие лучи в обратном направлении до пересечения в точке A (рис. 50).

В практике часто приходится строить проекции на три плоскости (рис. 51).

Профильную плоскость проекций обозначили π_3 , а прямоугольную профильную проекцию точки A – A_3 . На рис. 51, а

пространственная модель Монжа вместе с координатными осями видна еще нагляднее.

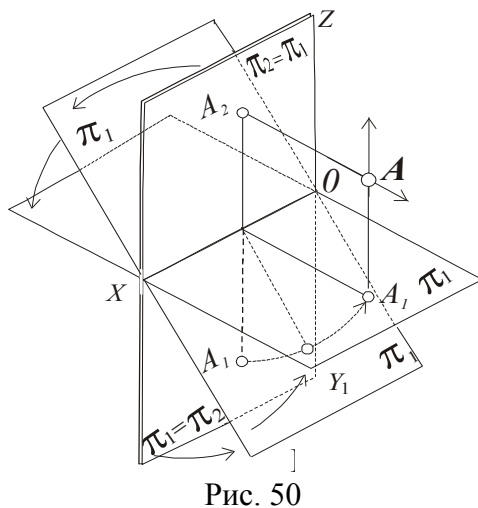


Рис. 50

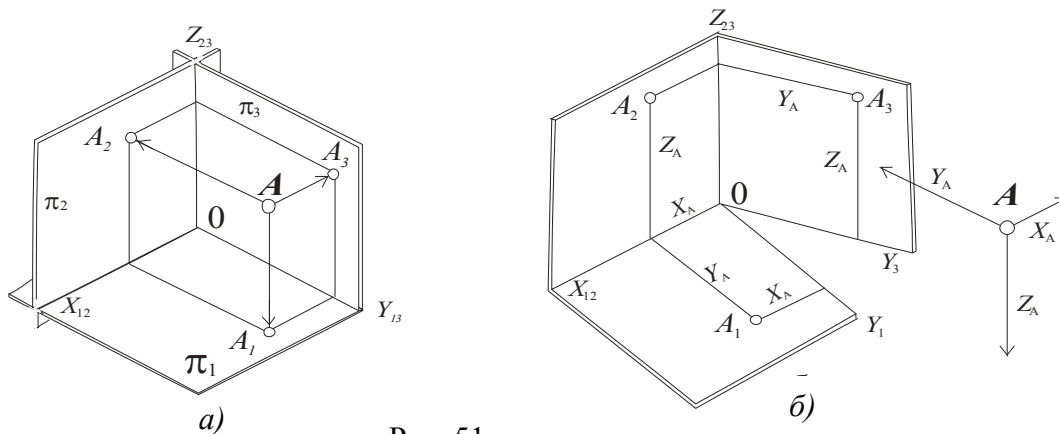


Рис. 51

Координатные оси, полученные при пересечении проецирующих

² Гаспар Монж был видным деятелем Французской революции (членом Якобинского клуба), морским министром, создавал оборонную промышленность, принимал деятельное участие в организации науки и высшего образования Франции.

плоскостей, удобно обозначать двойными индексами. Ось OY , например, обозначена Y_{13} , что означает пересечение плоскостей проекций π_1 и π_3 . При разворачивании плоскостей в эпюр Монжа, ось Y_{13} приходится разделять (разрезать) на две части Y_1 и Y_3 (рис. 51, б). Ось Z_{23} остается вертикальной. Часть Y_1 , относящаяся к горизонтальной плоскости, опускается вниз и совпадает с осью Z_{23} , а Y_3 , «уходит» направо и совмещается с горизонтальной осью X_{12} . Таким образом, каждая линия становится двойной числовой осью.

На рис. 52, а обозначены лишь положительные направления координатных осей и три проекции точки A (A_1 , A_2 и A_3). Проецирующие плоскости, образованные проецирующими лучами, оставляют на плоскостях проекций следы, перпендикулярные осям, которые являются линиями связи между проекциями. Каждая проекция определяется двумя координатами. О горизонтальной и фронтальной мы уже говорили, профильная (A_3) – определяется координатами Y_A и Z_A . Координата X_A определяет расстояние от точки до профильной плоскости проекций.

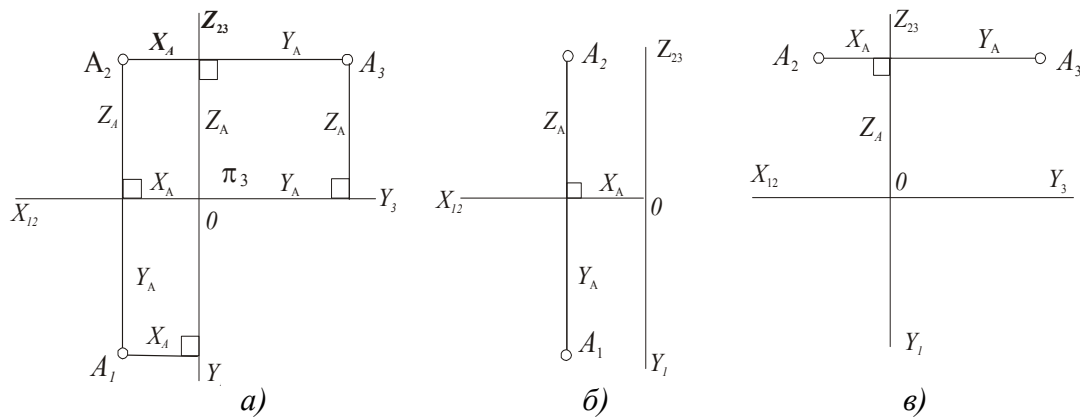


Рис. 52

Видно, что каждая пара проекций, соединенная линией связи, обладает набором координат $A(X_A, Y_A, Z_A)$, необходимых для однозначного определения положения точки в пространстве: на рис. 52, б горизонтальная и фронтальная проекции, на рис. 52, в – фронтальная и профильная. Горизонтальная и профильная проекции тоже определяют положение точки однозначно, т.к. обладают тремя координатами, но они расположены неудобно, линия связи между ними разорвана и состоит из двух частей, перпендикулярных осям Y_1 и Y_3 . Однако для решения некоторых задач начертательной геометрии такая ситуация допустима.

Границы плоскостей на чертеже показывать не принято.

При выполнении комплексного чертежа желательно, чтобы основные его поверхности, грани и ребра изображались без искажений. Для этого их располагают параллельно плоскостям проекций. При этом теряется одно измерение и наглядность.

Благодаря простоте выполнения комплексные чертежи остаются основными во всех отраслях машиностроения, строительства и др.

§ 3.4. Аксонометрические проекции

Рассмотренные проекции с числовыми отметками и эпюр Монжа требуют определенного мыслительного действия и пространственного воображения, т.к. они ненаглядны. Ведь глаз воспринимает из одного центра проекцию только на одну, а не на две плоскости. Второй глаз увеличивает

наглядность в основном за счет стереоэффекта. Если мы спроецируем пространственную модель еще на одну дополнительную плоскость, то можем получить наглядное изображение. Параллельное проецирование даст аксонометрическую проекцию, центральное – перспективную.

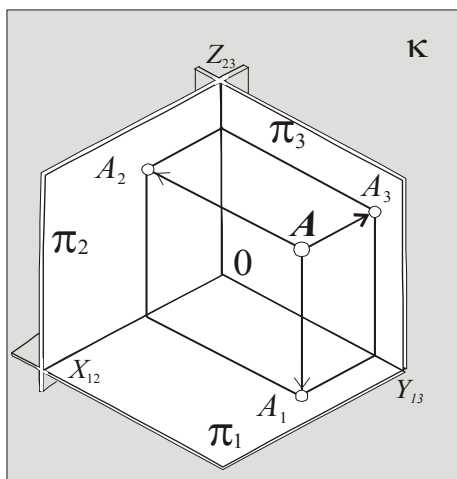


Рис. 53

Посмотрите на рис. 53. Узнаете знакомую картину с рис. 51, а? А ведь мы просто выделили на плоскости печатного листа небольшой серый квадратик и обозначили его как плоскость κ – это и есть до-

полнительная картинная плоскость проекций, называемая **аксонометрической плоскостью проекций**. Проецирующие лучи направлены перпендикулярно плоскости и, поэтому, «вырождены» в точки. Перед нами аксонометрическая проекция. Все наглядные изображения, встречавшиеся в данном пособии, являются аксонометрическими проекциями.

Рассмотрим более подробно получение таких проекций. Представьте, что мы изменили ракурс и спроецировали пространственную координатную систему осей XYZ вместе с помещенной в эту систему точкой A и её проекциями A_1 , A_2 и A_3 на дополнительную аксонометрическую картинную плоскость κ по направлению s (рис. 54). Направление s выбирается произвольно, главное, чтобы оно не совпадало с направлением коорди-

натных осей, иначе мы опять потеряем одно измерение (или высоту, или широту, или глубину) и изображение станет необратимым. На плоскости κ мы получим параллельные проекции всех элементов. $(O^k x^k)$ является аксонометрической проекцией координатной оси OX , $(O^k y^k)$ – аксонометрической проекцией оси OY , $(O^k z^k)$ – проекцией оси OZ . A^k – аксонометрическая проекция пространственной точки A . A_1^k , A_2^k и A_3^k – аксонометрические проекции соответственно горизонтальной, фронтальной и профильной проекций точки A . Так как они получились как бы проекциями проекций, их принято называть **вторичными аксонометрическими проекциями**. Линии, параллельные между собой на пространственной модели, останутся параллельными между собой и на аксонометрической проекции в силу свойства параллельных проекций.

Мы видим, что изображенная аксонометрическая проекция точки A – A^k имеет изображения всех пространственных координат, и значит такой чертеж обратим. Повторим, что обратимость чертежа получается за счет обратимости пространственной трехосной системы (пространственной модели Монжа), а наглядность – за счет дополнительного проецирования. Дополнительная плоскость называется аксонометрической плоскостью проекций.

Отсюда следует, что *аксонометрическая проекция* – это параллельная проекция объекта вместе с координатной системой на одну (аксонометрическую) плоскость.

Аксонометрические проекции координатных осей OX , OY и OZ называются *аксонометрическими осями* $o^k x$, $o^k y$ и $o^k z$. Единичные отрезки, выделенные на координатных осях, проецируются на аксонометрические оси, в общем случае, с искажением.

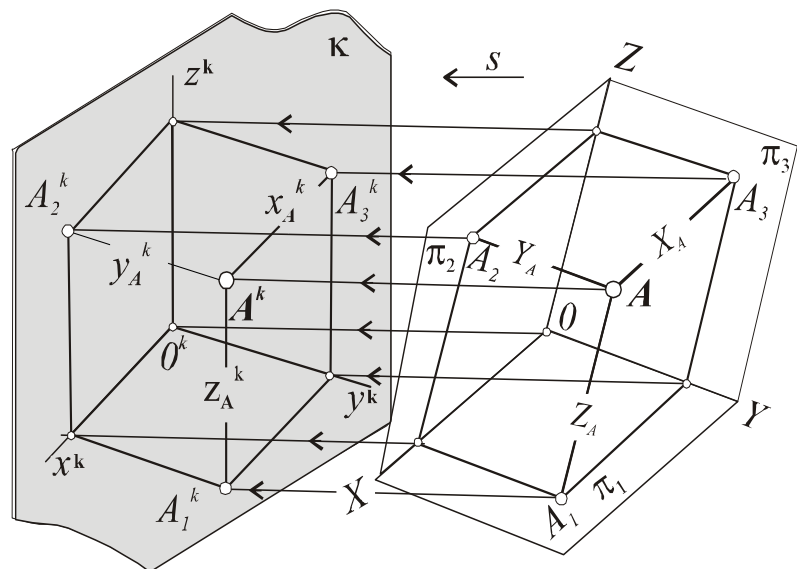


Рис. 54

Обозначим коэффициенты искажения по осям: $o^k x = u$, $o^k y = v$, $o^k z = w$.

Для обратимости чертежа кроме аксонометрической проекции точки $A - A^k$ достаточно иметь лишь одну (любую) вторичную проекцию.

На рис. 55, а показана вторичная проекция A_1^k – проекция точки на горизонтальную плоскость в декартовой системе координат. На рис. 55, б

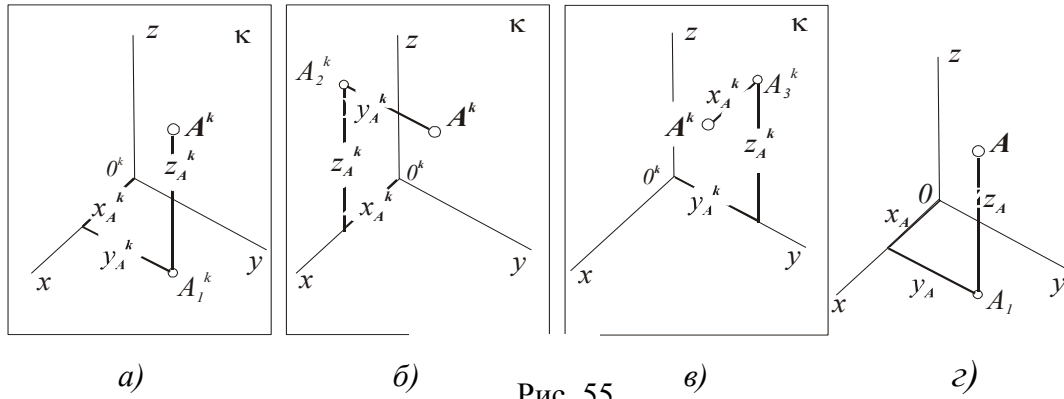


Рис. 55

дана A_2^k – вторичная проекция фронтальной проекции, на рис. 55, в – вторичная проекция профильной проекции – A_3^k . Кроме того, на каждом из этих рисунков показана последовательность определения координат точки, так называемая **координатная ломаная**. Например, последовательность построения (чтения) аксонометрической проекции точки A на рис. 55, а следующая: по оси $o^k x$ откладывают отрезок, равный абсциссе точки A , умноженный на коэффициент искажения u , из конца его параллельно оси $o^k y$ проводят отрезок, равный ординате точки, умноженной на коэффициент v . Затем параллельно оси $o^k z$ задают высоту (аппликату) точки, умноженную на коэффициент искажения по оси $o^k z = w$.

В дальнейшем, для упрощения изображения, картинную (аксонометрическую) плоскость и индексы, изображать и обозначать не будем (рис. 55, г).

Поскольку направление проецирования и расположение плоскости проекций может быть произвольным, то и взаимное расположение аксонометрических осей тоже может быть произвольным.

Немецкий геометр К. Польке доказал, что три отрезка прямых произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие их одной точки под произвольными углами, являются параллельными проекциями трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных координатных осях.

В 1863 году Г. Шварц сформулировал более общую теорему (теорема Польке – Шварца), по которой любой выпуклый четырехугольник и его диагонали можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра наперед заданной формы. Эта теорема устанавливает зависимость между углом проецирования и величиной коэффициентов искажения по аксонометрическим осям:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg^2 \varphi,$$

где φ – угол наклона проецирующих лучей к плоскости проекций.

При прямоугольном проецировании $ctg\varphi = 0$ формула приобретает вид

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2.$$

Коэффициенты искажения могут быть выбраны произвольно, подчиняясь, однако, этой закономерности.

Для того чтобы при прямоугольном проецировании все коэффициенты были равными, необходимо, чтобы координатные оси имели одинаковый угол наклона к аксонометрической плоскости проекций. Естественно, что такой вариант может быть единственным. Проекция осей на дополнительную плоскость при этом располагаются равномерно под углом 120° .

Аксонометрическую ось oz принято всегда располагать вертикально. Подсчитаем коэффициенты искажения:

$$\text{если } u = v = w, \text{ то } 3u^2 = 2, \quad u = \sqrt{2/3} = 0,82.$$

Все предыдущие наглядные изображения, например, выполнены в прямоугольной изометрической проекции, где

$$u = v = w.$$

Значит, для построения изображения любого предмета, выполненного в прямоугольной изометрии, нам пришлось бы все линейные размеры, параллельные аксонометрическим осям, умножать на коэффициент 0,82. Согласитесь, довольно трудоемкая работа. Приведём его к единице, т.е. заменим его на коэффициент, равный 1. Тогда наше изображение увеличится в $1/0,82 = 1,22$, а при работе над изображением будем использовать действительные размеры. Изображение предмета в таком случае выполняется в масштабе увеличения $1,22 : 1$.

Аксонометрические проекции применяют для изображения некрупных близко расположенных предметов. В машиностроении наглядные

изображения, как правило, выполняют в аксонометрических проекциях³.

Из их бесчисленного множества для практического использования в черчении выбрали и стандартизировали всего пять проекций. А для еще большего упрощения построений действительные коэффициенты заменяют приведенными.

Из множества прямоугольных диметрических проекций выбрали такую, где коэффициент v в два раза меньше остальных. Приведенные коэффициенты:

$$u = w = 1, \quad v = 0,5.$$

Стандартизованы еще три косоугольных аксонометрических проекции.

С учетом использования приведенных коэффициентов построение аксонометрических проекций становится достаточно простым. Необходимо лишь правильно «привязать» изображаемый предмет к координатным осям.

