

Математические методы в информатике и
вычислительной технике.

Учебное пособие в двух частях.

Часть 2.

Введение в прикладной гармонический анализ

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 010101 - математика, 010501 - прикладная математика и информатика

М.С. Беспалов

Владимир 2007

Оглавление

9	Тригонометрические ряды Фурье	7
9.1	Тригонометрическая система функций	7
9.2	Условия сходимости ряда Фурье	10
9.3	Свойства рядов Фурье	12
9.4	УПРАЖНЕНИЯ	18
10	Система Уолша	19
10.1	Функции Радемахера и Уолша	19
10.2	Система Уолша в нумерации Пэли	22
10.3	Функции Уолша как группа и на группе	24
10.4	Ряд Фурье по системе Уолша	29
10.5	Операции над рядами Фурье-Уолша	35
10.6	Ядро Дирихле	43
10.7	Константы Лебега	49
10.8	Сходимость рядов Уолша	56
10.9	УПРАЖНЕНИЯ	59
11	Система Крестенсона–Леви	61
11.1	Построение системы	61
11.2	Ряд Фурье	65
11.3	Свойства ряда и коэффициентов Фурье	73
11.4	УПРАЖНЕНИЯ	76
12	Система Хаара	77
12.1	Определение и свойства	77
12.2	Ряды Фурье по системе Хаара	83
12.3	КМА на примере функций Хаара	85
12.4	Реализация в виде ДПХ	88

12.5	УПРАЖНЕНИЯ	91
13	Обобщение функций Уолша	93
13.1	Мультипликативные системы функций	93
13.2	Перестановки системы Уолша	96
13.3	Системы, подобные системе Уолша	108
13.4	Система характеров	112
13.5	УПРАЖНЕНИЯ	118
14	Преобразование Фурье	119
14.1	Построение преобразования Фурье	119
14.2	Свойства преобразования Фурье	122
14.3	УПРАЖНЕНИЯ	127
15	Преобразование Уолша	129
15.1	Определение преобразования Уолша	129
15.2	Свойства ядра преобразования Уолша	131
15.3	Преобразование Уолша в L	133
15.4	Обобщенное ядро Дирихле	139
15.5	Свойства преобразования Уолша	145
15.6	Преобразование Уолша в L_2	153
15.7	УПРАЖНЕНИЯ	161
16	Мультипликативное преобразование Фурье	163
16.1	Построение	163
16.2	Виды оператора	168
16.3	Кратно-масштабный троичный анализ	182
16.4	УПРАЖНЕНИЯ	184
17	Дискретное преобразование Фурье	185
17.1	Построение ДПФ	185
17.2	Быстрое преобразование Фурье	189
17.3	Вычисление тригонометрических сумм	195
17.4	УПРАЖНЕНИЯ	200
18	Дискретное преобразование Уолша	201
18.1	Три основных вида ДПУ	201

18.2	Связь ДПУ с преобразованием Уолша	207
18.3	Быстрое преобразование Уолша	209
18.4	Новое произведение матриц и новый алгоритм БПУ	214
18.5	УПРАЖНЕНИЯ	218
19	Основы теории всплесков	219
19.1	Оконное преобразование Фурье	219
19.2	Интегральное всплесковое преобразование	225
19.3	Дискретизация всплесковых преобразований	230
19.4	Фреймы	235
19.5	УПРАЖНЕНИЯ	240

Глава 9

Тригонометрические ряды Фурье

9.1 Тригонометрическая система функций

Теория рядов Фурье обычно излагается для рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Изучение конкретных ортогональных систем функций также начнем с тригонометрической системы. Доказательства основных теорем приводить не будем, так как, во-первых, они хорошо изложены в книгах [3, 13, 15, 25], а, во-вторых, в тригонометрическом случае форма записи более громоздкая, чем для системы Уолша.

Тригонометрическим рядом называют выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1)$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Он соответствует ортогональной на $(-\pi, \pi)$ системе функций

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos nx, \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty}. \quad (2)$$

Так как система (2) не нормирована (определение в гл. 8, с. 81)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \pi,$$

то формулы для *коэффициентов Фурье* следующие ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3)$$

Для единообразия формул (3) первое слагаемое в (1) имеет вид $\frac{a_0}{2}$.

Рядом Фурье функции $f \in L(-\pi, \pi)$ называется ряд (1), где числа a_n, b_n вычислены по формулам (3). Так как условие $f \in L(-\pi, \pi)$ обеспечивает лишь возможность вычисления коэффициентов Фурье и не гарантирует суммируемость ряда Фурье, то используется знак \sim , который является знаком соответствия функции и формально записанной суммы

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Частной суммой ряда (1) называется выражение

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (4)$$

которое в случае ряда Фурье для функции $f(x)$ обозначается $S_n(f; x)$.

Все функции системы (2) имеют период 2π . Поэтому ряд (1) можно рассматривать как тригонометрический ряд по любому интервалу длины 2π и, соответственно, изменять пределы интегрирования в формулах (3). Если $f(x) = f(x + 2\pi)$ (то есть функция f является 2π -периодической), то ряд (1) является рядом Фурье функции на всей оси.

Если функция периода $2l$, то коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx$$

и получают ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Для четной 2π -периодической функции $b_n \equiv 0$, а для нечетной 2π -периодической функции $a_n \equiv 0$. В первом случае получаем ряд Фурье по косинусам

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

а во втором случае по синусам

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Используя четные или нечетные продолжения строят ряды Фурье по косинусам или по синусам на $(0, \pi)$.

Более короткой является комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (5)$$

которая из (1) получается по формулам замены

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Формулы для вычисления коэффициентов Фурье примут вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

для 2π -периодической функции или для $f \in L(0, 2\pi)$.

Для функции $f \in L(0, 1)$ формулы (5) и (6) превращаются в

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}, \quad c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt$$

относительно ортонормированной системы $\{e^{2\pi inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Теорема 1 [13, с. 27]. *Тригонометрическая система (2) полна в $C[-\pi, \pi]$ и в $L_p[-\pi, \pi]$ для любого $p \geq 1$.*

Следствие. *Функции $f, g \in L_p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$, различающиеся на множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры, имеют разные ряды Фурье (то есть какие-то коэффициенты Фурье различны).*

Утверждение 1. *Для любой $f \in L_2(-\pi, \pi)$, разложенной в ряд (1), имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

9.2 Условия сходимости ряда Фурье

Теорема 2 [13, с. 28]. Если ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции $f(x)$ равномерно сходится, то сумма ряда совпадает с $f(x)$.

Лемма. Если подпоследовательность частных сумм ряда (1) равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходится к $f(x)$, то ряд (1) есть ряд Фурье для $f(x)$.

При доказательстве [3, с. 68] обоих утверждений устанавливается совпадение коэффициентов Фурье функции $f(x)$ и суммы ряда (1) как в теореме о равносильности полноты и замкнутости (ч. 1, гл. 8, с. 86).

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ из модулей коэффициентов Фурье сходится, то ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Теорема 4 [3, с. 122]. Если $f(x)$ - абсолютно непрерывная и периодическая, то ряд Фурье сходится равномерно и абсолютно к $f(x)$.

При дополнительных ограничениях (в [17, с. 403] требуется $f' \in L_2$) доказательство этой теоремы становится более простым.

Определение 1. Точка x_0 называется *регулярной*, если она является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода, для которой $f(x_0) = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$. Функцию $f(x)$ назовем регулярной, если у нее конечное число точек разрыва, каждая из которых есть регулярная точка.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ кусочно-гладкая на отрезке $[-\pi; \pi]$ и регулярная, то для любого $\delta > 0$ ряд Фурье равномерно сходится на отрезке $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$ к $f(x)$.

Выражение $\Delta_u^2 f(x) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$ называется *второй разностью* с шагом u в точке x для функции $f(x)$.

Теорема 6 (признак Дини для сходимости) [5, с. 227], [13, с. 90]. Если $\int_0^\delta \frac{|\Delta_u^2 f(x_0)|}{u} du < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то ряд Фурье в регулярной точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Замечание. Если сходимость интеграла в точке x_0 заменить на равномерную сходимость, то по признаку Дини о равномерной сходимости [17, с. 414] ряд Фурье будет сходиться равномерно.

Теорема 7 (Дирихле) [17, с. 410]. Если функция $f(x)$ ограничена и имеет конечное число точек минимума и максимума и не более чем счетное число точек разрыва первого рода, то ряд Фурье всюду сходится

ся (к значению функции в регулярной точке).

Теорема 8 (Жордана) [13, с. 98]. Если $f \in \text{Var}[-\pi, \pi]$ (функция ограниченной вариации), то ее ряд Фурье сходится всюду.

Если к тому же функция непрерывная и периодическая, то сходимость равномерная.

Теорема 9 [13, с. 470–473]. Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке.

Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой сходится всюду, но неравномерно.

Первый пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в точке, построил дю-Буа-Реймон (см. [3, с. 198]). В [13, с. 471–473] приведены (как более интересные) примеры Фейера и Лебега.

Используя метод сгущения особенностей [15, с. 211], получаем следующее следствие первого утверждения теоремы 9: существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на множестве мощности континуум.

Теорема 10 (Колмогорова) [3, с. 391], [13, с. 488]. Существует суммируемая функция, ряд Фурье которой расходится всюду.

В 1915 г. Лузиным была сформулирована проблема:

является ли условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ достаточным для сходимости почти всюду ряда $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Положительный ответ на проблему Лузина дал в 1966 г. Карлесон.

Теорема 11 (Карлесона). Ряд Фурье функции $f \in L_2(-\pi, \pi)$ не может расходиться на множестве положительной меры.

Доказательство теоремы Карлесона столь сложно, что не повторяется ни в одной из книг приведенного библиографического списка. В книге [25, ч.1, с. 201] приведена схема доказательства.

Определение 2. Ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости на интервале (a, b) , если всякий ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad , \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

сходится почти всюду на (a, b) .

Приведем другую формулировку теоремы Карлесона. Тригонометрическая система является системой сходимости.

Теорема 12 (принцип локализации Римана) [13, с. 91]. Если $f(x) = g(x)$ на $[a, b]$, то на любом отрезке, лежащем внутри (a, b) , ряд Фурье от разности функций равномерно сходится к нулю.

Более известна следующая формулировка принципа локализации Римана: *сходимость или расходимость ряда Фурье в точке зависит только от поведения функции в малой окрестности точки.*

Теорема 13 [16, с. 128]. Если $1 < p < \infty$, то существует число B_p такое, что для любой $f \in L_p[-\pi, \pi]$ выполнено $\|S_n(f)\|_p \leq B_p \cdot \|f\|_p$.

Следствие. Тригонометрическая система является базисом в $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$. А именно, если $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, то $\|f - S_n(f)\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение 2 [16, с. 121]. Тригонометрическая система не является базисом в $L(-\pi, \pi)$ и в $C(-\pi, \pi)$.

9.3 Свойства рядов Фурье

Определение 3. Функция $f(x)$ представляется тригонометрическим рядом (1) на $(-\pi, \pi)$, если существуют последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ такие, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Формальные операции, приведенные в параграфе 8.3, для тригонометрического ряда удобнее рассматривать при комплексной форме записи (5) и (6) для суммируемых 2π -периодических функций. В этом случае групповой операцией является обычное сложение, функции $\varphi_n(x)$ системы имеют вид e^{inx} , а свертка функций определяется равенством

$$f * g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt.$$

К этим операциям добавим операцию формального дифференцирования ряда Фурье (5) (или (1)), ухудшающую сходимость ряда, и операцию интегрирования ряда Фурье, где обращаем внимание на знак равенства.

Теорема 14 (интегрирование ряда) [3, с. 123]. Если $f \in L_p[0, 2\pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то для всех $x \in (0, 2\pi)$

$$\int_0^x f(t) dt = C + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}.$$

Большинство сформулированных теорем доказывается через интегральное представление частной суммы периодической суммируемой функции

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot D_n(t) dt, \quad (7)$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt \quad (8)$$

- ядро Дирихле для тригонометрической системы (рис. 9.1).

Рис. 9.1: Ядро Дирихле для тригонометрической системы

Формула (7) выводится подстановкой (3) в (4)

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right) dt \right).$$

Получим $S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(t - x) dx$ и произведем сдвиг, используя периодичность $f(x)$. Формула (7) коротко записывается как свертка функции с ядром Дирихле: $S_n(f) = f * D_n$.

По формулам тригонометрии выражение (8) приводится к виду

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{2 \sin(t/2)}.$$

Так как интеграл от ядра Дирихле равен π , то отклонение частной суммы от функции выражается формулой

$$S_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (f(x + t) - f(x)) D_n(t) dt. \quad (9)$$

Из (9) видно, что многие свойства ряда Фурье определяются свойствами ядра Дирихле.

Константы Лебега для тригонометрической системы

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Асимптотическое представление $L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n$ получаем оценкой интеграла отдельно в малой окрестности нуля и на остальном участке.

Теорема 15 (Лебега). *Если $|f(x)| \leq M$, то $|S_n(f)| \leq C \cdot M \cdot \ln n$.*

Доказательство получаем по формуле (7):

$$|S_n(f, x)| \leq M \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Логарифмический рост константы Лебега указывает на невозможность теоремы 13 при $p = 1$ и $p = \infty$.

Данное неудобство обходят, рассматривая вместо сходимости суммируемость ряда Фурье.

Метод Чезаро (метод средних арифметических), примененный к тригонометрическому ряду, называют *методом Фейера*. Рассматривают суммы Фейера

$$\sigma_n(f; x) = \frac{S_0(f; x) + S_1(f; x) + \dots + S_n(f; x)}{n + 1},$$

интегральное представление которых следующее:

$$\sigma(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \cdot \frac{1}{2(n + 1)} \left(\frac{\sin(n + 1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.$$

Введем понятие *ядра Фейера*

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n + 1)} \left(\frac{\sin(n + 1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

По внешнему виду график ядра Фейера близок к квадрату (см. рис. 9.1) ядра Дирихле.

Сумма Фейера есть свертка функции с ядром Фейера

$$\sigma(f) = f * K_n.$$

Для метода Фейера верны не только все сформулированные положительные утверждения о сходимости, но и более сильные результаты.

Теорема 16 (Фейера) [17, с. 405]. *Если функция $f(x)$ непрерывная 2π -периодическая, то суммы Фейера равномерно сходятся к $f(x)$ всюду.*

Теорема 17. *Если $f \in L(-\pi, \pi)$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_L \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Для доказательства этих теорем достаточно выполнения следующих свойств ядра Фейера.

1. Существует константа M , что $\|K_n\|_L \leq M$ для всех n .
2. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sigma \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx = 0$ для любого фиксированного $\sigma > 0$.

Последовательность $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая этим трем свойствам, называется *аппроксимативной единицей* для свертки (в определении [25, с. 76] свойство 2 заменяют на более слабое $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$).

Другим неудобством использования аппроксимации разрывной функции рядом Фурье является наличие **явления Гиббса**, состоящего в появлении неустранимого всплеска частных сумм в окрестности точки разрыва (рис. 9.2). Явление Гиббса обусловлено видом ядра Дирихле (см. рис. 9.1), не являющегося аппроксимативной единицей.

Проще проиллюстрировать явление Гиббса на примере функции $f(x)$, равной $\frac{\pi-x}{2}$ на $(0, \pi)$, и нечетно продолженной на $(-\pi, 0)$. Ее ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. Так как $(S_n(f; x))' = \sum_{k=1}^n \cos kx = D_n(x) - 1/2$, то из условия $D_n(x) - 1/2 = 0$, равносильного $2 \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{(n+1)t}{2} = 0$, получим

$$\max_x S_n(f; x) = S_n(f; \frac{\pi}{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \frac{\pi k}{n+1}.$$

Рис. 9.2: Явление Гиббса - всплеск частных сумм слева от точки разрыва

Последняя сумма близка к интегральной сумме $\sum_{k=1}^n \frac{\sin k \cdot \Delta x}{k \Delta x} \cdot \Delta x$ при $\Delta x = \frac{\pi}{n+1}$ для интеграла $\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$.

Аккуратным вычислением показываем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x S_n(f; x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Обозначим $l = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$. Заметим, что $l > \frac{\pi}{2}$. Отношение $\frac{l}{\pi/2} \approx 1,17\dots$ называется *константой Гиббса*.

Теорема 18. (Римана-Лебега) [25, с. 49] *Коэффициенты Фурье (3) любой суммируемой функции стремятся к нулю с ростом n . (при комплексной форме записи (5): $c_n \rightarrow 0$, если $|n| \rightarrow \infty$).*

Следствие. *Не каждый тригонометрический ряд является рядом Фурье.*

Пример. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \cos nt$ не является рядом Фурье.

Если бы существовала функция $f(t) \in L(-\pi, \pi)$, для которой этот ряд был бы рядом Фурье, то мы имели бы

$$a_n[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) [\cos(n+2)t - \cos nt] dt = 0$,

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin(n+1)t \sin t dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если положим $\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin^2 t dt$, то учитывая, что $\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\int_0^{\pi} [f(t) - \alpha] \sin t \sin nt dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Но система $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L[0, \pi]$. Следовательно, почти всюду на отрезке $[0, \pi]$ имеем $[f(t) - \alpha] \sin t = 0$, то есть $f(t) = \alpha$ почти всюду. Но у этой функции коэффициенты Фурье $a_n[f] = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Пришли к противоречию.

9.4 УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверьте, что система (2) ортогональна на $(-\pi, \pi)$. Напишите эту систему после нормировки и вид полученного равенства Парсеваля.

2. Докажите, что для четной 2π -периодической функции $b_n \equiv 0$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$. Найдите аналогичные формулы в случае нечетной функции.

3. Выведите формулы (6) для коэффициентов Фурье ряда (5). Проверьте ортогональность системы $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Напишите равенство Парсеваля для ряда Фурье в комплексной форме.

4. Докажите, что система $\{e^{2\pi inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ортонормирована на $[0, 1]$. Будет ли она полной в $L_2[0, 1]$?

5. Выведите формулы для коэффициентов Фурье, вид ряда Фурье и равенство Парсеваля для π -периодической функции.

6. Докажите, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_p(0, \pi)$. Для каких p это верно? Сформулируйте равенство Парсеваля. *Указание.* Используйте аналогичное утверждение для системы (2).

7. Будет ли система $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0, \pi)$?

8. Докажите теорему 2 и лемму. Докажите теорему 3.

9. Приведите пример ограниченной функции, которая не представляется в виде ряда Фурье.

10. Разложите в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ функции x , $\frac{\pi-x}{2}$, $|x|$, x^2 .

11. Разложите функцию $\frac{\pi-x}{2}$ в ряд Фурье по синусам на $(0, \pi)$.

12. Найдите сумму рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ на $(0, 2\pi)$.

13. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ не является рядом Фурье; укажите, в каких точках он расходится.

14. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ является рядом Фурье, но не сходится в $L(-\pi, \pi)$.

Глава 10

Система Уолша

10.1 Функции Радемахера и Уолша

Функции Радемахера, введенные в 1922 г., часто определяют формулой $r_n(x) = \text{sign}(\sin(2^{n+l}\pi x))$ и рассматривают на $[0,1]$. Предложим другое определение, согласно которому функции Радемахера на $[0,1)$ принимают только два значения. Введем начальную функцию Радемахера

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

и периодически с периодом $T=1$ продолжим на полуось $[0, \infty)$. Следующую функцию Радемахера определим как сжатие в два раза начальной функции $r_1(x) = r_0(2x)$. Аналогично определим остальные функции $r_n(x) = r_{n-1}(2x)$. Ограничимся рассмотрением построенных функций Радемахера только на участке $[0, 1)$.

Замечание. Такой подход к построению функций Радемахера является грубым упрощением функций Радемахера на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$. Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ получается добавлением к отрезку $[0, 1]$ счетного множества точек $\mathbb{Q}_2 \cap (0, 1)$, состоящего из всех *двоично-рациональных* чисел (то есть чисел вида $\frac{k}{2^m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$), попавших на интервал $(0, 1)$. В результате этого добавления каждую двоично-рациональную точку рассматриваем как две точки $(\frac{k}{2^m})^-$ - левая и $(\frac{k}{2^m})^+$ - правая, обычное расстояние между которыми на числовой оси равно 0.

Например, в двоичной системе счисления

$$\left(\frac{1}{2}\right)^+ = 0,1(0)_2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{2^k}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^- = 0,0(1)_2 = \frac{0}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

$$\left| \left(\frac{1}{2}\right)^+ - \left(\frac{1}{2}\right)^- \right| = 0.$$

Замечание. Модифицированный отрезок естественно возникает, если при определении действительных чисел по методу Вейерштрасса (а не по методу Дедекинда или Кантора) с помощью двоичных дробей особое и допустимое представления двоично-рациональных чисел считать различными числами. Тем самым для аргументов функций рассматриваем некое "расширенное понятие действительного числа".

С учетом последнего замечания можно считать, что все построения проводим на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$, но используем сокращенные обозначения $[0, 1)$ вместо $[0, 1]^*$, $[0, \frac{1}{2})$ вместо $[0^+, (\frac{1}{2})^-]$, $[\frac{1}{2}, 1)$ вместо $[(\frac{1}{2})^+, 1^-]$ и так далее. Введем также следующие обозначения $\Delta_1^0 = [0, \frac{1}{2})$, $\Delta_1^1 = [\frac{1}{2}, 1)$ и в общем случае $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ – для k -го интервала n -го ранга (он же отрезок $[\frac{k}{2^n}^+, \frac{k+1}{2^n}^-]$ на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$).

Замечание. В теории рядов Уолша есть много случаев (например, в вопросах единственности), когда подобный подход недопустим. В данном пособии затрагиваем только простейшие свойства рядов Уолша, допускающие одинаковую формулировку как для полуинтервала $[0, 1)$, так и для модифицированного отрезка $[0, 1]^*$. В частности, не рассматриваются обобщенные функции, двоичные производные и модифицированные двоичные интегралы (см. [7]). Предложенный подход позволяет проще перенести результаты на дискретный случай и более соответствует изложению в терминах компьютерной математики.

Заметим, что $\Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{2k} \cup \Delta_{n+1}^{2k+1}$.

Утверждение 1. Функция Радемахера $r_n(x)$ постоянна на интервале Δ_m^k , ранг которого больше ($n < m$) номера функции. В частности,

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ -1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{2k+1}. \end{cases}$$

Следствие. Если $x \in \Delta_m^k$, то $r_{m-1}(x) = (-1)^k$.

Лемма 1. Интеграл от функции Радемахера по интервалу ранга, совпадающего с номером функции, равен нулю, то есть $\int_{\Delta_n^k} r_n(x) dx = 0$.

Доказательство. Так как $|\Delta_{n+1}^{2k}| = |\Delta_{n+1}^{2k+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}$, то

$$\int_{\Delta_n^k} r_n(x) dx = \int_{\Delta_{n+1}^{2k}} dx - \int_{\Delta_{n+1}^{2k+1}} dx = 0. \quad \square$$

Так как $[0; 1) = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_n^k$, то получаем

Следствие. Верно $\int_0^1 r_n(x) dx = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 2. Система функций Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на $[0, 1)$.

Доказательство. Во-первых, $(r_n, r_n) = \int_0^1 r_n^2(x) dx = \int_0^1 dx = 1$.

Во-вторых, при $m > n$, имеем

$$(r_n, r_m) = \int_0^1 r_n(x) \cdot r_m(x) dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} r_m(x) \cdot r_n(x) dx.$$

Так как функция $r_n(x)$ постоянна на интервале Δ_m^k , то по лемме 1 имеем $\int_{\Delta_m^k} r_m(x) r_n(x) dx = 0$ для всех k . Следовательно, $(r_n, r_m) = 0$. \square

Замечание. Система функций Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=0}^\infty$ не полна на $[0, 1)$.

Действительно, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{3}{4}, 1), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \end{cases}$ орто-

гональна всем функциям Радемахера, но не является нулевой функцией в $L_2[0, 1)$.

Определение 1. Функция Уолша есть произведение функций Радемахера. Множество функций Уолша есть множество всевозможных произведений функций Радемахера.

В этом определении было бы уместно говорить о "различных функциях Радемахера так как квадрат любой функции Радемахера равен начальной функции Уолша $w_0(x) \equiv 1$, которая и является единственным исключением из этого правила.

Описание функций Уолша появилось в статье Уолша в 1923 г., хотя есть упоминания о том, что Ганс Радемахер и ранее занимался изучением этих функций и получил ряд интересных свойств.

10.2 Система Уолша в нумерации Пэли

Система Уолша есть множество функций Уолша, занумерованное целыми неотрицательными числами, то есть элементами множества \mathbb{N}_0 .

Основной нумерацией системы Уолша является нумерация, предложенная Пэли в 1932 г. Если говорят система Уолша, то подразумевают нумерацию Пэли. Систему Уолша-Пэли будем обозначать $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Полагаем $w_0(x) \equiv 1$. Основные (образующие) функции системы Уолша-Пэли совпадают с функциями Радемахера:

$$w_1(x) = r_0(x), w_2(x) = r_1(x), \dots, w_{2^n}(x) = r_n(x), \dots$$

Для остальных номеров функций Уолша разложим номер n в двоичной системе счисления:

$$n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + \dots + n_m 2^{m-1}, \quad (1)$$

где $n_i \in \{0, 1\}$, $n_m = 1$. Тогда (рис. 10.1)

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (r_k(x))^{n_{k+1}} = r_0^{n_1} \cdot r_1^{n_2} \cdot \dots \cdot r_{m-1}^{n_m}. \quad (2)$$

Число m , равное числу разрядов в двоичной записи числа n , находится из условия $2^{m-1} \leq n < 2^m$.

Замечание. Для разложения (1) часто используется форма записи в виде $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$, где полагаем $n_k = 0$ при $k > m$, что позволяет представить и число 0 в аналогичном виде.

Все натуральные числа в соответствии с представлением (1) группируются по пачкам, где m -й пачкой (которую обозначаем $]m[$) называем множество чисел от 2^m до $2^{m+1} - 1$ включительно.

Если в разложении (1) числа $n \in]m - 1[$ оставим только ненулевые слагаемые, то получим разложение

$$n = 2^{\epsilon_1} + 2^{\epsilon_2} + \dots + 2^{\epsilon_\nu}, \quad (3)$$

где $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_\nu = m - 1$. Тогда функции Уолша при $n \neq 0$ определяют как произведение различных функций Радемахера

$$w_n(x) = r_{\epsilon_1}(x) \cdot r_{\epsilon_2}(x) \cdot \dots \cdot r_{\epsilon_\nu}(x).$$

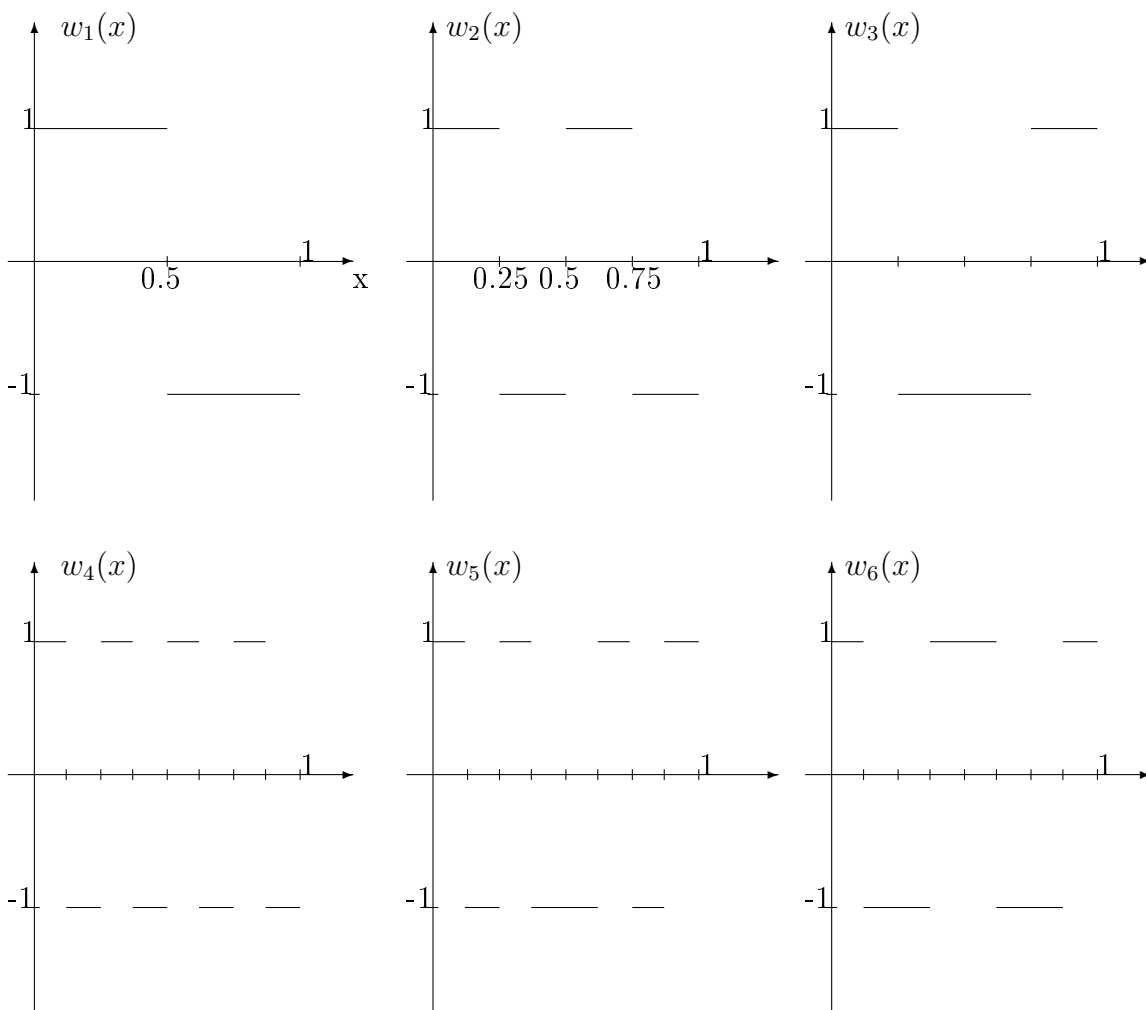


Рис. 10.1: Функции Уолша

Утверждение 2 (индуктивное определение функций Уолша-Пэли).
Если $n = 2^{m-1} + k$, где $k < 2^{m-1}$, то

$$w_n(x) = w_{2^{m-1}}(x) \cdot w_k(x).$$

Лемма 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$\int_{\Delta_m^k} w_n(x) dx = 0, \quad \text{где } n \in]m[\text{ и } k = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1,$$

и

$$\int_0^1 w_n(x) dx = 0.$$

Доказательство для номеров вида $n = 2^m$ (то есть для функций Радемахера) приведено в лемме 1. Если $n = 2^m + l$, где $l < 2^m$, то по утверждению 2 представим $w_n = w_{2^m} \cdot w_l$. Применим лемму 1, заметив, что по утверждению 1 функция $w_l(x)$ постоянна на интервале Δ_m^k :

$$\int_{\Delta_m^k} w_{2^m}(x)w_l(x) dx = \pm \int_{\Delta_m^k} r_m(x) dx = 0.$$

Отсюда вытекает второе утверждение

$$\int_0^1 w_n(x)dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} w_n(x)dx = 0. \quad \square$$

Следствие. Система функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована на $[0,1)$.

Доказательство. Во-первых, $(w_n, w_n) = \int_0^1 w_n^2(x) dx = \int_0^1 dx = 1$.

Во-вторых, так как произведение различных функций Уолша есть функция Уолша с ненулевым номером, то по лемме 3 имеем $(w_n, w_m) = 0$ при $n \neq m$.

10.3 Функции Уолша как группа; функции Уолша на группе

Обозначим символом W множество функций Уолша.

Теорема 1. *Группа функций Уолша (W, \cdot) есть мультипликативное представление изоморфных групп: группы целых неотрицательных чисел относительно операции $\dot{+}$ и группы бесконечных финитных последовательностей из нулей и единиц с операцией покоординатного сложения по модулю 2*

$$(W, \cdot) \simeq (\mathbb{N}_0, \dot{+}) \simeq (X_\infty, \oplus).$$

Доказательство приведем в виде двух лемм (4 и 5) и рассуждений между ними.

Лемма 4. *Множество функций Уолша есть абелева группа по умножению (W, \cdot) .*

Доказательство. Замкнутость и коммутативность операции очевидна по определению. Ассоциативность произведения справедлива для любых функций.

Нейтральным элементом служит функция $w_0(x) \equiv 1$.

Из соотношения $(r_n(x))^2 = w_0(x)$ вытекает, что для любой функции Уолша $w(x)$ верно $w(x) \cdot w(x) = w_0(x)$. То есть каждая функция Уолша (кроме w_0) имеет порядок 2 и является своим обратным элементом в этой группе. \square

Напомним, что каждому $n \in \mathbb{N}_0$ вида (1) можно поставить в соответствие финитную последовательность из нулей и единиц

$$\tilde{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m, 0, 0, \dots). \quad (4)$$

Отображение из множества \mathbb{N}_0 во множество (которое обозначили W) функций Уолша как переход от формулы (1) к формуле (2) есть изоморфизм данных множеств. Итак, множества W , \mathbb{N}_0 и X_∞ (финитных последовательностей из нулей и единиц) изоморфны.

В гл. 2 проверили, что множество X_∞ финитных последовательностей служит абелевой группой относительно операции \oplus по координатного сложения по модулю 2: если $\tilde{k} = (k_1, k_2, \dots, k_l, 0, 0, \dots)$, то

$$\tilde{n} \oplus \tilde{k} = (n_1 \dot{+} k_1, n_2 \dot{+} k_2, \dots),$$

где $\dot{+}$ есть операция в группе \mathbb{Z}_2 : $0 \dot{+} 0 = 0$, $0 \dot{+} 1 = 1$, $1 \dot{+} 1 = 0$.

Аналогично, множество \mathbb{N}_0 целых неотрицательных чисел есть абелева группа относительно операции $\dot{+}$ (использовали тот же символ), введенной через операцию $\dot{+}$ в группе \mathbb{Z}_2 по правилу:

если $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_{i+1} \cdot 2^i$, $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_{i+1} \cdot 2^i$, $\in \mathbb{N}_0$ то

$$n \dot{+} k = \sum_{i=0}^{\infty} (n_{i+1} \dot{+} k_{i+1}) \cdot 2^i.$$

Для справедливости теоремы 1 осталось установить следующее условие гомоморфизма групп $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$ и (W, \cdot) .

Лемма 5. *Функции Уолша мультипликативны по номеру*

$$w_n(x) \cdot w_k(x) = w_{n+k}(x).$$

Доказательство. В произведении конечного числа сомножителей (сомножитель, равный единице, можно считать отсутствующим)

$$w_n(x) \cdot w_k(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (r_{i-1}(x))^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (r_{i-1}(x))^{k_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (r_{i-1}(x))^{n_i+k_i}$$

покоординатное сложение в показателе можно заменить на покоординатное сложение в показателе по модулю 2, так как квадрат любой функции Радемахера равен единице. \square

Функции Уолша можно рассматривать как функции, определенные на группе.

Областью определения функций Уолша считается модифицированный отрезок $[0, 1]^*$. Так как в данном рассмотрении модифицированный отрезок играет существенное значение, то временно откажемся от упрощенного обозначения модифицированного отрезка в виде $[0, 1)$. Для любых $x, y \in [0, 1]^*$ существуют единственные двоичные представления

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}, \quad (5)$$

которым соответствуют последовательности из нулей и единиц

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in Z_2^{\infty}.$$

Перенесем операцию \oplus покоординатного сложения по модулю 2 с множества X_{∞} на множество Z_2^{∞} : определим $\tilde{z} = \tilde{x} \oplus \tilde{y}$, если $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) \in Z_2^{\infty}$ и $z_k = x_k \dot{+} y_k$.

Аналогично вводится операция $\dot{+}$ для $x, y \in [0, 1]^*$ вида (5) через операцию $\dot{+}$ в группе \mathbb{Z}_2 по правилу:

$$x \dot{+} y = z \in [0, 1]^* \quad , \quad \text{где} \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k}, \quad z_k = x_k \dot{+} y_k.$$

Изоморфные топологические группы $([0, 1]^*, \dot{+})$ и (Z_2^∞, \oplus) (они же компактные топологические пространства) являются областью определения функций Уолша. Математики основным объектом считают *двоичную группу Кантора* (Z_2^∞, \oplus) , а модифицированный отрезок с операцией $([0, 1]^*, \dot{+})$ ее геометрической моделью.

Для $n \in \mathbb{N}_0$ вида (1) и $x \in [0, 1]^*$ вида (5) в гл. 2 ввели бинарную операцию *скалярного произведения* по формуле

$$(n, x) = (\tilde{n}, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k \pmod{2},$$

где результат вычисления суммы берется по модулю 2. Так как последовательность \tilde{n} финитна, то в данной сумме конечное число ненулевых слагаемых (сумма финитна).

Лемма 6. *Определение функций Уолша в нумерации Пэли, данное формулой (2), можно представить в виде*

$$w_n(x) = (-1)^{(n, x)}. \quad (6)$$

Доказательство. Представление (5) разобьем на два слагаемых

$$x = \sum_{n=1}^m \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

первое из которых обозначим $\frac{k}{2^m}$, где $k = \sum_{n=1}^m x_n \cdot 2^{m-n}$. Тогда $x \in \Delta_m^k$. Число $x_m \in \{0, 1\}$ определяет четность числа k . Из следствия утверждения 1 вытекает

$$r_{m-1}(x) = (-1)^k = (-1)^{x_m}.$$

Подставим в формулу (2):

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} ((-1)^{x_{k+1}})^{n_{k+1}} = \prod_{k=1}^m (-1)^{x_k n_k} = (-1)^{\sum_{k=1}^m n_k x_k}.$$

Значение выражения не изменится, если последнюю сумму понимать как сумму по модулю 2 и бесконечно продолжить нулевыми слагаемыми. \square

Свойство $(n, x \dot{+} y) = (n, x) \dot{+} (n, y)$ скалярного произведения позволяет получить следующее

Следствие. Любая функция Уолша мультипликативна по аргументу

$$w_n(x) \cdot w_n(y) = w_n(x \dot{+} y).$$

Отметим, что установленное в лемме 5 свойство мультипликативности функций Уолша по номеру также вытекает из формулы (6) и следующего свойства скалярного произведения $(n \dot{+} m, x) = (n, x) \dot{+} (m, x)$.

Введенное скалярное произведение есть отображение $\mathbb{N}_0 \times [0, 1]^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (или отображение $X_\infty \times \mathbb{Z}_2^\infty \rightarrow \{0, 1\}$ для представлений в виде последовательностей), которое при фиксированном одном сомножителе можно также рассматривать как *линейный функционал* над полем \mathbb{Z}_2 . Следовательно, линейные пространства X_∞ и \mathbb{Z}_2^∞ над полем \mathbb{Z}_2 являются *сопряженными*.

Во множестве последовательностей \mathbb{Z}_2^∞ выделим цепочку вложенных подмножеств

$$\mathbb{Z}_2^\infty = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \dots \supset X^{(m)} \supset X^{(m+1)} \supset \dots,$$

где $X^{(m)} = \{x \mid x = (0, 0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)\}$, составляющую систему окрестностей нуля в топологическом пространстве последовательностей \mathbb{Z}_2^∞ . Последовательность вложенных множеств $\{\Delta_m^0\}$ есть система окрестностей нуля в изоморфной топологической группе $([0, 1]^*, \dot{+})$. Система окрестностей нуля задает топологию на группе.

Согласно отмеченным свойствам мультипликативности система Уолша является *системой характеров* сопряженных топологических групп X_∞ и \mathbb{Z}_2^∞ последовательностей из нулей и единиц. Каждая функция Уолша есть характер на группе \mathbb{Z}_2^∞ , а все функции Уолша при фиксированном аргументе есть характер на группе X_∞ финитных последовательностей.

Система характеров определяется следующими условиями. Во-первых, значение каждого характера по модулю равно единице. Во-вторых, произведение характеров есть снова характер. В-третьих, обратная величина характера (характер в минус первой степени) есть снова характер.

Первое свойство верно по определению. Выполнение второго свойства гарантирует мультипликативность по номеру и аргументу. Каждая функция Уолша обратна к себе.

10.4 Ряд Фурье по системе Уолша

Предполагаем $f \in L[0, 1)$, то есть $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$. Выражение

$$\sigma[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x)$$

есть ряд Фурье функции $f(x)$ по системе Уолша, где

$$c_k = c_k[f] = \int_0^1 f(x) w_k(x) dx$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе Уолша. Тогда

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(x)$$

есть частная сумма ряда Фурье по системе Уолша. Свойство мультипликативности функций Уолша позволяет получить интегральное представление частной суммы

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(t) w_k(t) dt \cdot w_k(x) = \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t) w_k(x) dt = \\ &= \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t \dot{+} x) dt. \end{aligned}$$

Применяя обозначение

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t)$$

для **ядра Дирихле** по системе Уолша-Пэли, получим интегральное представление частной суммы

$$S_n(f, x) = \int_0^1 f(t \dot{+} x) D_n(t) dt, \quad (7)$$

согласно равенству $\int_0^1 f(t)D_n(t \dot{+} x)dt = \int_0^1 f(t \dot{+} x)D_n(t) dt$, соотношению $t \dot{+} x \dot{+} x = t$ и инвариантности интеграла относительно сдвига.

Из леммы 3 вытекает, что $\int_0^1 D_n(t) dt = 1$. Если значение функции в точке представим в виде $f(x) = \int_0^1 f(x)D_n(t) dt$ и вычтем его из (7), то получим отклонение частной суммы от функции

$$S_n(f, x) - f(x) = \int_0^1 [f(x \dot{+} t) - f(x)]D_n(t) dt. \quad (8)$$

Двоичной сверткой функций $f, g \in L[0, 1]$ называется

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t \dot{+} x)g(t) dt = \int_0^1 f(t)g(t \dot{+} x) dt. \quad (9)$$

Формулу (7) можно записать в виде $S_n(f) = f * D_n$.

Если ряд Фурье-Уолша суммировать методом средних арифметических

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n}(S_1(f, x) + S_2(f, x) + \dots + S_n(f, x)),$$

то из формулы (7) получаем интегральное представление *суммы Фейера*

$$\sigma_n(f, x) = \int_0^1 f(t \dot{+} x)F_n(t) dt = (f * F_n)(x)$$

через свертку с *ядром Фейера* $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k(t)$ системы Уолша-Пэли.

Отметим простейшие свойства ядра Дирихле системы Уолша-Пэли.

Лемма 7. *Если $n \in]m - 1[$, то есть $n = 2^{m-1} + n'$, где $n' < 2^{m-1}$, то*

$$D_n(x) = D_{2^{m-1}}(x) + w_{2^{m-1}}(x)D_{n'}(x).$$

Доказательство. Группировкой слагаемых с использованием мультипликативности по номеру получаем

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} w_k(x) + \sum_{k=2^{m-1}}^{2^{m-1}+n'-1} w_k(x) =$$

$$= D_{2^{m-1}}(x) + \sum_{k'=0}^{n'-1} w_{2^{m-1}+k'}(x) = D_{2^{m-1}}(x) + w_{2^{m-1}}(x) \sum_{k'=0}^{n'-1} w_{k'}(x).$$

Следствие. Ядро Дирихле с номером 2^m выражается через функции Радемахера

$$D_{2^m}(x) = (1 + r_0(x)) \cdot (1 + r_1(x)) \cdot \dots \cdot (1 + r_{m-1}(x)).$$

Доказательство. Лемма 7 верна и при $n' = 2^{m-1}$:

$$D_{2^m} = D_{2^{m-1}} + w_{2^{m-1}} \cdot D_{2^{m-1}} = D_{2^{m-1}} \cdot (1 + r_{m-1}).$$

К $D_{2^{m-1}}$ применим это же соотношение: $D_{2^m} = D_{2^{m-2}} \cdot (1 + r_{m-2}) \cdot (1 + r_{m-1})$.

И так далее $D_{2^m} = (1 + r_0) \cdot (1 + r_1) \cdot \dots \cdot (1 + r_{m-1})$. \square

Лемма 8 (Пэли). Для ядра Дирихле имеем

$$D_{2^m}(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in \Delta_m^0 = [0, 2^{-m}), \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-m}, 1). \end{cases}$$

Доказательство вытекает из соотношений

$$1 + r_{k-1}(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in \Delta_k^0 = [0, \frac{1}{2^k}), \\ 0, & \text{если } x \in \Delta_k^1 \subset \Delta_{k-1}^0, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \dots, m$, примененных к предыдущему следствию.

Следствие. Для любых $s, m \in \mathbb{N}$, $0 < k < 2^m$ и $x \in [2^{-m}, 1)$ имеем: $D_{s2^m}(x) = 0$ и $D_{s2^m+k}(x) = w_{s2^m}(x) \cdot D_k(x)$.

Доказательство. Применим конструкцию леммы 7 и лемму Пэли:

$$D_{s2^m}(x) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} w_{l2^m+k}(x) = \sum_{l=0}^{s-1} w_{l2^m}(x) \cdot D_{2^m}(x) = 0$$

при $x \in [2^{-m}, 1)$.

Аналогично, при $x \in [2^{-m}, 1)$:

$$D_{s2^m+k}(x) = D_{s2^m}(x) + \sum_{n=0}^{k-1} w_{s2^m+n}(x) = 0 + w_{s2^m}(x) \cdot D_k(x). \quad \square$$

Из теоремы Мерсера (теорема 8.7) вытекает

Утверждение 3. Если $f \in L[0, 1]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n[f] = 0$.

Символом $\Delta_m(x)$ обозначаем тот интервал n -го ранга, в котором содержится x .

Теорема 2 (принцип локализации Римана). Пусть $f \in L[0, 1]$ и $f(x) = 0$ при $x \in \Delta_m(x_0)$ для некоторого m . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = 0$$

и, в частности, справедливо $S_{2^k}(f; x_0) = 0$ при $k \geq m$.

Доказательство. Второе (не основное) утверждение вытекает из интегрального представления (7) и леммы Пэли

$$S_{2^k}(f; x_0) = \int_0^1 f(t \dot{+} x_0) D_{2^k}(t) dt = 2^k \int_{\Delta_k^0} f(t \dot{+} x_0) dt = 2^k \int_{\Delta_k(x_0)} f(t) dt = 0.$$

Для n вида $s2^m + k$, где $0 < k < 2^m$, воспользуемся интегральным представлением (7), условием $f(x) = 0$ при $x \in \Delta_m(x_0)$ и предыдущим следствием:

$$S_n(f; x_0) = \int_{\Delta_0 \setminus \Delta_m^0} f(t \dot{+} x_0) \cdot D_k(t) \cdot w_{s2^m}(t) dt.$$

Введем $2^m - 1$ функций при $k = 1, 2, 3, \dots, 2^m - 1$

$$\varphi(t) = \varphi(t; x_0, k) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Delta_m^0, \\ f(t \dot{+} x_0) D_k(t), & \text{если } x \notin \Delta_m^0. \end{cases}$$

Согласно ограниченности ядра Дирихле каждая из введенных функций суммируема. В этих обозначениях $S_n(f; x_0) = c_{s2^m}[\varphi]$, то есть частная сумма равна коэффициенту Фурье-Уолша одной из введенных функций. По теореме Мерсера (утверждение 3) при $n \rightarrow \infty$ ($n > s2^m \geq n - 2^m$) коэффициенты Фурье-Уолша стремятся к нулю. \square

Обозначим Λ_n – класс 2^{-n} -ступенчатых функций: полагаем $f \in \Lambda_n$, если $f(x)$ постоянна на каждом интервале n -го ранга $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n})$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Лемма 9. Если $f \in L[0, 1]$, то частная сумма с номером 2^m в любой точке равна среднему значению функции на интервале m -го ранга, содержащем x , то есть

$$S_{2^m}(f, x) = 2^m \int_{\Delta_m(x)} f(t) dt.$$

Если $f \in \Lambda_m$ и $k \geq 2^m$, то $S_k(f) \equiv f$.

Доказательство. По формуле (7) и лемме Пэли получим

$$S_{2^m}(f, x) = \int_0^1 f(x \dot{+} t) D_{2^m}(t) dt = 2^m \cdot \int_{\Delta_m^0} f(x \dot{+} t) dt$$

и применим формулу $\int_{\Delta_m(x)} f(t) dt = \int_{\Delta_m^0} f(x \dot{+} t) dt$, которая составляет свойство инвариантности интеграла относительно сдвига.

Пусть $f \in \Lambda_m$. Равенство $S_{2^m}(f) = f$ очевидно. Если $k > 2^m$, то по лемме 3 получаем

$$c_k[f] = \sum_{i=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^i} f(x) w_k(x) dx = \sum_{i=0}^{2^m-1} f(\Delta_m^i) \int_{\Delta_m^i} w_k(x) dx = 0. \quad \square$$

Операцией *квантования* (2^m -усреднения) непрерывного сигнала называется операция перехода от функции $f \in L[0, 1]$ к функции $f_m \in \Lambda_m$ такой, что для всех $x \in [0, 1)$ выполнено $f_m(x) = 2^m \int_{\Delta_m(x)} f(t) dt$.

Лемма 9 утверждает, что переход к частной сумме Фурье-Уолша с номером 2^m есть операция 2^m -усреднения.

Лемма 10. Коэффициенты Фурье-Уолша с номерами $i < 2^m$ для функции $f \in L[0, 1]$ и ее 2^m -усреднения $f_m \in \Lambda_m$ совпадают.

Доказательство. Так как функция $w_i(x)$ постоянна на Δ_m^k , то

$$c_i[f] = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} f(x) w_i(x) dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} f_m(x) w_i(x) dx = c_i[f_m].$$

Из двух предыдущих лемм вытекает

Следствие. Ряд по системе Уолша будет рядом Фурье-Уолша некоторой функции $f \in L[0, 1]$ тогда и только тогда, когда все частные суммы с номерами 2^m совпадают с 2^m -усреднениями функции.

В замечании к лемме 2 отмечено, что система Радемахера не полна.

Теорема 3. Система Уолша полна в $L[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ ортогональна всем функциям Уолша, то есть $c_n[f] = (f, w_n) = 0$ для всех n . Тогда $S_{2^n}(f, x) \equiv 0$ для всех n . Отсюда по лемме 9 получаем, что $\int_{\Delta_n^k} f(t) dt = 0$ для всех $n, k \in \mathbb{N}_0$. Для интеграла $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ с переменным верхним пределом от выбранной функции выполняется $\Phi(x) = 0$ во всех двоично-рациональных точках x . Так как функция $\Phi(x)$ абсолютно непрерывная, то $\Phi(x) = 0$ всюду и $\Phi'(x) = f(x)$ почти всюду. Следовательно, $f'(x) = 0$ почти всюду. \square

Так как $L_p[0, 1] \subset L[0, 1]$, то получаем

Следствие. Система Уолша полна в $L_p[0, 1]$ при $p \geq 1$.

Утверждение 4. Система Уолша замкнута в $L_p[0, 1]$ при $p \geq 1$ и в $C[0, 1]$.

В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{2^n}(f) - f\|_p = 0.$$

Данное утверждение можно переформулировать в следующем виде: для любой $f \in L_p[0, 1]$ (или $f \in C[0, 1]$) и произвольного $\epsilon > 0$ найдется многочлен $T(x)$ по системе Уолша такой, что $\|f - T\|_p < \epsilon$ (или $\|f - T\|_{C[0,1]} < \epsilon$).

Доказать утверждение можно: 1) ссылкой на теорему о связи полноты и замкнутости в сопряженных пространствах; 2) непосредственно, воспользовавшись утверждением о том, что объединение классов Λ_m всюду плотно в $C[0, 1]$, а класс $C[0, 1]$ всюду плотен в $L_p[0, 1]$ при любом $p \geq 1$.

Как следствие полноты и замкнутости в $L_2[0, 1]$ получаем следующее

Утверждение 5. Для любой $f \in L_2[0, 1]$ имеет место равенство **Парсеваля**

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k[f])^2,$$

где $c_k[f] = \int_0^1 f(x)w_k(x) dx$.

10.5 Операции над рядами Фурье-Уолша

Отметим сначала простое полезное соотношение.

Лемма 11. *Если $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1)$, то*

$$w_n(x) = w_{2n}(x/2).$$

Доказательство. Для n вида (1) имеем $2n = \sum_{k=1}^m n_k 2^k$. Так как $r_k(\frac{x}{2}) = r_{k-1}(x)$, то по формуле (2) получим

$$w_{2n}(x/2) = \prod_{k=1}^m (r_k(x/2))^{n_k} = \prod_{k=1}^m (r_{k-1}(x))^{n_k} = w_n(x).$$

Следствие. *Если $x \in [0, 1/2)$, то $w_{2k}(x) = w_k(2x)$.*

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе Уолша состоит :

- 1) в вычислении коэффициентов Уолша $c_n = c_n[f] = \int_0^1 f(x)w_n(x) dx$;
- 2) формальной записи ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$.

Поэтому первый этап разложения можно рассматривать как операцию перехода от функции $f(x)$ к последовательности коэффициентов Фурье-Уолша

$$\hat{f} = c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots),$$

которую иногда ошибочно называют преобразованием (или дискретным преобразованием) Уолша.

Этот переход от $f(x)$ к \hat{f} осуществляется применением некоторого оператора $F : L[0, 1] \rightarrow \mathbf{s}_0$, который преобразует суммируемую функцию в последовательность, сходящуюся к нулю (согласно утверждению 3).

Укажем свойства данного оператора, которые являются также свойствами коэффициентов Фурье-Уолша (полагая $f, g \in L[0, 1]$). Операторную форму записи укажем в скобках.

1. **ЛИНЕЙНОСТЬ.**

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), то

$$c_n[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot c_n[f] + \beta \cdot c_n[g]; \quad (\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \cdot \hat{f} + \beta \cdot \hat{g}).$$

Доказательство очевидно из линейности определенного интеграла.

2. СДВИГ.

Если $f_a(x) = f(x \dot{+} a)$ есть сдвиг функции $f(x)$ на элемент a , то

$$c_n[f_a] = c_n[f] \cdot w_n(a); \quad (\hat{f}_a = \hat{f} \times \hat{w}(a)).$$

Доказательство. Так как квадрат любой функции Уолша равен 1, то

$$c_n[f_a] = \int_0^1 f(x \dot{+} a) w_n(x) dx = \int_0^1 f(x \dot{+} a) \cdot w_n(x) \cdot w_n(a) dx \cdot w_n(a).$$

Воспользуемся мультипликативностью по аргументу и инвариантностью интеграла относительно сдвига

$$c_n[f_a] = \int_0^1 f(x \dot{+} a) w_n(x \dot{+} a) dx \cdot w_n(a) = c_n[f] \cdot w_n(a).$$

При операторной форме записи используется формальное обозначение $\hat{w}(a)$ для последовательности значений всех функций Уолша в точке a (не принадлежащая \mathbf{s}_0 в случае двоично-иррационального a) и операция \times по координатного перемножения последовательностей, которая используется и в дальнейшем.

По формуле (6) можно записать $w_n(a) = (-1)^{(n,a)}$ и при фиксированном a с переменным n рассматривать $w_n(a)$ как характер элемента a из группы последовательностей из нулей и единиц.

3. УМНОЖЕНИЕ НА ХАРАКТЕР.

Последовательность коэффициентов Фурье-Уолша функции, полученной умножением $f(x)$ на функцию Уолша, есть групповой сдвиг последовательности коэффициентов Фурье-Уолша функции

$$c_n[f \cdot w_k] = c_{n \dot{+} k}[f]; \quad (\widehat{f \cdot w_k} = (\hat{f})_k).$$

Доказательство. Воспользуемся мультипликативностью по номеру

$$c_n[f \cdot w_k] = \int_0^1 f(x) w_k(x) w_n(x) dx = \int_0^1 f(x) w_{k \dot{+} n}(x) dx = c_{k \dot{+} n}[f].$$

В операторной форме записи использовано обозначение для сдвига последовательности на число $k \in \mathbb{N}$.

4. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ.

Коэффициент Фурье-Уолша двоичной свертки равен произведению коэффициентов Фурье-Уолша

$$c_n[f * g] = c_n[f] \cdot c_n[g]; \quad (\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}).$$

Доказательство. Так как $f, g \in L[0, 1]$ и $|w_n(x)| = 1$, то по теореме Фубини можно поменять порядок интегрирования

$$c_n[f * g] = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x \dot{+} t) g(t) dt \right) w_n(x) dx = \int_0^1 g(t) \left(\int_0^1 f(x \dot{+} t) w_n(x) dx \right) dt.$$

Если домножим на $(w_n(t))^2 = 1$, то получим

$$c_n[f * g] = \int_0^1 g(t) \cdot w_n(t) \left(\int_0^1 f(x \dot{+} t) \cdot w_n(x) \cdot w_n(t) dx \right) dt = c_n[f] \cdot c_n[g].$$

5. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ.

Если $f \in L_p[0, 1]$, $g \in L_{p'}[0, 1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то последовательность коэффициентов Фурье-Уолша произведения функций есть двоичная свертка последовательностей коэффициентов Фурье-Уолша функций

$$c_n[f \cdot g] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k}[f] \cdot c_k[g]; \quad (\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}).$$

Доказательство. В наших предположениях $f \cdot g \in L[0, 1]$ согласно неравенству Гельдера.

Из сходимости $S_m(f, x) \rightarrow f(x)$ в $L_p[0, 1]$ следует слабая сходимость (так как $g \cdot w_n \in L_{p'}[0, 1]$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 S_m(f, x) \cdot g(x) \cdot w_n(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \cdot w_n(x) dx.$$

Для конечной суммы по свойству линейности интеграла

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k[f] \cdot w_k(x) \right) \cdot g(x) \cdot w_n(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} c_k[f] \cdot \int_0^1 g(x) \cdot w_{n+k}(x) dx.$$

Если перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, то получим

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x) w_n(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k[f] \cdot c_{n+k}[g].$$

Очевидно, что $\sum_{k=0}^{\infty} c_k[f] \cdot c_{n+k}[g] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k}[f] \cdot c_k[g]$.

Следствие. Если $f \in L_p[0, 1]$, $g \in L_{p'}[0, 1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то справедливо обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k[f] \cdot c_k[g] \quad \left((f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \right).$$

Доказательство. Возьмем $n = 0$.

Замечание. Для случая крайних ($p = 1$, $p = \infty$) пространств для выполнения данного утверждения необходимо добавить дополнительные условия.

6. СЖАТИЕ ФУНКЦИИ.

А. Если $f(x)$ периодическая с периодом $T = 1$ и $g(x) = f(2x)$ есть сжатая в два раза функция, то

$$c_{2n}[g] = c_n[f], \quad c_{2n+1}[g] = 0.$$

В. Если сжатие произведено только на единичном отрезке, то есть

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{при } x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{то}$$

$$c_{2n}[g] = c_{2n+1}[g] = \frac{1}{2}c_n[f].$$

C. Для сжатия со сдвигом $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ f(2x - 1) & \text{при } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$
имеем

$$c_{2n}[g] = -c_{2n+1}[g] = \frac{1}{2}c_n[f].$$

Доказательство. По лемме 11 имеем

$$c_{2n}[g] = \int_0^1 f(2x)w_{2n}(x) dx = 2 \int_0^{1/2} f(2x)w_n(2x) dx = \int_0^1 f(t)w_n(t) dt.$$

Так как $w_{2n+1}(x) = w_{2n}(x) \cdot w_1(x)$, то $c_{2n+1}[g] =$
 $= \int_0^1 f(2x)w_{2n+1}(x) dx = \int_0^{1/2} f(2x)w_{2n}(x) dx - \int_{1/2}^1 f(2x)w_{2n}(x) dx = 0.$

Если функция f представима в виде ряда Уолша, то возможно более короткое доказательство пункта *A*:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[f] \cdot w_n(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[f] \cdot w_{2n}(x).$$

Так как $w_{2n}(x) + w_{2n+1}(x) = \begin{cases} 2w_{2n}(x) & \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{при } x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$ то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n[f]$.

