

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

А.И. НОВОЖИЛОВ

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Под редакцией доцента В.Н. Филимонова

Издание второе, переработанное
и дополненное

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию
в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного
пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям
подготовки: бакалавров и магистров «Технология, оборудование и автоматизация
машиностроительных производств» и дипломированных специалистов
«Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»;
«Автоматизированные технологии и производства».*

Владимир 2005

УДК 531.3
ББК 22.21
Н 74

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор заведующий кафедрой
теоретической механики и сопротивления материалов Магнитогорского
государственного технического университета им. Г.И. Носова
В.Г. Паршин

Кандидат технических наук доцент
К.И. Шишкина

Доктор технических наук, профессор
Московского университета МВД РФ
В.В. Панюхин

Кандидат физико-математических наук, доцент
Всероссийского заочного финансово-экономического института
В.Н. Горбатенко

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Новожилов, А. И.

Н 74 Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие /
А. И. Новожилов ; под ред. В. Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб.
и доп.; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та,
2006. – 242 с.
ISBN 5-89368-643-8.

Написано в соответствии с программами курса теоретической механики для студентов машиностроительных специальностей вузов, предусматривающими от 34 до 54 лекционных часов. Содержится краткое, но целостное изложение основных разделов: статики, кинематики и динамики.

В настоящее издание внесены уточнения в некоторые формулировки и положения, добавлены примеры и материал по исследованию механических конструкций. Приложение содержит дополнительный материал, выходящий за пределы программы, но важный для решений некоторых интересных исследовательских задач.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей вузов. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, а также инженерно-техническим работникам, занимающимся, в частности, проектированием различных конструкций и расчетом технологических процессов в машиностроении.

Ил. 213. Библиогр.: 9 назв.

УДК 531.3
ББК 22.21

ISBN 5-89368-643-8

© Владимирский государственный
университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
СТАТИКА	
I. Основные определения и понятия	11
II. Система сходящихся сил	15
§1. Сложение системы сходящихся сил	15
§2. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Уравнения равновесия	16
III. Момент силы	21
§1. Момент силы относительно точки	21
§2. Момент силы относительно оси	22
§3. Зависимость между моментами силы относительно точки и относительно оси	24
IV. Пара сил	24
§1. Пара сил. Момент пары	24
§2. Свойства пар	25
§3. Сложение пар	26
V. Произвольная система сил	28
§1. Приведение силы к точке	28
§2. Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве	28
VI. Центр тяжести	36
§1. Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил	36
§2. Центр тяжести тел	37
§3. Распределённые силы	41
VII. Трение	43
§1. Трение скольжения	43
§2. Трение качения	47
Тесты к разделу «Статика»	48

КИНЕМАТИКА

VIII. Кинематика точки	49
§1. Способы задания движения точки	49
§2. Скорость точки.....	51
§3. Ускорение точки.....	53
IX. Основные виды движения твердого тела	58
§1. Поступательное движение тела	58
§2. Вращение тела вокруг неподвижной оси	59
§3. Вращение тела вокруг неподвижной точки.....	62
§4. Плоскопараллельное движение твердого тела.....	69
X. Сложное движение точки	80
§1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки.....	80
§2. Определение абсолютной скорости точки	82
§3. Определение абсолютного ускорения точки. Ускорение Кориолиса.....	83
XI. Сложное движение твердого тела	86
§1. Сложение вращений тела вокруг двух осей	87
§2. Общий случай движения тела	91
Тесты к разделу «Кинематика».....	92

ДИНАМИКА

XII. Аксиомы динамики	93
§1. Первая аксиома	93
§2. Вторая аксиома. Основное уравнение динамики.....	94
§3. Третья аксиома. Сила инерции.....	94
XIII. Динамика материальной точки	95
§1. Метод кинетостатики.....	96
§2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	97
§3. Относительное движение материальной точки	101
XIV. Материальная система	104
§1. Основные определения и характеристики.....	104
§2. Моменты инерции тел	105
XV. Энергия материальной системы	110
§1. Работа силы.....	110
§2. Потенциальная энергия.....	113
§3. Кинетическая энергия.....	116

§4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы.....	119
§5. Закон сохранения энергии.....	121
XVI. Принцип Даламбера	121
§1. Принцип Даламбера	121
§2. Силы инерции твердого тела.....	122
XVII. Принцип возможных перемещений	130
§1. Возможные перемещения. Классификация связей	130
§2. Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики.....	132
§3. Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики	135
XVIII. Уравнения Лагранжа.....	137
§1. Обобщенные координаты	137
§2. Обобщенные силы	138
§3. Уравнения равновесия Лагранжа.....	140
§4. Обобщенные силы инерции	142
§5. Уравнения Лагранжа	143
XIX. Общие теоремы динамики.....	146
§1. Теорема о движении центра масс	147
§2. Теорема об изменении количества движения.....	150
§3. Теорема об изменении момента количества движения	154
§4. Дифференциальные уравнения вращения твердого тела	162
§5. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела	167
XX. Основы теории колебаний	168
§1. Основные определения колебательного движения	168
§2. Малые свободные колебания системы.....	172
§3. Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению.....	174
§4. Вынужденные колебания системы	177
§5. Влияние сопротивления на вынужденные колебания	181
XXI. Удар	182
§1. Явление удара	182
§2. Прямой центральный удар двух тел	184
§3. Удар по вращающемуся телу	188
Тесты к разделу «Динамика».....	190

Приложение. Беседы о теоретической механике	191
Беседа первая «Летающий бублик»... ..	192
Беседа вторая «Об устойчивости равновесия твердого тела»	195
Беседа третья «Мгновенно изменяемая система»	200
Беседа четвертая «О работе силы».....	204
Беседа пятая «Поговорим о силах».....	210
Беседа шестая «О велосипеде».....	213
Беседа седьмая «О теореме про кинетическую энергию и немного об ударе».....	215
Беседа восьмая «Кое-что о скалярном произведении»	219
Беседа девятая «Perpetuum mobile».....	221
Беседа десятая «Про массу, которая изменяется»	225
Беседа одиннадцатая «Про распределённые силы»	234
Ответы на тесты	238
Заключение	239
Библиографический список	240

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известен целый ряд отличных монографий, учебников по теоретической механике, в которых достаточно полно излагаются все разделы классической механики. Авторы их – известные российские ученые Г.К. Суслов, А.Г. Лойцянский, А.И. Лурье, Е.А. Николаи, Н.В. Бутенин, А.А. Яблонский, С.М. Тарг, В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, Н.Н. Поляхов и др. В этих работах, как правило, все положения, теоремы, принципы имеют полные и точные математические доказательства. Уделяется много внимания аналитической механике. Содержатся подробные исследования специальных разделов механики (теория колебаний, теория гироскопов, движение систем переменной массы, теория устойчивости движения, гидро- и аэродинамика, теория упругости и др.).

Государственными стандартами высшего профессионального образования на изложение курса теоретической механики отводится порой очень мало времени, практически удается дать студентам лишь необходимый минимум материала. Некоторым, даже машиностроительным специальностям, отводится лишь 34 лекционных часа на весь курс.

Поэтому учебники полного курса теоретической механики оказываются не очень удобными пособиями для студентов.

Мы предлагаем краткий курс теоретической механики. Он приспособлен к учебным планам, предусматривающим от 34 до 54 лекционных часов и содержащим при этом все основные разделы.

В целях экономии лекционного времени пришлось несколько изменить традиционные формы изложения материала, последовательность изложения, предложить другие, более компактные доказательства. А некоторые утверждения и теоремы, которые кажутся довольно очевидными, вообще даются без доказательств, в надежде, что студенты при необходимости сумеют найти их в других учебниках. Например, в тех книгах, авторы которых указаны выше.

Кроме того, у некоторых теорем и принципов доказывается только необходимость сделанных выводов, а доказательство достаточности упускается. И математические преобразования даются не очень подробно. Предполагается, что студент владеет основами высшей математики и сумеет самостоятельно довести их до конца. Очевидно, эти самостоятельные действия студента помогут ему лучше понять ход доказательства и грамотно использовать полученный опыт при решении прикладных задач.

Во втором издании курса добавлено приложение «Беседы о теоретической механике». В этих «Беседах» мы старались подобрать непростые, но интересные задачи, отличные от тех, что встречаются в известных сборниках, дать методы их решения и сделать полезные выводы. И не только для теоретической механики, но и для других родственных наук – строительной механики, динамики машин, гидравлики и прочих разделов физики. Старались показать, что в механике нашей не всё так просто, не всё уж так понятно, что некоторые явления в природе и технике можно, а может и нужно, объяснять совсем по-другому. Всё это мы демонстрируем на примерах и показываем способы их исследования.

Нам кажется, что этот материал будет интересен не только студентам, но и преподавателям теоретической механики, аспирантам, организаторам студенческих олимпиад. Да и совсем опытным и заслуженным преподавателям здесь кое-что покажется интересным и может быть даже спорным.

При редактировании этого издания большую помощь оказал научный редактор доцент В.Н. Филимонов. Его полезные советы и ценные предложения с благодарностью учтены.

Квалифицированную работу проделал при подготовке и оформлении рукописи ассистент кафедры С.О. Худяков.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – одна из самых древних наук. Возникла она во времена Аристотеля, основоположника первой Академии. Он впервые попытался сформулировать основы механики и дал название этой науке – *механика*. Последующее развитие механики было вызвано потребностями человеческого общества, ростом уровня производства и техники.

Механикой занимались известные ученые прошлого: Архимед, Галилей, Ньютон. А после Ньютона началось ее бурное развитие. Много сделали известные ученые Даламбер, Лагранж и наши, российские, Л. Эйлер, М. Ломоносов, М. Остроградский, С. Ковалевская, И. Мещерский, Н. Жуковский, А. Ляпунов и др.

Механика развивалась не только в теории, но и в прикладных науках. Теоретическая механика лежит в основе сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости, гидромеханики, аэродинамики, теории машин и механизмов и пр.

Теоретическая механика дает методы исследования движения тел и системы тел. Устанавливает основные закономерности движения механических систем. Позволяет составить их математические модели, с помощью которых затем анализируются возможные решения и проектируются реальные машины и конструкции, объясняются многие физические явления.

В то же время теоретическая механика стимулирует развитие высшей математики, требуя новые и точные методы расчета, в том числе и компьютерные.

Теоретическая механика, опирающаяся на известные законы Ньютона, является классической механикой в отличие от релятивистской механики, основанной на специальной теории относительности Эйнштейна. Но поскольку инженерные науки исследуют движение деталей механизмов и конструкций со скоростями, гораздо меньшими скорости света, закономерности, установленные классической, теоретической механикой вполне устраивают современную технику.

Хотя теоретическая механика формулирует свои законы, принципы, теоремы, используя некоторые гипотезы и специальные абстрактные понятия (сила, момент силы, материальная точка, абсолютно твердое тело, количество движения и т.п.), она позволяет достаточно правильно описывать и рассчитывать движение механических систем и реальных конструкций.

В инженерных высших учебных заведениях обычно теоретическую механику делят на три части: статику, кинематику и динамику.

В статике устанавливаются правила сложения сил, приложенных к телу, и исследуются условия равновесия конструкций под действием этих сил.

В кинематике рассматриваются различные виды движения тел. Но без учета причин, вызывающих эти движения. Исследуются заданные законы движения, определяются характеристики этого движения (траектории, скорости, ускорения точек тела).

В динамике решаются более важные и сложные задачи, определяется движение тел под действием сил и других обстоятельств.

Такое деление курса теоретической механики использовано и в настоящем курсе.

СТАТИКА

I. Основные определения и понятия

В разделе «Статика» исследуется равновесное состояние тел, устанавливаются условия, обеспечивающие такое состояние.

Для этого потребуется ввести несколько определений и понятий, которые позволят сформулировать такие условия.

1. *Твердое тело*. В статике и вообще в теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. То есть предполагается, что эти тела не деформируются, не изменяют свою форму и объем, какое бы действие на них не было оказано.

Исследованием движения нетвердых тел – упругих, пластичных, жидких, газообразных – занимаются другие науки (сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика и т.д.).

2. Будем рассматривать тела находящиеся в *равновесии*. Это такое состояние тела, при котором все его точки всё время остаются неподвижными.

3. *Сила*. Силой будем называть действие одного тела на другое, которое стремится вывести тело из состояния равновесия или, наоборот, сохранить его.

Сила – есть вектор (рис. 1.1). Действие силы на тело характеризуется: а) величиной, которая измеряется в ньютонах, а на чертеже изображается отрезком прямой в определенном масштабе; б) линией действия – прямой, вдоль которой направлено действие силы; в) направлением действия, которое указывается стрелкой; г) точкой приложения силы – обычно начало вектора.

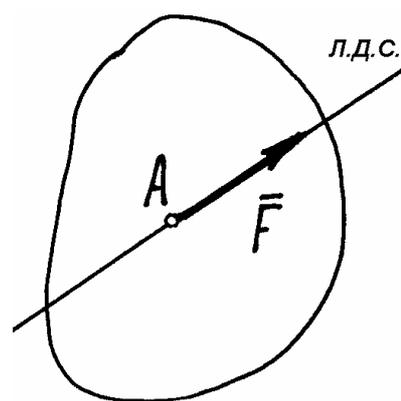


Рис. 1.1

В тексте вектор силы обозначается латинскими буквами \vec{F} , \vec{R} , \vec{P} и др. с черточками или знаком вектора над ними. Если черточки нет, значит у силы известен только ее модуль*.

Предполагается, что действие силы на тело не изменится, если ее перенести по линии действия в любую точку тела (конечно – твердого тела). Поэтому вектор силы называют *скользящим вектором*. Если силу перенести в точку, не расположенную на этой линии, действие ее на тело будет совсем другим.

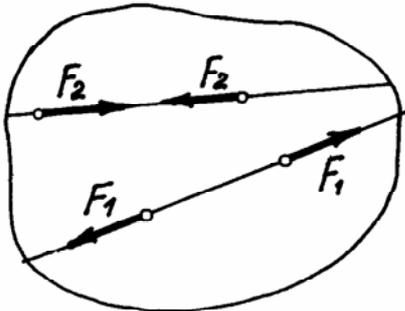


Рис. 1.2

4. Две силы считаются *уравновешивающимися*, если они равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны и приложены к одному и тому же телу (рис. 1.2). Под действием таких сил тело находится в равновесии. Естественно, если к телу приложить еще какие-нибудь уравновешивающиеся силы или убрать их, равновесие тела не нарушится.

5. *Равнодействующая*. Равнодействующей будем называть такую силу \vec{R} , которая может заменить несколько сил, то есть оказывает на тело такое же действие, как эти силы. Таким образом, равнодействующая – это сила, эквивалентная нескольким силам.

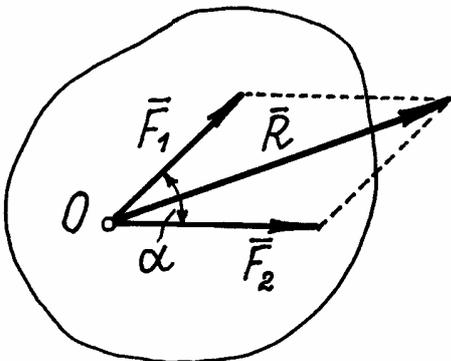


Рис. 1.3

Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела, находится построением параллелограмма на этих силах (рис. 1.3) и определяется как их векторная сумма:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Модуль равнодействующей как диагональ параллелограмма

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Конечно, $R \neq F_1 + F_2$. Такое равенство будет соблюдаться только при условии, что эти силы направлены по одной прямой в одну сторону. Если же векторы сил окажутся перпендикулярными, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

6. Нам потребуется третий закон Ньютона, который запишем так:

* Если на чертеже сила изображена вектором, то знак вектора можно не ставить (рис. 1.2).

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к телам в точке касания.

Конечно, эти силы не уравниваются, потому что они приложены к разным телам.

7. *Свободное и несвободное тело.* Свободным телом будем называть тело, которое может быть перемещено из данного положения в любом направлении. Если хотя бы в одном направлении движение тела ограничено, то оно называется несвободным.

Материальные тела или устройства, которые ограничивают перемещение тела, называются *связями*.

Например, тело, лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый *принцип освобождаемости*, которым будем пользоваться в дальнейшем. Записывается он так.

Любое несвободное тело можно сделать свободным, если связи убрать, а действие их на тело заменить силами такими, чтобы тело оставалось в равновесии.

Эти силы, заменяющие связи, называются *реакциями этих связей*.

Так, у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной, конечно, весу тела.

На рис. 1.4 даны наиболее типичные виды связей и их реакции.

Несколько замечаний к этому рисунку.

а) Реакцию нити (или стержня, прикрепленного к телам шарнирами) обозначают \vec{S} и направляют по нити (или стержню) *от тела*. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило. Оно избавляет от лишних и ненужных предположений и, как убедимся далее, помогает установить, сжат стержень или растянут.

