Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Р.С. КСЕНОФОНТОВ
А.Г. СОРОКИНА
О.В. КРАШЕНИННИКОВА

МАТЕМАТИКА. КОРРЕКТИРУЮЩИЙ КУРС ДЛЯ БАКАЛАВРОВ И СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖА

Учебное пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2011

УДК 51(07)
ББК 22.1
М34

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
И.Ф. Курбыко

Старший преподаватель математики колледжа
Владимирского государственного университета
И.С. Яппарова

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

М34 **Математика.** Корректирующий курс для бакалавров и студентов колледжа : учеб. пособие / Р. С. Ксенофонтов, А. Г. Сорокина, О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 58 с.
ISBN 978-5-9984-0160-2

Содержит справочный материал по основным разделам курса элементарной математики, задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для бакалавров инженерных специальностей первого курса и студентов колледжа всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 27. Табл. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 51(07)
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0160-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание предназначено для студентов первого курса технических специальностей ВлГУ, желающих повторить основные темы курса элементарной математики средней общеобразовательной школы, а также в помощь преподавателям, ведущим консультационные занятия со студентами.

Пособие состоит из девяти разделов по курсу элементарной математики и включает в себя сведения, необходимые для изучения высшей математики. В каждом разделе приведен необходимый теоретический материал, разбираются примеры решения задач и предложены задачи для самостоятельного решения.

Пособие может быть рекомендовано и школьникам старших классов для подготовки к выпускному экзамену.

1. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ДЕЙСТВИЯ С КОРНЯМИ

Свойства степеней с рациональным показателем

Если $a>0$, $n\in Q$, $m\in Q$, то:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

4) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$;

5) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$;

6) $a^0 = 1$;

7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;

8) если $r \in Q$, $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$ и $a^r > b^r$ при $r < 0$;

9) если $r,\ s \in Q$, $r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1$ и $a^r < a^s$ при $a < 1$.

Формулы сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$,

если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Модуль числа. Свойства модуля

Модуль действительного числа определяется соотношением

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

1) $|a| = \max(a;\ -a)$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $n \in N$;

4) $|a|^2 = a^2$;

5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \ne 0)$;

7) $|a+b| \le |a| + |b|$;

8) $|a| - |b| \le |a-b| \le |a| + |b|$;

9) $|a \cdot b| \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Определение и свойства арифметического корня

Арифметическим корнем k-й степени, где $k \in N$, $k \neq 1$, из действительного числа a, $a \geq 0$, называется действительное число b, k-я степень которого равна a. Корень k-й степени из числа a обозначается $\sqrt[k]{a}$.

Для нечетной степени $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $a \geq 0$.

Свойства

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $k \geq 2$ $(m,\ n,\ k \in N)$, тогда:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$;

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

6) $\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;

7) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}}$;

8) $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$;

9) $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Тождественные преобразования алгебраических выражений

Пример 1. Вычислите следующее выражение:

$$\frac{1}{7-\sqrt{39}} - \frac{1}{7+\sqrt{39}}.$$

Решение: $\dfrac{1}{7-\sqrt{39}} - \dfrac{1}{7+\sqrt{39}} = \dfrac{7+\sqrt{39}-7+\sqrt{39}}{\left(7-\sqrt{39}\right)\left(7+\sqrt{39}\right)} = \dfrac{2\sqrt{39}}{7^2-\left(\sqrt{39}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{39}}{10} = \dfrac{\sqrt{39}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{5}$.

<u>Пример 2</u>. Сократите дробь:

$$\frac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}.$$

Решение: $\frac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(3\sqrt[3]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}=$

$=\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}$.

Ответ: $\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}$.

<u>Пример 3</u>. Найдите значение выражения $a^{2/3}+4a^{0,5}+6a^{1/3}+4a^{1/6}+1$ при $a=729$.

Решение: $a=729=27^2=3^6$.

$a^{2/3}+4a^{0,5}+6a^{1/3}+4a^{1/6}+1=\left(3^6\right)^{2/3}+4\cdot\left(3^6\right)^{0,5}+6\cdot\left(3^6\right)^{1/3}+4\cdot\left(3^6\right)^{1/6}+1=$

$=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1=256$.

Ответ: 256.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Вычислить: $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+2\left(1-\sqrt{3}\right)$.

2. Вычислить: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}+\frac{1}{2\sqrt{5}-4}-\frac{2}{\sqrt{5}+3}$.

3. Упростить выражение $\frac{x}{3x-18}-\frac{2}{x^2-5x-6}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)$.

4. Упростить выражение $x-\frac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+xy}-1\right)^2}{x+y+1}$.

5. Сократить дробь $\frac{x^2+xy-6y^2}{x^2-xy-2y^2}$.

6. Упростить выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}-\frac{1}{\sqrt{a}+2}\right)\frac{a\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+4}$.

7. Дано: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$.

Упростить выражение $f\left(x^2\right)-f(x+2)$.

8. Упростить выражение до числа: $\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}\right)}{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2}$.

9. Вычислить: $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3}{16-4\sqrt{3}}}$.

10. Вычислить: $\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}+1\right)^2+2}\cdot\left(\sqrt{12}-\sqrt{2}\right)$.

11. Сократить дробь $\dfrac{x^2+xy-6y^2}{x^2-xy-2y^2}$.

12. Упростить выражение $\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}-2y}\cdot\left(x+y+2\sqrt{xy}\right)$.

13. Вычислить: $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+1}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-1}$.

14. Упростить выражение $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-18x-40}{x^2-x-6}+\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$.

15. Упростить выражение $\dfrac{9x-6\sqrt{x}+1}{3x+5\sqrt{x}-2}\Big/\dfrac{9x-1}{2+\sqrt{x}}$.

16. Дано: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$.

Упростить выражение $f(x+2)-f(x+8)$.

17. Упростить выражение до числа: $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{2y}\right)^2-\sqrt{2xy}}{\sqrt{xy}}$.

18. Найти значение выражения $\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}$, если

$$\sqrt{74-a^4}+\sqrt{10-a^4}=4.$$

19. Упростить выражение при $x\in[-1;\ 0]$:

$$\sqrt[4]{\left(1-2x+x^2\right)\left(x^2-1\right)(x-1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x+1}}{x^2+2x-3}.$$

20. Найти значение выражения $\left(\left(x^{0,5}+2\right)^2-4\left(x^{0,5}+2\right)+4\right)^2$ при $x=\sqrt{2006}$.

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМА ВИЕТА

<u>Квадратные уравнения</u>

1. $ax^2+bx+c=0$ - полное квадратное уравнение,

$$a\neq 0,\ D=b^2-4ac,$$

тогда $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

В случае четного b можно использовать формулу $x_{1,2}=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, где

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Если $D>0$, то уравнение имеет два разных корня x_1 и x_2.

Если $D=0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

2. Неполные квадратные уравнения:

а) $b=0$; $ax^2+c=0$; $x^2=-\dfrac{c}{a}$; $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, если a и c противоположны по знаку; если a и c одного знака, то уравнение не имеет действительных корней;

б) $a\neq 0$; $b\neq 0$; $c=0$ – при этих условиях уравнение принимает вид $ax^2+bx=0$; $x(ax+b)=0$; $x_1=0$, $x_2=-\dfrac{b}{a}$;

в) $a\neq 0$; $b=0$; $c=0$ – при этих условиях равнение имеет вид $ax^2=0$, следовательно, $x=0$.

3. Если $a=1$, то уравнение называется приведенным и имеет вид $x^2+px+q=0$. Случаи решения аналогичны случаям решения полного уравнения, а теорема Виета имеет вид: $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$

Теорема Безу

Если x_1 – корень некоторого многочлена, то этот многочлен делится на $x-x_1$.

Пример 1. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $(x-2)(x+3)^2+(2-x)(x+1)^2=98(x-2)$.

Решение: $(x-2)(x+3)^2+(2-x)(x+1)^2-98(x-2)=0$,

$$(x-2)(x+3)^2-(x-2)(x+1)^2-98(x-2)=0,$$

$$(x-2)\Big((x+3)^2-(x+1)^2-98\Big)=0,$$

$$x-2=0 \text{ или } (x+3)^2-(x+1)^2-98=0,$$

$$x_1=2 \qquad x^2+6x+9-x^2-2x-1-98=0,$$

$$4x-90=0,$$

$$x_2=22{,}5.$$

Среднее арифметическое корней равно $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2+22{,}5}{2}=12{,}25$.

Ответ: 12,25.

Пример 2. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2-4x-7=0$. Найдите $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2}$.

Решение: Дискриминант уравнения больше нуля, значит $x_1+x_2\neq 0$. Преобразуем искомое выражение $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)}{x_1+x_2}=x_1^2-x_1x_2+x_2^2=$ $=\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2$. По теореме Виета $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-3{,}5$. Следовательно, $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2}=2^2+3\cdot 3{,}5=14{,}5$.

Ответ: 14,5.

Пример 3. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 - 27x + 90 = 0$.

Решение. Подставляя в данное уравнение числа ± 1, ± 2, ± 3, …, (делители свободного члена), найдём первый корень уравнения $x_1 = 3$. По теореме Безу левая часть уравнения делится на $x - 3$. Процесс деления показан ниже:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3 - 4x^2 - 27x + 90 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2\qquad\qquad\quad} & x^2 - x - 30 \\
-\;-x^2 - 27x + 90 & \\
\underline{-x^2 + 3x\qquad\;} & \\
-\;-30x + 90 & \\
\underline{-30x + 90} & \\
0 &
\end{array}
.
$$

Приравниваем к нулю то, что получилось в результате деления: $x^2 - x - 30 = 0$ и находим остальные корни $x_2 = -5$, $x_3 = 6$.

Ответ: 3; –5; 6 .

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $3x^2 - x - 7 = 0$.

2. Найти произведение корней уравнения $x^3 - 3x^2 + 12 + \dfrac{5}{x-2} = 4x + \dfrac{5}{x-2}$.

3. Найти рациональные корни уравнения $\dfrac{2}{3x^2 + 5x} = 3x^2 + 5x + 1$.

4. Найти целые корни уравнения $\dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = 2$.

5. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - x - 4 = 0$. Найти $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

6. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 + 6x - 3 = 0$. Найти $\dfrac{1}{2 - x_1} - \dfrac{1}{x_2 - 2}$.

7. Найти все значения b, при которых корни уравнения $x^2 - 3x + 2b + 3 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 3x_2 = 23$.

8. Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $x^3 - 12x - 16 = 0$.

9. Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $x^3 - 19x - 30 = 0$.

10. Найти целую часть дроби $\dfrac{15k^2 - 11k + 29}{5k - 2}$.

11. Дробь $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{x - 1}$ может быть представлена в виде $ax^2 + bx + c + \dfrac{r}{x-1}$. Найти $a + b + c + r$.

12. Найти сумму целых чисел k, при которых дробь $\dfrac{6k^2 - 13k + 1}{2k - 5}$ также является целым числом.

13. Решить уравнение $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = x^2 - 5x - 5$.

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В простейших случаях при решении иррационального уравнения формально избавляемся от иррациональностей, сводя уравнение к рациональному. Появляющиеся при этом возможные «побочные» корни (они могут входить в область допустимых значений) отсеиваем с помощью проверки. Иногда решение упрощается при помощи разумно выбранной замены неизвестной.