Среди триметрических проекций стандартных нет.

Однако мы можем определить действительные коэффициенты искажения для любых произвольно взятых в прямоугольной системе аксонометрических осей. Как это делается, рассмотрим во второй части пособия.

§ 3.5. Центральные (перспективные) проекции

В архитектуре, живописи, графике при изображении больших пространств и крупных объектов в качестве наглядных изображений применяют центральные (перспективные) проекции (рис. 56).

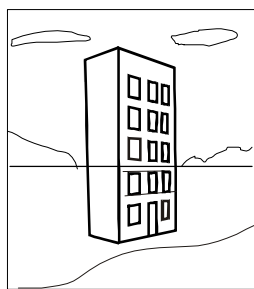


Рис. 56

В качестве дополнительной поверхности проекций можно использовать плоскость (линейная перспектива), цилиндрическую поверхность (панорамная перспектива), сферическую поверхность (купольная перспектива). Плоскость проекций может быть вертикальной, горизонтальной или наклонной. Мы рассмотрим лишь линейную перспективу на вертикальной плоскости.

Поскольку перспективные проекции применяют для изображения

³ Доказано, что человек видит пространство по-разному: близкое – по законам аксонометрии, более удаленное – по законам перспективы. (Раушенбах Б. В. Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы. М., 1986; Геометрия картины и зрительное восприятие. СПб.: Азбука-классика, 2002).

крупных объектов, в качестве горизонтальной плоскости – π_1 – удобнее выбрать плоскость земли. Назовем её предметной плоскостью. S – точка зрения (центр проецирования), S_1 – точка стояния. Картинную плоскость проекций к расположим вертикально и совместим её с координатной плоскостью π_2 (рис. 57, а). Ось OX совпадет с основанием картины, линией пересечения предметной и картинной плоскостей. Положение в предметном пространстве точки A определяется тремя прямоугольными координатами $A(X_A, Y_A, Z_A)$. Для того чтобы изображение не увеличивалось по сравнению с предметом, а уменьшалось, центр проецирования (зрителя) расположим за картиной.

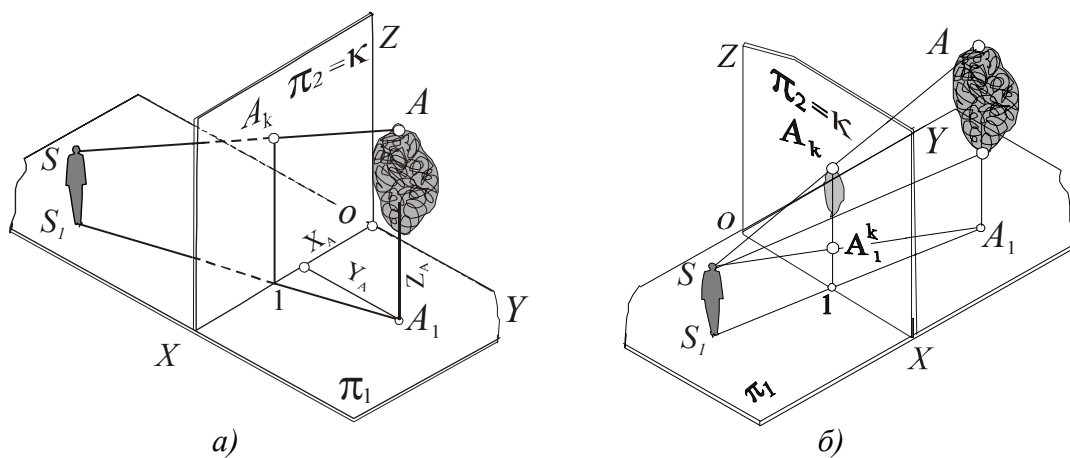


Рис. 57

Для удобства развернем изображение так, чтобы предметное пространство оказалось за картинной плоскостью (рис. 57, б).

Теперь развернем картину фронтально, рис. 58.

Для того чтобы на картине точка была задана однозначно, необходимо определить не только перспективную проекцию A_k но и ее вторичную проекцию A_1^k , (перспективную проекцию горизонтальной проекции A_1).

Чтобы убедиться в сказанном, мысленно продолжим проецирующий луч (SA) до бесконечности и отметим на нем ряд точек $A, A^1, A^2 \dots A^\infty, F^\infty$ (рис. 59). На рис. 58 видно, что перспективные проекции всех точек совпали: $A_k = F_k^\infty$. Горизонтальные проекции выделенных точек лежат на основании вертикальной лучевой плоскости, а их проекции – ($A_1^k, A_1^{1k}, A_1^{2k} \dots f_k^\infty$) – на линии пересечения

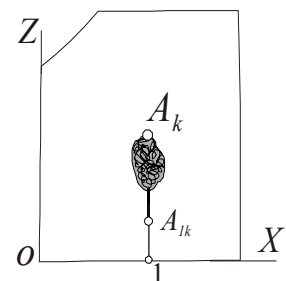


Рис. 58

чения этой плоскости с картиной. Угол наклона проецирующих лучей (SA_1) , (SA_1^1) , (SA_1^2) к предметной плоскости уменьшается и стремится в

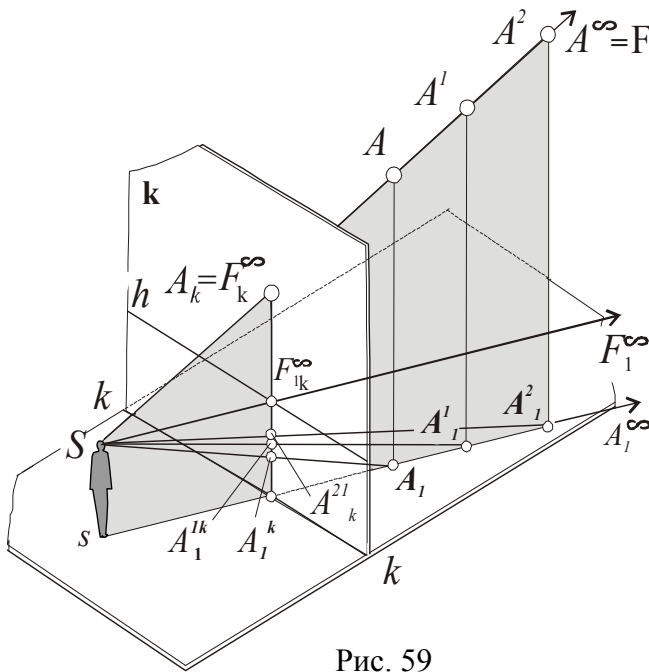


Рис. 59

Рис. 58 достаточно нагляден, но определить по нему точное положение точки в пространстве пока невозможно. Указанные на нём координаты OX и OZ относятся лишь к рамке картины, а ось OY и вовсе отсутствует.

Для того чтобы картина стала обратимой, нанесем на неё особые точки, определяющие центр проецирования, т.е. положение наблюдателя (рис. 60).

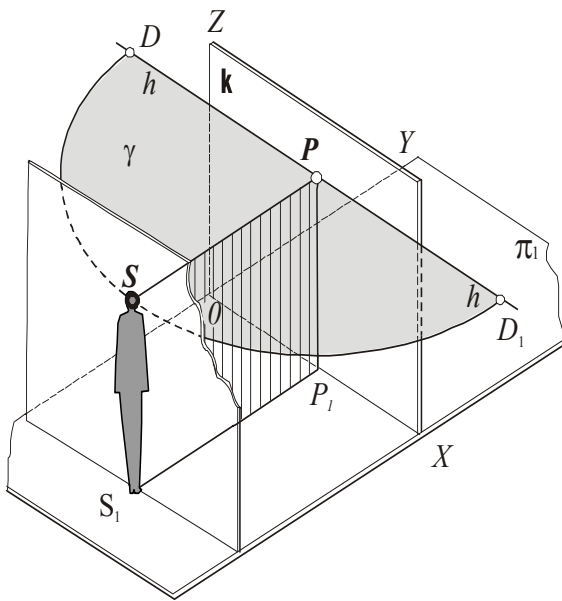


Рис. 60

пределе к нулю. Луч (SF_1^∞) параллелен предметной плоскости, а вторичная проекция предельной точки оказывается на уровне точки зрения, т.е. на линии горизонта.

Таким образом, можно сделать вывод: чем дальше от картины расположена точка, тем выше её вторичная проекция. Очевидно, вторичная проекция точки, лежащей на картине, окажется на её основании (на рисунке не обозначена).

Горизонтальная плоскость, расположенная на уровне точки зрения, называется плоскостью горизонта γ и пересекается с картинной плоскостью по линии горизонта h . Проецирующий луч, перпендикулярный картинной плоскости, пересекается с ней в главной точке картины P . (PP_1) – средняя линия картины.

По обе стороны от главной точки на линии горизонта отложены отрезки PD и PD_1 , равные расстоянию от точки зрения до картины. Точки D и

D_1 называются дистанционными. Наличие на картине главной и дистанционных точек позволяет определить положение любого изображенного объекта и решать любые метрические задачи.

Для полноты картины нам необходимо построить проекцию оси OY (рис. 61, а). Проведем луч в начало координат и будем мысленно передвигать его в бесконечность (на рисунке обозначены точки 1 и 2). Проецирующий луч будет последовательно занимать положение $(S1)$, $(S2)$ и т.д., а проекциями отрезков оси OY ($O1$), ($O2$) будут соответственно $(O1^k)$ и $(O2^k)$ и т.д. В пределе луч (SF^∞) будет параллелен оси (OY) и пересечётся с картинной плоскостью в главной точке P . Вся бесконечная ось OY , таким образом, на картине будет изображаться отрезком $[OP]$. Очевидно, если мы возьмем на предметной плоскости любую другую линию, перпендикулярную картине, мы придем к выводу, что их проекции тоже будут заканчиваться в главной точке P .

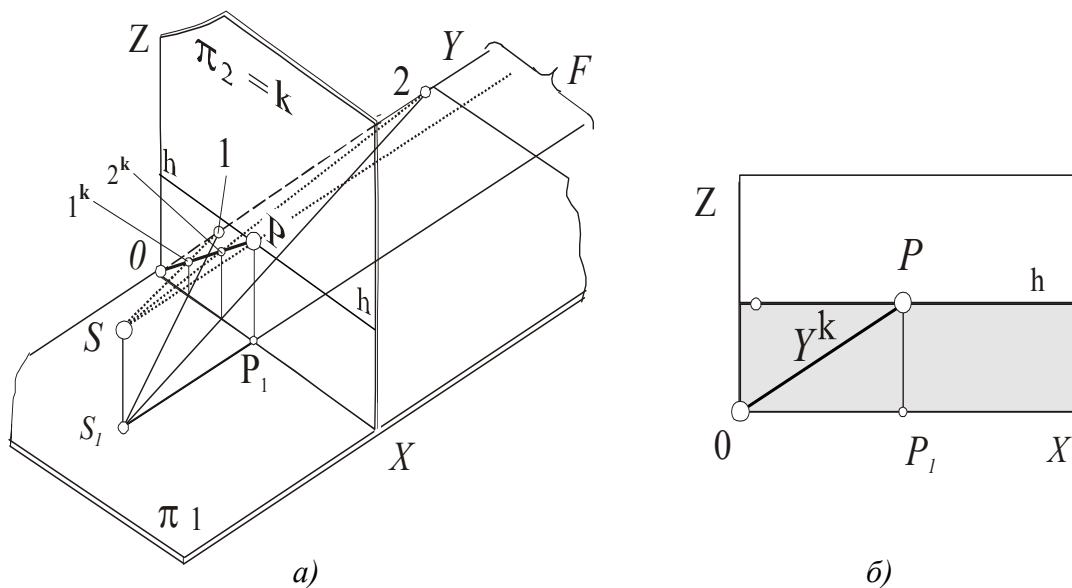


Рис. 61

Теперь картина (рис. 61, б) содержит все координатные оси и, если мы научимся определять масштабы, то сможем решать всевозможные метрические задачи прямо на картине.

Рассмотрим рис. 62. На осях OX и OY нанесены деления в масштабе картины. Внизу показан план предметной плоскости с нанесенной на него масштабной сеткой. Картинная плоскость на плане «выродилась» в линию, совпадающую с осью O_1X_1 . На ней обозначены горизонтальные проекции точки зрения S_1 , главной точки картины P_1 и дистанционные точки D_1 . Масштабная линейка с оси O_1X_1 на ось O_1Y_1 переносится под

углом 45° параллельно лучу S_1D_1 . На картине вверху параллельные линии переноса направлены в дистанционную точку и, пересекаясь с глубинной осью OY , отмечают на ней точки $1_1, 2_1, 3_1$ и т.д. Убывающие отрезки

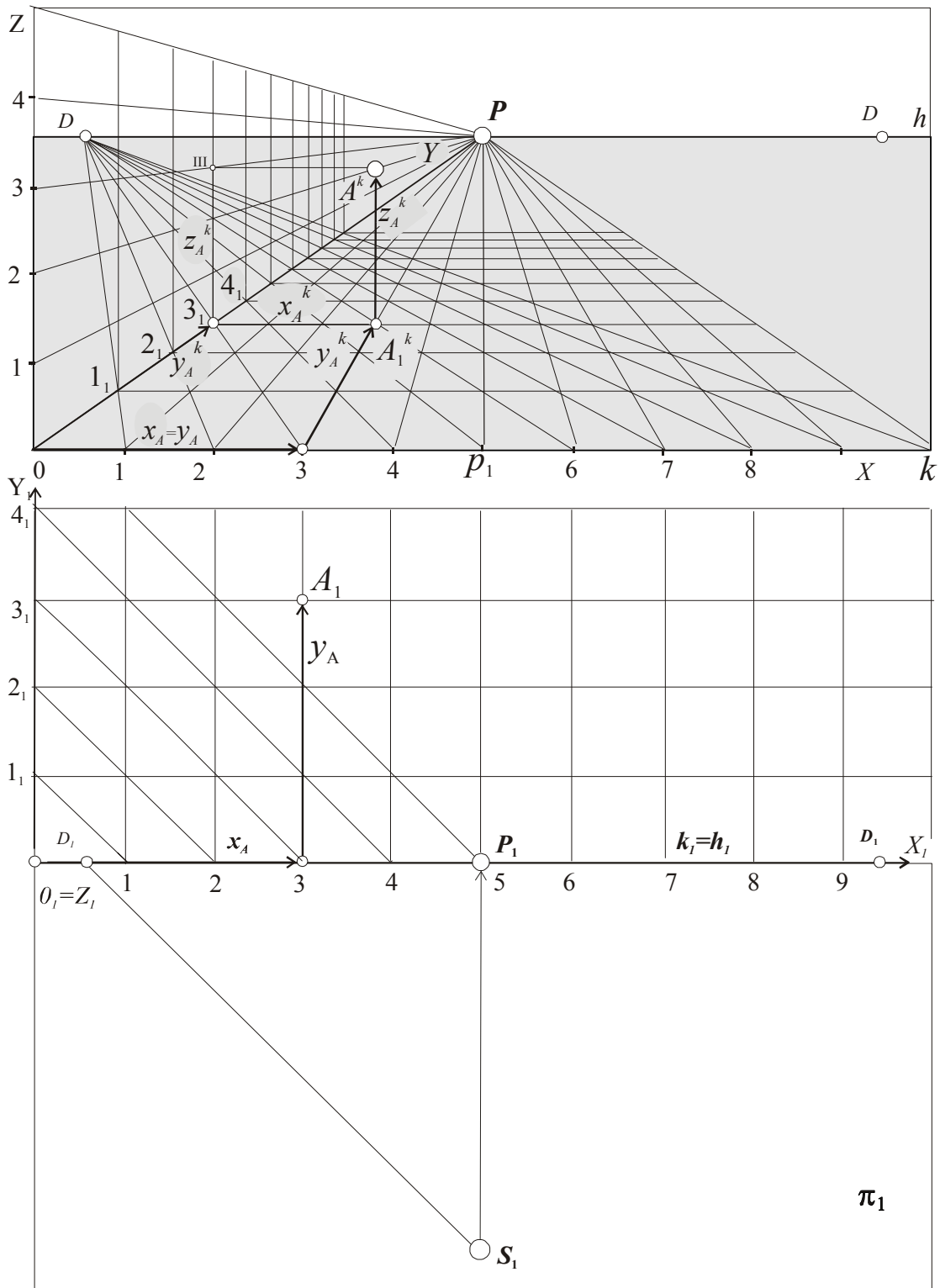


Рис. 62

$[O1_1], [1_1 2_1], [2_1 3_1]$ и т.д. определяют линейный масштаб на оси OY

(масштаб глубин). Теперь на картине можно построить перспективную сетку и на предметной плоскости, и на вертикальной плоскости POZ . Рассмотрим её внимательно. Проведенные через концы отрезков горизонтальные линии, параллельные оси OX , определяют *масштаб широт*, проведенные из тех же точек на оси OY вертикально – *масштаб высот*.