б) Реакцию поверхности (нормальная реакция \vec{N}) всегда надо направлять *к телу* перпендикулярно касательной к этой поверхности и прикладывать к телу в точке соприкосновения.

Если поверхности негладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая направлена перпендикулярно нормальной реакции \vec{N} в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

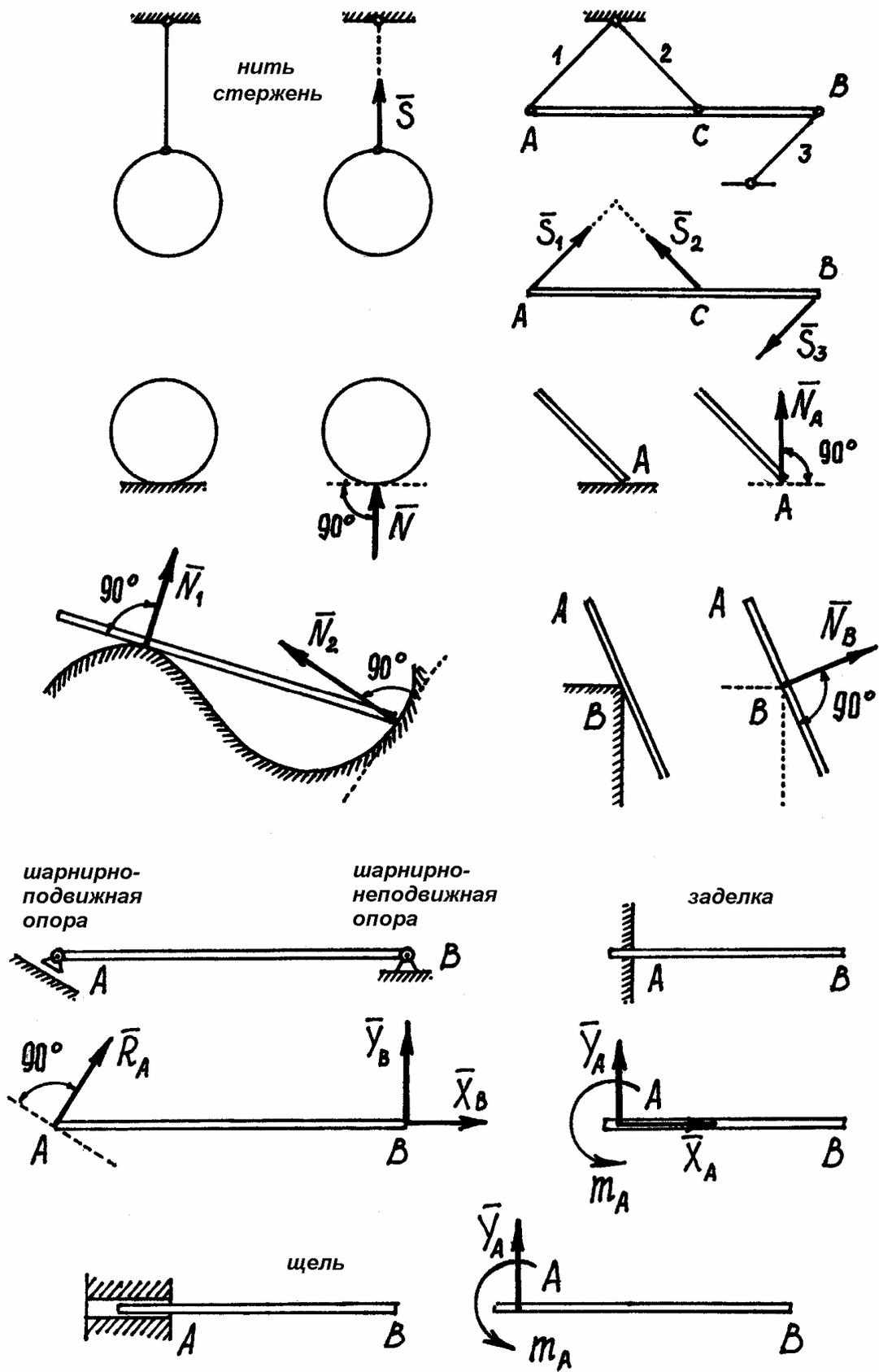


Рис. 1.4

в) Шарнирно-подвижная опора A препятствует движению тела только в направлении, перпендикулярном плоскости скольжения опоры. Поэтому реакция направляется перпендикулярно этой плоскости.

г) Направление реакции шарнирно-неподвижной опоры B предугадать трудно. Поэтому рассматривают ее как сумму взаимно перпендикулярных сил \vec{X}_B и \vec{Y}_B .

д) Тело, неподвижно прикрепленное к поверхности (заделка). Эта связь препятствует и перемещению во всех направлениях, и повороту тела. Поэтому ее реакция состоит из двух взаимно перпендикулярных сил и пары, которая препятствует вращению (понятие о паре будет дано ниже).

е) При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению, показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

8. Иногда приходится исследовать равновесие нетвердых тел. При этом будем пользоваться предположением, что если это нетвердое тело находится в равновесии под действием сил, то его можно рассматривать как твердое тело, используя все правила и методы статики.

II. Система сходящихся сил

Система сходящихся сил – это силы, приложенные к телу, линии действия которых пересекаются в одной точке.

§1. Сложение системы сходящихся сил

Пусть на тело действует несколько сил, линии действия которых пересекаются в одной точке O (ограничимся тремя силами, чтобы чертеж получился попроще). Силы приложены в точках A_1, A_2, A_3 и расположены не в одной плоскости, а, как говорят, в пространстве (рис. 2.1). Перенесем все силы по линиям действия в точку O . Получим «пучок» сил.

Сложим сначала две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенные к одной точке (см. I, п. 3), построением параллелограмма $OABD$. равнодействующая их $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Затем эту силу \vec{R}_1 складываем таким же способом с силой \vec{F}_3 . Найдем их равнодействующую $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Это будет

равнодействующая всех заданных здесь сил. Если бы сил было больше, то и их равнодействующую можно найти таким же способом.

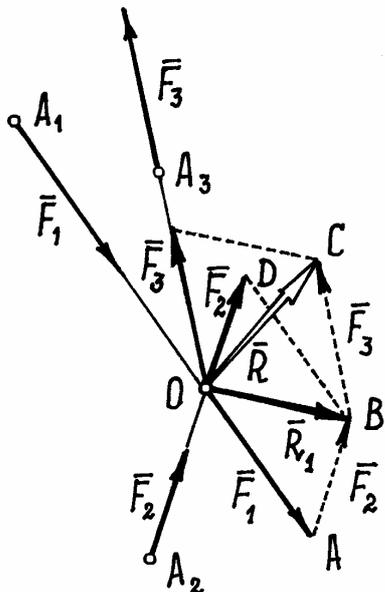


Рис. 2.1

Таким образом, делаем вывод: в результате сложения сходящихся сил получится сила, равнодействующая их, линия действия которой проходит через точку пересечения линий действия заданных сил, и равная векторной сумме всех сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.1)$$

где n – число сил.

Из рис. 2.1 видно, что равнодействующую двух первых сил \vec{R}_1 можно было не определять, а находить равнодействующую сразу всех сил построением многоугольника $OABC$, стороны которого равны и параллельны векторам заданных сил.

Этот пространственный многоугольник, сторонами которого являются векторы сил, называется *многоугольником сил*.

Нетрудно заметить, что если конец последней силы (точка C в нашем примере) окажется в точке O , равнодействующая будет равна нулю. Это будет означать, что эти сходящиеся силы уравниваются, и тело, к которому они приложены, будет находиться в равновесии. А так как $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, то условием, при котором сходящиеся силы уравниваются, или проще – *условием равновесия системы сходящихся сил является необходимость и достаточность замкнутости многоугольника сил или равенство нулю векторной суммы всех сил*:

$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

§2. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Уравнения равновесия

Дадим сначала определение проекции вектора силы на ось.

Если вектор силы \vec{F}_1 и ось x расположены в одной плоскости (рис. 2.2), то, как видно из рисунка, проекцией силы на ось будет отрезок оси X_1 , равный

$$X_1 = F_1 \cdot \cos \alpha.$$

Так как между линией действия силы и осью имеются два угла α и β , то, чтобы правильно вычислить проекцию, следует пользоваться таким правилом.

Проекция силы на ось определяется как произведение модуля силы на косинус острого угла между осью и линией действия силы. Проекция считается положительной, если вектор силы и ось направлены в одну сторону от перпендикуляра H к оси (см. рис. 2.2).

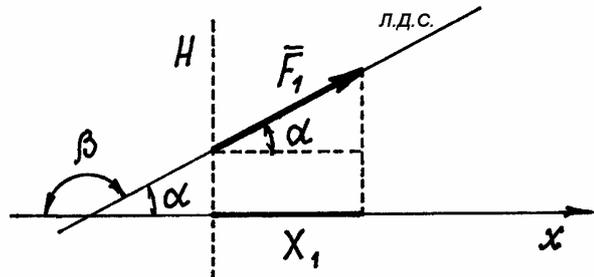


Рис. 2.2

Конечно, если вектор силы перпендикулярен оси ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), проекция силы равна нулю.

Если вектор силы \vec{F} и ось x не лежат в одной плоскости (рис. 2.3), то, чтобы определить проекцию силы на ось x , надо силу спроектировать на ось x_1 , параллельную оси x и проходящую через начало вектора силы, по предыдущему правилу. А знак проекции определять в зависимости от того, в какую сторону направлены ось и вектор силы от плоскости H , перпендикулярной оси.

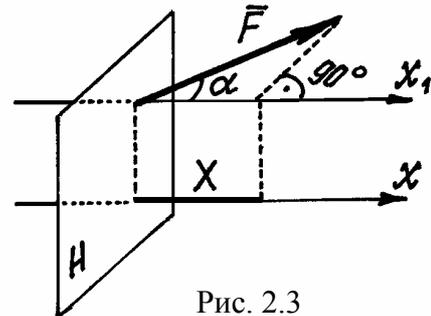


Рис. 2.3

Заметим, что проекция силы на ось равна нулю, если вектор силы расположен в плоскости, перпендикулярной оси.

Пример 2.1. На рис. 2.4 показаны три силы. Проекции сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на оси x, y, z очевидны

$$X_1 = -F_1; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = 0; \quad X_2 = F_2 \sin \alpha; \\ Y_2 = 0; \quad Z_2 = -F_2 \cos \alpha.$$

Чтобы найти проекцию силы \vec{F}_3 на ось x , нужно использовать правило двойного проектирования.

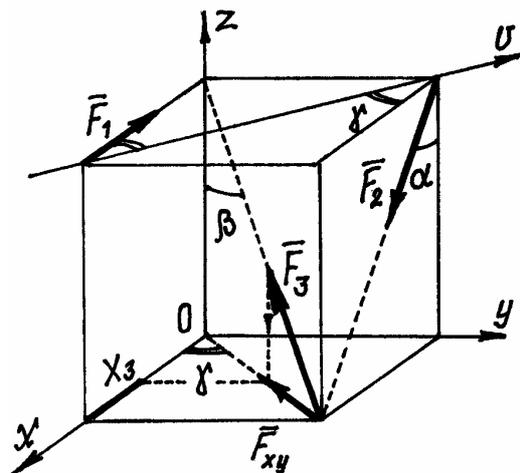


Рис. 2.4

Проектируем силу сначала на плоскость xOy , в которой расположена ось z (см. рис. 2.4), получим вектор \vec{F}_{xy} величиной $F_{xy} = F_3 \sin \beta$, а затем его проектируем на ось x : $X_3 = -F_{xy} \cos \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \cos \gamma$.

Аналогично действуя, найдем проекцию на ось y :

$$Y_3 = -F_{xy} \sin \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Проекция на ось z находится проще: $Z_3 = F_3 \cos \beta$. Нетрудно убедиться, что проекции сил на ось U равны:

$$V_1 = F_1 \cos \gamma; \quad V_2 = -F_2 \sin \alpha \cdot \cos \gamma;$$

$$V_3 = F_{xy} \cos(180^\circ - 2\gamma) = -F_3 \sin \beta \cdot \cos 2\gamma.$$

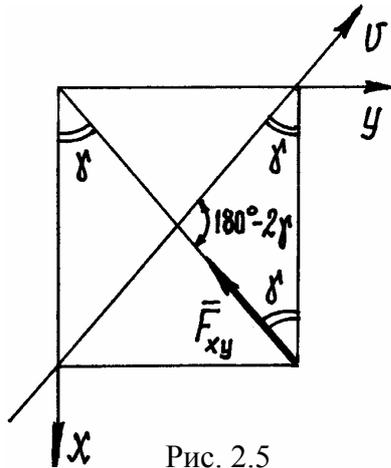


Рис. 2.5

При определении этих проекций удобно воспользоваться рис. 2.5, видом сверху на расположение сил и осей.

Вернемся к системе n сходящихся сил \vec{F}_i (рис. 2.6). Проведем оси координат с началом в точке пересечения линий действия сил в точке O . Мы уже знаем (2.1), что равнодействующая сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$. Спроектируем это векторное равенство

на оси. Получим проекции равнодействующей \vec{R} на оси x, y, z :

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad R_z = \sum Z_i.$$

Они равны алгебраическим суммам проекций сил на соответствующие оси. А зная проекции равнодействующей, можно определить и величину

ее как диагональ прямоугольного параллелепипеда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ или

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}. \quad (2.2)$$

Направление вектора \vec{R} найдем с помощью направляющих косинусов (см. рис. 2.6)

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Система сходящихся сил уравнивается, если их равнодействующая $R = 0$, а это возможно только при выполнении условий

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

Эти условия, алгебраические суммы проекций сил на оси равны нулю, называются *уравнениями равновесия системы сходящихся сил, расположенных в пространстве*.

Конечно, если все силы расположены в одной плоскости, например xOy , третье уравнение обратится в тождество и останутся лишь два уравнения

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0.$$

Следовательно, среди уравновешенных сил, расположенных в пространстве, можно найти три неизвестные величины; среди сил, расположенных в плоскости, – две.

Пример 2.2. На шар, вес которого P , лежащий на горизонтальной плоскости и привязанный к ней нитью AB , действует сила \vec{F} (рис.2.7). Определим реакции связей.

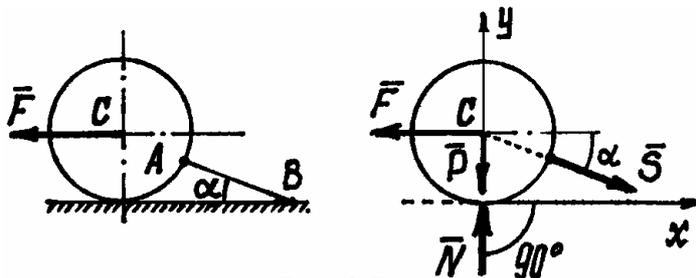


Рис. 2.7

Следует сразу заметить, что все задачи статики решаются по одной схеме в определенном порядке.

Продемонстрируем ее на примере решения этой задачи.

1. Надо выбрать (назначить) объект равновесия – тело, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы найти неизвестные.

В этой задаче, конечно, объект равновесия – шар.

2. Построение расчетной схемы. Расчетная схема – это объект равновесия, изображенный отдельно свободным телом, без связей, со всеми силами, действующими на него: реакциями и остальными силами.

Воспользовавшись рис. 1.4, показываем реакцию нити \vec{S} и нормальную реакцию плоскости – \vec{N} (см. рис.2.7). Кроме них на шар действуют заданные силы \vec{F} и \vec{P} .

3. Надо установить, какая получилась система сил, и составить соответствующие уравнения равновесия.

Здесь получилась система сходящихся сил, расположенных в плоскости, для которой составляем два уравнения (оси можно проводить произвольно)

$$\sum X_i = 0; \quad -F + S \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P + N - S \sin \alpha = 0.$$

4. Решаем систему уравнений и находим неизвестные

$$S = \frac{F}{\cos \alpha}, \quad N = S \sin \alpha + P = F \operatorname{tg} \alpha + P.$$

По условию задачи требовалось найти давление шара на плоскость. А мы нашли реакцию плоскости на шар. Но по определению (I, п. 6) следует, что эти силы равны по величине, только давление на плоскость будет направлено в противоположную сторону, вниз.

Пример 2.3. Тело весом P прикреплено к вертикальной плоскости тремя стержнями (рис. 2.8). Определим усилия в стержнях.