Пример 1. Найдите наибольший корень уравнения $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+1} = \sqrt{3}$.

Решение. В области допустимых значений $x \geq -1$ являются равносильными следующие уравнения:

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+1} = \sqrt{3},$$
$$\sqrt{2x+5} = \sqrt{x+1} + \sqrt{3},$$
$$2x + 5 = x + 1 + 2\sqrt{3}\sqrt{x+1} + 3,$$
$$x + 1 = 2\sqrt{3}\sqrt{x+1},$$
$$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{3}) = 0;$$

в квадрат возводились положительные выражения. Отсюда или $x + 1 = 0$, $x_1 = -1$, или $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{3} = 0$, $x_2 = 11$. Оба значения являются корнями, так как входят в область допустимых значений, необходимо только выбрать из них наибольший.

Ответ: 11.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$.

Решение. Введём новую неизвестную $z=x^2+2x$. При новых обозначениях уравнение примет вид $\sqrt{3z+16}+\sqrt{z}=2\sqrt{z+4}$. Далее избавляемся от иррациональности:

$$3z+16+2\sqrt{3z^2+16z}+z=4z+16,$$

$$\sqrt{3z^2+16z}=0,$$

$$z=0,\qquad z=-\frac{16}{3}.$$

Для x получаем два уравнения: $x^2+2x=0$ и $x^2+2x=-\frac{16}{3}$. Второе уравнение корней не имеет, а первое даёт два корня: $x_1=0$, $x_2=-2$.

Проверка:

$x_1=0$, $\sqrt{16}+\sqrt{0}=2\sqrt{4}$ верно;

$x_2=-2$, $\sqrt{16}+\sqrt{0}=2\sqrt{4}$, верно.

Ответ: –2, 0.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}-2\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}=1$.

Решение. После замены $z=\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}>0$ уравнение примет вид $z-\frac{2}{z}=1$ или $z^2-z-2=0$, откуда $z=2$, второй корень $z=-1$ отбрасываем. Далее

$$\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}=2,$$

$$\frac{5-x}{x+3}=4,$$

$$x_1=-1,\qquad x_2=4,$$

причём оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: –1, 4.

<u>Пример 4.</u> Решите уравнение $\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{6-3x}=2-x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{(2-x)(x+1)}+\sqrt{3(2-x)}-(\sqrt{2-x})^2=0,$$

$$\sqrt{2-x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}-\sqrt{2-x})=0,$$

$$\begin{cases}\sqrt{2-x}=0,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3}-\sqrt{2-x}=0.\end{cases}$$

Первое уравнение дает $x_1=2$, второе $x_2=-1$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $-1,\ 2$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Решить уравнения: $\sqrt{2x^2+4x+3}=x^2+2x$.

$$\sqrt{2x^2+5x+1}=5-2x^2-5x.$$

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{7x+6}.$$

$$\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$$

$$\sqrt{x^2-2x-4}+\sqrt{x^2-2x+1}=5.$$

$$\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}=\frac{x}{2}.$$

$$\sqrt{8-x}-\sqrt{x+2}=\frac{3-x}{2}.$$

$$\sqrt{5x+3-2x^2}=(3x+1)\cdot\sqrt{3-x}.$$

$$\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=x+3.$$

$$\frac{1}{\sqrt{5+x}}-\frac{1}{\sqrt{5-x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}+2x\cdot\sqrt{x+2}=0.$$

2. Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.

4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Модуль (абсолютная величина) действительного числа x определяется соотношением

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \ge 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Модуль числа обладает следующими свойствами:

1) $|x| \ge 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $|-x| = |x|$;

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

4) $|x|^2 = x^2$;

5) $\sqrt{x^2} = |x|$;

6) при $a > 0$ неравенство $|x| \le a$ эквивалентно системе $-a \le x \le a$, а неравенство $|x| \ge a$ эквивалентно совокупности решений $x \ge a$ или $x \le -a$.

При решении соотношений с модулем следует избавиться от модулей, пользуясь определением.

<u>Пример 1.</u> Найдите корень уравнения $|x+4| + |2x-5| = 4-4x$, принадлежащий промежутку $[-3,\ 2]$.

Решение. Рассмотрим две линейные функции $f(x) = x+4$ и $g(x) = 2x-5$. Так как $f(-3) = 1 > 0;\ f(2) = 6 > 0,$ то $f(x) > 0$ на всем промежутке $[-3,\ 2]$, поэтому $|f(x)| = |x+4| = x+4.$

Так как $g(-3) = -11 < 0, g(2) = -1 < 0$, то $g(x) < 0$ при всех $x \in [-3,\ 2]$ поэтому $|g(x)| = |2x-5| = -2x+5.$ Значит, на промежутке $[-3,\ 2]$ заданное уравнение эквивалентно следующему $x+4-2x+5 = 4-4x$ или $3x = -5$, откуда получаем $x = -\dfrac{5}{3} \in [-3, 2]$.

Ответ: $-\dfrac{5}{3}$.

<u>Пример 2.</u> Найдите корень уравнения $\big|6 - |3x-5|\big| = 4,$ принадлежащий промежутку $\left[-3,\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

Решение. Рассмотрим линейную функцию $f(x)=3x-5$ под знаком внутреннего модуля. Проверим знаки этой функции на концах промежутка: $f(-3)=-14<0$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-7<0$; значит при всех $x\in\left[-3,\ -\frac{2}{3}\right)$ $f(x)<0$, поэтому $|f(x)|=|3x-5|=-3x+5$; уравнение сводится к следующему:

$$|6-(-3x+5)|=4 \text{ или } |3x+1|=4.$$

Используя второе свойство модуля, имеем $3x+1=4$ или $3x+1=-4$, т.е. $x=1$ или $x=-\frac{5}{3}.$ Из этих двух решений только второе принадлежит промежутку $\left[-3,\ -\frac{2}{3}\right).$

Ответ: $-\frac{5}{3}.$

<u>Пример 3.</u> Найдите длину промежутка, на котором выполнено неравенство $|11x+27|<|4x+18|$.

Решение. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$(11x+27)^2<(4x+18)^2.$$

Перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(11x+27-4x-18)(11x+27+4x+18)<0,$$
$$(7x+9)(15x+45)<0.$$

Корнями левой части являются числа $-\frac{9}{7}$ и -3, следовательно, неравенство выполнено на промежутке $\left(-3,\ -\frac{9}{7}\right)$, длина которого равна $-\frac{9}{7}-(-3)=\frac{12}{7}$.

Ответ: $\frac{12}{7}.$

<u>Пример 4.</u> Найдите наибольшее целое решение неравенства $|x-6|<\frac{25}{x+4}.$

Решение. Решим это неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию $f(x)=|x-6|-\dfrac{25}{x+4}$. Мы должны найти те значения x, при которых $f(x)<0$.

Найдем ОДЗ: $x+4\neq 0$ или $x\neq -4$, или $x\in(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ +\infty)$.

Найдем корни (нули) функции. Для этого решим уравнение

$$|x-6|-\frac{25}{x+4}=0\Leftrightarrow |x-6|=\frac{25}{x+4},$$

т.к. левая часть уравнения ≥ 0, то корни уравнения должны удовлетворять условию $\dfrac{25}{x+4}\geq 0\Leftrightarrow x+4>0\Leftrightarrow x>-4$.

1 случай: $x-6=\dfrac{25}{x+4}\Leftrightarrow x^2-6x+4x-24=25\Leftrightarrow x^2-2x-49=0,$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+49}=1\pm 5\sqrt{2}.$$

Из этих двух корней выбираем $x=1+5\sqrt{2}$, так как $1-\ 5\sqrt{2}<-4$.

2 случай: $x-6=-\dfrac{25}{x+4}\Leftrightarrow x^2-6x+4x-24+25=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$.

Это уравнение имеет один корень $x=1>-4$.

Так как неравенство строгое, то найденные корни не входят в его решение, поэтому на схеме их отмечаем выколотыми точками (рис. 1).

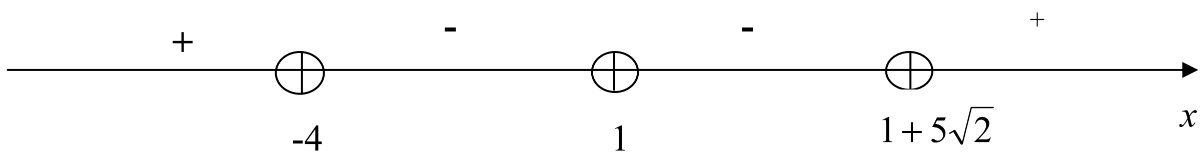


Рис. 1

Проверим знаки функции $f(x)$ на полученных промежутках:

$f(10)=4-\dfrac{25}{14}>0,$

$f(2)=4-\dfrac{25}{4}<0,$

$f(-1)=7-\dfrac{25}{3}<0,$

$f(-5)=11-\dfrac{25}{-1}>0.$

Ответ: 8.

Таким образом, все решения неравенства $x \in (-4,1) \cup \left(1, 1+5\sqrt{2}\right)$; наибольшим целым из них является $x = 8$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти корень уравнения $|x-1| + |2x+3| = 2x+14$, принадлежащий промежутку $[-5,\ -2]$.

2. Найти корень уравнения $|3x+1| - |x-5| = 7x+2$, принадлежащий промежутку $\left[-7,\ -\frac{1}{2}\right]$.

3. Найти корень уравнения $\left||2x-7| - 11\right| = 5$, принадлежащий промежутку $(-5, 0)$.

4. Найти наименьшие корни уравнений: $|2x+7| + |x-2| = 2x+8$; $\left|x^2+2x-4\right| + 2x+6 = 0$; $1 + x + \left|x^2 - x - 3\right| = 0$.

5. Найти наибольший корень уравнения $|3x+5| + |x-6| = 3x+9$.

6. Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $|11x+29| < |5x+19|$.

7. Найти наибольшие целые решения неравенств: $|x+1| < \frac{25}{x+11}$; $\frac{2}{|x+3|} < \frac{1}{2x-1}$.

8. Найти наименьшие целые решения неравенств: $|x+3| \le \frac{22}{5-x}$; $\frac{7}{2-x} \ge |x+2|$; $\frac{|x+1|+3}{x} \le x+4$.

9. Найти наименьшие натуральные решения неравенств: $|x-7| \le \frac{9}{x-1}$; $x-1 > \frac{12}{|x-2|}$; $\frac{|x-3|+3}{x} \ge 4-x$; $|x-1| \ge \frac{4}{x+3}$; $\frac{2}{3-2x} < \frac{3}{|x+5|}$.

10. Найти наименьшее натуральное решение неравенства $\frac{9}{x-8} \ge |x-2|$.

5. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Последовательность чисел называется *арифметической прогрессией*, если каждое последующее число отличается от предыдущего на одну и ту же величину, называемую *разностью прогрессии*. Таким образом, арифметическая прогрессия однозначно задается тремя величинами: первым членом a_1, разностью d и количеством членов прогрессии n. Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, убывает, если $d < 0$, и члены прогрессии постоянны, если $d = 0$.