$(w_{2n}(x) + w_{2n+1}(x))$ есть разложение функции из пункта *B*.

Функция из пункта *C* есть сдвиг на $\frac{1}{2}$ функции из пункта *B*. Требуемое соотношение вытекает из равенств $w_{2n}(\frac{1}{2}) = 1$, $w_{2n+1}(\frac{1}{2}) = -1$ применением пункта 2.

Следствие. А. При многократном сжатии функции периода $T = 1$ по формуле $g(x) = f(2^m x)$ происходит кратное прореживание последовательности коэффициентов:

$$c_{2^m \cdot n}[g] = c_n[f], \text{ остальные } c_k[g] \text{ равны нулю.}$$

B. При многократном сжатии на отрезке $[0, 1)$ по формуле

$$g(x) = \begin{cases} f(2^m x) & \text{при } x \in \Delta_m^0, \\ 0 & \text{при } x \in [2^{-m}, 1) \end{cases}$$

происходит дробление коэффициентов:

$$c_{k \cdot 2^m}[g] = c_{k \cdot 2^{m+1}}[g] = \dots = c_{k \cdot 2^{m+1} - 1}[g] = \frac{1}{2^m} c_k[f]; \dots$$

С. При многократном сжатии со сдвигом по формуле

$$g(x) = \begin{cases} f(2^m x - k) & \text{при } x \in \Delta_m^k, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1) \setminus \Delta_m^k \end{cases}$$

происходит дробление коэффициентов с расстановкой знаков:

$$c_{n \cdot 2^m + i}[g] = \frac{1}{2^m} \cdot c_n[f] \cdot w_i \left(\frac{k}{2^m} \right), \quad 0 \leq i, k < 2^m.$$

7. ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

При проектировании функции $f(x)$ на интервал m -го ранга по формуле

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in \Delta_m^k, 0 \leq k < 2^m, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1) \setminus \Delta_m^k \end{cases}$$

происходит преобразование коэффициентов пачки по формуле

$$c_{r \cdot 2^m + i}[g] = a_{ik} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{j=0}^{2^m - 1} c_{r \cdot 2^m + j}[f] \cdot a_{jk},$$

где

$$a_{jk} = w_k \left(\frac{i}{2^m} \right) = w_i \left(\frac{k}{2^m} \right), \quad 0 \leq i < 2^m.$$

В частности: при $k = 0$, $m = 1$ имеем

$$c_0[g] = c_1[g] = \frac{1}{2}(c_0[f] + c_1[f]); \quad c_2[g] = c_3[g] = \frac{1}{2}(c_2[f] + c_3[f]), \dots;$$

при $k = 1$, $m = 1$ имеем

$$c_0[g] = -c_1[g] = \frac{1}{2}(c_0[f] - c_1[f]); \quad c_2[g] = -c_3[g] = \frac{1}{2}(c_2[f] - c_3[f]), \dots;$$

при $k = 0$ имеем

$$c_0[g] = \dots = c_{2^m - 1}[g] = \frac{1}{2^m}(c_0[f] + \dots + c_{2^m - 1}[f]);$$

$$c_{r \cdot 2^m}[g] = \dots = c_{(r+1)2^m - 1}[g] = \frac{1}{2^m}(c_{r \cdot 2^m}[f] + \dots + c_{(r+1)2^m - 1}[f]); \dots$$

Доказательство. Введем характеристическую функцию интервала $I_m^k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta_m^k, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1) \setminus \Delta_m^k. \end{cases}$ Тогда $g(x) = f(x) \cdot I_m^k(x)$. Функцию $I_m^k(x)$ определим как сдвиг на элемент $\frac{k}{2^m}$ сжатого по вертикали ядра Дирихле из леммы Пэли:

$$I_m^k(x) = \left(\frac{1}{2^m} D_{2^m}(x) \right)_{\frac{k}{2^m}}.$$

Воспользуемся пунктами 1 и 2 (где \times есть введенная в пункте 2 операция покоординатного умножения последовательностей):

$$\widehat{I}_m^k = \frac{1}{2^m} (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \times (a_{0k}, a_{1k}, \dots) = \frac{1}{2^m} (a_{0k}, a_{1k}, \dots, a_{2^m-1k}, 0, 0, \dots),$$

где $a_{ik} = w_i(\frac{k}{2^m})$. По пункту 6 получаем $\widehat{g} = \widehat{f} * \widehat{I}_m^k$ или

$$c_n[g] = \sum_{i=0}^{\infty} c_i[f] \cdot c_{n+i}[I_m^k] = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^m-1} c_{s2^m+j}[f] \cdot c_{(s2^m+j)+n}[I_m^k].$$

Так как в последовательности \widehat{I}_m^k только первые 2^m координат отличны от нуля, то при $n = r2^m + i$, $i < 2^m$, получаем $((s2^m + j) + n) < 2^m$ при условии $s = r$. Значит

$$c_{r2^m+i}[g] = \sum_{j=0}^{2^m-1} c_{r2^m+j}[f] \cdot c_{j+i}[I_m^k].$$

Заметим, что $a_{j+i k} = w_{j+i}(\frac{k}{2^m}) = w_j(\frac{k}{2^m}) w_i(\frac{k}{2^m}) = a_{jk} a_{ik}$. Поэтому

$$c_{r2^m+i}[g] = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{2^m-1} c_{r2^m+j}[f] \cdot a_{jk} a_{ik}.$$

8. ШИРОКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

При проектировании по формуле $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, \frac{k}{2^m}), \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{k}{2^m}, 1), \end{cases}$ последовательность коэффициентов Фурье-Уолша полученной функции равна свертке последовательности коэффициентов Фурье-Уолша исходной функции с финитной последовательностью значений дробного ядра Дирихле

$$\widehat{g} = \widehat{f} * \widetilde{D}_{\frac{k}{2^m}}.$$

В формулировке утверждения появилось новое понятие *дробное ядро Дирихле*, которое определим как ядро Дирихле с двоично-рациональным (дробным) номером в целочисленных точках i ($0 \leq i \leq 2^m - 1$) равенством

$$D_{\frac{k}{2^m}}(i) := \frac{1}{2^m} D_k \left(\frac{i}{2^m} \right).$$

К обоснованию этого понятия обратимся в следующем параграфе и в гл. 15. Дробному ядру Дирихле $D_{\frac{k}{2^m}}$ поставим в соответствие финитную последовательность $\widetilde{D}_{\frac{k}{2^m}}$, первые 2^m координат которой совпадают со значениями $D_{\frac{k}{2^m}}(i)$ для номера координаты i , а остальные координаты равны нулю.

Доказательство. Так как $g(x) = f(x)I_{[0, \frac{k}{2^m})}(x)$, то по п. 5 получаем $\widehat{g} = \widehat{f} * \widehat{I_{[0, \frac{k}{2^m})}}$. Характеристическая функция интервала $[0, \frac{k}{2^m})$ как сумма сдвигов сжатого по вертикали ядра Дирихле, взятого из леммы Пэли, равняется

$$I_{[0, \frac{k}{2^m})}(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{2^m-1} w_i \left(\frac{j}{2^m} \right) w_i(x).$$

Поменяем порядок суммирования с учетом симметрии $a_{ij} = a_{ji}$:

$$I_{[0, \frac{k}{2^m})}(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{2^m-1} w_i(x) \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(\frac{i}{2^m} \right) = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{2^m-1} D_k \left(\frac{i}{2^m} \right) w_i(x).$$

Установили, что $\widehat{I_{[0, \frac{k}{2^m})}} = \widetilde{D}_{\frac{k}{2^m}}$.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Если $0 < k < 2^m$, то определенный интеграл по двоично-рациональной сетке вычисляется

$$\int_0^{\frac{k}{2^m}} f(x) dx = (\widehat{f}, \widetilde{D}_{\frac{k}{2^m}})$$

как скалярное произведение последовательности коэффициентов Фурье-Уолша на финитную последовательность значений дробного ядра Ди-

рихле. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то при $t \in [0, 1)$ верна и общая формула

$$\int_0^t f(x) dx = (\hat{f}, \widetilde{D}_t),$$

где \widetilde{D}_t – последовательность значений обобщенного ядра Дирихле, которое рассмотрим в главе преобразование Уолша.

Доказательство первой формулы вытекает для $g(x)$ из предыдущего пункта из соотношений $c_0[g] = \int_0^{\frac{k}{2^m}} f(x) dx$ и $\hat{g} = \hat{f} * \widetilde{D}_{\frac{k}{2^m}}$. Общий случай докажем в главе "Преобразование Уолша".

10.6 Ядро Дирихле

Рассмотрим более подробно свойства ядра Дирихле по системе Уолша, которое определяется формулой $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t)$.

Наличие интегрального представления (7) частной суммы в виде свертки с ядром Дирихле и формулы (8) для отклонения частной суммы позволяет выводить свойства рядов по системе Уолша из свойств ядра Дирихле.

Лемма 12 (ядро Дирихле с четным номером). Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$D_{2n}(x) = \begin{cases} 2D_n(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0, & \text{если } x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Доказательство. По утверждению 2 имеем $w_{2k+1} = w_{2k} \cdot w_1$. Следовательно, применяя лемму 11, имеем $w_{2k+1}(x) = w_{2k}(x) = w_k(2x)$ при $x \in [0, 1/2)$ и $w_{2k+1}(x) + w_{2k}(x) = 0$ при $x \in [1/2, 1)$. Поэтому

$$D_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_{2k}(x) + w_{2k+1}(x)) = \begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{n-1} w_k(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0, & \text{если } x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

$$\text{Следствие. Верно } D_{2^{k_n}}(x) = \begin{cases} 2^k D_n(2^k x), & \text{если } x \in \Delta_k^0, \\ 0, & \text{если } x \in [1/2^k, 1), \end{cases}$$

что при $n = 1$ дает лемму Пэли.

Как обращение данного следствия получаем определение ядра Дирихле с дробным номером (дробное ядро Дирихле):

$$D_{\frac{k}{2^n}}(x) = \frac{1}{2^n} \cdot D_k\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

где $x \in [0, 2^n)$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$. При $x \geq 2^n$ полагаем $D_{\frac{k}{2^n}}(x) = 0$.

Ядро Дирихле D_k есть ступенчатая функция, которая при $k \leq 2^n - 1$ определяется 2^n значениями. Финитную последовательность значений дробного ядра Дирихле, первые 2^n координат которой (ненулевые координаты) равны значениям функции $D_{\frac{k}{2^n}}(x)$ на целочисленных интервалах ($d_i = D_{\frac{k}{2^n}}(i)$), будем обозначать $\widetilde{D_{\frac{k}{2^n}}}$.

Лемма 13 (ядро Дирихле с нечетным номером). Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ верно

$$D_{2n+1}(x) = \begin{cases} D_n(2x) + D_{n+1}(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ w_{2n}(x), & \text{если } x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Доказательство. Значения ядер $D_n(x)$ и $D_{n+1}(x)$ в каждой точке x различаются на 1. Значит по лемме 12 при $x \in [0, 1/2)$ значения $D_{2n}(x)$ и $D_{2n+2}(x)$ различаются на 2 и следовательно

$$D_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}(D_{2n}(x) + D_{2n+2}(x)) = D_n(2x) + D_{n+1}(2x).$$

Если $x \in [1/2, 1)$, то по лемме 12 получим

$$D_{2n+1}(x) = D_{2n}(x) + w_{2n}(x) = w_{2n}(x). \quad \square$$

Введем понятие срезки числа $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$ формулой

$$[n]_i = n_1 \cdot 2^0 + n_2 \cdot 2^1 + \dots + n_i \cdot 2^{i-1}, \quad (10)$$

которую можно записать в двоичной системе счисления $n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1$ как i младших разрядов числа n . Следующие свойства срезки очевидны:

- 1) $[n]_i = n$ при $i \geq m$, где $2^{m-1} \leq n < 2^m$;
- 2) $0 \leq [n]_i \leq 2^i - 1$;
- 3) $2[n]_{i-1} = [2n]_i$;
- 4) если n четное, то $[n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = [2n+1]_i$.

При доказательстве последних двух свойств используется следующее наблюдение. Переход от числа n , представленного в двоичной системе счисления, к числам $2n$ и $2n+1$ есть сдвиг на одну позицию всех разрядов и добавление в младшем разряде знака 0 в случае $2n$ или добавление в младшем разряде знака 1 в случае числа $2n+1$.

Введем *отклонения числа n* формулой (как минимум из двух чисел)

$$\langle n \rangle_i = \min([n]_i, 2^i - [n]_i), \quad (11)$$

которое назовем *отклонением i -го ранга*.

Замечание. Представление отклонения i -го ранга в виде i -значного двоичного числа содержит 0 в i -м (старшем) разряде (первый пункт следующей леммы). Отклонение равно срезке, если в старшем разряде срезки стоит число 0 ($n_i = 0$). Если же в старшем разряде срезки стоит число 1 ($n_i = 1$), то двоичное представление отклонения получается из двоичного числа $n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1$ по известному в информатике правилу построения дополнительного кода: все разряды инвертируются и добавляется 1.

Лемма 14 (свойства отклонения).

1. Величина $\langle n \rangle_i$ не превосходит 2^{i-1} .
2. Отклонение выражается через отклонение чисел предыдущей пачки предыдущего ранга, а именно:

для четных чисел $\langle 2n \rangle_i = 2 \cdot \langle n \rangle_{i-1}$,

для нечетных чисел $\langle 2n+1 \rangle_i = \langle n \rangle_{i-1} + \langle n+1 \rangle_{i-1}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из определения отклонения.

Второе утверждение для четных чисел тоже очевидно по свойствам срезки:

$$\langle 2n \rangle_i = \min([2n]_i, 2^i - [2n]_i) = \min(2[n]_{i-1}, 2(2^{i-1} - [n]_{i-1})) = 2 \cdot \langle n \rangle_{i-1}.$$

Докажем утверждение: $[n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = [2n+1]_i$, если $[n]_{i-1} \neq 2^{i-1}$, которое установлено в случае четного n .

Если n нечетное и $[n]_{i-1}$ отличается от максимально возможного, то обозначим k номер младшего нулевого разряда; то есть $k < i-1$ такое, что $n_1 = n_2 = \dots = n_{k-1} = 1, n_k = 0$ в формуле (1) для n . Итак, в двоичной системе счисления числа $[n]_{i-1}$ и $[n+1]_{i-1}$ имеют вид $n_{i-1} \dots n_{k+1} 0 1 1 \dots 1$ и $n_{i-1} \dots n_{k+1} 1 0 0 \dots 0$ соответственно.

Сложение двух таких чисел в двоичной системе счисления осуществляется по правилу, которое можно проиллюстрировать следующей схемой

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & f & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e & f & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & b & c & d & e & f & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

То есть переход от числа $[n]_{i-1}$ к сумме осуществили по правилу: сдвинули все разряды на одну позицию влево и поместили 1 в образовавшемся младшем разряде. Так же осуществляется переход от числа $[n]_{i-1}$ к числу $[2n+1]_i$.

Отсюда получаем последнее утверждение для отклонений:

если $[n]_{i-1} < 2^{i-2}$, то

$$\langle n \rangle_{i-1} + \langle n+1 \rangle_{i-1} = [n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = [2n+1]_i = \langle 2n+1 \rangle_i;$$

если $2^{i-2} \leq [n]_{i-1} < 2^{i-1} - 1$, то

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{i-1} + \langle n+1 \rangle_{i-1} &= (2^{i-1} - [n]_{i-1}) + (2^{i-1} - [n+1]_{i-1}) = \\ &= 2^i - [2n+1]_i = \langle 2n+1 \rangle_i; \end{aligned}$$

если $[n]_{i-1} = 2^{i-1} - 1$, то непосредственным вычислением получаем

$$\langle n \rangle_{i-1} = 1, \quad \langle n+1 \rangle_{i-1} = 0, \quad \langle 2n+1 \rangle_i = 1. \quad \square$$

Теорема 4 (явный вид модуля ядра Дирихле).

Для всех $x \in (0, 1)$ верно

$$|D_n(x)| = \langle n \rangle_k,$$

где натуральное k определяется из условия $x \in \Delta_k^1 = [\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k})$.

Доказательство методом математической индукции по k .

Так как $(0, 1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_m^1$, то для любого $x \in (0, 1)$ найдется натуральное k равное рангу интервала с номером 1, содержащему x .

Если $x \in \Delta_1^1 = [\frac{1}{2}, 1)$, то $|D_{2n}(x)| = 0$, $|D_{2n+1}(x)| = 1$, что соответствует $|D_n(x)| = \langle n \rangle_1$. База индукции доказана.

Пусть известно, что $|D_m(y)| = \langle m \rangle_{k-1}$ при $y \in \Delta_{k-1}^1$. Для произвольного $x \in \Delta_k^1$ имеем $2x \in \Delta_{k-1}^1$ и $|D_m(2x)| = \langle m \rangle_{k-1}$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Применим это соотношение при $m = n$, $m = n+1$, $m = 2n+1$.

По свойствам отклонения получаем: для четных номеров по лемме 12

$$|D_{2n}(x)| = 2|D_n(2x)| = 2 \cdot \langle n \rangle_{k-1} = \langle 2n \rangle_k;$$

и для нечетных номеров по лемме 13 (учитывая совпадение знаков ядер Дирихле) и по лемме 14

$$\begin{aligned} |D_{2n+1}(x)| &= |D_n(2x) + D_{n+1}(2x)| = \\ &= \langle n \rangle_{k-1} + \langle n+1 \rangle_{k-1} = \langle 2n+1 \rangle_k. \quad \square \end{aligned}$$

Введем функцию

$$h(x) = 2^m \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{m+1}^1, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Из теоремы 4 по первому свойству отклонения выводим

Следствие. *Функция $h(x)$ на $(0, 1)$ является точной мажорантой ядра Дирихле*

$$|D_n(x)| \leq h(x).$$

То, что мажоранта точная, вытекает из леммы Пэли.

Утверждение 6 (вывод о поведении модуля ядра Дирихле).

В любой фиксированной точке $x \in (0, 1)$ значение модуля ядра Дирихле $|D_n(x)|$ как функция целочисленного аргумента n с шагом 1 растет от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно убывает от $h(x)$ до $e(x)$, то есть совершает периодические колебания с равномерной скоростью равной 1.

Подтверждение сформулированного утверждения содержится в следующей формуле самоподобия системы Уолша, которая является уточнением леммы 7 (здесь $k < 2^{m-1}$):

$$D_{2^{m-1}+k}(x) = \begin{cases} 2^{m-1} + k, & \text{если } x \in \Delta_m^0 = [0, 2^{-m}), \\ 2^{m-1} - k, & \text{если } x \in \Delta_m^1 = [2^{-m}, 2^{-m+1}), \\ w_{2^{m-1}}(x) \cdot D_k(x), & \text{если } x \in [2^{-m+1}, 1). \end{cases} \quad (13)$$

Следствием этой формулы служит

Утверждение 7. *Если $k < 2^m$, то $D_{s \cdot 2^m + k}(x) = w_{s \cdot 2^m}(x) \cdot D_k(x)$ при $x \in [2^{-m}, 1)$.*

Лемма 15 (рекуррентная формула вычисления норм ядра Дирихле). *Если $k < 2^m$, то*

$$\|D_{2^m+k}(\cdot)\|_p^p = \frac{(2^m + k)^p + (2^m - k)^p}{2^{m+1}} - \frac{k^p}{2^m} + \|D_k(\cdot)\|_p^p.$$

Доказательство. Из (13) получаем $\|D_{2^m+k}(\cdot)\|_p^p =$

$$= (2^m + k)^p 2^{-m-1} + (2^m - k)^p 2^{-m-1} - \int_0^{2^{-m}} |D_k(x)|^p dx + \int_0^1 |D_k(x)|^p dx$$

и подставляем $D_k(x) = k$ при $x \in [0, 2^{-m}]$. \square

Задача на экстремум. Для функций $f(x) = \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} - x^p$ и $g(x) = (1+x)^{p-1} - x^{p-1}$ легко показать, что на $[0, 1]$ выполняются неравенства

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{при } 1 < p < 2, \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{при } p > 2,$$

где равенство достигается только на концах отрезка: $f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 2^{p-1} - 1$ (исключение для случая $p = 2$). Сформулируем экстремальную задачу, которую можно решить численным методом. Найти функции:

$$A(p) = \inf\{C \mid g(x) \leq C^p \cdot f(x) \text{ для всех } x \in [0, 1]\} \quad \text{при } 1 < p < 2,$$

$$a(p) = \sup\{C \mid g(x) \geq C^p \cdot f(x) \text{ для всех } x \in [0, 1]\} \quad \text{при } p > 2.$$

Если $1,5 < p < 2$, то $A(p) < 2$; если $p \rightarrow 1$, то $A(p) \rightarrow \infty$. Если $p > 2$, то $a(p) > 0,7$ и $a(p) \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$.

Решение этой экстремальной задачи используется в следующей теореме, где p' сопряженный индекс к p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Теорема 5. Верны следующие оценки норм ядер Дирихле.

$$1. \text{ Если } 1 < p < 2, \text{ то } n^{\frac{1}{p'}} \leq \|D_n(\cdot)\|_p < A(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}},$$

причем левое неравенство обращается в равенство только при $n = 2^m$.

$$2. \|D_n(\cdot)\|_2 = \sqrt{n}.$$

$$3. \text{ Если } p > 2, \text{ то: } \quad a) \quad a(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}} < \|D_n(\cdot)\|_p \leq n^{\frac{1}{p}},$$

причем правое неравенство обращается в равенство только при $n = 2^m$;

$$b) \|D_n(\cdot)\|_p < \|D_{n+1}(\cdot)\|_p \text{ для всех } n.$$

Последнее соотношение теоремы указывает на монотонность величин $\|D_n\|_p$ при $p \geq 2$, которые при $p = 1$ обладают противоположным свойством: последовательность $\{L_n\}$ (констант Лебега, которые вводим в следующем параграфе) зубчатая, так как последовательность $\{L_n - L_{n-1}\}$ знакопеременная. Но и для других $1 \leq p < 2$ последовательность $\{\|D_n\|_p\}$ не является монотонной. Действительно, для любого $1 \leq p < 2$ существует m такое, что $\|D_{2^m-1}\|_p > \|D_{2^m}\|_p$.

Перейдем к более подробному рассмотрению случая $p = 1$.

10.7 Константы Лебега

Определение 2. Интеграл от модуля ядра Дирихле

$$L_n = \int_0^1 |D_n(x)| dx$$

называется *константой Лебега* для системы Уолша-Пэли.

Лемма 16. Для номера n , записанного в виде (3), справедлива формула Файна для констант Лебега

$$L_n = \nu - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu} 2^{\epsilon_i - \epsilon_j}.$$

Доказательство методом математической индукции по длине записи числа.

База индукции $L_{2^n} = 1$ вытекает из леммы Пэли. Полагаем справедливость формулы для $k = n - 2^{\epsilon_\nu} = n - 2^{m-1}$ (то есть для числа k длины $\nu - 1$):

$$L_k = (\nu - 1) - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu-1} 2^{\epsilon_i - \epsilon_j}.$$

Лемма 15 при $p = 1$ (где обозначили $n = 2^{m-1} + k$) принимает простой вид

$$L_n = 1 - \frac{k}{2^{m-1}} + L_k.$$

Следовательно,

$$L_n = 1 + (\nu - 1) - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu-1} 2^{\epsilon_i - \epsilon_j} - \sum_{l=1}^{\nu-1} 2^{\epsilon_l - \epsilon_\nu} = \nu - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu} 2^{\epsilon_i - \epsilon_j}.$$

Лемма 17. Справедливы рекуррентные соотношения Файна

$$\begin{cases} L_{2n} = L_n, \\ L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_n + L_{n+1} + 1). \end{cases}$$

Доказательство. Как следствие леммы 12 получаем

$$L_{2n} = \int_0^1 |D_{2n}(x)| dx = \int_0^{1/2} 2|D_n(2x)| dx = \int_0^1 |D_n(x)| dx = L_n.$$

В случае нечетного номера применим лемму 13 и утверждение о том, что в одной и той же точке $2x$ величины D_n и D_{n+1} , различающиеся на 1, не могут принимать значения с противоположными знаками:

$$\begin{aligned} L_{2n+1} &= \int_0^{1/2} |D_n(2x) + D_{n+1}(2x)| dx + \int_{1/2}^1 |w_{2n}(x)| dx = \\ &= \int_0^{1/2} |D_n(2x)| dx + \int_0^{1/2} |D_{n+1}(2x)| dx + \int_{1/2}^1 dx = \frac{1}{2}L_n + \frac{1}{2}L_{n+1} + \frac{1}{2}. \square \end{aligned}$$

Из сформулированного в конце предыдущего параграфа вывода о поведении модуля ядра Дирихле вытекает

Лемма 18 (симметрии). *Константы Лебега симметричны внутри пачки:*

$$L_{2^{n-1}+k} = L_{2^n-k}$$

для всех $0 \leq k < 2^{n-1}$.

Лемму симметрии также легко доказать методом математической индукции через рекуррентные соотношения Файна.

Две последние леммы помогают изобразить значения констант Лебега, сгруппировав их по пачкам. На рис. 10.2 не показана горизонтальная ось, так как номера констант Лебега для пачки, которые следовало бы отметить на этой оси, меняются от пачки к пачке. На рис. 10.2 : три нижние точки указывают константы Лебега первой пачки – L_2, L_3, L_4 ; пять нижних точек указывают константы Лебега второй пачки – L_4, L_5, L_6, L_7, L_8 ; девять нижних точек указывают константы Лебега третьей пачки – от L_8 до L_{16} . Значения констант Лебега четвертой пачки, то есть с номерами от 16 до 32, на рис. 10.2 указаны последовательно в углах нижней ломанной линии. Для следующей пачки (номера от 32 до 64) константы Лебега с четными номерами на рисунке остались на тех же местах и добавлены константы Лебега с нечетными номерами (средняя ломаная линия). В углах верхней ломаной линии отмечены константы Лебега с номерами от 64 до 128.

Исследуем поведение констант Лебега по пачкам. Напомним обозначение пачки $]m[= \{2^m, 2^m + 1, \dots, 2^{m+1} - 1\}$. Введем обозначения: t_m для точки максимума константы Лебега в пачке, A_m для максимального значения, то есть

$$A_m = L_{t_m} = \max_{n \in]m[} L_n.$$

Рис. 10.2: Константы Лебега для трех пачек: нижняя линия для номеров от 16 до 32, средняя линия для номеров от 32 до 64 и верхняя линия для номеров от 64 до 128

Из леммы симметрии вытекает, что в пачке не менее двух точек максимума $L_{t_m} = L_{3 \cdot 2^m - t_m}$. Поэтому обозначение t_m сохраним для левой точки (меньшей из t_m и $3 \cdot 2^m - t_m$) максимума, обозначая правую точку максимума символом \tilde{t}_m . Данные обозначения корректны согласно первому пункту следующей леммы.

Лемма 19. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *С точностью до симметрии точка максимума в пачке единственна: $L_n < L_{t_m}$, если $n \in]m[, n \neq t_m, n \neq \tilde{t}_m$.*

2. *Величины $2t_{m-1}$ и t_m различаются на 1.*

3. *Точки максимума (левые и правые отдельно) связаны рекуррентным соотношением $t_{m+1} = t_m + 2t_{m-1}$.*

4. *Максимальные значения по пачкам связаны рекуррентным соотношением*

$$A_{m+1} = \frac{1}{2}(A_{m-1} + A_m + 1).$$

5. *Величины A_m строго растут.*

Доказательство проводится методом математической индукции по

номеру пачки с использованием леммы 17. База индукции для пачек $]0[= \{1\}$, $]1[= \{2, 3\}$, $]2[= \{4, 5, 6, 7\}$ устанавливается непосредственными вычислениями $t_1 = 3$, $t_2 = 5$, $\tilde{t}_2 = 7$, $L_6 < L_5$. Для справедливости базы индукции расширим понятие пачки, добавив в каждую пачку $]m[$ число 2^{m+1} , являющееся началом следующей пачки. Тогда $\tilde{t}_0 = 2$, $\tilde{t}_1 = 3$.

Так как в соотношении $L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_n + L_{n+1} + 1)$ числа n и $n + 1$ разной четности, то по первой формуле Файна слагаемое в скобке с четным номером повторяет константу Лебега предыдущей пачки. Отсюда вытекает соотношение $A_{m+1} \leq \frac{1}{2}(A_{m-1} + A_m + 1)$. Покажем, что в этом соотношении возможно только равенство.

Согласно пункту 5 в старших пачках t_m может быть только нечетным. Обозначим $t_{m+1} = 2n + 1$. Если один из номеров n или $n + 1$ (неважно в каком порядке) совпадает с t_m , а другой с $2 \cdot t_{m-1}$ (это возможно согласно п. 2), то вторая формула Файна примет вид $A_{m+1} = \frac{1}{2}(A_{m-1} + A_m + 1)$ (п. 4), а соотношение $2n + 1 = n + (n + 1)$ вид $t_{m+1} = t_m + 2t_{m-1}$ (п. 3). Остальные пункты леммы легко проверяются. В частности, величины t_{m+1} и $2t_m$ различаются на 1.

Следствие. *Максимальные значения по пачкам есть решение следующей задачи Коши для неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами*

$$2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 1, \quad \text{при} \quad A_0 = 1, A_1 = 3/2.$$

Точки максимума есть решение однородного разностного уравнения

$$t_{m+2} - t_{m+1} - 2t_m = 0$$

с начальным условием $t_0 = 1$, $t_1 = 3$ для левой точки максимума t_m и с начальным условием $t_0 = 2$, $t_1 = 3$ для правой точки максимума \tilde{t}_m .

Доказательство состоит в вычислении начальных условий для уравнений $A_0 = L_1 = 1$, $A_1 = L_3 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2 + 1) = 3/2$.

Методика решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами аналогична правилам решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Основное отличие состоит в том, что в теории дифференциальных уравнений основные решения линейного уравнения берутся в виде экспоненты, а в теории разностных уравнений берем степени собственных чисел. Продемонстрируем это на примере первой из сформулированных задач Коши.

Решение задачи Коши

$$2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 1, \text{ при } A_0 = 1, A_1 = 3/2.$$

Составим характеристическое уравнение $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ для соответствующего $2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 0$ однородного разностного уравнения и найдем корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ характеристического уравнения. Для случая различных действительных корней запишем общее решение однородного уравнения (Общее Однородное)

$$(A_m)_{oo} = C_1 \cdot (\lambda_1)^m + C_2 \cdot (\lambda_2)^m = C_1 + C_2 \cdot (-1/2)^m.$$

Для правой части специального вида, совпадающей с одной из функций фундаментальной системы решений, вид частного решения, соответствующий резонансному случаю, следующий: $(A_m)_* = A \cdot m$.

Значение константы A найдем подстановкой в исходное уравнение:

$$2A(m+2) - A(m+1) - Am = 1, \quad A = 1/3.$$

Сложим общее однородное и найденное частное решения, после чего константы C_1 и C_2 найдем подстановкой начальных данных:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{10}{9}, \\ C_2 = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Итак, получили решение задачи Коши

$$A_m = \frac{10}{9} - \frac{1}{9}(-1/2)^m + \frac{m}{3}. \quad (14)$$

Утверждение 8. Для точек максимума верны представления

$$t_m = \frac{1}{3}(2^{m+2} + (-1)^{m+1}), \quad \tilde{t}_m = \frac{5}{3} \cdot 2^m + \frac{1}{3} \cdot (-1)^m;$$

$$t_{2m} = 1 + 4 + 16 + \dots + 4^m, \quad t_{2m+1} = 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{2m+1};$$

$$\tilde{t}_{2m} = 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{2m-1} + 4^m \quad (m \neq 0) \text{ и } \tilde{t}_{2m+1} = 1 + 4 + 16 + \dots + 4^m + 2^{2m+1}.$$

Чтобы выделить взаимосвязь t_m и A_m , введем функцию

$$f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3n,$$

которая возникает при отбрасывании младших слагаемых и является почти-мажорантой констант Лебега.

На рис. 10.3 в узлах ломанной помещены последовательные константы Лебега с номерами от 1 до 64 (которые ранее на рис. 10.2 изображены методом наложения пачки на пачку) и указана почти-мажоранта $f(n)$.

Рис. 10.3: Константы Лебега с номерами от 1 до 64

Обозначим $e(n) = L_n - f(n)$ отклонение констант Лебега от своей почти-мажоранты.

Теорема 6. Во всех точках, кроме левых точек максимума с четным номером, константы Лебега меньше функции $f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3n$. То есть $e(n) < 0$ при $n \neq t_{2m}$.

В отмеченных точках отклонение от функции $f(n)$ мало:

$$0 < e(t_{2m}) < \frac{1}{10} \cdot 4^{-m} < (t_{2m})^{-1}.$$

Доказательство методом математической индукции. Справедливость утверждений теоремы при $n = 1, 3, 5, 6, 7$ непосредственно проверяется: $0 < e(1) = 0,0272347\dots < 0,1$, $0 < e(5) = 0,0032587\dots < 0,025$, $e(7) = \frac{7}{4} - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \log_2 21 < 0$, $e(6) = L_6 - f(6) < L_6 - f(3) = e(3)$, $e(3) = \frac{3}{2} - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \log_2 9 < 0$.

Заметим, что

$$e(t_m) = A_m - f(t_m) = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3} \log_2(1+x) = g(x),$$

где $x = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+2}}$. Так как $g(x) > 0$ при $x \in [-1/2, 0)$ и $g(x) < 0$ при $x \in (0, 1/8]$ (проверяется вычислением производной), то $e(t_{2m}) > 0$, $e(t_{2m+1}) < 0$ (в частности, $e(3) < 0$, $e(7) < 0$). Так как $g''(x) > 0$, то функция $g(x)$ выпукла вниз. Следовательно, из очевидных условий $g(-1/2) = 1/9 < 1/5 = -0,4(-1/2)$, $g(0) = 0$ вытекает при $x \in [-1/2, 0)$ оценка $g(x) < -0,4 \cdot x$. При $x = -\frac{1}{4^{m+1}}$ это неравенство равносильно неравенству $e(t_{2m}) < \frac{1}{10} \cdot 4^{-m}$.

Установим соотношения

$$e(n) - e(2n) = f(2n) - f(n) = \frac{1}{3} \log_2 \frac{6n}{3n} = 1/3;$$

$$e(2n+1) < \frac{1}{2} (e(n) + e(n+1)) + 1/6,$$

так как $2e(2n+1) = L_n + L_{n+1} + 1 - 2f(2n+1) = e(n) + e(n+1) + 1 - \frac{1}{3} \log_2 \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)}$, $\log_2 \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} > 2$.

Отсюда вытекает, что:

- а) $e(2n) < 0$ при всех n ;
- б) $e(4k+1) < \frac{1}{2}(e(2k+1) + e(k))$ и $e(4k-1) < \frac{1}{2}(e(2k-1) + e(k))$.

Если бы в двух пачках подряд выполнялось условие $e(n) < 0$, то оно сохранилось бы для всех следующих n . Индуктивное предположение состоит в том, что для двух пачек подряд условие $e(n) < 0$ нарушается только один раз, а именно при $n = t_{2m}$. Для номеров $2k-1$ и $2k+1$ номер k принадлежит предшествующей пачке, а номера $4k-1$ и $4k+1$ принадлежат следующей пачке. Поэтому для пачки, соответствующей номерам вида $4k-1$ и $4k+1$, отрицательность величины $e(n)$ не вытекает (из отрицательности этой величины в двух предыдущих пачках) напрямую применением пункта б) только в следующих четырех случаях.

Случай 1: $k = t_{2m-1}$, $2k - 1 = t_{2m}$, $4k - 1 = t_{2m+1}$.

Случай 2: $k = t_{2m-1} - 1$, $2k + 1 = t_{2m}$, $4k + 1 = t_{2m+1} - 2$.

Случай 3: $k = t_{2m}$, $2k + 1 = t_{2m+1}$, $4k + 1 = t_{2m+2}$.

Случай 4: $k = t_{2m}$, $2k - 1 = t_{2m+1} - 2$, $4k - 1 = t_{2m+2} - 2$.

Здесь рассмотрели все возможные варианты, когда $e(t_{2m})$ является одним из слагаемых правой части одного из неравенств б). Для вычисления остальных чисел, встретившихся в неравенстве б), воспользовались утверждением 5.

Для случая 1 доказано $e(t_{2m+1}) < 0$.

Для случая 3 доказано, что $0 < e(t_{2m+2}) < 0,1 \cdot 4^{-m-1}$.

Во втором случае k получилось четное, причем $k = 2t_{2m-2}$. Поэтому $e(4k + 1) < \frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(2t_{2m-2})) < \frac{1}{2}(0,1 \cdot 4^{-m} + e(t_{2m-2}) - \frac{1}{3}) < 0$ при $m > 0$. Случай $m = 0$ рассматривается непосредственно:

$$e(9) < \frac{1}{2}(e(5) + e(2)) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + 1 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} \log_2(15 \cdot 3) < \frac{55}{72} - \frac{1}{6} \cdot 5 < 0.$$

При рассмотрении случая 4 применяем неравенство, полученное в случае 2: $e(t_{2m+2} - 2) = e(4k - 1) <$

$$< \frac{1}{2}(e(t_{2m+1} - 2) + e(t_{2m})) < \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(t_{2m-2}) - 1/3) + e(t_{2m})).$$

Отсюда $e(t_{2m+2} - 2) < \frac{3}{4} \cdot \frac{0,1}{4^m} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0,1}{4^{m-1}} - \frac{1}{6} < 0$ при $m > 0$. (При $m = 0$ имеем $e(t_{2m+2} - 2) = e(3) < 0$.)

Тем самым доказали, что в очередных двух пачках встретится только один номер n , для которого $e(n) > 0$. Этот номер совпадает с ранее вычисленным номером t_{2m} , для которого оценка величины $e(n)$ проведена выше.

10.8 Сходимость рядов Уолша

Для рядов Фурье по системе Уолша справедливы многие результаты, установленные для тригонометрической системы. Для них сохраняют прежние названия.

Теорема 7 (признак Дини). *Если*

$$\int_0^1 |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot h(t) dt < \infty,$$

где $h(t)$ – мажоранта ядра Дирихле, определенная формулой (12), то ряд Фурье-Уолша в точке x_0 сходится к значению функции в этой точке

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Условие теоремы равносильно сходимости ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Delta_m^1} |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot 2^m dt,$$

что влечет для произвольного $\varepsilon > 0$ существование такого M , что

$$\begin{aligned} & \sum_{m=M}^{\infty} \int_{\Delta_m^1} |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot 2^m dt < \varepsilon/2. \text{ Представим } |f(x_0) - S_n(f; x_0)| = \\ & = \left| \int_0^{2^{-M}} (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t) dt + \int_{2^{-M}}^1 (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Модуль первого слагаемого оценивается сверху величиной $\varepsilon/2$. Введем

функцию $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } t \in \Delta_M^0 = [0, 2^{-M}), \\ f(x_0) - f(t \dot{+} x_0) & \text{ при остальных } t, \end{cases}$ удовлетворяющую

требованиям принципа локализации. Согласно принципу локализации (теорема 2) найдется такое N , что для всех $n > N$

$$\left| \int_{2^{-M}}^1 (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t) dt \right| = |S_n(\varphi; 0)| < \varepsilon/2.$$

Установили, что $|f(x_0) - S_n(f; x_0)| < \varepsilon$ для всех $n > N$. \square

Аналогично доказывается

Теорема 8 (условие равномерной сходимости). Если интеграл $\int_0^1 |f(x) - f(x \dot{+} t)|h(t)dt$ сходится равномерно на множестве $[0, 1]^*$, то ряд Фурье-Уолша функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на всем модифицированном отрезке.

Теорема 9. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то существует число B_p такое, что $\|S_k(f)\|_p \leq B_p \|f\|_p$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Следствие. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то $\|S_k(f) - f\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 9 сложное ([8, с. 121], [16, с. 159]) и основывается на неравенстве Пэли, опубликованном в 1923 г.

Теорема 10 (единственности) [8, с. 89]. *Если два ряда по системе Уолша сходятся всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, к одной и той же конечной функции, то эти ряды совпадают.*

Следствие. Система Уолша составляет базис пространства $L_p[0, 1]$ при любом $1 < p < \infty$.

Для крайних пространств не выполняются (без дополнительных требований) теорема 9, данное следствие, обобщенное равенство Парсеваля, свойство 5. Объяснение этого заключено в логарифмическом росте констант Лебега.

Теорема 11. *Существует $f \in L[0, 1]$, ряд Фурье-Уолша которой расходится по норме пространства $L[0, 1]$.*

Доказательство. Указанным свойством обладает функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} r_{k^3}(x) D_{2^{k^3}}(x).$$

Так как $\|r_{k^3} D_{2^{k^3}}\| = 1$, то $f \in L[0, 1]$. Отметим, что $c_m[f] = \frac{1}{k^2}$ при $2^{k^3} \leq m \leq 2^{k^3+1} - 1$. Если $n < 2^{k^3}$, то

$$\|S_{2^{k^3+n}} - S_{2^{k^3}}\| = \int_0^1 \frac{1}{k^2} |w_{2^{k^3}}(x) D_n(x)| dx = \frac{L_n}{k^2}.$$

Возьмем в качестве n левую точку максимума констант Лебега в пачке; $n = t_{k^3}$. Тогда $L_n = A_{k^3} > \frac{k^3}{3}$. Значит, ряд Фурье-Уолша данной функции расходится по норме пространства $L[0, 1]$. \square

Теорема 12. *Существует $f \in L[0, 1]$, ряд Фурье-Уолша которой расходится всюду.*

Конструкцию теоремы 11 можно немного усложнить, добавив сдвиги ядер Дирихле, которые достигаются расстановкой знаков у коэффициентов Фурье-Уолша, и получить расходимость на заданном множестве. Сумма подобных функций и будет примером функции в теореме 12.

В теореме 9 рассматривается линейный оператор вычисления частной суммы по системе Уолша, действующий из пространства $L_p[0, 1]$ в $L_p[0, 1]$, и утверждается, что при фиксированном $1 < p < \infty$ нормы всех операторов частных сумм ограничены одним и тем же числом. Для

крайних пространств (в данном разделе символом $L_\infty[0, 1]$ договорились обозначать пространство w -непрерывных функций) это не верно.

Теорема 13. *Норма оператора $S_n : L[0, 1] \rightarrow L[0, 1]$ равна константе Лебега L_n . Норма $S_n : L_\infty[0, 1] \rightarrow L_\infty[0, 1]$ равна константе Лебега L_n .*

Доказательство. Сначала рассмотрим для нормы в $L_1[0, 1]$. По теореме Фубини для $f, g \in L[0, 1]$ и свойству инвариантности интеграла относительно сдвига получаем одно из основных свойств двоичной свертки

$$\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Представление $S_n(f) = f * D_n$ позволяет получить оценку сверху

$$\|f * D_n\| \leq \|f\| \cdot \|D_n\| = \|f\| \cdot L_n.$$

Следовательно, $\|S_n\|_{L[0,1] \rightarrow L[0,1]} \leq L_n$.

Функция $f(x) = D_{2^m}$, где $n < 2^m$, показывает, что эта оценка точная: $\|S_n(f)\| = \|D_n\| = L_n$ при $\|f\| = 1$.

Рассмотрим вычисление частной суммы как оператор S_n , действующий из $L_\infty[0, 1]$ в $L_\infty[0, 1]$. Заметим, что

$$|S_n(f; x)| = |(f * D_n)(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|D_n\|_1 = \|f\|_\infty \cdot L_n.$$

Это неравенство известно (в тригонометрическом случае) как теорема Лебега: если $|f(x)| < M$ для всех x , то $\max_x |S_n(f; x)| < M \cdot L_n$.

С другой стороны, для $f = \text{sign}D_n$ имеем

$$S_n(f; 0) = \int_0^1 f(t)D_n(t)dt = L_n$$

и $\|\text{sign}D_n\|_\infty = 1$. Следовательно, $\|S_n\|_{L_\infty[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = L_n$.

10.9 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите утверждения 1 и 2.
2. Разложите функции $f(x) = x$ и $g(x) = x - 1/2$ в ряд по системе Радемахера. Чем отличаются эти ряды и как объяснить этот факт?
3. Разложите функцию $f(x) = x$ в ряд по системе Уолша на $[0, 1]$. Вычислите и постройте графики для $S_4(f; x)$, $S_8(f; x)$, $f(x) - S_2(f; x)$,

$f(x) - S_4(f; x)$. Вычислите значения суммы ряда Фурье-Уолша функции $f(x) = x$ в точках $\frac{1}{2}^+$ и $\frac{1}{2}^-$.

4. Разложите функцию $f(x) = \begin{cases} x + 1/2, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ x - 1/2, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$ в ряд по системе Уолша.

5. Разложите каждую из функций $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ -x, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$ в ряд по системе Уолша.

6. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд по системе Уолша.

7. Разложите функцию $f(x) = x^3$ в ряд по системе Уолша. *Указание.*

Ограничьтесь вычислением первых восьми ненулевых коэффициентов.

8. Функцию $f(x) = x$ при $x \in [0, 1/2)$ продолжите периодически с периодом $T = 1/2$ и разложите в ряд по системе Уолша.

9. Разложите каждую из функций $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$

и $g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1/4), \\ 0, & \text{если } x \in [1/4, 1), \end{cases}$ в ряд по системе Уолша.

10. Вычислите интегралы $\int_0^{\frac{3}{4}} x dx$, $\int_0^{\frac{3}{8}} x dx$, $\int_0^{\frac{5}{8}} x dx$ через скалярное произведение последовательности коэффициентов Фурье-Уолша на последовательность значений дробного ядра Дирихле.

11. Вычислите $\int_0^{\frac{3}{8}} x^2 dx$ по формулам $(\hat{x}^2, \tilde{D}_{3/8})$ и $(\hat{x} * \tilde{D}_{3/8}, \hat{x})$.

12. Вычислите $\int_0^{\frac{3}{4}} x^3 dx$ через коэффициенты Фурье-Уолша.

13. Вычислите двоичную свертку последовательностей коэффициентов Фурье-Уолша функций $f, \frac{1}{f} \in L[0, 1]$.

14. Выведите лемму 18 из соотношений Файна (лемма 17).

15. Решите для разностного уравнения $t_{m+2} - t_{m+1} - 2t_m = 0$ две задачи Коши: с начальным условием $t_0 = 1, t_1 = 3$ и, отдельно, с начальным условием $t_0 = 2, t_1 = 3$.

16. Докажите, что последовательность констант Лебега зубчатая.

Глава 11

Система Крестенсона – Леви

11.1 Построение системы Крестенсона–Леви

Система Крестенсона–Леви служит обобщением системы Уолша в нумерации Пэли. Она находит столь же широкое, как и система Уолша, применение при цифровой обработке информации.

Если основная система Уолша одна, то систем Крестенсона–Леви бесконечно много; каждая из них строится для своего простого числа $p > 2$. В технических приложениях при реализации на ЭВМ чаще выбирают $p = 3$. Построить систему Крестенсона–Леви можно по аналогии, соответственно видоизменив принятые обозначения.

Для любого натурального n (кроме двоичного разложения) возможно p -ичное разложение (где $n_i \in Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, $n_m \neq 0$):

$$n = n_1 p^0 + n_2 p^1 + \dots + n_m p^{m-1}, \quad (1)$$

которое можно записать в p -ичной системе счисления $n = n_m n_{m-1} \dots n_2 n_1$.

Множество чисел от p^m до $p^{m+1} - 1$ включительно назовем (по аналогии) m -й пачкой и соответственно обозначим $]m[$. Тогда в формуле (1) имеем $n \in]m - 1[$.

Обозначим \mathbb{Q}_p – множество p -ично рациональных чисел, то есть чисел вида $\frac{k}{p^m}$. Систему функций Крестенсона–Леви будем рассматривать на модифицированном отрезке $[0, 1]$ (аналогично обозначаемого $[0, 1]^*$), который получается из отрезка $[0, 1]$ добавлением к нему счетного числа точек множества $\mathbb{Q}_p \cap (0, 1)$. В результате этого добавления для любой точки множества \mathbb{Q}_p существует два p -ичных представления: левое раз-

ложение, где число $(p-1)$ в периоде, и правое разложение, как конечная p -ичная дробь (она же p -ичная дробь с числом 0 в периоде).

Все построения и основные результаты договоримся формулировать параллельно (как и для случая системы Уолша) для модифицированного отрезка $[0, 1]^*$ и для полуинтервала $[0, 1)$, используя более короткие обозначения, принятые на полуинтервале.

Аналогично вводится обозначение $\Delta_m^k = [\frac{k}{p^m}; \frac{k+1}{p^m})$ для k -го интервала m -го ранга, который при рассмотрении на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$ следует воспринимать как отрезок $\Delta_m^k = [(\frac{k}{p^m})^+; (\frac{k+1}{p^m})^-]$. Символом $\Delta_m(x)$ обозначим тот интервал m -го ранга, который содержит точку $x \in [0, 1)$.

Для любого $x \in [0, 1]^*$ существует единственное p -ичное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{p^k}, \quad \text{где } x_k \in Z_p. \quad (2)$$

При рассмотрении на $[0, 1)$ основным представлением для p -ично рациональной точки считается конечная дробь (2).

Функции системы Крестенсона–Леви определяются равенствами

$$\chi_0(x) \equiv 1, \quad \chi_n(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k}, \quad (3)$$

где сумма согласно представлению (1) берется до числа m , а не до ∞ .

Зафиксируем для данной главы обозначения: $q = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ для основного комплексного корня из единицы и $(n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k \pmod{p}$ для скалярного произведения элементов сопряженных пространств. Тогда функции вида (3) можно определить равенством

$$\chi_n(x) = q^{(n, x)}. \quad (4)$$

Определим функции $r_n(x)$, служащие аналогом функций Радемахера и называемые образующими функциями системы Крестенсона–Леви, соотношением $r_n(x) = r_{n-1}(px)$ через начальную функцию

$$r_0(x) = q^l, \quad \text{если } x \in \left[\frac{l}{p}, \frac{l+1}{p} \right), \quad l = 0, 1, \dots, p-1,$$

периодически с периодом 1 продолженную на полуось.

Утверждение 1. *Функции Крестенсона–Леви для n вида (1) определяются равенством (аналогичным определению системы Уолша–Пэли)*

$$\chi_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (r_k(x))^{n_{k+1}}. \quad (5)$$

Утверждение 2. *Справедливо эквивалентное любой из формул (3), (4) или (5) индуктивное определение функций Крестенсона–Леви через систему образующих функций $\{r_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, где $n = sp^{m-1} + k$, $1 \leq s < p$, $k < p^{m-1}$:*

$$\chi_n(x) = (r_{m-1}(x))^s \cdot \chi_k(x).$$

Введем операцию $\dot{+}$ покоординатного p -ичного сложения: для чисел n, r вида (1) равенством

$$n \dot{+} r = \sum_{i=1}^{\infty} s_i p^{i-1}, \quad \text{где } s_i = (n_i + r_i) \pmod{p}$$

и сумма конечна, так как начиная с некоторого номера верно $n_i = r_i = 0$; для чисел x, y вида (2) равенством

$$x \dot{+} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{p^k}, \quad \text{где } z_k = (x_k + y_k) \pmod{p}.$$

Вводится обратная операция $\dot{-}$ по правилу

$$m = n \dot{-} r, \quad \text{если } n = m \dot{+} r, \quad \text{и} \quad x = y \dot{-} z, \quad \text{если } y = x \dot{+} z.$$

Утверждение 3. *Имеет место свойство инвариантности интервалов m -го ранга относительно сдвига: $\Delta_m(x) \dot{+} y = \Delta_m(x \dot{+} y)$, $\Delta_m(x) \dot{-} y = \Delta_m(x \dot{-} y)$; $\Delta_0 \dot{+} y = \Delta_0 \dot{-} y = \Delta_0$, если $y \in [0, 1]^*$.*

Лемма 1. *Функции Крестенсона–Леви обладают свойствами: мультипликативности по аргументу $\chi_n(x) \cdot \chi_n(y) = \chi_n(x \dot{+} y)$; мультипликативности по номеру $\chi_n(x) \cdot \chi_m(x) = \chi_{n \dot{+} m}(x)$; обратимости $\overline{\chi_n(x)} = (\chi_n(x))^{-1} = \chi_{\dot{-}n}(x) = \chi_n(\dot{-}x)$, где черта над функцией означает комплексное сопряжение.*

Доказательство. Введенное скалярное произведение (n, x) как отображение в Z_p линейно по каждому аргументу: $(n \dot{+} m, x) = (n, x) \dot{+} (m, x)$, $(n, x \dot{+} y) = (n, x) \dot{+} (n, y)$, $(\alpha \cdot n, x) = \alpha \cdot (n, x) = (n, \alpha \cdot x)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

По формуле $\chi_n(x) = q^{(n,x)}$ устанавливаем мультипликативность:

$$\chi_n(x) \cdot \chi_n(y) = q^{(n,x)} \cdot q^{(n,y)} = q^{(n,x)+(n,y)} = q^{(n,x)\dot{+}(n,y)} = \chi_n(x \dot{+} y),$$

$$\chi_n(x) \cdot \chi_m(x) = q^{(n,x)} \cdot q^{(m,x)} = q^{(n,x)+(m,x)} = q^{(n,x)\dot{+}(m,x)} = \chi_{n\dot{+}m}(x).$$

Так как $q^p = 1$ и $\bar{q} = q^{-1}$, то $(\chi_n(x))^p = 1$, $\overline{\chi_n(x)} = q^{-(n,x)} = (\chi_n(x))^{-1}$. \square

В приведенной формуле $(\alpha \cdot n, x) = \alpha \cdot (n, x) = (n, \alpha \cdot x)$ в выражении $\alpha \cdot (n, x)$ рассматривается произведение по модулю p , а внутри скалярных произведений (выражения с краю) для чисел n, x (данных в p -ичном представлении (1) и (2)) рассматривается покоординатное умножение на α по модулю p . В частности, $\dot{-}(n, x) = (p-1) \cdot (n, x)$, $(\dot{-}n, x) = ((p-1) \cdot n, x)$, $(n, \dot{-}x) = (n, (p-1) \cdot x)$.

Поэтому $q^{-(n,x)} = q^{\dot{-}(n,x)} = q^{(\dot{-}n,x)} = q^{(n,\dot{-}x)}$.

Множество целых неотрицательных чисел относительно введенной операции $\dot{+}$ составляет абелеву группу $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$, для которой возможно изоморфное представление в виде группы $(\mathbb{Z}_p^{(\infty)}, \oplus)$ финитных последовательностей с операцией \oplus покоординатного сложения по модулю p .

Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ с элементами вида (2) относительно введенной операции $\dot{+}$ также составляет абелеву группу, для которой возможно изоморфное представление в виде группы $(\mathbb{Z}_p^\infty, \oplus)$ последовательностей с операцией покоординатного сложения по модулю p .

Проверкой свойств группы (аналогично проделанному для системы Уолша) доказывается следующая теорема, часть утверждений которой установлено в лемме 1.

Теорема 1. Система функций Крестенсона–Леви $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ образует абелеву группу по умножению, которая изоморфна группе финитных последовательностей элементов множества Z_p с операцией покоординатного сложения по модулю p . То есть

$$(\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty, \cdot) \simeq (\mathbb{N}_0, \dot{+}) \simeq (\mathbb{Z}_p^{(\infty)}, \oplus).$$

Система Крестенсона–Леви, согласно лемме 1, служит *системой характеров* для абелевой группы $(\mathbb{Z}_p^\infty, \oplus)$. Эта система характеров счетная.

Существует двойственный подход к анализу функций Крестенсона–Леви. Можно фиксировать x и менять n ; можно наоборот, фиксировать n и менять x . В этом контексте все множество функций Крестенсона–Леви

можно рассматривать как группу характеров (уже не счетную, так как ее элементы есть x) для группы $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$. Аналогично теореме 1 формулируется теорема об изоморфизме трех групп: мультипликативной группы характеров, модифицированного отрезка с операцией $\dot{+}$ и группы последовательностей $(\mathbb{Z}_p^\infty, \oplus)$. Приведенные в теореме 1 группы являются их подгруппами и, что более важно, двойственными пространствами.

11.2 Ряд Фурье по системе Крестенсона–Леви

Утверждение 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\int_0^1 \chi_n(x) dx = 0$.

Напомним определение стандартного скалярного произведения комплекснозначных функций

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx ,$$

которое отличается от записи скалярного произведения в предыдущей главе наличием комплексного сопряжения у второй функции.

Лемма 2. Система Крестенсона–Леви $\{\chi_n(x)\}$ ортонормирована.

Доказательство. По лемме 1 получаем

$$(\chi_n, \chi_n) = \int_0^1 \chi_n(x) \overline{\chi_n(x)} dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Для различных функций Крестенсона–Леви по лемме 1 и утверждению 4 (так как $n - m \neq 0$ при $n \neq m$) имеем

$$(\chi_n, \chi_m) = \int_0^1 \chi_n(x) \overline{\chi_m(x)} dx = \int_0^1 \chi_{n-m}(x) dx = 0. \quad \square$$

Теорема 2. Система функций Крестенсона–Леви $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ полна и замкнута в $L_p[0, 1]$ при $p \leq 1$.

Доказательство проводится по той же схеме, как для системы Уолша.

Если $f \in L[0, 1]$, то коэффициенты Фурье по системе Крестенсона–Леви вычисляются по формуле

$$c_k[f] = \int_0^1 f(x) \overline{\chi_k(x)} dx , \quad (6)$$

ряд Фурье функции имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k[f] \chi_k(x)$, а частная сумма данного ряда

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k[f] \chi_k(x). \quad (7)$$

Ядром Дирихле системы Крестенсона–Леви служит

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x).$$

Константы Лебега определяются равенством $L_n = \int_0^1 |D_n(x)| dx$.

Установим несколько результатов для ядра Дирихле и констант Лебега.