На рисунке построена перспективная проекция точки $A(3, 3, 3)$: вначале на оси (OX) отложена абсцисса точки (x_A) в масштабе картины – отрезок $[O3]$. Такая же ордината y_A^k направлена в главную точку – отрезок $[3 A_1^k]$. Они определили вторичную проекцию A_1^k . Из неё вверх отложена аппликата z_A^k , равная трём единицам масштаба высот на заданной глубине картины. Для этого вначале на оси OZ отложили три единицы $[O3]$, затем определили высоту точки A на заданном расстоянии от начала координат – отрезок $[3_1 III]$ и перенесли горизонтальной линией в точку A^k .

Обратите внимание: величина одинаковых абсцисс и аппликат на любой глубине изображается равными отрезками. Мы получили картину не только наглядную, но и обратимую.

Через вторичную проекцию и главную точку картины до пересечения с основанием картины. Отрезок $[O1]$ определит абсциссу в масштабе картины – x_A . Отрезок $[1 A_1^k]$ определяет перспективную координату y (перспективный масштаб глубин). Чтобы определить величину ординаты в масштабе картины перенесём её на основание картины прямой (DA_1^k) . Отрезок $[1 3]$ – искомая величина. Линия (PA^k) перпендикулярна картине, поэтому отрезок $[1 4]$

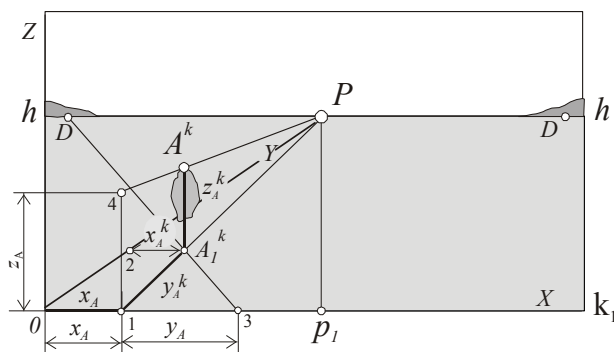


Рис. 63

определяет аппликату точки в масштабе картины. Можно сказать, что мы мысленно передвинули дерево до совмещения с плоскостью картины.

Координатная ломаная показана утолщенными линиями.

Задача. Определите в масштабе картины координаты точки A (рис 63).

Точка лежит на вершине дерева (A^k), её вторичная проекция (A_1^k) – на основании. Вторичная проекция (основание дерева) определяется координатами x и y . Для определения координаты x проведем линию

Перспективные проекции наглядны, но достаточно сложны для построения, поскольку кроме упомянутых масштабов глубин, широт и высот имеют свои масштабы для каждого направления. Но об этом мы поговорим во второй части пособия.

Если мы центр проецирования удалим в бесконечность, то перспективная проекция превратится в аксонометрическую.

Вопросы и задания для повторения

- 1. Какие Вы знаете способы построения обратимого чертежа?*
- 2. Как получить проекции с числовыми отметками?*
- 3. Что такое эюр Монжа?*
- 4. Какими координатами определяется положение горизонтальной, фронтальной и профильной проекций точки?*
- 5. Как можно построить профильную проекцию точки по заданным горизонтальной и фронтальной её проекциям?*
- 6. Что такое аксонометрическая проекция?*
- 7. Что такое вторичная проекция в аксонометрии?*
- 8. Что такое коэффициенты искажения по осям в аксонометрических проекциях?*

Глава 4. КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

К качественным характеристикам основных геометрических образов (точки, линии, поверхности) будем относить такие, по которым можно судить об их положении относительно элементов аппарата проецирования. Например, для точки – лежит или не лежит на плоскости проекций, выше или ниже плоскости проекций, перед плоскостью или за ней, имеет координату положительную или отрицательную. Для линии качественными характеристиками являются такие понятия, как линия общего положения, восходящая или нисходящая, слева направо или справа налево, проецирующая, линия уровня (параллельная плоскости проекций) и др. Для поверхностей – общего положения, параллельная или перпендикулярная плоскости проекций и др.

§ 4.1. Качественные характеристики ОГО в аксонометрии, на эюре Монжа, в проекциях с числовыми отметками

Изображение точки на эюре Монжа

На примере образования обратимых проекций мы рассмотрели простейшие случаи положения точки в пространстве. Посмотрим теперь, как изображаются точки, занимающие различное положение относительно аппарата проецирования. На рис. 64, а две взаимно перпендикулярные плоскости π_1 , и π_2 модели Монжа делят пространство на четыре двугранных угла (четыре четверти пространства), три плоскости – на восемь октантов. Если говорить о четвертях, мы видим, что первую четверть ограничивает передняя половина горизонтальной плоскости и верхняя половина фронтальной плоскости, которая вместе с задней половиной горизонтальной плоскости образует вторую четверть. Под второй четвертью расположена третья, под первой – четвертая. С введением профильной плоскости π_3 , перпендикулярной двум первым, мы получаем октанты V, VI, VII и VIII, симметричные I, II, III и IV относительно π_3 . Во второй главе мы уже познакомились с осями координат, которые в модели Монжа получаются в результате пересечения плоскостей проекций между собой, поэтому нам нетрудно заметить, что те половины осей, которые находятся в первом октанте, имеют положительное направление.

На рис 64, а, в пространственная модель изображена в прямоугольной изометрической проекции с приведенным коэффициентом искажения. Это значит, что при построении точек не учтен действительный коэффициент искажения и координаты, измеренные в аксонометрической проекции, соответствуют действительным координатам точки. Координатные ломаные,

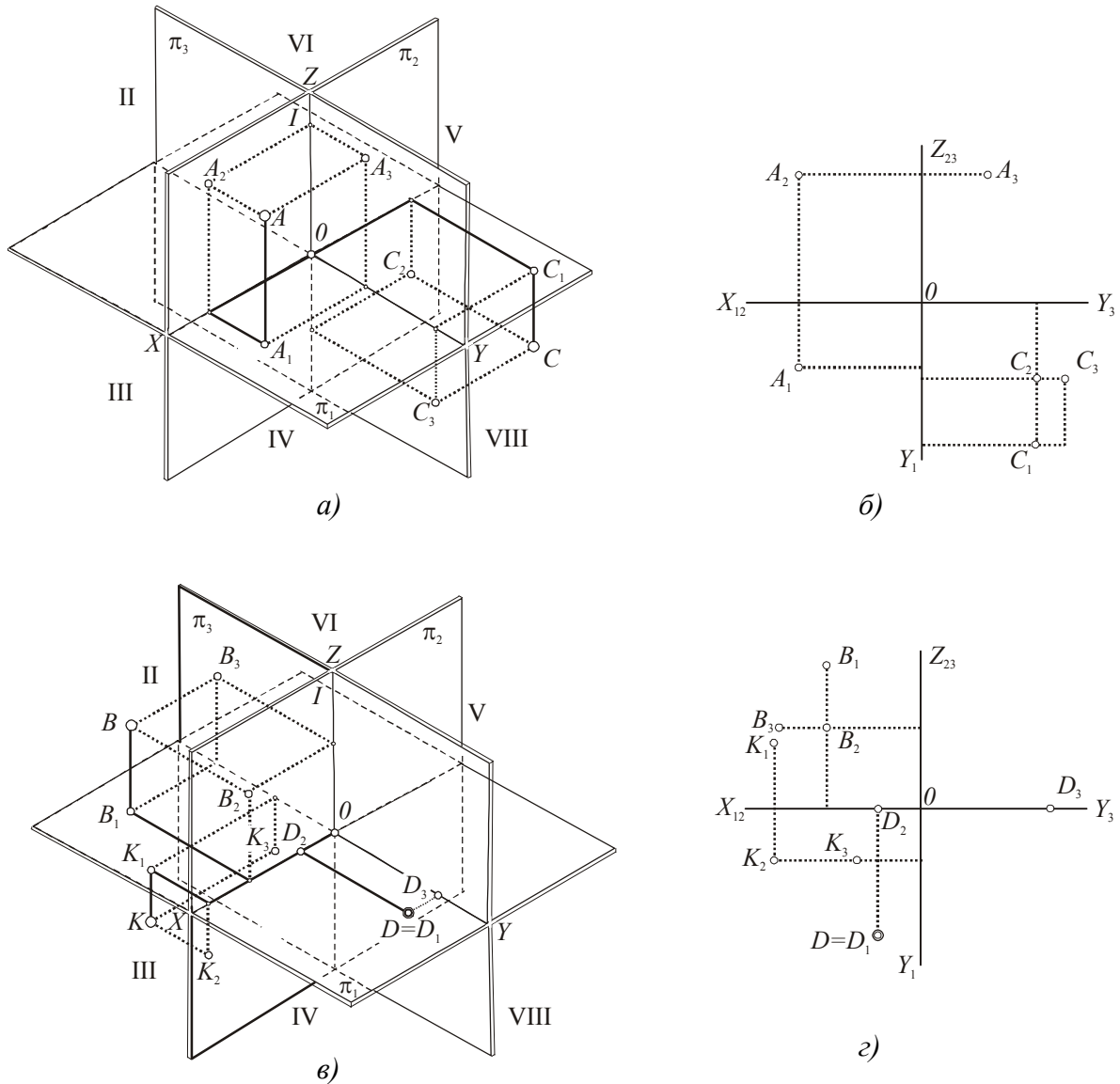


Рис. 64

необходимые для построения аксонометрических проекций точек, показаны сплошными линиями; проецирующие лучи, дающие прямоугольные проекции точек – пунктирными линиями. Анализируя рис. 64, а, мы видим, что точка A расположена в первом октанте, точка C – в восьмом, смежном с четвёртым. На рис. 64, в точка B находится во втором октанте, K – в третьем. Обо всех названных точка можно сказать, что они занимают общее положение в пространстве. Когда точка лежит на какой-то плоско-

сти проекций, её одноименная проекция совпадает с самой точкой, тогда две другие проекции, естественно, оказываются на осях. Так, точка D (рис. 64, в) лежит на передней поле горизонтальной плоскости, значит, её горизонтальная проекция совпадает с самой точкой $D = D_1$. Фронтальная проекция D_2 лежит на оси OX , а профильная D_3 – на оси OY .

Прежде чем перейти к эпюру Монжа, отметим ещё один очень важный момент: горизонтальные проекции точек могут быть расположены в любой части плоскости π_1 , это зависит лишь от положения точек в пространстве. Значит можно её считать полем горизонтальных проекций, которые определяются координатами x и y . Аналогично – фронтальная плоскость проекций, которая является носителем или полем фронтальных проекций, задаваемых координатами x и z . Поле профильных проекций определяют координаты y и z .

При переходе от наглядного изображения к эпюру все три поля проекций накладываются друг на друга, и узнать, на каком поле находится изображение точки, можно лишь по её обозначению (рис. 64, б, з). Чертёж, выполненный в прямоугольных проекциях, называется комплексным, или трёхкартинным (двухкартинным – при двух проекциях).

Координатные оси на плоскости превращаются в две пересекающиеся под прямым углом двойные линии. Каждая полуось несет одну положительную и одну отрицательную координату. Рассмотрим рис. 64, з. Расположение и направление осей X_{12} и Z_{23} не изменилось. Ось ординат распалась на две части: та её часть, которая принадлежит горизонтальному полю проекций, расположена вертикально, принадлежащая к полю профильных проекций – горизонтально. Проследим за построением эпюра точки K , лежащей в третьем октанте пространственной модели (см. рис. 64, в, з). Третий октант принадлежит третьей четверти пространства. Он образован задней полый горизонтальной плоскости проекций, следовательно, её координата y – отрицательна и нижней полый фронтальной плоскости проекций – значит, координата z тоже отрицательна. Ось OX имеет положительное направление, т.к. лежит слева от профильной плоскости проекций. В нашем случае координаты определяются отрезками прямых, но могут быть заданы числовыми величинами $K(x_K, y_K, z_K)$. Начинать построение эпюра можно, в принципе, с любой проекции, т.к. каждая задаётся двумя координатами (рис. 65). Начнем в порядке расположения координат.

Алгоритм построения: $(O K_X) = x_K$

$(K_X K_1) = y_K$, где K_1 – горизонтальная проекция,

$(K_X K_2) = z_K$, где K_2 – фронтальная проекция,

$(K_Z K_3) = y_K$, где K_3 – профильная проекция.

Следует запомнить: **горизонтальная и фронтальная проекции лежат на вертикальной линии связи, перпендикулярной оси OX .**

Фронтальная и профильная проекции находятся на одной высоте, т.к. имеют общую координату z .

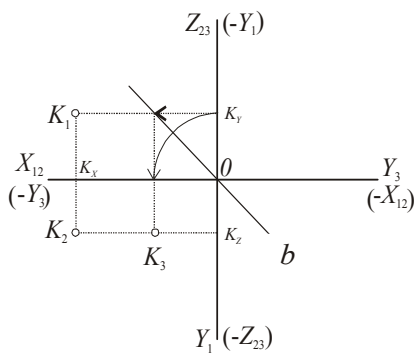


Рис. 65

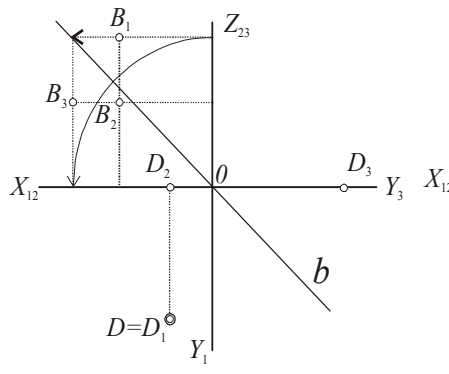


Рис. 66

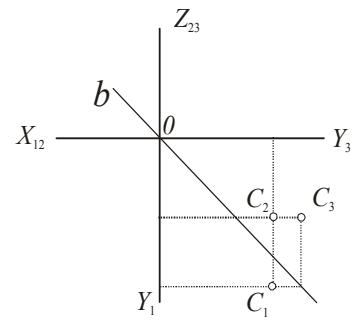


Рис. 67

Профильную проекцию можно также построить по заданным горизонтальной и фронтальной проекциям, перенеся величину координаты y с полуоси OY_1 на ось OY_3 с учетом знака (рис. 65, 66).

На рис. 66 горизонтальная проекция точки B имеет отрицательную координату, значит лежит на заднем поле плоскости.

Точка C (рис. 67) лежит в восьмом октанте, у нее отрицательны координаты x и z .

Проведенная под углом 45° постоянная Монжа – прямая b , позволяет построить профильную проекцию по заданным горизонтальной и фронтальной проекциям. Для этого через горизонтальную проекцию точки проводят горизонтальную прямую до пересечения с b , а затем вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальной линией, проходящей через фронтальную проекцию точки (см. рис. 65, 66, 67).

Изображение прямой линии

На рис. 68, *a* представлено наглядное (аксонометрическое) изображение отрезка $[A B]$, занимающего в пространстве общее положение (для получения аксонометрической проекции отрезка достаточно одной вто-

ричной проекции). Там же показано получение прямоугольных проекций на три плоскости.

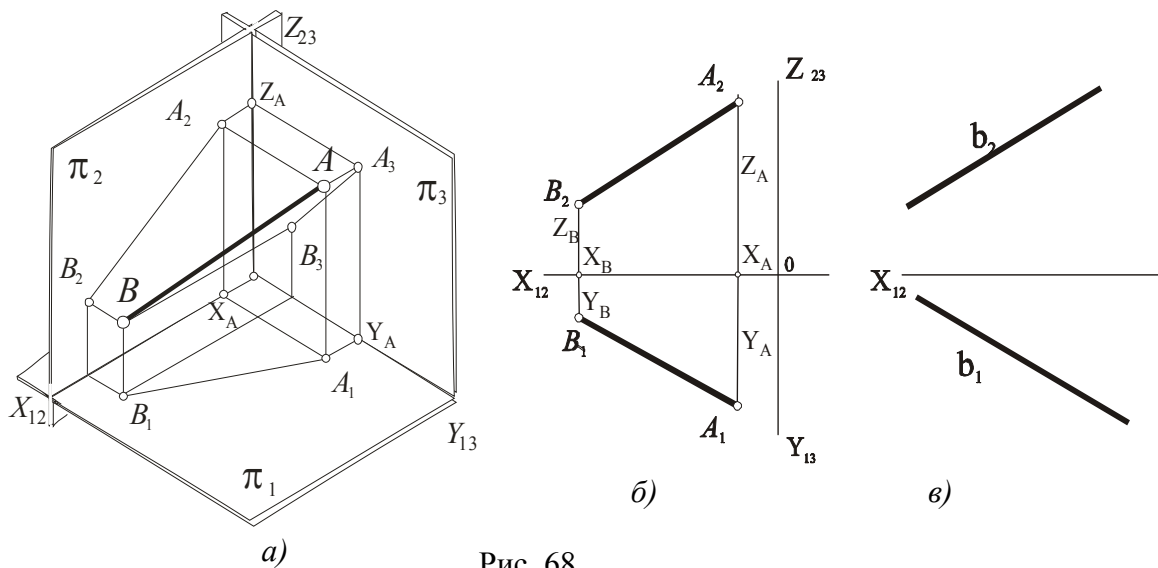


Рис. 68

Для того чтобы увидеть положение отрезка в пространстве по прямоугольным проекциям (рис. 68, б) рассмотрим проекции последовательно: горизонтальная проекция говорит нам только о том, что правый конец отрезка расположен ближе к наблюдателю, а фронтальная – о том, что он выше левого. Прямая, заданная отрезком, удаляясь от наблюдателя, опускается ниже. Такая прямая называется нисходящей (в отличие от восходящей, которая, удаляясь, поднимается). При необходимости мы можем измерить координаты концов отрезка.