Необходимо помнить соотношения

$$a_{л} = a_1 + (k-1)d, \qquad S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n = \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)n,$$

где a_k - k-й член прогрессии; S_n - сумма всех членов прогрессии, начиная с a_1 и заканчивая a_n.

Последовательность чисел называется *геометрической прогрессией*, если каждое последующее значение может быть получено из предыдущего умножением на одну и ту же величину, называемую *знаменателем прогрессии*. Таким образом, геометрическая прогрессия однозначно задается тремя величинами: первым членом b_1, знаменателем q и количеством членов прогрессии n.

Геометрическая прогрессия – возрастающая, если $b_1 > 0$, $q > 0$ или $b_1 < 0$, $0 < q < 1$; убывающая, если $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ или $b_1 < 0$, $q > 1$.

Для геометрической прогрессии справедливы соотношения

$$b_k = b_1 q^{k-1}, \qquad S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{при } q \neq 1, \\ nb_1 & \text{при } q = 1. \end{cases}$$

Пример 1. Сумма второго и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма третьего и шестого – 3. Найдите пятый член прогрессии.

Решение. По условию

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 12, \\ a_3 + a_6 = 3. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 12, \\ a_1 + 2d + a_1 + 5d = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 6, \\ 2a_1 + 7d = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -3. \end{cases}$$

Следовательно, $a_5 = a_1 + 4d = 0.$

Ответ: 0.

<u>Пример 2.</u> Разность арифметической прогрессии равна 1, а сумма первых четырех ее членов – 4. Найдите третий член прогрессии.

Решение. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} d = 1, \\ 2(2a_1 + 3d) = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1, \\ a_1 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $a_3 = a_1 + 2d\ \dfrac{3}{2}.$

Ответ: $\dfrac{3}{2}.$

<u>Пример 3.</u> Сумма первых n членов арифметической прогрессии заданa формулой $S_n = \dfrac{n - 2n^2}{2}$. Найдите a_4.

Решение: $a_4 = S_4 - S_3 = \dfrac{4 - 2 \cdot 4^2}{2} - \dfrac{3 - 2 \cdot 3^2}{2} = -\dfrac{13}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{13}{2}.$

<u>Пример 4.</u> Найдите сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, пятого и десятого членов равна 18.

Решение:

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 9d) = 18,$$

$$a_1 + 5d = 6,$$

$$S_{11} = 11\,(a_1 + 5d) = 66.$$

Ответ: 66.

Пример 5. Найдите знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если произведение ее первого и четвертого членов равно 108, а разность между третьим и вторым членами равна –3.

Решение:

$$\begin{cases} b_1 b_4 = 108, \\ b_3 - b_2 = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2 q^3 = 108, \\ b_1 q^2 - b_1 q = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{3}{q - q^2}, \\ \left(\dfrac{3}{q - q^2}\right)^2 q^3 = 108. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получим

$$\frac{9q}{(1-q)^2} = 108,$$

$$q = 12 - 24q + 12q^2,$$

$$q_1 = \frac{3}{4}, \qquad q_2 = \frac{4}{3}.$$

Подставляя найденные значения, получим $b_1 = \frac{3}{4}$, $b_2 = -\frac{27}{4}$. И первая $\{b_1,\ q_1\}$, и вторая $\{b_2, q_2\}$ пары отвечают условию убывания геометрической прогрессии.

Ответ: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$.

Пример 6. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 5, а сумма последних – 20. Найдите первый член прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q \ = 5, \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 20. \end{cases}$$

Разделив вторую строку на первую, получим $q^2 = 4$, $q = \pm 2$. Так как по условию прогрессия возрастает, $q = 2$. Из первого уравнения системы получим $b_1 = \frac{5}{1+q} = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 7. Найдите первый член убывающей геометрической прогрессии, если произведение ее первых трех членов равно 8, а их сумма равна $19/3$.

Решение:

$$\begin{cases} b_1^3 q^3 = 8, \\ b_1 + b_1 q \quad + b_1 q^3 = \frac{19}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \frac{19}{b_1}, \\ b_1 + 2 + \frac{4}{b_1} = \frac{19}{3}. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдём $b_1 = 3$ или $\frac{4}{3}$. С учётом возрастания последовательности оставляем первый вариант.

Ответ: 3.

Пример 8. Сумма первых n членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$. Найдите b_3.

Решение:

$$b_3 = S_3 - S_2 = \frac{3^3 + (-1)^4}{3^2} - \frac{3^2 + (-1)^3}{3} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Арифметическая прогрессия содержит 10 членов. Сумма членов, стоящих на чётных местах, равна 50, а сумма членов, стоящих на нечётных местах, – 35. Найти первый член прогрессии.

2. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма второго и седьмого – 3. Найти шестой член прогрессии.

3. Разность арифметической прогрессии равна 2, а сумма первых шести её членов – 15. Найти второй член прогрессии.

4. Найти первый член арифметической прогрессии, если сумма первых четырёх членов равна 15, а сумма второго, третьего, четвёртого и пятого членов – 25.

5. Третий член арифметической прогрессии в четыре раза больше первого, а пятый член прогрессии равен 14. Найти второй член прогрессии.

6. Сумма первых n членов арифметической прогрессии задана формулой $S_n = 5n - n^2$. Найти a_4.

7. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 2, а сумма последних двух – 18. Найти первый член прогрессии.

8. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 4, а сумма последних двух – 16. Найти первый член прогрессии.

9. Сумма первых n членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3 \cdot 2^{n+1}}$. Найти b_3.

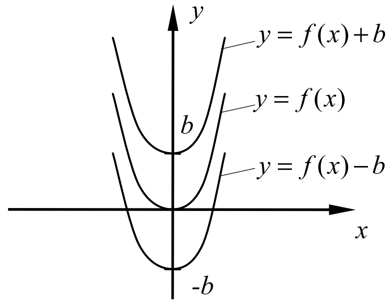
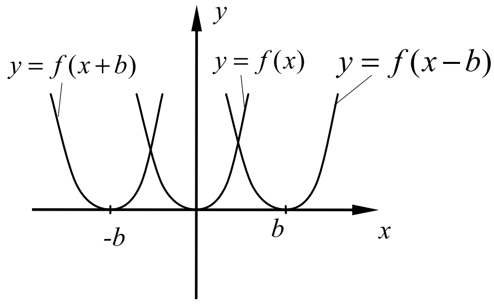
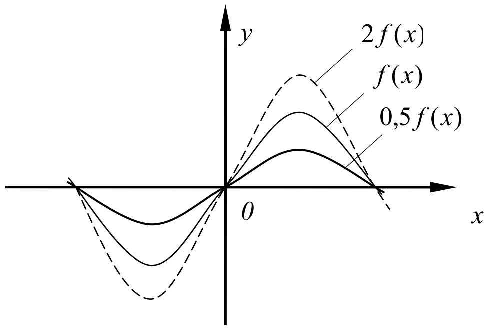
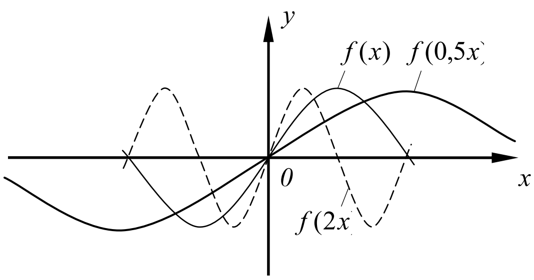
10. Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если произведение её шестого и девятого членов равно 160, а сумма седьмого и восьмого – 28.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ. ЛИНЕЙНАЯ, КВАДРАТИЧНАЯ, СТЕПЕННАЯ, ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИИ

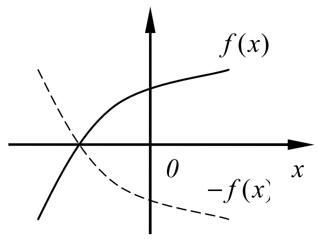
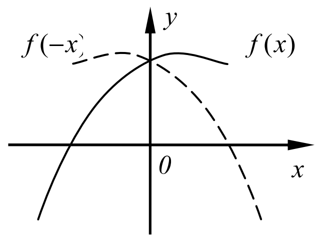
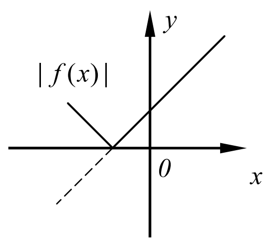
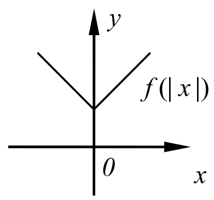
Геометрические преобразования графиков функций

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости можно построить графики более сложных функций (табл. 1).

Таблица 1

График функции $y = f(x)$	Способ получения графика функции	Построение
1. $y = f(x) + b$	Параллельный перенос в положительном направлении оси Oy на b единиц при $b > 0$ и в отрицательном направлении этой оси на $\lvert b \rvert$ при $b < 0$	
2. $y = f(x + b)$	Параллельный перенос в положительном направлении оси Ox на $\lvert b \rvert$ при $b < 0$ и в отрицательном направлении этой оси на b единиц при $b > 0$	
3. $y = k \cdot f(x)$	Растяжение вдоль оси Oy в k раз при $k > 1$ и сжатие вдоль этой оси в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$	
4. $y = f(kx)$	Сжатие вдоль оси Ox в k раз при $k > 1$ и растяжение вдоль этой оси в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$	

Окончание табл. 1

График функции $y = f(x)$	Способ получения графика функции	Построение
5. $y = -f(x)$	Симметричное отображение относительно оси Ox	
6. $y = f(-x)$	Симметричное отображение относительно оси Oy	
7. $y = \|f(x)\|$	Симметричное отображение относительно оси Ox части графика, лежащей ниже оси Ox, и сохранение части графика, лежащей выше оси Ox	
8. $y = f(\|x\|)$	Симметричное отображение относительно оси Oy части графика, лежащей в правой полуплоскости, и сохранение части графика при $x \geq 0$	

Линейная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и $b -$ некоторые числа, называется линейной. Областью определения линейной функции служит множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая, для построения которой достаточно двух точек, например $(0;\ b)$ и $\left(-\dfrac{b}{k};\ 0\right)$, если $k \neq 0$.

Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = kx$ с положительным направлением оси Ox, поэтому k называется угловым коэффициентом. Если $k > 0$, то угол острый, если $k < 0$, то угол тупой, если $k = 0$, то прямая совпадает с осью Ox.

График функции $y = kx + b$ может быть получен с помощью параллельного переноса графика функции $y = kx$ вдоль оси Oy.

Квадратичная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c - некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной. Областью определения квадратичной функции служит множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Координаты вершины параболы определяются по формулам

$$x_в = -\frac{b}{2a}, \quad y_в = y(x_в) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду $y = a(x - x_в)^2 + y_в$ путем выделения полного квадрата:

$$y = ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

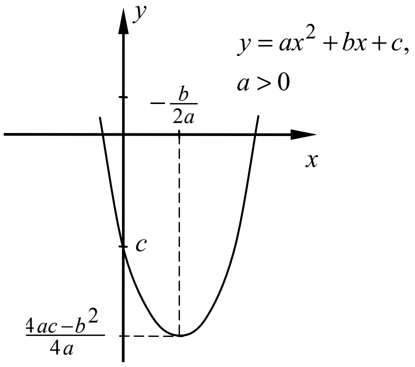


Рис. 2

График квадратичной функции $y = a(x - x_в)^2 + y_в$ получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса (рис. 2).