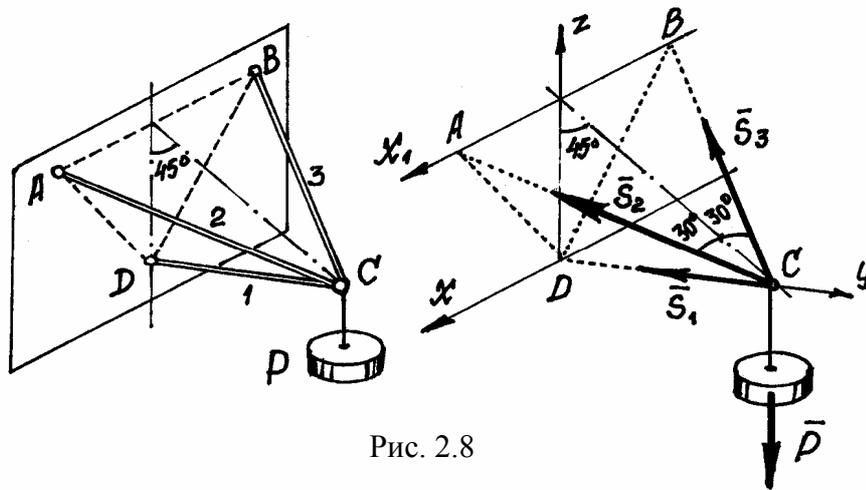


Рис. 2.8

В этой задаче объект равновесия – узел C вместе с грузом. Он нарисован отдельно с реакциями, усилиями в стержнях $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$, и весом \vec{P} . Силы образуют пространственную систему сходящихся сил. Составляем три уравнения равновесия

$$\sum X_i = 0; \quad S_2 \cos 60^\circ - S_3 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - P = 0.$$

Из первого уравнения следует: $S_2 = S_3$. Тогда из третьего: $S_2 = S_3 = \frac{P}{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{6}} P$, а из второго: $S_1 = -2S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = -P$.

Когда мы направляли усилия в стержнях от узла, от объекта равновесия, то предполагали, что стержни работают на растяжение. Усилие S_1 в стержне CD получилось отрицательным. Это значит – стержень сжат. Так что знак усилия в стержне указывает, как работает стержень: на растяжение или на сжатие.

III. Момент силы

§1. Момент силы относительно точки

Если к телу приложить силу \vec{F} в точке A (рис. 3.1), оно начнет вращаться вокруг шарнира O . Вращательный эффект будет определяться величиной силы и расстоянием от точки O до линии действия силы, т.е. произведением

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h,$$

которое называется *моментом силы \vec{F} относительно точки O* , а кратчайшее расстояние h от точки до линии действия силы – *плечом силы*.

Чтобы момент силы определял не только эффективность вращательного действия, но и направление вращения, условимся ставить знак (+) или (-). Если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, (+); если по направлению вращения часовой стрелки, (-).

Если плечо $h = 0$, то есть линия действия силы проходит через точку O , момент силы равен нулю.

Заметим, что площадь треугольника $\triangle OAB$ равна

$$S = \frac{1}{2} F \cdot h = \frac{1}{2} M_O(\vec{F}).$$

Значит, момент силы относительно точки численно равен двум площадям такого треугольника

$$M_O(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \triangle OAB. \quad (3.1)$$

Для того чтобы момент силы определял еще и плоскость, в которой происходит вращение, будем изображать его вектором, направленным перпендикулярно плоскости, в которой расположены точка и сила. И направлять в такую сторону, что если смотреть оттуда, увидим вращение тела вокруг точки против часовой стрелки (рис. 3.2). Нетрудно доказать, что вектор момента силы относительно точки есть векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} точки приложения силы на вектор силы \vec{F}

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

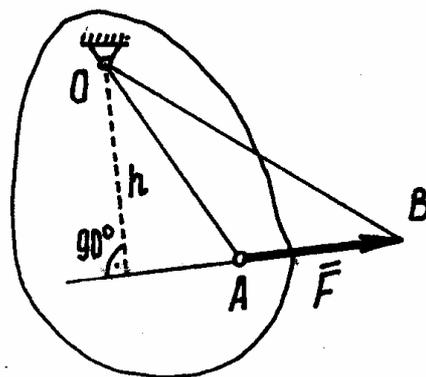


Рис. 3.1

(радиус-вектор \vec{r} – это вектор, проведённый из точки O и определяющий положение точки, расположенной на его конце).

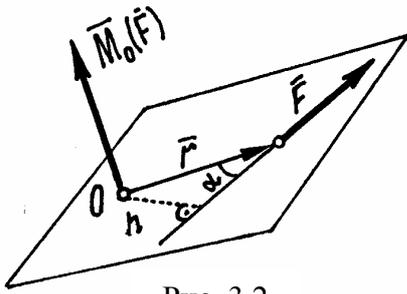


Рис. 3.2

Действительно, модуль векторного произведения $|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = Fh = M_O(\vec{F})$, и направлен этот вектор $\vec{r} \times \vec{F}$ (по правилу определения направления вектора векторного произведения) так же, как вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$.

§2. Момент силы относительно оси

Пусть на тело, которое может вращаться вокруг оси z , действует сила \vec{F} (рис. 3.3).

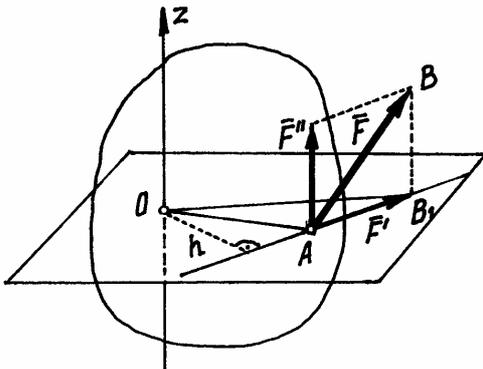


Рис. 3.3

Если через начало вектора силы, точку A , провести плоскость, перпендикулярную оси, и разложить силу на две составляющие \vec{F}' и \vec{F}'' , то нетрудно будет заметить, что сила \vec{F}'' , параллельная оси, будет только сдвигать тело вдоль оси. А вращать тело будет лишь сила \vec{F}' , расположенная в плоскости. И вращательное действие будет определяться моментом этой силы \vec{F}' относительно точки O , точки пересечения оси с плоскостью. Значит, момент силы \vec{F} относительно оси

z

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}') = F' \cdot h.$$

Так как составляющая силы \vec{F}'' при определении момента относительно оси не потребовалась, то правило определения этого момента можно сформулировать так:

Чтобы найти момент силы относительно оси, надо спроектировать вектор силы на плоскость, перпендикулярную оси, и определить момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Заметим, что если вектор силы параллелен оси или линия действия силы пересекает ось, момент силы относительно оси равен нулю. Или иначе, если вектор силы и ось расположены в одной плоскости, момент силы равен нулю.

Чтобы момент силы относительно оси указывал и направление вращения, будем использовать знак (+) или (-).

Если посмотрим на силу со стороны стрелки оси и увидим, что сила стремится вращать тело вокруг оси против часовой стрелки, момент будем считать положительным. Если по часовой - отрицательным.

Обратим внимание на то, что знак момента зависит не только от направления силы, но и от направления оси.

И еще. Из рис.3.3 видно, что площадь треугольника OAB_1 равна $S = \frac{1}{2} F \cdot h = \frac{1}{2} M_z(\vec{F})$. Поэтому момент силы относительно оси равен двум площадям этого треугольника

$$M_z(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \Delta OAB_1. \quad (3.2)$$

Пример. Определим моменты сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 относительно осей x , y , z (рис.3.4).

Моменты силы \vec{F}_1 находятся просто:
 $M_x(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot a$; $M_y(\vec{F}_1) = 0$; $M_z(\vec{F}_1) = F_1 \cdot b$.

Моменты сил \vec{F}_2 и \vec{F}_3 – посложнее.

В тех случаях, когда вектор силы направлен под углом к оси, полезно разложить вектор силы на составляющие, параллельные осям, и затем находить сумму моментов этих составляющих.

Так, моменты силы \vec{F}_2 :

$$M_x(\vec{F}_2) = M_x(\vec{F}_{2x}) + M_x(\vec{F}_{2z}) = 0 - F_{2z} \cdot c = -F_2 \sin \alpha \cdot c;$$

$$M_y(\vec{F}_2) = M_y(\vec{F}_{2x}) = F_2 \cdot a = F_2 \cos \alpha \cdot a;$$

$$M_z(\vec{F}_2) = -F_{2x} \cdot c = -F_2 \cos \alpha \cdot c.$$

И силы \vec{F}_3 :

$$M_x(\vec{F}_3) = F_{3z} \cdot c = F_3 \sin \beta \cdot c; \quad M_y(\vec{F}_3) = -F_{3z} \cdot b = -F_3 \sin \beta \cdot b;$$

$$M_z(\vec{F}_3) = 0 \text{ (линия действия силы } \vec{F}_3 \text{ пересекает ось } z \text{).}$$

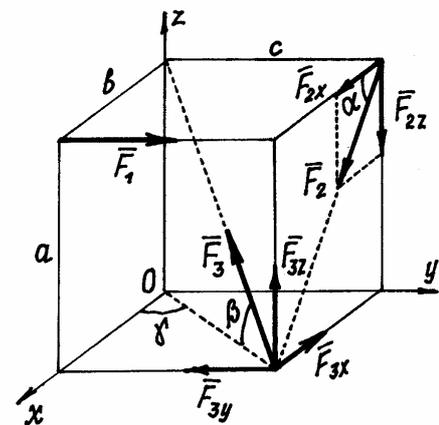


Рис. 3.4

§3. Зависимость между моментами силы относительно точки и относительно оси

Найдем моменты силы \vec{F} (рис. 3.5) относительно точки O и относительно оси z , проходящей через эту точку.

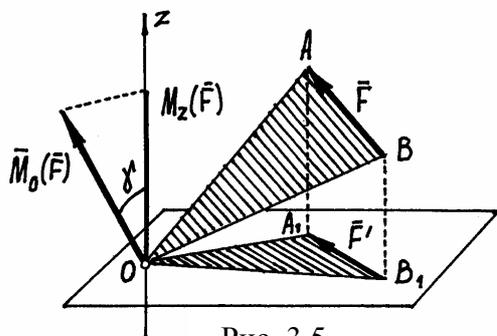


Рис. 3.5

Как было установлено (3.1) и (3.2),

$$M_O(\vec{F}) = 2\text{пл.}\triangle OAB,$$

$$M_z(\vec{F}) = 2\text{пл.}\triangle OA_1B_1.$$

Из рисунка видно, что $\triangle OA_1B_1$ является проекцией $\triangle OAB$ на плоскость, перпендикулярную оси.

Известно, что в этом случае

$$\text{пл.}\triangle OA_1B_1 = \text{пл.}\triangle OAB \cdot \cos \gamma, \quad (3.3)$$

где γ – угол между плоскостями этих треугольников. Его можно определить как угол между перпендикулярами к плоскостям, между вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ и осью z .

Умножив левую и правую части равенства (3.3) на 2, получим:

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \gamma = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z. \quad (3.4)$$

Момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно точки, расположенной на оси, на эту ось.

IV. Пара сил

§1. Пара сил. Момент пары

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны (рис. 4.1).

Очевидно, $F_1 = F_2$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

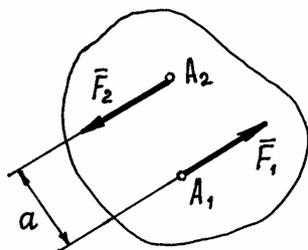


Рис.4.1

Несмотря на то, что векторная сумма сил равна нулю, эти силы не уравновешиваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнет вращаться. И вращательный эффект будет определяться *моментом пары*

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a.$$

Кратчайшее расстояние a между параллельными линиями действия сил называется *плечом пары*.

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент ее считается положительным (см. рис. 4.1), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары \vec{m} направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 4.2).

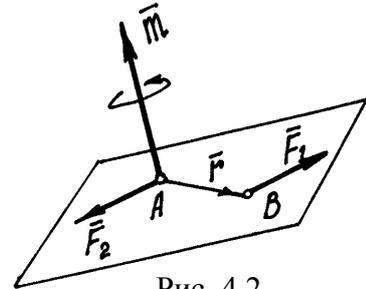


Рис. 4.2

Нетрудно доказать, что вектор момента пары есть вектор векторного произведения $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}_1$ (см. рис. 4.2). И заметим, что он равен вектору момента силы \vec{F}_1 относительно точки A , точки приложения второй силы $\vec{m} = \vec{M}_A(\vec{F}_1)$.

О точке приложения вектора \vec{m} будет сказано ниже. Пока приложим его к точке A .

§2. Свойства пар

1. Проекция пары сил на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары.

2. Найдем сумму моментов сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , составляющих пару, относительно какой-либо точки O (рис. 4.3).

Покажем радиусы-векторы точек A_1 и A_2 и вектор \vec{r} , соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки O

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

Но $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$. Поэтому $\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{r}_2 + \vec{r}) \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{r} \times \vec{F}_1$. Но $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, а $\vec{r} \times \vec{F}_1 = \vec{m}$. Значит,

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}.$$

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка O и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повернута в своей плоскости, действие ее на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары \vec{m} .

Поэтому можно сформулировать еще два свойства.

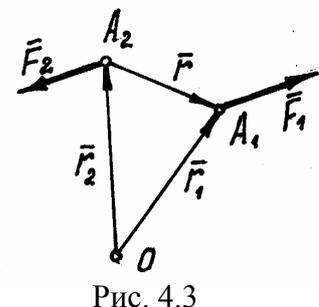


Рис. 4.3

3. Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4. Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь величиной момента, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним. Например, при силах $F_1 = F_2 = 5 \text{ Н}$ и плече $a = 4 \text{ см}$ момент пары $m = 20 \text{ Н}\cdot\text{см}$. Можно силы сделать равными 2 Н , а плечо $a = 10 \text{ см}$. При этом момент останется прежним $20 \text{ Н}\cdot\text{см}$ и действие пары на тело не изменится.

Все эти свойства можно объединить и сделать вывод, что пары с одинаковыми векторами момента \vec{m} и неважно где расположенные на теле оказывают на него равное действие. То есть такие пары эквивалентны.

Поэтому на расчётных схемах пару можно изображать в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом написать величину момента m . Или, если это пространственная конструкция, показывать только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит, вектор момента пары \vec{m} – свободный вектор.

И еще одно дополнительное замечание. Так как момент пары равен вектору момента одной из сил ее относительно точки приложения второй силы, то по аналогии с III, §3 момент пары сил относительно какой-либо оси z есть проекция вектора момента пары \vec{m} на эту ось:

$$m_z = m \cdot \cos \gamma,$$

где γ – угол между вектором \vec{m} и направлением оси z .

§3. Сложение пар

Пусть даны две пары с моментами m_1 и m_2 , расположенные в пересекающихся плоскостях (рис. 4.4).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными $a = AB$. Тогда модули сил, образующих первую пару, должны быть равны $F_1 = F_1' = \frac{m_1}{a}$, а образующих вторую пару: $F_2 = F_2' = \frac{m_2}{a}$.

Эти пары показаны на рис. 4.4, где $\vec{F}'_1 = -\vec{F}_1$, $\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2$. И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой AB на линии пересечения плоскостей.

Сложив силы, приложенные к точкам A и B , построением параллелограммов получим их равнодействующую $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и $\vec{R}_A = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$. Так как $\vec{R}_B = -\vec{R}_A$, то эти силы \vec{R}_A и \vec{R}_B будут образовывать пару с моментом $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{R}_B$, где \vec{a} – радиус-вектор точки B , совпадающий с AB .

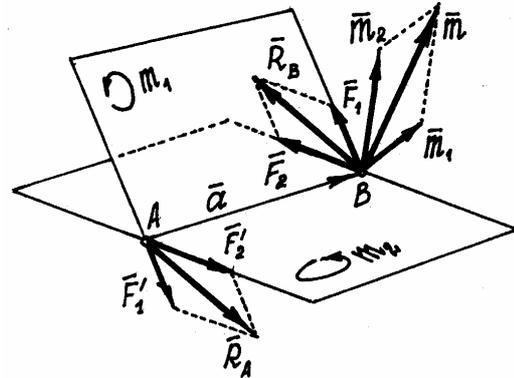


Рис. 4.4

Так как $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то момент полученной пары

$$\vec{m} = \vec{a} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{a} \times \vec{F}_1 + \vec{a} \times \vec{F}_2 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент ее будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом $\vec{m} = \sum \vec{m}_i$.

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{m} .

Равенство нулю момента результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравниваются. Следовательно, условие равновесия пар

$$\sum \vec{m}_i = 0.$$

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

Например, пары, показанные на рис.4.5, расположены в одной плоскости и моменты их $m_1 = 2$ Н·см, $m_2 = 5$ Н·см, $m_3 = 3$ Н·см. Пары уравниваются, потому что алгебраическая сумма их моментов равна нулю $\sum m_i = m_1 - m_2 + m_3 = 2 - 5 + 3 = 0$.