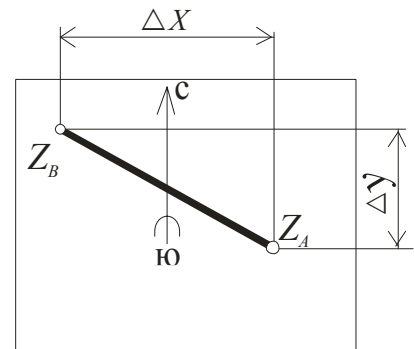


Рис. 69

На рис. 68, в мы видим ту же прямую, качественные характеристики её не изменились и при отсутствии на ней отрезка.

Если оставить одну горизонтальную проекцию и поставить у концов отрезка высоты (координаты z), получим проекцию с числовыми отметками (рис. 69). Расстояние между концами отрезка (длину горизонтальной проекции) называют **заложением**, а разность высот – **подъёмом**. Проекция с числовыми отметками применяются для изображения больших пространств, поэтому вместо фиксированной координатной системы применяют относительную (Δx , Δy), а за направление координаты u принимают направление магнитной стрелки. При наличии числовых

значений координат на чертеже помещают линейный масштаб.

Линии, параллельные плоскостям проекций, как уже упоминалось, называют линиями уровня. Их классифицируют как линии частного положения.

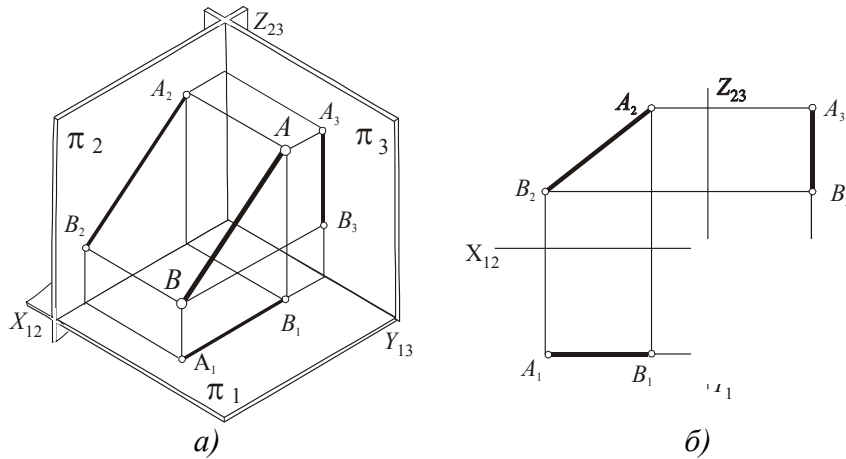


Рис. 70

На рис. 70 показан отрезок прямой, параллельный фронтальной плоскости проекций. Координаты у его концов одинаковы, поэтому его горизонтальная проекция параллельна оси X_{12} , а профильная – Z_{23} .

На рис. 71 показаны линии уровня: h – горизонталь, f – фронталь, $[EF]$ – профильная прямая.

Можно ли профильную прямую задать не выделяя на ней отрезка? Оказывается, можно при наличии профильной проекции.

На рис. 72 изображена горизонтальная прямая в проекциях с числовыми отметками. Об этом говорят одинаковые отметки высот у его концов. Натуральная величина отрезка равна заложению.

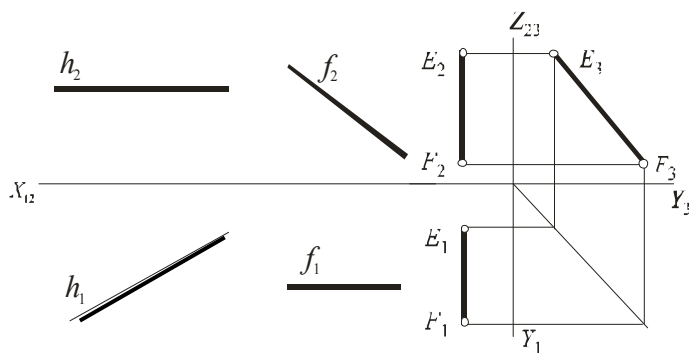


Рис. 71

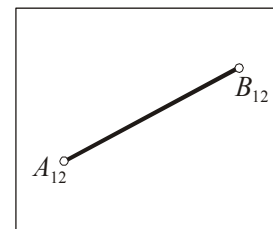


Рис. 72

Проецирующие прямые показаны на рис. 73. Мы уже отмечали, что проецирующие элементы теряют одно измерение. Проекция прямой вырождается в точку, если совпадает с направлением проецирования. Две

другие проекции оказываются перпендикулярными осям. На рисунке отрезок $[AB]$ – горизонтально-проецирующий, прямая q – фронтально-проецирующая, b – профильно-проецирующая.

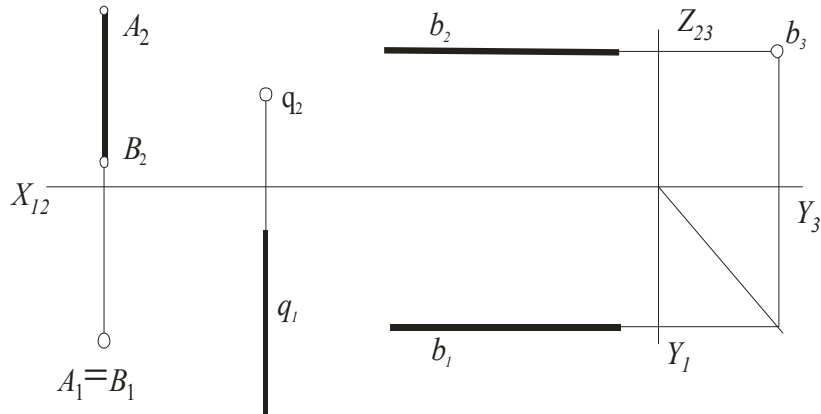


Рис. 73

Изображение плоскости

Поместим плоскость общего положения α в систему прямоугольных координат. На рис. 74, а изображена прямоугольная изометрическая проекция.

Линии пересечения заданной плоскости с плоскостями проекций называются следами: $\alpha\pi_1$ – горизонтальный, $\alpha\pi_2$ – фронтальный, $\alpha\pi_3$ – профильный. На рис. 74, б плоскости проекций развернуты в эпюр Монжа. Точки пересечения следов лежат на осях (точка пересечения трех плоскостей) и называются точками схода следов. Точка схода, лежащая на оси Y , распалась на две: αY_1 и αY_3 .

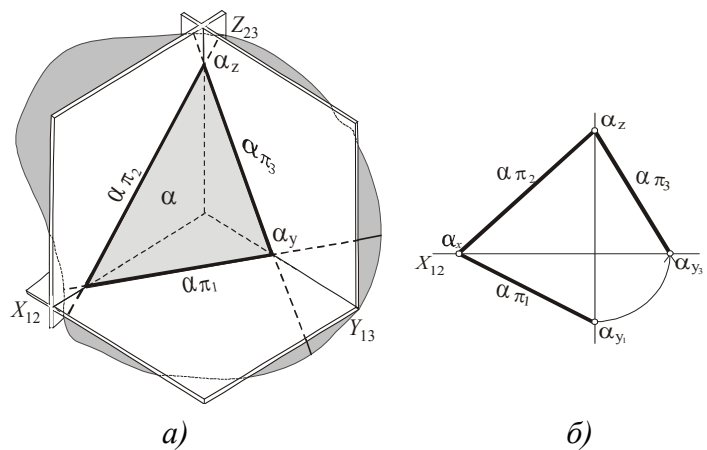


Рис. 74

Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими.

Рис. 75, а изображает отсек фронтально-проецирующей плоскости с выделенным на ней треугольником ABC .

На рис. 75, б тот же треугольник показан в прямоугольной проекции,

его фронтальная проекция «вырождается» в линию, совпадающую со следом. Такую линию мы называем след-проекцией, это означает, что она одна может однозначно задавать плоскость (рис. 75, в). Какую бы фигуру мы ни изобразили на горизонтальной проекции, её фронтальная проекция совпадет со след-проекцией. Для того чтобы «увидеть» за одной линией целую плоскость, необходимо её обозначить символом фронтального следа – $\alpha\pi_2$ (альфа на пи два). Уберите обозначение – и чертеж потеряет всякий смысл.

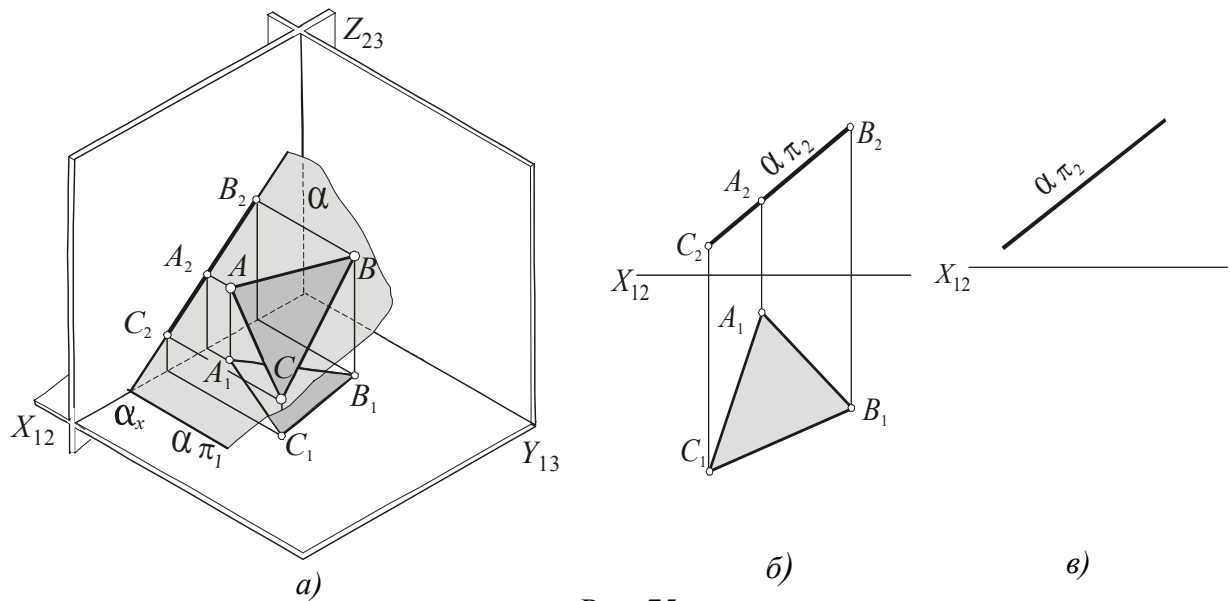


Рис. 75

Только проецирующая плоскость может быть задана одной след-проекцией.

Рис. 76 изображает аксонометрическую и прямоугольную проекции горизонтально-проецирующей плоскости. Второй след проецирующей плоскости всегда перпендикулярен оси. Убрав фронтальный след, мы не потеряем плоскость, останется след-проекция.

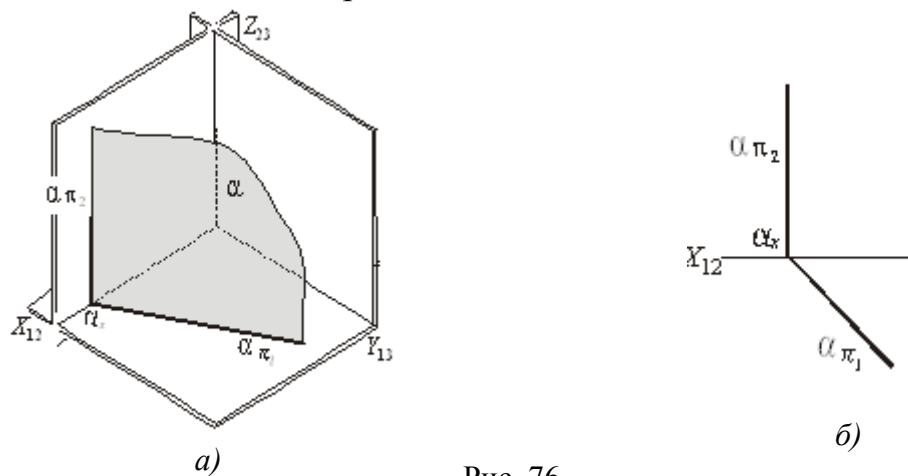


Рис. 76

Плоскость, перпендикулярная сразу двум плоскостям проекций, окажется параллельной третьей. Рис. 77 изображает горизонтальную плоскость уровня. Любая линия, принадлежащая горизонтальной плоскости, является горизонталью. Если, кроме того, она окажется параллельной какой-то плоскости, значит, будет перпендикулярна другой. Отрезок $[AB]$ на рис. 77 является профильно-проецирующим.

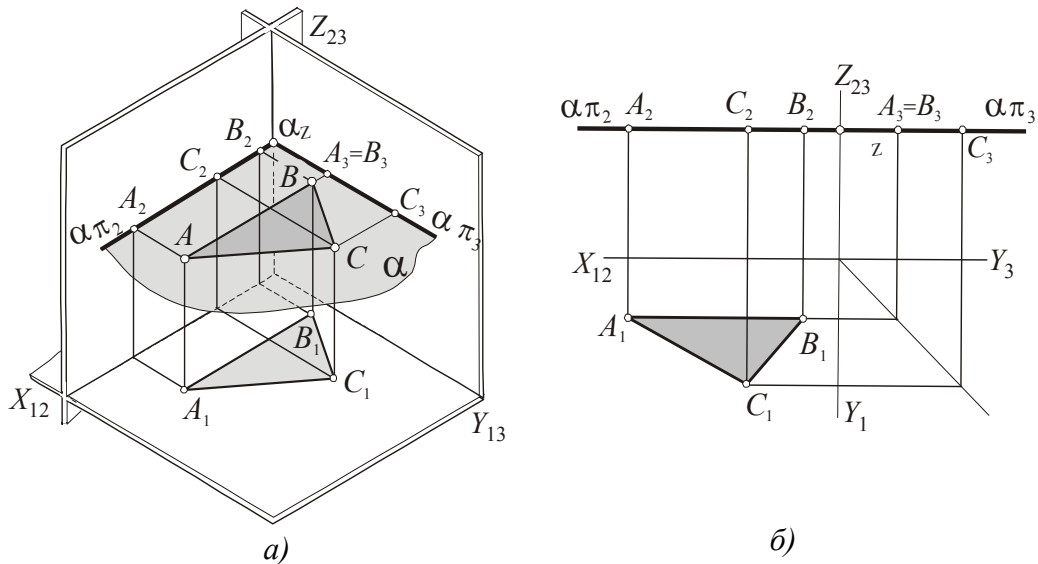


Рис. 77

Плоскость может быть задана тремя точками, параллельными или пересекающимися прямыми, любой плоской фигурой, следовательно, проекция плоскости может быть задана проекциями перечисленных элементов. На рис. 78 изображены плоскости общего положения.

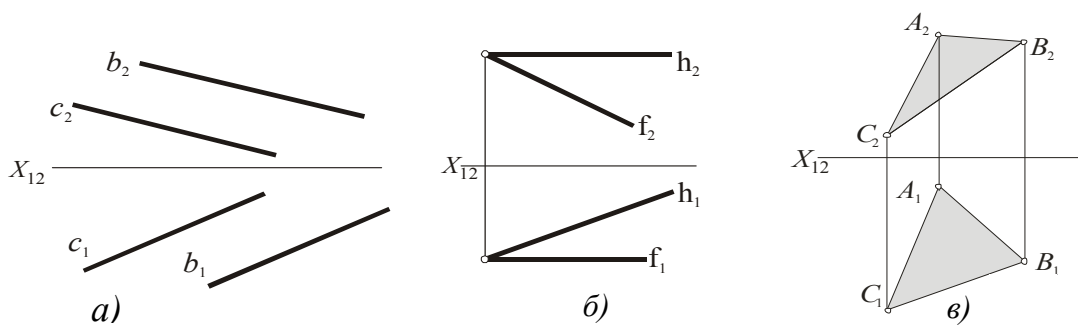


Рис. 78

Чтобы получить проекцию с числовыми отметками, достаточно на горизонтальной проекции указать высоты вершин треугольника в каких-то единицах и поместить масштабную шкалу (рис. 79).

Но обычно плоскость в числовых отметках задают иначе. Для этого рассмотрим следующий пример (рис. 80).

В плоскости α (рис. 80, а) проведем несколько горизонталей и перпендикулярно к ним отрезок $[AB]$, который является линией наибольшего наклона к горизонтальной плоскости (линия ската).