<u>Степенная функция и ее график</u>

Функция вида $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ называется степенной. Рассмотрим несколько случаев степенной функции (рис. 3 – 8).

1. $y = x^n$, $n \in N$:

$n = 2k$ – четное

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = [0;\ +\infty)$;
3) $y = x^{2k}$ – четная;
4) убывает на $(-\infty;\ 0)$,
 возрастает на $(0;\ +\infty)$;
5) $\min y(x) = y(0) = 0$;
6) непрерывна.

$n = 2k + 1$ – нечетное

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = R$
3) $y = x^{2k+1}$ – нечетная;
4) возрастает на R;
5) точек экстремума нет;
6) непрерывна.

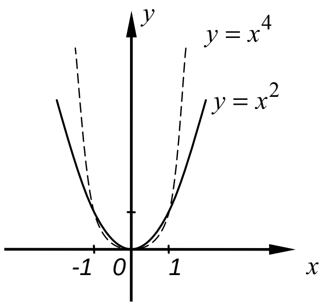


Рис. 3

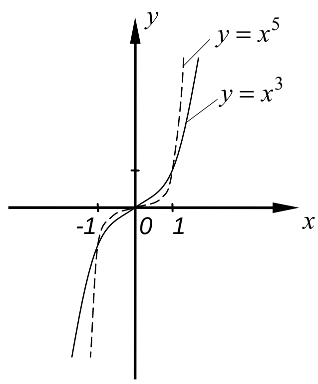


Рис. 4

2. $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in N$:

$n = 2k$ – четное

1) $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;
2) $E(y) = (0;\ +\infty)$;
3) четная;

$n = 2k + 1$ – нечетное

1) $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;
2) $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;
3) нечетная;

4) возрастает на $(-\infty;\ 0)$,
убывает на $(0;\ +\infty)$;
5) разрыв на в т. $x=0$.

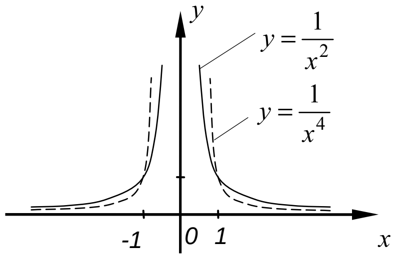


Рис. 5

4) убывает на R;
5) разрыв на в т. $x=0$.

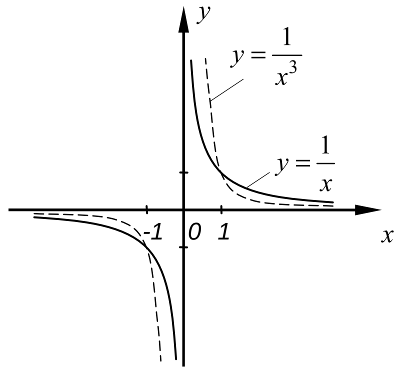


Рис. 6

3. $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$, $n>1$:

$n=2k$ – четное
1) $D(y)=[0;\ +\infty)$;
2) $E(y)=[0;\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $D(y)$;
5) непрерывна.

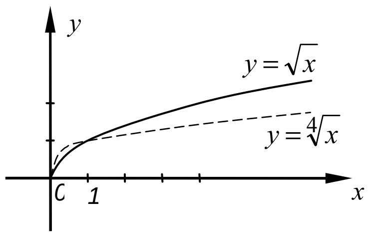


Рис. 7

$n=2k+1$ – нечетное
1) $D(y)=R$;
2) $E(y)=R$;
3) нечетная;
4) возрастает на R;
5) непрерывна.

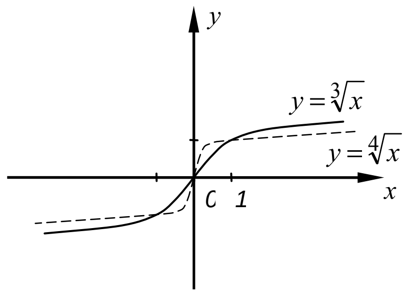


Рис. 8

<u>Дробно-линейная функция и ее график</u>

Функция вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a,b,c,d\in R$, причем $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$, называется дробно-линейной. Функция определена всюду, кроме $x=-\dfrac{d}{c}$.

Для построения графика преобразуем правую часть равенства, выделив целую часть:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Полагая $k=\frac{bc-ad}{c^2}$, $m=\frac{d}{c}$, $n=\frac{a}{c}$, получаем, что дробно-линейную функцию всегда можно привести к виду $y=n+\frac{k}{x+m}$. График функции $y=n+\frac{k}{x+m}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{k}{x}$ параллельным переносом на $|m|$ единиц вдоль оси Ox и на $|n|$ единиц вдоль оси Oy. В каком направлении выполняется сдвиг, зависит от знаков m и n. При этом сдвиге асимптоты гиперболы $y=\frac{k}{x}$ (координатные оси) перейдут в прямые $y=n$ $\left(y=\frac{a}{c}\right)$, $x=-m$ $\left(x=-\frac{d}{c}\right)$. Эти прямые будут асимптотами дробно-линейной функции. Итак, график дробно-линейной функции есть гипербола.

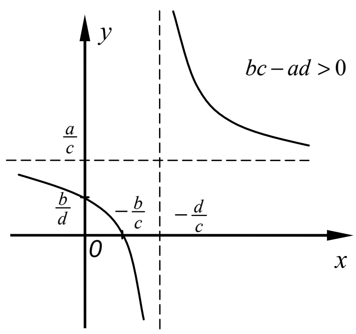


Рис. 9

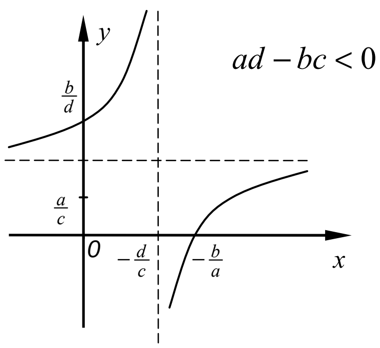


Рис. 10

<u>Пример 1.</u> Постройте график функции $y=3|x+2|-1$.

Решение. Для построения графика данной функции используем определение модуля:

$$y=\begin{cases}-3(x+2)-1, & x+2\le 0,\\ 3(x+2)-1, & x+2>0,\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}-3x-6, & x\le -2,\\ 3x+5, & x>-2.\end{cases}$$

Строим график функции $y=-3x-6$ при $x\le -2$ и $y=3x+5$ при $x>-2$ (рис. 11).

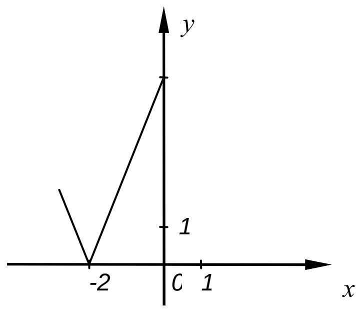


Рис. 11

<u>Пример 2.</u> Выделите из квадратного трехчлена полный квадрат: а) x^2-3x-3; б) $-3x^2+4x-2$.

Решение: а) $x^2-3x-3=$

$$=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4};$$

$$\text{б)}-3x^2+4x-2=-3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-2=-3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)-2=$$

$$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}-2=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}.$$

<u>Пример 3.</u> Постройте график функции: а) $y=x^2-3x-3$; б) $y=x|x|-2x$.

Решение:

а) в предыдущем примере был выделен полный квадрат из квадратного трехчлена $y=x^2-3x-3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-5,25$. Следовательно, $(1,5;\ -5,25)-$ вершина параболы. Точка пересечения параболы с осью Oy есть $(0;\ -3)$. Ветви параболы направлены вверх (рис. 12).

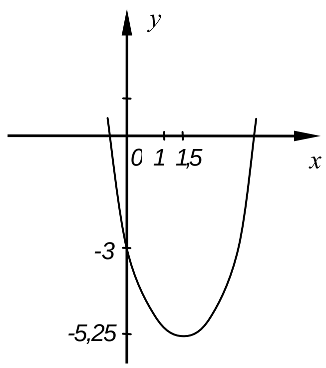


Рис. 12

б) воспользуемся определением модуля:

$$y=x|x|-2x=\begin{cases}-x^2-2x, & x\le 0,\\ x^2-2x, & x>0.\end{cases}$$

Построим график функции $y=-x^2-2x$ при $x\le 0$. Вершина параболы $(-1;\ 1)$, ветви вниз, точки пересечения с осью Ox: $(-2;\ 0)$ и $(0;\ 0)$. Построим график функции $y=x^2-2x$ при $x>0$. Вершина параболы $(1;\ -1)$, ветви вверх, точки пересечения с осью Ox: $(2;\ 0)$ и $(0;\ 0)$ (рис. 13).

Пример 4. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{4x+1}{2x-3}$; б) $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$.

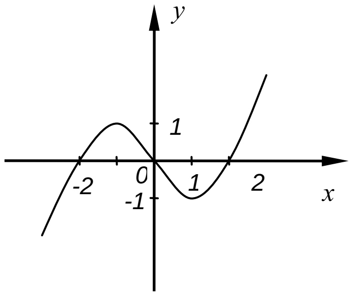


Рис. 13

Решение:

а) выделим целую часть:

$$y=\frac{4x+1}{2x-3}=\frac{4x+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{4\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)+7}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=2+\frac{3,5}{x-1,5}.$$

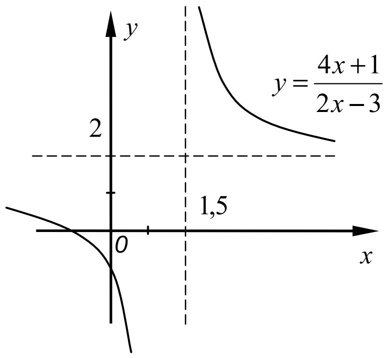


Рис. 14

Отсюда следует, что прямые $x=1,5$ и $y=2$ асимптоты этой гиперболы. Найдем точки ее пересечения с осями координат (рис. 14).

При $x=0$ $y=-\dfrac{1}{3}$, при $y=0$ $x=-\dfrac{1}{4}$.

б) выделим целую часть:

$$y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|=\left|\frac{2(x-2+2)-3}{x-2}\right|=$$

$$=\left|\frac{2(x-2)+1}{x-2}\right|=\left|2+\frac{1}{x-2}\right|.$$

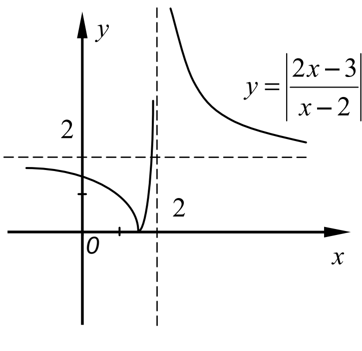


Рис. 15

Сначала строим график функции $y=\dfrac{1}{x}$, затем перемещаем его на 2 единицы вправо и на 2 единицы вверх. После этого часть графика, лежащую в нижней полуплоскости, отображаем в верхнюю полуплоскость (рис. 15).