Утверждение 5. Если $n = s \cdot p^{m-1} + k$, $1 \leq s < p$, $k < p^{m-1}$, то

$$D_n(x) = D_{s \cdot p^{m-1}}(x) + \chi_{s \cdot p^{m-1}}(x) \cdot D_k(x).$$

Лемма 3. Имеют место следующие соотношения:

1) $\chi_{pn}(x) = \chi_n(px)$, если $x \in [0, \frac{1}{p}]$;

2) $D_p(x) = \begin{cases} p, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{p}), \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{1}{p}, 1); \end{cases}$

3) $D_{pn}(x) = \begin{cases} pD_n(px), & \text{если } x \in [0, \frac{1}{p}), \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{1}{p}, 1); \end{cases}$

4) аналог леммы Пэли

$$D_{p^m}(x) = \begin{cases} p^m, & \text{если } x \in \Delta_m^0, \\ 0, & \text{если } x \in [0, 1) \setminus \Delta_m^0; \end{cases}$$

5) при $k = 1, 2, \dots, p-1$, $s < p$,

$$D_{s \cdot p^{m-1}}(x) = \begin{cases} s \cdot p^{m-1}, & \text{если } x \in \Delta_m^0, \\ (1 + q^k + q^{2k} + \dots + q^{(s-1)k}) \cdot p^{m-1}, & \text{если } x \in \Delta_m^k, \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{1}{p^{m-1}}, 1). \end{cases}$$

Доказательство. Для n вида (1) имеем $pn = n_1p^1 + n_2p^2 + \dots + n_m p^m$. Из утверждения 1 следует (для периодически с периодом 1 продолженных функций всюду)

$$\chi_{pn}(x) = \prod_{k=1}^m (r_k(x))^{n_k} = \prod_{k=1}^m (r_{k-1}(px))^{n_k} = \chi_n(px).$$

Напомним геометрическое свойство корней p -й степени из единицы

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{p-1} = 0,$$

с помощью которого из определения функций Крестенсона–Леви сразу получается соотношение 2.

Сгруппируем по p слагаемых

$$D_{pn}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p-1} \chi_{kp+l}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{kp}(x) \sum_{l=0}^{p-1} \chi_l(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{kp}(x) \cdot D_p(x).$$

Третий пункт выводится применением доказанных пунктов

$$D_{pn}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(px) \cdot D_p(x) = D_n(px) \cdot D_p(x).$$

Повторным применением п. 3 получаем аналог леммы Пэли.

Как обобщение утверждения 5 получаем соотношение

$$D_{s \cdot p^{m-1}}(x) = D_{p^{m-1}}(x) (1 + \chi_{p^{m-1}}(x) + \dots + \chi_{(s-1)p^{m-1}}(x)), \quad (8)$$

из которого и вытекает п. 5. \square

Лемма 4 (самоподобия). Если $k < p^m$, $s < p$, $x \in [\frac{1}{p^m}, 1)$, то

$$|D_{sp^m+k}(x)| = |D_k(x)|.$$

Доказательство. По утверждению 5 и лемме 3 при $x \in [\frac{1}{p^m}, 1)$ имеем

$$D_{sp^m+k}(x) = D_{sp^m}(x) + \chi_{sp^m}(x)D_k(x) = \chi_{sp^m}(x)D_k(x).$$

Лемма 5 (симметрии). Если $k < p^m$, $x \in [\frac{1}{p^m}, 1)$, то

$$|D_k(x)| = |D_{p^m-k}(x)|.$$

Доказательство методом индукции по m (номеру пачки). Базу индукции составляет п. 5 леммы 3 при $m = 1$.

Пусть при $k_1 < p^{m-1}$ и $x \in [\frac{1}{p^{m-1}}, 1)$ верно

$$|D_{k_1}(x)| = |D_{p^{m-1}-k_1}(x)|.$$

Тогда при $x \in [\frac{1}{p^{m-1}}, 1)$, $0 \leq s \leq \frac{p-1}{2}$ по лемме 4 и предположению имеем

$$|D_{sp^{m-1}+k_1}(x)| = |D_{k_1}(x)| = |D_{p^{m-1}-k_1}(x)| = |D_{(p-s-1)p^{m-1}+(p^{m-1}-k_1)}(x)|.$$

Доказали при $x \in [\frac{1}{p^{m-1}}, 1)$ и $k < p^m$ равенство

$$|D_k(x)| = |D_{p^m-k}(x)|.$$

Рассмотрим $x \in [\frac{1}{p^m}, \frac{1}{p^{m-1}})$. Если $k < p^{m-1}$, $0 \leq s < p$ и $x \in \Delta_m^r$, $r = 1, 2, \dots, p-1$, то по формуле (8) леммы 3 и утверждению 5

$$D_{sp^{m-1}+k}(x) = p^{m-1}(1 + q^r + q^{2r} + \dots + q^{(s-1)r}) + kq^{sr}.$$

Так как $1 + q^r + q^{2r} + \dots + q^{(p-1)r} = 0$, то

$$-D_{sp^{m-1}+k}(x) = (p^{m-1} - k)q^{sr} + p^{m-1}(q^{(s+1)r} + \dots + q^{(p-1)r}),$$

$$|D_{sp^{m-1}+k}(x)| = |q^{(p-1)r}| \cdot |(p^{m-1} - k)\bar{q}^{(p-s-1)r} + p^{m-1}(1 + \bar{q}^r + \dots + \bar{q}^{(p-s-2)r})|.$$

А для ядра с другим номером

$$D_{(p-s)p^{m-1}-k}(x) = D_{(p-s-1)p^{m-1}+(p^{m-1}-k)}(x),$$

$$D_{(p-s)p^{m-1}-k}(x) = p^{m-1}(1 + q^r + q^{2r} + \dots + q^{(p-s-2)r}) + (p^{m-1} - k)q^{(p-s-1)r}.$$

Следовательно, $|D_{sp^{m-1}+k}(x)| = |D_{(p-s)p^{m-1}-k}(x)|$ при $x \in \Delta_m^r$, $k < p^{m-1}$, что равносильно равенству $|D_k(x)| = |D_{p^m-k}(x)|$ при $x \in \Delta_m^r$, $k < p^m$. \square

Отметим, что доказанная лемма 5 (симметрии) отличается от соответствующего утверждения (лемма 10.18) для системы Уолша.

Следствие. Для констант Лебега верно:

$$L_{pn} = L_n; \quad L_{p^m-k} = L_k + \frac{p^m - 2k}{p^m} \quad \text{при } k < \frac{p^m}{2}.$$

Доказательство. По п. 3 леммы 3

$$L_{pn} = \int_0^1 |D_{pn}(x)| dx = \int_0^{1/p} |pD_n(px)| dx = \int_0^{1/p} |D_n(px)| dp x = L_n.$$

По лемме 5 имеем $L_{p^m-k} =$

$$= \int_0^{\frac{1}{p^m}} |D_{p^m-k}(x)| dx + \int_{\frac{1}{p^m}}^1 |D_{p^m-k}(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{p^m}} (p^m - k) dx + \int_{\frac{1}{p^m}}^1 |D_k(x)| dx.$$

$$L_{p^m-k} = \frac{p^m - k}{p^m} - \frac{k}{p^m} + \int_0^{1/p^m} k dx + \int_{1/p^m}^1 |D_k(x)| dx = L_k + \frac{p^m - 2k}{p^m}. \square$$

Вернемся от рассмотрения ядра Дирихле и констант Лебега к основному повествованию.

Подставив формулу (6) в сумму (7)

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(x)} dt \cdot \chi_k(x) = \int_0^1 f(t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x \dot{-} t) dt ,$$

получим интегральное представление частной суммы

$$S_n(f; x) = \int_0^1 f(t) \cdot D_n(x \dot{-} t) dt ,$$

которая согласно инвариантности интеграла относительно сдвига (применительно к операции $\dot{+}$) имеет вид

$$S_n(f; x) = \int_0^1 f(x \dot{+} t) \overline{D_n(t)} dt . \quad (9)$$

Как следствие утверждения 4 получаем $\int_0^1 D_n(t) dt = \int_0^1 \overline{D_n(t)} dt = 1$. Вычтем из (9) значение функции в точке (умноженное на таким образом записанную единицу), чтобы получить выражение для отклонения

$$S_n(f; x) - f(x) = \int_0^1 (f(x \dot{+} t) - f(x)) \overline{D_n(t)} dt .$$

Обозначим Λ_m класс ступенчатых комплекснозначных функций, постоянных на интервалах Δ_m^k .

Лемма 6. Если $f \in L[0, 1]$, то

$$S_{p^m}(f; x) = p^m \int_{\Delta_m(x)} f(x) dx \in \Lambda_m,$$

то есть частная сумма с номером p^m есть ступенчатая функция (действительная, если $f(x)$ – действительнозначная) с интервалом постоянства длиной p^{-m} , равная среднему значению функции $f(x)$ на каждом интервале m -го ранга.

Если $f \in \Lambda_m$, то $S_{p^m}(f) = f$ и $S_k(f) \equiv f$ при $k \geq p^m$.

Операцией квантования (p^m -усреднения) непрерывного сигнала называется операция перехода от функции $f \in L[0, 1]$ к функции $f_m \in \Lambda_m$ такой, что для всех $x \in [0, 1)$ выполнено $f_m(x) = p^m \int_{\Delta_m(x)} f(t) dt$. Лемма 6 утверждает, что переход к частной сумме ряда Фурье по системе Крестенсона–Леви с номером p^m есть операция p^m -усреднения.

Лемма 7. Коэффициенты Фурье по системе Крестенсона–Леви с номерами $i < p^m$ для функции $f \in L[0, 1]$ и ее p^m -усреднения $f_m \in \Lambda_m$ совпадают.

Теорема 3 (принцип локализации Римана). Если $f(x) = 0$ при $x \in \Delta_m(x_0)$ для некоторого m , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = 0.$$

В частности, справедливо $S_{p^k}(f; x_0) = 0$ при $k \geq m$.

Доказательство лемм 6, 7 и теоремы 3 аналогично доказательствам, приведенным для системы Уолша.

Утверждение 6. Имеет место следующее представление в виде объединения непересекающихся интервалов $(0, 1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p-1} \Delta_m^k$.

Справедливо аналогичное представление $[0, 1]^* \setminus \{0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p-1} \Delta_m^k$ модифицированного отрезка (без одной точки) в виде объединения непересекающихся отрезков $\Delta_m^k = [(\frac{k}{p^m})^+; (\frac{k+1}{p^m})^-]$.

Лемма 8. Точной мажорантой для ядра Дирихле по системе Крестенсона–Леви служит функция

$$h(x) = \frac{p^{m-1} \cos \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{k\pi}{p}}, \quad \text{если } x \in \Delta_m^k, \quad 1 \leq k < p.$$

Для случая $p = 3$ мажоранта имеет более простой вид

$$h(x) = p^m \quad , \quad \text{если } x \in [p^{-(m+1)}, p^{-m}).$$

То, что мажоранта точная, вытекает из п. 5 леммы 3 для s найденного из условия $s \cdot k \pmod{p} = \frac{p-1}{2}$. Тогда, согласно (8), на интервале Δ_m^k имеем

$$D_{sp^{m-1}}(x) = (1 + q^k + \dots + q^{(s-1)k}) \cdot p^{m-1} = \frac{1 - q^{sk}}{1 - q^k} \cdot p^{m-1} = \frac{1 - q^{(p-1)/2}}{1 - q^k} \cdot p^{m-1}.$$

Оценим по модулю

$$\left| \frac{1 - q^{(p-1)/2}}{1 - q^k} \right| = |q^{\frac{p-1}{4} - \frac{k}{2}}| \cdot \frac{|q^{(p-1)/4} - q^{-(p-1)/4}|}{|q^{k/2} - q^{-k/2}|} = \frac{|2i \sin \frac{2\pi}{p} \frac{p-1}{4}|}{|2i \sin \frac{2\pi}{p} \frac{k}{2}|} = \frac{\cos \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{k\pi}{p}}. \quad \square$$

Неравенство $|D_n(x)| \leq h(x)$, которое доказывается более сложно, можно подтвердить *выводом о поведении модуля ядра Дирихле для системы Крестенсона–Леви*: в любой точке $x \in (0, 1)$ значение модуля ядра Дирихле $|D_n(x)|$ как функция целочисленного аргумента n растет от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно убывает от $h(x)$ до $e(x)$ (то есть колеблется в данных пределах). В основе этого вывода лежит лемма 3.

Лемма 9. *Константы Лебега системы Крестенсона–Леви растут не быстрее логарифма $L_n = O(\log n)$.*

Доказательство. Если $n = s \cdot p^m + k$, где $1 \leq s < p$, $k < p^m$, то по утверждению 5 и лемме 3

$$L_n = \int_0^{1/p^m} |D_{s \cdot p^m}(x) + \chi_{s \cdot p^m}(x) \cdot D_k(x)| dx + \int_{1/p^m}^1 |D_k(x)| dx. \quad (10)$$

Второе слагаемое правой части (10) равно

$$\int_0^1 |D_k(x)| dx - k \int_0^{1/p^m} dx = L_k - \frac{k}{p^m}.$$

Первое слагаемое оценим сверху (разбив интервал интегрирования на интервалы следующего ранга и используя мажоранту ядра Дирихле $h(x)$) величиной

$$\int_{\Delta_{m+1}^0} (s \cdot p^m + k) dx + \sum_{l=1}^{p-1} \int_{\Delta_{m+1}^l} h(x) dx = \frac{1}{p^{m+1}} \left(n + p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\cos \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{k\pi}{p}} \right).$$

Отсюда выводим, что для каждого p найдется своя константа C такая, что $L_n < L_k + C$. Следовательно $L_n \leq C \log_p n$. В частности, при $p = 3$ оценка принимает вид

$$L_n \leq L_k - \frac{k}{3^m} + \frac{1}{3^{m+1}}(n + 2 \cdot 3^m) = L_k + \frac{s \cdot 3^m + 2(3^m - k)}{3^{m+1}} < L_k + \frac{4}{3},$$

которая при более аккуратном вычислении имеет вид $L_n < L_k + 1$. Для $p = 3$ получаем оценку $L_n \geq \log_3 n$, которая не верна только при n равных 1, 2 и 4.

Из (10) вытекает и противоположное неравенство.

Если $p > 3$, то рассмотрим $k < \frac{p^m}{2}$ и $s = 1$. Тогда

$$L_n = \frac{1}{p^{m+1}} \left(n + \sum_{l=1}^{p-1} |p^m + q^l \cdot k| \right) + L_k - \frac{k}{p^m},$$

$$L_n = L_k + \frac{1}{p^{m+1}} \left((n - k) + \sum_{l=1}^{p-1} (|p^m + q^l \cdot k| - k) \right) > L_k + \frac{1}{p}.$$

Следовательно, для номера вида $n = 1 + p + p^2 + \dots + p^{m-1}$ имеем $L_n \geq \frac{m}{p} > \frac{1}{p} \log_p n$.

Для случая $p = 3$ можно это неравенство уточнить и показать, что для номера $n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-1}$ имеем $L_n \geq \frac{m}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}} \log_3 n$. В частности,

$$L_4 = \int_0^{1/9} 4dx + \int_{1/9}^{2/9} |3+q|dx + \int_{2/9}^{1/3} |3+\bar{q}|dx + \int_{1/3}^1 dx = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{7} + \frac{2}{3} > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Далее по формуле (10)

$$L_{13} = \int_0^{1/27} 13dx + 2 \int_{1/27}^{2/27} |9+4q|dx + \frac{2}{9}\sqrt{7} + \frac{2}{3} = \frac{13}{27} + \frac{2}{27}\sqrt{61} + \frac{2}{9}\sqrt{7} + \frac{2}{3},$$

$L_{13} > L_4 + \frac{2}{27}\sqrt{61} > L_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, и в общем случае для $k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-1}$ имеем

$$L_{3^m+k} = \frac{3^m + k}{3^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+1}} \sqrt{(3^m)^2 - k3^m + k^2} + L_k - \frac{k}{3^m} > L_k + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

так как неравенство $\frac{2}{3^{m+1}} \sqrt{(3^m)^2 - k3^m + k^2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ легко получить из геометрических построений по теореме косинусов сравнением с высотой равностороннего треугольника. \square

Так же, как для системы Уолша, доказываются следующие две теоремы.

Теорема 4 (признак Дини). Если $\int_0^1 |f(x_0) - f(t + x_0)| h(t) dt < \infty$, где $h(t)$ – мажоранта ядра Дирихле (см. лемму 8), то ряд Фурье по системе Крестенсона–Леви в точке x_0 сходится к значению функции в этой точке

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = f(x_0).$$

Теорема 5. Норма оператора частных сумм, действующего из $L[0, 1]$ в $L[0, 1]$ (а также из $L_\infty[0, 1]$ в $L_\infty[0, 1]$), равна константе Лебега L_n .

Существенно сложнее доказывается

Теорема 6. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то существует число B_p такое, что $\|S_k(f)\|_p \leq B_p \|f\|_p$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Следствие. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то $\|S_k(f) - f\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

11.3 Свойства ряда и коэффициентов Фурье

Напомним определение скалярного произведения комплекснозначных последовательностей $c = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$, $d = (d_0, d_1, \dots, d_n, \dots)$:

$$(c, d) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{d}_n.$$

Определим p -ичную свертку функций

$$f * g = (f * g)(x) = \int_0^1 f(x - t)g(t) dt = \int_0^1 f(t)g(x - t) dt$$

и последовательностей как последовательность сдвигов

$$c * d = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_{m-k} d_k \right\}_{m=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_{m-k} \right\}_{m=0}^{\infty}.$$

Тогда формулу (9) можно переписать в виде $S_n(f) = f * D_n$.

Утверждение 7. Если $f \in L[0, 1]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n[f] = 0$.

Последовательность коэффициентов Фурье (6) функции $f(x)$ короче записывают в виде $\widehat{f} = (c_0[f], c_1[f], \dots, c_n[f], \dots)$ с помощью знака оператора $\widehat{\cdot}: L[0, 1] \rightarrow \mathbf{s}_0$.

Определим сдвиг функции $f(x)$ на элемент $a \in [0, 1)$ формулой

$$f_a(x) = f(x \dot{+} a).$$

Определим сопряженную функцию для функции $f(x)$ равенством

$$f^*(t) = \overline{f(-t)}.$$

Для последовательности $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{p-1}, c_p, \dots, c_n, \dots)$ сопряженной называется последовательность

$$c^* = (\overline{c_0}, \overline{c_{p-1}}, \overline{c_{p-2}}, \dots, \overline{c_1}, \overline{c_{(p-1)p}}, \dots, \overline{c_{-n}}, \dots).$$

Приведем свойства коэффициентов Фурье и ряда Фурье по системе Крестенсона–Леви, в скобках указав операторную форму записи (для свойств 1–5 и 8 полагаем $f, g \in L[0, 1]$).

1. ЛИНЕЙНОСТЬ. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то

$$c_n[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot c_n[f] + \beta \cdot c_n[g]; \quad (\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}).$$

2. СДВИГ. Относительно оператора вычисления коэффициентов Фурье сдвиг функции переходит в покомпонатное умножение на характер

$$c_n[f_a] = c_n[f] \cdot \chi_n(a), \quad (\widehat{f_a} = \widehat{f} \cdot \chi(a)).$$

3. УМНОЖЕНИЕ НА ХАРАКТЕР. После умножения исходной функции на функцию Крестенсона–Леви с последовательностью коэффициентов Фурье происходит групповой сдвиг

$$c_n[f \cdot \chi_k] = c_{n+k}[f]; \quad (\widehat{f \cdot \chi_k} = (\widehat{f})_k).$$

Доказательство свойств 1–3 аналогично приведенному для системы Уолша.

4. СОПРЯЖЕНИЕ. *Операции сопряжения функции и комплексного сопряжения значений функции двойственны относительно операции вычисления коэффициентов Фурье, а именно*

$$c_n[f^*] = \overline{c_n[f]}, \quad c_n[\bar{f}] = c_{-n}[f] \quad (\widehat{f^*} = \widehat{\bar{f}}, \quad \widehat{\bar{f}} = (\widehat{f})^*).$$

Доказательство. Комплексное сопряжение произведения есть произведение комплексных сопряжений. Применим лемму 1 и свойство инвариантности интеграла относительно сдвига

$$c_n[f^*] = \int_0^1 f^*(x) \overline{\chi_n(x)} dx = \int_0^1 \overline{f(-x) \chi_n(-x)} dx = \overline{c_n[f]}.$$

В следующей выкладке повторим вычисления по лемме 1, отразив сопряжение в номере, а не в аргументе

$$c_n[\bar{f}] = \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot \overline{\chi_n(x)} dx = \int_0^1 \overline{f(x) \chi_{-n}(x)} dx = c_{-n}[f].$$

В следующих двух свойствах есть незначительные отличия по сравнению с системой Уолша.

5. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ. *Коэффициент Фурье p -ичной свертки равен произведению коэффициентов Фурье (где \times есть операция покомпонентного умножения последовательностей)*

$$c_n[f * g] = c_n[f] \cdot c_n[g]; \quad (\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}).$$

6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ. *Если $f \in L_p[0, 1]$, $g \in L_{p'}[0, 1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то последовательность коэффициентов Фурье произведения функций есть p -ичная свертка последовательностей коэффициентов Фурье функций*

$$c_n[f \cdot g] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n-k}[f] \cdot c_k[g]; \quad (\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}).$$

7. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ. *Если $f \in L_p[0, 1]$, $g \in L_{p'}[0, 1]$, где $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то*

$$\int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k[f] \cdot \overline{c_k[g]}, \quad (f, g) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ. Если $t \in [0, 1)$, то $\int_0^t f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} (\widehat{f}, \widetilde{D}_{[t]_m})$,

где $[t]_m = \sum_{k=1}^m \frac{t_k}{p^k}$ – срезка числа t вида (2), которая определяется формулой, аналогичной (10.10), а $\widetilde{D}_{[t]_m}$ – последовательность значений дробного ядра Дирихле по системе Крестенсона–Леви.

В формулировке утверждения появилось новое (применительно к системе Крестенсона–Леви) понятие: последовательность значений *дробного ядра Дирихле*, координаты которой с номером i при $0 \leq i \leq p^m - 1$ определим (ссылкой на п. 3 леммы 3) формулой $D_{\frac{k}{p^m}}(i) := \frac{1}{p^m} D_k(\frac{i}{p^m})$. Координаты $\widetilde{D}_{\frac{k}{p^m}}$ с индексами $i \geq p^m$ считаем равными нулю.

11.4 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите утверждения 1–7.

2. Составьте таблицу значений по интервалам ядра Дирихле и констант Лебега по системе Крестенсона–Леви при $p = 3$ для первых девяти номеров.

3. Разложите функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 4/9), \\ 0, & \text{если } x \in [4/9, 1), \end{cases}$ в ряд по системе Крестенсона–Леви при $p = 3$. Вычислите частные суммы этого ряда.

4. Разложите функции $f(x) = x$ в ряд по системе Крестенсона–Леви при $p = 3$ (первые 9 коэффициентов).

5. Разложите лестницу Кантора $k(x)$ (определение смотри в упражнении 9 гл. 4) в ряд по системе Крестенсона–Леви при $p = 3$ (первые 9 коэффициентов).

6. Докажите теорему 4.

7. Докажите сформулированные свойства коэффициентов Фурье по системе Крестенсона–Леви по аналогии с системой Уолша.

8. Вычислите интегралы $\int_0^{\frac{m}{9}} x dx$ при $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ через коэффициенты Фурье по системе Крестенсона–Леви. Повторите вычисления для лестницы Кантора.

Глава 12

Система Хаара

12.1 Определение и свойства системы Хаара

В 1910 г. А. Хаар поставил и решил задачу: построить ортогональную систему, ряд Фурье по которой для любой непрерывной функции сходится к ней.

Функции системы Хаара $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, которые как и функции Уолша группируются по пачкам, определим на интервале $(0, 1)$ с помощью двойной и сквозной нумерации:

$$\chi_0(t) \equiv 1, \quad \chi_1(t) = \chi_0^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (0, 1/2), \\ -1 & \text{при } t \in (1/2, 1), \\ 0 & \text{при } t = 1/2. \end{cases}$$

$$\chi_{2^n+k}(t) = \chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in (\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in (\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}), \\ 0 & \text{при } t \in (0, \frac{k}{2^n}) \cup (\frac{k+1}{2^n}, 1) \cup \{\frac{2k+1}{2^{n+1}}\}, \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^n} & \text{при } t = k/2^n, k \neq 0, \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^n} & \text{при } t = \frac{k+1}{2^n} \neq 1, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Обычно функции Хаара определяются на отрезке $[0, 1]$ продолжением данного определения, предложенного для $(0, 1)$, в точках 0 и 1 по непрерывности функций изнутри отрезка. Это определение функций Хаара назовем основным. При определении использовали принцип нумерации с нуля как и для системы Уолша.

В математической литературе прошлого века применялась нумерация с единицы.

В книге [15] функции Хаара по другому определены в точках разрыва и поэтому в [15] ошибочно доказательство основного свойства системы Хаара о том, что ряд Фурье-Хаара сходится к ней равномерно. Соответствующий контрпример построил П. Л. Ульянов.

Систему Хаара можно как и систему Уолша рассматривать на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$ (или на полуинтервале $[0, 1) \in \mathbb{R}$), задавая функции системы равенством $|\chi_{2^{n+k}}(t)| = \sqrt{2^n}$ при $t \in \Delta_n^k$, где функция $\chi_{2^{n+k}}(t)$ имеет знак плюс на левой половине Δ_{n+1}^{2k} интервала Δ_n^k и отрицательна на правой половине Δ_{n+1}^{2k+1} интервала Δ_n^k . В остальных точках функция определяется нулем. Интервал Δ_n^k называется носителем функции $\chi_{2^{n+k}}$. Это определение, которым мы и будем в основном пользоваться, более удобно тем, что позволяет результаты предыдущей главы перенести на систему Хаара. В этой главе комплекснозначных функций не рассматриваем.

Лемма 1. Система Хаара $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на $[0, 1]$.

Доказательство. Имеем $(\chi_0, \chi_n) = \int_0^1 \chi_n(t) dt = 0$ при $n \neq 0$.

Если функции χ_n и χ_m из одной пачки и различны, то их носители не пересекаются. Следовательно $(\chi_n, \chi_m) = 0$.

Если функции χ_n и χ_m из разных пачек, то возможны 2 случая. Если носители не пересекаются, то $(\chi_n, \chi_m) = 0$. Если носители пересекаются, то носитель Δ_m^l функции $\chi_{2^{m+l}}$ из старшей пачки ($m > n$) лежит на интервале постоянства $(\Delta_m^l \subset \Delta_n^k)$ другой функции $\chi_{2^{n+k}}$, значение которой можно вынести за знак интеграла

$$(\chi_{2^{n+k}}, \chi_{2^{m+l}}) = \chi_{2^{n+k}}(\Delta_m^l) \cdot \int_{\Delta_m^l} \chi_{2^{m+l}}(t) dt = 0.$$

Итак, функции Хаара ортогональны.

Проверим, что функции нормированы: $(\chi_0, \chi_0) = 1$,

$$(\chi_{2^{n+k}}, \chi_{2^{n+k}}) = \int_0^1 (\chi_{2^{n+k}}(t))^2 dt = \int_{\Delta_n^k} 2^n dt = 1. \quad \square$$

Лемма 2. Линейная оболочка набора $\{\chi_k(t)\}_{k=0}^{2^n-1}$ совпадает с классом Λ_n двоично-ступенчатых функций.

Доказательство. Принадлежность каждой функции набора классу Λ_n означает вложение в одну сторону.

Покажем с использованием метода математической индукции по номеру пачки n , что любая $f \in \Lambda_n$ представима как линейная комбинация функций набора.

Если функция определена $f(t) = a$ при $t \in \Delta_1^0$ и $f(t) = b$ при $t \in \Delta_1^1$, то положим $f(t) = \frac{a+b}{2}\chi_0(t) + \frac{a-b}{2}\chi_1(t)$. База индукции установлена.

Предположим, что любая функция из Λ_{n-1} представима как линейная комбинация первых 2^{n-1} функций набора. Пусть $f \in \Lambda_n$. Определим функцию $g \in \Lambda_{n-1}$ как среднее значение $f(t)$ по интервалам $(n-1)$ -го ранга: $g(t) = 2^{n-1} \int_{\Delta_{n-1}^k} f(x) dx$ при $t \in \Delta_{n-1}^k$.

Тогда функция $h = f - g \in \Lambda_n$ обладает свойством $\int_{\Delta_{n-1}^k} h(t) dt = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ и, следовательно, представима в виде $\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k \chi_k(t)$. Предполагая представимость $g(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \chi_k(t)$, получа-

ем индуктивный переход $f(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \chi_k(t)$. \square

Замечание. Если пользоваться основным определением, то в качестве функций класса Λ_n на интервале $(0, 1)$ выступают двоично-ступенчатые функции, у которых все внутренние точки разрыва являются регулярными точками.

Теорема 1. Система Хаара полна в $L[0, 1]$.

Доказательство. Каждая функция системы Хаара принадлежит пространству $B[0, 1]$, то есть лежит в $(L[0, 1])^*$. Пусть $f \in L[0, 1]$. Обозначим $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ такую первообразную для нее, что $F(0) = 0$.

Условие $(f, \chi_0) = 0$ влечет $F(1) - F(0) = 0$, то есть $F(1) = 0$. Из условия $(f, \chi_1) = 0$ следует, что $F(1) - 2F(1/2) + F(0) = 0$, то есть $F(1/2) = 0$. Если доказано, что $F(\frac{k}{2^n}) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, то условия $(f, \chi_n^{(m)}) = 0$ влекут $F(\frac{m+1}{2^n}) - 2F(\frac{2m+1}{2^{n+1}}) + F(\frac{m}{2^n}) = 0$, то есть $F(\frac{2m+1}{2^{n+1}}) = 0$ для всех $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Из условия $F(x) = 0$ во всех двоично-рациональных точках по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом получаем $F(x) \equiv 0$. Следовательно, $f(t) = 0$ почти всюду. \square

Следствие. Система Хаара полна и замкнута в $L_p[0, 1]$ для любого $p \geq 1$.

Доказывается так же, как для системы Уолша (теорема 10.3 и далее). В первом абзаце данной главы сказано, что система Хаара замкнута в $C[0, 1]$.

Определение 1. *Ряд по системе Хаара* имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x).$$

Если коэффициенты вычислены по формуле $a_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(x) dx$ для коэффициентов Фурье по системе Хаара функции $f \in L[0, 1]$, то это ряд Фурье по системе Хаара для $f(x)$.

Как следствие полноты в $L_2[0, 1]$ получаем равенство Парсеваля

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2[f]$$

и стремление к нулю коэффициентов Фурье функции по системе Хаара: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k[f] = 0$ для любой $f \in L_2[0, 1]$.

Лемма 3. *Если $f \in \Lambda_n$, то для любого $m \geq 2^n$ частная сумма ряда Фурье-Хаара с номером m совпадает с $f(x)$, то есть $S_m(f; x) = f(x)$ всюду.*

Систему Хаара называют также *системой последовательной прорисовки деталей*. Действительно, для любой $f \in L[0, 1]$ частная сумма $S_{2^{n+k}}(f)$, где $0 < k \leq 2^n$, принадлежит Λ_{n+1} и на интервалах Δ_{n+1}^m , где $0 \leq m < 2k$, совпадает со своим средним значением $2^{n+1} \int_{\Delta_{n+1}^m} f(x) dx$ на данном интервале, которое обозначим $\overline{f(\Delta_{n+1}^m)}$. Если же $m \geq 2k$, то $S_{2^{n+k}}(f; \Delta_{n+1}^m) = \overline{f(\Delta_n^{m_1})}$, где $\Delta_{n+1}^m \subset \Delta_n^{m_1}$. Значит, при увеличении k на единицу (при условии $k < 2^n$) меняется значение частной суммы только на интервале $\Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{2k} \cup \Delta_{n+1}^{2k+1}$ заменой $\overline{f(\Delta_n^k)}$ на $\overline{f(\Delta_{n+1}^{2k})}$ и $\overline{f(\Delta_{n+1}^{2k+1})}$ соответственно.

Как следствие получаем, что *частные суммы с номерами 2^n по системе Уолша и Хаара совпадают и получаются усреднением исходной функции по интервалам n -го ранга*. Данный результат уточним. Введем матрицы дискретного преобразования Уолша W_k уровня k (т.е. ее

порядок 2^k), проиллюстрировав матрицами 1-го, 2-го и 3-го уровня:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Каждая i -ая строка матрицы W_n (при нумерации с нуля) есть значение функции Уолша $w_i(x)$ на интервалах n -го ранга Δ_n^j , где $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ номер столбца.

Лемма 4. *Функции Уолша-Пэли любой пачки есть линейная комбинация функций Хаара той же пачки. А именно,*

$$\begin{pmatrix} w_{2^n}(x) \\ w_{2^{n+1}}(x) \\ w_{2^{n+2}}(x) \\ \vdots \\ w_{2^{n+1}-1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \cdot W_n \cdot \begin{pmatrix} \chi_{2^n}(x) \\ \chi_{2^{n+1}}(x) \\ \chi_{2^{n+2}}(x) \\ \vdots \\ \chi_{2^{n+1}-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{2^n}(x) \\ \chi_{2^{n+1}}(x) \\ \chi_{2^{n+2}}(x) \\ \vdots \\ \chi_{2^{n+1}-1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \cdot W_n \cdot \begin{pmatrix} w_{2^n}(x) \\ w_{2^{n+1}}(x) \\ w_{2^{n+2}}(x) \\ \vdots \\ w_{2^{n+1}-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Формула $w_{2^n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \chi_{2^{n+k}}(x)$ очевидна. Остальные строчки матрицы-столбца слева равны

$$w_{2^{n+m}}(x) = w_m(x) \cdot w_{2^n}(x) = w_m(\Delta_n(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \chi_{2^{n+k}}(x).$$

Так как для любого x в сумме присутствует только одно отличное от нуля слагаемое и номер k этого слагаемого таков, что $\Delta_n^k = \Delta_n(x)$, то

$$w_{2^n+m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_m(\Delta_n^k) \cdot \chi_{2^n+k}(x).$$

Обратное соотношение основано на свойстве ортогональности матрицы дискретного преобразования Уолша $(W_n)^2 = 2^n E$. \square

Следствие. Коэффициенты Фурье $c_n[f]$ по системе Уолша-Пэли любой пачки есть линейная комбинация коэффициентов Фурье $a_n[f]$ по системе Хаара той же пачки, а именно (в матричной форме записи):

$$(c_{2^n} \ c_{2^{n+1}} \ \dots \ c_{2^{n+1}-1}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (a_{2^n} \ a_{2^{n+1}} \ \dots \ a_{2^{n+1}-1}) \cdot W_n,$$

$$(a_{2^n} \ a_{2^{n+1}} \ \dots \ a_{2^{n+1}-1}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (c_{2^n} \ c_{2^{n+1}} \ \dots \ c_{2^{n+1}-1}) \cdot W_n.$$

Наличие формул перехода от системы Уолша к системе Хаара и наоборот не случайно. Приведем общие утверждения.

Квадратную матрицу A порядка N , строки A_i которой ортонормированы в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n ($(A_i, A_j) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{in} a_{jn} = \delta_{ij}$), назовем *ортонормированной по строкам*.

Лемма 5. Если матрица A ортонормирована по строкам, то ее определитель $|A| = \pm 1$ и матрица A ортонормирована по столбцам.

Доказательство. С помощью транспонированной матрицы A^T условие ортонормированности по строкам записывается в виде $AA^T = E$. По свойствам определителей $|A^T| = |A|$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ получаем $|A|^2 = 1$. Условие $AA^T = E$ для квадратных матриц означает, что A^T является обратной матрицей для A . Значит $A^T A = E$, что равносильно ортонормированности по столбцам. \square

В математической литературе ортонормированные по строкам и по столбцам матрицы принято называть *ортогональными*. Мы, как это принято в технической литературе, расширяем класс ортогональных матриц, отнеся к нему также квадратные матрицы, квадрат которых отличается от единичной матрицы того же порядка на положительный множитель. Это позволяет матрицы W_n также называть ортогональными.

12.2 Ряды Фурье по системе Хаара

Перечислим основные свойства рядов по системе Хаара, которые получены при основном определении системы Хаара.

Теорема 2. *Для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции ее ряд по системе Хаара сходится к ней равномерно.*

Лемма 6. *Для любого $1 \leq p \leq \infty$ и для любой последовательности $\{a_k\}$ действительных чисел последовательность норм частных сумм $\|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \chi_k(x)\|_p$ возрастает (не строго) по n .*

Доказательство неравенства $\|S_n\| \leq \|S_{n+1}\|$ покажем в простейших случаях. При $p = 1$ оно вытекает из $|a + \epsilon| + |a - \epsilon| \geq 2 \cdot |a|$, при $p = 2$ из неравенства $(a + \epsilon)^2 + (a - \epsilon)^2 \geq 2a^2$, при $p = \infty$ из неравенства $\max(|a + \epsilon|, |a - \epsilon|) \geq |a|$. В общем случае справедливость неравенства обосновывается выпуклостью вниз функции x^p . \square

Следствие. *Для любой $f \in L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, числовая последовательность $\{\|S_n(f)\|_p\}$ сходится.*

Далее уточним, что последовательность частных сумм сходится к самой функции.

Определение 2. Система элементов φ_n банахова пространства X называется *базисом* в X , если для любого $f \in X$ существует единственный ряд $\sum_n a_n \varphi_n$, сходящийся к f по норме пространства X .

Теорема 3. *Система Хаара является базисом в $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Причем, для любой $f \in L_p[0, 1]$ имеем $\|f - S_n(f)\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Систему Хаара нельзя назвать базисом в $C[0, 1]$, так как функции Хаара не принадлежат $C[0, 1]$.

Теорема 4. *При $1 < p < \infty$ система Хаара является безусловным базисом.*

Данная теорема, установленная Марцинкевичем, доказывается сложно. В ней утверждается, что при любой перестановке системы она остается базисом.

В пространстве $L[0, 1]$ нет безусловных базисов, что доказывается также с использованием системы Хаара.

Теорема 5. *Для любой $f \in L[0, 1]$ ряд Фурье по системе Хаара сходится к $f(x)$ почти всюду.*

При этом в точке разрыва первого рода x_0 ряд Фурье-Хаара:

сходится к $f(x_0)$, если x_0 – двоично-рациональная и регулярная;
расходится, если x_0 – двоично-иррациональная.

Следствие. Ряд Фурье-Хаара функции ограниченной вариации может расходиться на всюду плотном в $[0, 1]$ множестве.

Теорема 6. Для функции ограниченной вариации ряд Фурье-Хаара сходится тогда и только тогда, когда $a_n[f] = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Для непрерывной функции условие $a_n[f] = o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ возможно только для констант.

Теорема 7. Для любого измеримого множества $E \subset [0, 1]$ ряд по системем Хаара сходится на E безусловно тогда и только тогда, когда он сходится на E абсолютно.

Лемма 7 (контрпример к теореме Мерсера). Существует такая $f \in L[0, 1]$, что ее коэффициенты Фурье по системе Хаара не стремятся к нулю.

Доказательство. В качестве примера предложим функцию $f(x)$, для которой коэффициенты Фурье по системе Хаара равны: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{2^{n-1}}}{n^2}, a_{2^{n-1}+k} = 0$ при $0 < k < 2^{n-1}$. Тогда $a_{2^{n-1}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Частные суммы ряда меняются только на интервалах вида Δ_n^0 и, следовательно, они стабилизируются: $f(x) = S_m(f, x) = S_{2^n}(f, x)$ при $x \in [2^{-n}, 1)$, $m \geq 2^n$. Заметим, что: $S_{2^n}(f, x) = 0$ при $x \geq 1/2$;

$$b_k = 1 + 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{9} + \frac{8}{16} + \dots + \frac{2^{k-1}}{k^2} - \frac{2^k}{(k+1)^2}, \text{ где } b_k = f(x) \text{ при } x \in \Delta_{k+1}^1.$$

Так как $b_k - b_{k-1} = \frac{2^k}{k^2} - \frac{2^k}{(k+1)^2} > 0$, то $f(x) = S_m(f, x) > 0$ при $x < 1/2$. Условие $\int_0^1 S_m(f, x) dx = 1$ означает, что $\|f\|_{L[0,1]} = 1$. Функция $f(x)$ не является обобщенной ($\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2^{-n}} S_{2^n}(f, x) dx = 0$). Очевидно, что $a_{2^{n-1}+k}[f] = 0, a_0[f] = a_1[f] = 1$. Для остальных коэффициентов проверяем их совпадение с a_{2^n} по формуле $a_{2^n}[f] =$

$$= \sqrt{2^n} \left(\int_{\Delta_{n+1}^0} f(x) dx - \int_{\Delta_{n+1}^1} f(x) dx \right) = \sqrt{2^n} \left(1 - 2 \frac{b_n}{2^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{2^{k+1}} \right). \square$$

Более подробным изучением свойств системы Хаара занимались в основном советские математики, среди которых выделим П. Л. Ульянова и Б.И. Голубова, опубликовавших также обзорные статьи по данной тематике, где можно найти доказательства приведенных результатов.

12.3 КМА на примере функций Хаара

В последние годы наиболее активно развивающимся направлением в прикладной математике является *теория всплесков* [19], известная под англоязычным названием *вейвлет-анализ* [10]. Основу конструкции составляет кратно-масштабный анализ (КМА), построение которого обычно демонстрируется на примере функций Хаара. При построении КМА можно применять любое из приведенных определений функций Хаара.

Функции любой пачки системы Хаара можно получить операцией сжатия с нормировкой и двоичного сдвига функций предыдущей пачки. А именно:

$$\chi_n^{(0)}(t) = \sqrt{2} \cdot \chi_{n-1}^{(0)}(2t), \quad \chi_n^{(k)}(t) = \chi_n^{(0)}\left(t - \frac{k}{2^n}\right).$$

При этом определении функции Хаара доопределяются нулём вне $[0, 1)$. Методом сжатия с нормировкой можно получить все функции начальной половины пачки $\chi_n^{(k)}(t) = \sqrt{2} \cdot \chi_{n-1}^{(k)}(2 \cdot t)$ для $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$.

Методом сжатий и сдвигов систему Хаара, заданную на $[0, 1)$, продолжают на полуось (что мы и будем делать) или на всю числовую ось (что обычно делают в книгах по вейвлетам [19, 10]). Основные функции $\chi_0(t)$ и $\chi_1(t) = \chi_0^{(0)}(t)$ доопределяем нулем вне $[0, 1)$. Функция χ_0 , которую будем обозначать $\chi^{(0)}$, называется *масштабирующей*, а функция $\chi_0^{(0)}$ называется *материнской*. Целочисленными сдвигами масштабирующей функции получим систему функций $X_0 = \{\chi^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ на полуоси $[0, \infty)$, а целочисленными сдвигами материнской функции получим систему функций $Y_0 = \{\chi_0^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Применяя к сдвигам материнской функции операцию сжатия в два раза $\chi_1^{(k)}(t) = \sqrt{2} \cdot \chi_0^{(k)}(2t)$, получим систему функций $Y_1 = \{\chi_1^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Применяя к системе функций Y_{n-1} ту же операцию сжатия, получим систему функций $Y_n = \{\chi_n^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Функция этой системы есть функция Хаара или ее целочисленный сдвиг и выражается через материнскую функцию

$$\chi_n^{(k)}(t) = \sqrt{2^n} \cdot \chi_1(2^n \cdot t - k). \quad (1)$$

Конструкция КМА строится для функций из пространства $L_2[0, \infty)$ в нашем случае (или из $L_2(-\infty, \infty)$ в стандартном случае). Выделим

подпространство $V_0 \subset L_2[0, \infty)$, состоящее из функций постоянных на целочисленных интервалах. Тогда V_0 есть замыкание по норме $L_2[0, \infty)$ линейной оболочки системы X_0 . Пространство V_0 можно трактовать как l_2 . Следовательно, V_0 изоморфно $L_2[0, \infty)$.

Обозначим W_n пересечение замыкания линейной оболочки функций системы Y_n с $L_2[0, \infty)$, а через V_n аналогичное пересечение замыкания линейной оболочки функций системы $X_0 \cup Y_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1}$.

Итак, построили основную часть конструкции КМА:

- 1) $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$;
- 2) $\cup_{n=0}^{\infty} V_n$ всюду плотно в $L_2[0, \infty)$;
- 3) $W_n \cap W_m = \emptyset$ при $n \neq m$;
- 4) $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ (прямая сумма пространств);
- 5) $f \in V_n$ тогда и только тогда, когда $g \in V_{n+1}$, где $g(t) = f(2 \cdot t)$.

Чтобы следовать устоявшимся обозначениям [19, 10], применили для обозначения пространств символ W_n , использованный выше для матриц.

Конструкция КМА есть один из способов факторизации пространства, то есть разложения его в цепочку вложенных однотипных подпространств, построенных по одной функции. Для сравнения приведем другую, более простую и наглядную конструкцию, позволяющую факторизовать пространство по целочисленным интервалам.

Лемма 8. *Функции системы $\{\chi^{(k)}(t), \chi_n^{(k)}(t)\}_{k,n=0}^{\infty}$, носители которых попали на интервал $[t, t+1)$, есть сдвиг системы Хаара на натуральное число t и составляют полную ортонормированную систему на целочисленном интервале $[t, t+1)$.*

Следствие. *Формулировка леммы 8 справедлива и для интервала вида $[k/2^m, (k+1)/2^m)$, если в систему добавим в качестве масштабированной функции характеристическую функцию этого интервала.*

Вернемся к конструкции КМА, в которой цепочка вложенных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$ есть факторизация линейной оболочки этой системы по степени сжатия.

Факторизацию по степени сжатия можно продолжить и в другую сторону. Пусть $\chi_{-1}^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \chi_0^{(k)}(t/2)$ и $Y_{-1} = \{\chi_{-1}^{(k)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Продолжаем процесс растяжений

$$\chi_{-n}^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \chi_{-n+1}^{(k)}(t/2), \quad Y_{-n} = \{\chi_{-n}^{(k)}(t)\}_{k=0}^{\infty}.$$

Подпространство V_{-n} определим как замыкание в $L_2[0, \infty)$ линейной оболочки системы Y_{-n} с добавленной масштабирующей функцией, равной характеристической функции интервала $[0, 2^n)$. При бесконечном продолжении данного процесса получаем двустороннюю цепочку вложенных пространств.

Итак, получили совокупность замкнутых пространств V_j , $j \in \mathbb{Z}$, которую назовем [19, с. 21] *кратномасштабным анализом в $L_2[0, \infty)$* , удовлетворяющую следующим условиям (аксиомам КМА):

- 1) $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$;
- 2) $\cup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ всюду плотно в $L_2[0, \infty)$;
- 3) $\cap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$;
- 4) $f \in V_n$ тогда и только тогда, когда $g \in V_0$, где $g(t) = f(2^{-n} \cdot t)$;
- 5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что последовательность сдвигов $\{\varphi(t - j)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ образует базис Рисса в V_0 .

В нашем случае нет необходимости вводить новое понятие *базис Рисса* [19, с. 13], так как целочисленные сдвиги масштабирующей функции $\chi_0(x)$ образуют базис в V_0 , который естественно является и базисом Рисса.

Масштабирующая функция любого из пространств V_n ($n \in \mathbb{Z}$) рождается в предыдущем пространстве V_{n-1} . Поэтому необходимости в ее задании (при двусторонней цепочке вложенных пространств в случае системы Хаара) нет.

При переходе на всю числовую ось (в этом виде и приводятся формулировки в [10, 19]) требуем $k \in \mathbb{Z}$. Тогда формула (1) выражает любую функцию системы $Y_n = \{\chi_n^{(k)}(t)\}$, где $n \in \mathbb{Z}$, для всех $t \in (-\infty, \infty)$ через материнскую.

Аналогично продолжается и факторизация по интервалам, которую приводим для сравнения.

Отметим, что $\chi^{(k)}(t) = |\chi_0^{(k)}(t)|$, $X_0 = \{|\chi_0^{(k)}|\}_{k=0}^\infty$. Тогда $Y_{-1} = \{\chi_{-1}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, $X_{-1} = \{|\chi_{-1}^{(k)}|\}_{k=0}^\infty$. При изменении k на единицу происходит сдвиг функции $\chi_{-1}^{(k)}(t)$ на 2: $\chi_{-1}^{(k+1)}(t) = \chi_{-1}^{(k)}(t - 2)$.

Продолжим данный процесс:

$$Y_{-n} = \{\chi_{-n}^{(k)}\}_{k=0}^\infty, \quad X_{-n} = \{|\chi_{-n}^{(k)}|\}_{k=0}^\infty;$$

$$\chi_{-n}^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{-n+1}^{(k)}(t/2), \quad \chi_{-n}^{(k+1)}(t) = \chi_{-n}^{(k)}(t - 2^n).$$

Лемма 9. При любых целых m и l , где $m, l \in \mathbb{Z}$, система функций $\{\chi_l^{(m)}, \chi_{n+l}^{(k)}\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $2^n m \leq k < 2^n(m+1)$, является полной ортонормированной системой на $[m \cdot 2^{-l}, (m+1) \cdot 2^{-l}]$.

Доказательство. При $l = 0, m = 0$ – это система Хаара на $[0, 1)$.

При $l = 0, m \neq 0$ – это сдвиг системы Хаара на целочисленный интервал $[m, m+1)$.

При $l = 1, m = 0$ данная система получается сжатием в 2 раза системы Хаара с нормировкой и поэтому является полной ортонормированной системой на $[0, 1/2)$.

Если $l = -1, m = 0$, то данная система получается растяжением в 2 раза. Общий случай есть композиция операций многократного сжатия (растяжения) и сдвига. \square

Итак, необходимость введения масштабирующей функции (или ее растяжения) возникает при обрыве цепочки вложенных пространств в выбранном месте или при выделении двоичного интервала, на котором происходит разложение функции.

12.4 Реализация в виде ДПХ

При практической реализации применяют дискретное преобразование Хаара (ДПХ) к сигналу $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2^n-1})$, который трактуется как ступенчатая функция на интервале $[0, 2^M)$ для любого целого M . Основными случаями считают: случай $M = 0$, когда рассматривается ступенчатая функция на интервале $[0, 1)$, принимающая значение x_i на интервале Δ_n^i ; и случай $M = n$, когда x_i есть значение функции на целочисленном интервале $[i, i+1)$. Но можно брать и отрицательные M . Подход кратномасштабного анализа позволяет это сделать.

В технической литературе слово "дискретное" опускают, иногда заменяя на слово "быстрое" получая аббревиатуру БПХ. Мы этого делать не будем, так как по аналогии с построением преобразования Уолша можно построить *преобразование Хаара* в виде интегрального преобразования на $[0, \infty)$ (или на всей оси) с ядром преобразования в виде скрещенного произведения системы Хаара на себя. Однако это ядро не будет обладать свойством мультипликативности и, следовательно, для преобразования

Хаара нельзя утверждать, что выполнены основные свойства, которые верны для преобразований Фурье, Уолша, Крестенсона и их обобщений в виде мультипликативного преобразования Фурье. Поэтому преобразование Хаара практически не встречается в математической литературе и систематически не изучалось.

Для ДПХ удобнее рассматривать *ненормированные функции Хаара*: $\psi_0(x) = \chi_0(x)$, $\psi_1(x) = \chi_1(x)$,

$$\psi_{2^n+k}(x) = \psi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } x \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ -1 & , \text{ если } x \in \Delta_{n+1}^{2k+1}, \\ 0 & , \text{ если } x \notin \Delta_n^k. \end{cases} \quad (2)$$

Нормировка нужна для факторизации пространства L_2 . В конечном случае такой необходимости не возникает. В формуле (2) *интервалы* Δ_n^k можно трактовать в *обобщенном смысле*: если интервал задания ступенчатой функции $[0, 2^M)$, то определяют $\Delta_n^k = [k \cdot 2^{M-n}, (k+1) \cdot 2^{M-n})$. Для удобства будем как и ранее считать $M = 0$.

Исходный сигнал \vec{x} трактуется как $m(n)$ набор значений исходной функции, по которому вычисляются два набора в два раза меньшей длины:

$$\begin{aligned} m(n-1) &= (m_0, m_1, \dots, m_{2^{n-1}-1}); \\ h(n) &= (h_{2^{n-1}}, h_{2^{n-1}+1}, \dots, h_{2^n-1}). \end{aligned}$$

Формулы для вычисления координат наборов следующие:

$$m_i = \frac{1}{2}(x_{2i} + x_{2i+1}), \quad h_{2^{n-1}+i} = \frac{1}{2}(x_{2i} - x_{2i+1}).$$

Координаты m_i набора $m(n-1)$ переобозначим символом x_i (то есть $x_i := m_i$) и повторим процедуру, вычислив

$$m(n-2) = (m_0, m_1, \dots, m_{2^{n-2}-1}), \quad h(n-1) = (h_{2^{n-2}}, h_{2^{n-2}+1}, \dots, h_{2^{n-1}-1})$$

по тем же формулам $m_i = \frac{1}{2}(x_{2i} + x_{2i+1})$, $h_{2^{n-2}+i} = \frac{1}{2}(x_{2i} - x_{2i+1})$.

В конце процесса получим $m(0) = (m_0)$ и $h(1) = (h_1)$ и присвоим $h_0 := m_0$.

Замечание. При практической реализации обрабатываются массивы большого объема. Поэтому возникает задача экономии памяти. Программисты легко решают ее, используя в данном алгоритме только 2 массива: исходный x и формируемый h одинакового объема 2^n . Просматривая

массив x с конца, по содержимому двух ячеек вычисляем полусумму и полуразность. Ячейка с полусуммой замещает в x рассматриваемые ячейки, а значение полуразности помещаем в массив h , который заполняем с конца к началу. При достижении (начальной) границы массива x происходит возврат к концу массива x . В конце работы алгоритма в массиве x остается одна ячейка, содержимое которой переносим в оставшуюся незаполненной начальную ячейку массива h .

Полученный массив $h = (h_0, h_1, \dots, h_{2^n-1})$ есть набор коэффициентов Фурье ступенчатой функции (предложенной в виде сигнала \vec{x}) по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{2^n-1}$ ненормированных функций Хаара (2).

Восстанавливается исходная функция по формуле

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} h_k \cdot \psi_k(x). \quad (3)$$

Опишем процесс восстановления в координатах.

Получим псевдомассив $m(0)$ присвоением m_0 значения h_0 ($m_0 := h_0$). Вычислим массив $m(1) := (m_0 + h_1, m_0 - h_1)$ и переобозначим для следующего шага $m(1) = (m_0, m_1)$. В общем случае по массиву $m(k-1)$ вычислим массив $m(k) := (m_0 + h_{2^{k-1}}, m_0 - h_{2^{k-1}}, m_1 + h_{2^{k-1}+1}, m_1 - h_{2^{k-1}+1}, \dots, m_{2^{k-1}} + h_{2^{k-1}}, m_{2^{k-1}} - h_{2^{k-1}})$ и обозначим вычисленные координаты как набор значений m_i некоторой функции для следующего шага

$$m(k) = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_{2^k-1}).$$

Набор значений массива $m(k)$ равняется значениям частной суммы $S_{2^k}(x)$ для суммы (3), а также набору средних значений функции $f(x)$ на интервалах k -го ранга.

Если исходный сигнал \vec{x} соответствует ступенчатой функции $f(x)$ на интервале $[0, 1)$, то коэффициенты Фурье h_k по ненормированной системе (2) связаны с коэффициентами Фурье по системе Хаара соотношением

$$h_{2^m+k} = \sqrt{2^m} \cdot a_{2^m+k}[f], \quad 0 \leq k < 2^m.$$

При обработке изображений применяется двумерное ДПХ. Прямоугольный экран (размера $[0, 1] \times [0, 1]$ в условных единицах) разбиваем на $2^n \times 2^m$ ячеек (пикселей). Исходный сигнал представляется в виде двумерного массива M (матрицы размера $2^n \times 2^m$), элементы которого

равны значениям исходной ступенчатой положительной функции $f(x, y)$ в соответствующей ячейке. Для этой функции существует представление в виде следующей суммы

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} h_{ij} \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(y)$$

через ненормированные функции Хаара (2). По аналогии с описанным выше алгоритмом строится алгоритм перехода от массива M к массиву $H = (h_{ij})$ коэффициентов Фурье по ненормированной системе Хаара.

Часто применяется метод построчного сканирования массива M и записи его в виде одномерного массива объема 2^{n+m} , к которому применяется одномерное ДПХ.

Использование ДПХ в рамках КМА позволяет при цифровой обработке сигнала производить более подробное уточнение деталей по той же схеме для отдельно взятых координат без искажений на других участках. Например, набор $m(k)$ может соответствовать визуальной информации, где крайние координаты соответствуют фону и не подвержены значительным изменениям, а координаты m_3, m_4, m_5, m_6 , например, отвечают за зону меняющегося объекта. Тогда дальнейшее уточнение деталей можно производить только на этих четырех координатах и полученный результат встраивать в глобальную картинку с соблюдением масштаба.

12.5 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите лемму 3.
2. Разложите функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по системе Хаара двумя способами: непосредственно и через коэффициенты Фурье-Уолша по следствию леммы 4.
3. Вычислите квадрат приведенных матриц W_1, W_2, W_3 дискретного преобразования Уолша. Докажите, что в общем случае верно соотношение $(W_n)^2 = 2^n \cdot E$.
4. Будет ли функция из леммы 7 принадлежать $L_2[0, 1]$? Разложите эту функцию в ряд Фурье по системе Уолша.
5. Докажите лемму 8.

6. Вычислите вектор \vec{x} , который служит 2^m -усреднением при $m = 3$ функции $f(x) = x$. Прodelайте все шаги описанного прямого и обратного ДПХ для сигнала \vec{x} .

7. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по системе Хаара.

8. Составьте блок-схему алгоритма ДПХ и напишите программу, реализующую одномерное ДПХ.

9. Составьте блок-схему алгоритма двумерного ДПХ и напишите программу, реализующую двумерное ДПХ.

10. Для функции xy на $[0, 1] \times [0, 1]$ составьте массив ее средних значений по участкам, разбив квадрат на 32 равных прямоугольника. Для полученных значений протестируйте составленные программы. Одномерное ДПХ протестируйте дважды: при построчном переводе массива значений в одномерный массив и при сканировании двумерного массива по столбцам. Проведите сравнение результатов вычислений одномерных ДПХ с двумерным ДПХ и сделайте анализ полученных результатов.

11. Составьте блок-схему и напишите программу, восстанавливающую исходную ступенчатую функцию (3) по массиву h ее коэффициентов Фурье по ненормированной системе Хаара (2).

12. Опишите алгоритм, составьте блок-схему и напишите программу, восстанавливающую исходную ступенчатую функцию двух переменных $f(x, y)$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ по массиву $H = (h_{ij})$ ее коэффициентов Фурье по ненормированной системе Хаара, полученному с помощью двумерного ДПХ. Протестируйте программу на примере из упражнения 10.

Глава 13

Обобщение функций Уолша

13.1 Мультипликативные системы функций

Обобщение системы Уолша проводится в двух основных направлениях, и при этом разные авторы для разных объектов используют, к сожалению, один и тот же термин.

Система Уолша изучается в рамках двоичного гармонического анализа. В гл. 11 совершен переход от двоичного гармонического анализа к p -ичному, что приводит к системе Крестенсона–Леви. В математической литературе не принято рассматривать p -ичный случай, который считается промежуточным для более общего рассмотрения относительно системы счисления с переменным от разряда к разряду основанием. За соответствующей системой было закреплено название мультипликативная система функций, а в англоязычной [26] и технической [23] литературе ее называют системой Виленкина со ссылкой на его статью 1947 г., где дано описание мультипликативных систем на топологической группе. Иногда [2] эту систему называли системой Прайса, ссылаясь на статью 1950 г., где рассмотрена данная система на отрезке. К изучению системы Виленкина перейдем в конце главы. Предпочтем этот термин, так как более привычный [8] термин *мультипликативные системы функций* в книге [26] употребляется в другом смысле. Будем пользоваться терминологией из [26], немного ее подправив (двоично-мультипликативная вместо мультипликативная и так далее). В [26] не было такой необходимости, так как все изложение там ведется в рамках двоичного гармонического анализа без упоминания о возможности аналогичного p -ичного разложения.