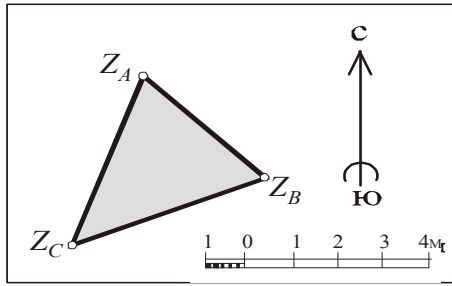
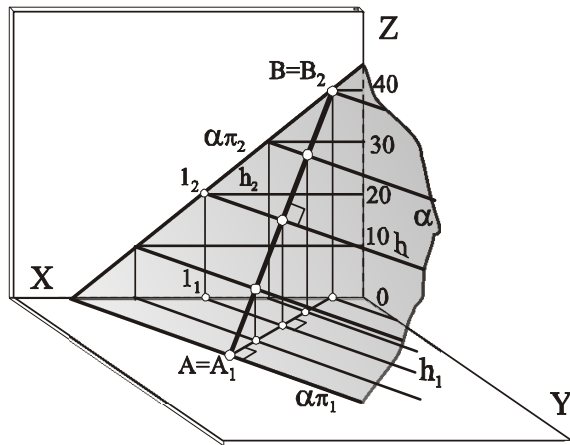


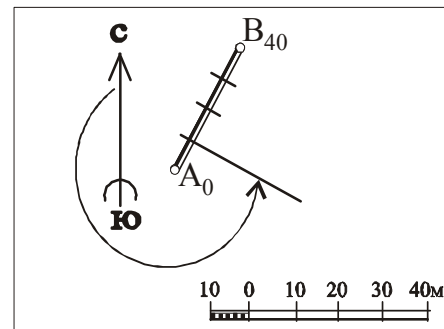
Рис. 79

Горизонтальные проекции горизонталей параллельны горизонтальному следу $\alpha\pi_1$, а линия ската им перпендикулярна (на основании теоремы о проецировании прямого угла). На рис. 80, б мы видим линию ската с элементами горизонталей. Нанесённые на концах отрезка числовые отметки показывают направление ската плоскости.

На практике, положение плоскости в пространстве задают **углом простираения**. Он измеряется против часовой стрелки от направления земного меридиана до направления простираения. **Направление простираения** – правое направление горизонталей, если смотреть на них в сторону возрастания отметок.



а)



б)

Рис. 80

Изображение поверхности

В первой главе мы говорили о способах задания поверхностей, где все примеры изображены в наглядных аксонометрических проекциях. В этой главе мы будем изображать некоторые поверхности в прямоугольных, аксонометрических проекциях и проекциях с числовыми отметками.

В прямоугольных проекциях поверхности можно задавать проекция-

ми элементов геометрического определителя, проекциями линий каркаса или проекциями линий очерка. На рис. 81, *a* даны проекции геометрического определителя конической поверхности общего вида: $(\Gamma): \alpha(m, S)$, где α – обозначение поверхности, m – направляющая, S – вершина конуса.

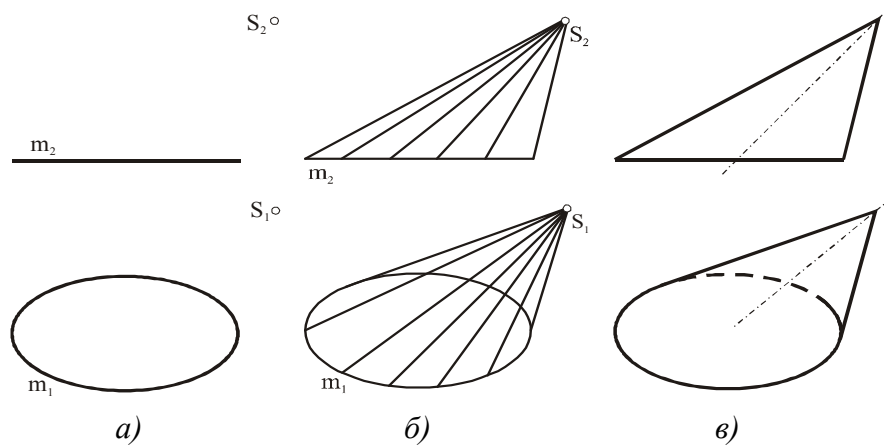


Рис. 81

Рис. 81, *б* изображает проекции каркаса того же конуса. Количество линий каркаса может быть произвольным и зависит лишь от условия задачи. Рис. 81, *в* изображает проекции очерка конуса. Очерком называется линия, ограничивающая изображение. Она получается в результате пересечения огибающей предмет проецирующей поверхности с плоскостью проекций.

Чертёж поверхности вращения рассмотрим на примере прямого кругового конуса (рис. 82, *a*) (аксонометрическая проекция). На рис. 82, *б* показана фронтальная и горизонтальная проекции конуса в прямоугольных проекциях, заданная очерками. Изображённые на нём параллели (го-

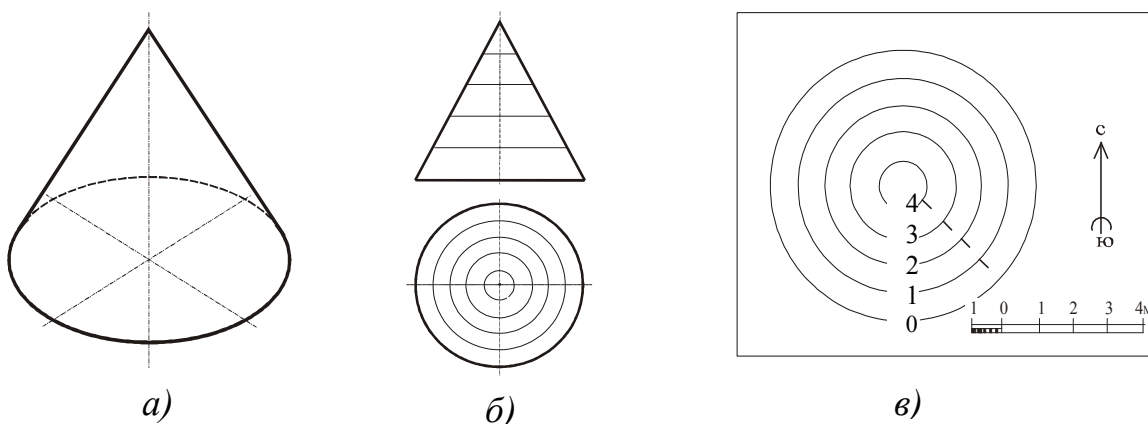


Рис. 82

горизонтали) проведены на одинаковом расстоянии друг от друга, радиусы горизонтальных проекций их также увеличиваются к основанию на одну и ту же величину. Нанесём высотные отметки на горизонтальных проекциях горизонталей и получим изображение конуса в проекциях с числовыми отметками (рис. 82, в). Для наглядности направление ската показывают короткие штрихи – *бергштрихи*.

Одинаковые расстояния между горизонталями говорят о поверхности постоянного уклона.

Рассмотрим изображение однополостного гиперболоида вращения в прямоугольных проекциях.

Рис. 83, а показывает проекции геометрического определителя поверхности $\lambda(\cup i, [AB])$, где λ – обозначение поверхности, $\cup i$ – ось вращения, $[AB]$ – образующая.

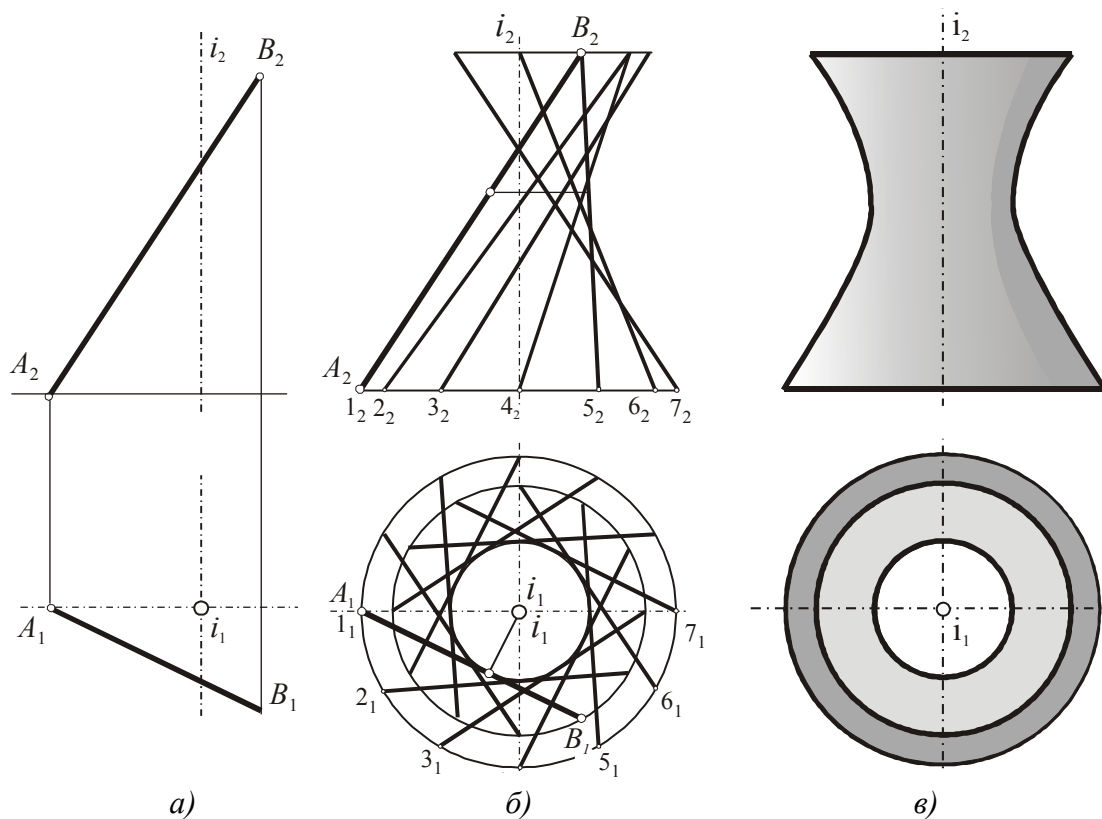


Рис. 83

На рис. 83, б поверхность задана проекциями каркаса. На горизонтальной проекции показаны двенадцать равномерно расположенных образующих. На фронтальной проекции показаны семь из них. (Постройте самостоятельно остальные образующие). Ближайшая к оси вращения

точка на образующей определяет положение горла гиперboloида. Очерковой линией является гипербола, касательная к крайним образующим. Можно проследить получение очерка на правой стороне поверхности.

Рис. 83, в изображает проекции очерка поверхности. По рисунку видно, что поверхность может быть образована вращением гиперболы вокруг той же оси. Изнаночная сторона поверхности для наглядности окрашена светлее.

Поверхность с плоскостью параллелизма представлена косою плоскостью (гиперболическим параболоидом) (рис. 84). Мы выбрали отсек поверхности, ограниченный рамками куба, где направляющими являются диагонали противоположных граней.

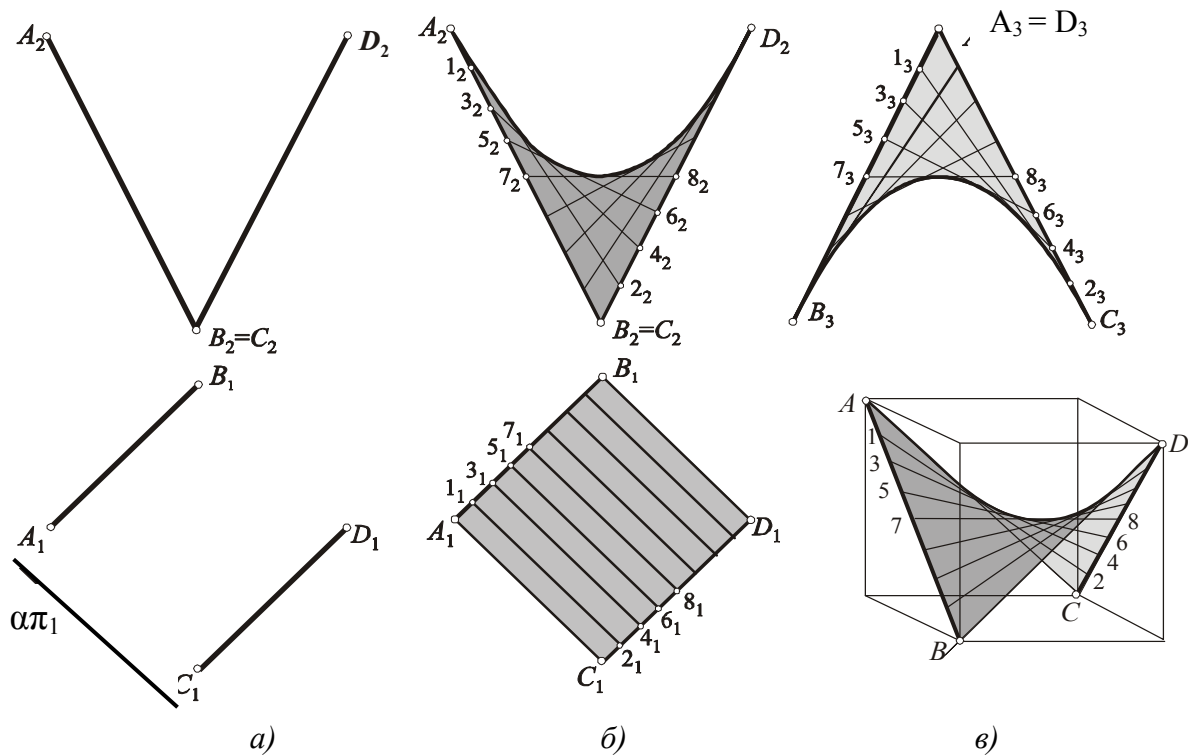


Рис. 84

Геометрический определитель поверхности задан в прямоугольных проекциях на рис. 84, а: Γ : $\varphi (AB, CD, \alpha)$, где φ – обозначение поверхности, $[AB]$ и $[CD]$ – направляющие, α – плоскость параллелизма.

На рис. 84, б поверхность изображена в трех проекциях своими очерками с несколькими линиями каркаса, представленными девятью образующими. Криволинейная часть очерка является гиперболой.

Рис. 84, в изображает поверхность в косоугольной диметрической проекции.

На рис. 85 представлены проекции винтовой поверхности – наклонного геликоида. Его геометрический определитель (рис. 85, а): $(\Gamma): \varphi(\mathcal{U}i, m, [S_1])$, где φ – обозначение поверхности, $\mathcal{U}i$ – ось винтовой линии, m – винтовая линия, $[S_1]$ – наклонная образующая.

Для начала построим один шаг левой винтовой линии m (удаляясь от наблюдателя, линия закручивается против часовой стрелки). Для этого разделим окружность и высоту шага на равное число частей, в нашем случае

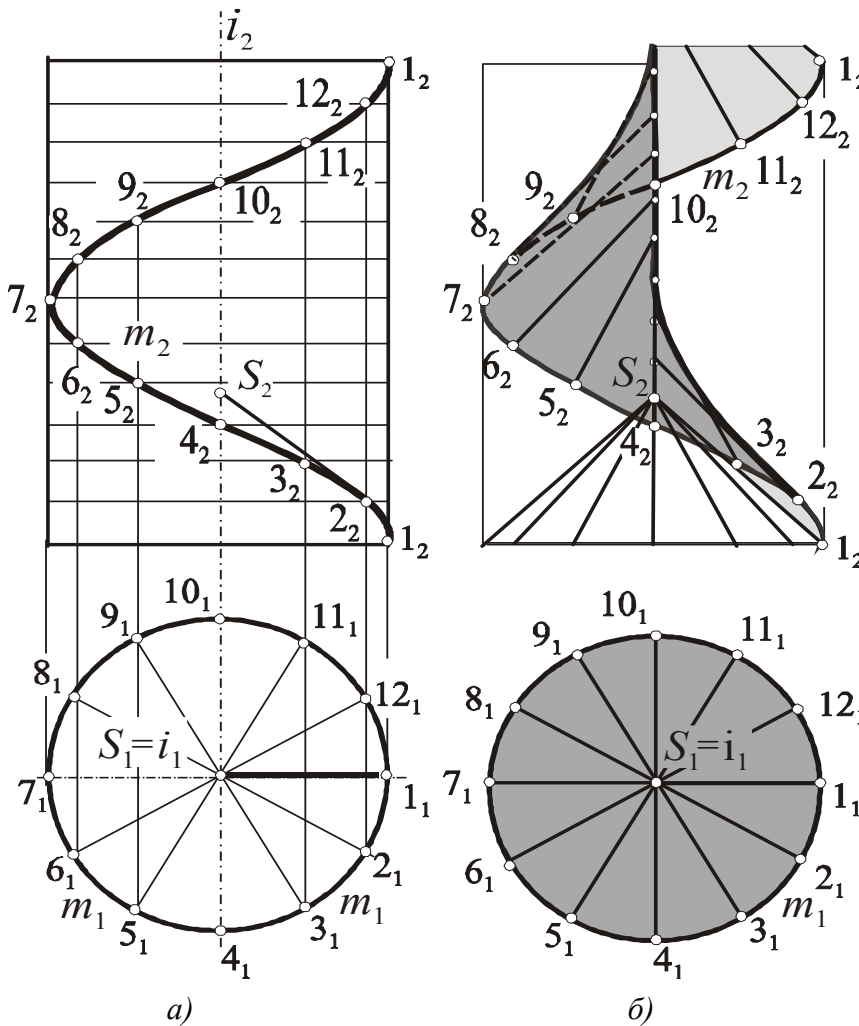


Рис. 85

на двенадцать. Перемещаясь на одну двенадцатую часть шага, точка переместится на тридцать градусов по окружности, т.е. на одну двенадцатую часть. Для построения проекций наклонного геликоида (рис. 85, б) воспользуемся построенной винтовой линией. Для определения положения образующей в каждом из двенадцати положений построим направляющий конус с очерковой образующей

$[S_1][S_1I_1][S_2I_2]$. Наклонная образующая, перемещаясь вверх по винтовой линии, остаётся параллельной начальному конусу с вершиной S . На рис. 85, б построено двенадцать таких образующих (каркас поверхности).