Задачи для самостоятельного решения

1. Выделите из квадратного трехчлена полный квадрат: а) x^2-6x+8; б) $4x^2-6x+8$; в) $-2x^2+4x-12$; г) x^2+x.

2. Постройте график функции: а) $y=x^2-6x+8$; б) $y=x^2-2x$.

3. Постройте график функции: а) $y=4x^2-6x+8$; б) $y=-2x^2+4x-12$.

4. Постройте график функции: а) $y=2x|x|-3x+4$; б) $y=2x^2-3|x|+4$.

5. Постройте график функции: а) $y=\dfrac{2x-5}{x-4}$; б) $y=\dfrac{2x-3}{4x+1}$.

6. Постройте график функции: $y=\dfrac{1}{|x-2|}$.

7. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y=\dfrac{x-5}{|x-5|}$ и $y=(x+a)^2$ имеют одну общую точку.

7. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. *Определения тригонометрических функций*

Пусть из начала координат исходит вектор единичной длины (радиус-вектор), наклонённый к положительному направлению оси Ox под углом α.

$\sin\alpha$ – это проекция радиус-вектора на ось Oy.

$\cos\alpha$ – это проекция радиус-вектора на ось Ox.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

2. *Области определения и области значений*:

$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены при всех $\alpha\in(-\infty;+\infty)$;

$\operatorname{tg}\alpha$ не определён в точках $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён в точках πn (здесь и в дальнейшем $n\in\boldsymbol{Z}$, т.е. $n = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots$); $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают все значения только из отрезка $-1;\ 1]$. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ принимают любые значения из числовой оси $(-\infty\ ;+\infty)$.

3. *Знаки тригонометрических функций.*

$\sin\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или II четвертям; $\sin\alpha < 0$ при $\alpha\in$ III или IV четвертям.
$\cos\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или IV четвертям; $\cos\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или III четвертям.
$\operatorname{tg}\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или III четвертям; $\operatorname{tg}\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или IV четвертям.
$\operatorname{ctg}\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или III четвертям; $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или IV четвертям.

4. *Чётность и нечётность*

$\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ – нечётные функции:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$\cos\alpha$ – чётная функция: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

5. *Периодичность*

$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют период 2π: $\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2\pi)$; $\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi)$;
$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют период π: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi)$; $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi)$.

6. *Стандартные значения тригонометрических функций (табл. 2).*

Таблица 2

Угол	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не существует	0
ctg	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует

7. *Формулы приведения:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha;\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha;\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha;\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha;\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha\ .$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha\ .$$

8. *Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:*

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

9. *Формулы сложения:*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha;\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\,.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

10. *Формулы двойного аргумента:*

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\quad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

11. *Формулы половинного аргумента:*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

12. *Формулы, выражающие основные тригонометрические функции через* $tg\frac{\alpha}{2}$*:*

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

13. *Формулы преобразования произведения в сумму:*

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

14. *Формулы преобразования суммы функций в произведение:*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

15. *Определения обратных тригонометрических функций:*

а) пусть $|a|\le 1$, тогда $\arcsin a$ – это число или угол, $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу a;

б) пусть $|a|\le 1$, тогда $\arccos a$ – это число или угол, $\in[0;\ \pi]$, косинус которого равен числу a;

в) пусть a – любое число, тогда $\operatorname{arctg} a$ – это число или угол, $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу a;

г) пусть a – любое число, тогда $\operatorname{arcctg} a$ – это число или угол, $\in(0;\ \pi)$, котангенс которого равен числу a.

Замечание. Если $a>0$, то все углы $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ находятся в первой четверти.

16. *Основные формулы с обратными тригонометрическими функциями:*

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a;\quad \operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a;$$

$$\arccos(-a)=\pi-\arccos a;\quad \operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a;\quad \operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} a;$$

$$\sin(\arcsin a)=\cos(\arccos a)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a;$$

$$\sin(\arccos a)=\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)=\frac{1}{a};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} a)=\cos(\operatorname{arcctg} a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; \quad \sin(\operatorname{arcctg} a)=\cos(\operatorname{arctg} a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin a)=\operatorname{ctg}(\arccos a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \quad \operatorname{tg}(\arccos a)=\operatorname{ctg}(\arcsin a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

17. *Стандартные значения обратных тригонометрических функций:*

$\arcsin 0=0$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$;

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$;

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$; $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$;

$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$;

$\arccos 0=\frac{\pi}{2}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$;

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$;

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$; $\arccos(-1)=\pi$;

$\arccos 1=0$;

$\operatorname{arctg} 0=0$;

$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$;

$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$;

$\operatorname{arcctg} 0=\frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

$\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$;

$\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$

<u>Пример 1.</u> Вычислите $A=\dfrac{\cos 76^\circ-\cos 16^\circ}{1-2\sin^2 22^\circ}$.

Решение. Числитель разложим в произведение (одна из формул п. 14), а к знаменателю применим формулу понижения степени (п. 11). Получим

$$A=\frac{2\sin 46^\circ \sin(-30^\circ)}{1-2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 44^\circ\right)}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos 44^\circ}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos(90^\circ-46^\circ)}=\{\textit{пункт } 7\}=\frac{-\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ}=-1.$$

Ответ: -1 .

<u>Пример 2.</u> Дано: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3$. Найдите $A=\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$. Используя формулы п. 12, найдём

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=0{,}6;\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=0{,}8.$$

Следовательно, $A=\frac{2\cdot 0{,}6+0{,}8}{0{,}6-2\cdot 0{,}8}=-2$.

Ответ: -2 .

<u>Пример 3.</u> Упростите выражение $A=\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$.

Решение. Приведём к общему знаменателю, суммы и разности разложим в произведения по формулам п. 14, затем сократим дроби

$$A=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\frac{1}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}=\frac{2}{\sin 6\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sin 6\alpha}$.

<u>Пример 4.</u> Упростите выражение $A=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)(\cos 8\alpha-1)}{\sin 4\alpha\cdot(\cos 4\alpha+1)}$.

Решение: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

$\cos 8\alpha - 1 = -(1-\cos 8\alpha) = -2\sin^2 4\alpha$; $\cos 4\alpha + 1 = 2\cos^2 2\alpha$. Следовательно,

$$A = \frac{\dfrac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\left(-2\sin^2 4\alpha\right)}{\sin 4\alpha\cdot 2\cos^2 2\alpha} = \frac{4\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{4\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 4.$$

Ответ: 4.

<u>Пример 5.</u> Вычислите $A = \arccos\left(\operatorname{tg}(-315°)\right)$.

Решение. В силу периодичности тангенса
$\operatorname{tg}(-315°) = \operatorname{tg}(-315° + 360°) = \operatorname{tg} 45° = 1$. Следовательно, $A = \arccos 1 = 0$.

Ответ: 0.

<u>Пример 6.</u> Вычислите $A = \sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right)$.

Решение. В формулу (из п. 16) $\sin(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ подставим $a = -\dfrac{5}{6}$. Получим $A = \dfrac{6}{\sqrt{61}} = \dfrac{6\cdot\sqrt{61}}{61}$.

Ответ: $\dfrac{6\cdot\sqrt{61}}{61}$.

<u>Пример 7.</u> Вычислите в градусах угол $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}} - \arccos\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ и $\beta = \arccos\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. Требуется вычислить $\alpha - \beta$. Согласно замечанию к п. 15, α и $\beta \in$ I-й четверти, т.е. $0 < \alpha < 90°$ и $0 < \beta < 90°$. Следовательно, $-90° < \alpha - \beta < 90°$. По формуле сложения (п. 9) и по формулам п. 15 имеем:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos\left(\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \sin\left(\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Итак, $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $-90° < \alpha - \beta < 90°$, то $\alpha - \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$.

Ответ: $30°$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Найти $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\dfrac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha} = \dfrac{11}{27}$.

2. Найти значение выражения $\dfrac{3\sin\alpha + 6\cos\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

3. Упростить выражения:

$$\left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right);$$

$$\frac{\sin 2\alpha\left(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha\right)}{(1 + \mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha)\cdot\cos 2\alpha};$$

$$\frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha};$$

$$\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\sin 6\alpha}\right)\cdot\frac{\cos 7\alpha - \cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha};$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{(\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha)\cdot\sin^2 2\alpha};$$

$$\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^4\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin(\alpha - \beta)\cdot\sin(\alpha + \beta)}.$$

4. Вычислить без таблиц $\sin 10°\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$.

5. Вычислить:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right);$$

$$4\sin 36^\circ\cdot\cos 6^\circ + 4\sin^2 24° - 4;$$

$$\arccos(\sin 600°);$$

$$\mathrm{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right);$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}675^\circ).$$

6. Вычислить в градусах углы: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}};$

$$\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}-\arccos\sqrt{\frac{3}{28}};$$

$$\operatorname{arctg}5\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

7. Доказать тождество $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x.$

8. ДЕЙСТВИЯ С ЛОГАРИФМАМИ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Свойства логарифмов

$\log_a b$ – это показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}=b$.

Выражение $\log_a b$ определено, если $\begin{cases} b>0, \\ a>0, \\ a\neq 1. \end{cases}$

При $x>0$, $y>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ справедливы следующие формулы:

$$x^{\log_a y}=y^{\log_a x};$$

$$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy);\quad \log_a x-\log_a y=\log_a\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\log_a\left(x^n\right)=n\cdot\log_a x;\quad \log_{a^k}(x)=\frac{1}{k}\cdot\log_a x;\quad \log_{a^k}\left(x^n\right)=\frac{n}{k}\cdot\log_a x;$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a};\quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\quad (\text{при } c>0,\ c\neq 1);\quad \log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\ln b}{\ln a}.$$

Основные значения логарифмов: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a\left(a^n\right) = n$.

Замечание. Если из условий задачи не вытекает, что $x > 0$, то **при чётных значениях** n используют формулы $\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a |x|$; $\log_{x^n}(a) = \frac{1}{n} \cdot \log_{|x|}(a)$.

Показательная функция, ее свойства и график

Функция, заданная формулой $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется показательной. Функция $y = a^x$ (рис. 16 – 17) обладает следующими свойствами:

а) при $a > 1$:

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = (0;\ +\infty)$;
3) возрастает на R;
4) $y(0) = 1$;
5) если $x > 0$, то $a^x > 1$,
   если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

б) при $0 < a < 1$:

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = (0;\ +\infty)$;
3) убывает на R;
4) $y(0) = 1$;
5) если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$,
   если $x < 0$, то $a^x > 1$.