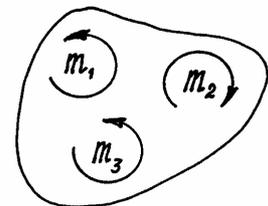


Рис.4.5

V. Произвольная система сил

§1. Приведение силы к точке

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу \vec{F} (рис. 5.1) перенести в какую-нибудь точку O , не расположенную на линии действия.

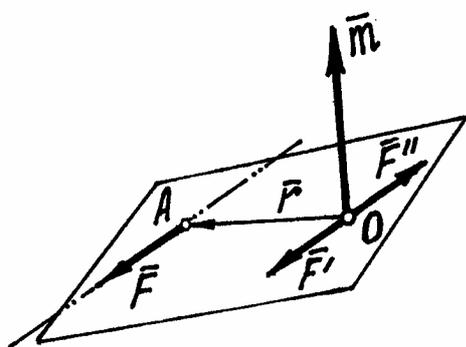


Рис. 5.1

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы \vec{F}' и \vec{F}'' , параллельные силе \vec{F} и равные ей по величине, $F' = F'' = F$.

В результате получим силу \vec{F}' , равную силе \vec{F} и приложенную к точке O . То есть мы как бы перенесли заданную силу \vec{F} из точки A в точку O , но при этом появилась пара, образованная силами \vec{F} и \vec{F}'' . Момент

этой пары $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$ равен моменту заданной силы \vec{F} относительно точки O .

Процесс замены силы \vec{F} равной ей силой \vec{F}' , приложенной к точке O , и парой называется приведением этой силы к точке O .

Точка O называется точкой приведения; сила \vec{F}' , приложенная к точке приведения, - приведенной силой. Появившаяся пара – присоединенной парой.

2. Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве

Пусть дана система, состоящая из нескольких произвольно расположенных сил (на рис. 5.2 показаны три силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$). Требуется сложить эти силы и посмотреть, что в результате получится.

Приведем все силы к произвольно выбранной точке O , центру приведения. Получим систему приведенных сил, приложенных к точке O , равных заданным силам: $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$, $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$, $\vec{F}'_3 = \vec{F}_3$, и систему присоединенных пар, моменты которых равны векторам моментов заданных сил относительно центра приведения O : $\vec{m}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1)$, $\vec{m}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2)$, $\vec{m}_3 = \vec{M}_O(\vec{F}_3)$ (на рис. 5.2 самих пар нет, показаны только векторы их моментов).

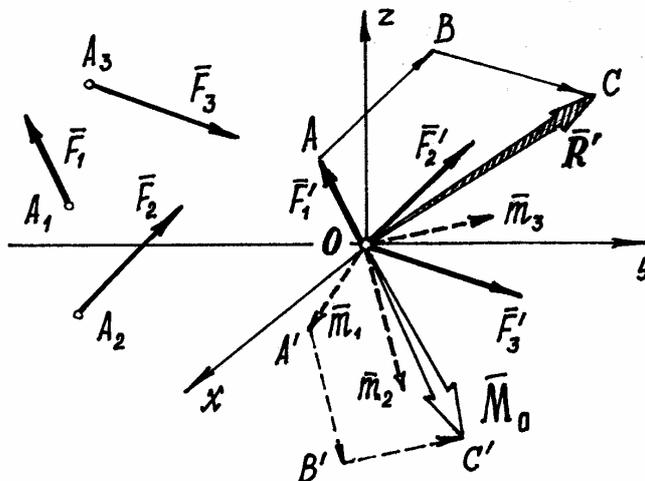


Рис. 5.2

Сложив первую систему, систему сходящихся приведенных сил, например, построением многоугольника сил $OABC$, получим их равнодействующую \vec{R}' , которая равна векторной сумме этих приведенных сил, а значит, и заданных сил, потому что они векторно равны

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}'_i = \sum \vec{F}_i \quad (5.1)$$

А сложив систему пар, например, построением многоугольника их векторов моментов $OA'B'C'$, получим пару, момент которой \vec{M}_0 равен векторной сумме моментов присоединенных пар или сумме моментов заданных сил относительно центра приведения

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad (5.2)$$

Сила \vec{R}' , равная векторной сумме заданных сил, называется *главным вектором* этих сил. Приложена эта сила к центру приведения.

Момент \vec{M}_O , равный векторной сумме моментов заданных сил относительно центра приведения, называется *главным моментом* этих сил относительно центра приведения.

Главный вектор \vec{R}' можно найти так же, как находили ранее равнодействующую сходящихся сил (см. II, §2, формула (2.2)).

Проекции его на оси (см. рис. 5.2)

$$R'_x = \sum X'_i = \sum X_i; \quad R'_y = \sum Y'_i = \sum Y_i; \quad R'_z = \sum Z'_i = \sum Z_i.$$

Поэтому модуль главного вектора

$$R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}. \quad (5.3)$$

Направление вектора \vec{R}' определяется с помощью направляющих косинусов: $\cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}$, $\cos \beta = \frac{R'_y}{R'}$, $\cos \gamma = \frac{R'_z}{R'}$, где α , β , γ – углы между вектором \vec{R}' и направлениями осей x , y , z .

Так как векторы моментов присоединенных пар также образуют систему сходящихся векторов, то и главный момент M_O находим аналогичным способом

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (5.4)$$

где M_x, M_y, M_z – проекции вектора \vec{M}_O на оси. Проектируя его на оси, получим, принимая во внимание, что проекция вектора момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, есть момент относительно оси (3.4):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_x = \sum M_x(\vec{F}_i), \\ M_y &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_y = \sum M_y(\vec{F}_i), \\ M_z &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z = \sum M_z(\vec{F}_i). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Эти проекции M_x , M_y , M_z вектора главного момента \vec{M}_O на оси, равные алгебраическим суммам моментов заданных сил относительно осей, проходящих через центр приведения, называются главными моментами сил относительно соответствующих осей.

Модуль главного момента \vec{M}_O находится по (5.4) или с учетом (5.5)

$$M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}. \quad (5.6)$$

Направление этого вектора можно найти с помощью направляющих косинусов $\cos \alpha_1 = \frac{M_x}{M_O}$, $\cos \beta_1 = \frac{M_y}{M_O}$, $\cos \gamma_1 = \frac{M_z}{M_O}$, (5.7)

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между вектором \vec{M}_O и направлениями осей x , y , z .

Итак, при сложении сил, произвольно расположенных в пространстве, в общем случае получается сила \vec{R}' , приложенная к центру приведения, и пара с моментом \vec{M}_O .

Два важных замечания. Первое – главный вектор \vec{R}' не является равнодействующей \vec{R} заданных сил, так как он не может один заменить действие всех сил, а только вместе с парой.

Второе – главный вектор \vec{R}' как векторная сумма заданных сил не зависит от положения центра приведения. А главный момент \vec{M}_O зависит, так как моменты заданных сил относительно центра приведения изменятся, если этот центр будет в другом месте.

Конечно, возможны различные результаты сложения сил.

1. Может оказаться, что главный момент относительно выбранного центра приведения O окажется равным нулю $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0$, а главный вектор $\vec{R}' \neq 0$.

Это значит, что в результате сложения получится только сила, равная главному вектору. И она, эта сила, в данном частном случае является равнодействующей \vec{R} всей системы сил. Линия действия равнодействующей будет проходить через этот центр приведения.

В этом частном случае имеет место очень важная и полезная теорема – *теорема Вариньона*.

Пусть на тело действует несколько сил \vec{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) и у них существует равнодействующая $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, приложенная к центру приведения O (рис. 5.3).

Покажем радиусы-векторы, проведенные из некоторой точки A : \vec{r}_O – радиус-вектор точки приложения равнодействующей; \vec{r}_i – точек M_i , точек приложения сил \vec{F}_i , где $i=1,2,\dots,n$. И добавим векторы $\vec{\rho}_i$, соединяющие точку O с точками M_i .

Момент сил \vec{F}_i относительно точки A : $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. А так как $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i$, то $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Сумма моментов всех действующих сил \vec{F}_i относительно точки A $\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum (\vec{r}_O \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$. Но $\sum (\vec{r}_O \times \vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \sum \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{R} = \vec{M}_A(\vec{R})$. А сумма $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O$, равна главному моменту сил относительно точки O , который в этом частном случае равен нулю. Поэтому $\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{R})$.

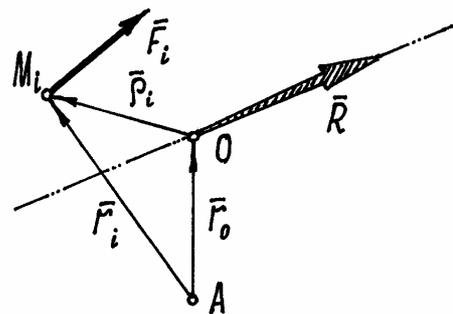


Рис. 5.3

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент равнодействующей относительно любой точки A равен векторной сумме моментов всех сил относительно этой точки

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i). \quad (5.8)$$

Следствие. Если спроектировать это векторное равенство на какую-нибудь ось, например z , проходящую через точку A , то, имея в виду доказанный ранее результат (3.4), получим теорему Вариньона в другой форме.

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент ее относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси

$$M_z(\vec{R}) = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (5.9)$$

2. Возможен и другой случай, при котором, наоборот, главный вектор равен нулю ($\vec{R}' = 0$), а главный момент относительно данного центра O не равен нулю ($\vec{M}_O \neq 0$). Это означает, что в результате сложения сил получится только пара с моментом \vec{M}_O .

А так как момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары (IV, §2), то в этом случае, когда $\vec{R}' = 0$, главный момент не зависит от выбора центра приведения. Относительно любой точки O он будет одинаков и равен $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

3. И, наконец, может оказаться, что и главный вектор \vec{R}' , и главный момент \vec{M}_O равны нулю. В этом случае силы уравниваются, а тело под действием этих сил находится в равновесии.

А так как $R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$ и главный момент $M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}$, (5.3) и (5.6), то для равновесия тела необходимо выполнение шести условий

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum Z_i = 0; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{array} \quad (5.10)$$

Эти условия называются *уравнениями равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве*.

В частности, если силы расположены в одной плоскости, то, направив оси так, чтобы ось z стала перпендикулярна этой плоскости, третье уравнение $\sum Z_i = 0$, четвертое $\sum M_x(\vec{F}_i) = 0$ и пятое $\sum M_y(\vec{F}_i) = 0$ обратятся в

тождества, а в шестом – моменты сил относительно оси z будут равны моментам относительно точки O , точки пересечения оси и плоскости.

Останутся только три уравнения из шести:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_0(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Так как в системе уравнений (5.10) уравнения моментов удовлетворяются относительно любой оси, то таких уравнений моментов можно составить больше трех, хоть все шесть.

Точно так же в системе уравнений (5.11) для плоской системы сил можно составить и два, и три уравнения моментов. Поэтому возможны три варианта

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, \\ \sum M_{Ai} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{I} \quad \left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum M_{Ai} &= 0, \\ \sum M_{Bi} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{II} \quad \left. \begin{aligned} \sum M_{Ai} &= 0, \\ \sum M_{Bi} &= 0, \\ \sum M_{Ci} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{III} \quad (5.12)$$

Правда, имеются ограничения на выбор точек и осей. Например, при использовании II варианта точки A и B не должны лежать на прямой, перпендикулярной оси; а в III варианте – точки A , B и C не должны располагаться на одной прямой.

Пример 5.1. Рама AB (рис. 5.4) удерживается в равновесии шарниром A и стержнем BC . На краю рамы находится груз весом P . Определим реакции шарнира и усилие в стержне.

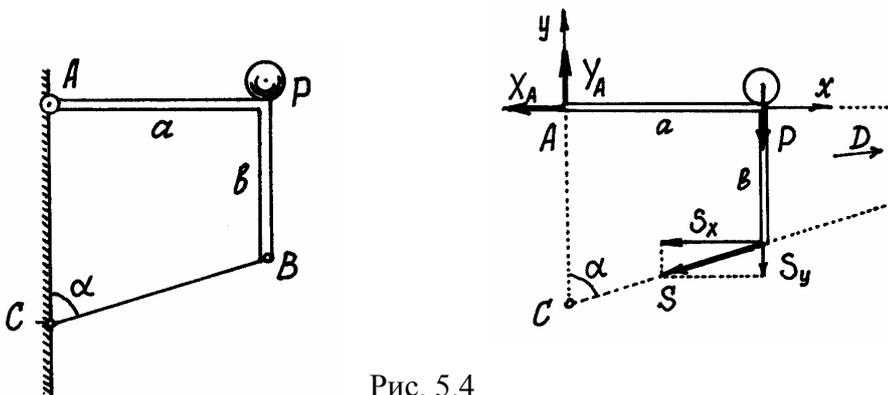


Рис. 5.4

Порядок решения задач остается прежним (см. пример 2.2).

Рассматриваем равновесие рамы вместе с грузом.

Строим расчетную схему, изобразив раму свободным телом и показав все силы, действующие на нее: реакции связей и вес груза \vec{P} . Эти силы образуют систему сил, произвольно расположенных на плоскости.

Каким вариантом уравнений (5.12) нужно воспользоваться? Желательно составить такие уравнения, чтобы в них было по одной неизвестной силе. Поэтому попробуем воспользоваться III вариантом, составляя уравнения моментов относительно трех точек, точек пересечения линий действия *неизвестных сил*.

В нашей задаче это точка A , где приложены неизвестные \vec{X}_A и \vec{Y}_A ; точка C , где пересекаются линии действия неизвестных сил \vec{Y}_A и \vec{S} ; точка D – точка пересечения линий действия сил \vec{X}_A и \vec{S} . Но, поскольку расстояния до точки D находятся не очень просто, воспользуемся II вариантом, составив уравнение проекций сил на ось y (на ось x проектировать нельзя, т.к. она перпендикулярна прямой AC).

И прежде чем составлять уравнения, сделаем еще одно полезное замечание. Если на расчетной схеме имеется сила, расположенная так, что плечо ее найти сложно, то при определении момента рекомендуется предварительно разложить вектор этой силы на две, более удобно направленные. В данной задаче разложим силу \vec{S} на две: \vec{S}_x и \vec{S}_y (см. рис. 5.4) такие, что модули их $S_x = S \sin \alpha$, $S_y = S \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Составляем уравнения: } \quad \sum Y_i = 0; \quad Y_A - P - S \cos \alpha = 0; \\ \sum M_{Ai} = 0; \quad -Pa - S_y a - S_x b = 0; \\ \sum M_{Ci} = 0; \quad X_A \cdot AC - Pa = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим $S = -P \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha}$. Из третьего

уравнения $X_A = P \frac{a}{AC} = P \frac{a}{b + a \operatorname{ctg} \alpha}$. Теперь из первого уравнения получим

$$Y_A = P + S \cos \alpha = P \left(1 - \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha} \right).$$

Пример 5.2. Прямоугольная полка весом P удерживается в горизонтальном положении двумя стержнями CE и DE , прикрепленными к стене в точке E (рис. 5.5). Стержни одинаковой длины, $AB = 2a$, $EO = a$. Определим усилия в стержнях и реакции петель A и B .

Рассматриваем равновесие плиты. Строим расчетную схему. Реакции петель принято показывать двумя силами, перпендикулярными оси петли: \vec{Y}_A, \vec{Z}_A и \vec{Y}_B, \vec{Z}_B .

Силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве. Можем составить шесть уравнений. Неизвестных – тоже шесть.

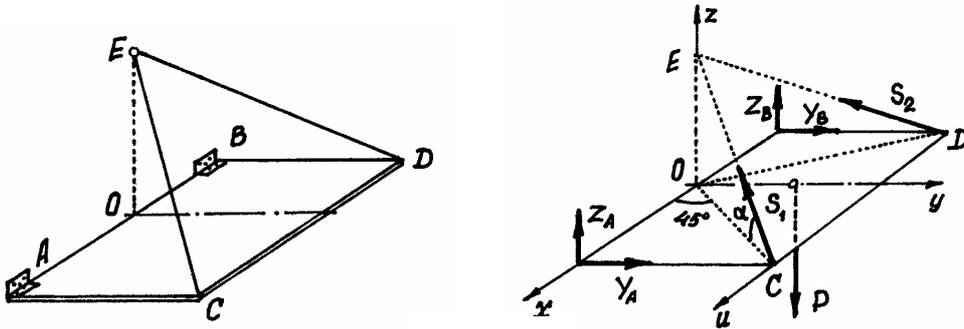


Рис. 5.5

Какие уравнения составлять – надо подумать. Желательно такие, чтобы они были попроще и чтобы в каждом было поменьше неизвестных.