На рис. 86, а изображен чертёж геометрического определителя тора – $(\Gamma): \delta(n)$, где δ – обозначение поверхности с ребром возврата (торсовой), n – винтовая линия, $(1, 2, 3 \dots 12)$ – направляющая поверхности. Алго-

ритмический определитель (A): $\delta (li \cap n)$, читается так: каждая l -я образующая проводится касательно к винтовой линии.

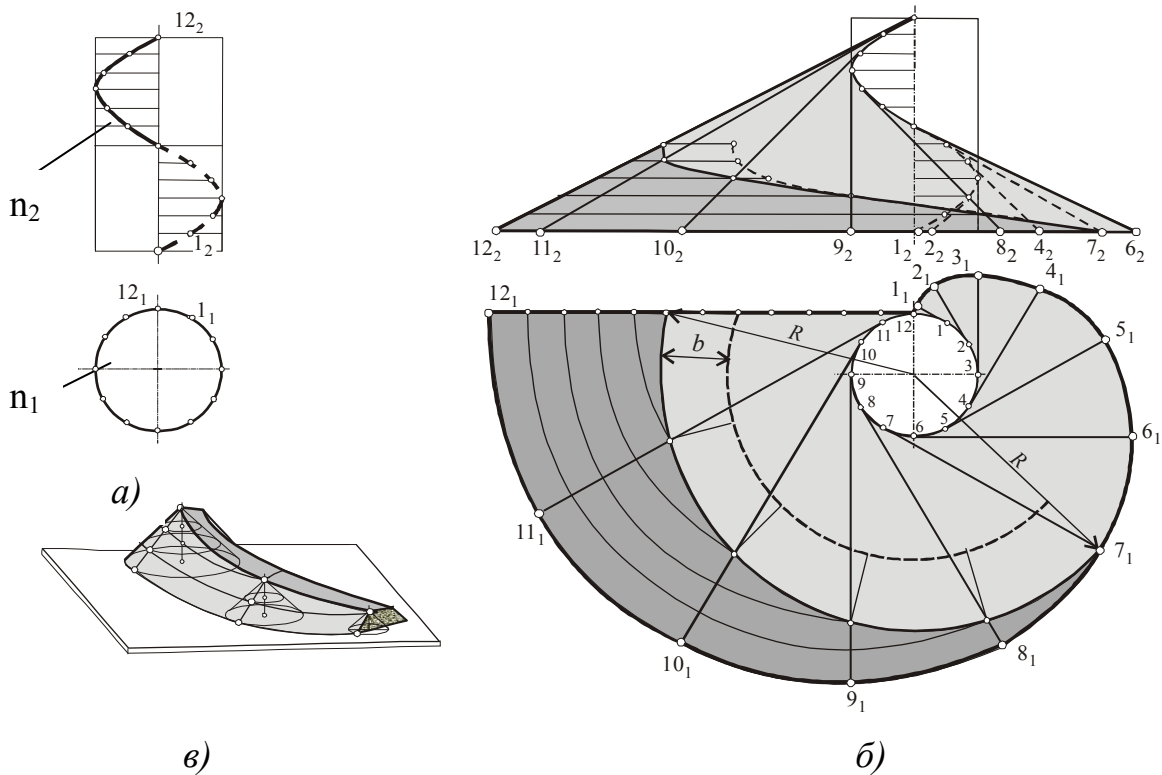


Рис. 86

На рис. 86, б построены проекции двенадцати образующих. На основании инвариантных свойств, проекции образующих остаются касательными к одноименным проекциям направляющей винтовой линии. Поскольку последняя имеет постоянный угол подъема, все образующие одинаково наклонены к горизонтальной плоскости проекций. Поэтому поверхность, ребром возврата которой служит винтовая линия, является поверхностью равного уклона. Горизонтальные плоскости пересекают такую поверхность по эвольвентам окружности (горизонтальной проекции винтовой линии). На рис. 86, б проведено несколько плоскостей уровня на равном расстоянии друг от друга, и на горизонтальной проекции мы видим несколько эквидистантных эвольвент.

Поверхности равного уклона применяются в дорожном строительстве. На рис. 87 дано наглядное изображение узловой дорожной развязки. На рис. 86, в представлен в наглядном виде элемент дороги с подъёмом. На рис. 88 в проекциях с числовыми отметками показано построение насыпи с внешней стороны

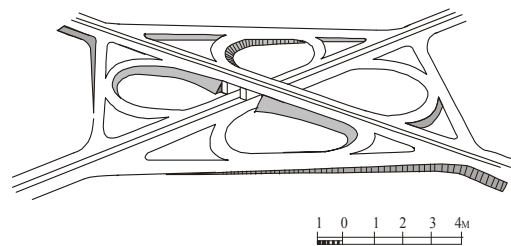


Рис. 87

дороги, выделенной на рис. 86, б. Дорога начинается в районе седьмой образующей, идёт по кольцу радиуса R и шириной b , поднимаясь на пять уровней.

Рассмотрим, как в проекциях с числовыми отметками выполняют построение чертежа насыпи (поверхности равного уклона). Участок дороги является поверхностью прямого геликоида и при заданном масштабе

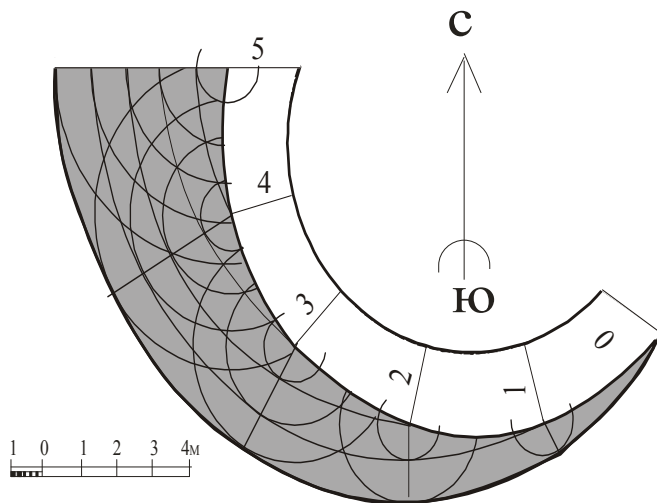


Рис. 88

поднимается на пять метров. Через каждый метр высоты проведены горизонталы (их видно на рис. 86, б).

Вернёмся к рис. 88. Построим проекции конусов, вершины которых лежат на указанных отметках края дороги. На отметке «1» строим одну горизонталь, на отметке «2» – две и т.д. Расстояния между окружностями (разность радиусов) берём с рис. 86, б (т.к. строим в том же масштабе).

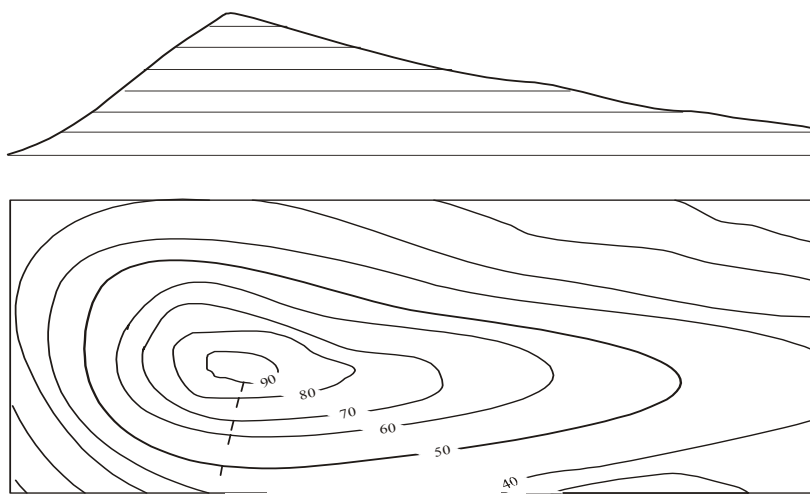


Рис. 89

Мы не поставили высотные отметки построенных горизонталей, их можно посчитать. Теперь проведём касательные к окружностям с одноимёнными горизонталями и получим горизонталы поверхности равного уклона. Как уже говорилось, это эвольвенты.

На рис 86, в это построение показано в прямоугольной диметрической проекции. Как определять количественные показатели в проекциях с числовыми отметками, узнаем во второй части пособия.

Проекции с числовыми отметками применяют в картографии, при строительстве дорог, мостов, аэродромов и др.

На рис. 89 показано на прямоугольных проекциях, как получают горизонталы топографической поверхности. Уровни проводят на равном

расстоянии друг от друга, которое зависит от условия задачи. По одной горизонтальной проекции видно, как меняется рельеф изображенной поверхности. Чем чаще расположены горизонтали, тем круче участок поверхности. При отсутствии фронтальной проекции необходим масштаб линейный и числовой.

Проекции геометрических тел

Геометрические тела ограничены поверхностями со всех сторон и, как правило, изображаются очерком. Рис. 90 наглядно демонстрирует разницу в изображении поверхности и твердого тела. Рис. 90, а изображает поверхность однополостного гиперболоида вращения, рис. 90, б – деталь, ограниченную, кроме боковой поверхности, основаниями. В первом случае на горизонтальной проекции кроме боковой поверхности мы видим горло и часть изнаночной стороны поверхности, во втором – только верхнее основание и нижнюю часть боковой поверхности. Горло изображается штриховой линией.

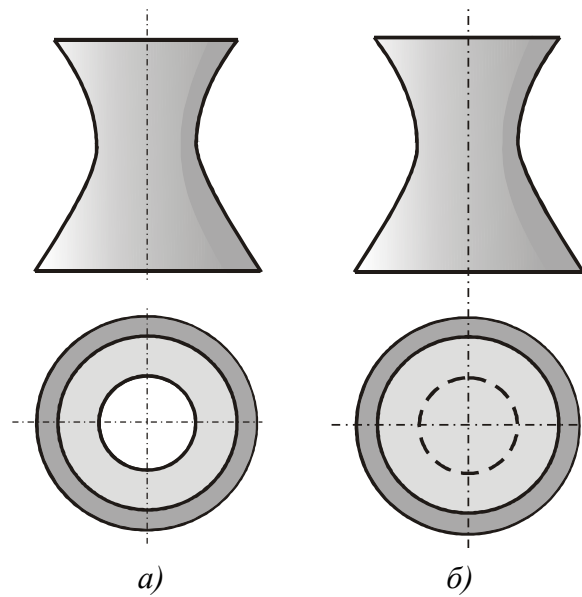


Рис. 90

На рис. 91 продемонстрирована связь аксонометрической проекции и эпюра Монжа на примере черте-

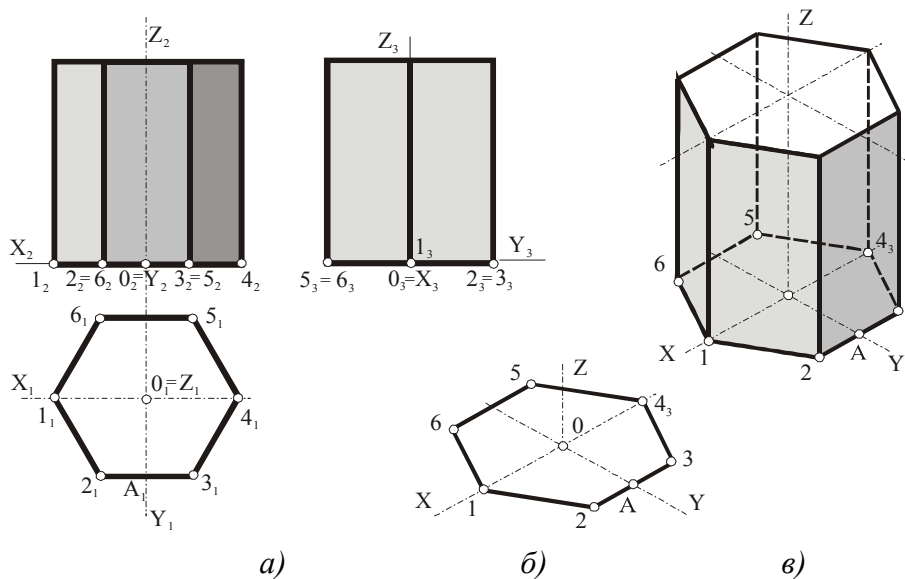


Рис. 91

жа шестиугольной призмы. Для начала к прямоугольной проекции призмы «привязана» прямоугольная координатная система и построены её проекции на три плоскости (рис. 91, а). Начало координат помещено в центр нижнего основания.

Проекция координатных осей на аксонометрическую плоскость определяет аксонометрические оси. Теперь к ним необходимо «привязать» элементы призмы, используя свойство параллельных прямых оставаться параллельными при проецировании. Линии, не параллельные осям, строятся по координатам точек, а для построения точки используется координатная ломаная. Например, для построения точек 2 и 3 вначале построена точка А, через неё проведена линия, параллельная оси OX , на которой отложены отрезки $[A 2]$ и $[A 3]$, равные горизонтальным проекциям $[A_1 2_1]$ и $[A_1 3_1]$. Боковые рёбра направлены параллельно оси OX .

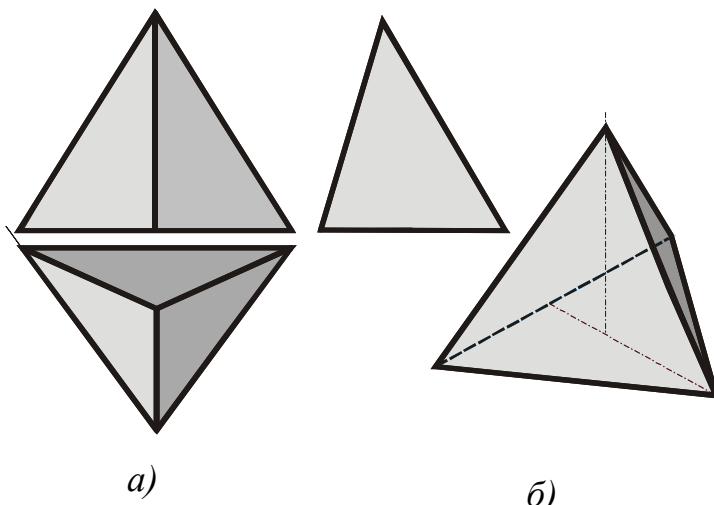


Рис. 92

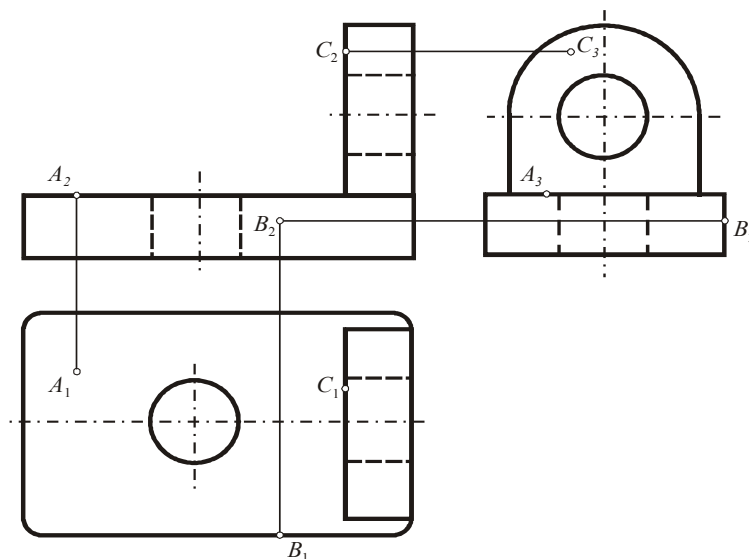


Рис. 93

ми. В призме высверлено сквозное отверстие. Вертикальная стойка составлена из призмы и полуцилиндра с цилиндрическим отверстием.

Как видим, поверхности детали ограничены внешними и внутренними

поверхностями. Критерий «прочтения» чертежа – умение находить проекции точек на его поверхности. На рис. 93 показаны проекции трёх точек.

§ 4.2. Перспективные (центральные) проекции Проекция линий

Прямая определяется двумя точками, кривая – конечным множеством точек. Строить перспективные проекции точек мы умеем. Значит, построить любую линию мы уже сможем. Остановимся на проекциях параллельных прямых. На рис. 94 изображен аппарат центрального проецирования и предметная плоскость, на которой лежат две прямые $(A_\infty B_\infty)$ и $(M_\infty N_\infty)$.