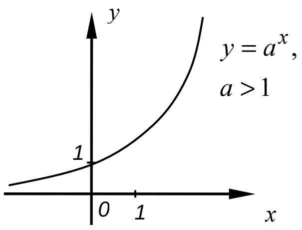


Рис. 16

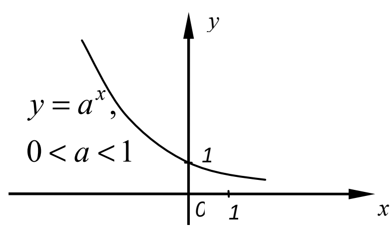


Рис. 17

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Функция, заданная формулой $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется логарифмической. Функция $y = \log_a x$ (рис. 18 – 19) обладает следующими свойствами:

а) при $a > 1$:

1) $D(y) = (0;\ +\infty)$;
2) $E(y) = R$;
3) возрастает на R;
4) $y(1) = 0$;

б) при $0 < a < 1$:

1) $D(y) = (0;\ +\infty)$;
2) $E(y) = R$;
3) убывает на R;
4) $y(1) = 0$;

5) если $x > 1$, то $\log_a x > 0$,
если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$.

5) если $x > 1$, то $\log_a x < 0$,
если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$.

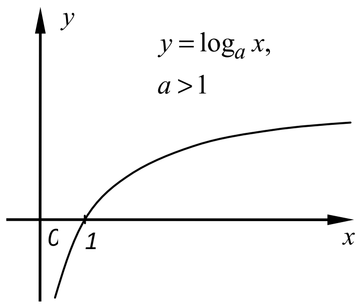


Рис. 18

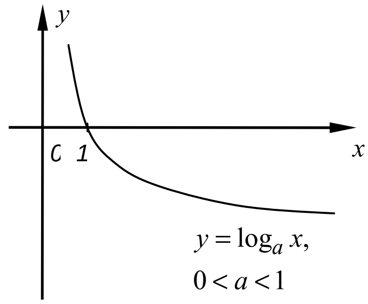


Рис. 19

<u>Простейшие показательные и логарифмические уравнения</u>

Пусть $a > 0, a \neq 1$.

1. Если $b \leq 0$, то уравнение $a^x = b$ не имеет решений.
Если $b > 0$, то $a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \log_a b$.
Частный случай: $a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$.
Например, $2^x = -8 \quad \Rightarrow$ нет решений; $2^x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 15$;

$$2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

2. При любом значении b $\log_a x = b \quad \Rightarrow \quad x = a^b$.
Частный случай: $\log_a x = \log_a y \quad \Rightarrow \quad x = y$.
Например, $\log_3 x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$; $\log_2 x = \log_2 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5$.

<u>Простейшие показательные и логарифмические неравенства</u>

Если при решении неравенства мы “избавляемся” от основания степени или от логарифма, то при этом:

1) если основание больше 1, то знак неравенства сохраняется;
2) если основание меньше 1 (и больше 0), то знак неравенства меняет своё направление на противоположное.

Примеры: $2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3$; $2^x \geq 5 \Rightarrow x \geq \log_2 5$;

$2^x \leq 2^3 \Rightarrow x \leq 3$; $2^x \leq 5 \Rightarrow x \leq \log_2 5$;

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x \geq \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow x \leq 2; \quad \left(\frac{3}{7}\right)^x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow x \leq \log_{\frac{3}{7}}\left(\frac{2}{3}\right);$$

$$(0,5)^x \leq (0,5)^3 \Rightarrow x \geq 3; \quad (0,5)^x \leq 3 \Rightarrow x \geq \log_{0,5} 3;$$

$$\log_2 x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2^5 \Rightarrow x \geq 32; \quad \log_2 x \leq 5 \Rightarrow 0 < x \leq 2^5 \Rightarrow 0 < x \leq 32;$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq 5 \Rightarrow 0 < x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq \frac{1}{32}; \quad \log_{\frac{1}{2}} x \leq 5 \Rightarrow x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{32}.$$

<u>Пример 1.</u> Вычислите $19\log_{8\sqrt[6]{2}}(4\sqrt[6]{2})$.

Решение: $19\log_{8\sqrt[6]{2}}(4\sqrt[6]{2}) = 19\log_{2^{19/6}}\left(2^{13/6}\right) = 19\frac{6}{19}\frac{13}{6}\log_2 2 = 13$.

Ответ: 13.

<u>Пример 2.</u> Вычислите $\log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{4} + \log_{\sqrt{2}} \sin\frac{3\pi}{8}$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{4} + \log_{\sqrt{2}} \sin\frac{3\pi}{8} = \log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{3\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right)\right) + \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 = 1 - \log_{\sqrt{2}} 4 - 1 = -4.$$

Ответ: -4.

<u>Пример 3.</u> Вычислите $\log_5\left(75\sqrt{5}\right) + \left(\log_5^2 3 + 1 - \log_5 9\right)^{0,5}$.

Решение:

$$\log_5\left(75\sqrt{5}\right) + \left(\log_5^2 3 + 1 - \log_5 9\right)^{0,5} = \log_5\left(3 \cdot 5^{5/2}\right) + \sqrt{\log_5^2 3 - 2\log_5 3 + 1} =$$

$$= \log_5 3 + 2,5 + \sqrt{(\log_5 3 - 1)^2} = \log_5 3 + 2,5 + \left|\log_5 3 - 1\right| =$$

(т.к. $\log_5 3 < 1$) $= \log_5 3 + 2,5 - \log_5 3 + 1 = 3,5$.

Ответ: 3,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $\sqrt{25-10\cdot 6^x+36^x}-6^x-1{,}5$, если $4^x=13$.

Решение:

$$\sqrt{25-10\cdot 6^x+36^x}-6^x-1{,}5=\sqrt{\left(5-6^x\right)^2}-6^x-1{,}5=\left|5-6^x\right|-6^x-1{,}5.$$

По условию $4^x=13\Rightarrow x>1$, поэтому $\left|5-6^x\right|=-5+6^x$. Окончательно получаем: $-5+6^x-6^x-1{,}5=-6{,}5$.

Ответ: $-6{,}5$.

Пример 5. Решите уравнение $5^{x+1}-4\cdot 5^x=625$.

Решение: $5^{x+1}-4\cdot 5^x=625\Leftrightarrow 5^x(5-4)=625\Leftrightarrow 5^x=5^4\Rightarrow x=4$.

Ответ: 4.

Пример 6. Решите уравнение $16\cdot 16^x-17\cdot 4^x+8=\left(\sqrt{7-7x^2}\right)^2+7x^2$.

Решение: ОДЗ: $7-7x^2\ge 0$, $x^2\le 1$, $x\in[-1;1]$.

$16\cdot 16^x-17\cdot 4^x+8=\left(\sqrt{7-7x^2}\right)^2+7x^2\Leftrightarrow 16\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=7-7x^2+7x^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+1=0$. Сделаем замену переменной $4^x=t$, $t>0$, получим уравнение $16t^2-17t+1=0$. Его корни $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{16}$. Обратная замена: $4^x=1\Rightarrow x=0\in[-1;1]$, $4^x=\frac{1}{16}\Rightarrow x=-2\notin[-1;\ 1]$.

Ответ: 0.

Пример 7. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $3-4^{2x-1}=\left(17-2\cdot 4^{2x}\right)^{0,5}$.

Решение: $3-4^{2x-1}=\left(17-2\cdot 4^{2x}\right)^{0,5}\Leftrightarrow 3-\frac{4^{2x}}{4}=\sqrt{17-2\cdot 4^{2x}}$. Сделаем замену переменной $4^{2x}=t$, $t>0$, получим уравнение $12-t=4\sqrt{17-2t}$. ОДЗ уравнения: $12-t\ge 0$, $t\le 12$. Возведем обе части в квадрат:

$144-24t+t^2=16(17-2t)$, $t^2+8t-128=0$. Его корни $t_1=8$, $t_2=-16$ (не удовлетворяет условию $t>0$). Обратная замена: $4^{2x}=8$, $2^{4x}=2^3 \Rightarrow x=0,75$.

Ответ: $0,75$.

Пример 8. Решите уравнение $25\cdot 3^{\frac{22}{x-1}}+16\cdot 15^{\frac{11}{x-1}}=9\cdot 5^{\frac{22}{x-1}}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение. Положим $\frac{11}{x-1}=a$, тогда исходное уравнение примет вид: $25\cdot 3^{2a}+16\cdot 15^{a}=9\cdot 5^{2a} \Leftrightarrow 25\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2a}+16\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{a}=9$. Замена $\left(\frac{3}{5}\right)^{a}=t$, $t>0$ приводит к уравнению $25t^2+16t-9=0$. Его корни $t_1=\frac{9}{25}$, $t_2=-1$ (не удовлетворяет условию $t>0$). Обратная замена: $\left(\frac{3}{5}\right)^{a}=\frac{9}{25}\Rightarrow a=2$, тогда $\frac{11}{x-1}=2$. Отсюда $x=6,5$.

Ответ: 6,5.

Пример 9. Решите уравнение $\log_9(20x-16)-\log_9 4=\log_9 18$.

Решение. ОДЗ: $20x-16>0$, $x>0,8$.

По свойствам логарифмов исходное уравнение равносильно $\log_9\frac{20x-16}{4}=\log_9 18\Rightarrow 5x-4=18$, $x=4,4$.

Ответ: 4,4.

Пример 10. Найдите значение выражения xy, если $(x;y)$ – решение системы $\begin{cases}7\log_3 x-6\log_3 y=-25,\\ 5\log_{\frac{1}{3}} x+6\log_3 y=23.\end{cases}$

Решение: ОДЗ: $x>0$, $y>0$.

$$\begin{cases}7\log_3 x-6\log_3 y=-25\\ 5\log_{\frac{1}{3}} x+6\log_3 y=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\log_3 x-6\log_3 y=-25\\ -5\log_3 x+6\log_3 y=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\log_3 x-6\log_3 y=-25\\ 2\log_3 x=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7\log_3 x-6\log_3 y=-25\\ \log_3 x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7-6\log_3 y=-25\\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 y=3\\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=27\\ x=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Тогда $xy=9$.

Ответ: 9.

Пример 11. Решите уравнение $\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите произведение всех его корней.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}3x+5>0\\ 2x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{5}{3}\\ x>-\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow x>-\dfrac{5}{3}$.

$$\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0\Leftrightarrow \log_7(3x+5)+\left|\log_7(2x+5)\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\log_7(2x+5)\right|=-\log_7(3x+5).\ \text{ДУ: } -\log_7(3x+5)\ge 0,\ 3x+5\le 1,\ x\le-\frac{4}{3}.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\log_7(2x+5)=-\log_7(3x+5)\\ \log_7(2x+5)=\log_7(3x+5)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_7(2x+5)+\log_7(3x+5)=0\\ 2x+5=3x+5\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_7(2x+5)(3x+5)=0\\ x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^2+25x+24=0\\ x=0\end{array}\right..$$

Корни первого уравнения $x_1=-\dfrac{8}{3}\notin$ ОДЗ, $x_2=-1{,}5$. Корень $x=0$ не удовлетворяет ДУ.

Ответ: $-1{,}5$.