Составим такие уравнения:

$$\sum X_i = 0; \quad -S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ + S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (5.13)$$

$$\sum M_{ui} = 0; \quad -Z_A \cdot a - Z_B \cdot a + P \cdot 0,5a = 0; \quad (5.14)$$

$$\sum M_{zi} = 0; \quad Y_A \cdot a - Y_B \cdot a = 0; \quad (5.15)$$

$$\sum M_{xi} = 0; \quad S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a - P \cdot 0,5a = 0; \quad (5.16)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (5.17)$$

$$\sum M_{yi} = 0; \quad -Z_A \cdot a + Z_B \cdot a - S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (5.18)$$

Из уравнения (5.13) получим $S_1 = S_2$. Тогда из (5.16)

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{4} \frac{P}{\sin \alpha}. \quad \text{Из уравнения (5.14)} \quad Y_A = Y_B \quad \text{и по (5.17)}$$

$2Y_A = 2S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ$. Значит, $Y_A = Y_B = \frac{1}{4} P \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 45^\circ$. Так как $S_1 = S_2$,

то из уравнения (5.18) следует $Z_A = Z_B$. Тогда по уравнению (5.14)

$$Z_A = Z_B = \frac{1}{4} P. \quad \text{Из треугольника } \triangle OEC, \quad \text{где } EC = \sqrt{OC^2 + OE^2} =$$

$$= \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}, \quad \text{следует } \sin \alpha = \frac{EO}{EC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{OC}{EC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$. Поэтому $S_1 = S_2 = 0,25\sqrt{3}P$, $Y_A = Y_B = 0,25P$, $Z_A = Z_B = 0,25P$.

Для проверки решения можно составить еще одно уравнение и посмотреть, удовлетворяется ли оно при найденных значениях реакций:

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - P + S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha = 0,25P + 0,25P - P + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0. \text{ Задача решена правильно.}$$

VI. Центр тяжести

§1. Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил

Пусть даны две параллельные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис. 6.1).

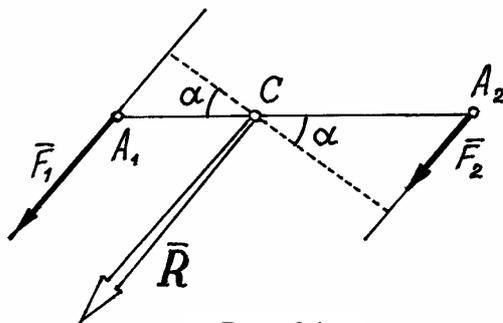


Рис. 6.1

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор ее параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона (5.8) найдем точку приложения равнодействующей – точку C . По этой теореме $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F}_i)$. Значит,

$$0 = F_1 \cdot A_1C \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$. То есть точка приложения равнодействующей

делит расстояние между точками A_1 и A_2 на части, обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис. 6.2), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке C . А расстояния от точки C до точек приложения сил обратно пропорциональны силам:

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2 , точками приложения сил, то при повороте этих сил в одном направлении на одинаковый угол равно-

действующая также повернется вокруг точки приложения C в том же направлении и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется *центром параллельных сил*.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденным последовательным сложением каждой двух сил, будем называть точку C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{R}, \quad (6.1)$$

где \vec{r}_i – радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$ – величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя равенство (6.1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны координатам этих точек. Поэтому, проектируя векторное равенство (6.1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R}, \quad (6.2)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

§2. Центр тяжести тел

На все точки тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действуют силы – силы тяжести этих точек или их вес \vec{P}_i . Вообще эти силы будут сходящимися – линии действия их пересекаются в центре Земли. Но если пренебречь размерами тела в сравнении с размерами Земли, то можно считать их параллельными.

Центр этих параллельных сил, сил тяжести точек называется *центром тяжести* тела.

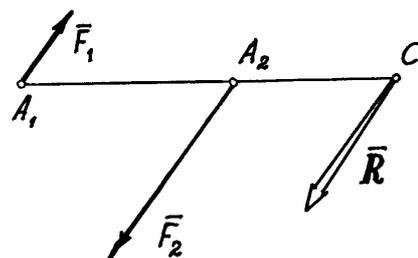


Рис. 6.2

Значит, находить центр тяжести тел можно как центр параллельных сил по формулам (6.1) или (6.2). Например, координаты его

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}, \quad (6.3)$$

где P_i – вес каждой точки тела, а $P = \sum P_i$ – вес всего тела.

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1. *Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.*

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии (рис. 6.3), то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами

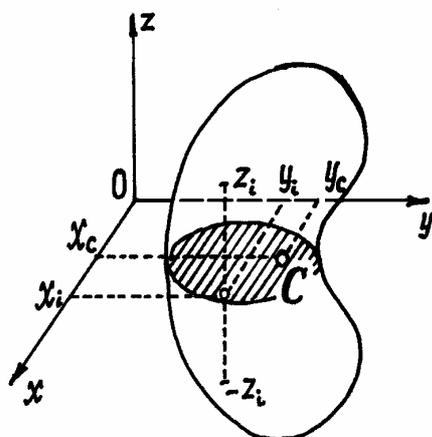


Рис. 6.3

координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_c по формуле (6.3) будет равна нулю, т.к. в сумме $\sum P_i z_i$ все члены, имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит, центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2. *Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.*

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами

$-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_c и y_c , вычисленные по формулам (6.3), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3. *Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.*

И еще несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку тела, и в формулах (6.3) P_i – можно определять как вес соответствующей части, а x_i, y_i, z_i – как координаты ее центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ – удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i – объем этой части тела. И формулы (6.3) примут более удобный вид. Например,

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P} = \frac{\sum V_i \cdot \gamma \cdot X_i}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum V_i x_i}{V}. \quad \text{И аналогично} \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V},$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}, \quad \text{где } V = \sum V_i \text{ – объем всего тела.}$$

Пример 6.1. Определим центр тяжести однородного тела, изображенного на рис. 6.4.

Тело однородное, состоящее из двух частей, имеющих симметричную форму.

Координаты центров тяжести их:

$$x_1 = 5 \text{ см}; \quad y_1 = 5 \text{ см}; \quad z_1 = 2,5 \text{ см};$$

$$x_2 = 2,5 \text{ см}; \quad y_2 = 7,5 \text{ см}; \quad z_2 = 6 \text{ см}.$$

$$\text{Объемы их: } V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ см}^3;$$

$$V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \text{ см}^3. \quad \text{Поэтому координаты}$$

центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4,77 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7,5}{550} = 5,23 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{550} = 2,82 \text{ см}.$$

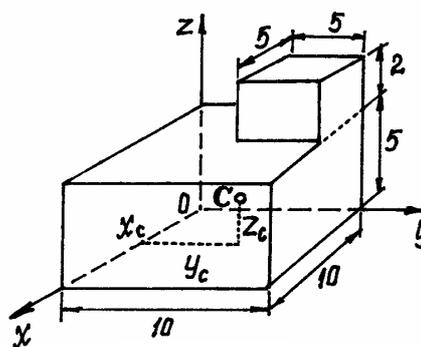


Рис. 6.4

Третье замечание. Если тело состоит из однородных пластин одинаковой малой толщины, то объем каждой пластины $V_i = S_i \cdot d$, где S_i – площадь пластины, d – толщина. И координаты центра тяжести будут определяться только с помощью площадей

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S}, \quad (6.4)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $S = \sum S_i$ – общая площадь тела.

Пример 6.2. Найдем центр тяжести пластины, согнутой под прямым углом. Размеры – на чертеже (рис. 6.5).

Координаты центров тяжести C_1 и C_2 отдельных частей: $x_1 = 10$ см, $y_1 = 0$, $z_1 = 2,5$ см, $x_2 = 7,5$ см, $y_2 = 2,5$ см, $z_2 = 0$. Их площади: $S_1 = 5 \cdot 10 = 50$ см², $S_2 = 5 \cdot 15 = 75$ см². Поэтому

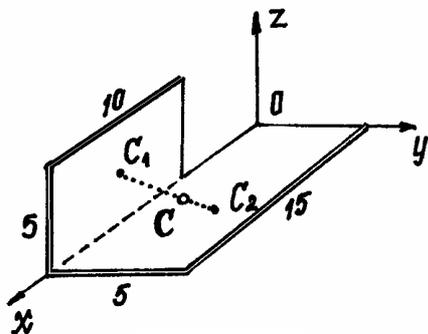


Рис. 6.5

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 10 + 75 \cdot 7,5}{50 + 75} = 8,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2,5}{125} = 1,5 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2,5}{125} = 1,0 \text{ см}.$$

Пример 6.3. У квадратного листа 20×20 см вырезано квадратное отверстие 5×5 см (рис. 6.6). Найдем центр тяжести листа.

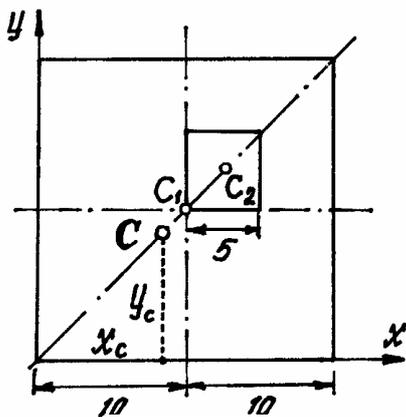


Рис. 6.6

В этой задаче удобнее разделить тело на две части: большой квадрат и квадратное отверстие. Только площадь отверстия надо считать отрицательной. Тогда координаты центра тяжести листа с отверстием

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} =$$

$$= \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 12,5}{400 - 25} = 9,83 \text{ см},$$

а координата $y_c = x_c = 9,83$ см, так как тело имеет ось симметрии (диагональ).

Четвертое замечание. Если тело состоит из стержней, прямых или криволинейных, однородных и постоянного сечения, то вес их $P_i = l_i \cdot \rho$, где l_i – длина, ρ – вес единицы длины (погонного метра), а координаты центра тяжести будут определяться с помощью длин отдельных участков

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i -го участка; $L = \sum l_i$.

Пример 6.4. Проволочная скобка (рис. 6.7) состоит из трех участков одинаковой длины l .

Координаты центров тяжести участков: $x_1 = 0, \quad y_1 = 0,5l, \quad z_1 = l;$
 $x_2 = 0,5l, \quad y_2 = l, \quad z_2 = l;$ $x_3 = l, \quad y_3 = l,$
 $z_3 = 0,5l$. Поэтому координаты центра тяжести всей скобки

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L} = \frac{l \cdot 0 + l \cdot 0,5l + l \cdot l}{3l} = 0,5l,$$

$$y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L} = \frac{l \cdot 0,5l + l \cdot l + l \cdot l}{3l} = 0,83l,$$

$$z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L} = \frac{l \cdot l + l \cdot l + l \cdot 0,5l}{3l} = 0,83l.$$

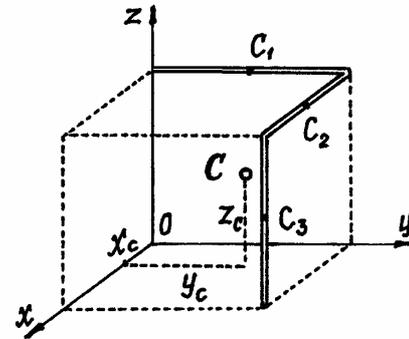


Рис. 6.7

§3. Распределённые силы

Ранее мы рассматривали действие на тело лишь сосредоточенных сил, сил приложенных к одной точке. Но можно привести ряд примеров, когда силы распределяются по всему объёму тела, по площади или по длине. Кстати, вес тела, сила тяжести, это тоже сила, распределённая по объёму тела. Потому что на каждую точку его действует сила, её вес. А при решении задач мы вес тела показываем в виде сосредоточенной силы \vec{P} , равнодействующей всех сил, приложенной к центру тяжести.

Можно встретить силы, распределённые по плоскости, по поверхности (например, снег, лежащий на крыше; давление газа или жидкости на поверхность сосуда). И силы, которые распределяются по линии.

Все эти распределённые силы характеризуются их интенсивностью – силой q , действующей на единицу объёма, площади или длины тела. Размерность интенсивности - $\text{Н} \cdot \text{м}^{-3}$, $\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $\text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$ соответственно.

Действие таких сил на тело заменяем одной силой \vec{Q} , равнодействующей этих распределённых сил.

Проще всего определить её для параллельных сил, распределённых по длине, по прямой линии AB (рис.6.8).

Выделим на расстоянии x участок линии длиной dx . На этом участке на тело действует элементарная сила $dQ = q \cdot dx$.

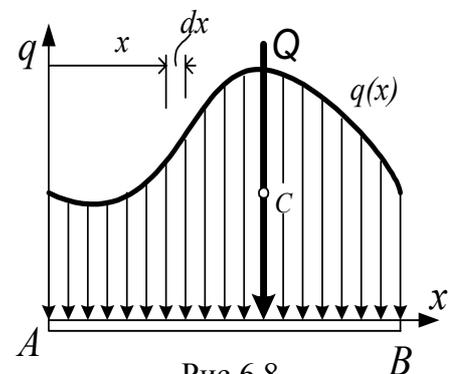


Рис.6.8

И, интегрируя по всей длине $AB = l$, получим равнодействующую $Q = \int_0^l dQ = \int_0^l q dx$. Значит, величина равнодействующей равна площади заключённой между линией $q = q(x)$ и осью x .

Точку приложения силы \vec{Q} или лучше линию действия её, можно найти с помощью теоремы Вариньона (5.8).

Момент равнодействующей $M_A(Q) = Q \cdot x_c$, а сумма моментов элементарных сил dQ относительно той же точки A равна $\sum M_A(d\vec{Q}) = \int_0^l dQ \cdot x$.

Приравняв их, получим $x_c = \frac{\int_0^l dQ \cdot x}{Q}$, но по аналогичной формуле (6.4) определяется координата центра тяжести рассматриваемой площади. Значит, точка приложения силы \vec{Q} к телу и линия действия её определяются центром тяжести этой площади.

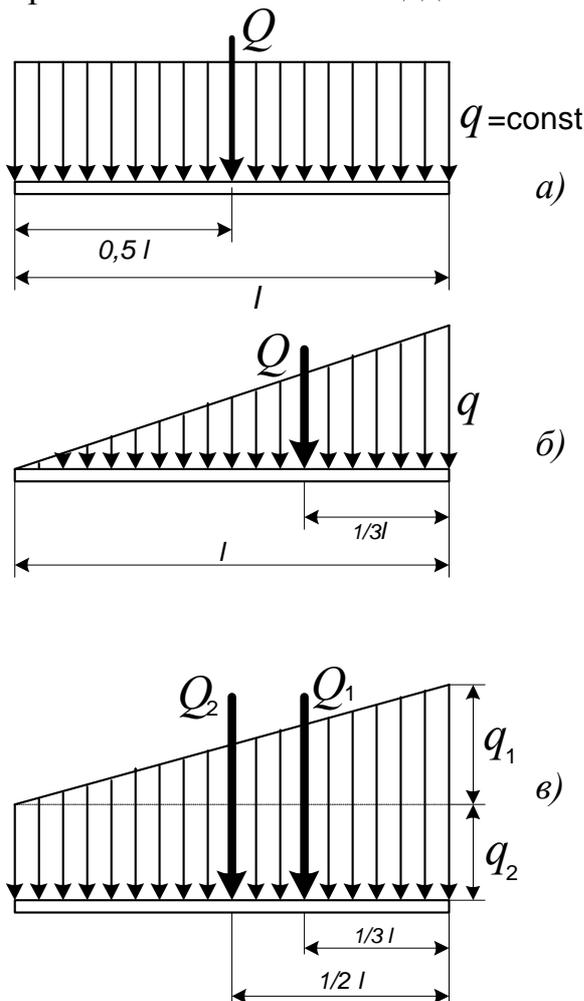


Рис.6.9

Если распределение нагрузки определяется линейным законом, модуль равнодействующей \vec{Q} и линия действия её находятся довольно просто (рис. 6.9, а и б).

А при распределении по закону трапеции (рис.6.9, в) её нужно разделить на треугольник и прямоугольник и находить соответственно две силы $Q_1 = \frac{1}{2}q_1l$ и $Q_2 = q_2l$.

Если сила распределена не по прямой линии, то равнодействующая находится немного сложнее, Например, при давлении жидкости или газа на внутреннюю стенку трубы в каком-нибудь её сечении.

Найдём равнодействующую такой распределённой силы на часть стенки трубы, которая определена дугой с углом 2α (рис. 6.10).

На участок дуги, определяемый углом $d\varphi$, действует элементарная сила $dQ = q \cdot dl = q \cdot R \cdot d\varphi$, где R – радиус дуги.