Определение 1. Систему функций $\{R_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ назовем *двоично-образующей системой* для системы $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, если (здесь $k > 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$)

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_{2^n}(x) = R_n(x), \quad \varphi_{2^{n+k}}(x) = \varphi_{2^n}(x) \cdot \varphi_k(x). \quad (1)$$

Если система $\{\varphi_n\}$ построена по правилу (1), то для любого $n \in \mathbb{N}_0$, представленного в виде (10.1), функция системы определяется аналогично формуле (10.2)

$$\varphi_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (R_k(x))^{n_{k+1}}. \quad (2)$$

Например, система Радемахера есть двоично-образующая система для системы Уолша-Пэли.

Определение 2. Двоично-образующую систему функций $\{R_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ назовем *двоично-мультипликативной*, если система функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ (функцию $\varphi_0(x)$ исключим), построенная по формуле (1), обладает свойством $\int_0^1 \varphi_m(x) dx = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Систему функций $\{R_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ назовем *сильно двоично-мультипликативной*, если система функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, построенная по формуле (1), ортогональна на $[0,1]$.

Лемма 1. *Любая сильно двоично-мультипликативная система является двоично-мультипликативной. Обратное утверждение не верно.*

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из условия $(\varphi_0, \varphi_m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Примером двоично-мультипликативной системы, не являющейся сильно двоично-мультипликативной, служит система функций $\{\cos 2^n \pi x\}_{n=0}^{\infty}$.

Действительно, $\int_0^1 \cos 2^n \pi x dx = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Можно было бы на

$1/2$ влево сдвинуть все функции $R_n(x) = \cos 2^n \pi x$, перейдя к функциям $R_n(x + 1/2)$. Функция $R_0(x + 1/2)$ нечетная на $[-1/2, 1/2]$, а остальные $R_n(x + 1/2)$ – четные. Преобразование сдвига функций можно заменить на сдвиг оси вправо на $1/2$. Тогда функцию $R_0(x)$ назовем нечетной на $\Delta_0 = [0, 1)$, а остальные функции $R_n(x)$ четные на Δ_0 (так как они имеют график симметричный относительно прямой $x = 1/2$).

Следовательно, любая функция с нечетным номером $\varphi_{2n+1}(x)$ нечетная на Δ_0 , то есть $\int_0^1 \varphi_{2n+1}(x) dx = 0$. Заметим, что функция $R_n(x)$ четная на любом интервале Δ_k^j ранга меньшего, чем n , (симметричный график относительно вертикальной прямой через середину интервала), и нечетная на любом интервале Δ_n^j (симметричный график относительно середины интервала). Для любого четного номера $2n$ определим k как показатель степени, полученный из условий: $2n$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1} . Тогда $2n = 2^k + m$ и $\varphi_{2n} = R_k \cdot \varphi_m$, где m делится на 2^{k+1} . Последнее замечание означает, что φ_m разлагается на произведение образующих функций с номерами большими, чем k , и, следовательно, $\varphi_m(x)$ четная на любом Δ_k^j . Отсюда вытекает, что $R_k(x)\varphi_m(x)$ нечетная на Δ_k^j . Значит

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(x) dx = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{\Delta_k^j} R_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0.$$

Двоичная мультипликативность установлена.

Отсутствие сильной двоичной мультипликативности вытекает из равенства

$$(\varphi_1, \varphi_3) = \int_0^1 \cos \pi x (\cos \pi x \cdot \cos 2\pi x) dx = \frac{1}{4}. \quad \square$$

Замечание. В определениях 1 и 2 можно брать конечное число функций и называть (в этом случае) не системой, а набором.

Примером сильно двоично-мультипликативной системы служит система

$$\{\cos 4^n \pi x\}_{n=0}^{\infty}. \quad (3)$$

Определение 3. Систему функций назовем *знаковой* (или *знакоподобной*, sign-like), если каждая функция системы может принимать только значения $+1$ и -1 .

Определение 4. Систему двоично-образующих функций $\{R_n(x)\}$ назовем *предполной*, если система (2) полна (в $L_2[0, 1]$).

Вывод. Система функций Радемахера является *знаковой* и *предполной* сильно двоично-мультипликативной системой.

13.2 Перестановки системы Уолша

Система различных функций $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, в которую включены все функции системы Уолша-Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называется *перестановкой системы Уолша*.

Обратите внимание на слова "различных" и "все" в этом определении, которые и гарантируют биективность отображения множества $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ во множество $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Перестановку функций Уолша, при которой каждая пачка функций переходит в себя, назовем *регулярной*.

Системой Уолша в нумерации Уолша называют систему функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, двоично-образующая система $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ которой определяется через функции Радемахера $r_n(x)$ формулами

$$R_0 = r_0, \quad R_1 = r_0 \cdot r_1, \quad R_2 = r_1 \cdot r_2, \dots, \quad R_n = r_{n-1} \cdot r_n, \dots$$

Характеристическое свойство системы Уолша в нумерации Уолша состоит в следующем.

Лемма 2. *Число перемен знака на $[0,1)$ у функции Уолша в нумерации Уолша равно номеру функции.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ – система Уолша в нумерации Уолша. Для функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 = w_3, \varphi_3 = w_2$ свойство проверяется непосредственно.

Пусть $Z(\varphi_n)$ – число перемен знаков функции $\varphi_n(x)$. Очевидно, что $Z(r_n) = 2^{n+1} - 1$ для функций Радемахера. Так как все точки перемен знаков у функции Радемахера с меньшим номером присутствуют у функции Радемахера с большим номером, то

$$Z(R_n) = Z(r_n) - Z(r_{n-1}) = 2^n.$$

По этому же принципу у функции $\varphi_{2^n} = R_n$ все точки перемен знака новые (у предыдущих 2^n функций φ_k не встречались). По формуле (1) имеем

$$Z(\varphi_{2^n+k}) = Z(R_n) + Z(\varphi_k) = 2^n + k,$$

что составляет индуктивный переход в доказательстве методом математической индукции по пачкам. \square

В теории кодирования представление (см. переход от (1) к (2) в параграфе 2.2. ч.1) числа $n \in \mathbb{N}_0$ в виде финитной последовательности $\tilde{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ называется *простым двоичным кодом* (в теории кодирования обычно заранее обговаривается максимально возможное n , поэтому последовательность \tilde{n} заменяется на кортеж с координатами n_k в обратном порядке, являющейся двоичной записью числа n). *Кодом Грея* для последовательности \tilde{n} называется финитная последовательность $g(\tilde{n}) = (n_1 \dot{+} n_2, n_2 \dot{+} n_3, \dots, n_k \dot{+} n_{k+1}, \dots)$, где $\dot{+}$ есть сложение по модулю 2. *Кодом Грея* числа $n \in \mathbb{N}_0$ назовем число $g(n) \in \mathbb{N}_0$, которое получается из последовательности $g(\tilde{n})$ по правилу перехода от (2.2) к (2.1).

Утверждение 1. Система Уолша в нумерации Уолша является регулярной перестановкой системы Уолша.

Код Грея числа переводит номер функции Уолша в нумерации Уолша в номер функции Уолша в нумерации Пэли.

Восстановить по номеру в нумерации Пэли номер в нумерации Уолша позволяет *обратный код Грея*, который определим с помощью функции g^{-1} , заданной на финитных последовательностях.

Для последовательности $\tilde{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ координаты последовательности $g^{-1}(\tilde{n}) = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ вычисляются по формулам $m_k = m_{k+1} \dot{+} n_k$ от старших разрядов (нулевых в силу финитности последовательностей) к младшим.

Набор **функций Уолша в нумерации Адамара** получается для двоично-образующего набора, представленного функциями Радемахера в обратном порядке:

$$R_0 = r_{n-1}, \quad R_1 = r_{n-2}, \dots, \quad R_{n-2} = r_1, \quad R_{n-1} = r_0.$$

Единой системы Уолша в нумерации Адамара не существует, для каждого n это свой набор начальных 2^n функций Уолша. При фиксированном количестве разрядов n простые двоичные коды нумераций Пэли и Адамара получают друг из друга операцией *двоичной инверсии*, соответствующей прочтению двоичного числа в обратном порядке от младшего разряда к старшему. Любой набор функций Уолша в нумерации Адамара легко дополнить до перестановки системы Уолша, которая естественно не будет регулярной.

В теореме 10.1 отмечалось, что множество функций Уолша есть мультипликативное представление групп $(\mathbb{N}_0, +)$ или (X_∞, \oplus) , которые в гл. 2 рассматривались как векторное пространство над полем \mathbb{Z}_2 . Свойство линейной независимости в векторных пространствах \mathbb{N}_0 и X_∞ переносится и на множество функций Уолша при рассмотрении их как *мультипликативного представления векторного пространства*.

Определение 5. Конечный или бесконечный набор различных функций Уолша $\{w_{n_k}(x)\}$ назовем *линейно независимым*, если произведение любого конечного числа различных функций набора отлично от $w_0(x)$.

Очевидно, что функция $w_0(x)$ в этом наборе не может присутствовать.

Замечание. Понятие линейной независимости немного отличается от понятия *независимых функций*, принятого в теории вероятностей и сформулированного в книге [16]. Например, функция $w_0(x)$ может присутствовать в наборе независимых функций.

Лемма 3. Если система различных функций Уолша $\{w_{n_k}(x)\}_{k=0}^\infty$ линейно зависима, то она не может быть двоично-образующей системой для перестановки системы Уолша. А именно, некоторая функция Уолша в системе $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$ встретится дважды.

Доказательство. Пусть $R_k = w_{n_k}$. Если $R_{k_0} = R_{m_1} \cdot R_{m_2} \cdot \dots \cdot R_{m_l}$, где $k_0 > m_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, то $\varphi_{2^{k_0}} = \varphi_n$ для $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_l}$.

Утверждение 2. Не каждая линейно независимая бесконечная система различных функций Уолша в качестве двоично-образующей системы является предполной.

Определение 6. Линейной перестановкой системы Уолша называется система, построенная по формуле (1) через линейно независимую и предполную двоично-образующую систему функций Уолша.

Утверждение 3. Двоично-образующая система, состоящая из функций Уолша, является предполной тогда и только тогда, когда множество номеров функций Уолша-Пэли этой системы составляет полную (см. определение 2.12) счетную систему элементов векторного пространства \mathbb{N}_0 .

Лемма 4. Любая система функций $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$ такова, что $R_n(x)$ есть функция Уолша из n -й пачки (от 2^n до $2^{n+1} - 1$ включительно) является двоично-образующей для регулярной линейной перестановки системы Уолша. И наоборот, любая регулярная линейная пере-

становка системы Уолша $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по формуле (1) через двоично-образующую систему $\{v_{2^n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где каждая функция $v_{2^n}(x)$ есть функция Уолша-Пэли из n -й пачки.

Доказательство. Пусть набор функций $\{\varphi_m\}_{m=0}^{2^n-1}$ есть регулярная перестановка функций Уолша $\{w_m\}_{m=0}^{2^n-1}$. Пусть $R_n(x) = w_{2^n+l}(x)$, где $0 \leq l < 2^n$. Тогда (при $0 \leq k < 2^n$)

$$\varphi_{2^n+k} = \varphi_{2^n} \cdot \varphi_k = w_{2^n+l} \cdot w_{k_0} = w_{2^n} \cdot w_l \cdot w_{k_0} = w_{2^n} \cdot w_{l+k_0}.$$

Так как $0 \leq k_0 < 2^n$, то $0 \leq l + k_0 < 2^n$ и φ_{2^n+k} есть функция из n -й пачки. Если $k_1 \neq k_2$, то $\varphi_{2^n+k_1} \neq \varphi_{2^n+k_2}$. Следовательно $\{\varphi_{2^n+k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ есть перестановка функций Уолша n -й пачки. Доказанная регулярность гарантирует предполноту образующих функций. Линейная независимость есть следствие принадлежности функций $R_n(x)$ разным пачкам.

И наоборот, регулярность перестановки гарантирует принадлежность $R_n = v_{2^n}$ к n -й пачке. \square

Лемма 5. Любая линейная перестановка системы Уолша (заданная посредством двоично-образующей системы $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$) определяет биекцию $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, удовлетворяющую условию \mathbb{Z}_2 -линейности

$$T(n + m) = T(n) + T(m), \quad (4)$$

соответствием $R_n(x) = w_{T(2^n)}(x)$.

И наоборот, любая \mathbb{Z}_2 -линейная (то есть удовлетворяющая (4)) биекция $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ определяет (тем же соответствием) линейную перестановку системы Уолша.

Доказательство. Сначала докажем в обратную сторону. Пусть отображение $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ биективно и \mathbb{Z}_2 -линейно. Покажем, что система $\{T(2^n)\}_{n=0}^{\infty}$ элементов векторного пространства $(\mathbb{N}_0, +)$ линейно независима. Во-первых, $T(0) = 0$, так как $T(0 + m) = T(0) + T(m)$. Во-вторых, $T(2^{\varepsilon_1}) + T(2^{\varepsilon_2}) + \dots + T(2^{\varepsilon_\nu}) = T(2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \dots + 2^{\varepsilon_\nu}) \neq 0$.

Если бы при этом система $\{R_n(x)\}$ функций Уолша была линейно зависимой, то выполнялось бы условие

$$R_{2^{\varepsilon_1}} \cdot R_{2^{\varepsilon_2}} \cdot \dots \cdot R_{2^{\varepsilon_\nu}} = w_0$$

для некоторого набора. Это означало бы, что

$$w_{T(2^{\varepsilon_1})} \cdot w_{T(2^{\varepsilon_2})} \cdot \dots \cdot w_{T(2^{\varepsilon_\nu})} = w_{T(n)} = w_0$$

для

$$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \dots + 2^{\varepsilon_\nu}, \quad (5)$$

то есть линейную зависимость $\{T(2^n)\}$.

Сюръективность отображения $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ означает, что каждая функция Уолша $w_m(x)$ встречается в системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$. Для произвольного m его прообраз n (то есть $T(n) = m$) представим в виде (5). Тогда

$$\begin{aligned} w_m = w_{T(n)} &= w_{T(2^{\varepsilon_1})+T(2^{\varepsilon_2})+\dots+T(2^{\varepsilon_\nu})} = w_{T(2^{\varepsilon_1})} \cdot w_{T(2^{\varepsilon_2})} \cdot \dots \cdot w_{T(2^{\varepsilon_\nu})} = \\ &= R_{\varepsilon_1} \cdot R_{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot R_{\varepsilon_\nu} = \varphi_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как система Уолша полна в L_2 , то предполнота системы $\{R_n(x)\}$ установлена.

Доказательство в прямую сторону также начинается с соответствия $R_n = w_{T(2^n)}$, которое определяет отображение $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, с условием $T(0) = 0$, по формуле (6) для аргумента n вида (5).

Предполнота системы $\{R_n\}$ означает полноту системы $\{\varphi_n\}$, состоящей из функций Уолша, и, следовательно, сюръективность отображения $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$.

Для систем $\{\varphi_n\}$ устанавливается мультипликативность по номеру

$$\varphi_n \cdot \varphi_m = \varphi_{n+m}$$

так же как для системы Уолша-Пэли. Это означает, что

$$w_{T(n+m)} = \varphi_{n+m} = \varphi_n \cdot \varphi_m = w_{T(n)} \cdot w_{T(m)} = w_{T(n)+T(m)}.$$

Линейная независимость системы $\{R_n\}$ влечет инъективность отображения $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$. \square

Кроме нумераций Пэли и Уолша в математической литературе встречается **нумерация Качмажа**, которая является регулярной перестановкой системы Уолша. Эта нумерация, предложенная в 1929 г., по видимому, явилась попыткой перенести нумерацию Адамара на полную систему функций Уолша. В каждой n -й пачке функции нумеруются так, как получилось бы по формуле (1) с образующими функциями

$$R_0 = r_{n-2}, \quad R_1 = r_{n-3}, \quad \dots \quad R_{n-3} = r_1, \quad R_{n-2} = r_0, \quad R_{n-1} = r_{n-1}.$$

Кусочно-линейной назовем такую перестановку системы Уолша, которую строят по пачкам, соблюдая следующее правило. Пусть построены

функции $v_k(x)$ при $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ($v_0 = w_0$, в качестве $v_1(x)$ выбираем любую другую функцию Уолша). Для построения 2^n функций очередной n -й пачки задается свой набор $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, R_n$ таких линейно независимых функций Уолша в качестве двоично-образующих, что $R_0, R_1, \dots, R_{n-1} \in \{v_k\}_{k=0}^{2^n-1}$.

Утверждение 4. В данных обозначениях верно:

во-первых, $R_n \notin \{v_k\}_{k=0}^{2^n-1}$;

во-вторых, множество функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2^n-1}$, построенных для указанного набора по формуле (1), совпадает (возможно в другом порядке) с множеством $\{v_k\}_{k=0}^{2^n-1}$.

Система Уолша-Качмажа является кусочно-линейной перестановкой.

Понятие кусочно-линейных перестановок ввел венгерский математик Ф. Шипп, который определял их с помощью последовательности матриц, не акцентируя внимание на полноте системы.

Кроме линейных и кусочно-линейных перестановок предложим еще один простой вид перестановки системы Уолша. Сдвигом перестановки системы Уолша $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на элемент $w_k(x)$ назовем систему функций $\{w_k(x) \cdot \varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Утверждение 5. Сдвиг системы Уолша-Пэли является перестановкой (то есть биективным отображением в себя).

Теорема 1. Константы Лебега любой линейной, кусочно-линейной, а также любого сдвига этих систем совпадают с константами Лебега системы Уолша-Пэли.

Теорема 2. Любая линейная, кусочно-линейная перестановка системы Уолша (а также любой сдвиг такой перестановки) является базисом в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Доказательство этих теорем для случая линейных перестановок основано на приведенной ниже лемме двойственности. Для случая кусочно-линейных перестановок надо сформулировать и доказать аналог леммы двойственности. Перенос этих теорем на сдвиги системы очевиден.

Для систем функций Уолша $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ введем понятия: минимум констант Лебега по всем перестановкам

$$C_n = \min_{\{v_k\}} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x) \right| dx,$$

максимум констант Лебега по всем перестановкам системы Уолша

$$B_n = \max_{\{v_k\}} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x) \right| dx.$$

Утверждение 6. Указанный минимум достигается для системы Уолша-Пэли (а также для линейных, кусочно-линейных перестановок и их сдвигов), то есть $C_n = L_n$.

Существуют регулярные перестановки системы Уолша, константы Лебега которых для бесконечного числа номеров отличны от C_n и B_n .

Указанный максимум достигается для системы Радемахера (любое конечное число функций которой можно дополнить до перестановки системы Уолша). А именно, $B_{2n+2} = B_{2n+1} = B_{2n} + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$, $B_1 = B_2 = 1$, $B_3 = B_4 = \frac{3}{2}$, что приводит к формуле Валлиса

$$B_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{n}.$$

Доказательство второго и третьего предложения. Не трудно показать, что для любых трех различных функций Уолша $w_k(x)$, $w_l(x)$, $w_m(x)$ имеем $\int_0^1 |w_k(x) + w_l(x) + w_m(x)| dx = L_3$. Поэтому отличие константы Лебега регулярной перестановки от L_n следует искать не ранее четвертого номера в пачке. Вычислим LP_{20} константу Лебега с номером 20 для регулярной перестановки

$$\begin{aligned} LP_{20} &= \int_0^1 |D_{16}(x) + w_{16}(x) + w_{17}(x) + w_{18}(x) + w_{20}(x)| dx = \\ &= \int_0^{1/16} |D_{16}(x) + 4w_{16}(x)| dx + \int_{1/16}^1 |w_{16}(x)| \cdot |w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_4(x)| dx, \end{aligned}$$

$LP_{20} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = 9/4 < L_{20} = 7/4$, что легко вычислить по формулам Файна (лемма 10.16 или 10.17). Подобную конструкцию можно повторить в любой пачке. Для всех регулярных перестановок константы Лебега с номером 2^n равны 1, чего нет для системы Радемахера.

Для ядер Дирихле функций Радемахера легко вычислить

$$\hat{D}_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_1^0, \\ -1, & \text{если } x \in \Delta_1^1; \end{cases} \quad \hat{D}_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in \Delta_2^0, \\ 0, & \text{если } x \in \Delta_2^1 \cup \Delta_2^2, \\ -2, & \text{если } x \in \Delta_2^3, \end{cases}$$

и так далее. Предложим более компактную форму записи этих формул без уточнения расположения интервалов, но с указанием их количества $\hat{D}_1(x) \sim \{(1, C_1^0), (-1, C_1^1)\}$;

$$\hat{D}_2(x) \sim \{(2, C_2^0), (0, C_2^1), (-2, C_2^2)\}; \dots$$

$$\hat{D}_n(x) \sim \{(n, C_n^0), (n-2, C_n^1), (n-4, C_n^2), \dots, (-n, C_n^n)\}. \quad (7)$$

Общий элемент $(n-2i, C_n^i)$ в формуле (7) означает, что $\hat{D}_n(x)$ принимает значение $(n-2i)$ ровно на C_n^i интервалах n -го ранга. Равенство $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ означает, что все интервалы учтены. Доказательство этой формулы вытекает из соотношения $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, лежащего в основе построения треугольника Паскаля. При добавлении к ядру Дирихле очередной функции Радемахера каждый интервал n -го ранга распадается на два равновеликих интервала, на одном из которых ядро Дирихле со следующим номером увеличивается ровно на 1, а на другом — уменьшается на 1. А именно, $\hat{D}_{n+1}(x) \sim$

$$\{(n+1, C_n^0), (n-1, C_n^0 + C_n^1), (n-3, C_n^1 + C_n^2), \dots, (-n-1, C_n^n)\}. \quad (8)$$

Эта формула доказывает индуктивный переход.

Следовательно,

$$B_n = 2^{-n} \sum_{i=0}^n |n-2i| \cdot C_n^i. \quad (9)$$

В частности, $B_1 = B_2 = 1$, $B_3 = B_4 = 3/2$, $B_5 = B_6 = 15/8$.

Соотношение

$$B_{2k-1} = B_{2k} \quad (10)$$

вытекает из описанного перехода от формулы (7) к (8) при $n = 2k - 1$, так как знак ядер Дирихле на каждом участке сохраняется (полученное нулевое значение на отдельных участках считаем как $+0$ или -0 соответственно). Установим соотношение

$$B_{2k+1} = B_{2k} + 2^{-2k} \cdot C_{2k}^k. \quad (11)$$

Если $n = 2k$, то в формуле (7) центральный элемент равен $(0, C_{2k}^k)$. За счет него и происходит увеличение константы Лебега, так как на остальных интервалах при переходе к (8) модуль ядра Дирихле не меняется, а

значение меняется на 1 в разные стороны на интервалах одинаковой суммарной длины. Получили формулу (11), так как на C_{2k}^k интервалах k -го ранга при переходе от (7) к (8) модуль ядра Дирихле изменил значение с нуля на единицу.

Для формул

$$B_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}$$

база индукции установлена. Заметим, что

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{((2k+1)!!)((2k)!!)}{(2^k \cdot k!)^2} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Если предположим, что

$$B_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} = \frac{(2k-1)!}{(2^{k-1}(k-1)!)^2},$$

то $B_{2k+2} = B_{2k+1} = B_{2k} + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} =$

$$= \frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}((k-1)!)^2} + \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{(2k-1)! \cdot (4k^2 + 2k)}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Асимптотика формулы Валлиса $\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{k}$ приводится в задачах и учебниках по математическому анализу. Она вытекает из соотношения $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}} = \sqrt{\pi}$, которое используют при выводе формулы Стирлинга. \square

Лемма 6 (двойственности). Любая \mathbb{Z}_2 -линейная (см. (4)) биекция $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ определяет \mathbb{Z}_2 -линейную (то есть верно соотношение аналогичное (4)) и сохраняющую меру биекцию T^* модифицированного отрезка $[0, 1]^*$ в себя.

Доказательство. Любое \mathbb{Z}_2 -линейное отображение T удовлетворяет условию $T(0) = 0$ и определяется образующей последовательностью $\{T(2^n)\}_{n=0}^\infty$. Условие инъективности отображения $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ состоит в линейной независимости $\{T(2^n)\}_{n=0}^\infty$. Для линейной перестановки системы Уолша $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ с двоично-образующей системой $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$ такой, что

$$R_n(x) = w_{T(2^n)}(x),$$

определим систему множеств $\{E_n^k\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Пусть $E_0^0 = E = [0, 1)$; $E_1^0 = \{x \mid R_0(x) = +1\}$, $E_1^1 = \{x \mid R_0(x) = -1\}$. Заметим, что $|E_1^0| = |E_1^1| = 1/2$. Множества n -го ранга E_n^k определяются через множества предыдущего ранга и функцию $R_{n-1}(x)$:

$$a) E_{n-1}^k = E_n^{2k} \cup E_n^{2k+1}, \quad b) E_n^{2k} \cap E_n^{2k+1} = \emptyset, \quad c) |E_n^{2k}| = |E_n^{2k+1}| = 2^{-n},$$

$$d) \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^{2k} = \{x \mid R_{n-1}(x) = +1\}, \quad e) \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^{2k+1} = \{x \mid R_{n-1}(x) = -1\}.$$

Например,

$$\begin{aligned} E_2^0 &= \{x \mid R_0(x) = R_1(x) = +1\}, \\ E_2^1 &= \{x \mid R_0(x) = +1, \quad R_1(x) = -1\}, \\ E_2^2 &= \{x \mid R_0(x) = -1, \quad R_1(x) = +1\}, \\ E_2^3 &= \{x \mid R_0(x) = R_1(x) = -1\}. \end{aligned}$$

Отметим, что свойство $c)$ есть следствие остальных свойств и линейной независимости функций R_n . Покажем это в простейшем случае.

Условие $\int_E R_1(x) dx = 0$ дает уравнение $\int_{E_1^0} R_1(x) dx + \int_{E_1^1} R_2(x) dx = 0$, а условие $\int_E R_0(x) R_1(x) dx = 0$ дает уравнение $\int_{E_1^0} R_1(x) dx - \int_{E_1^1} R_2(x) dx = 0$.

У системы этих уравнений единственное решение

$$\int_{E_1^0} R_1(x) dx = \int_{E_1^1} R_1(x) dx = 0.$$

Так как $|R_1(x)| = 1$, то $|E_2^0| = |E_2^1|$, $|E_2^2| = |E_2^3|$. Отсюда следует, что $|E_2^s| = 1/4$ при $s = 0, 1, 2, 3$.

Сравнением с функциями Радемахера $r_n(x)$ и интервалами n -го ранга получаем

$$R_{n-1}(E_n^k) = r_{n-1}(\Delta_n^k), \quad (12)$$

которое пока установлено $n = 1$ и $n = 2$.

Сравнением системы (1) с системой Уолша-Пэли получаем

$$\varphi_m(E_n^k) = w_m(\Delta_n^k) = a_{mk} \quad (13)$$

пока для $n = 1, 2$, $0 \leq k < 2^n$, $m = 0, 1, 2, 3$. Здесь использовали обозначения a_{mk} для элементов матрицы W_n дискретного преобразования Уолша, о которой далее будем говорить подробнее. Здесь применяется то, что матрица W_n невырожденная.

Формула (12) определяет отображение T^* множеств

$$T^*(\Delta_n^k) = E_n^k.$$

Условия $|\Delta_n^k| = 2^{-n}$ и $|E_n^k| = 2^{-n}$ есть условия сохранения меры при отображении T^* . Докажем, что равенство $|E_n^k| = 2^{-n}$ есть следствие линейной независимости.

К набору функций $R_0(x), R_1(x), \dots, R_{n-1}(x)$ добавим линейно независимую с ними функцию Уолша $R_n(x)$. Обозначим $z_i = \int_{E_n^i} R_n(x) dx$ для $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Ортогональность функции $R_n(x)$ предыдущим функциям системы (1) запишем в виде системы уравнений

$$\int_E \varphi_k(x) \cdot R_n(x) dx = 0$$

для $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, или в виде

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{E_n^i} R_n(x) dx \cdot \varphi_k(E_n^i) = 0,$$

которую согласно формуле (13) и введенным обозначениям запишем в матричном виде

$$W_n \cdot Z = 0,$$

где Z есть матрица-столбец такая, что $Z^T = (z_0, z_1, \dots, z_{2^n-1})$. В силу невырожденности матрицы W_n эта система имеет единственное (оно же нулевое) решение. Установили, что

$$\int_{E_n^i} R_n(x) dx = 0 \quad \text{для всех } i = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

Так как $|R_n(x)| = 1$, то каждое множество E_n^i распадается на два множества равной меры в соответствии со знаком $R_n(x)$. Итак, указанные

пять свойств выполнены для множеств $(n+1)$ -го ранга. Формулы (12) и (13) оказались верными и для следующего n .

Введем операцию $*$ на построенной системе множеств $\{E_n^k\}$ через групповую операцию $\dot{+}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, по формуле

$$E_n^k * E_n^l = E_n^{k+l}. \quad (14)$$

Для каждого элемента x модифицированного отрезка (или множества E) определим цепочку вложенных множеств

$$x \in \dots E_{n+1}(x) \subset E_n(x) \subset \dots \subset E_1(x) \subset E, \quad (15)$$

где $E_n(x)$ есть множество n -го ранга E_n^k , содержащее x . Операцию $*$ над элементами $x, y \in E$ определим через формулу (14)

$$x * y \in \dots E_{n+1}(x) * E_{n+1}(y) \subset E_n(x) * E_n(y) \subset \dots \subset E_1(x) * E_1(y) \subset E.$$

Установим корректность определения операции $*$.

Если $x \in E_{n+1}^{2k+a}$, $y \in E_{n+1}^{2l+b}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, то

$$E_{n+1}^{2k+a} * E_{n+1}^{2l+b} = E_{n+1}^{2(k+l)+(a+b)} \subset E_n^{k+l}.$$

Сюръективность отображения $T^* : E \rightarrow E$ вытекает из построения множеств E_n^k . Проверим свойство \mathbb{Z}_2 -линейности отображения T^* :

$$T^*(x \dot{+} y) = T^*(x) * T^*(y).$$

Если $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}$, $x \dot{+} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k \dot{+} y_k}{2^k}$, то

$$x \in \dots \subset \Delta_n^{[2^n x]} \subset \dots \subset \Delta_2^{2x_1+x_2} \subset \Delta_1^{x_1} \subset E;$$

$$y \in \dots \subset \Delta_n^{[2^n y]} \subset \dots \subset \Delta_2^{2y_1+y_2} \subset \Delta_1^{y_1} \subset E;$$

$$T^*(x) \in \dots \subset E_n^{[2^n x]} \subset \dots \subset E_2^{2x_1+x_2} \subset E_1^{x_1} \subset E;$$

$$T^*(y) \in \dots \subset E_n^{[2^n y]} \subset \dots \subset E_2^{2y_1+y_2} \subset E_1^{y_1} \subset E;$$

$$T^*(x) * T^*(y) \in \dots \subset E_n^{[2^n(x+y)]} \subset \dots \subset E_2^{2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)} \subset E_1^{x_1+y_1} \subset E;$$

$$x \dot{+} y \in \dots \subset \Delta_n^{[2^n(x+y)]} \subset \dots \subset E_2^{2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)} \subset E_1^{x_1+y_1} \subset E.$$

Сюръективность отображения $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ обеспечивает инъективность отображения $T^* : E \rightarrow E$. Предположим, что одной и той же

цепочке вложенных множеств $\{E_n^{k_n}\}_{n=0}^\infty$, $E_n^{k_n} \subset E_{n-1}^{k_{n-1}}$ соответствуют два разных элемента x и t . Тогда найдется функция Уолша, которая на этих элементах принимает разные значения. Согласно сюръективности отображения T эта функция Уолша встретится как произведение конечного числа образующих функций $R_n(x)$. Пришли к противоречию. \square

Замечание. Если бы сюръективности отображения T не было, то нашлась бы функция Уолша $w(x)$, не принадлежащая системе $\{\varphi_n(x)\}$. Так как $w(x)$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_n(x)\}$, то

$$\int_{E_n^k} w(x) dx = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

Обозначим $E^+ = \{x \mid w(x) = +1\}$, $E^- = \{x \mid w(x) = -1\}$. Каждая цепочка (15) распадается на две цепочки, определяющие различные элементы:

$$\dots E_{n+1}^+(x) \subset E_n^+(x) \subset \dots \subset E_1^+(x) \subset E^+ \subset E,$$

$$\dots E_{n+1}^-(x) \subset E_n^-(x) \subset \dots \subset E_1^-(x) \subset E^- \subset E,$$

где $E_n(x) = E_n^+(x) \cup E_n^-(x)$ и $|E_n^+(x)| = |E_n^-(x)|$.

Следовательно отображение $T^* : E \rightarrow E$ не инъективно.

13.3 Системы, подобные системе Уолша

Доказанная лемма двойственности позволяет ввести обобщения системы Уолша, имеющие большое прикладное значение.

Перечислим основные свойства интервалов n -го ранга, где модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ (или полуинтервал $[0, 1)$) принимается за множество E :

$$\begin{aligned} 1) E = \Delta_0^0, \quad m(E) = 1, \quad 2) \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_n^k = E, \quad 3) \Delta_n^k \cap \Delta_n^l = \emptyset \text{ при } k \neq l, \\ 4) \Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{2k} \cup \Delta_{n+1}^{2k+1}, \quad 5) \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n^1 = E \setminus \{0\}, \quad 6) m(\Delta_n^k) = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Этим же свойствам удовлетворяет система подмножеств $\{E_n^k\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, из леммы двойственности. Для произвольно-го измеримого и нормированного ($m(E) = 1$) множества E любая его система подмножеств $\{E_n^k\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $E = E_0^0$, $m(E) = 1$, 2) $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} E_n^k = E$, 3) $E_n^k \cap E_n^l = \emptyset$ при $k \neq l$,
 4) $E_n^k = E_{n+1}^{2k} \cup E_{n+1}^{2k+1}$, 5) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^1 = E \setminus \{0\}$, 6) $m(E_n^k) = 2^{-n}$,

задает топологию в E . Множество E превращается в абелеву группу относительно групповой операции \cdot , которая вводится по формуле (14) через операцию в группе $(\mathbb{N}_0, +)$. Нейтральным элементом относительно операции $*$ будет элемент, обозначенный в свойстве 5 как 0. Ввиду произвольности выбора множеств E_n^k в качестве нейтрального элемента может оказаться любой элемент множества E . Для произвольного $x \in E$ в цепочке (15) вложенных множеств укажем их номера

$$x \in \dots E_{n+1}^{x_{n+1}} \subset E_n^{x_n} \subset \dots \subset E_1^{x_1} \subset E$$

и последовательность этих номеров $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

Системой функций, подобной системе Уолша, на множестве E назовем систему $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определенную равенствами

$$\psi_0(x) \equiv 1, \quad \psi_n(x) = (-1)^{(\tilde{n}, \tilde{x})} = (-1)^{(n, x)},$$

аналогичными формуле (10.6) для определения функций Уолша в нумерации Пэли. Эквивалентность предложенной системы и системы Уолша-Пэли вытекает из свойства инвариантности интеграла по предложенной мере относительно группового сдвига.

Это означает, что основные свойства рядов Фурье по системе Уолша-Пэли (к которым, в частности, отнесем полноту системы, оценки ядер Дирихле, формулы констант Лебега, равенство Парсеваля, коэффициенты Фурье свертки и произведения, принцип локализации Римана, признаки Дини, сходимость в L_p) сохраняются для этих систем. При практической реализации ограничиваются конечными частными суммами, поэтому введение модифицированного отрезка и свойство полноты не столь актуальны. Зато скорость сходимости по данным системам, в отличие от

системы Радемахера и близким к ней, является оптимальной и той же, что для системы Уолша.

Приведем примеры систем, подобных системе Уолша.

1. *Линейная перестановка системы Уолша* может быть задана не двоично-образующей системой функций, а системой множеств $\{E_n^k\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

2. *Системы, подобные системе Уолша относительно линейной меры Лебега* на модифицированном отрезке. Для перестановок системы Уолша все множества E_n^k получались как объединение интервалов Δ_m^k , чего не требуем в общем случае. Например, в качестве E_1^0 на $[0, 1)$ можно взять $[1/4, 3/4)$. При этом неограниченно вырастает число вариантов при кодировании информации с помощью функций Уолша с вариантами выбора ключа сколь угодно сложной конфигурации.

3. В качестве простого примера приведем возможность построения *функций Уолша с весом $p(x)$* . Множества $E_n^k = [\sqrt{\frac{2k}{2^n}}, \sqrt{\frac{2k+1}{2^n}})$ являются таковыми для знаковой системы $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ подобной системе Уолша, коэффициенты Фурье относительно которой вычисляются по формулам

$$c_n = \int_0^1 f(x)v_n(x)p(x)dx, \quad \text{где } p(x) = 2x.$$

Система двоично-образующих функций $\{R_n(x)\}$, через которые по формуле (1) строится данная система, определяются формулами $R_n(x) = 1$ при $x \in E_{n+1}^{2k}$, $R_n(x) = -1$ при $x \in E_{n+1}^{2k+1}$. Данная система не является привлекательной, так как она уменьшает влияние близких к нулю точек, усиливая влияние наиболее удаленных. Противоположным свойством, усиливающим действие принципа локализации, обладает система с весом $p(x) = 2 - 2x$. Множества E_n^k в этом случае определяются аналогично, но немного сложнее.

4. Наиболее важным практическим приложением данного построения служит возможность рассмотрения *двойного ряда по системе Уолша как обычного ряда Уолша-Пэли*.

Систему функций $\{\varphi_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ на множестве $E = [0, 1) \times [0, 1)$ относительно плоской меры Лебега зададим посредством двоично-образующей системы $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ такой, что $R_{2n} = r_n(x)$, $R_{2n+1} = r_n(y)$, через функции Радемахера r_n . Коэффициенты Фурье-Уолша для функции двух пере-

менных $f(x, y)$ на множестве E вычисляются по формуле

$$c_n[f] = \iint_E f(x, y) \varphi_n(x, y) dx dy.$$

Частные суммы ряда Фурье-Уолша по системе $\{\varphi_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ с номерами 4^n совпадают с квадратными частными суммами двойного ряда Фурье-Уолша

$$S_{4^n}[f] = \sum_{k=0}^{4^n-1} c_k \varphi_k(x, y) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} a_{kl} w_k(x) w_l(y),$$

где $a_{kl} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) w_k(x) dx \right) w_l(y) dy$. Более того, отдельные слагаемые в этих суммах тоже совпадают. Предложенная нами нумерация позволяет двойной ряд Уолша перенумеровать в порядке, соответствующем системе Уолша-Пэли. При практической реализации этого метода двойную нумерацию лучше вообще не рассматривать, так как слишком велики временные затраты на пересчет номеров от одномерной к двумерной частной сумме. Этот метод лучше метода построчного сканирования, описанного в [8, с. 275–277], так как при составлении частных сумм сохраняется "непрерывность" исходного массива и тем самым опровергается утверждение [8, с. 275] о невозможности такого построения.

Предложенная система нумерации имеет приоритет по x . Поменяв местами x и y в определении двоично-образующей системы, получаем систему с приоритетом по y . Если начиная с R_1 выбирать при построении двоично-образующей системы по две очередные функции Радемахера относительно каждой из переменной, то приоритета не будет. В случае обработки картинки прямоугольного экрана, имеющего в два раза большую ширину, после каждых двух функций Радемахера от x в наборе двоично-образующей системы берем одну функций Радемахера от y .

5. Другим преимуществом данного подхода является возможность построения "функций Уолша" для круглого экрана относительно радиальной сетки, принятой в полярной системе координат. Это частный случай системы, подобной системе Уолша на плоскости. Единственное требование состоит в нормировки меры для экрана, чего легко добиться делением на площадь экрана.

6. Возможно построение системы, подобной системе Уолша на плоскости с весом. Метод введения весовой функции, описанный в одномер-

ном случае, для плоской области не только возможен, но и представляется более интересным с точки зрения практических приложений. Возможно выделение малой области с большим весом, что позволяет следить за изменением картинки вблизи конкретной точки экрана. Интересен вариант с перемещающимся весом по экрану.

Предложим вариант веса на множестве $E = [0, 1) \times [0, 1)$ относительно плоской меры Лебега для выбранной точки (x_0, y_0) на множестве E . Пусть

$$p(x, y) = \frac{3y}{y_0} \quad \text{в области} \quad y \in [0, y_0], \quad x \in \left[\frac{x_0 y}{y_0}, \frac{(y - y_0)(x_0 - 1)}{y_0} + x_0 \right];$$

$$p(x, y) = \frac{3x}{x_0} \quad \text{в области} \quad x \in [0, x_0], \quad y \in \left[\frac{y_0 x}{x_0}, \frac{(x - x_0)(y_0 - 1)}{x_0} + y_0 \right];$$

$$p(x, y) = \frac{3(x - 1)}{x_0 - 1} \quad \text{при} \quad x \in [x_0, 1], \quad y \in \left[\frac{y_0(1 - x)}{1 - x_0}, \frac{(x - x_0)(y_0 - 1)}{x_0 - 1} + y_0 \right];$$

$$p(x, y) = \frac{3(y - 1)}{y_0 - 1} \quad \text{при} \quad y \in [y_0, 1], \quad x \in \left[\frac{x_0(1 - y)}{1 - y_0}, \frac{(y - y_0)(x_0 - 1)}{y_0 - 1} + x_0 \right].$$

Формулы упрощаются для симметричного случая $x_0 = y_0 = 1/2$. В любом случае вес интерпретируется как четырехугольная пирамида с высотой, равной 3. Деление каждой части пирамиды на каждом шаге на равные по объему части можно осуществлять как по вертикали (делением на части высоты с построением плоскостей параллельных основанию, с появлением при этом кубических корней), так и в плоскости основания по принципу предложенному для двойного ряда (вершина всех получающихся при этом пирамид остается неизменной). Во втором случае пирамиды строить не надо. Геометрический принцип упрощает перерасчет доли веса, соответствующей указанной площадке.

13.4 Система характеров

Как отмечалось в начале главы, речь пойдет о *системе Виленкина*, больше известной под названием *мультипликативная система функций*, которым по изложенным причинам пользоваться не будем. Для нее также встречается название *система Прайса*.

Система Виленкина является обобщением систем Крестенсона–Леви и Уолша. Каждая система Виленкина определяется своей последовательностью простых чисел $\{p_n\}$, по которой строится другая последовательность

$$m_0 = 1, \quad m_n = m_{n-1} \cdot p_n.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ существует единственное представление

$$n = n_1 m_0 + n_2 m_1 + \dots + n_k m_{k-1} + \dots, \quad (16)$$

где $0 \leq n_k < p_k$.

Множество чисел от m_k до $m_{k+1} - 1$ включительно назовем (по аналогии) m -й пачкой и соответственно обозначим $]m[$.

Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ получается из полуинтервала $[0, 1)$ добавлением к нему счетного числа точек вида $\frac{k}{m_n}$, где $0 < k < m_n$. В результате этой операции добавленные точки как бы раздваиваются. Для каждой точки x модифицированного отрезка существует единственное представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad (17)$$

где $0 \leq x_k < p_k$. Действительному числу вида $\frac{k}{m_n}$ соответствуют два представления (17) – особое (оно же левое на действительной оси) и допустимое (правое).

Функции Виленкина на модифицированном отрезке определяются равенствами

$$v_0(x) \equiv 1, \quad v_n(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k} \right), \quad (18)$$

где сумма конечна, так как представление (16) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Замечание. Если $p_n \equiv p$, где p – простое, то дано определение системы Уолша при $p = 2$ и системы Крестенсона–Леви при $p > 2$.

Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$, который для каждой системы свой, договоримся как и для ранее изученных систем обозначать в сокращенном виде $[0, 1)$. Одним из способов обоснования подобного обозначения служит расширение понятия действительного числа, вводимого по методу Вейерштрасса без отождествления особого и допустимого представле-

ния. Обычно этот метод излагают на примере десятичных дробей. В первой главе он приводится для двоичных дробей. Но можно использовать как p -ичные (применительно к системе Крестенсона–Леви) дроби, так и дроби с переменным основанием. Возможен (в топологии в некоторых моделях так и поступают) метод определения "действительных" чисел, при котором каждое число трактуется как двойная точка на числовой оси. Будем использовать соответствующее обозначение $\Delta_n^k = [\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n})$ для k -го интервала n -го ранга, правильное обозначение которого на модифицированном отрезке выглядело бы $[\frac{k}{m_n}^+, \frac{k+1}{m_n}^-]$.

Замечание. Если заменить модифицированный отрезок на действительный полуинтервал $[0, 1)$, то основные результаты параграфа останутся верны. Это также служит обоснованием корректности предложенных обозначений.

Для чисел $n, l \in \mathbb{N}_0$ вида (16) вводится групповая операция $\dot{+}$ по правилу

$$n \dot{+} l = \sum_{k=1}^{\infty} s_k m_{k-1}, \quad \text{где } s_k = (n_k + l_k) \pmod{p_k}.$$

Для чисел $x, y \in [0, 1)$ вида (17) групповая операция $\dot{+}$ определяется по правилу

$$x \dot{+} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k + y_k) \pmod{p_k}}{m_k}.$$

Легко проверяется, что модифицированный отрезок относительно операции $\dot{+}$ является абелевой группой, которая изоморфна группе G последовательностей $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $0 \leq x_k < p_k$, с операцией \oplus покоординатного сложения по модулю p_k для k -й координаты. Абелева группа $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$ изоморфна подгруппе, которую обозначим \hat{G} , конечных последовательностей группы G . Рассматриваемая система вводилась Виленкиным как **система характеров** сопряженных топологических групп G и \hat{G} . Фиксируя элемент $g \in G$, получаем характер группы \hat{G} . И наоборот, фиксируя элемент $g \in \hat{G}$, получаем характер группы G . Так как в алгебре и топологии изоморфные (не важно аддитивные или мультипликативные) группы отождествляют, то в этих дисциплинах группу G называют группой характеров группы \hat{G} , и наоборот, \hat{G} –

группой характеров G . В гармоническом анализе именно мультипликативное представление группы считают системой характеров.

Группу G (как группу последовательностей относительно различных образующих числах p_k) не рассматривают как векторное пространство, так как возникают трудности с выбором поля для определения внешней операции умножения.

В книгах [2, 24] гармонический анализ излагается в терминах групп, причем в [24] используется более абстрактный алгебраический подход. Там, в частности, не требуется абелевость групп. Характер на группе определяется [24, с. 452] как отображение во множество комплексных чисел с групповой операцией в виде поточечного произведения. Устанавливается, что характеры образуют мультипликативную группу и сопряженный к характеру элемент совпадает с обратным. Нам интересны характеры не столько как группа, а в основном как система. То есть нас интересует расположение характера в сопряженной группе. В прикладных вопросах даже изложение в терминах группы последовательностей считается неудобным. Поэтому вернемся к формулам (16)–(18).

Теорема 3. *Функции Виленкина составляют систему характеров: во-первых, на группе $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$, так как они мультипликативны по аргументу $v_n(x) \cdot v_n(y) = v_n(x \dot{+} y)$ и $\overline{v_n(x)} = (v_n(x))^{-1} = v_n(\dot{-}x)$; во-вторых, на группе $([0, 1]^*, \dot{+})$, так как они мультипликативны по номеру $v_n(x) \cdot v_m(x) = v_{n \dot{+} m}(x)$ и $\overline{v_n(x)} = (v_n(x))^{-1} = v_{\dot{-}n}(x)$.*

Множество функций Виленкина есть мультипликативное представление группы $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$.

Если рассматривать все множество функций Виленкина при фиксированном аргументе как отдельный элемент (в виде последовательности значений) нового множества, то это множество относительно операции покоординатного сложения последовательностей есть мультипликативное представление группы $([0, 1]^, \dot{+})$.*

Определим образующие функции для системы Виленкина, служащие аналогом функций Радемахера, формулой ($n \in \mathbb{N}$)

$$r_{n-1}(x) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{p_n}\right), \quad \text{если } x \in \Delta_n^k.$$

Утверждение 7. *Функции Виленкина для n вида (16) можно опре-*

делить равенством

$$v_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (r_{k-1}(x))^{n_k}.$$

Утверждение 8. Для функций Виленкина возможно индуктивное определение через систему образующих функций $\{r_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, где $n = sm_{k-1} + l$, $1 \leq s < p_k$, $l < m_{k-1}$:

$$v_n(x) = (r_{m-1}(x))^s \cdot v_l(x).$$

Теорема 4. Система Виленкина ортонормирована в $L^2[0, 1]$.

Система Виленкина полна и замкнута в $L_p[0, 1]$ при $p \geq 1$.

По аналогии с формулами параграфа 11.2 определяются коэффициенты Фурье, ряд Фурье, частная сумма ряда Фурье, ядро Дирихле и константы Лебега для системы Виленкина. Сохраняются без изменения формулы (11.7) и (11.8).

Лемма 7. При $1 \leq s < p_{n+1}$, $0 \leq k \leq m_n$ имеет место

$$D_{sm_n+k}(x) = D_{m_n}(x) (1 + r_n(x) + r_n^2(x) + \dots + r_n^{s-1}(x)) + r_n^s(x) D_k(x),$$

а как следствие справедлив аналог леммы Пэли:

$$D_{m_n}(x) = \begin{cases} m_n, & \text{если } x \in \Delta_n^0 = [0, \frac{1}{m_n}), \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{1}{m_n}, 1). \end{cases}$$

Для системы Виленкина легко переформулировать леммы 11.6 и 11.7 (которые в свою очередь есть переформулировка лемм 10.9 и 10.10), аналогично формулируются и доказываются: принцип локализации Римана (теорема 10.2 или 11.3), признак Дини (теорема 10.7 или 11.4) и оценка нормы оператора частных сумм в крайних пространствах (теорема 10.13 или 11.5).

Следующая формулировка совпадает с формулировкой теорем 10.9 для системы Уолша и 11.6 для системы Крестенсона–Леви, но доказательство ее (получили Ватари в частном случае и Янг в общем случае) сложное.

Теорема 5. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, то существует число B_p такое, что $\|S_k(f)\|_p \leq B_p \|f\|_p$, для любого $k \in \mathbb{N}$.

Отсюда вытекает, что система Виленкина составляет базис пространства $L_p[0, 1]$ при любом $1 < p < \infty$.

Лемма 8. *Точной мажорантой ядра Дирихле по системе Виленкина служит функция*

$$h(x) = \begin{cases} m_{n-1} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2pn}}{\sin \frac{k\pi}{pn}}, & \text{если } p_n \geq 5, \\ m_{n-1}, & \text{если } p_n = 2 \text{ или } p_n = 3. \end{cases}$$

Переносится без изменений с системы Крестенсона–Леви на систему Виленкина и утверждение о поведении модуля ядра Дирихле.

Константы Лебега системы Виленкина имеют тот же порядок роста $L_n = O(\log n)$.

Все утверждения параграфа 11.3 остаются в силе и для системы Виленкина (изменится только вид сопряженной последовательности c^* и дробного ядра Дирихле).

Утверждения этой главы о свойствах перестановок системы Уолша переносятся на систему Крестенсона–Леви. Для системы Виленкина они верны только для регулярных перестановок, так как предложенный метод индуктивного построения не регулярной линейной перестановки приводит к изменению системы Виленкина.

Некоторые результаты для системы Виленкина получаются как следствие утверждений для общих ортогональных рядов. Так распространением теоремы Рисса–Фишера (теорема 8.6) на другие пространства Лебега служит следующая теорема, для тригонометрических рядов доказанная В. Юнгом и Ф. Хаусдорфом.

Теорема 6 (Ф. Рисса). [15, с. 237] *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная на $[a, b]$ система функций, равномерно ограниченная числом $M > 0$ ($|\varphi_n(x)| \leq M$), $c_n = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по данной системе, $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

1. *Если $f \in L_p(a, b)$, то $(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.*
2. *Если $\{a_n\} \in l_p$, то существует $f \in L_{p'}(a, b)$, коэффициенты Фурье которой совпадают с a_n и норма которой оценивается*

$$\left(\int_a^b |f(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема остается верной и в крайнем случае $p = 1$, $p' = \infty$, если понимать $\|\{a_n\}\|_\infty = \sup |a_n|$, а $\|f\|_\infty$ как существенную верхнюю грань модуля функции.

Для системы Виленкина в формулировке теоремы полагаем $M = 1$, $a = 0$, $b = 1$ и суммирование с нуля, а не с единицы.

13.5 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что система (3) сильно двоично-мультипликативна.
2. Докажите, что система (3) не является предполной. *Указание.* Проверьте, что $f(x) = \cos 2\pi x$ ортогональна всем функциям системы.
3. Сформулируйте определения троично-образующей системы функций, троично-мультипликативной системы и сильно троично-мультипликативной системы. Приведите соответствующие примеры функций, которые будут также комплексно знаковыми (то есть принимающими комплексные значения, по модулю равные 1) и "предполными" (со ссылкой на соответствующее определение, которое надо сформулировать).
4. Пусть интервалы n -го ранга занумерованы в соответствии с обратным кодом Грея $E_n^{g(k)} = \Delta_n^k$. Докажите, что система, подобная системе Уолша, относительно топологии $\{E_n^k\}$ совпадает с системой Уолша в нумерации Уолша.
5. Укажите порядок, в котором следуют первые 16 функций Уолша в случае нумераций Уолша, Адамара, Качмажа.
6. Укажите, в каком порядке первые 16 функций Уолша-Уолша встречаются в нумерациях Пэли и Адамара.
7. Укажите, в каком порядке первые 16 функций Уолша-Адамара встречаются в нумерациях Пэли и Уолша.
8. Укажите, в каком порядке первые 16 функций Уолша-Качмажа встречаются в нумерации Пэли.
9. Докажите следующую **лемму о сдвиге**. Если $x \in \Delta_n^k$, $y \in \Delta_n^m$, то $x \dot{+} y \in \Delta_n^{k+m}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k, m < 2^n$. Покажите, что формулировку леммы о сдвиге можно взять в качестве эквивалентного определения операции $\dot{+}$ (введенной в 2.2 и 10.3) на $[0, 1]^*$ через операцию $\dot{+}$ на \mathbb{N}_0 . А

Глава 14

Преобразование Фурье

14.1 Построение преобразования Фурье

Вычисление коэффициентов Фурье по формуле

$$c_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

для 2π -периодической функции в технической литературе трактуется как вычисление дискретного спектра. Обратным преобразованием, восстанавливающим (если это возможно) функцию $f(x)$, служит вычисление ряда Фурье

$$\sigma[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n[f] e^{inx} .$$

Основной вопрос в теории рядов Фурье это вопрос о равенстве функций f и $\sigma[f]$ в том или ином смысле, то есть вопрос о возможности обращения операции перехода к дискретному спектру.

Аналогично записывается дискретный спектр

$$c_k[f] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

и ряд Фурье

$$\sigma[f] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k[f] e^{2\pi i \frac{k}{T}x}$$

функций периода T . Введем обозначения $\lambda_k = \frac{k}{T}$, $\Delta\lambda = \frac{1}{T}$ и подставим формулу для коэффициентов в ряд

$$\sigma[f] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \lambda_k t} dt \cdot e^{2\pi i \lambda_k x} \right) \Delta\lambda.$$

Формальным предельным переходом при $T \rightarrow \infty$ интеграл под знаком суммы превращается в

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt, \quad (1)$$

а при очень больших T близок к $S(\lambda_k)$. Следовательно,

$$\sigma[f] \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\lambda_k) e^{2\pi i \lambda_k x} \Delta\lambda.$$

Это выражение есть интегральная сумма для интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda) e^{2\pi i \lambda x} d\lambda. \quad (2)$$

Формула (1) есть формула вычисления непрерывного спектра, а формула (2) есть формула восстановления исходной функции по ее спектру. Формулы (1) и (2) являются формулами прямого и обратного преобразования Фурье. В математической литературе предпочитают в качестве прямого и обратного преобразования Фурье в комплексной форме брать следующие формулы [17]:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \\ f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned}$$

соответственно или аналогичные формулы, где коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ ставят перед прямым преобразованием, а не перед обратным. Из них выводится *действительная форма интеграла Фурье*

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt$, $b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt$, пользоваться которой не будем.

Будем рассматривать формулы прямого и обратного преобразования Фурье в следующем симметричном виде.

Определение 1. Преобразование вида

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (3)$$

назовем *преобразованием Фурье* функции $f(x)$.

Преобразование вида

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi] = \mathcal{F}^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (4)$$

назовем *обратным преобразованием Фурье*.

Если в формулу (4) вместо функции $\varphi(\lambda)$ подставить формулу (3), то получим выражение для *интеграла Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt e^{i\lambda x} d\lambda,$$

существование которого требует отдельного доказательства, так как приведенные рассуждения являются нестрогими и носят наводящий характер.

Несмотря на внешнее сходство формул (1) и (2) (или (3) и (4)) отметим их существенное различие, аналогичное ситуации для рядов Фурье. Если $f \in L(-\infty, +\infty)$, то интеграл (1) существует и есть определение преобразования Фурье функции $f(x)$. Полученная спектральная функция $S(\lambda)$ (или $\varphi(y)$ из формулы (3)) не обязана принадлежать пространству $L(-\infty, +\infty)$. Следовательно, для нее интеграл в формуле (2) (или в формуле (4) соответственно) может не существовать. При условии существования этого интеграла равенство его исходной функции нужно доказывать.

Определение 2. Скажем, что для $f(x)$ в точке x_0 выполнено *условие Дини*, если для некоторого δ интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} dt$ существует и конечен.

Теорема 1. Если $f \in L(-\infty, +\infty)$ и в точке x_0 выполнено условие Дини, а $\varphi(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$, то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{+N} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

В теореме 1 утверждается, что функция $f(x)$ восстанавливается через интеграл в смысле главного значения от преобразования Фурье. В [17, с. 411] она доказана для преобразования Фурье в действительной форме.

Теорема 2 (единственности) [17, с. 415]. Если $f \in L(-\infty, +\infty)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \equiv 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Следствие. Функции f_1 и f_2 различны в пространстве $L(-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда, когда их преобразования Фурье различимы.

14.2 Свойства преобразования Фурье

Перечислим основные свойства преобразования Фурье.

1. **ЛИНЕЙНОСТЬ.** Если $f, g \in L(-\infty, +\infty)$, $a, b \in (-\infty, +\infty)$, то

$$\mathcal{F}[af + bg](\lambda) = a\mathcal{F}[f](\lambda) + b\mathcal{F}[g](\lambda).$$

2. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И СТРЕМЛЕНИЕ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.** Если $f \in L(-\infty, +\infty)$, то $\mathcal{F}[f] \in C(-\infty, +\infty)$ и $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f](\lambda) = 0$.

3. **СХОДИМОСТЬ.** Если $f, f_n \in L(-\infty, +\infty)$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, то последовательность преобразований Фурье $\{\mathcal{F}[f_n]\}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $(-\infty, \infty)$ сходится к функции $\mathcal{F}[f](\lambda)$.