Будем проводить проецирующие лучи из центра проецирования S , непрерывно перемещая его по множеству точек на прямой $(A_\infty B_\infty)$. Обозначим некоторые из них: $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, $(S4)$, $(S5)$. Плоскость α , образованная лучами, пересечет картинную плоскость по прямой, на которой каждой точке заданной прямой соответствует перспективная проекция $1^k, 2^k, 3^k$ и т.д. По мере уменьшения угла наклона проецирующего луча к картинной плоскости проекции точек оригиналов становятся недоступными в ближнем пространстве, приближаясь к бесконечности.

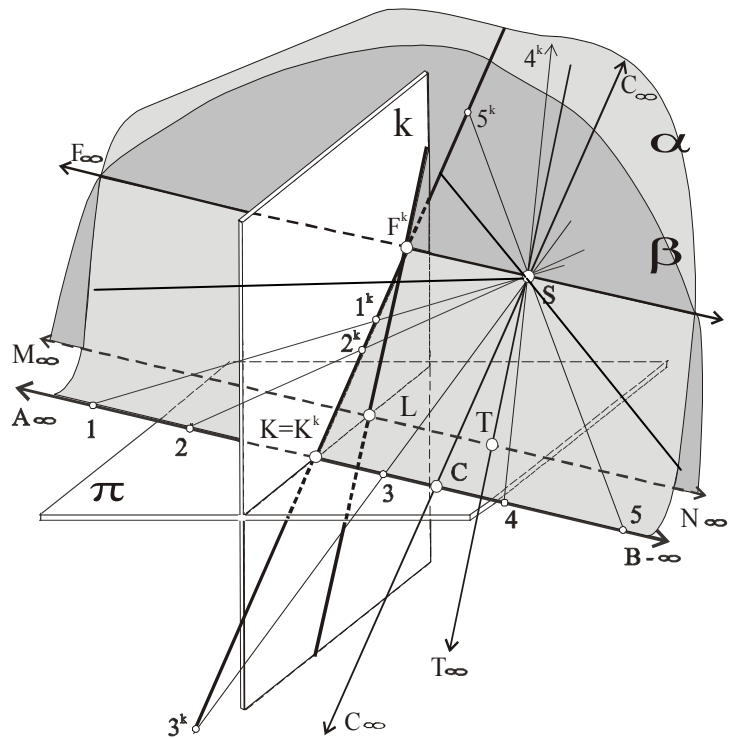


Рис. 94

Перейдя положение $(SC) \parallel (F^k K^k)$, они возникают с другой стороны прямой. Перспектива «полупрямой» CB_∞ создает впечатление замкнутости прямой. Отсюда следует, что **прямая в расширенном евклидовом пространстве ведет себя так, как замкнутая окружность огромного радиуса**. Таким образом, мы убедились, что бесконечно удаленная (несобственная) точка прямой A_∞ , она же B_∞ , имеет видимую проекцию F^k . Точке же C , лежащей на луче, параллельном картине, соответствует перспективная проекция в бесконечности – C_∞ .

Возьмем на предметной плоскости еще одну прямую $(M_\infty N_\infty)$, парал-

тельную первой. Мысленно повторите рассуждение для этой прямой.

Заданная прямой $(M_\infty N_\infty)$ и точкой S лучевая плоскость β пересечет лучевую плоскость α по лучу (SF_∞) , параллельному заданным прямым. Выходит, что перспективной проекцией предельной точки M_∞ (то же N_∞) является та же точка F^k .

Анализируя чертёж, можно сказать, что **параллельные прямые пересекаются в несобственной точке** (т.е. $A_\infty, B_\infty, M_\infty$ и N_∞ – суть одна несобственная точка) и имеют общую перспективную проекцию F^k . (Собственными принято называть элементы, расположенные в ограниченном (видимом) пространстве). Множество прямых, принадлежащих плоскости, имеют свои несобственные точки. Совокупность несобственных точек составляет несобственную прямую плоскости. Каждая плоскость дополняется несобственной прямой. По этой прямой пересекаются параллельные плоскости. Рассуждая так и дальше, приходим к представлению о несобственном пространстве.

Сделаем некоторые выводы:

- перспективу прямой можно построить по начальной (картинному следу) и предельной (несобственной) точкам;

- перспектива несобственной точки получается при пересечении проецирующего луча, параллельного заданной прямой с картинной плоскостью;

- параллельные прямые имеют общую перспективу предельных точек, иными словами, перспективные проекции параллельных прямых сходятся в одной точке;

- линия горизонта является перспективной проекцией предельной прямой предметной плоскости. Отсюда перспективная проекция всей предметной плоскости расположена между основанием картины и линией горизонта;

- перспективные проекции линий, параллельных предметной плоскости, сходятся на линии горизонта;

- несобственные вторичные проекции линий всегда лежат на линии горизонта;

- перспективные проекции линий, перпендикулярных картинной плоскости, сходятся в главной точке картины;

- перспективные проекции горизонтальных линий, наклоненных к картине под углом 45° , сходятся в дистанционной точке.

На рис. 95 показана картина прямой (AK) общего положения. Расположенный внизу план помогает понять построение перспективы. Перспектива линии построена по особым точкам прямой. Точка K – начало прямой (картинный след) – на плане задана точкой $K = K_1$, на картине – вторичной проекцией K_1^k и перспективой K^k . Высота точки взята произвольно. На горизонтальной проекции проведена линия ($S_1 F_1$), параллельная ($K_1 A_1$), это горизонтальная проекция проецирующего луча, параллельного заданной прямой. При пересечении её с картиной получена F_1 – горизонтальная проекция перспективы несобственной точки. Произвольно заданный угол α (угол наклона линии к предметной плоскости) позволил определить $(\Delta Z) = (F_1 F^*)$ высоту положения несобственной точки F^k . Перспективная и вторичная проекции точки A ($A^k A_1^k$) определились при пересечении луча (SA) с картинной плоскостью. Вначале она построена на плане, затем по линии связи – на картине. Предельная точка расположена выше линии горизонта, значит, прямая восходящая. При отсутствии плана для построения перспективы предельной точки действия должны быть следующими: вторичную проекцию продолжить до пересечения с линией горизонта (F_1^k), затем с помощью линии связи на перспективной проекции отметить F^k . У картинного следа вторичная проекция лежит на основании картины (K_1^k).

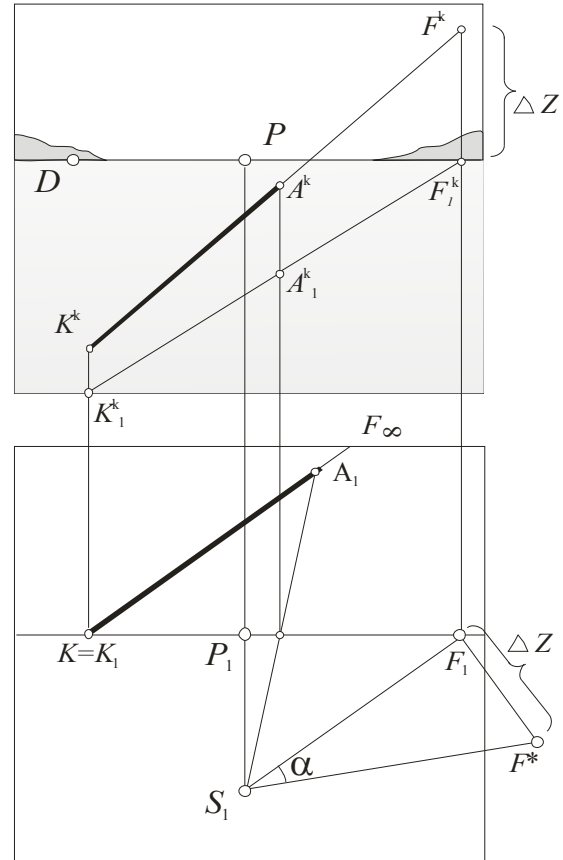


Рис. 95

При отсутствии плана для построения перспективы предельной точки действия должны быть следующими: вторичную проекцию продолжить до пересечения с линией горизонта (F_1^k), затем с помощью линии связи на перспективной проекции отметить F^k . У картинного следа вторичная проекция лежит на основании картины (K_1^k).

На рис. 96 показаны план и перспективные проекции горизонтальных прямых, наклоненных под углом 45° к картине. Проекции предельных точек прямых находятся в дистанционных точках картины. Это важно, т.к. дистанционные точки являются точками схода линий параллельного переноса при переносе размеров с основания картины на линии, перпендикулярные картине.

Рис. 97 изображает прямые, перпендикулярные картинной плоскости. Прямые 1 и 2 лежат в предметной плоскости, линия 3 – в предметном пространстве. И перспективные и вторичные проекции предельной точки лежат в главной точке P .

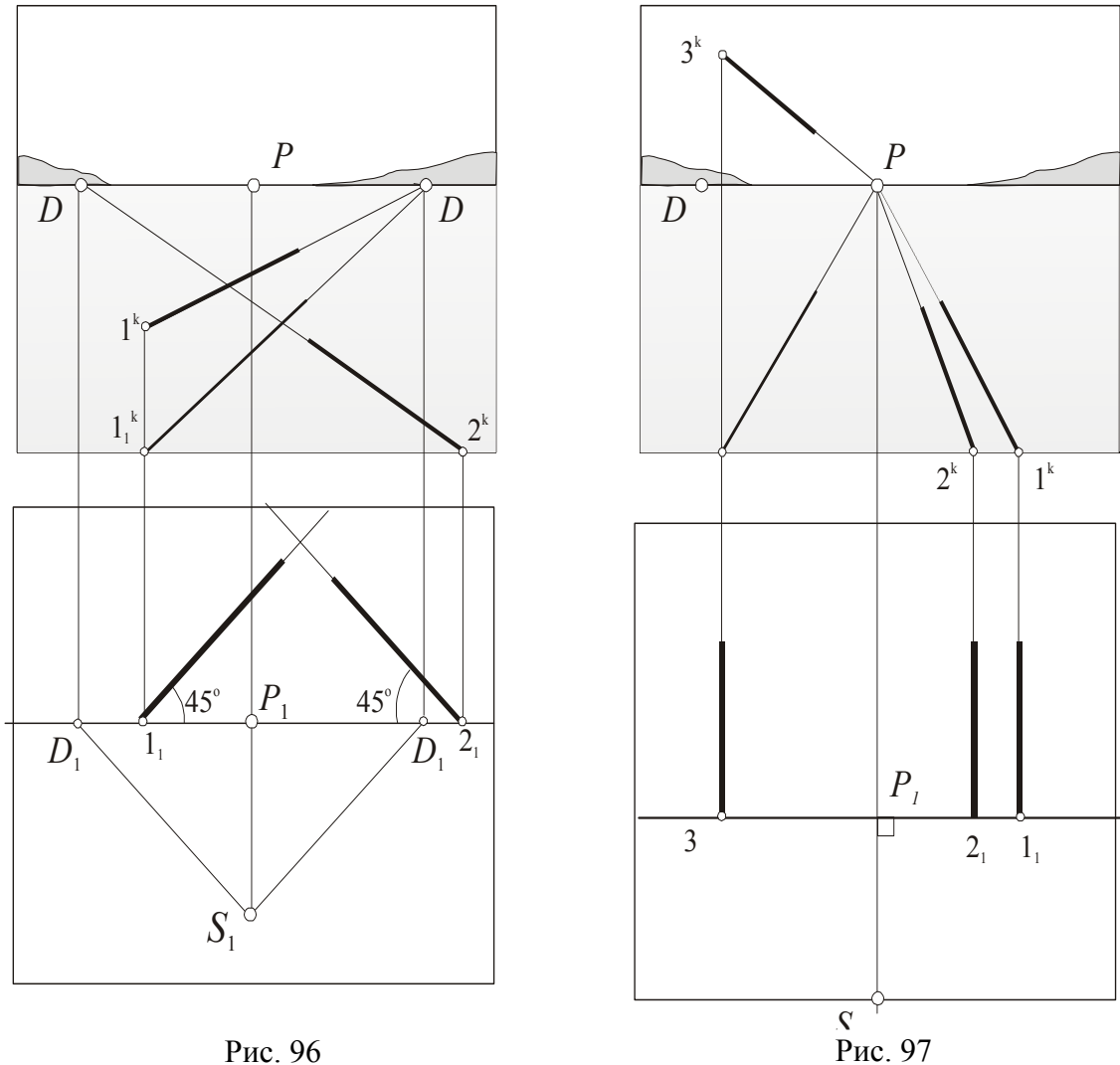


Рис. 96

Рис. 97

На рис. 98 изображаются линии, принадлежащие предметной плоскости и проходящие через основание точки зрения. Изображение плана делает понятным расположение перспективных проекций. Вертикальная лучевая плоскость пересекается с вертикальной картиной по вертикальной прямой.

А как изобразится проецирующая прямая в перспективе? Мы помним, что проецирующие элементы теряют одно измерение. Значит, перспектива такой прямой выродится в точку. А вот её вторичная проекция поведёт себя так, как мы увидели на примере рис. 98. Действительно, горизонтальная проекция линии q , пролегающей через точку S , проходит через точку стояния S_1 (на рисунке не обозначена).

На рис. 99 точка q^k – перспектива проецирующей линии, прямая q^k_1 – её вторичная проекция. (Вспомните изображенные на картинах солнечные или лунные дорожки на воде).

Кривые линии изображаются необходимым количеством точек.

Для окружности, в общем случае, достаточно восьми точек (рис. 100). Проще всего её вписать в квадрат (рис. 100, а). Здесь же видно построение точек, лежащих на диагоналях квадрата. Строим их следующим образом: приняв радиус ($A3$) за гипотенузу, строим прямоугольный равнобедренный треугольник с углами 45° в основании. Затем от точки 3 откладываем размер, равный катету построенного треугольника (показано стрелкой) и проводим через него линию, перпендикулярную к стороне (AL), которая отметит точки 5 и 6 , принадлежащие окружности. Точки 7 и 8 строят как симметричные. На рис. 100, б построена перспектива окружности произвольного радиуса. Точку O разместили на средней линии предметной плоскости, взяв произвольно, ($O1$) приняли за радиус окружности, (12) – за диаметр.

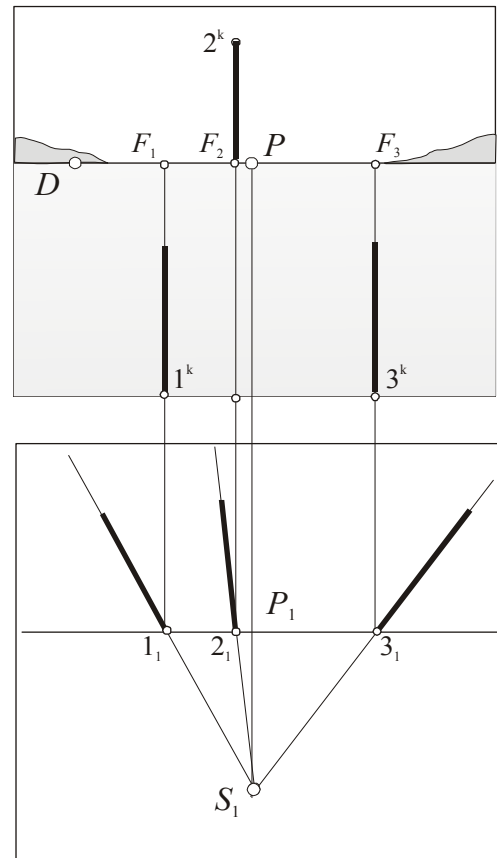


Рис. 98

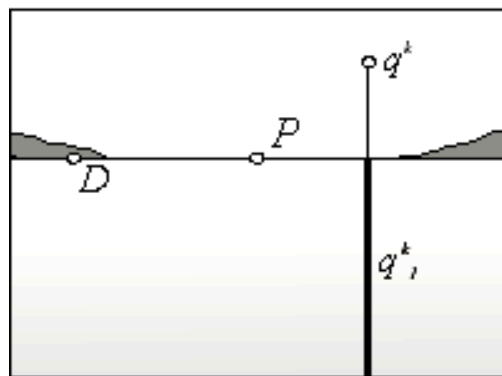


Рис. 99

Стороны квадрата, перпендикулярные картине, проходят через точки 1 и 2 в точку P . Следующим действием будет проведение диагонали (BL), она проходит через центр окружности и дистанционную точку. Через точки B и L проводим горизонтальные составляющие квадрата (BC), (AL)

и диагональ (AC). Построение точки 5 аналогично рис. 100, a . Точка 6 лежит на перпендикуляре ($5\ 6$), который направлен в P . Точки 7 и 8 построены как симметричные.