А на всю дугу действует равнодействующая Q , равная сумме проекций всех элементарных сил на вертикальную ось симметрии, то есть

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ \cdot \cos \varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} qR \cos \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= qR \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2qR \sin \alpha.$$

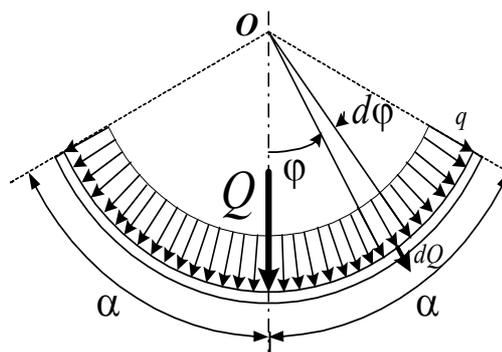


Рис.6.10

Так на половину трубы действует сила (при $\alpha = \frac{\pi}{2}$), равная $Q = 2qR$.

VII. Трение

Трением называется сопротивление движению тела. Оно бывает нескольких видов: трения скольжения, качения, верчения, вязкое трение. Рассмотрим первые два.

§1. Трение скольжения

Известно, что поверхности, с которыми соприкасаются тела, не являются абсолютно гладкими. Чтобы сдвинуть тело, приходится приложить к нему определенную силу. Это сопротивление, препятствующее скольжению тела, называется *трением скольжения*. А сила, возникающая при этом, – силой трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Основные закономерности, позволяющие оценить это сопротивление, установлены опытным путем.

Если к телу, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу \vec{Q} (рис. 7.1), можно обнаружить, что при достаточно малой силе тело еще остается неподвижным. Сила \vec{Q} будет уравновешиваться силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, то есть $F_{\text{тр}} = Q$. Но в некоторый момент, когда сила Q достигнет определенного значения Q^* , начнется скольжение тела.

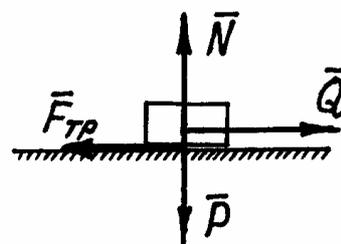


Рис. 7.1

Дальнейшее увеличение силы Q не изменит величину силы трения.

График зависимости силы трения $F_{\text{тр}}$ от Q дан на рис. 7.2. Замечено, что до начала скольжения сила трения (сила трения покоя) достигает некоторого значения F^* , большего, чем при последующем скольжении.

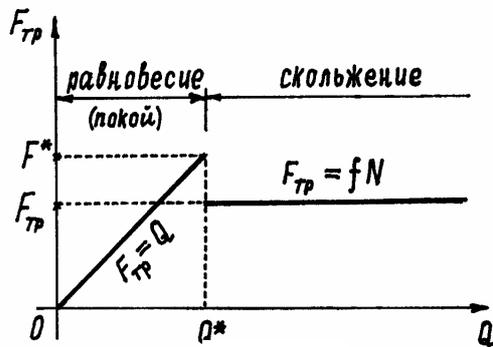


Рис. 7.2

Это хорошо знают профессионалы-шоферы, которые не допускают пробуксовки колес при торможении или при трогании с места.

Установлено, что при скольжении сила трения пропорциональна величине нормальной реакции N

Установлено, что при скольжении сила трения пропорциональна величине нормальной реакции N

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N. \quad (7.1)$$

Коэффициент пропорциональности f называется *коэффициентом трения скольжения*. Этот коэффициент определяется опытным путем. Величина его оказывается $0 < f \leq 1$. Считается, что он зависит только от материала, из которого изготовлены трущиеся поверхности, и от физического состояния (чистоты обработки, смазки и т.п.). При необходимости провести точные расчеты стараются учесть известные зависимости коэффициента трения f ещё и от скорости, от температуры и пр. Методику таких расчетов можно найти в специальной литературе.

Конечно, трение скольжения увеличивает область устойчивости равновесного состояния конструкции, но решение задач несколько усложняется появлением дополнительной неизвестной реакции поверхности $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Обычно исследуют равновесное состояние системы на границе между покоем и скольжением, полагая силу трения $F_{\text{тр}} = f \cdot N$, и решают задачу обычным, известным методом – составлением уравнений равновесия.

Пример. На какое максимальное расстояние a может подняться человек по лестнице, приставленной к стене (рис. 7.3), если вес человека P , коэффициент трения скольжения между лестницей и стеной f_1 , между лестницей и полом f_2 .

Рассматриваем равновесие лестницы с человеком. Показываем силу \vec{P} , нормальные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B и добавляем силы трения: $F_A = f_1 \cdot N_A$ и $F_B = f_2 \cdot N_B$. Полагаем, что человек находится на расстоянии $a = a_{\text{max}}$, при большем значении которого начнется движение лестницы. Составляем уравнения равновесия.

$$\sum X_i = 0; N_A - F_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; F_A - P + N_B = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; -F_A l \cos \alpha + P_A a \cos \alpha - F_B l \sin \alpha = 0.$$

Подставив значения сил трения и решив систему уравнений, получим:

$$a = l \frac{f_2}{1 + f_1 \cdot f_2} (f_1 + \operatorname{tg} \alpha).$$

Теперь можно определить и угол, под которым надо поставить лестницу, чтобы добраться до стены. Полагая $a = l$, получим после преобразований $\operatorname{ctg} \alpha = f_2$ или $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} f_2$.

При исследовании равновесия тел с учетом трения скольжения иногда бывает полезно воспользоваться понятием угла трения и конуса трения.

Углом трения называется угол μ между нормальной реакцией \vec{N} и полной реакцией плоскости $\vec{R} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$ (рис. 7.4). Если направление вектора силы трения на плоскости меняется, то вектор \vec{R} будет направлен по соответствующей образующей конуса, который называется конусом трения.

$$\text{Очевидно, } \operatorname{tg} \mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

Заметим, что если равнодействующая \vec{Q} всех активных сил (всех, кроме реакций) направлена под углом α (рис. 7.4), то нормальная реакция $N = Q \cos \alpha$, а сила трения $F_{\text{тр}} = fN = fQ \cos \alpha$. Для того чтобы началось скольжение, должно выполняться условие $Q \sin \alpha > fQ \cos \alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha > f$. И так как $f = \operatorname{tg} \mu$, то $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \mu$. Значит, угол α должен быть больше угла μ . Следовательно, если сила \vec{Q} действует внутри угла или конуса трения ($\alpha < \mu$), то как бы ни была велика эта сила, скольжение тела не произойдет. Такое условие называется условием заклинивания, самоторможения.

Мы рассмотрели скольжение твердых тел по поверхности. Но нередко встречается скольжение гибких тел по неплоской поверхности. Например, нежелательное проскальзывание в ременной передаче ремня по шкиву или троса, каната, намотанного на неподвижный цилиндр (в частности каната, намотанного на причальные тумбы, кнехты, в морском порту).

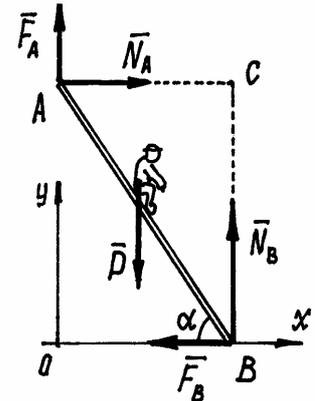
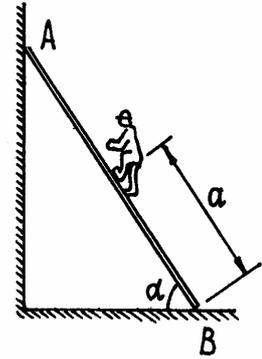


Рис. 7.3

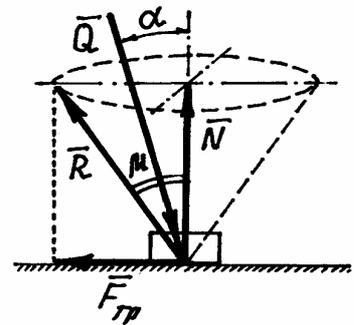


Рис. 7.4

Пусть имеется нить, перекинутая через неподвижную круглую цилиндрическую поверхность (рис. 7.5). За счет сил трения натяжения левого и правого концов этой нити будут различными.

Предположим, что нормальная реакция и сила трения распределяются равномерно по дуге контакта нити на цилиндре. Рассмотрим равновесие участка нити длиной $dl = r \cdot d\varphi$ (рис. 7.6). На левом конце этого участка натяжение \vec{S} , на правом $\vec{S} + d\vec{S}$. Составляем уравнения равновесия, проектируя силы на оси:

$$\Sigma X_i = 0; -S \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) - dF_{\text{тр}} + (S + dS) \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0; -S \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) + dN - (S + dS) \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0.$$

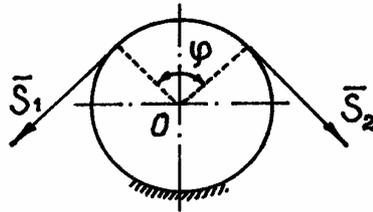


Рис. 7.5

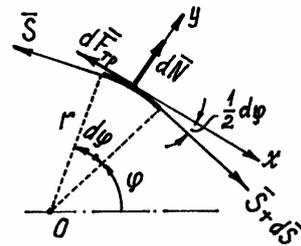


Рис. 7.6

Так как угол $d\varphi$ – малая величина, то полагаем $\sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = \frac{1}{2}d\varphi$, $\cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 1$. С учетом этого из уравнений находим $dF_{\text{тр}} = dS$, $dN = Sd\varphi$ и так как $dF_{\text{тр}} = fdN$, имеем $dS = f \cdot S d\varphi$ или $\frac{dS}{S} = f \cdot d\varphi$. Интегрируя, получим $\ln S \Big|_{S_2}^{S_1} = f\varphi \Big|_0^\varphi$. Или

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{-f\varphi}. \quad (7.2)$$

Этот результат называется формулой Эйлера. Например, если нить перекинута через неподвижный шкив и $\varphi = \pi$, а коэффициент трения $f = 0,2$, то отношение натяжений $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2\pi} = 0,533$. А обернув цилиндр

один раз ($\varphi = 2\pi$), $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2 \cdot 2\pi} = 0,285$, то есть можно удержать груз на другом конце нити силой, почти в три раза меньшей веса тела.

§2. Трение качения

Сопротивление движению тела по поверхности появляется не только при скольжении, но и при качении, например, колеса (рис. 7.7). Конечно, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ не может препятствовать качению колеса (момент сил относительно точки касания не равен нулю даже при совсем малой силе \vec{Q}). Сила трения, образуя с силой \vec{Q} пару, будет вращать тело, заставит его катиться по поверхности.

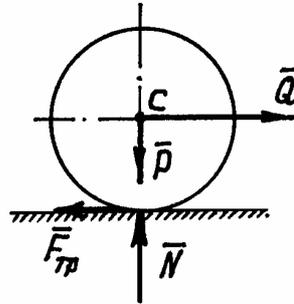


Рис. 7.7

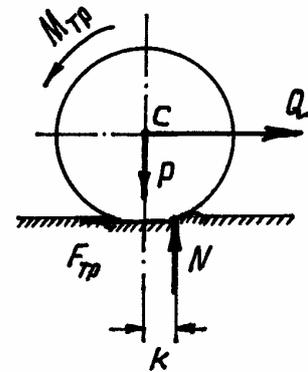


Рис. 7.8

Сопротивление качению можно объяснить тем, что поверхность и колесо – это не абсолютно твердые тела. Они деформируются и поэтому реакция поверхности окажется распределенной силой, равнодействующая которой \vec{N} окажется приложенной не под центром колеса, а смещенной вперед на расстояние k (рис. 7.8). Силы \vec{N} и \vec{P} будут теперь образовывать пару, которая и препятствует качению тела. Момент этой пары $M_{\text{тр}} = k \cdot N$ называется *моментом трения качения*. Он оказывается пропорциональным нормальной реакции. Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом трения качения. Размерность его – размерность длины (см). Считается, что он зависит только от радиуса колеса и от материалов, из которых сделаны колесо и поверхность.

Следует еще раз специально заметить, что сопротивление качению характеризуется не силой, а парой – моментом этой пары (моментом трения качения) (см. рис. 7.8).

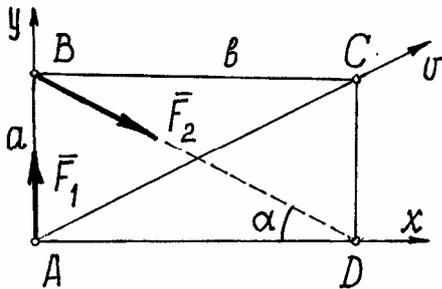
Если колесо катится без скольжения, то сила трения $F_{\text{тр}} < fN$. А так как при равновесии (см. рис. 7.8) $\sum M_{Ci} = 0$; $-F_{\text{тр}} \cdot r + N \cdot k = 0$, то

$$F_{\text{тр}} = N \frac{k}{r}.$$

Поэтому условием качения без скольжения является неравенство $N \frac{k}{r} < fN$ или $f > \frac{k}{r}$, где r – радиус колеса.

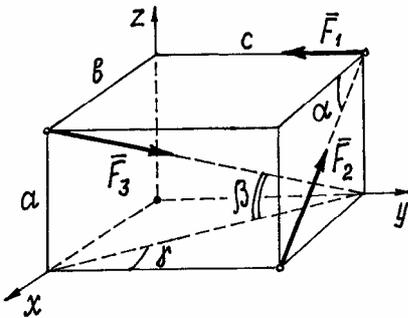
ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ «СТАТИКА»

C-1



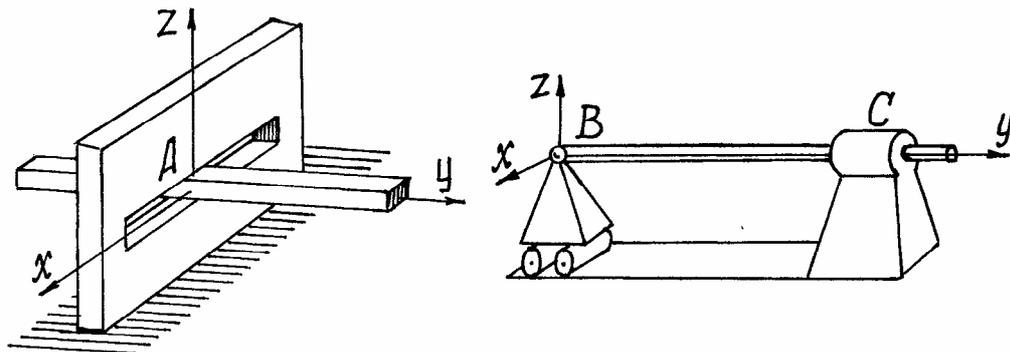
1. Определить проекции сил $F_1 = 2\text{Н}$ и $F_2 = 3\text{Н}$ на оси x , y , z при $\alpha = 30^\circ$.
2. Определить моменты сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 относительно точек A , B , C , D при $a = 7\text{ см}$.

C-2



1. Определить проекции сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 на оси x , y , z .
2. Определить моменты этих сил относительно осей x , y , z .

C-3



Показать реакции связей в точках A , B и C .

Ответы на тесты на с. 232

КИНЕМАТИКА

VIII. Кинематика точки

§1. Способы задания движения точки

Прежде чем заняться исследованием движения точки, определением характеристик этого движения, надо научиться определять положение точки в пространстве в нужный момент времени.

Для этого существует несколько способов задания движения.

1. Естественный способ

Чтобы определить движение точки естественным способом, должны быть заранее заданы (рис.8.1) траектория движения точки (линия, по которой точка движется); начало отсчёта (точка O , от которой по траектории отсчитывается расстояние s до движущейся точки M); направление, в котором откладываются положительные значения характеристик движения (указывается стрелкой либо знаками $+$ и $-$); закон движения $s = s(t)$.

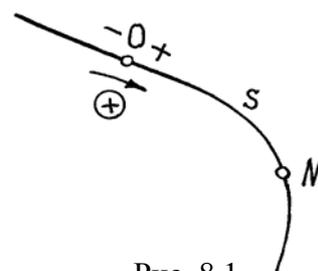


Рис. 8.1

Пример 8.1. Точка движется по прямой линии, по закону $s = 2t + 3$ (см) (рис. 8.2).

В начале движения при $t = 0$, $s = OM_0 = s_0 = 3$ см. Положение точки M_0 называется *начальным положением*. При $t = 1$ с, $s = OM_1 = 5$ см.

Конечно, за 1с точка прошла расстояние $M_0M_1 = 2$ см. Так что s – это не путь, пройденный точкой, а расстояние от начала отсчёта до точки.