4. **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВОДНОЙ.** Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f, f' \in L(-\infty, \infty)$, то

$$\mathcal{F}[f'] = i\lambda \mathcal{F}[f].$$

Если $f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in L(-\infty, +\infty)$ и $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале, то

$$\mathcal{F}[f^{(k)}] = (i\lambda)^k \mathcal{F}[f].$$

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ГЛАДКОСТЬЮ ФУНКЦИИ И СКОРОСТЬЮ УБЫВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. В предыдущих предположениях $\mathcal{F}[f] = o(|\lambda|^{-k})$.

6. УСЛОВИЕ ОБРАЩЕНИЯ. Если $f, f', f'' \in L(-\infty, +\infty)$, то $\mathcal{F}[f] \in L(-\infty, +\infty)$ и равенство (3) верно всюду.

Свертку функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначают $f * g$ и определяют равенством (есть разные варианты для коэффициента перед интегралом в зависимости от выбора формы преобразования Фурье)

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt.$$

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ СВЕРТКИ равно произведению преобразований Фурье. Если $f, g \in L(-\infty, +\infty)$, то $f * g \in L(-\infty, +\infty)$ и

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$$

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ равно свертке преобразований Фурье. Верно

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

при выполнении условий обращения.

Отражением функции $f(x)$ назовем функцию $f^-(x) = f(-x)$. Отражение преобразования Фурье совпадает с обратным (4) преобразованием Фурье $(\mathcal{F}[f])^- = \mathcal{F}^{-1}[f]$.

9. ОТРАЖЕНИЕ И КОМПЛЕКСНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ. Верны формулы:

$$\mathcal{F}[f^-] = (\mathcal{F}[f])^-$$

– преобразование Фурье отражения равно отражению преобразования Фурье,

$$\overline{\mathcal{F}[f]} = \mathcal{F}[\overline{f^-}] = \mathcal{F}^{-1}[\overline{f}], \quad \mathcal{F}[\overline{f}] = (\overline{\mathcal{F}[f]})^- = \overline{\mathcal{F}^{-1}[f]}$$

– сопряжение от преобразования Фурье есть обратное преобразование Фурье от сопряжения и преобразование Фурье от сопряжения есть сопряжение от обратного преобразования Фурье.

10. УМНОЖЕНИЕ НА ЭКСПОНЕНТУ функции

$$\mathcal{F}[e^{i\bullet b} \cdot f](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda - b) = (\mathcal{F}[f])_b(\lambda)$$

соответствует сдвигу преобразования Фурье.

Докажем это свойство:

$$\mathcal{F}[e^{i\bullet b} \cdot f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixb} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\lambda-b)x} dx.$$

В формулировке свойства использовали обозначение f_b для сдвига на элемент b функции $f(x)$: $f_b(x) = f(x - b)$.

11. СДВИГ ФУНКЦИИ

$$\mathcal{F}[f_b](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot e^{-ib\lambda}$$

соответствует умножению на (сопряженную) экспоненту преобразования Фурье.

Приведем пример нетривиального вычисления преобразования Фурье.

Лемма 1. Пусть $a > 0$. Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{xy} dx, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Выделим полный квадрат ($t = x - \frac{y}{2a}$)

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2 - 2x \cdot \frac{y}{2a} + \frac{y^2}{4a^2})} \cdot e^{\frac{y^2}{4a}} dx = e^{\frac{y^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt.$$

Применим интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ и получим

$$f(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{y^2}{4a}}.$$

Функции (5) и $g(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{y^2}{4a}}$ относительно $y \in \mathbb{C}$ являются целыми (аналитическими) функциями, равными друг другу на \mathbb{R} . Следовательно, они совпадают на \mathbb{C} . Подставим вместо y величину $-i\omega$

$$f(-i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a}}. \quad \square$$

Следствие. Если $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, то $\mathcal{F}[g_\sigma](\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$.

В частности, функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ является собственной функцией преобразования Фурье, отвечающей собственному числу 1.

Доказательство. Подставим $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ в лемму 1

$$\mathcal{F}[g_\sigma](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2} \cdot e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}. \quad \square$$

Если $f \notin L(-\infty, +\infty)$, но $f \in L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p > 1$, то преобразование Фурье вводят следующим образом.

Условие $f \in L_p(-N, +N)$ влечет $f \in L(-N, +N)$, то есть локальную суммируемость. Определим преобразование Фурье срезки функции $f(x)$ равенством

$$g_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Можно доказать, что $g_N \in L_{p'}(-\infty, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и последовательность $\{g_N\}$ фундаментальна в $L_{p'}(-\infty, +\infty)$, если $1 \leq p \leq 2$. В силу полноты пространства $L_{p'}(-\infty, +\infty)$ существует предельный элемент $g \in L_{p'}(-\infty, +\infty)$, который и считают определением преобразования Фурье функции $f \in L_p$. Эти рассуждения в случае $p = 2$ становятся более красивыми в силу симметрии.

Теорема 3 (Планшереля) [17, с. 429]. Если $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, то

$$g_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\lambda x} dx \in L_2(-\infty, +\infty)$$

для любого N и существует $g \in L_2(-\infty, \infty)$ такая, что

$$\|g_N - g\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g_N(\lambda) - g(\lambda))^2 d\lambda \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Причем $\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Равенство $\|g\|_2 = \|f\|_2$ называется *равенством Планшереля* и является аналогом равенства Парсеваля.

Следствие. Если $f \in L(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$, то функция $g(x)$ из теоремы Планшереля совпадает с $\mathcal{F}[f]$.

Согласно теореме Планшереля преобразование Фурье можно рассматривать как линейный оператор, действующий из пространства $L_2(-\infty, \infty)$

в $L_2(-\infty, \infty)$. Равенство Планшереля означает, что норма этого оператора равна 1.

Теорема 4 (о свойствах оператора преобразования Фурье).

1. Оператор \mathcal{F}^4 является тождественным в $L_2(-\infty, +\infty)$.
2. Собственными числами оператора \mathcal{F} служат числа $1, i, -1, -i$.
3. Собственными функциями \mathcal{F} являются функции Эрмита $\varphi_n(x)$, получающиеся ортогонализацией функций $x^n e^{-x^2/2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Система функций Эрмита $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_2(-\infty, +\infty)$.
4. Пространство $L_2(-\infty, \infty)$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$L_2(-\infty, \infty) = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

таких, что $\mathcal{F}[f] = i^k \cdot f$ для $f \in H_k$. Операторы

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{4}(I + (-i)^k \mathcal{F} + (-i)^{2k} \mathcal{F}^2 + (-i)^{3k} \mathcal{F}^3), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где I тождественный оператор в $L_2(-\infty, \infty)$, являются проекторами пространства $L_2(-\infty, \infty)$ на H_k .

5. Преобразование Фурье функции $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ может быть вычислено по формуле

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda x} - 1}{-ix} f(x) dx,$$

где интеграл понимается как предел в L_2 по переменному верхнему пределу, стремящемуся к $+\infty$.

Доказательство большинства свойств первых трех пунктов теоремы 4 приведено в [17]. Четвертый пункт получается последовательным применением операторов \mathcal{F} и \mathcal{P}_k :

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_k) = \frac{1}{4}(\mathcal{F} + i^{3k} \mathcal{F}^2 + i^{2k} \mathcal{F}^3 + i^k I) = i^k \mathcal{P}_k.$$

П. 5 доказан в [20, с. 315].

Лемма 2. Если $f \in L(-\infty, +\infty)$, $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где $\sigma > 0$, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (f * g_\sigma)(x) = f(x)$$

в любой точке x , где функция f непрерывна.

Доказательство. Пусть $f \in C(x)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем δ такое, что $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $|y| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} |(f * g_\sigma)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(x)) \cdot g_\sigma(y) dy \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\delta}^{+\delta} |f(x-y) - f(x)| g_\sigma(y) dy + \int_{|y| > \delta} (|f(x-y)| + |f(x)|) g_\sigma(y) dy \right) \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \cdot \max_{|y| \geq \delta} g_\sigma(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot |f(x)| \cdot \int_{|y| > \delta} g_\sigma(y) dy. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых стремятся к нулю при $\sigma \rightarrow 0$. \square

Замечание. При $\sigma \rightarrow 0$ функция $g_\sigma(x)$ превращается в обобщенную функцию, которая равна нулю всюду кроме $x = 0$, а в точке $x = 0$ принимает значение $+\infty$. Однако интеграл от этой функции по любому участку, содержащему точку $x = 0$, равен $\sqrt{2\pi}$.

Более подробно теория преобразования Фурье изложена в [22], а подборка задач в [5].

14.3 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите сформулированные свойства преобразования Фурье. *Указание.* Для свойства 8 ограничиться формальным выводом без проверки существования интегралов.

2. Проверьте справедливость п. 4 теоремы 4.

3. Найдите преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

4. Найдите свертку функций $f(x) = e^{-ax^2}$, $g(x) = e^{-bx}$, где $a, b > 0$.

5. Найдите преобразование Фурье функций

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad g(x) = xe^{-a|x|}, \quad a > 0, \quad \varphi(x) = xe^{-x^2}.$$

6. Найдите для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq a, \\ 0, & \text{если } |x| > a, \end{cases}$$

свертку $f * f$ и свертку $f * f * f$.

Если $g(x) = e^{-ax}$ при $x > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$, где $a > 0$, вычислите свертку $f * g$.

7. Докажите для $f \in L(-\infty, +\infty)$, что условие $\mathcal{F}[f](0) = 0$ равносильно требованию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}[f](y)|^2}{|y|} dy < \infty.$$

8. Докажите, что из условий $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^\alpha) |f(x)| dx < \infty$, верного для некоторого $\alpha > 0$, вытекают следующие утверждения: $|\mathcal{F}[f](y)| \leq C \cdot |y|^\beta$, где $\beta = \min(\alpha, 1)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}[f](y)|^2}{|y|} dy < \infty.$$

9. Вычислите преобразование Фурье от функции $xe^{-x^2/2}$.

10. Вычислите преобразование Фурье от функций $(2x^2 - 1)e^{-x^2/2}$ и $(2x^3 - 3x)e^{-x^2/2}$.

11. Пусть функция f бесконечно дифференцируемая и суммируемая в квадрате на оси. Обозначим $\varphi = \mathcal{F}[f]$. В какое уравнение превратится дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f$$

в результате применения к нему преобразования Фурье? Найдите все решения этого уравнения в виде $f(x) = H(x)e^{-x^2/2}$, где $H(x)$ – многочлен.

12. Стандартизованный многочлен Чебышева–Эрмита степени n определяется формулой (через n -ю производную)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Вычислите $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ и $H_4(x)$. Вычислите преобразование Фурье от $H_n(x)e^{-x^2/2}$ и сравните результат вычисления с исходной функцией. *Указание.* Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения.

Глава 15

Преобразование Уолша

15.1 Определение преобразования Уолша

В отличие от преобразования Фурье, которое рассматривается для функций, заданных на всей оси, преобразование Уолша определяется на положительной полуоси. Точнее, так же как при построении функций Уолша, рассматривается модифицированная полуось $[0, \infty)^*$, которая получается добавлением к полуоси $[0, \infty)$ счетного числа двоично-рациональных точек $\mathbb{Q}_2 = \{\frac{k}{2^m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$. В результате этой операции каждая несократимая дробь $\frac{k}{2^m}$ на $[0, \infty)^*$ имеет два представления $(\frac{k}{2^m})^-$ и $(\frac{k}{2^m})^+$, которые рассматриваются как две различные точки. Если пользоваться расширенным определением множества действительных чисел по методу Вейерштрасса как множества всех бесконечных двоичных дробей, то полуось $[0, \infty)$ (область определения преобразования Уолша) превращается в модифицированную полуось $[0, \infty)^*$. Поэтому звездочку для указания модифицированной полуоси писать не будем, а для k -го интервала m -го ранга будем использовать прежнее обозначение $\Delta_m^k = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$, допуская $m \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Хотя более правильно было бы писать $\Delta_m^k = [(\frac{k}{2^m})^+, (\frac{k+1}{2^m})^-]$, указывая, что Δ_m^k является на модифицированной полуоси отрезком, а относительно расстояния, порожденного групповой операцией, будет открытым и замкнутым множеством.

Для любых $x, y \in [0, \infty)^*$ существуют единственные двоичные разложения

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} \cdot 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} y_{-k} \cdot 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}, \quad (1)$$

где $x_{-k}, x_k, y_k, y_{-k} \in \{0, 1\}$. Первые суммы каждого разложения конечны в том смысле, что для каждого из чисел (например для x) найдется свой номер m , начиная с которого все отрицательные координаты равны нулю ($x_{-k} = 0$ при $k > m$). Если при этом $x_{-m} = 1$, то $x \in \Delta_{-m+1}^1 = [2^{m-1}, 2^m)$ (с учетом сделанного замечания).

Аналогично (см. гл. 2 и 10) вводится операция $\dot{+}$ для $x, y \in [0, \infty)^*$ (далее звездочку не пишем) по правилу

$$z = x \dot{+} y = \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} \cdot 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k} \quad (2)$$

через операцию $\dot{+}$ (так как в (2) имеем $z_m = x_m \dot{+} y_m$, где $m \in \mathbb{Z}$) на множестве $Z_2 = \{0, 1\}$ (см. ч. 1, гл. 2, с. 16). Разложению (1) числа x соответствует двусторонняя финитная влево последовательность

$$\tilde{x} = (x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-2}, x_{-1}; x_1, x_2, \dots, x_k, \dots).$$

Множество таких последовательностей обозначим X^∞ . Операции $\dot{+}$ для чисел из $[0, \infty)$ (модифицированной полуоси) соответствует операция \oplus по координатного сложения по модулю 2 двусторонних финитных влево последовательностей. Если $\tilde{y} \in X^\infty$ соответствует числу $y \in [0, \infty)$ вида (1), то $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \tilde{z}$, где $\tilde{z} \in X^\infty$ соответствует числу $z \in [0, \infty)$, вычисленному по правилу (2).

Введем скалярное произведение для чисел $x, y \in [0, \infty)$ через скалярное произведение для $\tilde{x}, \tilde{y} \in X^\infty$ как отображение $X^\infty \times X^\infty \rightarrow Z_2$ по правилу

$$t(x, y) = t(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{-k} \cdot y_k + x_k \cdot y_{-k}) \pmod{2}. \quad (3)$$

Можно было бы вводить скалярное произведение (3) как отображение во множество \mathbb{N}_0 , убрав в формуле $\pmod{2}$. Полагаем более удобным производить все вычисления по модулю 2, что соответствует присвоению всей сумме (при вычислении скалярного произведения) значения 0 в случае четной суммы и значения 1 в случае нечетной суммы. Сумма по k конечна, так как имеется лишь конечное число ненулевых координат с отрицательными индексами в каждой последовательности.

Определение 1. Ядром преобразования Уолша называется

$$W(x, y) = (-1)^{t(x,y)} \quad (4)$$

для $x, y \in [0, \infty)$.

Преобразование Уолша функции $f \in L[0, \infty)$ определяется формулой

$$\mathfrak{F}[f](y) = \int_0^\infty f(x) \cdot W(x, y) dx. \quad (5)$$

Существование и конечность интеграла (5) очевидны, так как по формуле (4) имеем $|W(x, y)| \equiv 1$.

Преобразование обратное преобразованию Уолша формально также определяется формулой (5).

Замечание. Данное определение преобразования Уолша соответствует нумерации Пэли системы Уолша как основной, что, естественно, подразумевается. Возможны другие построения ядер и преобразований с помощью функций Уолша, что следует отражать в названии преобразования.

15.2 Свойства ядра преобразования Уолша

Напомним общепринятые обозначения $[x]$ для целой части числа x и $\{x\}$ для дробной части числа x .

Лемма 1 (свойства ядра). Ядро $W(x, y)$ является:

- 1) симметричным $W(x, y) = W(y, x)$,
- 2) мультипликативным $W(x \dot{+} y, z) = W(x, z) \cdot W(y, z)$,
- 3) обратимым (и совпадающим с обратным)

$$(W(x, y))^{-1} = W(x, y),$$

4) совпадающим в случае целого неотрицательного аргумента (то есть $x = n \in \mathbb{N}_0$) с функцией Уолша в нумерации Пэли

$$W(n, y) = w_n(\{y\}),$$

5) представимым в виде скрещенного произведения функций Уолша в нумерации Пэли на себя

$$W(x, y) = w_{[x]}(\{y\}) \cdot w_{[y]}(\{x\}),$$

б) инвариантным при сжатии-растяжении

$$W(x, y) = W\left(2x, \frac{y}{2}\right),$$

γ) локально-нейтральным, означающим то, что при $x \in [0, 2^m)$ и $h \in [0, 2^{-m})$ имеем $W(x, h) = 1$.

Доказательство. Скалярное произведение (3) обладает свойствами симметричности $t(x, y) = t(y, x)$ и линейности $t(x \dot{+} y, z) = t(x, z) \dot{+} t(y, z)$, что соответствует симметричности и мультипликативности ядра.

П. 3 вытекает из равенств $|W(x, y)| = (W(x, y))^2 \equiv 1$.

При $x = n \in \mathbb{N}_0$ скалярное произведение $t(n, y)$ из формулы (3) превращается в скалярное произведение (n, y) из гл. 10, следовательно формулы (4) и (10.6) совпадают.

Введем обозначения $n = [x]$, $z = \{x\}$, $m = [y]$, $u = \{y\}$ для целых и дробных частей аргументов $x, y \in [0, \infty)$. Тогда по свойствам мультипликативности и симметричности

$$W(x, y) = W(n, m) \cdot W(n, u) \cdot W(z, m) \cdot W(z, u).$$

Так как по (3) имеем $t(n, m) = t(z, u) = 0$, то $W(n, m) = W(z, u) = 1$ и

$$W(x, y) = W(n, u) \cdot W(z, m) = w_n(u) \cdot w_m(z).$$

При доказательстве следующего пункта вместо представления (1) чисел $x, y \in [0, \infty)$ удобнее рассматривать соответствующие им двусторонние финитные влево последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in X^\infty$, являющиеся записью этих чисел в двоичной системе счисления. Так как при умножение на 2 и деление на 2 чисел в двоичной системе счисления происходит сдвиг в противоположные стороны всех разрядов на единицу, то $t(\tilde{x}, \tilde{y}) = t(\widetilde{2x}, \widetilde{y/2})$. Следовательно,

$$W(x, y) = (-1)^{t(\tilde{x}, \tilde{y})} = (-1)^{t(\widetilde{2x}, \widetilde{y/2})} = W\left(2x, \frac{y}{2}\right).$$

Выше отмечали, что $W(z, u) = 1$ при $z, u \in [0, 1)$. Если $x \in [0, 2^m)$, $h \in [0, 2^{-m})$, то $x = 2^m \cdot z$, $h = \frac{u}{2^m}$ для некоторых $z, u \in [0, 1)$. Применим m раз п. б и получим

$$1 = W(z, u) = W\left(2z, \frac{u}{2}\right) = \dots = W(x, h). \quad \square$$

Лемма 2. Для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\int_{\Delta_n^k} W(x, y) dx = \begin{cases} 2^{-n} w_k(\frac{y}{2^n}), & \text{если } y \in [0, 2^n), \\ 0, & \text{если } y \in [2^n, \infty). \end{cases}$$

Доказательство. При $n = 0$ формулировка леммы имеет вид

$$\int_k^{k+1} W(x, y) dx = \begin{cases} w_k(y), & \text{если } y \in [0, 1), \\ 0, & \text{если } y \in [1, \infty), \end{cases}$$

что доказывается подстановкой $W(x, y) = w_k(\{y\}) \cdot w_{[y]}(\{x\})$.

Общий случай $n \in \mathbb{Z}$ выводится из этой формулы по свойству 6 замены переменных

$$\int_{\Delta_n^k} W(x, y) dx = \int_{\Delta_n^k} W(2^n x, \frac{y}{2^n}) \cdot 2^{-n} d(2^n x) = 2^{-n} \int_k^{k+1} W(t, \frac{y}{2^n}) dt.$$

15.3 Преобразование Уолша в L

Напомним, что w -непрерывной на некотором множестве функцией называется функция непрерывная относительно групповой операции $\dot{+}$. То есть запись $f \in C_w(x_0)$ означает следующее: для любого $\epsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$, что для всех $x \in \Delta_n(x_0)$ выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Здесь в качестве используемого в подобных определениях δ взяли 2^{-n} .

Функция называется равномерно w -непрерывной на некотором множестве E , если по заданному $\epsilon > 0$ можно указать такое $n \in \mathbb{N}$, что для всех $x, y \in E$ таких, что $x \dot{+} y \in \Delta_n^0$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Из следующей теоремы следует, что двоичным аналогом пространства $L_\infty[0, \infty)$ может служить нормированное пространство ограниченных w -непрерывных функций, убывающих на бесконечности к нулю.

Теорема 1. Если $f \in L[0, \infty)$, то преобразование Уолша (5) есть:

- равномерно w -непрерывная на $[0, \infty)$ функция с ограничением на норму $\|\mathfrak{F}[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$,
- удовлетворяющая условию $\lim_{y \rightarrow \infty} \mathfrak{F}[f](y) = 0$,
- локально суммируемая.

Доказательство. Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем m из условия $\int_{2^m}^{\infty} |f(x)| dx < \epsilon/2$. Для любых $x, y \in [0, \infty)$ таких, что $h = x \dot{+} y \in \Delta_m^0$ рассмотрим

$$\mathfrak{F}[f](y) - \mathfrak{F}[f](x) = \int_0^{\infty} f(t)(W(t, y) - W(t, x)) dt = \int_0^{\infty} f(t)W(t, x)(W(t, h) - 1) dt$$

и по свойству 7 ядра $W(x, y)$ оценим $|\mathfrak{F}[f](y) - \mathfrak{F}[f](x)| \leq$

$$\leq \left| \int_0^{2^m} f(t)W(t, x)(W(t, h) - 1) dt \right| + \int_{2^m}^{\infty} |f(t)| \cdot |W(t, h) - 1| dt \leq 0 + \epsilon.$$

Оценка $\|\mathfrak{F}[f]\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ в силу равенства $|W(x, y)| \equiv 1$ очевидна:
 $|\int_0^{\infty} f(x)W(x, y) dx| \leq \int_0^{\infty} |f(x)| dx.$

Введем функции

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [k, k+1), \\ 0, & \text{если } x \in [0, k) \cup [k+1, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Пусть $\varphi_k(x) = f_k(x+k)$ есть сдвиг функции $f_k(x)$ на интервал $[0, 1)$. Как и ранее для произвольного $\epsilon > 0$ выберем m из условия $\int_{2^m}^{\infty} |f(x)| dx < \epsilon/2$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}[f](y)| &= \left| \int_0^{2^m} f(x)W(x, y) dx + \int_{2^m}^{\infty} f(x)W(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_k^{k+1} f_k(x)w_k(\{y\})w_{[y]}(\{x\}) dx \right| + \frac{\epsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^m-1} |w_k(\{y\})| \cdot \left| \int_0^1 \varphi_k(x)w_{[y]}(x) dx \right| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

По теореме Мерсера (теорема 8.7) найдется номер N_1 такой, что при $[y] \geq N_1$ коэффициенты Фурье-Уолша каждой из функций $\varphi_k(x)$ не превосходят по модулю $\frac{\epsilon}{2^{m+1}}$. Тогда $|\mathfrak{F}[f](y)| \leq 2^m \cdot \frac{\epsilon}{2^{m+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ при $y \geq N_1$. Следовательно, $\lim_{y \rightarrow \infty} \mathfrak{F}[f](y) = 0$.

Пункт *в)* теоремы о том, что $\mathfrak{F}[f] \in L[0, N]$ для любого $N > 0$, вытекает из пункта *а)*. \square

Ранее введенные для $[0, 1)$ классы Λ_n распространим на $[0, \infty)$: для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ полагаем $f \in \Lambda_n$, если функция $f(x)$ постоянна на каждом ($k \in \mathbb{N}_0$) интервале Δ_n^k ранга n . Введем класс финитных функций Υ_n для $n \in \mathbb{Z}$, условием: $f \in \Upsilon_n$, если $f(x) = 0$ при $x \in [2^n, \infty)$.

Теорема 2. Пусть $f \in L[0, \infty)$. Если $f \in \Lambda_n$, то $\mathfrak{F}[f] \in \Upsilon_n$. Если $f \in \Upsilon_n$, то $\mathfrak{F}[f] \in \Lambda_n$.

Доказательство. Если $f \in \Lambda_n$, то пусть $a_k = f(x)$ при $x \in \Delta_n^k$. Тогда

$$\mathfrak{F}[f](y) = \int_0^\infty f(x)W(x, y) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\Delta_n^k} W(x, y) dx.$$

По лемме 2 имеем $\mathfrak{F}[f](y) = 0$ при $y > 2^n$.

Если $f \in \Upsilon_n$ и $t = y \dot{+} h$, где $h \in \Delta_n^0$, то по свойствам 2,7 леммы 1 имеем

$$\mathfrak{F}[f](y) = \int_0^{2^n} f(x)W(x, y) dx = \int_0^{2^n} f(x)W(x, t)W(x, h) dx = \mathfrak{F}[f](t). \square$$

Следствие. Если $f \in L[0, \infty) \cap \Lambda_n$, то: $\mathfrak{F}[f] \in L[0, \infty) \cap \Upsilon_n$ и преобразование Уолша обратимо, то есть $\mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f]](x) = f(x)$ всюду.

Доказательство. Ограниченная (по теореме 1) и финитная (по теореме 2) функция $\mathfrak{F}[f](y)$ суммируема. Преобразование Уолша от нее по теореме 2 есть ступенчатая функция класса Λ_n . Пусть $a_k = f(x)$ при $x \in \Delta_n^k$. К представлению

$$\mathfrak{F}[f](y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\Delta_n^k} W(x, y) dx$$

применим лемму 2 и для $x \in \Delta_n^l$ вычислим

$$\mathfrak{F}^2[f](x) = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f]]\left(\frac{l}{2^n}\right) = 2^{-n} \int_0^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k\left(\frac{y}{2^n}\right) W\left(y, \frac{l}{2^n}\right) dy.$$

По свойствам 6, 1 и 4 леммы 1 с помощью замены переменной получим, что это выражение равно

$$\int_0^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k\left(\frac{y}{2^n}\right) W\left(\frac{y}{2^n}, l\right) d(2^{-n} \cdot y) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(t) w_l(t) dt.$$

Так как получили формулу для вычисления коэффициента Фурье-Уолша суммируемой функции $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(t) = 2^n \cdot \mathfrak{F}[f](\frac{y}{2^n})$ (где $t = \frac{y}{2^n} \in [0, 1)$), разложенной в ряд по системе Уолша, то $\mathfrak{F}^2[f](x) = a_l$ при $x \in \Delta_n^l$. \square

Лемма 3. Если $f \in L[0, 1]$ и $f(x) = 0$ при $x \in [1, \infty)$, то имеем $\mathfrak{F}[f](y) = c_k[f]$ при $y \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Другими словами, преобразование Уолша функции, носитель которой на $[0, 1)$, на каждом целочисленном участке принимает значение равное коэффициенту Фурье-Уолша, индекс которого равен номеру участка.

Доказательство. По свойству 5 леммы 1 при $y \in [k, k+1)$ имеем

$$\mathfrak{F}[f](y) = \int_0^1 f(x) w_0(\{y\}) w_k(x) dx = c_k[f]. \quad \square$$

Напомним операцию 2^m -усреднения функции $f \in L[0, \infty)$ как переход от функции $f(x)$ к функции $g(x) = 2^m \int_{\Delta_m(x)} f(x) dx$. Для функции $g(x)$ удобнее использовать обозначение $S_{2^m}(f; x)$, которое понимается как частная сумма $S_{2^m}(\varphi_k; t)$ от функции $\varphi_k(t)$, являющейся сдвигом ($x = k + t$) с интервала $[k, k+1) \ni x$ на интервал $[0, 1) \ni t$ функции $f_k(x)$ из формулы(6).

Лемма 4. Для аргумента $y < 2^m$ преобразование Уолша функции и ее 2^m -усреднения совпадают.

Если $f \in L[0, \infty)$, то можно гарантировать формулу обращения для 2^m -усреднения

$$\int_0^{2^m} \mathfrak{F}[f](y) W(x, y) dy = S_{2^m}(f; x).$$

Доказательство. Если $y < 2^m$, то по свойству 7 леммы 1 имеем

$$\mathfrak{F}[f](y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Delta_m^k} f(x) W(x, y) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2^{-m}} f(\frac{k}{2^m} + t) W(t, y) dt W(\frac{k}{2^m}, y).$$

Показали, что преобразование Уолша зависит только от средних значений на интервалах m -го ранга. Поэтому

$$\mathfrak{F}[f](y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Delta_m^k} f(x) dx \cdot W(\frac{k}{2^m}, y) = \mathfrak{F}[g](y).$$

Если $f \in L[0, \infty)$, то функция $g = S_{2^n}(f) \in L[0, \infty) \cap \Upsilon_n$. По следствию леммы 2 имеем $\mathfrak{F}[g] \in L[0, \infty) \cap \Upsilon_n$ и преобразование Уолша обратимо, то есть

$$\int_0^{2^n} \mathfrak{F}[f](y)W(x, y) dy = \\ = \int_0^{2^n} \mathfrak{F}[g](y)W(x, y) dy = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[g]](x) = g(x) = S_{2^n}(f; x)$$

всюду. \square

Следствие. Преобразование Уолша от остатка суммируемой функции f при малых значениях аргумента равно нулю; а именно: если функция g есть 2^m -усреднение для f , то $\mathfrak{F}[f - g](y) = 0$ при $y < 2^m$.

Другая формулировка этого утверждения: если суммируемая функция $R(x)$ такова, что $\int_{\Delta_m^k} R(x)dx = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, то $\mathfrak{F}[R](y) = 0$ при $y < 2^m$.

Утверждение 1. Существует $f \in L[0, \infty) \cap \Upsilon_n$, что $\mathfrak{F}[f] \notin L[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $f(x) = 0$ при $x \in [1, \infty)$ с коэффициентами Фурье-Уолша $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_{2^{n-1}} = c_{2^{n-1}+1} = \dots = c_{2^n-1} = \frac{1}{n^2}$ при $n \in \mathbb{N}$. Эта функция в гл. 12 была рассмотрена как контрпример для теоремы Мерсера, где условие $f \in L[0, 1]$ было доказано. По лемме 3 имеем

$$\|\mathfrak{F}[f]\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |c_k[f]| dy = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^2} = \infty.$$

Построенный пример показывает, что возможность обращения преобразования Уолша гарантирована лишь при дополнительных условиях, которые накладывают на исходную функцию или на преобразование Уолша.

Двоичной точкой Лебега (сравни с определением 5.9) суммируемой функции $f(x)$ называется такая точка x_0 , что $f(x_0)$ конечно и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2^m \int_0^{2^{-m}} |f(x_0 \dot{+} t) - f(x_0)| dt = 0.$$

Почти все точки суммируемой функции являются ее двоичными точками Лебега (что доказывается как и для обычных точек Лебега, см. [18, с. 237]) и в каждой из них выполняется очевидное равенство

$$f(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^m \int_0^{2^{-m}} f(x_0 \dot{+} t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m}(f; x_0),$$

которое согласно лемме 4 дополняется формулой

$$f(x_0) = \int_0^{2^n} \mathfrak{F}[f](y)W(x_0, y) dy,$$

в каком-то смысле заменяющей формулу обращения.

Применением теоремы Фубини (теорема 7.14) доказывается следующее *обобщенное равенство Планшереля*, для которого также используют более короткую форму записи $(\mathfrak{F}[f], g) = (f, \mathfrak{F}[g])$ с использованием скалярного произведения на полуоси.

Утверждение 2. Если $f, g \in L[0, \infty)$, то

$$\int_0^\infty \mathfrak{F}[f](y) \cdot g(y) dy = \int_0^\infty f(x) \cdot \mathfrak{F}[g](x) dx.$$

Утверждение 3. Если $f \in L[0, \infty)$, то 2^m -усреднения приближают функцию f в пространстве $L[0, \infty)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{2^n}(f) - f\|_{L[0, \infty)} = 0;$$

и почти всюду $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}(f; x) = f(x)$.

Доказательство. Заметим, что $\|S_{2^n}(f)\|_{L[N, \infty)}$ при любом фиксированном N есть возрастающая ограниченная сверху (величиной $\|f\|_{L[N, \infty)}$) последовательность, что доказывается проверкой соответствующего неравенства на отдельном интервале

$$\|S_{2^n}(f)\|_{L(\Delta_n^k)} = \int_{\Delta_n^k} |S_{2^n}(f; x)| dx \leq \int_{\Delta_n^k} |f(x)| dx.$$

Действительно, если функция $f(x)$ не меняет знак на интервале Δ_n^k , то символ модуля выносим за знак интеграла и получаем равенство $|\int_{\Delta_n^k} S_{2^n}(f; x) dx| = |\int_{\Delta_n^k} f(x) dx|$. Если же функция меняет знак на интервале Δ_n^k , то внесение знака модуля под знак интеграла в последнем верном равенстве может увеличить только величину справа. Если в качестве $f(x)$ возьмем $S_{2^{n+1}}(f; x)$, то установим возрастание последовательности частных сумм.

Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем такое N , что $\|f\|_{L[N, \infty)} < \frac{\epsilon}{4}$. Тогда $\|S_{2^n}(f) - f\|_{L[N, \infty)} < \frac{\epsilon}{2}$ для любого n .

Для каждого из N целочисленных интервалов $[k, k+1)$ найдется такое $n = n(k)$, что

$$\|S_{2^n}(f) - f\|_{L[k, k+1)} < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Если $n = \max n(k)$, то

$$\|S_{2^n}(f) - f\|_{L[0, \infty)} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|S_{2^n}(f) - f\|_{L[k, k+1)} + \|S_{2^n}(f) - f\|_{L[N, \infty)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \square$$

15.4 Обобщенное ядро Дирихле и обобщенные константы Лебега

Определение 2. *Обобщенным ядром Дирихле* (или ядром Дирихле для преобразования Уолша) назовем интеграл от ядра преобразования Уолша с переменным верхним пределом

$$D(x; t) = \int_0^t W(x, y) dy.$$

Лемма 5. *Обобщенное ядро Дирихле связано с ядром Дирихле системы Уолша соотношением*

$$D(x; t) = \begin{cases} D_{[t]}(x) + \{t\} \cdot w_{[t]}(x), & \text{если } x \in [0, 1), \\ w_{[t]}(\{x\}) \cdot \int_0^{\{t\}} w_{[x]}(z) dz, & \text{если } x \in [1, \infty). \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $x \in [0, 1)$. Тогда

$$D(x; t) = \int_0^t w_0(\{y\}) \cdot w_{[y]}(x) dy = \sum_{k=0}^{[t]-1} w_k(x) \int_k^{k+1} dy + w_{[t]}(x) \int_{[t]}^t dy.$$

Пусть $x = n + h$, где $n \in \mathbb{N}$, $h \in [0, 1)$. Тогда $D(x, t) =$

$$= \sum_{k=0}^{[t]-1} \int_k^{k+1} w_n(\{y\}) w_k(h) dy + \int_{[t]}^t w_n(\{y\}) w_{[t]}(h) dy = 0 + w_{[t]}(h) \int_0^{\{t\}} w_n(z) dz.$$

Следствие (о совпадении для целочисленного аргумента обобщенного ядра Дирихле с ядром Дирихле). Если $n \in \mathbb{N}$, то:

$D(x; n) = D_n(x)$ при $x \in [0, 1)$ и $D(x; n) = 0$ при $x \in [1, \infty)$.

В частности, $D(x; 2^m) = 2^m$ при $x \in [0, 2^{-m})$ и $D(x; 2^m) = 0$ при $x \in [2^{-m}, \infty)$, где $m \in \mathbb{N}$.

Вторая форма записи леммы 5. Если $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in [0, 1)$, то
 $D(x; n+z) = (1-z)D_n(x) + zD_{n+1}(x)$ при $x \in [0, 1)$,
 $D(x; n+z) = w_n(\{x\}) \cdot D(x; z)$ при $x \in [1, \infty)$.

Отметим, что по лемме 10.3 при $l \geq 2^m$ имеем $\int_0^{k/2^m} w_l(x) dx = 0$.

Лемма 6. Если $l < 2^m$, то $\int_0^{k/2^m} w_l(x) dx = \frac{1}{2^m} D_k(\frac{l}{2^m})$.

Доказательство. Так как $\int_0^{k/2^m} w_l(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\Delta_m^i} w_l(x) dx = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{k-1} w_l(\frac{i}{2^m})$, где под знаком суммы стоят элементы матрицы дискретного преобразования Уолша, которая симметрична, то поменяем местами l и i и получим формулировку леммы. \square

Лемма 7 (о двоичном сжатии). Для любых $x, t \in [0, \infty)$ верно

$$2D(x; t) = D(x/2; 2t).$$

Доказательство. По свойству 6 леммы 1 имеем

$$2D(x; t) = 2 \int_0^t W(x, y) dy = \int_0^t W(\frac{x}{2}, 2y) d(2y) = D(x/2; 2t).$$

Следствие. Для всех натуральных l, k, m имеем

$$D(l; \frac{k}{2^m}) = \frac{1}{2^m} D(\frac{l}{2^m}; k) = \frac{1}{2^m} D_k(\frac{l}{2^m}).$$

При фиксированном k в пределах от 1 до 2^m величины $D(l; \frac{k}{2^m})$ будем рассматривать как координаты (номер координаты $l \in \mathbb{N}_0$) последовательности $\tilde{D}_{\frac{k}{2^m}}$ дробных ядер Дирихле. В лемме 6 еще раз обратили на них внимание.

Лемма 8 (обобщенная лемма Пэли).

Для всех $m \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$D(x; 2^m) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in [0, 2^{-m}), \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-m}, \infty). \end{cases}$$

Доказательство. Для положительных m утверждение доказано в следствии леммы 5. Осталось доказать для целых отрицательных m . Обозначим $n = -m > 0$. Применим предыдущую лемму

$$D(x; 2^{-n}) = \frac{1}{2} \cdot D\left(\frac{x}{2}; 2 \cdot 2^{-n}\right) = \dots = \frac{1}{2^n} \cdot D\left(\frac{x}{2^n}; 1\right).$$

Так как $D(u; 1) = 1$ при $u \in [0, 1)$ и $D(u; 1) = 0$ при $u \in [1, \infty)$, то $D(x; 2^{-n}) = 2^{-n}$ при $x \in [0, 2^n)$ и $D(x; 2^{-n}) = 0$ при $x \geq 2^n$. \square

Понятие срезки числа, введенное для натуральных чисел, можно распространить и на двоичные дроби. Для $x \in [0, \infty)$ вида (1) при $n \in \mathbb{N}$ определим *срезку*:

$$[x]_n = \sum_{k=1}^n x_{-k} 2^{k-1} + \{x\}, \quad [x]_0 = \{x\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad [x]_{-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Для чисел в двоичной системе счисления понятие срезки числа можно представлять как выделение части числа с помощью некоего трафарета, где ранг срезки указывает, на какое количество разрядов от запятой влево (с плюсом) или вправо (с минусом) сдвигается трафарет.

Отметим, что: 1) $[x]_m \leq 2^m$ при всех $m \in \mathbb{Z}$; 2) $2 \cdot [x]_{m-1} = [2x]_m$.

Введем понятие *отклонения m -го ранга* числа $x \in [0, \infty)$ для $m \in \mathbb{Z}$ по формуле

$$\langle x \rangle_m = \min([x]_m, 2^m - [x]_m).$$

Лемма 9. Для всех $m, k \in \mathbb{Z}$ имеем:

1. $\langle x \rangle_m \leq 2^{m-1}$;
2. $2 \cdot \langle x \rangle_{m-1} = \langle 2x \rangle_m$, $2^k \cdot \langle x \rangle_{m-k} = \langle 2^k x \rangle_m$.

В обозначениях $n = [t]$, $z = \{t\}$ при $t \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle t \rangle_m = \begin{cases} [n]_m + z, & \text{если } [n+1]_m \leq 2^{m-1}, \\ 2^m - [n]_m - z, & \text{если } [n]_m \geq 2^{m-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Утверждение 4. Любая ненулевая точка модифицированной полуоси (или полуоси) принадлежит одному из интервалов с номером 1; эти интервалы не пересекаются:

$$(0, \infty)^* = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \Delta_m^1, \quad (\text{или } (0, \infty) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \Delta_m^1), \quad \Delta_m^1 \cap \Delta_l^1 = \emptyset \text{ при } k \neq l.$$

В случае модифицированной полуоси полагаем $\Delta_m^k = [(\frac{k}{2^m})^+, (\frac{k+1}{2^m})^-]$, а в случае полуоси $\Delta_m^k = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$ (см. первый абзац).

Теорема 3 (явный вид модуля обобщенного ядра Дирихле).
Для всех $x, t \in [0, \infty)$ верно

$$|D(x; t)| = \langle t \rangle_m,$$

где $m \in \mathbb{Z}$ находится из условия $x \in \Delta_m^1$.

Доказательство. Если $x \in [0, 1)$, то $m \in \mathbb{N}$ и по второй форме записи леммы 5 в обозначениях $n = [t]$, $z = \{t\}$ имеем

$$|D(x; t)| = |(1 - z)D_n(x) + zD_{n+1}(x)| = (1 - z)|D_n(x)| + z|D_{n+1}(x)|,$$

так как величины $D_n(x)$ и $D_{n+1}(x)$ не могут иметь разные знаки. По теореме о явном виде модуля ядра Дирихле получим

$$|D(x; t)| = (1 - z) \cdot \langle n \rangle_m + z \cdot \langle n + 1 \rangle_m. \quad (9)$$

Если $[n + 1]_m \leq 2^{m-1}$, то из формул (8) и (9) по определению отклонения имеем

$$|D(x; t)| = (1 - z)[n]_m + z([n]_m + 1) = [n]_m + z = \langle t \rangle_m.$$

Если $[n]_m \geq 2^{m-1}$, то по формулам (8) и (9) имеем

$$|D(x; t)| = (1 - z)(2^m - [n]_m) + z(2^m - [n]_m - 1) = 2^m - [n]_m - z = \langle t \rangle_m.$$

Если $x \in \Delta_{-m}^1 = [2^m, 2^{m+1})$, где $m \in \mathbb{N}$, то $\frac{x}{2^{m+1}} \in \Delta_1^1$. По лемме 7

$$|D(x; t)| = 2^{-m-1} |D(\frac{x}{2^{m+1}}; 2^{m+1}t)| = 2^{-m-1} \langle 2^{m+1}t \rangle_1.$$

По лемме 9 имеем $2^{-m-1} \langle 2^{m+1}t \rangle_1 = \langle t \rangle_{-m}$. \square

Ранее введенную (10.12) функцию $h(x)$ продолжим на полуось:

$$h(x) = 2^m \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{m+1}^1, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и получим

Следствие. Для всех $x, t \in [0, \infty)$ верна точная оценка

$$|D(x; t)| \leq h(x).$$

Вывод о поведении модуля обобщенного ядра Дирихле. В любой фиксированной точке $x \in [0, \infty)$ значение модуля обобщенного ядра Дирихле $|D(x; t)|$ как функция аргумента t с равномерной скоростью равной 1 совершает периодические изменения (колебания) от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно.

Теорема 4. Для любого $p > 1$ верно $D(\cdot; t) \in L_p[0, \infty)$.

Если $t = \frac{k}{2^n}$ (то есть двоично-рациональное), то $D(\cdot; t) \in L[0, \infty)$; если $t \neq \frac{k}{2^n}$ (то есть двоично-иррациональное), то $D(\cdot; t) \notin L[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Тогда

$$\|D(\cdot; t)\|_p^p = \int_0^1 |D(x; t)|^p dx + \int_1^\infty |D(x; t)|^p dx \leq t^p + \|h\|_p^p,$$

где

$$\|h\|_p^p = \int_1^\infty (h(x))^p dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{2^{n-1}}^{2^n} 2^{-np} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty 2^{n(1-p)} < \infty.$$

Первое утверждение доказано.

Пусть $p = 1$. Если $t = \frac{k}{2^n}$, то по лемме 2 имеем $D(x; t) = 0$ при $x \geq 2^m$. К финитности добавим очевидное условие ограниченности $D(x; t)$ при фиксированном t как функции x и получим $D(\cdot; t) \in L[0, \infty)$.

Если $t \neq \frac{k}{2^n}$ (двоично-иррациональное), то в двоичной записи числа $\{t\} = \sum_{k=1}^\infty \frac{t_k}{2^k}$ перенумеруем все переходы от нуля к единице: $t_{r_k} = 0$, $t_{r_k+1} = 1$, $r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots$. Их бесконечно много. По теореме 3 имеем $|D(x, t)| = \langle t \rangle_{-r_k+1} = [t]_{-r_k+1} = [t]_{-r_k} > 2^{-r_k-1}$ при $x \in [2^{r_k-1}, 2^{r_k}) = \Delta_{-r_k+1}^1$. Тогда

$$\int_0^\infty |D(x; t)| dx > \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{r_k-1}}^{2^{r_k}} |D(x; t)| dx > \sum_{k=1}^\infty 2^{-r_k-1} \cdot 2^{r_k-1} = \infty. \quad \square$$

Теорема 5 (оценка нормы обобщенного ядра Дирихле).

1. Если $1 < p < 2$, то $t^{\frac{1}{p'}} \leq \|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)} < A(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}}$.
2. $\int_0^\infty (D(x; t))^2 dx = t$.
3. Если $p > 2$, то:
 - a) $a(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}} < \|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)} \leq t^{\frac{1}{p'}}$,
 - b) величина $\|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)}$ монотонно возрастает с ростом t .

В формулировке теоремы использованы величины $a(p)$ и $A(p)$, являющиеся решением задачи на экстремум, сформулированной на с. 48.

Доказательство пп. 1 и 3 сложное и аналогично доказательству теоремы 10.5 для ядра Дирихле.

Для двоично-рациональных t введем понятие *обобщенной константы Лебега* формулой

$$L_t = \int_0^\infty |D(x; t)| dx.$$

Лемма 10 (свойства обобщенной константы Лебега).

При двоично-рациональных t :

A. $L_{2t} = L_t$;

B. В обозначениях $n = [t]$, $z = \{t\}$ имеем

$$L_{n+z} = (1-z)L_n + zL_{n+1} + L_z - z, \quad L_z = z + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(z \cdot 2^k),$$

где $\varphi(u)$ — кусочно-линейная на $[0, \infty)$ функция с узлами $\varphi(n) = 0$, $\varphi(\frac{2n+1}{2}) = 1/2$, которую можно также определить как интеграл от начальной функции Радемахера $\varphi(x) = \int_0^x r_0(u) du$.

Доказательство. Пункт A есть следствие леммы 7.

Рассмотрим $L_{n+z} = \int_0^1 |D(x; n+z)| dx + \int_1^\infty |D(x; n+z)| dx$. Для каждого из слагаемых применим лемму 6 (учитывая совпадение знаков ядер):

$$\int_0^1 |D(x; n+z)| dx = \int_0^1 ((1-z)|D_n(x)| + z|D_{n+1}(x)|) dx = (1-z)L_n + zL_{n+1};$$

$$\int_1^\infty |D(x; n+z)| dx = \int_1^\infty |D(x; z)| dx = L_z - \int_0^1 |D(x; z)| dx = L_z - z.$$

По теореме 3 имеем

$$\int_1^\infty |D(x; z)| dx = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^m}^{2^{m+1}} |D(x; z)| dx = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \langle z \rangle_{-m}.$$

Отсюда по лемме 7 выводим

$$L_z = z + \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \langle z \rangle_{-m} = z + \sum_{m=0}^{\infty} \langle 2^m z \rangle_0.$$

Величину нулевого отклонения удобно задать с помощью интеграла от начальной функции Радемахера $L_z = z + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2^m z)$. \square

Следствие. Если z двоично-иррациональное, то $\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2^m z) = \infty$.

15.5 Свойства преобразования Уолша

Напомним (введенное в гл. 10) понятие *сдвига* функции $f(x)$ на элемент a : $f_a(x) = f(x \dot{+} a)$.

Введенное формулой (6) *проектирование* функции на целочисленный интервал определим (чтобы обозначение проекции отличалось от сдвига) по другому – как произведение заданной функции с характеристической функцией $\lambda_k(x)$ целочисленного интервала $[k, k + 1)$ вида

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [k, k + 1), \\ 0, & \text{если } x \in [0, k) \cup [k + 1, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Двоичной сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ на $[0, \infty)$ назовем функцию

$$(f * g)(x) = \int_0^{\infty} f(x \dot{+} y)g(y)dy. \quad (11)$$

Как следствие свойств несобственных интегралов легко получить свойство линейности свертки

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$

Через свертку легко определить *скалярное произведение функций на полуоси* $(f, g) = (f * g)(0)$.

Для функций $f, g \in L[0, \infty)$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in [0, \infty)$) приведем свойства преобразования Уолша.

1. Преобразование Уолша **линейно**

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathfrak{F}[f] + \beta \mathfrak{F}[g].$$

2. Преобразование Уолша **сдвига** соответствует умножению на ядро преобразования Уолша

$$\mathfrak{F}[f_a] = \mathfrak{F}[f] \cdot W(a, \cdot).$$

3. Преобразование Уолша **функции, умноженной на ядро**, равно сдвигу преобразования Уолша

$$\mathfrak{F}[f \cdot W(\cdot, a)] = (\mathfrak{F}[f])_a.$$

4. Преобразование Уолша **свертки** равно произведению преобразований Уолша

$$\mathfrak{F}[f * g] = \mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g].$$

5. Преобразование Уолша **произведения** (если оно существует) равно свертке преобразований Уолша, а именно:

$$\mathfrak{F}[f \cdot g] = \mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g],$$

если $f \cdot g \in L[0, \infty)$.

Данная формула, для аргумента равного 0, превращается в *обобщенное равенство Планшереля* (Парсевалея)

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \int_0^\infty \mathfrak{F}[f](x)\mathfrak{F}[g](x)dx,$$

имеющее место только при дополнительных предположениях, о которых будем говорить позднее. Сокращенная форма записи приведенного равенства Планшереля через скалярное произведение:

$$(f, g) = (\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g]).$$

Введем операцию \mathfrak{S} *сжатия функции* $f(x)$ (сжатие в два раза по оси абсцисс с сохраняющей L_2 -норму растяжением по оси ординат) формулой: $\mathfrak{S}[f](x) = \sqrt{2} \cdot f(2x)$, а обратную операцию назовем операцией *растяжения*.

6. Преобразование Уолша **сжатия** равно растяжению преобразования Уолша

$$\mathfrak{S} [\mathfrak{F} [\mathfrak{S}[f]]] = \mathfrak{F}[f].$$

Отметим, что в литературе по вейвлетам введенная нами операция растяжения называется операцией (двоичной) *дилатации*.

7. Преобразование Уолша **ступенчатой функции** является финитной функцией.

Преобразование Уолша **финитной функции** является ступенчатой функцией.

В частности: а) если $f(x) = 0$ при $x \in [1, \infty)$, то на каждом целочисленном интервале преобразование Уолша постоянно и равно соответствующему коэффициенту Фурье-Уолша этой функции;

б) преобразование Уолша характеристической функции целочисленного интервала равно соответствующей функции Уолша на начальном интервале $\mathfrak{F}[\lambda_k] = w_k \lambda_0$;

в) преобразование Уолша проекции равно на каждом целочисленном интервале произведению соответствующего коэффициента Фурье-Уолша этой проекции на соответствующую функцию Уолша

$$\mathfrak{F}[f \cdot \lambda_k](x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m[\varphi_k] \lambda_m(x) w_k(x),$$

где φ_k есть (см. обозначения после формулы (6)) сдвиг функции $f \cdot \lambda_k$ на начальный интервал.

8. Существует следующее **представление интеграла** от преобразования Уолша

$$\int_0^t \mathfrak{F}[f](y) dy = \int_0^{\infty} f(x) D(x; t) dx.$$

Верно и обратное соотношение

$$\int_0^t f(x) dx = \int_0^{\infty} \mathfrak{F}[f](x) D(x; t) dx.$$

Если $t \in [0, 1)$, то получим рассмотренную в гл. 10 **формулу интегрирования**

$$\int_0^t f(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_i[f] \int_i^{i+1} D(x; t) dx = (\hat{f}, \tilde{D}_t),$$

доказательство которой отложили до данной главы. Здесь \hat{f} – последовательность коэффициентов Фурье-Уолша функции, а \tilde{D}_t – *последовательность значений дробного ядра Дирихле*.

9. Если $\mathfrak{F}[f](y) \geq 0$ при всех $y \in [0, \infty)$ и $f \in C_w(0)$, то **функция $f(x)$ восстанавливается** в каждой точке x_0 , которая является двоичной точкой Лебега

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} \mathfrak{F}[f](y) W(x_0, y) dy.$$

Из сформулированных свойств выделим свойство 5, для справедливости которого недостаточно суммируемости исходных функций. При доказательствах свойств будут постоянно использоваться лемма 1 и свойство инвариантности несобственного интеграла Лебега относительно сдвига

$$\int_0^{\infty} f(x \dot{+} a) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Из инвариантности интеграла применением теоремы Фубини получаем следующее свойство двоичной свертки:

если $f, g \in L[0, \infty)$, то $f * g \in L[0, \infty)$ и

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Доказательство свойств преобразования Уолша.

1. Утверждение вытекает из линейности несобственного интеграла.

2. При любых фиксированных $a, y \in [0, \infty)$ имеем

$$\mathfrak{F}[f_a](y) = \int_0^{\infty} f(x \dot{+} a)W(x, y) dx = \int_0^{\infty} f(x \dot{+} a)W(x \dot{+} a, y) dx W(a, y).$$

3. Аналогично

$$\mathfrak{F}[f \cdot W(\cdot, a)](y) = \int_0^{\infty} f(x)W(x, a)W(x, y) dx = \mathfrak{F}[f](a \dot{+} y).$$

4. Учитывая то, что $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(x \dot{+} t)||g(t)| dt |W(x, y)| dx < \infty$, по теореме Фубини имеем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x \dot{+} t)g(t)dt W(x, y) dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x \dot{+} t)W(x \dot{+} t, y) dx W(t, y)g(t)dt.$$

По инвариантности интеграла относительно сдвига $\mathfrak{F}[f * g] = \mathfrak{F}[f]\mathfrak{F}[g]$.

5. Приведем формальное доказательство свойства в предположении, что все встречающиеся функции суммируемы и восстанавливаются двукратным применением преобразования Уолша. Применим преобразование Уолша к обеим частям в свойстве 4, поменяв левую и правую части

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g]] = \mathfrak{F}^2[f * g] = f * g = \mathfrak{F}^2[f] * \mathfrak{F}^2[g].$$

Взяв за исходные функции $\mathfrak{F}[f]$ и $\mathfrak{F}[g]$, получим свойство 5.

6. Если $g(x) = \sqrt{2} \cdot f(2x)$, то $\mathfrak{F}[g](y) =$
 $= \sqrt{2} \int_0^\infty f(2x)W(x, y) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty f(2x)W(2x, \frac{y}{2}) d(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathfrak{F}[f](\frac{y}{2}).$

7. Доказано в теореме 2. Частные случаи (отдельные из которых уже доказаны) предлагается рассмотреть самостоятельно.

8. Первое представление доказывается по теореме Фубини. Второе представление следует из обобщенного равенства Планшереля, которое будет доказано (утверждение 7) в следующем параграфе. Для его выполнения нужно потребовать суммируемость функции в квадрате. Так как функцию $f(x)$ рассматриваем на конечном интервале, то из суммируемости функции следует суммируемость в квадрате. Если в утверждение 7 в качестве функции $g(x)$ возьмем характеристическую функцию интервала интегрирования, то и получим второе представление.

Если $t \in [0, 1)$, то функцию $f(x)$ считаем равной 0 при $x \geq 1$. Интеграл $\int_0^\infty \mathfrak{F}[f](x)D(x; t) dx$ разобьем на сумму по целочисленным участкам и применим свойство 7а. Получим

$$\int_0^t f(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_i[f] \int_i^{i+1} D(x; t) dx.$$

Удобнее использовать более компактную запись в виде скалярного произведения последовательностей \hat{f} (коэффициентов Фурье-Уолша функции f) и \tilde{D}_t , координаты которой равны $\int_i^{i+1} D(x; t) dx$.

При фиксированном $t \in [0, 1)$ по (7) имеем $D(x; t) = \int_0^t w_{[x]}(z) dz$, то есть ядро $D(x; t)$ постоянно при $x \in [i, i+1)$. Следовательно, последовательность \tilde{D}_t , координаты которой равны $\int_i^{i+1} D(x; t) dx$, есть последовательность значений $D(x; t)$ по целочисленным интервалам. Если $t = \frac{k}{2^m}$, где $k < 2^m$, то по лемме 10.3 последовательность \tilde{D}_t финитная и называется *последовательностью дробных ядер Дирихле* (обозначается $\tilde{D}_{\frac{k}{2^m}}$), что легко показать и непосредственно

$$\int_i^{i+1} D(x; \frac{k}{2^m}) dx = \frac{1}{2^m} \int_i^{i+1} D(\frac{x}{2^m}; k) dx = \frac{1}{2^m} D_k(\frac{i}{2^m}),$$

представив через ядро Дирихле системы Уолша. Определение дробных

ядер Дирихле приведено в следствии леммы 10.12, согласно которому

$$\frac{1}{2^m} D_k\left(\frac{i}{2^m}\right) = D_{\frac{k}{2^m}}(i).$$

9. Для доказательства суммируемости функции $\mathfrak{F}[f]$ достаточно установить существование конечного предела

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2^m} \mathfrak{F}[f](y) dy.$$

Применим п. 8 и обобщенную лемму Пэли

$$\int_0^{2^m} \mathfrak{F}[f](y) dy = \int_0^\infty f(x) D(x; 2^m) dx = 2^m \int_0^{2^{-m}} f(x) dx.$$

Перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$, учтя w -непрерывность в нуле функции, $\int_0^\infty \mathfrak{F}[f](y) dy = f(0)$.

Возможность представления

$$f(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2^m} \mathfrak{F}[f](y) W(x_0, y) dy$$

в двоичных точках Лебега установлена выше. Суммируемость $\mathfrak{F}[f]$ обеспечивает произвольную малость остатка $\int_{2^m}^\infty \mathfrak{F}[f](y) W(x_0, y) dy$ и справедливость формулы обращения $f(x_0) = \int_0^\infty \mathfrak{F}[f](y) W(x_0, y) dy$.

Определение 3. Введем функции $\Psi_{k,n}$ как сдвиг функции Уолша с номером n с начального интервала $[0, 1)$ на целочисленный интервал с номером k :

$$\Psi_{k,n}(x) = w_n(\{x\}) \cdot \lambda_k(x),$$

где $\lambda_k(x)$ определена формулой (10).

Обращаем внимание на то, что первый индекс есть номер интервала, а второй индекс – номер функции Уолша.

При доказательстве следующих лемм (чтобы избежать обозначений $w_n(\{x\})$) функции Уолша $w_n(x)$, которые изначально определялись как функции только на интервале $[0, 1)$, будем считать периодически с периодом 1 продолженными на полуось.