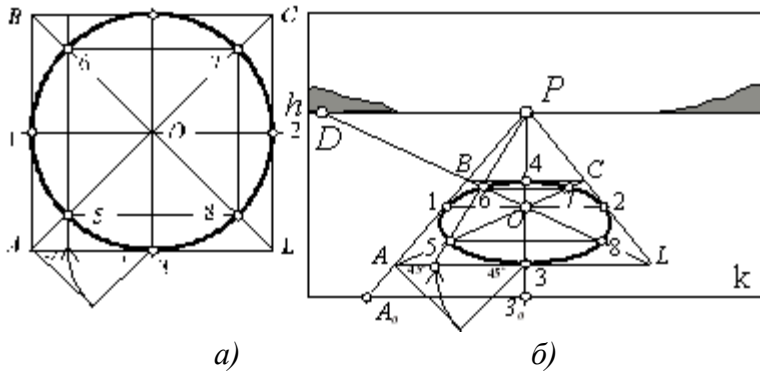


Рис. 100

Соединив точки плавной кривой, получим эллипс. Центр эллипса не является проекцией центра окружности из-за перспективного сокращения. В данном примере большая ось эллипса (на картине не показана) расположена горизонтально.

В случае, когда центр окружности смещается от средней линии, большая ось эллипса наклоняется.

Изображение поверхностей

На рис. 101 изображен цилиндр, у которого осевая линия не лежит на средней линии картины, поэтому ось эллипса наклонена. Верхнее основание

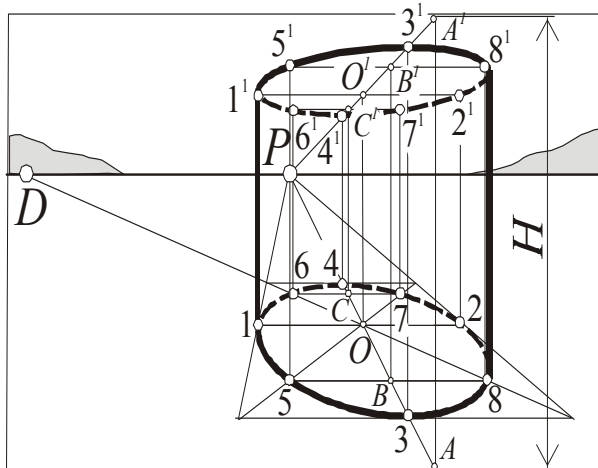


Рис. 101

может быть построено аналогично нижнему на любой плоскости, параллельной предметной. В данном случае верхний эллипс построен иначе. Вначале через центр проведена глубинная плоскость ($PA A'P$) высотой H . На линии (PA') отмечены характерные точки O' , B' , C' , $3'$ и $4'$. Точки $3'$ и $4'$ уже принадлежат верхнему основанию. Через точки B и B' проведен прямоугольник ($5\ 8\ 8'\ 5'$), у которого точки 5 и 8 принадлежат нижнему основанию, а $5'$ и $8'$ – верхнему.

Аналогично найдены точки $1'$, $2'$ и $6'$, $7'$. Запомним, что в архитектурной практике не принято изображать наклонных эллипсов в силу законов восприятия, поэтому на рисунках их всегда выпрямляют.

Плоскость в перспективе изображается проекциями своих элементов – трех точек, параллельных или пересекающихся прямых, треугольника. Иногда плоскость удобно задать следами. След – это линия пересечения с плоскостью проекций. В перспективе плоскость пересекается с картинной и предметной плоскостью. На рис. 102, a плоскость β пересекает картину по

линии β_k , а предметную плоскость – по β_π . Чтобы найти на картине проекцию предметного следа, необходимо провести проецирующий луч параллельно предметному следу плоскости до пересечения с линией горизонта и полученную точку соединить с точкой схода следов.

Развернув картину, получим рис. 102, б. Очевидно, что и картинный, и предметный следы могут занимать любое положение, предметный след при этом не может выходить за линию горизонта. Изображенная на рис. 102 плоскость занимает общее положение.

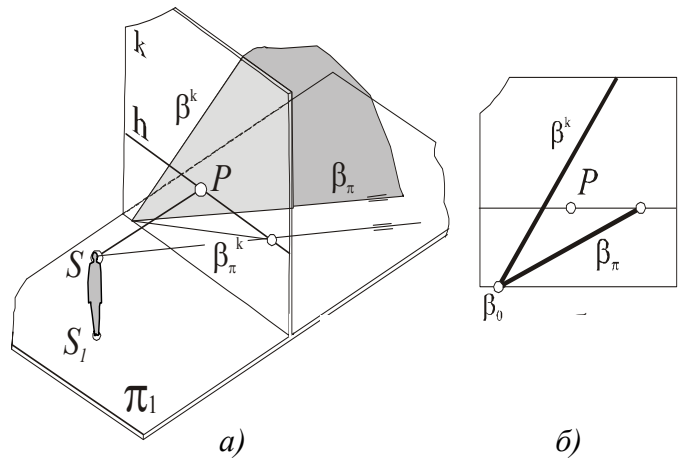


Рис. 102

На рис. 103 показаны плоскости частного положения: а – плоскость α перпендикулярна и предметной, и картинной плоскости; б – плоскость β перпендикулярна картинной плоскости, к предметной наклонена под углом φ ; в – плоскость δ перпендикулярна предметной плоскости и наклонена относительно картинной; г – отсеки плоскостей α , β и γ , ограниченные прямоугольниками, параллельны предметной плоскости, причем α является отсеком предметной плоскости, β лежит ниже, а γ – выше горизонта; д – отсек

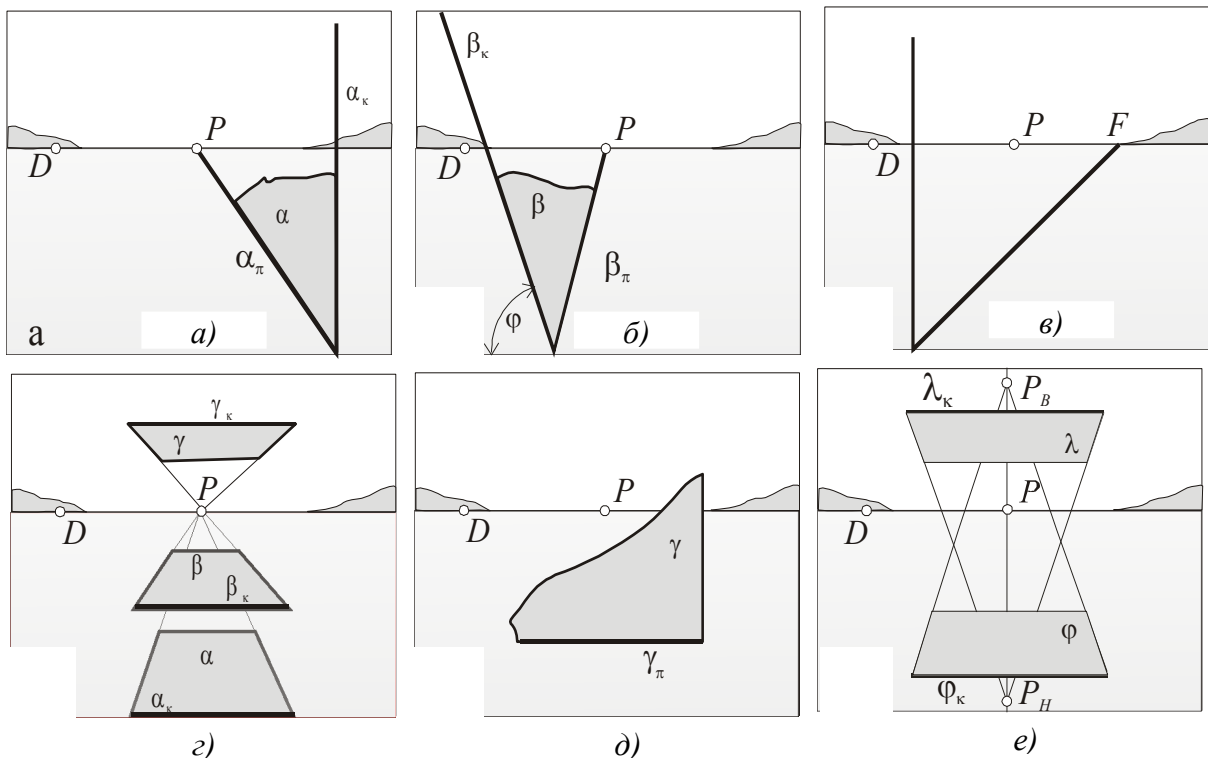


Рис. 103

плоскости γ параллелен картинной плоскости, её предметный след параллелен основанию картины, а картинный след отсутствует; e – прямоугольные отсеки плоскостей – φ (восходящей) и λ (нисходящей) – можно назвать перпендикулярными профильной плоскости.

Вопросы и задания для повторения

1. Постройте проекции отрезка $[AB]$: $A(50, 0, 30)$, $B(10, 40, 30)$ во всех известных вам проекциях.
2. Как изображаются проецирующие плоскости? Изобразите несколько плоскостей и назовите их.
3. Задайте в прямоугольных проекциях цилиндр общего вида определителем, каркасом и очерком.
4. Задайте прямоугольные проекции цилиндрида элементами определителя.
5. Задайте прямоугольные проекции каркаса коноида, косо́й плоскости.
6. Задайте плоскость в проекциях с числовыми отметками.
7. Задайте перспективные проекции плоскостей общего и частного положения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КООРДИНАТЫ

Координаты (лат. *co* – с, *ordinates* – упорядоченный) – числа, определяющие положение точки в какой-либо системе отсчета.

Все мы живем на нашей планете в определенном месте, отмеченном на карте. Каждая точка карты имеет координаты – долготу и широту, выраженные в градусах, минутах и секундах. Наша планета разбита меридианами и параллелями. Долгота определяется по положению меридиана и отсчитывается от нулевого, проходящего через Лондон, в восточном или западном направлениях. Широта отсчитывается по положению параллели, начиная от экватора в северном или южном направлениях. Например, координаты Владимира: $40^{\circ} 25'$ восточной долготы и $56^{\circ} 08'$ северной широты.

Когда объект, например самолет, находится в небе, появляется третья координата. Высота объекта (точки) определяется расстоянием от него до земли, измеренным перпендикулярно ей.

Для определения положения небольших объектов в ограниченном пространстве пользуются прямоугольной Декартовой системой координат, состоящей из трех взаимно перпендикулярных прямых (осей абсцисс, ординат и аппликат). Прямые пересекаются в точке O , которая делит каждую ось, образуя положительное и отрицательное направления (на рис. П1 показано лишь положительное направление). Каждая пара осей задает плоскость. **Координата – это расстояние, измеренное в определенном направлении с учетом знака** (выраженное в любых метрических единицах).

Координата X , например, измеряется параллельно оси абсцисс (OX). На рис. П1 – это положительное значение, определяющее расстояние от точки до плоскости, образованной осями ординат (OY) и аппликат (OZ).

Оси могут занимать любое положение в пространстве. На практике, однако, принято ось аппликат располагать вертикально.

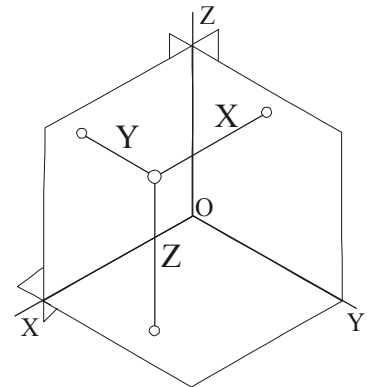


Рис. П1

МАСШТАБЫ

Не менее важным является понятие масштаба. Ясно, что изображать очень крупные и очень мелкие предметы в натуральную величину никому не придет в голову. В черчении принято применять стандартные масштабы, выраженные числовым отношением: $1 : 2$; $1 : 5$; $1 : 100$; $2 : 1$; $5 : 1$ и др. **Числовой масштаб показывает отношение величины изображения к действительной величине предмета.** Первые три масштаба уменьшают изображение соответственно в 2,5 и 100 раз и называются масштабами уменьшения. Последние два – масштабы увеличения.

Иногда удобнее пользоваться линейным масштабом. Он изображается двумя параллельными линиями разной толщины с делением на равные отрезки. Отрезок называется основанием масштаба. На рис. П2, а, б основание масштаба равно одному сантиметру. В первом случае сантиметр изображает 100 метров, во втором – 2 километра. Это стандартные масштабы, применяемые на планах и картах. Рис. П2, в изображает нестандартный линейный масштаб:

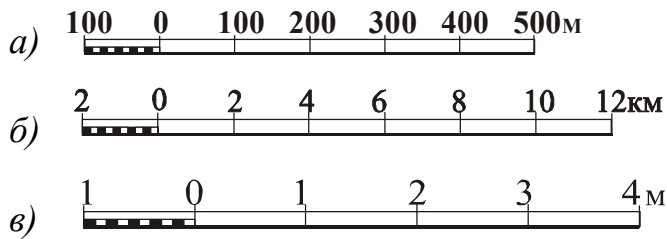


Рис. П2

дартный линейный масштаб: одно деление равно произвольной величине, изображающей один метр. Для более точного определения размера слева дается отрезок, разделенный на десять частей. Из-

мерение изображения можно произвести циркулем или полоской бумаги, а затем совместить с линейным масштабом и сразу получить расстояние в заданных единицах.

В наглядных изображениях, каковыми являются аксонометрические проекции, искажения по трем основным направлениям могут быть разными, следовательно, и масштабы могут быть разными. В этом случае масштаб удобно задавать коэффициентами искажения, например (0,82; 0,47 и др.). В наглядных изображениях, выполненных в центральных (перспективных) проекциях, масштаб принято изображать в виде масштабной перспективной шкалы, различной по всем направлениям. Подробнее об этих масштабах говорится во второй части пособия.

*НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИЗ КУРСА
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ*

1. У подобных треугольников стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, а углы равны.
2. Стороны угла, пересекающиеся рядом параллельных прямых, делятся последними на пропорциональные части.
3. Две параллельные прямые, пересекающиеся рядом прямых, выходящих из одной точки, делятся ими на пропорциональные части.
4. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.
5. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все её точки тоже принадлежат плоскости.
6. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, которая проходит через эту точку, или совмещаются.
7. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.
8. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
9. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.
10. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.
11. Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, значит, она перпендикулярна этой плоскости.
12. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной линии перпендикулярно к последней, перпендикулярна и к её проекции на эту плоскость.
13. Угол между скрещивающимися прямыми определяется плоским углом между прямыми, проведенными из одной точки параллельно заданным.
14. Угол между прямой и плоскостью определяется углом между самой прямой и её проекцией на эту плоскость.
15. Величина двугранного угла определяется плоским углом, который получается при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Список рекомендуемой литературы

1. *Бубенников, А.В.* Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высш. шк, 1965. – 368 с.
2. *Гордон, В.О.* Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, Н.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Физматгиз, 1963. – 360 с.
3. *Касьянов, А. П.* Методическое руководство по разделу «Основные геометрические образы инженерной графики» / А. П. Касьянов. – Фрунзе: Фрунз. политехн. ин-т, 1983. – 18 с.
4. *Короев, Ю.И.* Начертательная геометрия / Ю.И. Короев. – М.: Архитектура, 2007. – 424 с. – ISBN 5-9647-0017-9.
5. *Крылов, Н.Н.* Начертательная геометрия / Н.Н. Крылов, П.И. Лобандиевский, С.А. Мэн. – М.: Высш. шк, 1965. – 362 с.
6. *Лобачевский, Н.И.* Три сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных линий / Н.И. Лобачевский. – М.: Гостехиздат, 1956. – 415 с.
7. *Макарова, М.Н.* Перспектива: учеб. для вузов / М.Н. Макарова. – М.: Академия, 2006. – 480 с. – ISBN 5-8291-0133-5.
8. *Нартова, Л.Г.* Начертательная геометрия: учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – М.: Академия, 2005. – 288 с. – ISBN 5-7995-1918-5.
9. *Фролов, С.А.* Начертательная геометрия: учеб. втузов / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1978. – 250 с.
10. *Ozolins, M.* Perspektiva un eni teorija / M. Ozolins. – RIGA: ZVAIGZNE, 1979. – 189 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	6
Список принятых обозначений.....	8
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ.....	9
§ 1.1. Точка. Линия.....	9
§ 1.2. Поверхности.....	13
§ 1.3. Пространственные фигуры (тела).....	23
Глава 2. АППАРАТ ПРОЕЦИРОВАНИЯ.....	26
§ 2.1. Центральное проецирование	28
§ 2.2. Параллельное проецирование.....	34
§ 2.3. Криволинейное проецирование.....	38
Глава 3. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТИМЫХ ПРОЕКЦИЙ.....	37
§ 3.1. Проецирование по двум направлениям.....	37
§ 3.2. Проекция с числовыми отметками.....	38
§ 3.3. Проекция на две и три взаимно перпендикулярные плоскости (эпюр Монжа).....	39
§ 3.4. Аксонометрические проекции.....	42
§ 3.5. Центральные (перспективные) проекции.....	46
Глава 4. КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ.....	53
§ 4.1. Качественные характеристики ОГО в аксонометрии, на эпюре Монжа, в проекциях с числовыми отметками.....	53
§ 4.2. Перспективные (центральные) проекции.....	71
Приложение.....	79
Список рекомендуемой литературы.....	82

Учебное издание

ТРОИЦКАЯ Надежда Александровна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

В двух частях

Часть 1

Подписано в печать 20.12.10.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 200 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.