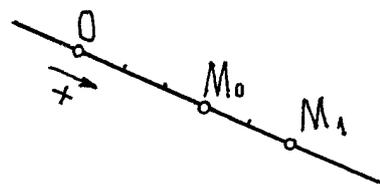


Рис. 8.2

2. Координатный способ

Этим способом положение точки в какой-либо системе координат определяется её координатами x, y, z (рис. 8.3). При движении точки эти координаты изменяются. Поэтому, чтобы определить положение точки в

нужный момент времени, должны быть заданы координаты как функции времени t

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

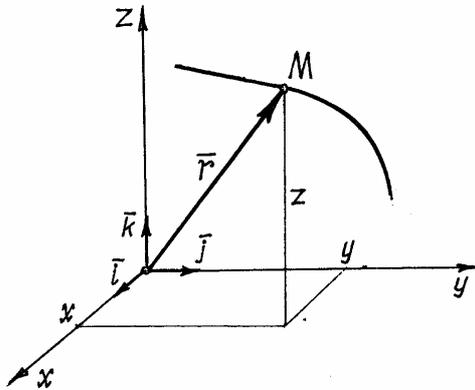


Рис. 8.3

Эти функции называются *уравнениями движения точки*.

Уравнения движения позволяют определить не только положение точки в любой момент времени, но и все характеристики движения, в том числе и траекторию движения.

Чтобы получить уравнение траектории, надо из уравнений движения исключить параметр t .

Пример 8.2. Движение точки задано уравнениями (x, y – в сантиметрах, t – в секундах)

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sin 2t, \\ y &= 3 \cos 2t. \end{aligned} \right\}$$

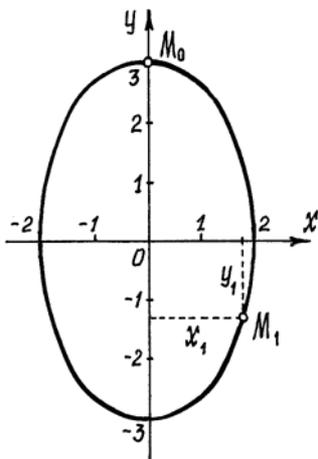


Рис. 8.4

Чтобы исключить время, параметр t найдём из первого уравнения $\sin 2t = \frac{x}{2}$, из второго $\cos 2t = \frac{y}{3}$. Затем возведём их в квадрат и сложим. Так как $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$, получим $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями 2 см и 3 см (рис. 8.4).

Начальное положение точки M_0 (при $t = 0$) определяется координатами $x_0 = 0, y_0 = 3$ см.

Через 1с точка будет в положении M_1 с координатами $x_1 = 2 \sin 2 = 2 \cdot 0,91 = 1,82$ см, $y_1 = 3 \cos 2 = 3(-0,42) = -1,25$ см.

Примечание

Движение точки может быть задано с помощью и других координат, например, цилиндрических или сферических. Среди них будут не только линейные размеры, но и углы. При необходимости с заданием движения цилиндрическими и сферическими координатами можно ознакомиться по учебникам.

3. Векторный способ

Положение точки можно определить заданием вектора \vec{r} , проведённого из неподвижной точки O , предполагая, что точка M находится на конце этого вектора (см. рис. 8.3). Этот вектор называется *радиусом-вектором точки M* . Конечно, чтобы определить положение точки в любой момент времени, радиус-вектор должен быть задан как функция времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Нетрудно установить зависимость между векторным и координатным способами задания движения.

Разложим вектор \vec{r} на составляющие по осям координат:

$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$, где r_x, r_y, r_z – проекции вектора на оси; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные по осям, орты осей. Так как начало \vec{r} вектора находится в начале координат, то проекции вектора будут равны координатам точки M . Поэтому

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (8.1)$$

Траектория движения точки M – это линия, которую описывает конец изменяющегося радиуса-вектора. Эта линия называется *годографом вектора \vec{r}* .

§2. Скорость точки

Известно, что при движении точки по прямой линии с постоянной скоростью, равномерно, скорость её определяется делением пройденного расстояния s на время $v = \frac{s}{t}$. При неравномерном движении эта формула не годится. И метод определения скорости зависит от способа задания движения.

1. Скорость точки при векторном способе задания движения

Пусть точка M за малое время Δt перешла из положения M в M_1 . При этом радиус-вектор её изменится на $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ (рис. 8.5). Так как время Δt мало, можно предположить, что часть траектории MM_1 почти прямая, равна хорде Δr и движение близко к равномерному. Тогда приближённо скорость

точки можно найти так: $\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (так как $\Delta \vec{r}$ – вектор, то и $\vec{v}_{\text{ср}}$ – вектор).

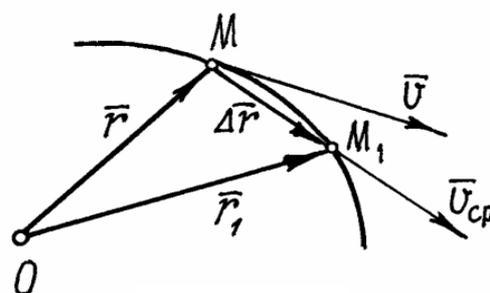


Рис. 8.5

Конечно, чем меньше время Δt , тем ближе будет значение скорости к истинному. Поэтому

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Итак, скорость точки есть производная от радиуса-вектора точки по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Направление вектора скорости \vec{v} находим как предельное направление $\vec{v}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть при приближении точки M_1 к точке M . Но такой процесс определяет касательную в точке M . Следовательно, вектор скорости \vec{v} направлен по касательной к траектории и в сторону движения. И, наоборот, вектор скорости определяет направление движения точки в данный момент времени.

2. Скорость точки при координатном способе задания движения

Как уже установлено, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Учитывая (8.1), получим:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (8.2)$$

Вектор скорости как всякий вектор можно разложить на составляющие по осям

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (8.3)$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), устанавливаем, что проекции вектора скорости на оси есть первые производные от соответствующих координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

И модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (8.4)$$

Направление вектора скорости можно определить графическим способом, откладывая в масштабе соответствующие составляющие вектора параллельно осям с учетом знака или с помощью направляющих косинусов: $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$; $\cos \beta = \frac{v_y}{v}$; $\cos \gamma = \frac{v_z}{v}$, где α, β, γ – углы между вектором \vec{v} и направлениями осей x, y, z соответственно.

3. Скорость точки при естественном способе задания движения

Величину скорости (см. п.1) можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1 . Первый предел равен единице, второй предел – производная $\frac{ds}{dt}$.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении (см. §1, п.1).

§3. Ускорение точки

Ускорение точки – это характеристика движения точки, которая определяет изменение вектора скорости по величине и по направлению.

Если точка движется равнопеременно и по прямой линии, то величина ускорения определяется делением изменения скорости на время, $W = \frac{\Delta v}{t}$.

В общем же случае определение ускорения зависит от способа задания движения точки.

1. Ускорение точки при векторном способе задания движения

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в M_1 и за это время вектор скорости изменился на $\Delta \vec{v}$ (рис. 8.6).

Полагая из-за малости времени Δt дугу MM_1 почти прямой, а движение близким к равнопеременному, найдём приближенное среднее ускорение $\vec{W}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (так как $\Delta \vec{v}$ – вектор, то и \vec{W}_{cp} – вектор, направленный параллельно $\Delta \vec{v}$). Конечно, чем меньше Δt , тем точнее будет определено ускорение. Поэтому точное ускорение

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{W}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Следовательно, ускорение точки есть производная от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки по времени

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.5)$$

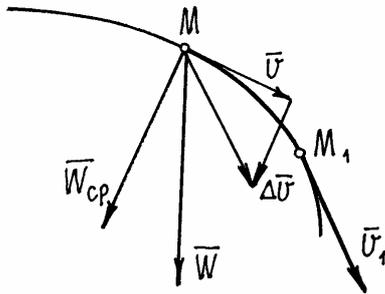


Рис. 8.6

Направление вектора ускорения \vec{W} можно определить как предельное положение вектора \vec{W}_{cp} при $\Delta t \rightarrow 0$. Нетрудно обнаружить, что ускорение не направлено по касательной, а направлено, вероятно, в сторону вогнутости траектории (см. рис. 8.6).

2. Ускорение точки при координатном способе задания движения

Подставив в (8.5) выражение радиуса-вектора \vec{r} через координаты (8.1), получим:

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}.$$

Отсюда следует, что проекции вектора ускорения на оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Поэтому модуль вектора ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Направление вектора можно найти или графическим способом, откладывая в масштабе составляющие параллельно осям с учётом знака, или с помощью направляющих косинусов: $\cos \alpha = \frac{W_x}{W}$; $\cos \beta = \frac{W_y}{W}$; $\cos \gamma = \frac{W_z}{W}$ (α, β, γ – углы между вектором \vec{W} и направлениями осей x, y, z соответственно).

Пример 8.3. Движение точки задано уравнениями $x = 2t$, $y = 3 - 4t^2$.

Из первого уравнения $t = \frac{x}{2}$. Подставив во второе, получим уравнение траектории: $y = 3 - x^2$. Это уравнение параболы (рис.8.7).

В начале движения при $t = 0$ точка находилась на самом вершугу, в положении M_0 ($x_0 = 0, y_0 = 3$ см).

А например, при $t = 0,5$ с она будет в положении M с координатами $x_1 = 1$ см; $y_1 = 2$ см.

Проекции скорости на оси $v_x = \dot{x} = 2$ см·с⁻¹, $v_y = \dot{y} = -8t$ см·с⁻¹.

При $t = 0,5$ с $v_x = 2$ см·с⁻¹, $v_y = -4$ см·с⁻¹. И модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47$ см·с⁻¹.

Составляющие скорости по осям и вектор её показаны в масштабе на рис. 8.7.

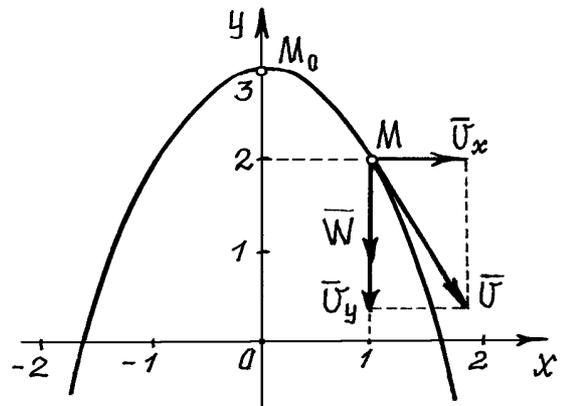


Рис. 8.7

Проекции ускорения $W_x = \ddot{x} = 0$, $W_y = \ddot{y} = -8$ см·с⁻². Так как проекция вектора \vec{W} на ось x равна нулю, а на ось y – отрицательна, то вектор ускорения направлен вертикально вниз, и величина его постоянна, не зависит от времени.

3. Ускорение точки при естественном способе задания движения

Прежде всего – несколько сведений из дифференциальной геометрии.

Покажем в точке M на пространственной линии три взаимно перпендикулярные оси. Ось T направим по касательной к линии (рис. 8.8). Оси N и B – в плоскости, перпендикулярной оси T (в нормальной плоскости I). Ось N , которая называется главной нормалью, направлена по линии пересечения нормальной плоскости I и соприкасающейся плоскости II в сторону вогнутости линии.

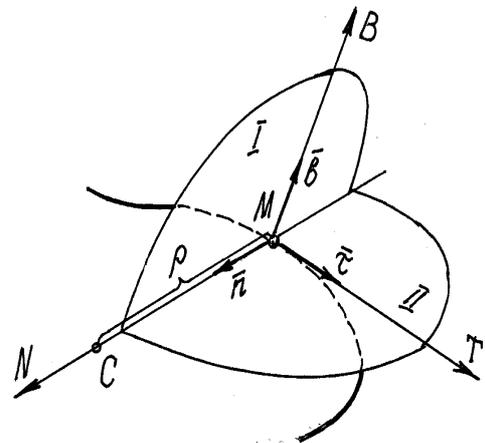


Рис. 8.8

Плоскость II названа соприкасающейся потому, что она как бы приставлена сбоку к кривой, соприкасается с ней.

Ось B , перпендикулярная N и T , называется бинормалью (“вторая” нормаль).

При движении точки M эти оси движутся вместе с нею. Называются эти оси *естественными осями*. Единичные векторы $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} , направленные по осям, являются ортами соответствующих осей.

Производная $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k \cdot \vec{n}$ характеризует крутизну, кривизну линии в точке M , k – кривизна линии. А величина, обратная кривизне $\rho = 1/k$, называется *радиусом кривизны* в точке M . Точка C , расположенная на главной нормали N на расстоянии $CM = \rho$, называется *центром кривизны*.

Вектор скорости точки направлен по оси T . Поэтому его можно записать так: $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ (v – алгебраическая величина скорости \vec{v}).

Ускорение точки

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Следовательно, ускорение состоит из двух векторов. Первый вектор $\vec{W}_1 = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$. Величина его равна $\frac{dv}{dt}$, а направлен вектор по оси T .

Чтобы определить величину и направление второй составляющей, надо найти производную

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \vec{n} v = \frac{v}{\rho} \vec{n}.$$

Поэтому второй вектор $\vec{W}_2 = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$.

Теперь становится понятно, что вектор \vec{W}_2 по модулю будет равен $\frac{v^2}{\rho}$ и направлен по главной нормали, по оси N , так же как единичный вектор \vec{n} .

Так как первая составляющая ускорения направлена по касательной к траектории, это ускорение называют *касательным ускорением* $\vec{W}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$; вторую составляющую соответственно её направлению – *нормальным ускорением* $\vec{W}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$. Поэтому полное ускорение

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n. \quad (8.6)$$

Величина этих составляющих ускорения

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Обратим внимание на то, что вектор ускорения \vec{W} находится в соприкасающейся плоскости, проекция его на бинормаль B равна нулю, $\vec{W}_b = 0$.

Так как векторы \vec{W}_τ и \vec{W}_n перпендикулярны друг другу, то

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}.$$

Рассмотрим два частных случая.

Первый случай. Точка движется по прямой линии с переменной скоростью. Нормальное ускорение $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ равно нулю, так как радиус

кривизны прямой линии равен бесконечности. А касательное $W_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0$ не равно нулю. Поэтому $\vec{W} = \vec{W}_\tau$.

Второй случай. Точка движется по кривой линии, но с постоянной по величине скоростью. В этом случае $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, а $W_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, так как радиус кривизны ρ конечная величина. Значит, $\vec{W} = \vec{W}_n$.

Сравнение этих двух случаев позволяет сделать вывод, что касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине, а нормальное ускорение – изменение вектора скорости по направлению.

Пример 8.4 Точка движется по окружности радиусом $R = 3$ см по закону $s = 4t - t^2 - 2$ (см). При $t = 0$ $s_0 = -2$ см. Значит, движение началось из M_0 (рис. 8.9). Далее, при $t = 1$ с $s_1 = 1$ см; при $t = 2$ с $s_2 = 2$ см; при $t = 3$ с $s_3 = 1$ см; при $t = 4$ с $s_4 = 2$ см.

Судя по этим результатам, точка сначала двигалась в положительном направлении, а затем пошла обратно. В крайнем положении скорость точки станет равной нулю.

Так как $v = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t$, то, положив $v = 0$, найдём время t_* , момент, когда точка окажется в этом крайнем положении: $t_* = 2$ с. Следовательно, s_2 определяет это положение точки.

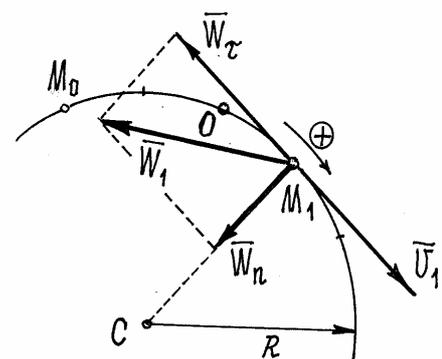


Рис. 8.9

Найдём скорость и ускорение точки при $t=1$ с. Скорость $v_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Направлен вектор скорости в положительном направлении ($v_1 > 0$).

Касательное ускорение $W_\tau = \frac{dv}{dt} = -2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Вектор \vec{W}_τ направлен в отрицательном направлении. Нормальное ускорение $W_n = \frac{v_1^2}{\rho} = \frac{2^2}{3} = 1,33 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ (радиус кривизны дуги окружности равен её радиусу, $\rho = R$). Полное ускорение $W_1 = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = 2,4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Так как вектор скорости \vec{v}_1 и вектор касательного ускорения \vec{W}_τ направлены в противоположные стороны, точка в этот момент движется замедленно.

IX. Основные виды движения твёрдого тела

§ 1. Поступательное движение тела

Поступательным движением тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, всё время перемещается параллельно своему первоначальному положению (рис. 9.1).

Конечно, траектории точек при поступательном движении тела могут быть и кривыми линиями.