Лемма 11. Преобразование Уолша меняет местами индексы функции $\Psi_{k,n}$

$$\mathfrak{F}[\Psi_{k,n}](x) = \Psi_{n,k}(x).$$

Доказательство. Вычислим $\mathfrak{F}[\Psi_{k,n}](x) = \int_0^\infty \Psi_{k,n}(t)W(t, x) dt =$

$$= \int_k^{k+1} w_n(t)W(t, x) dt = \int_k^{k+1} w_n(t)w_{[x]}(t) dt w_k(x) = \int_0^1 w_{n+[x]}(t) dt w_k(x).$$

Значит, $\mathfrak{F}[\Psi_{k,n}](x) = \lambda_n(x)w_k(x) = \Psi_{n,k}(x)$. \square

Для $n \in \mathbb{N}_0$ введем функции

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } x \in [0, 2^{-n}), \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-n}, \infty), \end{cases} \quad \varphi_{-n}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 2^n), \\ 0, & \text{если } x \in [2^n, \infty). \end{cases}$$

Утверждение 5. *Имеют место соотношения*

$$\mathfrak{F}[\varphi_n] = \varphi_{-n}, \quad \mathfrak{F}[\varphi_{-n}] = \varphi_n.$$

Лемма 12. *Свертка двух функций пси равна нулю, если номера функций Уолша различны, или функции пси с тем же номером функции Уолша, что у обеих функций, а именно*

$$\Psi_{k,n} * \Psi_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq j, \\ \Psi_{k+i,n}, & \text{если } n = j. \end{cases}$$

Доказательство. Вычислим свертку

$$\int_0^\infty \Psi_{k,n}(t \dot{+} x) \Psi_{i,j}(t) dt = \sum_{l=0}^\infty \int_l^{l+1} \lambda_k([t \dot{+} x]) \lambda_i([t]) w_n(\{t\}) w_n(\{x\}) w_j(\{t\}) dt.$$

Естественно остается одно слагаемое при $l = i$. Применим лемму о сдвиге (упражнение 9 в гл. 13), согласно которой из условий $t \in \Delta_0^l$, $x \dot{+} t \in \Delta_0^k$ следует $x \in \Delta_0^{k+i}$. Поэтому

$$\Psi_{k,n} * \Psi_{i,j}(x) = \lambda_{k+i}(x) \int_0^1 w_{n+j}(t) dt w_n(\{x\}).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. \square

Приведем подробное доказательство свойства 5 в наиболее простом случае финитных ступенчатых функций.

Утверждение 6. Если $f, g \in \Lambda_n$, то $f \cdot g, f * g \in \Lambda_n$.

Если $f, g \in \Upsilon_n$, то $f \cdot g, f * g \in \Upsilon_n$.

Если $f, g \in \Lambda_n \cap \Upsilon_m$, то $\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[f \cdot g], \mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g] \in \Upsilon_n \cap \Lambda_m$. Причем $\mathfrak{F}[f \cdot g] = \mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g]$.

Доказательство. Первые два предложения легко проверяются, а третье вытекает из теоремы 2. Докажем равенство. Так как $f \in \Lambda_n \cap \Upsilon_m$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj} \Psi_{k,j}(x),$$

где

$$a_{kj} = \int_k^{k+1} f(\{x\}) w_j(\{x\}) dx = \int_0^\infty f(x) \Psi_{k,j}(x) dx \quad (12)$$

– коэффициенты Фурье от сдвига функции по системе Уолша или на $[0, \infty)$ коэффициенты Фурье по системе $\{\Psi_{k,j}(x)\}$. Аналогично разложим $g(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} b_{kj} \Psi_{k,j}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \sum_{k=0}^{2^m-1} \lambda_k(x) \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj} w_j(x) \cdot \sum_{i=0}^{2^n-1} b_{ki} w_i(x) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj} b_{kj+l} \right) \lambda_k(x) w_l(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} c_{kl} \Psi_{k,l}(x), \end{aligned}$$

где

$$c_{kl} = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj} b_{kj+l}. \quad (13)$$

По лемме 11 получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f](x) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{kj} \Psi_{j,k}(x), \quad \mathfrak{F}[g](x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} b_{kj} \Psi_{j,k}(x), \\ \mathfrak{F}[f \cdot g](x) &= \sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} c_{kl} \Psi_{l,k}(x). \end{aligned} \quad (14)$$

В выражении

$$\mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g] = \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{kj} \Psi_{j,k} \right) * \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} b_{ki} \Psi_{i,k} \right)$$

воспользуемся линейностью свертки и леммой 12, согласно которой остаются только слагаемые с совпадающими индексами k :

$$\mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g] = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{kj} b_{ki} \Psi_{j+i,k}.$$

Полагая $j + i = l$, получаем $i = j + l$ и организуем суммирование по диагонали в двойной сумме

$$\mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g] = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj} b_{kj+l} \right) \Psi_{l,k}.$$

Сравнивая с (13) и (14), получаем, что $\mathfrak{F}[f \cdot g] = \mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g]$. \square

15.6 Преобразование Уолша в L_2

Если $f \notin L[0, \infty)$, то формула (5) для определения преобразования Уолша не работает. Основу L_2 -теории классического преобразования Фурье составляет теорема Планшереля, аналог которой имеет место и для преобразования Уолша.

Теорема 6. Если $f \in L_2[0, \infty)$, то: 1) для любого $N > 0$ функция

$$F_N(y) = \int_0^N f(x) W(x, y) dx \quad (15)$$

принадлежит классу $L_2[0, \infty)$,

2) существует $F \in L_2[0, \infty)$ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N - F\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty (F_N(y) - F(y))^2 dy \right)^{1/2} = 0. \quad (16)$$

Причем имеет место равенство Планшереля

$$\int_0^\infty (F(x))^2 dx = \int_0^\infty (f(x))^2 dx. \quad (17)$$

Функция $F(y)$ из этой теоремы (которую докажем позднее) и служит определением преобразования Уолша в L_2 . Обоснованием этого замечания служит

Теорема 7. *Если $f \in L[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$, то $\mathfrak{F}[f](y) = F(y)$ для почти всех y .*

Доказательство вытекает из теорем 6 и 8 ссылкой на свойство 8. Можно предложить и непосредственное доказательство теоремы 7.

Для $f \in L_2[0, \infty)$ формулы (15) и (16) можно записать короче

$$\mathfrak{F}[f](y) = F(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2) \int_0^N f(x)W(x, y)dx.$$

Покажем, что для $f \in L_2[0, \infty)$ можно предложить и другие формы записи оператора преобразования Уолша.

Лемма 13. *Система функций $\{\Psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ является полной ортонормированной в $L_2[0, \infty)$ системой.*

Доказательство. Проверим ортонормированность системы

$$(\Psi_{k,n}, \Psi_{l,m}) = \int_0^{\infty} \lambda_k(x)\lambda_l(x)w_n(x)w_m(x)dx = \delta_{kl}\delta_{nm}.$$

Полнота данной системы в $L_2[0, \infty)$ вытекает из полноты системы Уолша в $L_2[0, 1)$ проверкой на каждом целочисленном интервале.

Теорема 8. *Следующие три способа определения оператора преобразования Уолша, действующего из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$, эквивалентны.*

A. $\mathfrak{F}[f](y) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2) \int_0^N f(x)W(x, y)dx.$

B. Почти всюду $\mathfrak{F}[f](y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} f(x)D(x; y)dx.$

B. $\mathfrak{F}[f](y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} \Psi_{n,k}(y);$

где a_{kn} есть вычисленные по формуле (12) коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\Psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$; сходимость ряда рассматривается по норме пространства $L_2[0, \infty)$, в силу чего не зависит от порядка слагаемых.

Доказательство теорем 6 и 8. Если $f \in L_2[0, \infty)$, то

$$f(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \Psi_{k,n}(x), \quad (18)$$

где коэффициенты Фурье a_{kn} вычислены по формуле (12), сокращенная форма записи которой $a_{kn} = (f, \Psi_{k,n})$. Применим равенство Парсеваля на каждом целочисленном интервале

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\infty (f(x))^2 dx = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} (f(x))^2 dx = \sum_{k,n=0}^\infty a_{kn}^2. \quad (19)$$

Причем слагаемые последнего ряда можно переставлять в любом порядке.

Не нарушая общности, будем полагать в (15) число N натуральным. Действительно, если $\alpha < 1$ и

$$F_{N+\alpha}(y) = F_N(y) + \int_N^{N+\alpha} f(x)W(x,y)dx = F_N(y) + G_{N,\alpha}(y),$$

то применяя свойство 7в к функции, равной произведению $f(x)$ и характеристической функции интервала $[N, N + \alpha)$, получаем по равенству Парсеваля оценку

$$\|G_{N,\alpha}\|_{L_2[0,\infty)}^2 = \|f\|_{L_2[N,N+\alpha)}^2 \leq \|f\|_{L_2[N,N+1)}^2 = \sum_{n=0}^\infty a_{Nn}^2.$$

По теореме 2 функция $F_N(y)$ ступенчатая. Рассматривая ее по отдельным целочисленным участкам, получаем

$$F_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^\infty a_{kn} \Psi_{n,k}(y).$$

Квадрат нормы этой функции равен

$$\|F_N\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^2 < \infty.$$

Аналогично получаем

$$\|F_M - F_N\|_2^2 = \sum_{k=N}^{M-1} \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^2 = \int_N^M (f(x))^2 dx.$$

Из условия $f \in L_2[0, \infty)$ вытекает, что последовательность $\{F_N\}$ фундаментальна в пространстве $L_2[0, \infty)$. В силу полноты пространства $L_2[0, \infty)$

делается вывод о существовании предельного элемента $F \in L_2[0, \infty)$, в качестве которого можно взять функцию

$$G(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} \Psi_{n,k}(y).$$

Близость функций $G(y)$ и $F_N(y)$ проверяется по интервалам

$$\|G - F_N\|_{L_2[0, \infty)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} (G(y) - F_N(y))^2 dy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{kn}^2,$$

сравнивая последнее выражение с рядом (19) как повторным рядом с внешним суммированием по k .

Итак, установили, что в теореме 8 пп. А и В вытекают один из другого, а в теореме 6 верно (16). Отсюда также следует (17):

$$\|F\|_2 = \|G\|_2 = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn}^2 = \|f\|_2.$$

Далее из теоремы Планшереля получим пункт Б теоремы 8. На конечном интервале для функции из (15) формула Фубини дает

$$\int_0^y F_N(t) dt = \int_0^N (f(x) \int_0^y W(x, t) dt) dx = \int_0^N f(x) D(x; y) dx.$$

Применим неравенство Гельдера, считая одну из функций равной 1:

$$\int_0^y |F(t) - F_N(t)| dt \leq \|F - F_N\|_{L_2[0, y]} \cdot \sqrt{y}.$$

Согласно (16) при $N \rightarrow \infty$ данное выражение стремится к нулю. Поэтому

$$\int_0^y F(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^y F_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) D(x; y) dx.$$

Установили, что для всех y верно

$$\int_0^y F(t) dt = \int_0^{\infty} f(x) D(x; y) dx.$$

Следовательно, почти всюду

$$F(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} f(x) D(x; y) dx.$$

Пусть выполнен пункт Б теоремы 8. Заметим, что утверждение об абсолютной непрерывности функции $\Phi(y) = \int_0^\infty f(x)D(x; y) dx$ легко доказывается. Опирается это доказательство на следующую оценку, установленную с помощью неравенства Гельдера

$$\left| \int_0^\infty f(x)(D(x; y_1) - D(x; y)) dx \right| \leq \|f\|_2 \|D(\cdot; y_1) - D(\cdot; y)\|_2 = \|f\|_2 \sqrt{y_1 - y}.$$

Поэтому при условии, что суммарная длина интервалов по оси Oy не превосходит δ ($\sum_{k=1}^n |\Delta y_k| < \delta$) суммарное приращение не превосходит наперед заданное $\epsilon > 0$ ($\sum_{k=1}^n |\Delta \Phi_k| < \|f\|_2 \sqrt{\delta} = \epsilon$).

Значит функцию $\Phi(y)$ можно представить в виде интеграла от некоторой локально суммируемой функции $F(t)$:

$$\Phi(y) = \int_0^y F(t) dt.$$

Следовательно эту функцию $F(t)$ на каждом целочисленном интервале можно разложить в ряд по системе Уолша, при этом получим разложение ее по системе $\{\Psi_{n,k}(t)\}_{n,k=0}^\infty$:

$$F(t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty d_{kn} \Psi_{n,k}(t), \quad (20)$$

где индексы у коэффициентов Фурье специально взяли в обратном порядке. Методом математической индукции покажем, что коэффициенты d_{kn} совпадают с коэффициентами a_{kn} , вычисленными по формуле (12).

В равенство

$$\int_0^y F(t) dt = \int_0^\infty f(x)D(x; y) dx,$$

где функции $f(x)$ и $F(t)$ представлены формулами (18) и (20), подставляем поочередно различные y . Сначала подставляем все натуральные числа в качестве y . Так как

$$\int_0^{n+1} F(t) dt = d_{00} + d_{01} + \dots + d_{0n},$$

$$\int_0^\infty f(x)D(x; n+1) dx = \int_0^1 f(x)D_{n+1}(x) dx = a_{00} + a_{01} + \dots + a_{0n},$$

то равенство $d_{0n} = a_{0n}$ для всех n считаем доказанным.

На следующем шаге в качестве y подставляем числа $\frac{2n-1}{2}$ для последовательных натуральных n . Получаем, с одной стороны,

$$\int_n^{n+\frac{1}{2}} F(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} (d_{0n}\Psi_{n,0}(x) + d_{1n}\Psi_{n,1}(x)) dx = \frac{1}{2}(d_{0n} + d_{1n}),$$

и, с другой стороны, по формуле (7)

$$\int_0^\infty f(x)(D(x; n + \frac{1}{2}) - D(x; n)) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)w_n(x)dx = \frac{1}{2}(a_{0n} + a_{1n}).$$

Равенство $d_{1n} = a_{1n}$ для всех n считаем доказанным.

На следующем шаге в качестве y подставляем числа $\frac{2n-1}{4}$ для последовательных натуральных n . Получаем, с одной стороны,

$$\int_n^{n+\frac{1}{4}} F(t) dt = \frac{1}{4}(d_{0n} + d_{1n} + d_{2n} + d_{3n}),$$

$$\int_n^{n+\frac{3}{4}} F(t) dt = \frac{1}{4}(3d_{0n} + d_{1n} + d_{2n} - d_{3n}),$$

и, с другой стороны, по формуле (7)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)(D(x; n + \frac{1}{4}) - D(x; n)) dx &= \frac{1}{4} \int_0^4 f(x)w_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{4}(a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + a_{3n}), \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty f(x)(D(x; n + \frac{3}{4}) - D(x; n)) dx = \frac{1}{4}(3a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} - a_{3n}).$$

Равенства $d_{2n} = a_{2n}$ и $d_{3n} = a_{3n}$ для всех n считаем доказанными.

Если к этим уравнениям добавить ранее рассмотренные, то для каждого натурального n получали систему уравнений $D \cdot d = D \cdot a$ с матрицей дробных ядер Дирихле второго уровня

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с известным вектором $a = (a_{0n} \ a_{1n} \ a_{2n} \ a_{3n})^T$ и неизвестным вектором $d = (d_{0n} \ d_{1n} \ d_{2n} \ d_{3n})^T$.

Продолжаем этот процесс, на каждом следующем шаге в качестве y подставляя дроби с очередным нечетным числом в числителе и следующей степенью двойки в знаменателе. Добавляя к этим уравнениям ранее рассмотренные, получаем для каждого натурального n систему уравнений $D \cdot d = D \cdot a$ с матрицей дробных ядер Дирихле следующего уровня и с в два раза большими векторами a и d . Невырожденность матриц дробных ядер Дирихле обеспечивает единственность решения $d_{kn} = a_{kn}$ для всех k, n .

Более подробно индуктивный переход выглядит так. Для всех $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим систему ($k = 1, 2, \dots, 2^m$) равенств

$$\int_n^{n+\frac{k}{2^m}} F(t) dt = \int_0^\infty f(x) (D(x; n + \frac{k}{2^m}) - D(x; n)) dx.$$

Подставим (20) в выражение слева и по лемме 10.3 получим

$$\int_n^{n+\frac{k}{2^m}} \sum_{i=0}^{\infty} d_{in} w_i(\{x\}) dx = \sum_{i=0}^{2^m-1} d_{in} \int_0^{\frac{k}{2^m}} w_i(x) dx.$$

Лемму 7 в виде

$$D(x; n + \frac{k}{2^m}) - D(x; n) = \frac{1}{2^m} \left(D\left(\frac{x}{2^m}; 2^m n + k\right) - D\left(\frac{x}{2^m}; 2^m n\right) \right)$$

подставим в выражение справа, по следствию леммы 5 перейдем к ядрам Дирихле, применим следствие леммы Пэли (леммы 10.8) и лемму 10.11 чтобы получить

$$\int_0^{2^m} f(x) 2^{-m} w_{2^m n} \left(\frac{x}{2^m}\right) D_k \left(\frac{x}{2^m}\right) dx = \sum_{i=0}^{2^m-1} \left(\int_i^{i+1} f(x) w_n(x) dx \right) \frac{1}{2^m} D_k \left(\frac{i}{2^m}\right),$$

куда подставим (18).

Матрицей дробных ядер Дирихле D_m назовем матрицу с элементами $\int_0^{\frac{k}{2^m}} w_i(x) dx$ в k -й строке i -м столбце. По лемме 6 и следствию леммы 7 этот элемент имеет вид $D(i; \frac{k}{2^m}) = \frac{1}{2^m} D_k(\frac{i}{2^m})$.

Итак, составили бесконечную ($n \in \mathbb{N}_0$) систему матричных уравнений вида $D_m \cdot d = D_m \cdot a$, где $a = (a_{0n} a_{1n} \dots a_{2^m-1n})^T$, $d = (d_{0n} d_{1n} \dots d_{2^m-1n})^T$. Осталось проверить невырожденность D_m , что сделаем в гл. 18.

С учетом последнего замечания считаем теорему 8 доказанной. \square

Утверждение 7. Если $f, g \in L_2[0, \infty)$, то верно обобщенное равенство Планшереля

$$\int_0^\infty f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^\infty \mathfrak{F}[f](x) \cdot \mathfrak{F}[g](x) dx.$$

Теорема 9. Пространство $L_2[0, \infty)$ можно представить в виде прямой суммы двух ортогональных дополнений

$$L_2[0, \infty) = L_2^+[0, \infty) \oplus L_2^-[0, \infty)$$

инвариантных относительно оператора \mathfrak{F} преобразования Уолша, действующего из пространства $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$:

$\mathfrak{F}[f] = f$ для любой $f \in L_2^+[0, \infty)$ и $\mathfrak{F}[f] = -f$ для любой $f \in L_2^-[0, \infty)$.

Пространство $L_2^+[0, \infty)$ есть образ оператора $(I + \mathfrak{F})$, действующего из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$, а пространство $L_2^-[0, \infty)$ есть образ оператора $(I - \mathfrak{F}) : L_2[0, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty)$, где I — тождественный оператор.

Система функций $\{\Psi_{n,n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} + \Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$ является ортонормированным базисом в $L_2^+[0, \infty)$, а система $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} - \Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$ является ортонормированным базисом в $L_2^-[0, \infty)$.

Доказательство. Согласно лемме 11, используя разложение (18), имеем $\mathfrak{F}^2[f] = f$ для любой $f \in L_2[0, \infty)$. Тогда

$$(I + \mathfrak{F}) \circ \mathfrak{F}[f] = (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^2)[f] = (\mathfrak{F} + I)[f],$$

$$(I - \mathfrak{F}) \circ \mathfrak{F}[f] = (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}^2)[f] = -(I - \mathfrak{F})[f].$$

Для произвольной $f \in L_2$ представим $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = \frac{1}{2}(f + \mathfrak{F}[f])$, $f_2 = \frac{1}{2}(f - \mathfrak{F}[f])$. Тогда $\mathfrak{F}[f_1] = f_1$ и $\mathfrak{F}[f_2] = -f_2$, а

$$4 \cdot (f_1, f_2) = (f + \mathfrak{F}[f], f - \mathfrak{F}[f]) = f^2 - (\mathfrak{F}[f])^2 = 0.$$

Согласно равенству Парсеваля переход от безусловного ортонормированного базиса $\{\Psi_{n,k}\}_{k,n=0}^\infty$ пространства $L_2[0, \infty)$ к безусловному ортонормированному базису

$$\left\{ \Psi_{n,n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} + \Psi_{n,k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} - \Psi_{n,k}) \right\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$$

очевиден. Пространство $L_2^+[0, \infty)$ является замыканием линейной оболочки $\{\Psi_{n,n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} + \Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$, а пространство $L_2^-[0, \infty)$ является замыканием линейной оболочки $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} - \Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$. \square

Операторы $P_+ = \frac{1}{2}(I + \mathfrak{F})$, $P_- = \frac{1}{2}(I - \mathfrak{F})$ осуществляют ортогональное проектирование $L_2[0, \infty)$ на подпространства $L_2^+[0, \infty)$ и $L_2^-[0, \infty)$ соответственно. А именно, $P_+^2 = P_+$, $P_-^2 = P_-$, $P_+(P_-) = 0$,

$$\ker P_+ = \text{Im} P_- = L_2^-[0, \infty), \quad \ker P_- = \text{Im} P_+ = L_2^+[0, \infty).$$

В обозначениях (при $(k < n)$) $g_{kn}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} + \Psi_{n,k})$, $g_{nn}^+ = \Psi_{n,n}$, $g_{kn}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n} - \Psi_{n,k})$ — для функций базиса в $L_2[0, \infty)$ из собственных векторов, действия проекторов нагляднее:

$$P_+[g_{k,n}^+] = g_{kn}^+, \quad P_+[g_{k,n}^-] = 0,$$

$$P_+[\Psi_{k,n}] = P_+[\Psi_{n,k}] = \frac{1}{\sqrt{2}}g_{kn}^+, \quad P_+[\Psi_{n,n}] = \Psi_{n,n} = g_{nn}^+;$$

$$P_-[g_{k,n}^-] = g_{kn}^-, \quad P_-[g_{k,n}^+] = P_-[\Psi_{n,n}] = 0, \quad P_-[\Psi_{k,n}] = -P_-[\Psi_{n,k}] = \frac{1}{\sqrt{2}}g_{kn}^-.$$

15.7 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что преобразование Уолша $\mathfrak{F}[f](y)$ суммируемой функции $f(x)$, постоянной на целочисленных интервалах $[n, n+1)$, равно нулю при $y \geq 1$.

2. Докажите утверждения 4 и 5.

3. Для функции $f(x) = \frac{1}{n+1}$ при $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, покажите, что $f \notin L[0, \infty)$, $\mathfrak{F}[f](0)$ не существует, но для любого $y > 0$ существует $\mathfrak{F}[f](y)$ и $\mathfrak{F}[f] \in L[0, \infty)$.

4. Вычислите преобразование Уолша от характеристической функции интервала $[0, t)$.

5. Выразите преобразование Уолша от функции сжатой в четыре раза по формуле $\mathfrak{S}^2[f](x) = 2f(4x)$ через преобразование Уолша $\mathfrak{F}[f]$ от исходной функции.

6. Проведите непосредственное вычисление двоичных сверток $f * f$, $g * g$, $f * g$ для функций

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [0, 1/4), \\ 4, & \text{если } x \in [0, 1/4), \\ 0, & \text{если } x \in [1/4, \infty). \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [0, 1/4), \\ 1, & \text{если } x \in [1/4, 3/4), \\ -1, & \text{если } x \in [3/4, 1), \\ 0, & \text{если } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

7. Нарисуйте график функции $D(x; 5/4)$ и вычислите преобразование Уолша от нее.

8. Используя свойство 5, вычислите двоичную свертку $f * f$ для функции $f(x) = D(x; k)$, $k \in \mathbb{N}$. Вычислите двоичную свертку двух различных (заданных разными k) функций указанного вида. Можно ли k заменить на произвольное двоично-рациональное (на произвольное двоично-иррациональное)?

9. Выведите следующую формулу для обобщенного ядра Дирихле, где $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $l < 2^m$:

$$D(x; k + \frac{l}{2^m}) = \begin{cases} D_k(x) + \frac{l}{2^m} w_k(x), & \text{если } x \in [0, 1), \\ D(x; \frac{l}{2^m}), & \text{если } x \in [1, 2^m), \\ 0, & \text{если } x \in [2^m, \infty). \end{cases}$$

10. Вычислите преобразование Уолша от функций

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 1, & \text{если } x \in [1/2, 2), \\ 0, & \text{если } x \in [2, \infty). \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{если } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

11. Докажите, что двоичная свертка $f * D(\cdot; \xi)$ равна $\int_0^\xi f(x + t) dx$, то есть интегралу от сдвига функции.

Глава 16

Мультипликативное преобразование Фурье

16.1 Построение мультипликативного преобразования Фурье

Мультипликативное преобразование Фурье является континуальным аналогом ряда Фурье по системе Виленкина (см. 13.4). Основными частными случаями системы Виленкина служат система Уолша и система Крестенсона–Леви, соответственно основными частными случаями мультипликативного преобразования Фурье являются преобразование Уолша (см. главу 15) и преобразование Крестенсона–Леви. Выделение преобразования Крестенсона–Леви как отдельного класса не актуально и представляет интерес лишь при изучении дискретных преобразований.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ – последовательность целых положительных чисел, $p_n \geq 2$. Пусть $m_0 = 1$ и $m_n = p_n m_{n-1}$. Тогда любое действительное $x \geq 0$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} m_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad (1)$$

где

$$x_{-k} \equiv \left[\frac{x}{m_{k-1}} \right] \pmod{p_k}, \quad x_k \equiv [x m_k] \pmod{p_k}, \quad 0 \leq x_{-k}, x_k \leq p_k - 1,$$

$[a]$ – есть целая часть числа a , и первая сумма в (1) содержит конечное

число слагаемых. Записывая аналогично

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_{-k} m_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{m_k},$$

введем групповую операцию $\dot{+}$ как операцию покоординатного сложения по соответствующему модулю

$$x \dot{+} y = \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} m_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{m_k}, \quad z_k \equiv x_k + y_k \pmod{p_k}, \quad z_{-k} \equiv x_{-k} + y_{-k} \pmod{p_k},$$

и аналогично обратную операцию $\dot{-}$ покоординатного вычитания. *Обобщенные мультипликативные функции* $\chi(x, y)$ определим с помощью равенства

$$\chi(x, y) = \exp \left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k} y_k + x_k y_{-k}}{p_k} \right). \quad (2)$$

Определение 1. *Мультипликативным преобразованием Фурье функции* $f \in L[0, \infty)$ называется функция

$$F(y) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot \overline{\chi(x, y)} dx.$$

Замечание. Для полного соответствия системе Виленкина в определении нужно было потребовать простоту образующих чисел p_n и рассматривать аргументы не на полуоси, а на модифицированной полуоси. Точки $x > 0$, допускающие два различных (конечное и бесконечное) разложения типа (1), назовем p_k -рациональными. Очевидно, что множество таких точек счетно. Остальные точки $x > 0$ назовем p_k -иррациональными. Модифицированная полуось получается в результате добавления к полуоси $[0, \infty)$ счетного числа точек, в результате чего каждая p_k -рациональная точка x заменяется на две точки $x - 0$ (бесконечное разложение точки x) и $x + 0$ (конечное разложение точки x). Тогда мультипликативное преобразование Фурье рассматривается как преобразование Фурье на периодической нуль-мерной локально-компактной абелевой группе (определения см. в [2]). Предложенный здесь подход расширяет возможности построения дискретных аналогов, но не позволяет более полно использовать групповые свойства.

В [8, с. 33–36] приводится более общее, чем (2), определение обобщенных мультипликативных функций, предполагающее существование двух (возможно различных) последовательностей $P_1 = \{p_n\}$ и $P_2 = \{p_n^*\}$ образующих чисел, каждая из которых определяет свою групповую операцию $\dot{+}$ и соответствующую ей периодическую мультипликативную систему функций $\{\chi_n^{(i)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ($i = 1, 2$), и позволяющее определить ядро мультипликативного преобразования как *скрещенное произведение* данных систем

$$\chi(x, y) = \chi_{[x]}^{(2)}(y) \cdot \chi_{[y]}^{(1)}(x).$$

Возможны и дальнейшие обобщения понятия мультипликативного преобразования Фурье, например с ядром в виде скрещенного произведения регулярных линейных перестановок. Обобщение в другом направлении приводит к λ -мультипликативным преобразованиям Фурье.

Будем использовать для k -го интервала n -го (и $(-n)$ -го) ранга обозначение $\Delta_n^k = [\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n})$ (и $\Delta_{-n}^k = [k \cdot m_n, (k+1) \cdot m_n)$), где $n, k \in \mathbb{N}_0$. Если положим $m_{-n} = m_n^{-1}$, то формула в скобках совпадает с традиционным определением. Интервал n -го ранга ($n \in \mathbb{Z}$), содержащий точку x , будем обозначать $\Delta_n(x)$.

Большинство приводимых ниже утверждений доказываются аналогично доказательствам, приведенным в предыдущей главе.

Лемма 1 (свойства ядра). Ядро $\chi(x, y)$ является:

- 1) симметричным $\chi(x, y) = \chi(y, x)$,
- 2) мультипликативным $\chi(x \dot{+} y, z) = \chi(x, z) \cdot \chi(y, z)$,
- 3) обратимым (комплексно сопряженное совпадает с обратным)

$$\overline{\chi(x, y)} = (\chi(x, y))^{-1}, \quad \chi(x \dot{-} y, z) = \chi(x, z) \cdot \overline{\chi(y, z)},$$

4) совпадающим (в случае целого неотрицательного аргумента, то есть $x = n \in \mathbb{N}_0$) с функцией Виленкина

$$\chi(n, y) = v_n(\{y\}),$$

5) представимым в виде скрещенного произведения функций Виленкина на себя

$$\chi(x, y) = v_{[x]}(\{y\}) \cdot v_{[y]}(\{x\}),$$

6) локально-нейтральным, означающим то, что при $x \in \Delta_{-n}^0$, $h \in \Delta_n^0$, $n \in \mathbb{N}$ имеем $\chi(x, h) = 1$.

Определение w -непрерывной функции (см. 15.3) уточним для нашего случая.

Определение 2. Функцию $f(x)$ назовем g -непрерывной в точке x_0 (что обозначим $f \in C_g(x_0)$), если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что для всех $x \in \Delta_n(x_0)$ выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Функцию $f(x)$ назовем *равномерно g -непрерывной* на некотором множестве E , если для любого заданного $\epsilon > 0$ можно указать такое $n \in \mathbb{N}$, что для всех $x, y \in E$ таких, что $x - y \in \Delta_n^0$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

В данной главе символом $L_\infty[0, \infty)$ будем обозначать линейное нормированное пространство ограниченных g -непрерывных функций, убывающих на бесконечности к нулю, норма которых вычисляется как максимум модуля функции.

В определении 1 построен оператор \mathcal{F} (то есть $F = \mathcal{F}[f]$), действующий из пространства $L[0, \infty)$ в пространство $L_\infty[0, \infty)$, что уточняет следующая

Теорема 1. Если $f \in L[0, \infty)$, то мультипликативное преобразование Фурье $\mathcal{F}[f]$ является:

- а) равномерно g -непрерывной на $[0, \infty)$ функцией с ограничением на норму $\|\mathcal{F}[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$,
- б) удовлетворяющей условию $\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f](y) = 0$,
- в) локально суммируемой.

Если функция $F(y) = \mathcal{F}[f](y)$ окажется суммируемой, то исходная функция восстанавливается по формуле *обратного мультипликативного преобразования Фурье*

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \int_0^\infty F(y) \cdot \chi(x, y) dy. \quad (3)$$

Введем классы ступенчатых Λ_n и финитных Υ_n функций. Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ полагаем: $f \in \Lambda_n$, если функция $f(x)$ постоянна на каждом $(k \in \mathbb{N}_0)$ интервале Δ_n^k ранга n ; полагаем $f \in \Upsilon_n$, если $f(x) = 0$ при $x \in [m_n, \infty)$.

Теорема 2. Пусть $f \in L[0, \infty)$. Если $f \in \Lambda_n$, то $\mathcal{F}[f] \in \Upsilon_n$.

Если $f \in \Upsilon_n$, то $\mathcal{F}[f] \in \Lambda_n$.

Следствие. Если $f \in L[0, \infty) \cap \Lambda_n$, то: $\mathcal{F}[f] \in L[0, \infty) \cap \Upsilon_n$ и $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \equiv f(x)$.

Лемма 2. Если $f \in L[0, 1] \cap \Upsilon_0$, то $F[f](y) = c_k[f]$ при $y \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

То есть мультипликативное преобразование Фурье функции с носителем на $[0, 1)$ принимает на каждом целочисленном участке постоянное значение, равное коэффициенту Фурье по системе Виленкина с индексом, равным номеру участка.

Обозначим $D(x; \xi) = \int_0^\xi \chi(x, u) du$ – ядро Дирихле обобщенных мультипликативных функций $\chi(x, y)$, которое будем также называть обобщенным ядром Дирихле.

Лемма 3. Обобщенное ядро Дирихле связано с ядром Дирихле системы Виленкина соотношением

$$D(x; t) = \begin{cases} D_{[t]}(x) + \{t\} \cdot \chi_{[t]}(x), & \text{если } x \in [0, 1), \\ \chi_{[t]}(\{x\}) \cdot \int_0^{\{t\}} \chi_{[x]}(z) dz, & \text{если } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

В случае целочисленного аргумента t обобщенное ядро Дирихле совпадает с ядром Дирихле системы Виленкина.

Лемма 4 (обобщение леммы Пэли). Для всех $n \in \mathbb{Z}$ ($m_{-n} = m_n^{-1}$)

$$D(x; m_n) = \begin{cases} m_n, & \text{если } x \in [0, m_{-n}), \\ 0, & \text{если } x \in [m_{-n}, \infty). \end{cases}$$

Следствие. Система функций $\left\{ \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right) \right\}_{k=0}^\infty$ ортонормированна на промежутке $[0, m_r)$ и равномерно ограничена константой $M = \frac{1}{\sqrt{m_r}}$.

Доказательство. Скалярный квадрат функции на промежутке $[0, m_r)$

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{m_r} \int_0^{m_r} \chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right) \overline{\chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right)} dx = \frac{1}{m_r} \int_0^{m_r} dx = 1.$$

Если $k \neq l$, то обозначим $t = \frac{j}{m_r} = \frac{k}{m_r} \dot{-} \frac{l}{m_r}$. Тогда $t > m_{-r}$. Вычислим скалярное произведение различных функций

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{1}{m_r} \int_0^{m_r} \chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right) \overline{\chi\left(x, \frac{l}{m_r}\right)} dx = \frac{1}{m_r} D(t; m_r) = 0$$

по лемме 4. Равномерная ограниченность числом M очевидна. \square

Точная мажоранта обобщенного ядра Дирихле для случая простых образующих чисел при $x \in [0, 1)$ совпадает с мажорантой ядра Дирихле системы Виленкина (лемма 13.8) и по аналогии с системой и преобразованием Уолша переносится на $x \in [1, \infty)$.

Лемма 5. Для любого фиксированного $\xi > 0$ имеем $D(x; \xi) \in L_p[0, \infty)$, где $1 < p < \infty$.

Если фиксированное ξ есть r_k -иррациональное число, то функция $D(\cdot, \xi)$ не суммируема.

16.2 Различные виды оператора мультипликативного преобразования Фурье

Определение 1 мультипликативного преобразования Фурье сформулировано для суммируемых функций. Для $f \in L_p[0, \infty)$ предлагается другое определение. В этой главе $\|f\|_p = \|f\|_{L_p[0, \infty)}$, здесь и далее $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Теорема 3. Если $f \in L_p[0, \infty)$, $1 < p \leq 2$, то:

1) существует

$$F(u) = \lim_{a \rightarrow \infty} (p') \int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy, \quad (4)$$

2) выполнено неравенство Хаусдорфа–Юнга $\|F\|_{p'} \leq \|f\|_p$,

3) почти для всех x справедливы равенства

$$F(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(y) \overline{D(y; x)} dy, \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty F(y) D(y; x) dy. \quad (6)$$

Если $f \in L[0, \infty) \cap L_p[0, \infty)$, $1 < p \leq 2$, то функции F из определения 1 и формулы (4) почти всюду совпадают.

В формуле (4), которую считаем определением L_p -преобразования (мультипликативного преобразования Фурье из пространства $L_p[0, \infty)$ в сопряженное пространство), $\lim(p')$ обозначает сходимость в метрике

пространства $L_p[0, \infty)$. Формулу (4) назовем *вторым видом оператора мультипликативного преобразования Фурье*, а формулу (5) – *третьим видом оператора*.

Теорема 3 справедлива и для оператора \mathcal{F}^{-1} , формально задаваемого в виде $\mathcal{F}^{-1}[f](u) = \int_0^{\infty} f(x)\chi(x, u) dx$.

Теорема 4. Если $f, G \in L_p[0, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, F получена по формуле (4), а g как обратное мультипликативное преобразование Фурье функции G получена по формуле вида (4) без знака комплексного сопряжения, то имеет место обобщенное равенство Планшереля

$$\int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_0^{\infty} F(x)\overline{G(x)} dx.$$

Сокращенная запись равенства Планшереля через скалярное произведение на полуоси

$$(f, g) = (F, G).$$

Доказательство теоремы 3. Если $f \in L_p[0, \infty)$, то $f(x)$ локально суммируема и существует мультипликативное преобразование Фурье от ее срезки, которое обозначим $F(x, a) = \int_0^a f(y)\overline{\chi(x, y)} dy$.

Пусть $\left\{ \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \overline{\chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированная на $[0, m_r)$ и равномерно ограниченная константой M (по следствию леммы 4) система функций. Пусть $b > 0$, $n = [m_r b]$ и можно считать $n = n(r)$.

Определим числа $a_k = \int_{\Delta_r^k} f(x) dx$ и функцию

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{\chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right)} \text{ при } x \in [0, m_r), \quad \Phi_n(x) = 0 \text{ при } x \geq m_r.$$

Для последовательности $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots)$ и функции $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) = M\Phi_n(x)$ согласно теореме Ф. Рисса (теорема 13.6) выполнено неравенство

$$M\|\Phi_n\|_{p'} = \|\Phi\|_{p'} \leq M^{\frac{2}{p}-1}\|a\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Так как $p' = \frac{p}{p-1}$, то, возведя в степень p' , получим

$$\int_0^{m_r} |\Phi_n(x)|^{p'} dx \leq m_r \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

По неравенству Гельдера имеем

$$|a_k|^p = \left| \int_{\Delta_r^k} f(x) dx \right|^p \leq \int_{\Delta_r^k} |f(x)|^p dx \cdot \left(\int_{\Delta_r^k} dx \right)^{\frac{p}{p'}} = \frac{1}{m_r^{p-1}} \int_{\Delta_r^k} |f(x)|^p dx,$$

что подставим в предыдущее неравенство

$$\int_0^{m_r} |\Phi_n(x)|^{p'} dx \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Delta_r^k} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(\int_0^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

При $A \leq m_r$ установили, что

$$\int_0^A |\Phi_n(x)|^{p'} dx \leq \left(\int_0^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (7)$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \int_0^b f(y) \overline{\chi(x, y)} dy = F(x, b).$$

По п. 6 леммы 1 при $x < m_r$ для всех $y \in \Delta_r^k$ имеем $\overline{\chi(x, y)} = \overline{\chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right)}$.

Поэтому $|\Phi_n(x) - F(x, b)| =$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Delta_r^k} f(y) \left(\overline{\chi\left(x, \frac{k}{m_r}\right)} - \overline{\chi(x, y)} \right) dy - \int_{n/m_r}^b f(y) \overline{\chi(x, y)} dy \right|,$$

$$|\Phi_n(x) - F(x, b)| \leq \int_{\Delta_r^n} |f(y)| dy \longrightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

В (7) при фиксированном A перейдем к пределу при $r \rightarrow \infty$

$$\int_0^A |F(x, b)|^{p'} dx \leq \left(\int_0^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

потом к пределу при $A \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \left| \int_0^b f(y) \overline{\chi(x, y)} dy \right|^{p'} dx \leq \left(\int_0^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (8)$$

В (8) вместо функции $f(y)$ подставим функцию, совпадающую с ней на (a, b) и равную нулю вне (a, b)

$$\int_0^\infty |F(x, b) - F(x, a)|^{p'} dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Так как $f \in L_p[0, \infty)$, то при $a, b \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю. Установили сходимость (фундаментальность) $F(x, a)$ в $L_{p'}[0, \infty)$. Так как пространство $L_{p'}[0, \infty)$ полно, то существует $F \in L_{p'}[0, \infty)$ предельный элемент для $F(x, a)$. Перейдем в (8) к пределу по $b \rightarrow \infty$, получим аналог неравенства Хаусдорфа–Юнга

$$\left(\int_0^\infty |F(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Перейдем ко второй части теоремы.

Согласно неравенству Гельдера при $a \rightarrow \infty$

$$\left| \int_0^\xi (F(x) - F(x, a)) dx \right| \leq \left(\int_0^\xi |F(x) - F(x, a)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_0^\xi dx \right)^{1/p} \rightarrow 0$$

и возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\int_0^\xi F(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\xi F(x, a) dx.$$

Поменяв порядок интегрирования для определенных интегралов

$$\int_0^\xi F(x, a) dx = \int_0^\xi \int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy dx = \int_0^a f(y) \overline{D(y; \xi)} dy,$$

получим

$$\int_0^\xi F(x) dx = \int_0^\infty f(y) \overline{D(y; \xi)} dy,$$

что равносильно (5).

Формулу (6) можно доказать явно, расписав функции $F(u, b)$ через коэффициенты Фурье исходной функции $f(x)$ по целочисленным интервалам. Более короткое доказательство получается ссылкой на теорему 4 и лемму 5, где обобщенное равенство Планшереля применяем для $f(x)$ и характеристической функции интервала $(0, \xi)$:

$$\int_0^\xi f(x) dx = \int_0^\infty F(x) D(x; \xi) dx. \quad \square$$

Доказательство теоремы 4. Для случая $p = 1$ в выражении

$$\int_0^\infty F(x) \overline{G(x)} dx = \int_0^\infty \overline{G(x)} \int_0^\infty f(y) \overline{\chi(x, y)} dy dx$$

по теореме Фубини можно поменять пределы интегрирования

$$\int_0^\infty f(y) \int_0^\infty \overline{G(x) \chi(x, y)} dx dy = \int_0^\infty f(y) \overline{g(y)} dy.$$

Используя обозначения $F(x, a) = \int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$ и $g(u, b) = \int_0^b G(x) \chi(x, u) dx$, поменяем пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^b F(x, a) \overline{G(x)} dx = \int_0^a f(u) \overline{g(u, b)} du. \quad (9)$$

По неравенству Гельдера из сходимости в L_p вытекает слабая сходимость, то есть для любой $\varphi \in L_p$ имеет место числовая сходимость (как на $[0, b)$, так и на $[0, \infty)$)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int (F(x, a) - F(x)) \varphi(x) dx = 0.$$

Устремим в (9) сначала $a \rightarrow \infty$

$$\int_0^b F(x) \overline{G(x)} dx = \int_0^\infty f(u) \overline{g(u, b)} du,$$

а потом $b \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty F(x) \overline{G(x)} dx = \int_0^\infty f(u) \overline{g(u)} du. \quad \square$$

Возобновим построение других видов оператора мультипликативного преобразования Фурье. Утверждение о базисе в L_p (теорема 13.5) распространим с отрезка на полуось.

Определим систему функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ равенством

$$\psi_{k,n}(x) = \lambda_k(x)\chi_n(x), \text{ где } \lambda_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [k, k+1), \\ 0, & \text{если } x \in [0, k) \cup [k+1, \infty). \end{cases}$$

Утверждение 1. Система функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ ортонормирована на $[0, \infty)$.

Коэффициенты Фурье по этой системе определяются равенством

$$a_{kn} = \int_0^{\infty} f(x)\overline{\psi_{k,n}(x)}dx. \quad (10)$$

Утверждение 2. Если $f \in L_2[0, \infty)$, то справедливо равенство Планшереля (доказанное в более общем случае в теореме 4)

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k,n=0}^{\infty} |a_{kn}|^2 = \int_0^{\infty} |\mathcal{F}[f](u)|^2 du.$$

Следствие. Система функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ является безусловным ортонормированным базисом пространства $L_2[0, \infty)$.

Для функций из $L_p[0, \infty)$ из теоремы 13.5 следует существование и единственность представления в виде повторного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}\psi_{k,n}(x), \quad (11)$$

где равенство и сходимость каждого ряда понимается как сходимость в метрике пространства $L_p[0, \infty)$. Однако подобное определение системы функций с двумя индексами как базиса банахова пространства было бы не корректно.

Назовем правильным методом суммирования двойного ряда $\sum_{k,n=0}^{\infty} c_{kn}$ любой такой метод последовательного построения частных сумм, при котором не нарушается порядок следования элементов по столбцам и по строкам и каждый элемент c_{kn} достигим за конечное число шагов. Первое требование означает, что частная сумма S_m равна $S_{m-1} + c_{k_0 n_0}$, где

k_0 и n_0 любые, удовлетворяющие условию: все c_{kn} с номерами $k \leq k_0$ и $n \leq n_0$ содержатся в сумме S_m . К числу правильных методов суммирования двойных рядов относятся методы суммирования по треугольникам и по прямоугольникам.

Определение 3. Систему функций с двумя индексами $\{f_{k,n}\}_{k,n=0}^{\infty}$ назовем базисом банахова пространства X , если любая функция $f \in X$ представима единственным образом в виде следующего двойного ряда $f = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} f_{k,n}$, сходящегося в метрике пространства X как каждый из повторных рядов и любым правильным методом суммирования двойного ряда.

Теорема 5. Система функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $L_p[0, \infty)$ при всех $1 < p < \infty$.

Доказательство. Требуется установить два равенства

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x), \quad (12)$$

$$f(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x), \quad (13)$$

где ряды сходятся в метрике пространства $L_p[0, \infty)$ и двойной ряд (13) суммируется любым правильным методом. Существование разложений (11)–(13) вытекает из формулы (10), а единственность каждого из разложений (11)–(13) есть следствие утверждения о единственности для рядов по системе Виленкина $\{\chi_n(x)\}$.

Введем обозначения

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \lambda_k(x) \right) \chi_n(x)$$

и

$$f(x, N) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(x).$$

Так как

$$|a_{kn}| \leq \int_k^{k+1} |f(x)| dx \leq \left(\int_k^{k+1} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

то

$$\|h_n\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{kn}|^p \leq \|f\|_p^p < \infty.$$

Следовательно, для любого N имеем $f(*, N) \in L_p[0, \infty)$. Из теоремы 13.5 вытекает, что при всех N, K имеем

$$\|f(*, N)\|_{L_p[K, \infty)} \leq B_p \|f\|_{L_p[K, \infty)}.$$

Поэтому

$$\|f(*, N) - f(*)\|_{L_p[K, \infty)} \leq (B_p + 1) \|f\|_{L_p[K, \infty)}.$$

Для любого фиксированного $\epsilon > 0$ существует $K = K(\epsilon)$, что

$$\|f\|_{L_p[K, \infty)} \leq \frac{\epsilon}{2(B_p + 1)}.$$

Для данных ϵ и K найдется $N = N(\epsilon, K)$, что при всех $k = 0, 1, \dots, K-1$ и $n \geq N$ имеем

$$\|f(*, n) - f(*)\|_{L_p[k, k+1]} \leq \frac{\epsilon}{2K}.$$

Следовательно,

$$\|f(*, n) - f(*)\|_p \leq \|f(*, n) - f\|_{L_p[0, K]} + \|f(*, n) - f\|_{L_p[K, \infty)} \leq \epsilon.$$

Равенство(12) доказано.

Рассмотрим один из правильных методов суммирования двойного ряда – метод суммирования по квадратам. Введем следующую нумерацию пар чисел (k, n) , изменяющихся от 0 до ∞ : если $k < n$, то положим $l = l(k, n) = n^2 + k$; если $k \geq n$, то $l = l(k, n) = k^2 + k + n$. Очевидно, что данное соответствие взаимно-однозначное. Пусть $\psi_l(x) = \psi_{k, n}(x)$ и $a_l = a_{kn}$, где $l = l(k, n)$. Рассмотрим ряд $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \psi_l(x)$. Для произвольного фиксированного $\epsilon > 0$, как и ранее, находим $K = K(\epsilon)$ и $N = N(\epsilon, K)$. Пусть $M = \max\{K^2, N^2\}$. Тогда при всех $m \geq M$ выполнено

$$\left\| f - \sum_{l=0}^m a_l \psi_l \right\|_{L_p[0, K]} + \left\| f - \sum_{l=0}^m a_l \psi_l \right\|_{L_p[K, \infty)} \leq k \frac{\epsilon}{2K} + (B_p + 1) \frac{\epsilon}{2(B_p + 1)} = \epsilon.$$

Для произвольного правильного метода суммирования, который определяется некоторым взаимно-однозначным соответствием $(k, n) \rightarrow l(k, n)$, выбираем $M = l(K, N)$. \square

Следствие . Оператор мультипликативного преобразования Фурье осуществляет перестановку ортонормированного базиса $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ по формуле $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \overline{\psi_{n,k}}$, не нарушая свойства базисности системы в пространствах $L_p[0, \infty)$.

Доказательство. Аналогично устанавливается, что система функций $\{\overline{\psi_{k,n}(u)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ будет ортонормированным базисом пространства $L_p[0, \infty)$ при любом $1 < p < \infty$.

Вычислим

$$\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \int_0^{\infty} \psi_{k,n}(x) \overline{\chi(x,y)} dx = \int_k^{k+1} \chi_n(x) \overline{\chi_{[y]}(x)} \overline{\chi_{[x]}(y)} dx = \overline{\psi_{n,k}(y)}.$$

Для функций Виленкина имеет место равенство $\chi_{\tilde{n}}(y) = \overline{\chi_n(y)}$, где $\tilde{n} \oplus n = 0$. Взаимно-однозначное отображение $n \rightarrow \tilde{n}$ есть перестановка натурального ряда. \square

Используя разложение произвольной функции $f \in L_p[0, \infty)$ по базису в виде (11)–(13), можно ввести *четвертый способ определения оператора мультипликативного преобразования Фурье* из $L_p[0, \infty)$ в $L_q[0, \infty)$. А именно, данный оператор преобразует функцию $f \in L_p[0, \infty)$ вида $f(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x)$, где a_{kn} вычислены по формуле (10), в функцию $F \in L_q[0, \infty)$, для которой двойной ряд $\sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \overline{\psi_{n,k}(u)}$ есть разложение по базису $\{\overline{\psi_{n,k}(u)}\}_{n,k=0}^{\infty}$.

Замечание. Если в теореме 3 доказывалась принадлежность $f \in L_{p'}$, то здесь предполагается $F \in L_q[0, \infty)$.

Теорема 6. Операторы мультипликативного преобразования Фурье второго, третьего и четвертого вида как операторы, действующие из пространства $L_p[0, \infty)$ в пространство $L_q[0, \infty)$, где $1 < p, q < \infty$, эквивалентны.

Доказательство. Установим эквивалентность третьего и четвертого вида. Лемму 3 можно переформулировать в виде

$$D(x, \xi) = \sum_{n=0}^{[\xi]-1} \psi_{0,n}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\{\xi\}} \chi_k(y) dy \right) \psi_{k, [\xi]}(x).$$

Имея разложения (11)–(13) для $f(x)$, применяя ортонормированность

функций $\psi_{k,n}(x)$, имеем

$$\int_0^{\infty} f(x) \overline{D(x, \xi)} dx = \sum_{n=0}^{[\xi]-1} a_{0n} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\{\xi\}} \chi_k(y) dy \right) a_{k[\xi]}.$$

Аналогичное разложение для $F \in L_q(0, \infty)$ с теми же коэффициентами $F(u) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \overline{\psi_{n,k}(u)}$ после интегрирования дает тот же результат

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} F(u) du &= \sum_{n=0}^{[\xi]-1} \int_n^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \overline{\psi_{n,k}(u)} du + \int_{[\xi]}^{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k[\xi]} \overline{\psi_{[\xi],k}(u)} du = \\ &= \sum_{n=0}^{[\xi]-1} a_{0n} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\{\xi\}} \overline{\chi_k(y)} dy \right) a_{k[\xi]}. \end{aligned}$$

Другие этапы доказательства наметим схематично.

В обратную сторону, предположив существование для $f(x)$ и $F(x)$ различных разложений по базисам $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{\psi_{k,n}(u)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ соответственно и выполнение формулы (5), методом математической индукции устанавливается, что коэффициенты указанных разложений обязаны быть симметричны $a_{kn} = d_{nk}$.

Предположив существование оператора четвертого вида (то есть существование симметричных сходящихся разложений вида (11)–(13)) для срезки исходной функции, ссылкой на теорему 13.5 доказывается сходимость в L_q .

Переход от формулы (4) к формуле (5) доказывается так же, как в теореме 3. \square

Пятым видом оператора мультипликативного преобразования Фурье является его представление как оператора кручения. Для преобразования Уолша как частного случая оператора мультипликативного преобразования Фурье этот вид рассмотрен в теореме 15.9.

Теперь рассмотрим случай мультипликативного преобразования Фурье, для которого все образующие числа нечетные. К этому случаю относятся, в частности, преобразования Крестенсона–Леви с образующими числами $p_n \equiv p$, где $p \neq 2$ – простое. В этом случае каждая пачка

чисел от m_{r-1} до $m_r - 1$ включительно делится на две равных полупачки: левая – от m_{r-1} до $M_{r-1} - 1$, правая – от M_{r-1} до $m_r - 1$, где $M_{r-1} = m_{r-1} \cdot (\frac{p_r+1}{2})$. В общем случае четных и нечетных образующих чисел происходит компиляция этих двух случаев и усложняются обозначения. Принципиальных различий не возникает.

Обозначим \tilde{k} унарную операцию вычисления обратного элемента относительно операции $\dot{+}$: $k \dot{+} \tilde{k} = 0$. Очевидно, что $\tilde{\tilde{k}} = k$. Необходимость рассмотрения двух случаев возникла именно из-за отличия данной операции при четных и нечетных образующих числах.

Утверждение 3. Если $k \neq 0$, то $k \neq \tilde{k}$. При этом числа k, \tilde{k} находятся в разных половинах (левой и правой) одной и той же пачки.

В данных обозначениях формула $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \overline{\psi_{n,k}}$ из следствия теоремы 5 примет вид $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \psi_{n,\tilde{k}}$.

Следовательно, оператор \mathcal{F} мультипликативного преобразования Фурье есть оператор кручения: $\mathcal{F}^4 = I$ – тождественный оператор. А именно, $\mathcal{F} : \psi_{k,n} \rightarrow \psi_{n,\tilde{k}} \rightarrow \psi_{\tilde{k},\tilde{n}} \rightarrow \psi_{\tilde{n},k} \rightarrow \psi_{k,n}$.

Утверждение 4. Орбита $\omega(k, n)$ любого нетривиального (то есть $k^2 + n^2 \neq 0$) элемента $\psi_{k,n}(x)$ стандартного базиса относительно оператора \mathcal{F} состоит ровно из четырех различных функций :

$$\omega(k, n) = \{\psi_{k,n}(x); \psi_{n,\tilde{k}}(x); \psi_{\tilde{k},\tilde{n}}(x); \psi_{\tilde{n},k}(x)\}.$$

Принадлежность к одной орбите для функций стандартного базиса есть отношение эквивалентности, которое позволяет разбить все функции базиса на классы эквивалентности $\omega(k, n)$.

Обозначим

$$\omega_{k,n} = \{(k, n); (n, \tilde{k}); (\tilde{k}, \tilde{n}); (\tilde{n}, k)\}$$

— соответствующие классы эквивалентности на множестве пар целых неотрицательных чисел. Тривиальный класс $\omega_{0,0} = \{(0, 0)\}$. Остальные классы эквивалентности перенумеруем одной из этих пар по следующему правилу.

Класс $\omega_{k,n}$ считаем записанным в канонической форме, если:

- 1) $k < m_{r-1} \leq n < \tilde{n}$ (для случая индексов из разных пачек),
- 2) $k < \tilde{k}$ и $n < \tilde{n}$ (для случая индексов из одной пачки, то есть $m_{r-1} \leq k, \tilde{k}, n, \tilde{n} < m_r$).

При этом пару (k, n) назовем канонической. Множество всех канонических пар (включая тривиальную) обозначим Γ .

Тогда

$$\bigcup_{k=0}^{M_{r-1}-1} \bigcup_{n=m_{r-1}}^{M_{r-1}-1} \omega(k, n) = \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{m_{r-1}-1} \setminus \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{m_{r-1}-1},$$

где $M_{r-1} = m_{r-1} \cdot \left(\frac{p_r+1}{2}\right)$. Следовательно,

$$\bigcup_{(k,n) \in \Gamma} \omega(k, n) = \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}.$$

Повторим, что следующая теорема верна в случае нечетных образующих функций и по аналогии легко (но более громоздко) формулируется в общем случае.

Теорема 7. *Пространство $L_2[0, \infty)$ можно представить в виде прямой суммы четырех взаимно ортогональных пространств функций*

$$L_2[0, \infty) = L_0^2 \oplus L_1^2 \oplus L_2^2 \oplus L_3^2$$

инвариантных относительно оператора \mathcal{F} как преобразования из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$: $\mathcal{F}[f] = (-i)^l f$ для любой $f \in L_l^2$, $l = 0, 1, 2, 3$.

Операторы $\mathcal{A}_l = \frac{1}{4}(I + i^l \mathcal{F} + (i^l \mathcal{F})^2 + (i^l \mathcal{F})^3)$ являются проекторами (идемпотентными эрмитовыми операторами) из пространства $L_2[0, \infty)$ на пространства L_l^2 соответственно.

Ортонормированным базисом пространства L_l^2 служит система функций $\{g_{k,n}^{(l)}\}$, где $l = 0, 1, 2, 3$, пары (k, n) пробегают множество канонических значений Γ с одним исключением, тривиальной паре $(0, 0)$ соответствует одна функция $g_{0,0}^{(0)} = \psi_{0,0}$, для остальных $g_{k,n}^{(l)} = 2\mathcal{A}_l[\psi_{k,n}]$.

Доказательство. Так как оператор \mathcal{F} из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$, то и операторы \mathcal{A}_l из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$. Обозначим $L_l^2 = \text{Im } \mathcal{A}_l$. Заметим, что $I = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.

Равенство Планшереля $(f, g) = (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g])$ влечет $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$, откуда согласно равенству $\mathcal{F}^4 = I$ получаем $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^3$, $(\mathcal{F}^3)^* = \mathcal{F}$, $(\mathcal{F}^2)^* = \mathcal{F}^2$.