Пример 12. Решите уравнение $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}3-4x^2>0,\\ 3-4x^2\ne 1.\end{cases}$

По свойствам логарифмов данное уравнение равносильно

$$\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\log_{3-4x^2}2 \Leftrightarrow \log_{3-4x^2}(9-16x^4)-\log_{3-4x^2}2=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2}\frac{9-16x^4}{2}=2 \Leftrightarrow \frac{9-16x^4}{2}=\left(3-4x^2\right)^2 \Leftrightarrow 9-16x^4=2\left(9-24x^2+16x^4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^4-16x^2+3=0.$$

Корнями этого биквадратного уравнения служат числа $x_{1,2}=\pm 0,5$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\notin$ ОДЗ.

Ответ: $\pm 0,5$.

<u>Пример 13.</u> Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y=\log_5^3 x-\log_5^2 x$ и $y=\frac{1}{\log_x\sqrt{5}}$.

Решение. Абсциссы точек пересечения графиков функций являются решениями уравнения $\log_5^3 x-\log_5^2 x=\frac{1}{\log_x\sqrt{5}}$. ОДЗ: $x>0$, $x\neq 1$. По свойствам логарифмов данное уравнение равносильно

$$\log_5^3 x-\log_5^2 x=\log_{\sqrt{5}} x \Leftrightarrow \log_5^3 x-\log_5^2 x-2\log_5 x=0.$$

Сделаем замену $\log_5 x=t$, получим уравнение $t^3-t^2-2t=0 \Leftrightarrow t\left(t^2-t-2\right)=0$. Его корни $t_1=0$, $t_2=-1$, $t_3=2$. Обратная замена: $\log_5 x=0\Rightarrow x=1\notin$ ОДЗ; $\log_5 x=-1\Rightarrow x=0,2$; $\log_5 x=2\Rightarrow x=25$.

Ответ: 0,2; 25.

<u>Пример 14.</u> Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $6x^2\cdot\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-3x}+4x\cdot\log_3(4-3x)$ и $4x-3x^2$ принимают равные значения.

Решение: Искомые значения x являются решениями уравнения $6x^2\cdot\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-3x}+4x\cdot\log_3(4-3x)=4x-3x^2$. ОДЗ: $4-3x>0$, $x<\frac{4}{3}$.

По свойствам логарифмов это уравнение равносильно

$$-3x^2\cdot\log_3(4-3x)+4x\cdot\log_3(4-3x)=4x-3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4x-3x^2\right)\cdot\log_3(4-3x)=4x-3x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-3x^2=0 \\ \log_3(4-3x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(4-3x)=0 \\ 4-3x=1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{4}{3}\notin \text{ОДЗ},\ x_3=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $0;\ \frac{1}{3}$.

<u>Пример 15.</u> Решите уравнение $\log_{\cos x}\left(\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+\cos x\right)=1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \cos x>0, \\ \cos x\neq 1. \end{cases}$

$$\log_{\cos x}\left(\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+\cos x\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+\cos x=\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не удовлетворяет ОДЗ. Второе уравнение равносильно $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$. С учетом ОДЗ окончательно получаем $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

<u>Пример 16.</u> Решите неравенство $7^{x+2,3}\leq\frac{1}{49}$.

Решение: $7^{x+2,3}\leq\frac{1}{49} \Leftrightarrow 7^{x+2,3}\leq 7^{-2} \Rightarrow x+2,3\leq -2,\ x\leq -4,3$.

Ответ: $(-\infty;\ -4,3]$.

<u>Пример 17.</u> Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt[6]{\log_5 x-3}$.

Решение: $D(f):\begin{cases} x>0 \\ \log_5 x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_5 x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\geq 125 \end{cases} \Rightarrow x\geq 125$.

Ответ: $[125;\ +\infty)$.

Пример 18. Решите неравенство $\log_{\frac{3}{4}}(2x-5) > \log_{\frac{3}{4}} x$.

Решение: Так как основание логарифма $\frac{3}{4} < 1$, то данное неравенство равносильно $\begin{cases} 2x-5 < x \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > 2,5. \end{cases}$

Ответ: $(2,5;\ 5)$.

Пример 19. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \log_4(3x-14)$ и $g(x) = 2,5$ меньше, чем 0,5.

Решение. Условию задачи удовлетворяют те значения x, которые являются решениями неравенства $\left|\log_4(3x-14) - 2,5\right| < 0,5$. ОДЗ: $3x-14 > 0$, $x > \frac{14}{3}$.

$$\left|\log_4(3x-14) - 2,5\right| < 0,5 \Leftrightarrow -0,5 < \log_4(3x-14) - 2,5 < 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(3x-14) < 3 \\ \log_4(3x-14) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-14 < 64 \\ 3x-14 > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 26 \\ x > 10. \end{cases}$$

Ответ: $(10;\ 26)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите: $5\log_{9\sqrt{3}}(27\sqrt{3})$;

$$\log_4 \sin\frac{\pi}{12} + \log_4 \sin\frac{\pi}{6} + \log_4 \sin\frac{5\pi}{12};$$

$$\log_3\left(54\sqrt{3}\right) - \left(\log_3^2 6 + 1 - \log_3 36\right)^{0,5}.$$

2. Найдите значение выражения $\sqrt{100 - 20\cdot 6^x + 36^x} - 6^x - 2,5$, если $4^x = 19$.

3. Решите уравнения: $3^{x+2} - 5\cdot 3^x = 324$;

$$9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x - 28\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 5 = \left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 + x^2.$$

4. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $2 - 3^{5x-2} = \left(10 - 3^{5x}\right)^{0,5}$.

5. Решите уравнение $2\cdot 2^{\frac{10}{x}}+6^{\frac{5}{x}}=6\cdot 3^{\frac{10}{x}}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

6. Решите уравнение $\log_5(12x+8)-\log_5 4=\log_5 23$.

7. Найдите значение выражения $x+y$, если $(x;y)$ – решение системы $\begin{cases}3\log_2 x-6\log_2 y=-21,\\ 5\log_{\frac{1}{2}} x+6\log_2 y=23.\end{cases}$

8. Решите уравнение $\log_7(3-x)+\sqrt[8]{\log_7^8(-4x+15)}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите произведение всех его корней.

9. Решите уравнение $\log_{3-4x}(4x^2-13x+7)=1+\dfrac{1}{\log_2(3-4x)}$.

10. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y=\log_2^3 x+3\log_2^2 x$ и $y=-\dfrac{1}{\log_x\sqrt{2}}$.

11. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $4x^2\cdot\log_3(5-4x)+10x\cdot\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5-4x}$ и $4x^2-5x$ принимают равные значения.

12. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(2\sin 2x+4\sin^2 x+1\right)=0$.

13. Решите неравенство $3^{3x-2}\ge\dfrac{1}{9}$.

14. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt[12]{\log_9 x-2}$.

15. Решите неравенство $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9)>\log_{\frac{5}{6}} x$.

16. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\log_2(3x+13)$ и $g(x)=5{,}5$ меньше, чем 0,5.

9. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Напомним, что скалярными величинами, или скалярами, называются такие величины, которые полностью определяются их численными значениями. К таким величинам относятся длина, площадь, объем, масса.

Величину, которую характеризует не только числовое значение, но и направление, называют векторной величиной, или вектором. Примеры векторных величин – скорость, ускорение, сила.

В геометрии векторы изображают направленными отрезками $\overline{AB}$ или $\overline{a}$, длину вектора $\overline{AB}$ (расстояние между точками A и B) обозначают $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$.

Особо определяют нулевой вектор, или нуль-вектор $\overline{0}$. Нуль-вектор имеет длину, равную 0, и не имеет направления.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными, пишут $\overline{a}\parallel\overline{b}$. Два коллинеарных вектора называются сонаправленными $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, если лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала, в противном случае векторы называются противоположно направленными $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$.

Два сонаправленных вектора называются равными, если их длины равны.

Действия над векторами

Сумму двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно найти по правилу треугольника (рис. 20) и параллелограмма (рис. 21), сумму нескольких векторов – по правилу многоугольника (рис. 22).

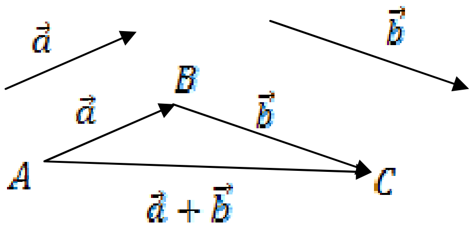


Рис. 20

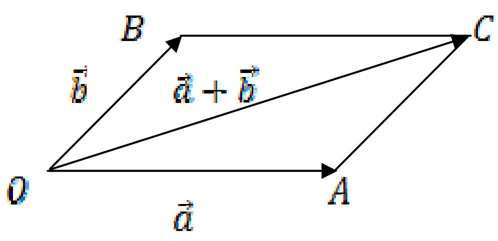


Рис. 21

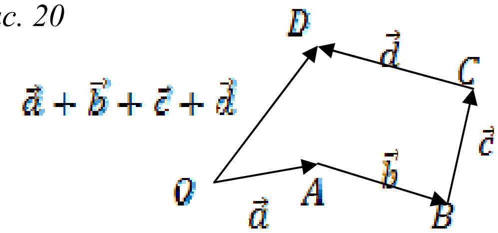


Рис. 22

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\overline{b}$ составляет вектор $\overline{a}$. Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приведены к общему началу, то разность их $\overline{a}-\overline{b}$ есть вектор, идущий из конца вектора $\overline{b}$ к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 23).

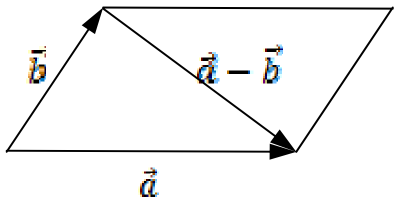


Рис. 23

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число $k \neq 0$ называется вектор $\overline{b}$ такой, что: 1) $\left|\overline{b}\right| = |k| \cdot |\overline{a}|$; 2) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, если $k>0$, и противоположно направлены, если $k<0$. При $k=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$ вектор $\overline{b}$ есть нуль-вектор.

Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l называется число, равное произведению длины вектора $\overline{a}$ на косинус угла между вектором $\overline{a}$ и единичным вектором $\overline{e}$ оси l: $np_l\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a},\overline{e})$ (рис. 24).

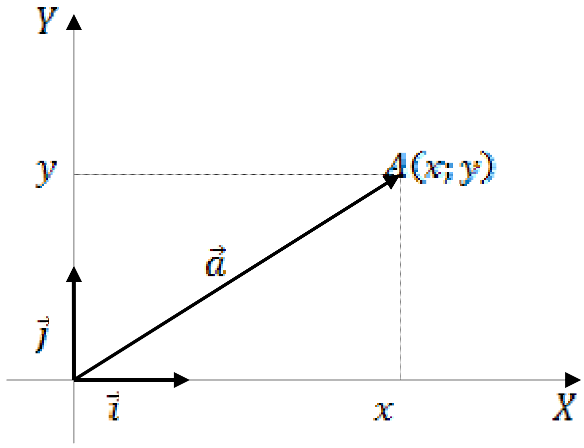


Рис. 24

Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол между направлениями этих векторов. Обозначение $\left(\overline{a},\hat{}\,\overline{b}\right)=\varphi$. Если $\varphi=90°$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$, если $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, то $\varphi=0°$, если $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, то $\varphi=180°$.

$np_{Ox}\overline{a}=x$, $np_{Oy}\overline{a}=y$.

Векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$ обладают следующими свойствами:

1) вектор $\overline{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\overline{j}$ – на оси Oy;

2) каждый из векторов $\overline{i}$ и $\overline{j}$ направлен на своей оси в положительную сторону;

3) векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$ - единичные, т.е. $\left|\overline{i}\right|=1$, $\left|\overline{j}\right|=1$.

Каким бы ни был вектор $\overline{a}$, он всегда может быть разложен по векторам $\overline{i}$ и $\overline{j}$, т.е. может быть представлен в виде $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$. Коэффициенты этого разложения являются координатами вектора $\overline{a}$.

Пусть вектор $\overline{AB}$ задан начальной точкой $A(x_A, y_A)$ и конечной $B(x_B, y_B)$. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

а) $np_{Ox}\overline{AB}=x_B-x_A$,

б) $пр_{Oy}\overline{AB} = y_B - y_A$ (рис. 25),

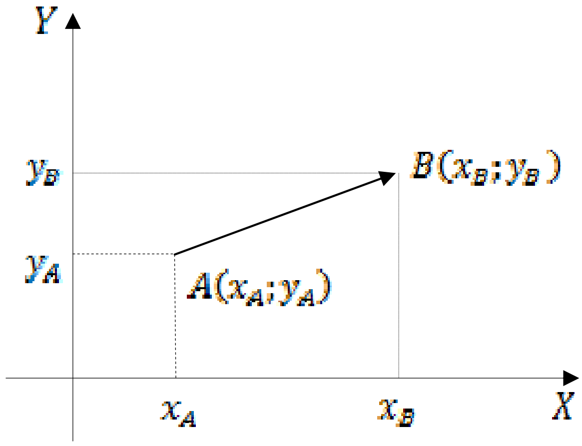


Рис. 25

Следовательно, $\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$. Таким образом, чтобы найти проекции вектора на оси координат, нужно из координат его конечной точки вычесть координаты начальной точки.

Отметим основные свойства проекций:

1. Знак «+» или «-» проекции указывает, совпадает направление вектора с направлением оси или нет.

2. При параллельном переносе вектора его проекция не меняется.

3. Скалярный множитель можно выносить за знак проекции:

$$пр_l\left(\lambda\overline{AB}\right) = \lambda пр_l\left(\overline{AB}\right).$$

4. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось: $пр_l\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right) = пр_l\bar{a} + пр_l\bar{b} + пр_l\bar{c}$.

<u>**Задача 1**</u>. Дано: $пр_l\bar{a} = -2$, $пр_l\bar{b} = 1$. Найти $пр_l\left(2\bar{a} + \bar{b}\right)$ и $пр_l\left(3\bar{a} - 2\bar{b}\right)$.

<u>**Задача 2**</u>. Даны точки $A(5;\ 2)$, $B(3;\ -1)$, $C(-2;\ -5)$ и $D(2;\ 1)$. Постройте векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Какие это будут векторы? Сравните их координаты и сделайте вывод.

<u>Действия над векторами в координатной форме</u>

Даны два вектора $\bar{a} = \{x_1;\ y_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2;\ y_2\}$. Учитывая приведенные выше свойства проекций, получаем следующие результаты:

1) $\bar{a} \pm \bar{b} = \left(x_1\bar{i} + y_1\bar{j}\right) \pm \left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j}\right) = \left(x_1 \pm x_2\right)\bar{i} + \left(y_1 \pm y_2\right)\bar{j}$, т.е. при сложении (вычитании) векторов, заданных в координатной форме, складываются (вычитаются) одноименные координаты векторов;

2) $\lambda\overline{a} = \lambda\left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j}\right) = \left(\lambda x_1\right)\overline{i} + \left(\lambda y_1\right)\overline{j}$, т.е. при умножении вектора на число каждая координата умножается на это число;

3) даны две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Нужно найти длину вектора $\overline{AB}$. Длина вектора $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ есть неотрицательное число, равное $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Если начальной точкой вектора является точка $O(0;0)$, а конечной – точка $B(x; y)$, то длина вектора $\overline{OB}$ будет равна $\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>Задача 3</u>. Найти координаты точки M, равноудаленной от точек $A(10;\ 7)$, $B(-4;\ -7)$, $C(12;\ -7)$.

<u>Скалярное произведение векторов</u>

<u>Скалярным произведением</u> двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\varphi .$$

Анализируя написанную формулу, можно сделать выводы:

1) если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\overline{b} = \overline{0}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$;

2) если $\overline{a} = \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$;

3) если $\varphi = 90°$, то $\cos\varphi = 0$ и, следовательно, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

<u>Свойства скалярного произведения</u>

1) коммутативность $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2) ассоциативность $\left(k\overline{a}\right) \cdot \overline{b} = k\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$;

3) дистрибутивность $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в координатной форме $\overline{a} = \{x_1; y_1\} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j}$ и $\overline{b} = \{x_2; y_2\} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j}$. Найдем их скалярное произведение

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j}\right)\left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j}\right) = x_1x_2\overline{i} \cdot \overline{i} + x_1y_2\overline{i} \cdot \overline{j} + y_1x_2\overline{j} \cdot \overline{i} + y_1y_2\overline{j} \cdot \overline{j} =,$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 \text{ т.к. } \overline{i} \cdot \overline{i} = \left|\overline{i}\right|\left|\overline{i}\right|\cos 0^{\circ} = 1,\ \overline{j} \cdot \overline{j} = \left|\overline{j}\right|\left|\overline{j}\right|\cos 0^{\circ} = 1,$$

$$\overline{i} \cdot \overline{j} = \dot{j} \cdot \overline{i} = \left|\overline{i}\right|\left|\overline{j}\right|\cos 90^{\circ} = 0 .$$

Итак, скалярное произведение двух ненулевых векторов, заданных в координатной форме, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Из определения скалярного произведения и полученной формулы следует, что

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Если $\varphi=90^\circ$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2=0$.

Таким образом, для того чтобы векторы были перпендикулярными (ортогональными), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Задачи для самостоятельного решения

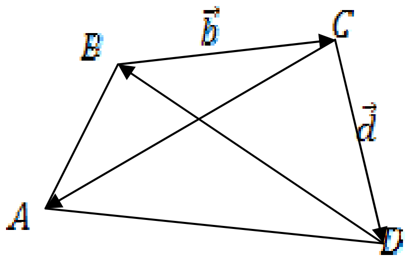


Рис. 26

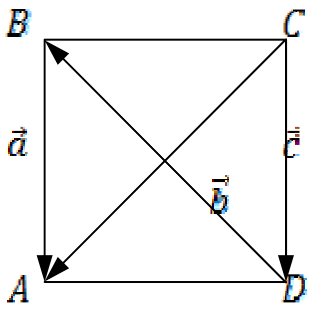


Рис. 27

1. Выразить вектор $\overline{DB}$ через векторы $\bar{b}$ и $\bar{d}$ (рис. 26).

2. В квадрате $ABCD$ найти сумму векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис 27).

3. Найти координаты точки M, лежащей на оси Oy и равноудаленной от точек $A(3;\ 3)$ и $B(2;\ 8)$.

4. В трапеции $ABCD$: $A(5;\ -2)$, $B(4;\ 0)$, $C(-2;\ 8)$, $\overline{AD}=2\cdot\overline{BC}$. Найти координаты вершины D и длину средней линии трапеции.

5. При каких значениях p вектор $\bar{c}=\{3-p;\ p^2+6p\}$ равен вектору $\bar{a}-2\bar{b}$, где $\bar{a}=\{2;\ 1\}$, $\bar{b}=\{-1;\ 3\}$.

6. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $1:3$, считая от точки B. Выразить вектор $\overline{AM}$ через векторы $\bar{a}=\overline{AB}$ и $\bar{b}=\overline{AC}$.

7. Найти все значения p, при которых угол между векторами $\bar{a}=\{p-3;\ -2\}$ и $\bar{b}=\{p;\ 2\}$ острый.

8. Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\overline{a} = \{3; 1\}$, в два раза длиннее $\overline{a}$ и имеющего положительную первую координату.

9. На наклонной плоскости лежит груз $P = 50$ г. Найти скатывающую силу и силу давления на наклонную плоскость, если угол наклона плоскости к горизонту равен $30°$.

10. К концам нити, перекинутой через два блока, подвешены два груза: $p_1 = 3$ кг и $p_2 = 5$ кг. Какой груз надо подвесить к нити между блоками, чтобы при равновесии нить образовала угол в 60°.

11. Две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ образуют угол φ. Найти их равнодействующую, если: 1) $\overline{F_1} = 8{,}6$ кг, $\overline{F_2} = 6{,}5$ кг, $\varphi = 130^{\circ}$; 2) $\overline{F_1} = 9{,}7$ кг, $\overline{F_2} = 10{,}8$ кг, $\varphi = 75^{\circ}$.

12. Найти величину равнодействующей трех сил по 10 Н каждая, если силы приложены к одной точке и углы между направлениями сил равны 60°.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При разработке учебного пособия были поставлены следующие задачи:

- систематизировать знания студентов-первокурсников по основным разделам школьного курса математики, необходимые им при обучении в вузе;
- развивать и укреплять умения и навыки самостоятельной работы студентов с учебной литературой, логически мыслить и делать обоснованные выводы при решении тех или иных заданий;
- повысить математическую грамотность и показать практическую значимость основ математических знаний при изучении специальных дисциплин в вузе.

Подбор заданий пособия обеспечивает успешное решение поставленных задач; кроме того, содержащийся материал дает возможность студентам избежать временных затрат на поиск теоретических и практических сведений в другой учебной литературе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Крамор, В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.

2. *Крашенинникова, О.В.* Математика: метод. указания и контрольн. работы для слушателей отд-ния заоч. обучения фак. довуз. подгот. / О.В. Крашенинникова. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 64 с.

3. *Сорокина, А.Г.* Пособие по математике для поступающих в ВлГУ. Ч. 1 / А.Г. Сорокина, В.А. Скляренко. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2002. – 56 с.

4. *Лысенко, Ф.Ф.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2009. Вступительные испытания / Ф.Ф. Лысенко. – Ростов н/-Д: Легион, 2008. – 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие...3
1. Степень с рациональным показателем. Действия с корнями…....3
2. Рациональные уравнения. Теорема Виета...…………………….....8
3. Иррациональные уравнения……………………….………………11
4. Уравнения и неравенства с модулем………………………………14
5. Арифметическая и геометрическая прогрессии…………………..18
6. Преобразования графиков функций. Линейная, квадратичная, степенная, дробно-линейная функции……………………………..22
7. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Обратные тригонометрические функции……………31
8. Действия с логарифмами. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства……………………………………….......39
9. Векторы на плоскости. Действия над векторами……………….....50
Заключение..56
Библиографический список……………………………………….....57

Учебное издание

КСЕНОФОНТОВ Рудольф Сергеевич
СОРОКИНА Александра Георгиевна
КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

МАТЕМАТИКА.
КОРРЕКТИРУЮЩИЙ КУРС ДЛЯ БАКАЛАВРОВ
И СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖА

Учебное пособие

Подписано в печать 23.05.11.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 3,49. Тираж 150 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.