Следовательно операторы \mathcal{A}_l эрмитовы:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l^* &= \frac{1}{4}(I^* + (i^l \mathcal{F})^* + ((i^l \mathcal{F})^2)^* + ((i^l \mathcal{F})^3)^*) = \\ &= \frac{1}{4}(I + (-i)^l (\mathcal{F})^3 + ((-i)^l \mathcal{F})^2 + (-i)^{3l} \mathcal{F}) = \mathcal{A}_l. \end{aligned}$$

Рассмотрим композицию операторов \mathcal{A}_l и \mathcal{A}_j :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l \mathcal{A}_j &= \frac{1}{16} (I + i^l \mathcal{F} + i^{2l} \mathcal{F}^2 + i^{3l} \mathcal{F}^3 + \\ &\quad + i^j \mathcal{F} + i^{l+j} \mathcal{F}^2 + i^{2l+j} \mathcal{F}^3 + i^{3l+j} \mathcal{F}^4 + \\ &\quad + i^{2j} \mathcal{F}^2 + i^{l+2j} \mathcal{F}^3 + i^{2l+2j} \mathcal{F}^4 + i^{3l+2j} \mathcal{F}^5 + \\ &\quad + i^{3j} \mathcal{F}^3 + i^{l+3j} \mathcal{F}^4 + i^{2l+3j} \mathcal{F}^5 + i^{3l+3j} \mathcal{F}^6) = \\ &= \frac{1}{16} (1 + i^{j-l} + i^{2(j-l)} + i^{3(j-l)}) \mathcal{A}_l. \end{aligned}$$

Следовательно операторы \mathcal{A}_l ортогональны ($\mathcal{A}_l \mathcal{A}_j = 0$ если $l \neq j$) и идемпотентны ($(\mathcal{A}_l)^2 = \mathcal{A}_l$). Такие операторы называются *проективными*.

Аналогично проверяется, что

$$\mathcal{F} \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0, \quad \mathcal{F} \mathcal{A}_1 = -i \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{F} \mathcal{A}_2 = -\mathcal{A}_2, \quad \mathcal{F} \mathcal{A}_3 = i \mathcal{A}_3.$$

Предложим явный вид ортонормированного базиса $L_2[0, \infty)$ из собственных функций

$$g_{0,0}^{(0)} = \psi_{0,0}; \quad g_{k,n}^{(l)} = \frac{1}{2} (\psi_{k,n}(x) + i^l \psi_{n,\tilde{k}}(x) + i^{2l} \psi_{\tilde{k},\tilde{n}}(x) + i^{3l} \psi_{\tilde{n},k}(x)),$$

где $(k, n) \in \Gamma \setminus (0, 0)$.

Легко проверить, что для каждого $l = 0, 1, 2, 3$ эти функции составляют ортонормированный базис соответствующего пространства L_2^l . Это также является следствием следующих правил действия проекторов на функции стандартного базиса:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0[\psi_{k,n}] &= \mathcal{A}_0[\psi_{n,\tilde{k}}] = \mathcal{A}_0[\psi_{\tilde{k},\tilde{n}}] = \mathcal{A}_0[\psi_{\tilde{n},k}] = \frac{1}{2} g_{k,n}^{(0)}, \quad \mathcal{A}_0[\psi_{0,0}] = \psi_{0,0}; \\ \mathcal{A}_1[\psi_{k,n}] &= \frac{1}{2} g_{k,n}^{(1)}, \quad \mathcal{A}_1[\psi_{n,\tilde{k}}] = -i \frac{1}{2} g_{k,n}^{(1)}, \quad \mathcal{A}_1[\psi_{\tilde{k},\tilde{n}}] = -\frac{1}{2} g_{k,n}^{(1)}, \quad \mathcal{A}_1[\psi_{\tilde{n},k}] = i \frac{1}{2} g_{k,n}^{(1)}; \\ \mathcal{A}_2[\psi_{k,n}] &= \frac{1}{2} g_{k,n}^{(2)}, \quad \mathcal{A}_2[\psi_{n,\tilde{k}}] = -\frac{1}{2} g_{k,n}^{(2)}, \quad \mathcal{A}_2[\psi_{\tilde{k},\tilde{n}}] = \frac{1}{2} g_{k,n}^{(2)}, \quad \mathcal{A}_2[\psi_{\tilde{n},k}] = -\frac{1}{2} g_{k,n}^{(2)}; \\ \mathcal{A}_3[\psi_{k,n}] &= \frac{1}{2} g_{k,n}^{(3)}, \quad \mathcal{A}_3[\psi_{n,\tilde{k}}] = i \frac{1}{2} g_{k,n}^{(3)}, \quad \mathcal{A}_3[\psi_{\tilde{k},\tilde{n}}] = -\frac{1}{2} g_{k,n}^{(3)}, \quad \mathcal{A}_3[\psi_{\tilde{n},k}] = -i \frac{1}{2} g_{k,n}^{(3)}; \\ \mathcal{A}_1[\psi_{0,0}] &= \mathcal{A}_2[\psi_{0,0}] = \mathcal{A}_3[\psi_{0,0}] = 0, \end{aligned}$$

где (k, n) – каноническая пара.

Отметим, что $\mathcal{A}_l[g_{k,n}^{(j)}] = 0$ если $j \neq l$ и $\mathcal{A}_l[g_{k,n}^{(l)}] = g_{k,n}^{(l)}$.

Итак, показали даже больше, чем сформулировали в теореме 7. \square

Введем сквозную нумерацию $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ базиса пространства $L_2[0, \infty)$ из собственных функций оператора $\mathcal{F}: v_{2m_{r-1}(p_r-1)k+4n+m_{r-1}^2-4m_{r-1}+l} = g_{k,n}^{(l)}$, где $(k, n) \in \Gamma \setminus (0, 0)$, $v_0 = \psi_{0,0}$.

Теорема 8. Система функций $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства $L_p[0, \infty)$ при любом $1 < p < \infty$.

При $p \neq 2$ этот базис не является безусловным.

Частные суммы по системе $\{v_n(x)\}$ с номерами m_r^2 совпадают с частными суммами по системе $\{\psi_{k,n}(x)\}$ по квадратам. Для доказательства теоремы 8 надо аккуратно проследить поведение промежуточных частных сумм.

Следующие два утверждения можно назвать теоремами единственности. Применением оператора четвертого вида устанавливается

Теорема 9. Если $f \in L_p[0, \infty)$ и $\mathcal{F}[f](u) = 0$ в метрике пространства $L_q[0, \infty)$, где $1 < p, q < \infty$, то $f(x) = 0$ в метрике пространства $L_p[0, \infty)$.

Применением оператора третьего вида устанавливается

Теорема 10. Пусть $f \in L_p[0, \infty) \cap L_r[0, \infty)$ и $F_1(u) = \mathcal{F}[f](u)$ для оператора $\mathcal{F}: L_p[0, \infty) \rightarrow L_q[0, \infty)$, а $F_2(u) = \mathcal{F}[f](u)$ для оператора $\mathcal{F}: L_r[0, \infty) \rightarrow L_s[0, \infty)$, где $1 < p, q, r, s < \infty$. Тогда $F_1(u)$ почти всюду на $[0, \infty)$ совпадает с $F_2(u)$.

В следующем утверждении показано, что теорему 3 нельзя улучшить.

Теорема 11. Для любого $1 < p < \infty$ существуют такие функции $f, g \in L_p[0, \infty)$, что:

- для всех $\varepsilon > 0$ имеем $f \notin L_{p-\varepsilon}[0, \infty)$ и $g \notin L_{p+\varepsilon}[0, \infty)$;
- $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L_{p'}[0, \infty)$;
- для всех $\delta > 0$ имеем $\mathcal{F}[f] \notin L_{p'+\delta}[0, \infty)$, $\mathcal{F}[g] \notin L_{p'-\delta}[0, \infty)$.

Для любого $q > 2$ существует функция $\varphi \in L_q[0, \infty)$ такая, что $\mathcal{F}[\varphi] \notin L_{q'}[0, \infty)$. Более того, функцию $\varphi(x)$ можно выбрать так, что условие $\mathcal{F}[\varphi] \notin L_r[0, \infty)$ выполнено для всех $1 \leq r \leq \infty$.

При доказательстве подбираются подходящие ступенчатые функции. Можно также доказать неусиливаемость теоремы 4 построением соответствующих примеров.

16.3 Кратно-масштабный троичный анализ

В кратно-масштабном двоичном анализе, построенном в параграфе 12.3 на примере функций Хаара, проглядывается конструкция преобразования Уолша. Приведем конструкцию кратно-масштабного троичного анализа, близкую к четвертому виду оператора мультипликативного преобразования Фурье.

Наиболее простым (после преобразования Уолша) видом мультипликативного преобразования Фурье служит (при $p = 3$) преобразование Крестенсона–Леви с ядром в виде скрещенного произведения системы Крестенсона–Леви на себя. То есть все элементы последовательности образующих чисел равны 3: $p_n \equiv 3$. В этом случае начальную функцию системы Крестенсона–Леви определим условиями: $v_1(x) = 1$, если $x \in [0, 1/3)$, $v_1(x) = q = \exp\{\frac{2\pi i}{3}\} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, если $x \in [1/3, 2/3)$, $v_1(x) = q^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, если $x \in [2/3, 1)$, $v_1(x) = 0$ при $x \in [1, \infty)$.

Обозначим $v_0^{(0)} := v_1$, $z_0^{(0)} := \bar{v}_1$ – пару *материнских* функций строящейся конструкции. Функцию $\chi(x) = 1$, если $x \in [0, 1)$, $\chi(x) = 0$, если $x \in [1, \infty)$, предложим в качестве *масштабирующей*. Построим систему сдвигов и растяжений этих функций ($n \in \mathbb{Z}$): $\chi_n^{(k)}(x) = \sqrt{3^n} \cdot \chi(3^n \cdot x - k)$,

$$v_n^{(k)}(x) = \sqrt{3^n} \cdot v_1(3^n \cdot x - k), \quad z_n^{(k)}(x) = \sqrt{3^n} \cdot \bar{v}_1(3^n \cdot x - k). \quad (14)$$

Если $k \in \mathbb{Z}$, то конструкция на оси; если $k \in \mathbb{N}_0$, то – на полуоси.

Утверждение 5. Система функций, состоящая из материнской функции $\chi(x)$ и всех тех функций $v_n^{(k)}(x)$, $z_n^{(k)}(x)$, носители которых лежат на $[0, 1)$, является полной ортонормированной на $[0, 1)$ системой функций (аналогичную системе Хаара).

Следствие. Система функций, состоящая из функции $\chi_m^{(l)}(x)$ и всех тех функций $v_n^{(k)}(x)$, $z_n^{(k)}(x)$, носители которых лежат на $\Delta_m^l = [\frac{l}{3^m}, \frac{l+1}{3^m})$, где $l, m \in \mathbb{Z}$, является полной ортонормированной на Δ_m^l .

Утверждение 5 и первая формулировка следствия есть факторизация по сдвигам. Вторая формулировка следствия есть факторизация сдвигов по сжатиям. В КМА принято начальной (основной) считать факторизацию по сжатиям. Строится система множеств, удовлетворяющая свойствам

- 1) $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$;
- 2) $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ всюду плотно в $L_2[0, \infty)$;
- 3) $W_n \cap W_m = \emptyset$ при $n \neq m$;
- 4) $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ (прямая сумма пространств);
- 5) $f \in V_n$ тогда и только тогда, когда $g \in V_{n+1}$, где $g(t) = f(3 \cdot t)$.

Здесь $V_n = \Lambda_n \cap L_2[0, \infty)$, где Λ_n есть пространство ступенчатых функций, введенное в первом параграфе главы.

Целочисленными сдвигами масштабирующей функции получим систему функций $X_0 = \{\chi^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ на полуоси $[0, \infty)$ (или на всей оси при $k \in \mathbb{Z}$), а целочисленными сдвигами материнских функций получим систему функций $Y_0 = \{v_0^{(k)}, z_0^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Применяя к сдвигам материнских функций операцию сжатия в три раза $v_1^{(k)}(t) = \sqrt{3} \cdot v_0^{(k)}(3t)$, получим систему функций $Y_1 = \{v_1^{(k)}, z_1^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, и так далее. Обозначим: V_0 – замыкание в L_2 линейной оболочки X_0 ; V_1 – замыкание в L_2 линейной оболочки $X_0 \cup Y_0$; V_n – замыкание в L_2 линейной оболочки $X_0 \cup Y_0 \cup \dots \cup Y_{n-1}$.

Основные пять условий КМА сформулировали в предположении $k \in \mathbb{N}_0$, то есть только для системы сжатий. В формуле (14) полагали, что $k \in \mathbb{Z}$, то есть допускаются и растяжения. Поэтому цепочку вложенных подпространств в первом пункте можно продолжить и в обратном порядке. При этом необходимость в масштабирующей функции отпадает. Первые два условия заменяются на следующие :

- 1) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$;
- 2) $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n$ всюду плотно в $L_2[0, \infty)$.

Предложим конструкцию троичного КМА без комплекснозначных функций. Предложим в качестве материнских функций

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } x \in [0, 1/3) \cup [2/3, 1), \\ -\sqrt{2}, & \text{если } x \in [1/3, 2/3), \\ 0, & \text{если } x \in [1, \infty), \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}, & \text{если } x \in [0, 1/3), \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}, & \text{если } x \in [2/3, 1), \\ 0, & \text{если } x \in [1/3, 2/3) \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Предложенная конструкция троичного КМА по аналогии легко переносится и на r -ичный случай. При этом число материнских функций

равно $p - 1$. Действительнозначный аналог данной конструкции должен удовлетворять условиям полноты и линейной независимости в L_1 на $[0, 1)$ набора функций, состоящего из масштабирующей плюс материнских.

16.4 УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте определение преобразования Крестенсона–Леви, являющееся частным случаем мультипликативного преобразования Фурье при $p_n \equiv p$, где p – простое число.

2. Докажите леммы 1, 2, 3, 4 и 5.

3. Докажите теоремы 1 и 2.

4. Выведите вид точной мажоранты $h(x)$ ядра Дирихле мультипликативного преобразования Фурье (сравните с леммой 13.8) и докажите, что $h \in L_p[1, \infty)$ при $p > 1$.

5. Постройте мультипликативное преобразование Фурье с образующими числами $p_{2n} = 3$, $p_{2n-1} = 2$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Уточните вид леммы 4 и мажоранты $h(x)$ для этого случая.

6. Докажите утверждения 1, 2, 3 и 4.

7. Восстановите полное доказательство теоремы 6.

8. Постройте две различные ортонормированные системы на $[0, 3)$, взяв за основу систему Крестенсона–Леви при $p = 3$. *Указание.* Одну систему получить методом сжатия-растяжения системы Крестенсона–Леви как в следствии леммы 4, другую – методом сдвига, построив сквозную нумерацию.

9. Вычислите преобразование Крестенсона–Леви при $p = 3$ от функций:

$$f(x) = \begin{cases} 9, & \text{если } x \in [0, 1/9), \\ 0, & \text{если } x \in [1/9, \infty), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 2/3), \\ 0, & \text{если } x \in [2/3, \infty), \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 7), \\ 0, & \text{если } x \in [7, \infty), \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 4, & \text{если } x \in [0, 1/3), \\ 1, & \text{если } x \in [1/3, 3), \\ 0, & \text{если } x \in [3, \infty). \end{cases}$$

10. Проверьте справедливость сформулированных в конце доказательства теоремы 7 формул действия проекторов \mathcal{A}_i на функции стандартного базиса.

Глава 17

Дискретное преобразование Фурье

17.1 Построение ДПФ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) не является дискретизацией преобразования Фурье. Более того, ДПФ более тесно связано с мультипликативным преобразованием Фурье. Разрабатывалось ДПФ как аппарат численной реализации прямого и обратного преобразования Фурье. Наличие существенной погрешности при переходе от преобразования Фурье к ДПФ ограничивает возможности применения ДПФ в этой сфере и привлекательность ДПФ для математиков.

Появление ДПФ стимулировало становление и развитие теории дискретных сигналов на конечных интервалах, составляющей основу *цифровой обработки сигналов* (ЦОС). Методы цифровой обработки сигналов рассмотрены в [1, 4, 9, 14, 23]. Появление ЭВМ позволило реализовать данную теорию в виде программ или в виде специализированного устройства. Появление быстрых алгоритмов реализации еще больше расширило область применения ДПФ, без которых не обходится подавляющее большинство современных ЭВМ.

Дискретное преобразование Фурье применяется к N -мерному вектору $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$, который принято называть *входным сигналом*. Число N , называемое *длиной сигнала*, заранее фиксируется. Исходный вектор рассматривают как действительнзначный (то есть элемент \mathbb{R}^N), так и комплекснзначный (то есть элемент \mathbb{C}^N). В любом случае при применении ДПФ получаем $y \in \mathbb{C}^N$, координаты которого вычисляются

по формуле

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n q^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

где $q = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ (или $q = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$). Вектор $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ называется *выходным сигналом* или *спектром сигнала* x .

Для преобразования Фурье вида

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

отдельно рассматривают интеграл по положительной и по отрицательной полуоси. Первый из них заменяют на $\int_0^M f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$ и составляют интегральную сумму для точек отсчета $\nu_k = \frac{kL}{N_1}$, расположенных на $[0, L]$, по формуле прямоугольников с шагом $\Delta t = \frac{M}{N_2}$. Если $N = \frac{N_1}{L}$ и $N = \frac{N_2}{M}$, то приходим к формуле (1) при $q = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, где x_n есть среднее значение (или значение в выбранной точке) функции $f(x)$ на интервале $(n \cdot \Delta t, (n+1)\Delta t)$. Аналогично поступают для интеграла по отрицательной полуоси. Варьированием чисел N_1, N_2, L, M стараются добиться близости непрерывного спектра $S(\nu)$ и полученного посредством формулы (1) дискретного спектра. Однако при этом неизбежно увеличивается N и добавляются сложности по реализации алгоритма.

Заметим, что при $M = L = 1$ формула (1) рассматривается как формула приближенного вычисления коэффициентов Фурье.

Остановимся на трактовке ДПФ в виде формулы (1) как применяемой для дискретного конечного сигнала при решении задач цифровой обработки информации.

Тогда формула

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot q^{-nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

позволяет точно восстановить исходный ряд и называется *формулой обратного ДПФ*.

Формулы (1) и (2) представляются в матричном виде. Матрицей дискретного преобразования Фурье называется симметричная матрица

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \dots & q^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $q = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Матрицу \bar{F} , которая имеет вид (3) для $q = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, назовем матрицей обратного ДПФ. Матрица \bar{F} является комплексно-сопряженной к матрице F .

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$F \cdot \bar{F} = \bar{F} \cdot F = N \cdot E,$$

где E – единичная матрица порядка N .

Доказательство. Произведение k -й строки матрицы F на j -й столбец матрицы \bar{F} равно

$$1 + q^{k-j} + q^{2(k-j)} + \dots + q^{(N-1)(k-j)} = N \cdot \delta_{kj}$$

по свойству корней N -й степени из единицы. \square

Определение 1. Комплекснозначная симметричная матрица A называется ортогональной, если $A \cdot \bar{A} = C \cdot E$ для некоторой константы $C \neq 0$, где матрица \bar{A} – комплексно-сопряженная к A .

Это определение, которое используют в технической [1, 9] литературе, отличается от принятого в математической, где требуют $C = 1$.

Итак, матрицы дискретного преобразования Фурье F и \bar{F} являются ортогональными.

Матричный вид формулы (1) следующий

$$y = \frac{1}{N} \cdot F \cdot x,$$

где N -мерные векторы x , y представлены в виде матриц, состоящих из одного столбца. При записи матриц сигналов в виде строк формула имеет

вид $y^\top = \frac{1}{N} \cdot x^\top \cdot F$, где x^\top есть транспонированная матрица x . Формула (2) имеет вид

$$x = \bar{F} \cdot y$$

при матричной записи в виде столбцов и вид $x^\top = y^\top \cdot \bar{F}$ при матричной записи сигналов x , y в виде строк.

Теорема 1. Для входного сигнала x и его спектра y имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2.$$

Доказательство проведем с помощью матричной записи

$$y^\top \cdot \bar{y} = \frac{1}{N} \cdot x^\top \cdot F \cdot \frac{1}{N} \overline{(F \cdot x)} = \frac{1}{N} \cdot x^\top \cdot \frac{1}{N} \cdot F \cdot \bar{F} \cdot \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot x^\top \cdot \bar{x}.$$

Выражение $x^\top \cdot \bar{x}$ есть матричная запись скалярного произведения элемента $x \in \mathbb{C}_2^n$ на себя:

$$x^\top \cdot \bar{x} = (x, x) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \bar{x}_k = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2. \quad \square$$

Рассмотрим мультипликативное преобразование Фурье, первое образующее число которого равно N ($p_1 = N$). Пусть $f(x)$ ступенчатая функция такая, что $f(x) = x_n$ при $x \in [\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N})$, $0 \leq n < N$. Полагаем, что $f(x) = 0$ при $x \geq 1$. Пусть числа y_k вычисляются по формуле (1) с $q = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$.

Утверждение 1. Данное мультипликативное преобразование Фурье от указанной функции $f(x)$ есть финитная ступенчатая функция $F(y)$ равная y_k при $y \in [k, k+1)$, $0 \leq k < N$, и $F(y) = 0$ при $y \in [N, \infty)$.

Соответствующее обратное мультипликативное преобразование Фурье от функции $F(y)$ восстанавливает $f(x)$ (и соответствует формуле (2) вычисления обратного ДПФ с тем же q).

Следствие. Применением формулы Планшереля $\|f\|_2 = \|F\|_2$ получаем равенство Парсеваля из теоремы 1.

17.2 Быстрое преобразование Фурье

Так как формулы (1) и (2) отличаются только знаком в экспоненте и числовым множителем, то их численные реализации аналогичны. Остановимся на формуле (1) без числового множителя или в матричном виде на формуле $N \cdot y = F \cdot x$.

В статьях Гуда (1958 г.) предложен метод факторизации матриц, который Кули и Таки (1965 г.) положили в основу *алгоритма быстрой реализации ДПФ*. Суть этого метода состоит в замене одной густо заполненной матрицы на произведение большого числа разреженных матриц.

При построении факторизации задают $N = 2^n$, то есть длину сигнала полагают равной степени двойки. Продемонстрируем метод построения *алгоритма быстрой реализации дискретного преобразования Фурье* (БПФ) для случая $N = 8$.

Обозначим $q = e^{\frac{\pi i}{4}}$ и заметим, что $q^2 = i$, $q^4 = -1$, $q^6 = -i$. Тогда

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & i & q^3 & -1 & q^5 & -i & q^7 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & q^3 & -i & q & -1 & q^7 & i & q^5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & q^5 & i & q^7 & -1 & q & -i & q^3 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & q^7 & -i & q^5 & -1 & q^3 & i & q \end{pmatrix}.$$

Составим следующие матрицы

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $F = F_3 \cdot F_2 \cdot F_1$. Проверкой сначала устанавливаем, что

$$F_2 \cdot F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 & -1 & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -i & 0 & -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & -1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix},$$

а потом окончательное равенство.

В общем случае $N = 2^n$ матрица F дискретного преобразования Фурье представляется в виде

$$F = F_n \cdot F_{n-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1$$

произведения n матриц порядка N , описание которых начнем с последней. Матрица F_n записывается как блочная матрица

$$F_n = \begin{pmatrix} E & \mathcal{D}_1 \\ E & -\mathcal{D}_1 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка $\frac{N}{2}$, а \mathcal{D}_1 – диагональная матрица порядка $\frac{N}{2}$ с элементами $1, q, q^2, \dots, q^{2^{n-1}-1}$ на диагонали. В блоке $-\mathcal{D}_1$ все элементы отличаются знаком от соответствующих элементов блока \mathcal{D}_1 .

Матрица F_{n-1} тоже блочная с блоками порядка $\frac{N}{4}$

$$F_{n-1} = \begin{pmatrix} E & O & \mathcal{D}_2 & O \\ E & O & -\mathcal{D}_2 & O \\ O & E & O & \mathcal{D}_2 \\ O & E & O & -\mathcal{D}_2 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица, O – блок, состоящий из нулей, а \mathcal{D}_2 – диагональная матрица с элементами $1, q^2, q^4, \dots, q^{2(2^{n-2}-1)}$ на диагонали.

Матрицу F_{n-2} можно получить из матрицы F_1 приведенного для $N = 8$ примера, если каждый элемент той матрицы трактовать как блок порядка $\frac{N}{8}$, единицы левой половины матрицы заменить на E , а в правой половине единицу заменить на \mathcal{D}_4 и -1 заменить на $-\mathcal{D}_4$. В диагональной матрице \mathcal{D}_4 на диагонали стоят элементы $1, q^4, q^8, \dots, q^{4(2^{n-3}-1)}$.

В каждой матрице F_k выделяем левую половину, состоящую из блоков E и O порядка 2^{k-1} , и правую половину, состоящую из блоков $\mathcal{D}_{2^{n-k}}, -\mathcal{D}_{2^{n-k}}, O$. Расположение блоков в матрице иллюстрирует матрица F_1 в примере для $N = 8$. Индекс у матрицы \mathcal{D} указывает степень образующего элемента среди диагональных.

Условие $N = 2^n$ не является обязательным для факторизации матриц ДПФ. Покажем возможность представления матрицы ДПФ в виде произведения слабо заполненных матриц для любого составного N . Сначала приведем вспомогательные утверждения, где нумерация элементов любой матрицы начнется с нуля, а не с единицы.

Лемма 2. Если V матрица размера $[1 \times r]$, то для блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} V & bV & b^2V & \dots & b^{s-1}V \end{pmatrix},$$

размера $[1 \times sr]$ имеет место представление в виде произведения матриц

$$V \cdot \begin{pmatrix} E & bE & b^2E & \dots & b^{s-1}E \end{pmatrix},$$

где $b^k E$ – диагональная матрица порядка r с числом b^k на диагонали.

Лемма 3. Пусть V – матрица размера $[1 \times r]$. Если j -я строка блочной матрицы \tilde{F} имеет вид

$$\begin{pmatrix} V & bV & b^2V & \dots & b^{s-1}V \end{pmatrix},$$

а остальные ее строки нулевые, то она может быть представлена в виде

$$\tilde{F} = Q \cdot \tilde{D},$$

где у матрицы Q не нулевая только j -я строка, она имеет вид

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ V \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

с матрицей V в столбцах $l, l+1, \dots, l+r-1$ (l — произвольное), у матрицы \tilde{D} строки с номерами $l, l+1, \dots, l+r-1$ имеют вид $(E \ bE \ b^2E \ \dots \ b^{s-1}E)$ (вид остальных строк матрицы \tilde{D} не важен).

При этом все три матрицы \tilde{F} , Q , \tilde{D} могут быть квадратными одинакового порядка.

Обе леммы доказываются простой проверкой.

Матрица называется *блочнодиагональной*, если она записывается в виде диагональной матрицы, каждый элемент которой есть матрица одного и того же размера с нулевыми матрицами вне диагонали. Матрицу размера $[s \times sr]$ назовем *псевдодиагональной*, если она блочнодиагональная с блоками размера $[1 \times r]$, то есть в виде строки. При транспонировании получаем блочнодиагональную матрицу с блоками в виде столбца, которую также будем называть псевдодиагональной (по столбцам).

Теорема 2. Если $N = r \cdot s$, то матрицу ДПФ порядка N можно представить в виде произведения двух слабо заполненных блочных матриц

$$F = D \cdot Q,$$

где первый сомножитель имеет структуру матрицы ДПФ порядка s

$$D = \begin{pmatrix} E & E & E & \dots & E \\ E & \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \dots & \mathcal{D}_{s-1} \\ E & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_4 & \dots & \mathcal{D}_{2(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E & \mathcal{D}_{s-1} & \mathcal{D}_{2(s-1)} & \dots & \mathcal{D}_{(s-1)^2} \end{pmatrix}$$

с блоками $\mathcal{D}_k = q^{kr} \cdot E$ в виде диагональных матриц порядка r , а второй

смножитель вида

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0^0 & Q_0^1 & \dots & Q_0^{r-1} \\ Q_1^0 & Q_1^1 & \dots & Q_1^{r-1} \\ Q_2^0 & Q_2^1 & \dots & Q_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{s-1}^0 & Q_{s-1}^1 & \dots & Q_{s-1}^{r-1} \end{pmatrix}$$

с блоками Q_k^n размера $[r \times s]$, у которых только один столбец с номером k ненулевой и имеет вид

$$\left(1 \quad q^{k+ns} \quad q^{2(k+ns)} \quad \dots \quad q^{(r-1)(k+ns)} \right)^\top.$$

Следствие. Представление $F = \mathcal{D} \cdot Q$ равносильно выражению $F = Q^\top \cdot \mathcal{D}$, что вытекает из симметрии матриц F, \mathcal{D} .

Теорема остается верной, если каждый элемент q^m исходной матрицы F рассматривать как квадратную матрицу $q^m \cdot E$ некоторого фиксированного порядка. То есть теорема верна для матрицы \mathcal{D} в виде исходной матрицы в случае составного s .

Доказательство теоремы 2 удобнее проводить для представления $F = Q^\top \cdot \mathcal{D}$, где запись более экономичная (так как запись по строкам). Введем обозначение для матрицы размера $[1 \times r]$, являющейся началом строки с номером $k + ns$ исходной матрицы F ($0 \leq k < s, \quad 0 \leq n < r$):

$$V_n(k) = \left(1 \quad q^{k+ns} \quad q^{2(k+ns)} \quad \dots \quad q^{(r-1)(k+ns)} \right).$$

В частности, $V_0(k) = \left(1 \quad q^k \quad q^{2k} \quad \dots \quad q^{(r-1)k} \right)$.

Строка матрицы F с номером $k + ns$, где $0 \leq k < s, \quad 0 \leq n < r$, разбивается на блоки

$$\begin{aligned} & \left(V_n(k) \quad q^{rk} \cdot V_n(k) \quad q^{2rk} \cdot V_n(k) \quad \dots \quad q^{(s-1)rk} \cdot V_n(k) \right) = \\ & = V_n(k) \cdot \left(1 \quad q^{rk} \quad q^{2rk} \quad \dots \quad q^{(s-1)rk} \right). \end{aligned}$$

По лемме 3 первые s строк матрицы F представимы в виде $Q^0 \cdot \mathcal{D}$, где Q^0 есть псевдодиагональная матрица с блоками $V_0(0), V_0(1), \dots, V_0(s-1)$ на диагонали. Покажем это. Для строки с номером k матриц F и Q^0 обозначим $V = V_0(k)$, $b = q^{rk}$. Тогда первые s строк матрицы F можно представить в виде суммы $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{s-1}$ матриц размера $[s \times sr]$ с одной (k -й для матрицы F_k) ненулевой строкой вида

($V \ bV \ b^2V \ \dots \ b^{s-1}V$). Так как в лемме 3 вид остальных строк матрицы $\tilde{\mathcal{D}}$ не важен, то в качестве $\tilde{\mathcal{D}}$ можно для каждой из исходной матрицы F_k брать матрицу \mathcal{D} , ибо группы ненулевых строк у них различны (что достигается условием $l = rk$). Если транспонируем произведение $Q^0 \cdot \mathcal{D}$, то получим представление для первых s столбцов матрицы F в виде $\mathcal{D} \cdot (Q^0)^\top$, где

$$Q^0 = (Q_0^0 \ Q_1^0 \ Q_2^0 \ \dots \ Q_{s-1}^0)^\top.$$

Для следующих s столбцов матрицы F аналогично получаем представление в виде произведения $\mathcal{D} \cdot (Q^1)^\top$, где $Q^1 = (Q_0^1 \ Q_1^1 \ Q_2^1 \ \dots \ Q_{s-1}^1)^\top$ с блоками $V_1(0), V_1(1), V_1(2), \dots, V_1(s-1)$ на диагонали псевдодиагональной матрицы Q^1 .

Всего r таких групп по s столбцов в матрице F . Для каждой группы аналогично строится Q^n ($0 \leq n < r$). Матрица Q формируется как блочная матрица

$$Q = ((Q^0)^\top \ (Q^1)^\top \ (Q^2)^\top \ \dots \ (Q^{r-1})^\top),$$

где каждый блок отвечает за свою группу столбцов матрицы F .

Пример факторизации матрицы ДПФ порядка 6 ($q = e^{\frac{\pi i}{3}}$):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 & q^4 & q^5 \\ 1 & q^2 & q^4 & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & q^3 & 1 & q^3 & 1 & q^3 \\ 1 & q^4 & q^2 & 1 & q^4 & q^2 \\ 1 & q^5 & q^4 & q^3 & q^2 & q \end{pmatrix}.$$

Полагая $r = 2, s = 3$, получаем

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & q^2 & 0 & q^4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q^2 & 0 & q^4 \\ 1 & 0 & q^4 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q^4 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & -q^2 \end{pmatrix}.$$

Полагая $r = 3$, $s = 2$, получаем

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & q^2 & 0 & q^4 & 0 \\ 1 & 0 & q^4 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 & q^3 & 0 & q^5 \\ 0 & q^2 & 0 & 1 & 0 & q^4 \end{pmatrix}.$$

На примере последнего случая продемонстрируем удобную для запоминания последовательность построения ненулевых элементов матрицы Q

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & \star \\ & 1 & 1 & 1 \\ q & q^3 & \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & q^4 & \star \\ & 1 & 1 & 1 \\ q & q^3 & q^5 \\ q^2 & q^6 & \star \end{pmatrix}$$

через первую и вторую (в случае $r = 3$) строку матрицы F .

17.3 Вычисление тригонометрических сумм с помощью ДПФ

В качестве примера применения ДПФ продемонстрируем способ получения новых тригонометрических формул. А именно, получим суммы отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах. Для сравнения приведем известные формулы для положительных степеней:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N}; \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi k}{N} = \frac{N}{2}; \quad \text{и для } N \geq 3 \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{\pi k}{N} = \frac{3N}{8}.$$

Случай степени -1 рассматривается как интересная математическая задача, решением которой служит асимптотическая формула (Ватсон, 1916 г.)

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{-1} \frac{\pi k}{N} = \frac{2N}{\pi} \left(\ln N + C - \ln \frac{\pi}{2} \right) + O(1),$$

где C – константа Эйлера.

Оказывается, что для четных отрицательных степеней синусов получаются более короткие точные формулы.

Вычислим ДПФ вида (1) для входного сигнала x , координаты которого $x_k = k$. Получим

$$y_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N-1}{2}.$$

Для вычисления остальных координат будем применять преобразование Абеля (лемма 7.2) в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot b_k = a_{N-1} \cdot B_{N-1} - \sum_{k=0}^{N-2} \Delta a_k \cdot B_k, \quad (4)$$

где $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ – первая разность, $B_k = \sum_{i=0}^k b_i$ – частная сумма. Тогда при $l \geq 1$:

$$y_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k q^{kl} = \frac{1}{N} \left[(N-1) \cdot 0 - \sum_{k=0}^{N-2} (k+1-k) \cdot \frac{1-q^{l(k+1)}}{1-q^l} \right] = \frac{1}{q^l-1}.$$

По равенству Парсеваля (теорема 1) получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)^2}{4} + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{|q^l-1|^2} = \frac{(N-1)^2}{4} + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{|q^{l/2}-q^{-l/2}|^2}.$$

По формуле Эйлера получим

$$|q^{l/2}-q^{-l/2}| = |e^{\frac{l\pi i}{N}} - e^{-\frac{l\pi i}{N}}| = \left| \cos \frac{l\pi}{N} + i \sin \frac{l\pi}{N} - \cos \frac{l\pi}{N} + i \sin \frac{l\pi}{N} \right| = 2 \sin \frac{l\pi}{N}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{4}{N} \cdot \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} - (N-1)^2 = \frac{N^2-1}{3}.$$

При выводе соотношения

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2-1}{3} \quad (5)$$

использовали известную [6] формулу $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Если применить ДПФ к сигналу с координатами $x_k = k^2$, то подобными вычислениями получим формулу для $\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{-4} \frac{\pi k}{N}$. Уже на этом этапе вычисления будут сложными. Для упрощения вычислений будем рассматривать входные сигналы с условием нормировки

$$\sum_{k=1}^{N-1} x_k = 0. \quad (6)$$

Это условие гарантирует $y_0 = 0$ для выходного сигнала и позволяет некоторые вычислительные сложности перенести с выходного сигнала на входной. В этом случае на рассмотренном шаге в качестве входного сигнала нужно было взять сигнал $x(1)$ с координатами $x_k(1) = k + C_1$, где $C_1 = -\frac{N-1}{2}$. Равенство Парсеваля даст соотношение

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (k + C_1)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}},$$

левая часть которого равна

$$\frac{1}{N} \left[\frac{(N-1)N(2N-1)}{6} + N(N-1)C_1 + NC_1^2 \right] = \frac{N^2 - 1}{12},$$

что дает формулу (5).

Итак, координаты сигнала $x(1)$ получаются как решение разностного уравнения $\Delta x_k = 1$ с условием нормировки (6). То есть начальным входным сигналом считаем $x(0)$, все координаты которого равны 1. Продолжая этот процесс, получаем последовательность входных сигналов $x(n)$, координаты x_k каждого из которых вычисляются через координаты предыдущего сигнала $x(n-1)$ в виде решения простейшего разностного уравнения

$$\Delta x_k = x_k(n-1) \quad (7)$$

с условием нормировки (6). Полученные координаты x_k решения разностного уравнения (7) с условием (6) обозначим $x_k(n)$.

Длина сигнала N считается фиксированной и известной. Получаем следующие решения

$$x_k(2) = \frac{1}{2}k(k-1) + C_1k + C_2, \quad x_k(3) = \frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + C_1k(k-1) + C_2k + C_3$$

и так далее.

При практической реализации используется *метод прогонки*, при котором для параметра C_n задаем $x_0(n) = C_n$ и вычисляем следующие координаты $x_k(n)$ сигнала $x(n)$. Условие (6) позволяет вычислить C_n . Используя обозначение $k^{(n)}$ для обобщенной степени (применяемое в теории разностных уравнений [6])

$$k^{(n)} = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1), \quad k^{(0)} = 1, k^{(1)} = k,$$

укажем общее решение системы простейших разностных уравнений (7) с условием (6):

$$x_k(n) = \frac{1}{n!}k^{(n)} + \frac{C_1}{(n-1)!}k^{(n-1)} + \frac{C_2}{(n-2)!}k^{(n-2)} + \dots + C_{n-1}k + C_n. \quad (8)$$

Пусть $C_0 = 1$. Формула (8) при $n \leq N-1$ коротко записывается в виде $x_k(n) = \sum_{m=0}^n \frac{C_m}{(n-m)!}k^{(n-m)} = \sum_{m=0}^n \frac{C_{n-m}}{m!}k^{(m)}$, а при $n \geq N$ в виде $x_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{C_{n-m}}{m!}k^{(m)}$.

Для сигнала постоянной длины величины C_m есть константы. Величины C_m зависят от длины сигнала и являются многочленами степени не выше m от длины сигнала, что следует из формул суммирования многочленов [6] и условия (6). Рассмотрим эти величины как многочлены $C_m(N)$ степени m от переменной N .

Утверждение 2. При $m \geq 2$ многочлены $C_m(N)$ четные, коэффициент при старшей m -й степени равен $\frac{B_m}{m!}$, где B_m – числа Бернулли (см. [6]), число 1 является корнем каждого многочлена.

Приведем несколько таких многочленов, откуда легко восстановить начальные числа Бернулли:

$$C_2 = \frac{N^2 - 1}{12}, \quad C_3 = -\frac{N^2 - 1}{24}, \quad C_4 = -\frac{1}{720}(N^2 - 1)(N^2 - 19),$$

$$C_5 = \frac{1}{480}(N^2 - 1)(N^2 - 9), \quad C_6 = \frac{1}{60480}(N^2 - 1)(2N^4 - 145N^2 + 863),$$

$$C_7 = -\frac{1}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 7}(N^2 - 1)(N^2 - 25)(N^2 - 11).$$

Утверждение 3. Для входного сигнала $x(n)$ с координатами (8) координаты выходного сигнала $y(n)$ равны $y_0(n) = 0$,

$$y_l(n) = -\frac{q^{l(n-1)}}{(1-q^l)^n}.$$

Доказательство. Равенство $y_0 = 0$ вытекает из (6).

Выше вычислено, что $y_l(1) = -\frac{1}{1-q^l}$. По преобразованию Абеля (4), так как $q^{lN} = 1$, имеем

$$\begin{aligned} y_l(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n) \cdot q^{kl} = \frac{1}{N} \frac{1}{q^l - 1} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x_k(n) \cdot (1 - q^{l(k+1)}) = \\ &= \frac{1}{q^l - 1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n-1) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n-1) \cdot q^{l(k+1)} \right) = \frac{q^l}{1 - q^l} \cdot y_l(n-1). \square \end{aligned}$$

Утверждение 4. *Справедлива формула*

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\pi k}{N}} = \frac{4^n}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k(n))^2.$$

Доказательство. По равенству Парсеваля

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k(n))^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |y_l(n)|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{|1 - q^l|^{2n}}.$$

Выше по формуле Эйлера доказали, что $|1 - q^l| = 2 \sin \frac{\pi l}{N}$. \square

Утверждение 5. *При $n \geq 1$ тригонометрическая сумма $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\pi k}{N}}$ является четным многочленом от N , для которого число 1 служит корнем.*

Доказательства утверждений 2 и 5 сложнее, чем утверждений 3 и 4.

Тригонометрические формулы, аналогичные (5), можно получать из утверждения 4 с помощью комбинаторных формул. Проще это сделать по методу неопределенных коэффициентов с использованием утверждения 5. Приведем некоторые из полученных формул:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2 - 1)(N^2 + 11)}{45}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^6 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2 - 1)(2N^4 + 23N^2 + 191)}{945},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^8 \frac{\pi k}{N}} = \frac{1}{14175} (N^2 - 1)(3N^6 + 43N^4 + 337N^2 + 2497).$$

17.4 УПРАЖНЕНИЯ

1. Составьте матрицы прямого и обратного ДПФ для случаев $N = 4$ и $N = 9$.

2. Постройте быстрое преобразование Фурье для матрицы ДПФ порядка 4, то есть разложите ее в виде произведения слабо заполненных матриц.

3. Покажите, что для матрицы ДПФ порядка 6 возможны другие представления в виде произведения двух слабо заполненных матриц. Например, у матрицы Q для случая $r = 3$, $s = 2$ первые 3 строчки можно оставить прежними, а вид последних трех строчек получить сдвигом вправо (последний столбец поставить на место первого) первых строчек. Подберите первый сомножитель (матрицу D), соответствующий полученной матрице Q .

4. Постройте быстрое преобразование Фурье для матрицы ДПФ порядка 9, то есть разложите ее в виде произведения двух слабо заполненных матриц, используя аналогию с предыдущими упражнениями.

5. Докажите леммы 2 и 3.

6. Вычислите ДПФ для сигнала с координатами $x_k = k^2$.

7. При заданной длине сигнала $N = 6$ вычислите входные сигналы $x(n)$, удовлетворяющие уравнению (7) с условием (6), и выходные сигналы $y(n)$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Проверьте выполнение равенства Парсеваля для них.

8. При заданной длине сигнала $N = 6$ для начального входного сигнала вида $x(0) = (6, 0, 0, 0, 0, 0)$ вычислите сигналы $x(n)$, координаты которых удовлетворяют простейшему разностному уравнению (7) с нормировкой (6). Сравните полученный результат с набором сигналов из упражнения 7. Какой результат получится для начального входного сигнала $x(0) = (0, 0, 0, 6, 0, 0)$?

9. Методом математической индукции докажите, что верна формула

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Глава 18

Дискретное преобразование Уолша

18.1 Три основных вида ДПУ

Дискретное преобразование Уолша (ДПУ) столь широко применяется при цифровой обработке информации, что в технической литературе [14] оно закрепилось под укороченным названием *преобразование Уолша* (которое будем считать некорректным). В технических приложениях активно используют [14, 23] три различных вида ДПУ, соответствующие нумерациям Пэли, Уолша и Адамара для функций Уолша.

Дискретное преобразование Уолша в любой нумерации есть преобразование N -мерного, где $N = 2^n$, входного сигнала $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ в выходной сигнал $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ той же длины с помощью ортогональной (см. определение 17.1) матрицы W порядка N по формуле

$$y = W \cdot x, \quad (1)$$

где сигналы \vec{x}, \vec{y} представлены в виде матриц x, y размера $[N \times 1]$. Часто вместо формулы (1) в качестве прямого ДПУ входного сигнала берут формулу $y = \frac{1}{N} \cdot W \cdot x$ по аналогии с формулой прямого ДПФ.

Так как для разных нумераций матрицы W различаются только порядком строк, то выходные сигналы \vec{y} для разных нумераций различаются порядком следования координат. Нумерация элементов матриц начинается с нуля, а не с единицы.

Условимся в случае нумерации Пэли обозначать матрицу символом W (в технической литературе [23] обозначают pal), в случае нумерации Адамара обозначать матрицу H (в технической литературе обозначают

had), в случае нумерации Уолша обозначать матрицу U (в технической литературе обозначают wal). Символ W будем использовать также как обобщающий в случае рассмотрения всех трех нумераций одновременно (и возможно других нумераций).

При необходимости указать длину сигнала и порядок матрицы, равные 2^n , будем применять нижний индекс у матрицы, который назовем *уровнем* матрицы, записав формулу (1) в виде $y = W_n \cdot x$.

В технической литературе [1, 14, 23] приводится описание построения матриц ДПУ нумераций Пэли, Уолша и Адамара на примере матриц младших уровней. Лишь для матриц ДПУ в нумерации Адамара приводится строгое определение (определение 2, которое предложил Адамар в 1893 г.) в виде *кронекеровской степени*. Приведем определение матриц ДПУ, которое встречается [8] в математической литературе.

Определение 1. При фиксированном уровне n каждая строка с номером i матрицы ДПУ W_n (H_n или U_n) представляет собой набор последовательных значений функции Уолша в нумерации Пэли (в нумерации Адамара или Уолша соответственно) с номером i на интервалах $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ n -го ранга, где k – номер столбца в матрице W_n . То есть

$$W_n = \{w_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}, \quad H_n = \{a_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}, \quad U_n = \{b_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1},$$

$$w_{ij} = w_i(\Delta_n^j), \quad a_{ij} = h_i(\Delta_n^j), \quad b_{ij} = v_i(\Delta_n^j), \quad (2)$$

где $w_i(x)$ – функция Уолша в нумерации Пэли, $h_i(x)$ – функция Уолша в нумерации Адамара (при фиксированном n), $v_i(x)$ – функция Уолша в нумерации Уолша.

Напомним, что функции Уолша в нумерации Уолша являются линейной перестановкой системы Уолша-Пэли, заданной набором образующих функций $r_0, r_0 \cdot r_1, r_1 \cdot r_2, \dots, r_{n-2} \cdot r_{n-1}$ в указанном порядке, где r_k – функции Радемахера.

Если в качестве образующих функций (при заданном n) возьмем начальные функции Радемахера в обратном порядке $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_2, r_1, r_0$, то по правилам построения линейной перестановки получим набор тех же 2^n функций Уолша, но в нумерации Адамара $\{h_i(x)\}_{i=0}^{2^n-1}$. В частности, $h_{2^k} = r_{n-k-1}$, $h_{2^k+m} = h_{2^k} \cdot h_m$ при $0 < m < 2^k$.

Итак, нумерации Адамара и Пэли связаны друг с другом через операцию инверсии: или номеров функций в двоичной системе счисления,

или образующих функций Радемахера. Отметим, что для каждого выбранного уровня n осуществляется своя инверсия. Поэтому нумерация Адамара рассматривается только для конечного набора функций.

Приведем примеры матриц W, H, U разного уровня. Матрицы первого уровня (то есть при $N = 2$) совпадают $W_1 = H_1 = U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Для этой матрицы закрепим обозначение $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. При $N = 4$ получаем 3 различные матрицы 2-го уровня:

$$W_2 = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{pmatrix}.$$

Так как значение всех элементов матриц по модулю равно 1, то указываем только знак. При $N = 8$ приведем матрицы в нумерации Пэли

$$W_3 = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$$

и в нумерации Адамара

$$H_3 = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}.$$

Укажем порядок следования восьми строк матрицы W_3 в матрице H_3 : 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7. Примечательно, что тот же порядок следования строк матрицы H_3 в матрице W_3 . Этот пример иллюстрирует общее правило перехода от матрицы W_n к матрице H_n и обратно, обусловленное их построением через инверсию: деление группы позиций на каждом шаге пополам с последовательной нумерацией начала группы.

Порядок следования строк матрицы W_3 в матрице U_3 следующий: 0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4. Простой двоичный код (запись в двоичной системе счисления) этих чисел получается из простого двоичного кода чисел от 0 до 7 применением *кода Грея*, описанного в параграфе 13.2. Напомним, что номер функции Уолша в нумерации Уолша равен числу перемен знака у функции.

Определение кронекеровского произведения матриц приводится в [1, 23, 26]. Рассмотрим его для матриц с элементами 1, -1 или 0, которые и возникают в наших построениях. В этом случае *кронекеровское произведение матрицы A на матрицу B* , которое обозначим $A(B)$, есть блочная матрица, получающаяся подстановкой в матрицу A матрицы B : вместо числа 1 матрицы A записываем матрицу B , вместо числа -1 матрицы A записываем матрицу $-B$, вместо числа 0 матрицы A записываем нулевую матрицу того же размера.

Определение 2. Матрица ДПУ в нумерации Адамара H_n определяется формулой

$$H_n = H_{n-1}(H),$$

что означает подставку в матрицу Адамара H_{n-1} вместо единицы мат-

рицы порядка 2 вида

$$H = H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Например ,

$$H_2 = H(H) = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. Матрицу Адамара можно получить по формуле

$$H_n = H_k(H_{n-k})$$

для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Следствие. Матрица ДПУ в нумерации Адамара H_n есть кронекеровская степень матрицы H :

$$H_n = H^{(n)} := H^{(k)}(H^{(n-k)}), \quad \text{где } H^{(1)} := H.$$

Аналогичные обозначения будем применять и для других матриц порядка 2^n . Например, без индекса $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ будем обозначать единичную матрицу порядка 2. Единичную матрицу порядка 2^2 обозначим E_2 и заметим, что $E_2 = E^{(2)} = E(E)$.

Утверждение 2. Определения 1 и 2 для матрицы H_n эквивалентны.

Для чисел $0 \leq i, j < 2^n$, записанных в простом двоичном коде

$$i = \sum_{k=1}^n i_k \cdot 2^{k-1}, \quad i_k \in \{0, 1\}, \quad (3)$$

введем три вида скалярного произведения:

$$\langle i, j \rangle = \langle i, j \rangle_n := \sum_{k=1}^n i_k j_{n-k+1}, \quad (i, j) = (i, j)_n := \sum_{k=1}^n i_k j_k, \quad (4)$$

$$u(i, j) = u_n(i, j) := i_1 j_n + \sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1} (j_{n-k+1} + j_{n-k}). \quad (5)$$

Можно в каждом скалярном произведении все операции рассматривать по модулю 2.

Определение 3. Каждая их матриц ДПУ W_n , H_n и U_n поэлементно определяется соответственно формулами

$$w_{ij} = (-1)^{\langle i,j \rangle}, \quad a_{ij} = (-1)^{(i,j)}, \quad b_{ij} = (-1)^{u(i,j)}.$$

Утверждение 3. Определения 1 и 3 для матриц W_n , H_n и U_n (соответственно) эквивалентны.

Лемма 1. Матрицы W_n , H_n , U_n симметричны, то есть $W_n = W_n^T$, $H_n = H_n^T$, $U_n = U_n^T$, и ортогональны по строкам, то есть

$$W_n^2 = H_n^2 = U_n^2 = 2^n \cdot E_n.$$

Доказательство. Симметричность матриц W_n , H_n и U_n вытекает из симметричности скалярных произведений (4) и (5). Симметричность H_n также легко вывести из формулы $H_n = H_{n-1}(H)$ и симметричности H .

Ортогональность достаточно показать для любой из матриц. Покажем для W_n . Ортогональность строк есть следствие ортогональности системы функций $\{w_k(x)\}_{k=0}^{2^n-1}$ (см. обозначения (2)):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2^n-1} w_{km} \cdot w_{lm} &= \sum_{m=0}^{2^n-1} w_k(\Delta_n^m) \cdot w_l(\Delta_n^m) = \\ &= 2^n \sum_{m=0}^{2^n-1} \int_{\Delta_n^m} w_k(x) \cdot w_l(x) dx = 2^n \int_0^1 w_{k+l}(x) dx = 2^n \cdot \delta_{kl}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если прямое ДПУ входного сигнала рассматривается в виде $y = \frac{1}{N} \cdot W \cdot x$, где $N = 2^n$, то восстанавливается сигнал по формуле $x = W \cdot y$.

Скалярным произведениям (4), (5) соответствуют матрицы квадратичной формы над полем \mathbb{Z}_2 . Матрица квадратичной формы скалярного произведения (i, j) (для построения ДПУ в нумерации Адамара) есть единичная матрица порядка n , а для скалярного произведения $\langle i, j \rangle$ (для построения ДПУ в нумерации Пэли) – матрица порядка n с единицей только на побочной диагонали. В матрице квадратичной формы

скалярного произведения (5) единицы указаны на двух диагоналях – на побочной и расположенной под побочной (остальные элементы нули).

При кодировании информации кроме трех рассмотренных нумераций применяются и другие нумерации ДПУ. К ним предъявляются [23] следующие требования. *Матрица ДПУ* есть симметричная матрица, которая получается из матрицы ДПУ в нумерации Пэли W_n перестановкой строк. При этом начальную строку переставлять нельзя, так как ее перестановка нарушает симметрию.

Утверждение 4. *Любая невырожденная матрица A над полем \mathbb{Z}_2 является матрицей квадратичной формы для определения некоего скалярного произведения $a(i, j)$, аналогичного (4) и (5). Если при этом A симметрична, то матрица с элементами $d_{ij} = (-1)^{a(i, j)}$ является (симметричной) матрицей ДПУ.*

И наоборот, любая матрица ДПУ задается невырожденной симметричной матрицей A над полем \mathbb{Z}_2 .

18.2 Связь ДПУ с преобразованием Уолша

Дискретное преобразование Уолша непосредственно связано с преобразованием Уолша ступенчатой функции.

Пусть $f(t) = 0$ при $t \geq 1$ и $f \in \Lambda_n$, то есть $f(t) = x_k$ при $t \in \Delta_n^k$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$. По теореме 15.2 и лемме 15.3 преобразование Уолша функции $f(t)$ равно такой ступенчатой финитной функции $g(t)$, что $g(t) = y_m$, если $t \in [m, m + 1)$, $0 \leq m \leq 2^n - 1$, и $g(t) = 0$ при $t \geq 2^n$.

Теорема 1. *Значения функции $g(t)$, равные коэффициентам Фурье по системе Уолша функции $f(t)$, вычисляются по формуле ДПУ в нумерации Пэли вида*

$$y = \frac{1}{2^n} \cdot W_n \cdot x,$$

где x, y есть матрицы-столбцы такие, что $x^T = (x_0, x_1, \dots, x_{2^n-1})$, $y^T = (y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1})$.

Обратное ДПУ по формуле $x = W_n \cdot y$ восстанавливает значения функции $f(t)$; саму функцию $f(t)$ восстанавливает преобразование Уолша от функции $g(t)$.

Доказательство. Преобразование Уолша функции $f(t)$ с носителем на $[0, 1)$ равно коэффициенту Фурье от $f(t)$ по системе Уолша-Пэли с номером, равным целой части аргумента t :

$$g(t) = \int_0^\infty f(z) \cdot W(z, t) dz = \int_0^1 f(z) \cdot w_{[t]}(z) dz = c_{[t]}[f].$$

Так как $f \in \Lambda_n$, то $c_{[t]}[f] = 0$ при $t \geq 2^n$. Обозначим $[t] = m$. Тогда (см. (2))

$$c_m[f] = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{\Delta_n^k} f(z) \cdot w_m(z) dz = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x_k \cdot w_m\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} x_k \cdot w_{mk}.$$

Ввиду симметрии ($w_{km} = w_{mk}$) матрицы W_n получили

$$g(t) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{km} \cdot x_k$$

при $t \in [m, m+1)$, $m < 2^n$, что соответствует формуле

$$y = \frac{1}{2^n} \cdot W_n \cdot x.$$

По следствию леммы 1 входной сигнал восстанавливается по формуле $x = W_n \cdot y$. В гл. 15 отмечено, что функция $f(t)$ восстанавливается как преобразование Уолша от $g(t)$. \square

Следствие. Для ДПУ вида $y = \frac{1}{2^n} \cdot W_n \cdot x$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x_k^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k^2.$$

Доказательство вытекает из равенства Планшереля для преобразования Уолша

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_0^\infty g^2(t) dt.$$

Замечание. В случае преобразования Уолша (и ДПУ) не принято рассматривать комплекснозначные функции (и сигналы), поэтому модуль в равенствах Планшереля (и Парсеваля) не ставят.

18.3 Быстрое преобразование Уолша

Существуют *быстрые алгоритмы реализации дискретных преобразований Уолша* (БПУ) разных нумераций, при которых матрицу ДПУ ранга n заменяют на произведение n слабо заполненных матриц. Тем самым добиваются существенного сокращения числа операций при выполнении ДПУ.

Для выбранной матрицы ДПУ существует, как правило, несколько способов факторизации и, соответственно, построения быстрого алгоритма. Принципы факторизации сформулировал в 1958 г. Гуд в виде следующей теоремы. Сначала уточним применяемое здесь понятие кронекеровской степени, так как существуют разные трактовки ее.

Определение 4. Блочная матрица с блоками вида $a_{ij}B$ есть *кронекеровское произведение* $A(B)$, где $A = (a_{ij})$.

Кронекеровской степенью матрицы A назовем матрицу $A^{(n)} = A^{(n-1)}(A)$.

Теорема 2. Любую матрицу $A^{(n)}$, являющуюся кронекеровской степенью квадратной матрицы A порядка t , можно представить:

- а) в виде обычной степени B^n некоторой матрицы B порядка t^n ;
- б) в виде (где E – единичная матрица порядка t) произведения

$$A^{(n)} = A(E^{(n-1)}) \cdot E(A(E^{(n-2)})) \cdot E^{(2)}(A(E^{(n-3)})) \cdot \dots \cdot E^{(n-1)}(A).$$

Продемонстрируем эти два способа факторизации на примере матрицы Адамара.

Матрицу Адамара H_2 можно получить как квадрат матрицы

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нее применим условную форму записи в виде $B_2 = \begin{pmatrix} E(1 & 1) \\ E(1 & -1) \end{pmatrix}$ блочной матрицы. Здесь верхняя половина матрицы B_2 есть блок $E(1 \ 1)$, который получается подстановкой в единичную матрицу вместо числа 1 блока $(1 \ 1)$, а вместо числа 0 нулевого блока $(0 \ 0)$ того же размера.

Аналогично получится $E(1 \ -1)$ заменой 1 на блок $(1 \ -1)$ и 0 на $(0 \ 0)$ в единичной матрице E порядка 2.

Матрица Адамара H_3 третьего уровня равна кубу матрицы

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в блочном виде $B_3 = \begin{pmatrix} E_2(1 & 1) \\ E_2(1 & -1) \end{pmatrix}$.

Аналогично запишем матрицу

$$B_n = \begin{pmatrix} E_{n-1}(1 & 1) \\ E_{n-1}(1 & -1) \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. Матрица Адамара n -го уровня равна n -й степени данной блочной матрицы:

$$H_n = (B_n)^n.$$

Доказательство. Аналогично тому, как для матрицы B_3 ее квадрат

$$(B_3)^2 = \begin{pmatrix} E(1 & 1 & 1 & 1) \\ E(1 & -1 & 1 & -1) \\ E(1 & 1 & -1 & -1) \\ E(1 & -1 & -1 & 1) \end{pmatrix},$$

получаем, что

$$(B_n)^2 = \begin{pmatrix} E_{n-2}(1 & 1 & 1 & 1) \\ E_{n-2}(1 & -1 & 1 & -1) \\ E_{n-2}(1 & 1 & -1 & -1) \\ E_{n-2}(1 & -1 & -1 & 1) \end{pmatrix},$$

и далее

$$(B_n)^3 = \begin{pmatrix} E_{n-3}(1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1) \\ E_{n-3}(1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1) \\ E_{n-3}(1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1) \\ E_{n-3}(1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1) \\ E_{n-3}(1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1) \\ E_{n-3}(1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1) \\ E_{n-3}(1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1) \\ E_{n-3}(1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1) \end{pmatrix},$$

где при умножении на B_n слева удлиняются в два раза подставляемые матрицы, причем в нижних блоках происходит удлинение с инверсией. Это описание соответствует переходу от H_{n-1} к H_n , что подтверждаем сравнением внешнего вида полученных матриц с матрицами H , H_2 , H_3 . Уровень единичной матрицы, в которую подставляем блок, уменьшается на единицу. Так как $E_0 = (1)$, то формула $(B_n)^n$ даст матрицу H_n . \square

Лемма 3 (о факторизации). Для любых квадратных матриц A и B одинакового порядка верно

$$H(A \cdot B) = H(A) \cdot E(B), \quad H(B \cdot A) = E(B) \cdot H(A).$$

Доказательство. Отличие умножения для блочных матриц от умножения обычных матриц одно и заключается в отсутствии коммутативности элементов. Проверкой устанавливаем, что

$$H(A) \cdot E(B) = \begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & AB \\ AB & -AB \end{pmatrix} = H(A \cdot B).$$

Второе равенство устанавливается аналогично. \square

Следствие. Имеют место представления

$$H_2 = H(E) \cdot E(H) \quad u \quad H_2 = E(H) \cdot H(E);$$

$$\begin{aligned} H_3 &= H(H(E)) \cdot E(E(H)) = H(E(E)) \cdot E(H(E)) \cdot E(E(H)) \quad u \\ H_3 &= E(E(H)) \cdot H(H(E)) = E(E(H)) \cdot E(H(E)) \cdot H(E(E)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 &= (E_3 \times H) \cdot (E_2 \times H \times E) \cdot (E \times H \times E_2) \cdot (H \times E_3) \quad u \\ H_4 &= (H \times E_3) \cdot (E \times H \times E_2) \cdot (E_2 \times H \times E) \cdot (E_3 \times H), \end{aligned}$$

где использовали обозначение $H \times E_3$ для $H(E(E(E)))$ – кронекеровского произведения матриц H и E_3 ;

и в общем случае

$$H_n = (E_{n-1} \times H) \cdot (E_{n-2} \times H \times E) \cdot (E_{n-1} \times H \times E_2) \cdot \dots \cdot (H \times E_{n-1});$$

$$H_n = H_{n-1}(E) \cdot E_{n-1}(H).$$

На основе леммы о факторизации можно предложить много различных разложений матрицы H_n в виде произведения слабо заполненных матриц. Укажем вид матриц для факторизации H_3 .

$$H \times E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E \times H \times E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 \times H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Способ факторизации H_n , приведенный в следствии к лемме 3, позволяет получить факторизацию матриц W_n и U_n (а также матриц для других перестановок системы Уолша), так как перестановка строк матрицы $E_{n-1} \times H$ обеспечивает перестановку строк матрицы H_n . Например,

$$W_3 = A \cdot (E \times H \times E) \cdot (H \times E_2), \quad \text{где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

При практической реализации БПУ матрицы H_n , W_n или U_n не формируют, а "последовательно умножают" слабо заполненные матрицы на входной сигнал, передавая результат для "последующего умножения". Есть простые алгоритмы [23] реализации этого "последовательного умножения" за счет чего значительно сокращается число операций.

При доказательствах перестановку строк матрицы лучше проводить не в последней матрице (как это сделали в предыдущем абзаце), а осуществлять домножением на матрицу специального вида, которая называется *пермутатором*. Например, перестановку второй и третьей строки (столбца) в матрице M порядка 4 проводят по формулам

$$P \cdot M \quad (\text{для строк}) \quad \text{и} \quad M \cdot P \quad (\text{для столбцов})$$

с пермутатором

$$P = P_{(23)} = P^{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако на практике для матриц большого объема существенную роль играет единообразие всех матриц в алгоритме используемого БПУ. Добавление даже столь простой матрицы как пермутатор значительно уве-

личивает число операций. Поэтому естественно возникает задача построения новых алгоритмов БПУ, приспособленных именно к нумерации Пэли. Переходим к решению этой задачи.

18.4 Новое произведение матриц и новый алгоритм БПУ

Выше отмечалось, что основными случаями дискретного преобразования Уолша являются ДПУ в нумерациях Пэли и Адамара. ДПУ в нумерации Уолша сначала было воспринято с большим интуизмом, как наиболее близко соответствующее тригонометрической системе. Даже функции Уолша-Уолша некоторые авторы (Пихлер и Хармут) разбивали на две группы, обозначая их *cal* и *sal* за внешнее сходство с системой косинусов и синусов соответственно. Эта аналогия оказалась кажущейся. ДПУ в нумерации Уолша на практике оказалось менее удобным, чем ДПУ в нумерациях Пэли и Адамара.

У ДПУ в нумерации Адамара есть существенное преимущество перед (чаще применяемым на практике) ДПУ в нумерации Пэли, состоящее в представимости матрицы ДПУ в нумерации Адамара в виде $H^{(n)}$ кронекеровской степени (определения 2 и 4, утверждение 1) матрицы $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Покажем, что для ДПУ в нумерации Пэли возможно аналогичное представление.

Введем *новый вид произведения матриц*, по наличию блочной структуры и по размеру получающихся блоков немного напоминающий кронекеровское произведение матриц.

Определение 5. Для матриц A размера $n \times m$ и B размера $k \times l$ обозначим $C = A\{B\}$ блочную матрицу размера $nk \times ml$ и вида

$$C = \begin{pmatrix} A^1 B_1 & A^2 B_1 & \dots & A^m B_1 \\ A^1 B_2 & A^2 B_2 & \dots & A^m B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1 B_k & A^2 B_k & \dots & A^m B_k \end{pmatrix}, \quad (6)$$

блоки которой размера $n \times l$ равняются произведению столбца A^j (с номером j) первой матрицы на строку B_i (с номером i) второй матрицы.

Анализируя формулу (6) делаем вывод, что новый вид произведения матриц есть блочная матрица с нумерацией блоков по правилу: *строка второго сомножителя на столбец первого* и со значениями блоков, полученных по правилу: *столбец первого сомножителя на строку второго*.

Отметим, что произвольный блок $A^i B_j$ матрицы (6), элементы которого получаются в результате поэлементного произведения столбца на строку, можно представить в виде кронекеровского произведения

$$A^i \cdot B_j = A^i(B_j) = B_j(A^i). \quad (7)$$

Линии (строки и столбцы) этой матрицы C выражаются через кронекеровское произведение линий исходных матриц. А именно:

$$\text{если } I = (r - 1)n + i, \text{ то } C_I = A_i(B_r) \quad (\text{для строк}); \quad (8)$$

$$\text{если } J = (p - 1)l + j, \text{ то } C^J = B^j(A^p) \quad (\text{для столбцов}). \quad (9)$$

При нумерации элементов матриц с нуля (а не с 1) связь номеров линий другая: $I = rn + i, J = pl + j$.

Формулы (8) и (9) позволяют установить корректность *определения степени* $A^{\{d\}} = A\{A^{\{d-1\}}\} = A^{\{d-1\}}\{A\}$ *относительно нового вида произведения матриц*. Воспользуемся нумерацией элементов с нуля. Тогда строки матрицы $A^{\{3\}}$ с номером $i + jn + kn^2$ имеют вид $A_i(A_j(A_k))$, строки матрицы $A^{\{4\}}$ с номером $i + jn + kn^2 + mn^3$ имеют соответственно вид $A_i(A_j(A_k(A_m)))$ и так далее. Для столбцов аналогично.

Очевидно, что кронекеровское произведение $A(B)$ симметричных матриц есть симметричная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что для нового произведения $A\{B\}$ это не так.

Лемма 4. *Если A, B симметричны, то $(A\{B\})^T = B\{A\}$.*

Доказательство. Транспонируем блочную матрицу (6)

$$(A\{B\})^T = \begin{pmatrix} (A^1 B_1)^T & (A^1 B_2)^T & \dots & (A^1 B_l)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^n B_1)^T & (A^n B_2)^T & \dots & (A^n B_l)^T \end{pmatrix}.$$

Для блоков применим формулу транспонирования произведения и свойство симметричности $(A^i B_j)^T = B_j^T \cdot (A^i)^T = B^j A_i$. \square

Следствие. Если матрица A симметрична, то симметрична и ее новая степень $A^{\{d\}}$.

Теорема 3. Матрицы ДПУ в нумерации Пэли (1) допускают определение в виде степени матрицы $W_1 = H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ относительно нового вида (6) произведения матриц

$$W_n = W_k \{W_{n-k}\}.$$

Доказательство. Произвольные числа $0 \leq i, j < 2^n$ представим в виде $i = m2^k + l$, $j = r2^{n-k} + t$, где $0 \leq l, r < 2^k$, $0 \leq m, t < 2^{n-k}$. Тогда, используя обозначение (4),

$$\langle i, j \rangle_n = \sum_{s=1}^k i_s j_{n-s+1} + \sum_{s=k+1}^n i_s j_{n-s+1} = \langle l, r2^{n-k} \rangle_n + \langle m2^k, t \rangle_n,$$

что перепишем в виде

$$\langle i, j \rangle_n = \langle l, r \rangle_k + \langle m, t \rangle_{n-k}.$$

По формуле (4) получаем

$$w_{ij}^{(n)} = (-1)^{\langle l, r \rangle_k} \cdot (-1)^{\langle m, t \rangle_{n-k}} = w_{lr}^{(k)} \cdot w_{mt}^{(n-k)}. \quad (10)$$

Начальный блок матрицы W_n (соответствует $m = r = 0$) состоит из элементов $w_{it}^{(n)} = w_{i0}^{(k)} \cdot w_{0t}^{(n-k)} \equiv 1$ и представляется в виде произведения нулевого столбца матрицы W_k на нулевую строку матрицы W_{n-k} . Произвольный блок (при фиксированных m, r) матрицы W_n размера $2^k \times 2^{n-k}$ имеет вид (10), трактуется как произведение r -го столбца матрицы W_k на m -ю строку матрицы W_{n-k} , а располагается как блок с номером строки m и номером столбца r . Это и есть определение $W_k \{W_{n-k}\}$. \square

Отметим очевидное равенство для единичных матриц

$$E(A \cdot B) = E(A) \cdot E(B). \quad (11)$$

Лемма 5 (о факторизации нового произведения). Для любых квадратных матриц A и B одинакового порядка верно

$$H_1\{A \cdot B\} = H_1\{A\} \cdot E_1(B).$$

Доказательство заключается в перестановке строк в предыдущем доказательстве. Строки нижних блоков матриц $H(A)$ и $H(AB)$ выдвигаем и вставляем внутрь верхних блоков со сдвигом на одну строку. При этом матрицы $H(A)$ и $H(AB)$ превратятся в $H\{A\}$ и $H\{AB\}$. \square

Следствие. Для матриц ДПУ в нумерации Уолша имеет место рекуррентное соотношение

$$W_n = H_1\{E_{n-1}\} \cdot E_1(W_{n-1}),$$

определяющее следующий быстрый алгоритм реализации ДПУ в нумерации Пэли

$$W_3 = H_1\{E_2\} \cdot E_1(H_1\{E_1\}) \cdot E_2(H_1),$$

$$W_4 = H\{E_3\} \cdot E(H\{E_2\}) \cdot E_2(H\{E\}) \cdot E_3(H),$$

$$W_5 = H\{E_4\} \cdot E(H\{E_3\}) \cdot E_2(H\{E_2\}) \cdot E_3(H\{E\}) \cdot E_4(H)$$

и так далее.

Доказательство. К формуле $W_n = H\{W_{n-1} \cdot E_{n-1}\}$ применим лемму $W_n = H\{E_{n-1}\} \cdot E_1(W_{n-1})$. В частности, $W_2 = H\{E\} \cdot E(H)$.

Отсюда

$$W_3 = H_1\{E_2\} \cdot E_1(W_2) = H_1\{E_2\} \cdot E_1(H\{E\} \cdot E(H))$$

и по формуле (11)

$$W_3 = H_1\{E_2\} \cdot E_1(H_1\{E_1\}) \cdot E_2(H_1).$$

Аналогично,

$$W_4 = H\{E_3\} \cdot E(W_3) = H\{E_3\} \cdot E(H\{E_2\} \cdot E(H\{E\}) \cdot E_2(H)),$$

$$W_4 = H\{E_3\} \cdot E(H\{E_2\}) \cdot E_2(H\{E\}) \cdot E_3(H). \quad \square$$

Приведем явный вид матриц данного алгоритма ДПУ в простейшем случае

$$W_2 = H\{E\} \cdot E(W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если также расписать матрицы предложенного алгоритма в развернутом виде и сравнить их с матрицами алгоритма быстрого ДПУ в нумерации Адамара, полученными с помощью формул следствия леммы 3 о факторизации, то сразу выделяется преимущество этих матриц, состоящее в компактности расположения значащих чисел и внешнем сходстве с быстрым алгоритмом дискретного преобразования Фурье.

18.5 УПРАЖНЕНИЯ

1. Перечислите все возможные матрицы, которые получаются перестановкой строк матрицы ДПУ второго уровня. Выделите из них симметричные матрицы.
2. Сколько существует симметричных перестановок матриц ДПУ третьего и четвертого уровня?
3. Найдите все (как правые, так и левые) пермутаторы P , которые переводят матрицы W_2 , H_2 , U_2 друг в друга. Выполните это задание для матриц ДПУ третьего уровня.
4. Докажите утверждения 1, 2, 3 и 4.
5. Проверьте непосредственным вычислением, что $(B_2)^2 = H_2$, а также $(B_3)^3 = H_3$ для матриц из параграфа 3.
6. Проверьте справедливость второй формулы леммы 3.
7. Приведите в развернутом виде еще один способ факторизации матрицы H_3 .
8. Вычислите W_4 по формуле $W_2\{W_2\}$.
9. Напишите в явном виде матрицы $H\{E_2\}$, $E(H\{E\})$ и $E_2(H)$. Вычислите W_3 как произведение этих матриц.
10. Напишите в явном виде способы факторизации матриц H_4 и W_4 .
11. Предложите схему реализации БПУ для матриц H_4 и W_4 отдельно. Напишите программу реализации данного алгоритма.
12. Докажите, что для кронекеровской степени верно соотношение $A^{(n)} = A^{(k)}(A^{(n-k)})$ для произвольной матрицы A .
13. Верно ли соотношение $A^{\{n\}} = A^{\{k\}}\{A^{\{n-k\}}\}$ относительно нового произведения матриц для произвольной матрицы A ?

Глава 19

Основы теории всплесков

19.1 Оконное преобразование Фурье

При цифровой обработке сигналов исходную функцию $f(x)$, определенную на $(-\infty, +\infty)$, называют *входной (непрерывный) сигнал*. Для $f \in L(-\infty, +\infty)$ по формуле преобразования Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (1)$$

вычисляется ее *непрерывный спектр*, который трактуется как выходной сигнал. В формуле (1) переменная x называется *временной*, а ω называется *частотой* сигнала или частотной характеристикой. В (1) и далее специально предлагаются две формы записи преобразования Фурье, чтобы читатель мог вычисления и результаты легче сравнивать с приведенными в другой литературе, например [10, 16, 21].

При анализе сигналов возникает необходимость в локализации сигнала по времени и по частоте. Для этого служат оконные преобразования Фурье.

Опишем возможный дискретный случай локализации.

Пусть

$$e_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1), \end{cases}$$

функция единичного импульса (начальная функция Хаара). Введем ее целочисленные сдвиги $e_k(x) = e_0(x - k)$. Тогда $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(x) \equiv 1$. Для про-

извольной $f \in L(-\infty, +\infty)$ определим $f_k(x) = f(x) \cdot e_k(x)$ проекцию функции на целочисленный участок. Тогда $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(x)$ и $\mathcal{F}[f_k](\omega)$ есть преобразование Фурье локализации по времени функции $f(x)$. По свойству линейности $\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f_k](\omega)$. В данном примере происходит "жесткая" локализация по времени. Пример более "мягкой" локализации получается заменой $e_0(x)$ на функцию (зависящую от $\delta > 0$)

$$h_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [\delta, 1 - \delta], \\ 0, & \text{если } x \notin (-\delta, 1 + \delta), \\ \frac{x+\delta}{2\delta}, & \text{если } x \in [-\delta, \delta], \\ \frac{1+\delta-x}{2\delta}, & \text{если } x \in [1 - \delta, 1 + \delta]. \end{cases}$$

Так как для преобразований Фурье большую роль играет гладкость функции, то на участках $[-\delta, \delta]$, $[1 - \delta, 1 + \delta]$ линейную зависимость заменяют на другую, гарантирующую гладкость в точках склейки.

Введем *ядро усреднения*

$$\omega_\epsilon(x) = C_\epsilon \cdot \exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right\} \text{ при } |x| < \epsilon, \quad \omega_\epsilon(x) = 0 \text{ при } |x| \geq \epsilon,$$

где константа C_ϵ выбирается из условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\epsilon(x) dx = 1$. Функцию $\omega_\epsilon(x)$, которую часто называют "шапочка" рассмотрим при малом фиксированном $\epsilon < 1/2$. Свертка единичного импульса с "шапочкой" и является *сглаженным единичным импульсом*

$$d_0(x) = \int_0^1 e_0(y) \omega_\epsilon(x - y) dy.$$

Лемма 1. Для целочисленных сдвигов $d_k(x) = d_0(x - k)$ сглаженного единичного импульса справедливо разложение единицы $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(x) \equiv 1$ на всей оси.

Указанное разложение единицы является дискретным и по предложенной схеме позволяет локализовать преобразование Фурье по времени.

Локализация только по частоте достигается подобной конструкцией над спектральной функцией, что обычно не практикуется.

Одновременная локализация как по времени, так и по частоте достигается при непрерывном оконном преобразовании, примером которого служит *преобразование Габора*. Преобразование Габора строится с использованием функции плотности нормального распределения (с помощью кривой Гаусса и ее сдвигов)

$$g_\sigma(x - b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

и имеет вид (где $\sigma > 0$ – фиксированный параметр)

$$\Gamma^\sigma[f](\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-ix\omega} \cdot g_\sigma(x - b) dx. \quad (3)$$

Если введем обозначение для ядра преобразования Габора

$$G^\sigma(x; \omega, b) = e^{ix\omega} \cdot g_\sigma(x - b), \quad (4)$$

то формулу (3) перепишем в виде скалярного произведения

$$\Gamma^\sigma[f](\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{G^\sigma(x; \omega, b)} dx = (f, G^\sigma(\omega, b)).$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x - b) db = 1$, то, обосновав (например, потребовав $f \in L_2(-\infty, +\infty)$) законность перемены порядка интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^\sigma[f](\omega, b) db = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[f](\omega).$$

Следовательно, обратное преобразование Габора формально можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^\sigma[f](\omega, b) db d\omega. \quad (5)$$

Ранее установлено (следствие леммы 14.1), что преобразование Фурье вида (1) для функции $g_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (с фиксированным σ)

$$\mathcal{F}[g_\sigma](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}.$$

Лемма 2. Преобразование Фурье от ядра преобразования Габора

$$\mathcal{F}[G^\sigma(\omega, b)](\lambda) = e^{ib\omega} \cdot e^{-ib\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot g_{1/\sigma}(\lambda - \omega).$$

Доказательство. Функция $g_\sigma(x - b)$ есть сдвиг функции $g_\sigma(x)$ и преобразование Фурье от данного сдвига равно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \cdot e^{-ib\lambda}.$$

Умножение на функцию $e^{ix\omega}$ (где x аргумент) исходной функции соответствует сдвигу преобразования Фурье на ω :

$$\mathcal{F}[G^\sigma(\omega, b)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lambda-\omega)^2 \sigma^2}{2}} \cdot e^{-ib(\lambda-\omega)} = e^{ib\omega} \cdot e^{-ib\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lambda-\omega)^2 \sigma^2}{2}}.$$

Сравнение с формулами (2) и (4) дает формулировку леммы. \square

Теорема 1. Для $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ преобразование Габора с параметром σ в точке b с точностью до множителя совпадает с преобразованием Габора от преобразования Фурье этой функции с параметром $\frac{1}{\sigma}$ в точке ω , а именно

$$\Gamma^\sigma[f](\omega, b) = \frac{e^{-ib\omega}}{\sigma} \cdot \Gamma^{1/\sigma}[\mathcal{F}[f]](-b, \omega).$$

Доказательство. Заметив, что $G^\sigma(\omega, b) \in L_2(-\infty, +\infty)$, применим равенство Планшереля для произведения функций

$$(f, G^\sigma(\omega, b)) = (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[G^\sigma(\omega, b)]),$$

что по лемме 2 приводит к следующей формуле, которую останется сравнить с (3)

$$\Gamma^\sigma[f](\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot e^{ib\omega} \cdot e^{i(-b)\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot g_{1/\sigma}(\lambda - \omega) d\lambda,$$

$$\Gamma^\sigma[f](\omega, b) = \frac{e^{-ib\omega}}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot e^{-i\lambda(-b)} \cdot g_{1/\sigma}(\lambda - \omega) d\lambda. \quad \square$$

Преобразование Габора $\Gamma^\sigma[f](\omega, b)$ усиливает входной сигнал в точке b , выделяя исходную функцию на интервале $[b - \sigma, b + \sigma]$, названным *временным окном*. Согласно теореме 1 в спектральной области происходит усиление выходного сигнала в точке ω с выделением его на интервале $[\omega - \frac{1}{\sigma}, \omega + \frac{1}{\sigma}]$, который называется *частотным окном*. Декартово произведение этих двух окон называют *прямоугольным время-частотным окном*. Длина 2σ временного окна называется *шириной время-частотного окна*, длина $\frac{2}{\sigma}$ частотного окна называется *высотой время-частотного окна*. Для преобразования Габора площадь время-частотного окна постоянна, что составляет известный в квантовой механике **принцип неопределенности**.

Преобразование Габора обобщается следующим образом. Пусть

$$g \in L_2(\mathbb{R}), \quad xg(x) \in L_2(\mathbb{R}). \quad (6)$$

Определение 1. *Оконным преобразованием Фурье* называется

$$P[f](\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\omega x} f(x)) \overline{g(x - b)} dx. \quad (7)$$

Ядром оконного преобразования служит

$$G(x; \omega, b) = e^{i\omega x} \cdot g(x - b),$$

где аргумент x иногда будем опускать. Оконное преобразование Фурье (7) можно записать в виде скалярного произведения

$$P[f](\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{G(x; \omega, b)} dx = (f, G(\omega, b)).$$

Приведенные формулы аналогичны (2)–(4).

Обозначим $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{g} = \mathfrak{F}[g]$ преобразование Фурье функции $g(x)$. Тогда по свойствам преобразования Фурье

$$\mathfrak{F}[G(0, b)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{g}(\lambda) \cdot e^{-ib\lambda}, \quad \mathfrak{F}[G(\omega, b)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-ib(\lambda - \omega)} \cdot \widehat{g}(\lambda - \omega).$$

По формуле Планшереля для произведения $(f, G(\omega, b)) = (\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[G(\omega, b)])$, где $P[f](\omega, b) = (f, G(\omega, b))$, имеем

$$P[f](\omega, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} (\widehat{f}(\lambda) \cdot e^{ib\lambda}) \overline{\widehat{g}(\lambda - \omega)} d\lambda \cdot e^{-ib\omega}.$$

Получим соотношение $P[f](\omega, b) = P^*[\widehat{f}](-b, \omega) \cdot e^{-ib\omega}$, которое сформулируем в виде следующей теоремы, где расшифровывается смысл звездочки в обозначении сопряженного оператора оконного преобразования Фурье.

Теорема 2. Если функция окна $g(x)$ удовлетворяет соотношению (6), то преобразование (7) для функции $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ с точностью до поворота в комплексной плоскости совпадает с преобразованием вида (7) от ее преобразования Фурье $\mathfrak{F}[f]$ с функцией $\mathfrak{F}[g]$ в качестве функции окна.

Точка $x^* + b$ (где x^* центр функции g) соответствует центру окна $[x^* + b - \Delta_g, x^* + b + \Delta_g]$ во временной области с шириной окна $2\Delta_g$. Условие (6) обеспечивает ширину окна в частотной области равную $2\Delta_{\widehat{g}}$. Величина $\Delta_g \Delta_{\widehat{g}}$ характеризует время-частотную локализацию и называется константой неопределенности g .

Принцип неопределенности состоит в том, что $\Delta_g \Delta_{\widehat{g}} \geq 1/2$, где равенство достигается только на функциях вида $Ce^{iax} g_\sigma(x - b)$ (где $C \neq 0$; $a > 0$; $a, b \in \mathbb{R}$), то есть пропорциональных (2). Следовательно, преобразование Габора имеет наименьшее время-частотное окно.

Формулы для вычисления центра и радиуса

$$x^* = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x |g(x)|^2 dx, \quad \Delta_g = \frac{1}{\|g\|_2^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x^*)^2 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 3. Если функции $g(x)$, $\mathfrak{F}[g]$ удовлетворяют условию (6) и $\|g\|_2 = 1$, то для любых $f, h \in L_2(-\infty, +\infty)$ имеем:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P[f](\omega, b) \overline{P[h](\omega, b)} d\omega db = 2\pi(f, h);$$

б) в точке непрерывности функции справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega x} P[f](\omega, b)) g(x - b) d\omega db.$$

В следующем параграфе приведем для аналогичного преобразования доказательство данной теоремы.

Изменением ширины окна во временной или частотной области добиваются увеличения или точности вычислений или более полного охвата информации. Оконное преобразование Фурье не приспособлено для одновременного выделения как низких, так и высоких частот.

Указанный недостаток устраняет *интегральное всплесковое преобразование*.

19.2 Интегральное всплесковое преобразование

Интегральное всплесковое преобразование (ИВП) более известно [10] под названием *непрерывное вейвлет-преобразование*. Его также называют *интегральное вейвлет-преобразование* (ИВП).

Определение 2. Функцию $\Psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ называют *базовым всплеском*, если ее преобразование Фурье $\widehat{\Psi} = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}[\Psi]$ удовлетворяет условию

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathfrak{F}[\Psi](\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (8)$$

Относительно базового всплеска (базисного вейвлета) Ψ *интегральное всплесковое преобразование* определяется формулой

$$T[f](a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad (9)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Замечание. Для $\Psi \in L(-\infty, +\infty)$ (это предположение влечет непрерывность $\widehat{\Psi}(\omega)$) условие (8) выполняется тогда и только тогда, когда соблюдено условие нормировки $\widehat{\Psi}(0) = 0$, эквивалентное требованию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0. \quad (10)$$

Если верно (10) и вместо суммируемости наложить более суровое ограничение $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|^c)|\Psi(x)| dx < +\infty$ для некоторого $c > 0$, то (8) выполнено.

Если обе функции $\Psi, \widehat{\Psi}$ удовлетворяют условию (8), то базовый всплеск Ψ обеспечивает частотно-временное окно конечной площади $4\Delta_\Psi\Delta_{\widehat{\Psi}}$.

Условие (10) вместе с требованием локализации сигнала определяет внешний вид графика функции $\Psi(x)$ в виде "вейвлета" что соответствует небольшой локальной волне или всплеску. Термин "всплеск" предложил К. И. Осколков, что более соответствует внешнему виду графика, чем английское wavelet и французское ondelette.

Для суммируемых в квадрате функций другим требованием, которое часто добавляют к (8), является условие нормировки $\|\Psi\|_2 = 1$.

Базовый всплеск используется для получения следующей системы сдвигов (translations) и сжатий (dilations)-растяжений

$$\Psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (11)$$

Утверждение 1. Если $\|\Psi\|_2 = 1$, то $\|\Psi^{a,b}\|_2 = 1$.

Утверждение 2. Если $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, то формулу (9) ИВП можно записать через скалярное произведение в виде $T[f](a, b) = (f, \Psi^{a,b})$.

Лемма 3. Преобразование Фурье сдвигов и растяжений всплеска

$$\mathfrak{F}[\Psi^{a,b}](\lambda) = \text{sign } a \cdot \sqrt{|a|} \cdot e^{-i\lambda b} \cdot \mathfrak{F}[\Psi](\lambda a).$$

Доказательство. Вычислим преобразование Фурье сжатого всплеска $\Psi^{a,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x}{a}\right)$, используя инвариантность относительно сдвига

$$\mathfrak{F}[\Psi^{a,0}](\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{x}{a}\right) e^{-i(a\lambda)x/a} d(x/a) = \text{sign } a \cdot \sqrt{|a|} \cdot \mathfrak{F}[\Psi](\lambda a).$$

Для сдвига функции получим $\mathfrak{F}[\Psi^{a,b}](\lambda) = \mathfrak{F}[\Psi^{a,0}](\lambda) \cdot e^{-ib\lambda}$. \square

Следствие. Для ИВП выполняется

$$T[f](a, b) = \text{sign } a \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[\Psi]_{\frac{1}{a},0}](b),$$

где к преобразованию Фурье базового всплеска применили формулу растяжения (11).

Доказательство. К утверждению 2 применим равенство Планшереля $T[f](a, b) = (\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[\Psi^{ab}])$ и лемму 3

$$T[f](a, b) = \text{sign } a \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}[f](\lambda) \cdot \sqrt{|a|} \mathfrak{F}[\Psi](\lambda a) \cdot e^{-i\lambda b} d\lambda. \quad \square$$

Теорема 4. Для любых $f, g \in L_2(-\infty, +\infty)$ (в обозначениях (8)) справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) \cdot \overline{T[g](a, b)} \frac{da}{a^2} db = C_{\Psi} \cdot (f, g). \quad (12)$$

Если $f \in C(x)$, то имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) \cdot \Psi^{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db. \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим

$$F = \mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[\Psi]_{\frac{1}{a},0}, \quad G = \mathfrak{F}[g] \cdot \mathfrak{F}[\Psi]_{\frac{1}{a},0}.$$

Согласно следствию леммы 3 и равенства Планшереля имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) \overline{T[g](a, b)} db = 2\pi \cdot (\mathfrak{F}[F], \mathfrak{F}[G]) = 2\pi \cdot (F, G).$$

В скалярное произведение

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}[f](\lambda) \cdot \overline{\mathfrak{F}[g](\lambda)} \cdot |\mathfrak{F}[\Psi]_{\frac{1}{a},0}(\lambda)|^2 d\lambda$$

подставим равенство

$$|\mathfrak{F}[\Psi]^{\frac{1}{a},0}(\lambda)|^2 = |a| \cdot |\mathfrak{F}[\Psi](\lambda a)|^2$$

и получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) \cdot \overline{T[g]}(a, b) db \right) \frac{da}{a^2} = \\ & = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}[f](\lambda) \cdot \overline{\mathfrak{F}[g](\lambda)} \cdot |\mathfrak{F}[\Psi](\lambda a)|^2 d\lambda \right) \frac{da}{|a|}. \end{aligned}$$

Применив теорему Фубини, приведем это выражение к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}[f](\lambda) \cdot \overline{\mathfrak{F}[g](\lambda)} \left(2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathfrak{F}[\Psi](\lambda a)|^2}{|a|} da \right) d\lambda = C_{\Psi} \cdot (\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g]),$$

где использовали формулу (8). Завершаем доказательство формулы (12) применением равенства Планшереля $(\mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g]) = (f, g)$.

Пусть $f \in C(x)$. В качестве функции g в формуле (12) возьмем функцию $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}$ плотности нормального распределения, равную (с точностью до множителя) сдвигу функции $g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. По утверждению 2 ее вейвлет-преобразование (где t аргумент, а x параметр)

$$T[g](a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (g_{\sigma}(\cdot - x), \Psi^{a,b}),$$

что в случае действительного базового всплеска (согласно определению свертки из параграфа 14.2) равно свертке $(g_{\sigma} * \Psi^{a,b})(x)$.

По лемме 2.14 верны два равенства: $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (g_{\sigma} * \Psi^{a,b})(x) = \Psi^{a,b}(x)$, и

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (f * g_{\sigma})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{\sigma}(t - x) dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) dt$$

как предел скалярного произведения f на сдвиг (с точностью до множителя) функции g_{σ} . По формуле (12) преобразуем последнее скалярное

произведение $f(x) = \frac{1}{C_\Psi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) T[g](a, b) \frac{da}{a^2} db$,

$$f(x) = \frac{1}{C_\Psi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} T[f](a, b) (g_\sigma * \Psi^{a,b})(x) (da)/a^2 db.$$

Переходим к пределу под знаком интеграла и получаем (13). \square

Замечание. При восстановлении можно использовать другой базовый всплеск.

Теорема 5. Если выполнено

$$C_{\Psi_1, \Psi_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}_1(\omega)| \cdot |\widehat{\Psi}_2(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

то для любых $f, g \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f, \Psi_1^{a,b}) \cdot \overline{(g, \Psi_2^{a,b})} \frac{da}{a^2} db = C_{\Psi_1, \Psi_2} \cdot (f, g).$$

Если $f \in C(x)$, то имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{C_{\Psi_1, \Psi_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f, \Psi_1^{a,b}) \cdot \Psi_2^{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db.$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 4. Примечательно, что Ψ_1, Ψ_2 могут иметь очень разные свойства.

Обращение доказано только в точках непрерывности. Формулу (12) можно считать формулой обращения, если рассматривать сходимость не по норме пространства, а слабую (как скалярное произведение на элементы сопряженного пространства). Можно доказать сходимость по норме L_2 (к исходной функции) интеграла (13) как несобственного с тремя особенностями: на $-\infty$ и $+\infty$ по a и в нуле по b . Причем L_2 -норму нельзя заменить на L -норму, так как при L_2 -аппроксимации норма разности стремится к нулю, а при L -аппроксимации норма разности стремится

к бесконечности. Это объясняется тем, что разность между исходной функцией и аппроксимирующим двойным определенным интегралом

$$\frac{1}{C_{\Psi}} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \int_{-M}^N T[f](a, b) \cdot \Psi^{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db + \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-M}^N T[f](a, b) \cdot \Psi^{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \right)$$

становится очень плоской и очень вытянутой функцией.

Условие (10) гарантирует равенство нулю данной конструкции (суммы двойных интегралов), что не позволяет хорошо приближать в L -смысле функции $f \in L_2$ без условия нормировки (10).

Замечание. На практике часто рассматривают исходные сигналы на положительной полуоси. Для таких сигналов выбирают базовый всплеск с условием симметрии на преобразование Фурье

$$\frac{1}{2} C_{\Psi} = \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

то есть уточняют условие (8).

19.3 Дискретизация всплесковых преобразований

Как отмечалось в предыдущих главах, интегральные преобразования на практике реализуются в виде дискретных аналогов. Промежуточным между интегральным преобразованием и дискретным интегральным преобразованием служит ряд Фурье по соответствующей (ортонормальной) системе. Для оконных и всплесковых преобразований имеется аналогичный подход. Промежуточным является интегральное (оконное или всплесковое) преобразование в узлах, которое назовем *дискретным оконным преобразованием* и *дискретным всплесковым преобразованием* соответственно.

Определение 3. *Дискретным оконным преобразованием с функцией окна, удовлетворяющей (6), называется*

$$DP[f](\omega_0, n) = \int_{+\infty}^{-\infty} (e^{-i\omega_0 x} f(x)) \overline{g(x - nt_0)} dx. \quad (14)$$

Дискретным преобразованием всплеска с базовым всплеском, удовлетворяющим (8), называется [10, с. 30]

$$DT[f](m, n) = \frac{1}{\sqrt{|a_0^m|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x}{a_0^m} - nb_0\right)} dx. \quad (15)$$

В (14) и (15) величины $\omega_0, t_0, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ есть заданные положительные числа, являющиеся параметрами дискретного преобразования. Дополнительное требование $a_0 > 1$ обеспечивает сжатия, а не растяжения. Например, часто выбирают $a_0 = 2, b_0 = 1$, что соответствует конструкции кратномасштабного анализа на примере функций Хаара.

Для удобства функцию окна и базовый всплеск берут действительными. Варианты возможных функций окна приведены в первом параграфе. В качестве базового всплеска можно предложить $\Psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$ вторую производную функции Гаусса, которую часто называют мексиканской шляпой.

Функция $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ называется *функцией с ограниченной шириной полосы* (bandlimited), если ее преобразование Фурье имеет компактный носитель, то есть $\mathfrak{F}[f](y) \equiv 0$ при $|y| > \Omega$.

Теорема 6 (Котельникова–Шеннона). Если $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $\mathfrak{F}[f](y) \equiv 0$ при $|y| > \pi$, то исходную функцию можно восстановить через ее значения в точках отсчета по формуле

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x - n)}{\pi(x - n)}. \quad (16)$$

Доказательство. По теореме Планшереля $\mathfrak{F}[f] \in L_2(-\infty, +\infty)$. В силу финитности преобразования Фурье $\mathfrak{F}[f]$ отсюда вытекает, что $\mathfrak{F}[f] \in L(-\infty, +\infty)$. Следовательно, оно разлагается в ряд Фурье (по сопряженной системе)

$$\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}[f](y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-iny},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{f}(y) \cdot e^{iny} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \cdot e^{iny} dy = f(n).$$

Подставим в формулу обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \cdot e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-iny} e^{ixy} dy.$$

Так как по теореме Планшереля $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, то $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ и в последнем определенном интеграле можно поменять знак суммирования и интегрирования, что дает результат

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(x-n)y} dy = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{e^{i(x-n)\pi} - e^{-i(x-n)\pi}}{i(x-n)}.$$

Применив формулу Эйлера, получаем (16). \square

Замечание. Если вернемся к ограничению на ширину полосы вида $\mathfrak{F}[f](y) \equiv 0$ при $|y| > \Omega$, то формула отсчетов в теореме Котельникова имеет вид [21, с. 24], [10, с. 50]

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) \cdot \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi}. \quad (17)$$

Формулы (16) или (17) для восстановления $f(x)$ называют *разложением Котельникова–Шеннона*.

Величина Ω называется [21, с. 24] *частотой Найквиста*, а величина $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$, через которую выбираются отсчеты, называется *интервалом Найквиста*. На практике, когда вместо ряда (17) вычисляют его частную сумму, рекомендуют интервал Найквиста уменьшать в два, три, четыре или пять раз.

В силу симметрии в L_2 функцию и ее преобразование Фурье часто меняют местами, рассматривая, например, в теореме Котельникова финитную с двух сторон исходную функцию.

Некоторые аналоги теоремы Котельникова используются и при практической реализации дискретных оконных и всплесковых преобразований.

Конструкция, к которой при этом приходим, носит название *фрейм*. Частным случаем фрейма является полная ортонормированная система функций. Большое практическое применение получили избыточные системы, не являющиеся ортогональными, которые и возникают в теории всплесков. Такие системы также называли *ортотодобными*.

Если обозначим

$$\Psi_{m,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a_0^m|}} \cdot \Psi\left(\frac{x}{a_0^m} - nb_0\right),$$

то (15) примет вид

$$DT[f](m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\Psi_{m,n}(x)} dx = (f, \Psi_{m,n}),$$

совпадающий с формулой вычисления коэффициентов Фурье по системе $\{\Psi_{m,n}\}$ на всей оси. В [10, с. 97] эти скалярные произведения названы *вейвлет-коэффициентами*. В случае ортонормированной системы $\{\Psi_{m,n}\}$ восстановление осуществляется по формуле

$$f = \sum_{m,n} (f, \Psi_{m,n}) \Psi_{m,n}.$$

В теории всплесков возникает более общий случай *биортогональной* системы, когда восстановление происходит по сопряженной к $\{\Psi_{m,n}\}$ системе функций $\{\tilde{\Psi}_{m,n}\}$ по формуле

$$f = \sum_{m,n} (f, \Psi_{m,n}) \tilde{\Psi}_{m,n}. \quad (18)$$

Сопряженная система $\{\tilde{\Psi}_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ определяется через систему $\{\Psi_{m,n}\}$ равенствами: $(\Psi_{m,n}, \tilde{\Psi}_{k,l}) = 1$, если $m = k$ и $n = l$, и $(\Psi_{m,n}, \tilde{\Psi}_{k,l}) = 0$, если $m \neq k$ или $n \neq l$. Сопряженная система обладает теми же свойствами, что и исходная; для произвольной $g \in L_2(-\infty, +\infty)$ имеет место аналогичное (18) разложение

$$g = \sum_{m,n} (\tilde{\Psi}_{m,n}, g) \Psi_{m,n}.$$

Аналогично теоремам 3 и 4 устанавливается, что

$$(f, g) = \overline{(g, f)} = \sum_{m,n} (f, \Psi_{m,n}) (\tilde{\Psi}_{m,n}, g) = \sum_{m,n} (g, \tilde{\Psi}_{m,n}) (\Psi_{m,n}, f),$$

гарантирующее справедливость формулы восстановления (18) в слабом смысле.

Перечислим основные возникающие при этом вопросы:

- а) полностью ли формула (18) восстанавливает функцию;
- б) в смысле какой сходимости (по норме какого пространства) рассматривать ряд (18);
- в) как организовать численно устойчивый процесс восстановления по формуле (18)?

В случае ИВП было сформулировано условие (8) допустимости базового всплеска. В случае дискретного преобразования всплеска желательно сформулировать аналогичное требование.

Должно выполняться естественное условие единственности:

для вейвлет-коэффициентов функций $f_1, f_2 \in L_2(-\infty, +\infty)$ выполнение равенства $(f_1, \Psi_{m,n}) = (f_2, \Psi_{m,n})$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$ влечет $f_1 = f_2$, что эквивалентно условию полноты системы $\{\Psi_{m,n}\}$:

$$\text{если } (f, \Psi_{m,n}) = 0 \text{ для всех } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } f = 0 \text{ в } L_2. \quad (19)$$

Требование устойчивости алгоритма восстановления означает, что близость (по норме пространства l_2) последовательностей $\{(f_1, \Psi_{m,n})\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ и $\{(f_2, \Psi_{m,n})\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ влечет близость (по норме пространства $L_2(-\infty, +\infty)$) восстанавливаемых функций f_1 и f_2 , что математически выражается в виде неравенства

$$A \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |(f, \Psi_{m,n})|^2 \quad (20)$$

для некоторой константы $A > 0$.

Второй из сформулированных вопросов (о сходимости ряда в l_2 для произвольной $f \in L_2$) математически выражается в виде неравенства

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |(f, \Psi_{m,n})|^2 \leq B \cdot \|f\|^2 \quad (21)$$

для некоторой константы $B > 0$.

Определение 4 [10, с. 98]. Система функций $\{\Psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющая условиям (20), (21), образует *фрейм*.

В качестве вариантов для построения фреймов при практической реализации предлагаются:

- а) начальная функция Хаара (некоторые ее обобщения реализуются в виде [16, с. 245] вейвлетов Стремберга);

б) функция [10, с. 122] (другой вариант сглаживания рассмотрен в первом параграфе и в [16, с. 265])

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } x \leq 0, \\ \sin^2 \frac{\pi}{2}x & , \text{ если } 0 < x \leq 1, \\ 1 & , \text{ если } x > 1, \end{cases}$$

приводящая к *вейвлетам Мейера*;

в) *B-сплайн степени 1* [21, с. 62] (там же см. *B-сплайн степени 2*)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \text{ если } x \in [-1, 1], \\ 0 & , \text{ если } x < -1 \text{ и } x > 1, \end{cases}$$

приводящий к *вейвлетам Баттла-Лемарье*;

г) функция ([21, с. 63] и [16, с. 264])

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

для *вейвлетов Котельникова-Шеннона*;

д) нормированная мексиканская шляпа [10, с. 125]

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - x^2) e^{-x^2/2}$$

для *вейвлетов Добеши-Гроссмана*;

е) модулированный гауссиан [10, с. 126]

$$\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} (e^{-i\xi_0 x} - e^{-\xi_0^2/2}) e^{-x^2/2}$$

для *вейвлетов Морле*.

19.4 Фреймы

Введем понятие базиса Рисса, которое обобщает понятие ортогонального базиса в гильбертовом пространстве с сохранением некоторых основных свойств.

Определение 5 [16, с. 17], [19, с. 13]. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется *системой Рисса* с постоянными

$A, B > 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходится в H и

$$A \cdot \|c\|_2^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right\|_H^2 \leq B \cdot \|c\|_2^2. \quad (22)$$

Если для любого элемента $f \in H$ существует единственное представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ в H , то система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *базисом Рисса*.

Обозначим: $L = \{x \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H; a_n \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{N}\}$ – линейную оболочку системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, V – замыкание по норме H линейной оболочки L . Тогда

$$V = \left\{ f \mid f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

Теорема 7 [19, с. 13]. *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть система Рисса с постоянными A и B в H , то:*

- 1) она составляет базис Рисса в пространстве V ;
- 2) для любого $f \in V$ выполнено

$$A \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leq B \cdot \|f\|^2. \quad (23)$$

Следствие. *В евклидовом пространстве любая (конечная или счетная) система элементов составляет фрейм этого пространства тогда и только тогда, когда она полна в этом пространстве.*

Доказательство. Фрейм есть полная система. А именно: из $(f, e_n) = 0$ для всех n по (20) вытекает $\|f\| = 0$, то есть $f = 0$ в H . Понятия полноты и замкнутости в гильбертовом пространстве совпадают. Если замыкание линейной оболочки системы (пространство V) совпадает с H , то второе утверждение теоремы есть обратное утверждение следствия. \square

Неравенство (23) и есть определение (20), (21) фрейма $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с границами A и B . Супремум по f среди всех возможных A и инфимум по f среди всех возможных B дают точные границы фрейма.

Если $A = B$, то это *жесткий фрейм*. Если $A = B = 1$, то *фрейм Парсеваля*. Любой жесткий фрейм псевдонормировкой $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{A}} e_n$ превращается во фрейм Парсеваля.

Теорема 8 [10, с. 100]. Если $\{\varphi_i\}$ – ортонормированный (то есть $\|\varphi_i\|_2 = 1$ для всех i) фрейм Парсевалья, то $\{\varphi_i\}$ – ортонормированный базис.

Пример нормированного жесткого фрейма, не являющегося ортонормированным базисом.

В двумерном пространстве \mathbb{R}^2 (\mathbb{C}^2) система $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, которую условно за внешнее сходство называют "системой мерседес образует жесткий фрейм с константой $3/2$.

Действительно, для произвольного $x = (x_1, x_2)$ имеем

$$\sum_{i=1}^3 |(x, e_i)|^2 = |x_2|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right|^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2.$$

Система элементов $\varphi_1 = (0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, $\varphi_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\varphi_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ есть фрейм Парсевалья. \square

В [10, с. 103] приведен аналог теорем 3 и 4 для фрейма, откуда выводятся [10, с. 113] условия и оценки для границ фрейма.

Чтобы понять, как устроен фрейм, рассмотрим его в конечномерном пространстве. Тем более, что при цифровой обработке информации именно этот случай и возникает. Для перечисленных выше вейвлетов данную конструкцию не демонстрируют, так как ее сложность состоит в выделении этого конечномерного подпространства исходного гильбертова пространства.

При цифровой обработке информации рассматривают два основных оператора. *Оператор анализа*

$$\mathcal{F} : x \rightarrow y = \{(x, e_n)\}_{n=1}^M$$

в виде инъекции некоторого N -мерного $R \subset H$ в \mathbb{R}^M . *Оператор синтеза*

$$\mathcal{F}^* : y = (c_1, \dots, c_M) \rightarrow \sum_{n=1}^M c_n e_n$$

в виде сюръекции $\mathbb{R}^M \rightarrow R \simeq \mathbb{R}^N$. Часто \mathbb{R}^M и \mathbb{R}^N меняют на \mathbb{C}^M и \mathbb{C}^N соответственно.

Очевидно, что $N \leq M$. Даже для конечномерного пространства из следствия теоремы 7 получили вывод – *верхней границы для M – числа*

элементов фрейма нет. Нижняя граница для числа элементов фрейма конечномерного пространства очевидна – размерность пространства. Но этот случай есть тривиальный вариант фрейма (см. теорему 8), далее исключенный из рассмотрения.

Композицию операторов анализа и синтеза называют *фреймовым оператором*

$$S := \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F}, \quad Sx = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}x) = \sum_{n=1}^M (x, e_n) e_n.$$

Запишем следующее скалярное произведение

$$(Sx, x) = \sum_{n=1}^M |(x, e_n)|^2,$$

порожденное оператором S , в операторном виде $S[x] := (Sx, x)$. *Операторная форма* записи основного (23) неравенства для фреймов имеет вид (Id – тождественный оператор в R)

$$A \cdot Id \leq S \leq B \cdot Id.$$

Тогда жесткий фрейм характеризуется условием $Sx = A \cdot x$, что влечет соотношение

$$x = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^M (x, e_n) e_n,$$

которое принимает симметричный вид при использовании *биортогональной* системы $\tilde{e}_n = \frac{e_n}{A}$:

$$x = \sum_{n=1}^M (x, \tilde{e}_n) e_n, \quad \text{или} \quad x = \sum_{n=1}^M (x, e_n) \tilde{e}_n.$$

Аналогичное представление верно для произвольного фрейма.

Теорема 9 (свойства фреймового оператора) [10, с. 101-106].

1. Фреймовый оператор S – самосопряженный и обратимый.
2. Для любого $x \in R \subset H$ имеем

$$x = \sum_{k=1}^M (x, \tilde{e}_k) e_k = \sum_{k=1}^M (x, e_k) \tilde{e}_k,$$

где $\tilde{e}_k = S^{-1}e_k$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^M$ – канонический дуальный фрейм.

3. Константы фрейма $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^M$ равны B^{-1} и A^{-1} .

4. Фреймовые коэффициенты минимальны в l_2 среди всех возможных представлений $x = \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k$, то есть $\sum_{k=1}^M |(x, e_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\alpha_k|^2$.

Фрейм оказался предпочтительней ортонормированной системы для защиты информации при передаче сигнала по каналу с помехами. Основной принцип состоит в том, что передают не исходный сигнал x , а его код в виде фреймовых коэффициентов $\{(x, e_k)\}$ или $\{y_k = (x, \tilde{e}_k)\}$. Принятый сигнал $\{y_k + \eta_k\}$ с шумами $\{\eta_k\}$ восстанавливается по формуле

$$\sum_{k=1}^M (x, \tilde{e}_k) e_k + \sum_{k=1}^M \eta_k e_k.$$

Если известен характер шумов, то подбирают фрейм $\{e_k\}$, относительно которого шумы "падают" в ядро оператора синтеза, что сводится к задаче $\mathcal{F}^* \eta \rightarrow \min$. Так как η случайная величина, то задача сводится к минимизации МСЕ – ошибки среднего квадратического приближения, равной с коэффициентом $\frac{1}{N}$ математическому ожиданию L_2 -нормы ошибки $MSE = \frac{1}{N} M[\|\eta\|]$.

Фрейм называется *равномерным*, если норма всех элементов фрейма одинакова.

Доказывается, что МСЕ минимально, если фрейм равномерный и жесткий. Свойства равномерных жестких фреймов с минимальной избыточностью $M = N + 1$ собраны в упражнениях.

Другие примеры жестких равномерных фреймов связаны с дискретным преобразованием Уолша.

Обозначим W, H, U – матрицы порядка 2^n дискретного преобразования Уолша (ДПУ) в нумерациях Пэли, Адамара и Уолша соответственно; A – любую из ортогональных матриц $\frac{1}{\lambda}W, \frac{1}{\lambda}H, \frac{1}{\lambda}U$, где $\lambda = \sqrt{2^n}$.

Теорема 10. Для матриц ДПУ алгебраическая кратность собственных чисел $\lambda_1 = -\lambda$ и $\lambda_2 = \lambda$ совпадает с их геометрической кратностью и равна: 2^{n-1} для H и U ; $(2^n - \lambda)/2$ для числа λ_1 и $(2^n + \lambda)/2$ для числа λ_2 в случае четного n для матрицы W .

Пространство \mathbb{R}^{2^n} распадается на прямую сумму $R^- \oplus R^+$ ортогональных подпространств R^- и R^+ указанной размерности таких, что: $Ax = -x$ для всех $x \in R^-$, $Ax = x$ для всех $x \in R^+$.

Оператор с матрицами $\frac{1}{2}(E - A)$ или $\frac{1}{2}(E + A)$ осуществляет ортогональное проектирование на R^- или R^+ соответственно.

Столбцы матриц $\frac{1}{2}(E - A)$ и $\frac{1}{2}(E + A)$ есть фрейм Парсеваля в R^- и R^+ соответственно.

Например, для $n = 2$ и нумерации Пэли столбцы матрицы

$$\frac{1}{2}(E + A) = \frac{1}{4}(2E + W) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

есть фрейм Парсеваля в трехмерном пространстве R^+ .

19.5 УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите лемму 1 и утверждения 1 и 2.

2. Для приведенного примера жесткого фрейма в двумерном пространстве (система мерседес) покажите, что

$$v = \frac{2}{3}(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3), \quad \text{где } c_k = (v, e_k)$$

для произвольного $v \in \mathbb{R}^2$ (или $v \in \mathbb{C}^2$).

Докажите, что данным свойством обладает любая система из трех векторов в \mathbb{R}^2 (или в \mathbb{C}^2), заданная условиями

$$(e_k, e_j) = \frac{3}{2}\delta_{kj} - \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^3 e_k = 0.$$

Покажите, что система $\{d_1, d_2, d_3\}$, которая получена "нормировкой" $d_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot e_k$ системы мерседес, является фреймом Парсеваля, восстанавливающим произвольный вектор

$$v = \sum_{k=1}^3 c_k d_k, \quad \text{где } c_k = (v, d_k).$$

3. Проверьте, что система векторов $d_1 = \left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$,
 $d_2 = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$, $d_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$, $d_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$

является фреймом Парсеваля, восстанавливающим произвольный вектор трехмерного пространства. Приведите геометрическую иллюстрацию данной системы векторов.

4. Покажите, что столбцы матрицы $\frac{1}{4}(2E + W_2)$ есть фрейм Парсеваля. Докажите, что после изменения знака первого элемента получится фрейм, имеющий ту же геометрическую интерпретацию, что и фрейм из предыдущего упражнения.

5. Докажите следующую **теорему**. Система $\{d_k\}_{k=1}^{n+1}$ векторов пространства \mathbb{R}^n (или \mathbb{C}^n), определенная условиями

$$(d_k, d_j) = \delta_{kj} - \frac{1}{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} d_k = 0,$$

есть фрейм Парсеваля, который, во-первых, восстанавливает произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^n$:

$$v = \sum_{k=1}^{n+1} c_k d_k, \quad \text{где } c_k = (v, d_k),$$

и, во-вторых, обладает свойством минимальности:

если $x = \sum_{k=1}^{n+1} c_k^* d_k$, и $c^* \neq c$, то $\|x\|_2 < \|c^*\|_2$, где $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$, $c^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n+1}^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

6. Систему $(n + m)$ векторов в n -мерном пространстве назовем *системой ко-ранга m* .

Постройте примеры фрейма Парсеваля ко-ранга 1 в четырехмерном и пятимерном пространстве. Постройте примеры ортонормированного жесткого фрейма ко-ранга 1 в четырехмерном и пятимерном пространстве.

7. Докажите, что столбцы каждой из матриц $\frac{1}{8}(4E_4 + H_4)$ и $\frac{1}{8}(4E_4 - H_4)$ есть фрейм Парсеваля, состоящий из шестнадцати векторов, в восьми-мерном пространстве. Проверьте, что первые 8 столбцов каждой матрицы линейно независимы. Составляет ли объединение этих двух групп по восемь столбцов базис всего шестнадцатимерного пространства? Здесь E_4 – единичная матрица порядка 16, H_4 – матрица ДПУ в нумерации Адамара порядка 16.

Литература

- [1] Ахмед, И. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / *И. Ахмед, К. Р. Рао*. – М. : Связь, 1980. – 240 с.
- [2] Агаев, Г. Н. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах / *Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн*. – Баку : Элм, 1981. – 180 с.
- [3] Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / *Н. К. Бари*. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.
- [4] Бернюков, Л. К. Дискретная и цифровая обработка информации. Введение в теорию и некоторые приложения / *Л. К. Бернюков*. – Владимир : Владим. гос. ун-т, 2002. – 160 с. – ISBN 5-89368-142-8.
- [5] Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях (несобственные интегралы и ряды Фурье) : учеб. пособие / *И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий*. – М. : Факториал, 1998. – 488 с. – ISBN 5-88688-007-0.
- [6] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / *А. О. Гельфонд*. – М. : Наука, 1967. – 375 с.
- [7] Голубов, Б. И. Элементы двоичного анализа / *Б. И. Голубов*. – М. : МГУП, 2005. – 204 с. – ISBN 5-8122-0790-9.
- [8] Голубов, Б. И. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения / *Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов*. – М. : Наука, 1987. – 344 с.
- [9] Гольд, Б. Цифровая обработка сигналов / *Б. Гольд, Ч. Рейдер*. – М. : Сов. радио, 1973. – 322 с.

- [10] Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / *И. Добеши*. – Москва-Ижевск : НИЦ РХД, 2004. – 464 с. – ISBN 5-93972-044-7.
- [11] Дьяченко, М. И. Мера и интеграл / *М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов*. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 160 с. – ISBN 5-88688-055-0.
- [12] Ефимов, А. В. Математический анализ (специальные разделы). В 2 ч. Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение / *А. В. Ефимов*. – М. : Высш. шк., 1980. – 279 с.
- [13] Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. В 2 т. / *А. Зигмунд*. – М. : Мир, 1965. – 616 с.
- [14] Залманзон, Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / *Л. А. Залманзон*. – М. : Наука, 1989. – 496 с. ISBN 5-02-014094-5.
- [15] Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*. – М. : Физматгиз, 1958. – 508 с.
- [16] Кашин, Б. С. Ортогональные ряды / *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*. – М. : АФЦ, 1999. – 550 с. – ISBN 5-93379-003-6.
- [17] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
- [18] Натансон, И. Н. Теория функций вещественной переменной / *И. Н. Натансон*. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
- [19] Новиков, И. Я. Теория всплесков / *И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина*. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 616 с. – ISBN 5-9221-0642-2.
- [20] Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь*. – М. : Мир, 1979. – 588 с.
- [21] Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / *Н. К. Смоленцев*. – Кемерово : КГУ, 2003. – 200 с. – ISBN 5-8353-0159-6.

- [22] Титчмарш, Э. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Титчмарш. – М. : КомКнига, 2005. – 480 с. – ISBN 5-484-00019-X.
- [23] Трахтман, А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М. : Сов. радио, 1975. – 208 с.
- [24] Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ. В. 2 т. / Э. Хьюитт, К. Росс. – М. : Наука (т. 1), Мир (т. 2), 1975. – 656 с.
- [25] Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2 т. / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – 264 с.
- [26] Schipp, F. Walsh series. An introduction to diadic harmonic analysis. / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pale. – Budapest : Acad. Kiado, 1990. – 560 p.