Проведём в теле радиус-вектор \vec{r} , определяющий положение какой-нибудь точки B относительно A (см. рис. 9.1). Так как этот вектор при по-

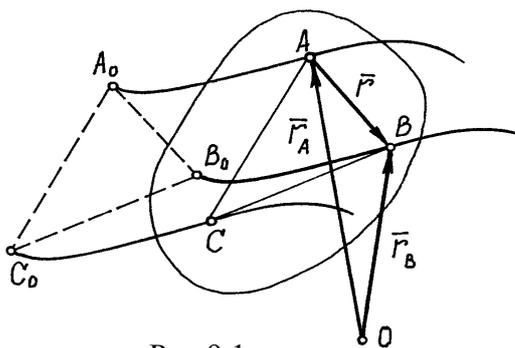


Рис.9.1

ступательном движении твёрдого тела всё время перемещается параллельно и длина его неизменна ($\vec{r} = \text{const}$), то траектория точки B получается параллельным переносом траектории точки A , определяемом вектором \vec{r} . Следовательно, траектории этих точек A и B , а значит, и всех точек тела будут одинаковы.

Если же положение точек A и B определять радиусами-векторами \vec{r}_A и \vec{r}_B такими, что $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}$ (см. рис.9.1), то, взяв производную по времени, получим (при $\vec{r} = \text{const}$): $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ или $\vec{v}_B = \vec{v}_A$. Дифференцируя ещё раз, получим $\vec{W}_B = \vec{W}_A$.

Из доказательства следует, что все точки тела движутся одинаково: по одинаковым траекториям и в каждый момент времени имеют равные скорости и равные ускорения.

Поэтому для исследования поступательного движения тела достаточно определить лишь движение какой-нибудь одной его точки. Что мы уже умеем делать (VIII. Кинематика точки).

§2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором можно указать у тела хотя бы две точки, всё время остающиеся неподвижными.

Прямая, проведённая через эти точки, является осью вращения, неподвижной осью. Этой оси задаётся направление стрелкой (рис. 9.2).

Положение тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси. Этот угол измеряется в радианах. Чтобы определить положение тела в любой момент времени, должен быть задан угол поворота как функция времени $\varphi = \varphi(t)$.

Эта функция называется *уравнением вращения тела*.

Если в данный момент времени угол φ положительный ($\varphi > 0$), то он откладывается против часовой стрелки. При этом надо смотреть на тело со стороны стрелки оси.

Конечно, траектории всех точек тела – окружности, так как расстояния от точек до оси всё время остаются неизменными. Эти окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных оси.

Поскольку траектории точек известны, то можно задать движение точек естественным способом. Закон движения точки по траектории, по окружности, получится таким

$$s = R\varphi = s(t).$$

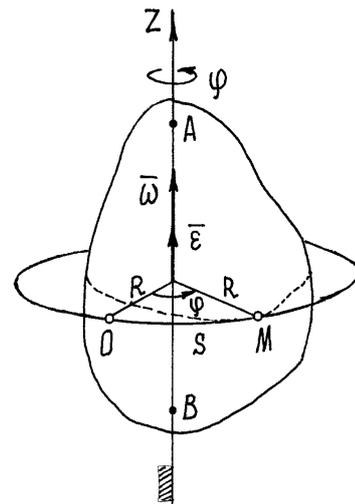


Рис. 9.2

Пусть за время Δt угол изменился на $\Delta\varphi$. Тогда отношение их будет характеризовать скорость вращения. Эта величина $\omega_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется средней угловой скоростью тела. Конечно, чем меньше Δt , тем точнее будет определена эта скорость. Поэтому точное значение угловой скорости

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, угловая скорость есть первая производная по времени от уравнения вращения, от угла поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Единица измерения угловой скорости – радианы в секунду. Так как радиан безразмерная величина, то обозначают просто с^{-1} . В технике скорость вращения часто определяют числом оборотов в минуту n . Зависимость между этими единицами измерения: $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

Если в данный момент времени окажется $\omega > 0$, то это будет означать, что вращение происходит против часовой стрелки (если смотреть на тело со стороны стрелки оси). Угловая скорость указывает направление вращения тела.

Угловую скорость можно изобразить вектором $\vec{\omega}$, отложенным по оси вращения из какой-нибудь точки в такую сторону, что, если смотреть с его конца, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 9.2).

Пусть за время Δt угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega$. Тогда отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{cp}}$ будет определять среднее ускорение вращения, угловое ускорение. Точным значением его будет предел среднего при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Угловое ускорение есть первая производная от угловой скорости или вторая производная от угла поворота по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение также изображают вектором, отложенным по оси вращения. Направление вектора определяется знаком (+) или (–) величины ускорения ε в данный момент времени.

Комбинация знаков угловой скорости ω и углового ускорения ε определяет характер движения тела. Если их знаки одинаковы, тело вращается ускоренно. Если разные – замедленно.

Так, при $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ тело вращается против часовой стрелки ускоренно. При $\omega < 0$ и $\varepsilon < 0$ – по часовой стрелке ускоренно. При $\omega < 0$ и $\varepsilon > 0$ – по часовой стрелке замедленно. При $\omega > 0$ и $\varepsilon < 0$ – против часовой стрелки замедленно.

Поскольку движение точек вращающегося тела задано естественным способом, то нетрудно найти скорости этих точек. Например, скорость точки M (рис. 9.3)

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, к окружности, то есть перпендикулярно её радиусу, в сторону вращения.

Используя правило определения векторного произведения двух векторов, можно доказать, что вектор скорости точки

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.1)$$

есть векторное произведение вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на радиус-вектор точки, которое, действительно, совпадает с вектором скорости и по направлению, и по модулю $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$.

Ускорение точки тела, см. формулу (8.6), $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$, где нормальное ускорение

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2, \quad \text{а касательное}$$

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \quad (9.2)$$

Направляются векторы этих двух ускорений соответственно по нормали, то есть по радиусу окружности, к оси и по касательной к окружности в соответствии с направлением углового ускорения ε .

Пример 9.1. Маятник OM качается в вертикальной плоскости так, что $\varphi = 0,5 \sin 2t$. Длина $OM = l = 1$ м (рис. 9.4). Маятник вращается вокруг горизонтальной оси O , перпендикулярной вертикальной плоскости.

Угловая скорость маятника $\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t \text{ с}^{-1}$, угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2 \sin 2t \text{ с}^{-2}$.

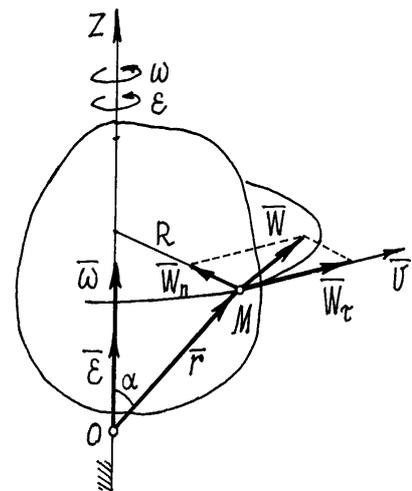


Рис. 9.3

Например, при $t = 1 \text{ с}$ $\varphi = 0,5 \sin 2 = 0,45 \text{ рад} \cong 26^\circ$; $\omega = \cos 2 = -0,42 \text{ с}^{-1}$ (вращение по часовой стрелке); $\varepsilon = -2 \sin 2 = -1,82 \text{ с}^{-2}$ (угловое ускорение направлено также по часовой стрелке). Вращение в этом положении ускоренное.

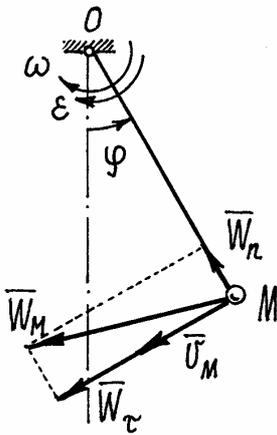


Рис. 9.4

Скорость точки M $v_M = l\omega = 1 \cdot 0,42 = 0,42 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ (определяется модуль скорости). Направлен вектор скорости соответственно направлению угловой скорости – в сторону вращения.

Нормальное ускорение $W_n = l\omega^2 = 1 \cdot 0,42^2 = 0,176 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, касательное ускорение $W_\tau = l\varepsilon = 1 \cdot 1,82 = 1,82 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$. (Определён опять модуль вектора касательного ускорения. Направлен вектор \vec{W}_τ вниз, как указывает угловое ускорение).

Величина полного ускорения точки

$$W_M = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = 1,828 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

§3. Вращение тела вокруг неподвижной точки

Название такого вида движения довольно точно его определяет. Часто это движение называют сферическим движением потому, что все точки тела движутся по сферическим поверхностям.

Наглядным примером такого движения является волчок, закономерности движения которого лежат в основе гироскопических приборов.

1. Углы Эйлера. Уравнения вращения тела с одной неподвижной точкой

Положение тела определяется тремя углами. Используются различные системы углов. Например, корабельные углы, самолётные углы и др. Но самыми распространёнными являются углы Эйлера: ψ (пси), θ (тэта), φ (фи).

Положение тела определяется следующим образом. Назначаются две системы декартовых осей. Первая система – неподвижные оси x, y, z , начало которых берётся в неподвижной точке O тела (рис. 9.5). Вторая система, оси x_1, y_1, z_1 , связывается с телом. Поэтому положение тела будет определяться положением этих осей относительно неподвижных.

Когда углы Эйлера равны нулю, подвижные оси совпадают с неподвижными. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным углам Эйлера, производим следующие действия.

Сначала подвижные оси, а значит и тело, поворачиваем на угол ψ вокруг оси z . При этом оси x_1 и y_1 отойдут от осей x и y в горизонтальной плоскости и ось x_1 займёт положение OK (рис. 9.5).

Затем тело вращаем вокруг нового положения оси x_1 (прямой OK) на угол θ . Ось z_1 отойдёт от оси z на этот угол θ , а ось y_1 приподнимется над горизонтальной плоскостью. Наконец, тело (и подвижные оси) вращаем вокруг нового положения оси z_1 на угол φ . Ось x_1 отойдёт от положения OK в наклонной плоскости, перпендикулярной оси z_1 . Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера (на рисунке само тело не показано).

Линия пересечения неподвижной плоскости xOy и подвижной x_1Oy_1 , прямая OK называется *линией узлов*. Угол ψ называется *углом прецессии*, угол θ – *углом нутации*, угол φ – *углом собственного вращения*. Эти названия углов пришли из теории гироскопов.

При движении тела углы Эйлера изменяются по определённым законам $\psi = \psi(t)$; $\theta = \theta(t)$; $\varphi = \varphi(t)$, которые называются *уравнениями вращения*.

На примере вращающегося волчка можно лучше разобраться в этих углах Эйлера (рис. 9.6). Ось волчка z_1 описывает конус вокруг неподвижной оси z . Это вращение определяется углом ψ (говорят: волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации θ . А вращение волчка вокруг своей оси z_1 , определяемое углом φ , называется углом собственного вращения.

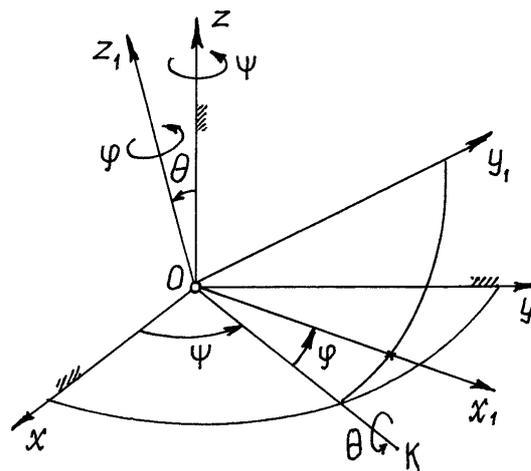


Рис. 9.5

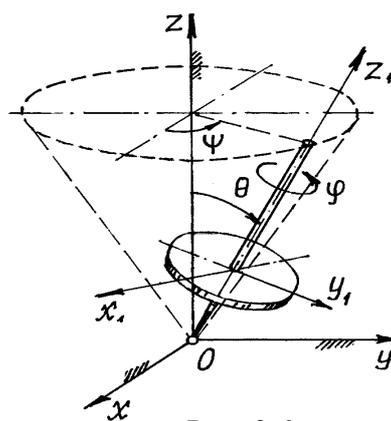


Рис. 9.6

2. Теорема Даламбера-Эйлера. Мгновенная ось вращения

Проведём в теле сферическую поверхность произвольного радиуса с центром в неподвижной точке O (рис. 9.7). Покажем у тела какие-нибудь две точки A и B , расположенные на этой сфере. Соединим их по сфере дугой наибольшего радиуса (кратчайшее расстояние между точками). Переместим тело в новое положение. Точки, а значит и дуга, займут положение A_1 и B_1 .

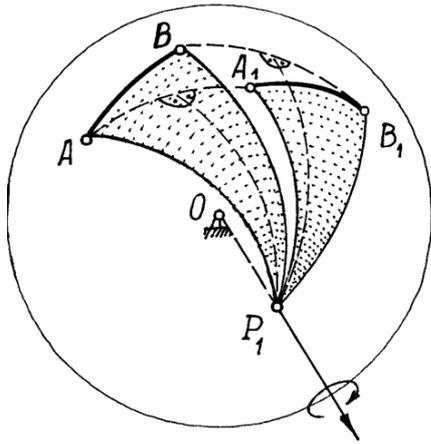


Рис. 9.7

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 дугами большого радиуса AA_1 и BB_1 . Посередине этих дуг проведём перпендикулярные им дуги и найдём их точку пересечения P_1 . Соединим эту точку P_1 с точками A, B, A_1, B_1 . Получим два сферических треугольника $\triangle ABP_1$ и $\triangle A_1B_1P_1$, расположенных на этой сфере. Эти два треугольника равны как треугольники с равными сторонами ($AB = A_1B_1$, а дуги $AP_1 = A_1P_1$ и $BP_1 = B_1P_1$ – как дуги, равноудалённые от перпендикуляров). Так как эти два треугольника расположены на одной сфере и имеют общую вершину P_1 , то их можно совместить поворотом сферы, а значит, и тела вокруг прямой OP_1 .

Тело с одной неподвижной точкой можно переместить из одного положения в другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку O . Это утверждение есть теорема Даламбера-Эйлера.

Конечно, такое перемещение не является истинным движением тела. На самом деле тело переходило из первого положения в другое каким-то другим, наверное, более сложным путём. Но если время Δt такого перехода мало, то это перемещение будет близко к действительному. А при $\Delta t \rightarrow 0$ можно предположить, что для данного момента времени тело поворачивается вокруг некоторой оси P , проходящей через неподвижную точку O , вращаясь вокруг неё с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Конечно, для каждого другого момента времени эта ось расположена иначе. Поэтому ось P называют *мгновенной осью вращения*, а угловую скорость $\vec{\omega}$ – *мгновенной угловой скоростью*, вектор которой направлен по этой оси.

3. Скорости точек тела

По теореме Даламбера-Эйлера за малое время Δt движение тела можно представить как вращение вокруг неподвижной оси OP_1 с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_{\text{ср}}$ (рис.9.8). Тогда скорость точки M по формуле (9.1) $\vec{v}_{\text{ср}} = \vec{\omega}_{\text{ср}} \times \vec{r}$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ угловая скорость $\vec{\omega}_{\text{ср}}$ будет приближаться к мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$, направленной по мгновенной оси вращения P , а скорость точки $\vec{v}_{\text{ср}}$ – к истинному значению

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{\omega}_{\text{ср}} \times \vec{r}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\omega}_{\text{ср}} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (9.3)$$

Но таким же образом находится скорость точки при вращении тела вокруг оси, по которой направлен вектор $\vec{\omega}$, в нашем случае – по мгновенной оси вращения P . Поэтому скорость точки можно определить как скорость её при вращении тела вокруг мгновенной оси P . Величина скорости $v = h \cdot \omega$ (см. рис. 9.8).

Определение скоростей точек тела значительно упрощается, если известна мгновенная ось вращения P . Иногда её можно найти, если удастся обнаружить у тела хотя бы ещё одну точку, кроме O , скорость которой в данный момент равна нулю, и провести ось P из неподвижной точки O через эту точку, так как мгновенная ось вращения – геометрическое место точек, скорости которых равны нулю в данный момент времени.

Пример 9.2. Водило $OA=a$, вращаясь вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0 , заставляет диск радиусом R кататься по горизонтальной плоскости (рис. 9.9).

Если представить диск как основание конуса с вершиной в неподвижной точке O , то движение диска можно назвать вращением вокруг этой неподвижной точки O .

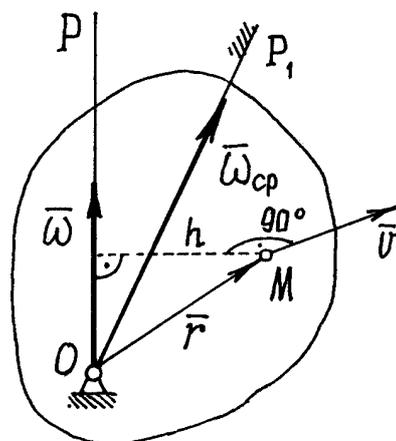


Рис. 9.8

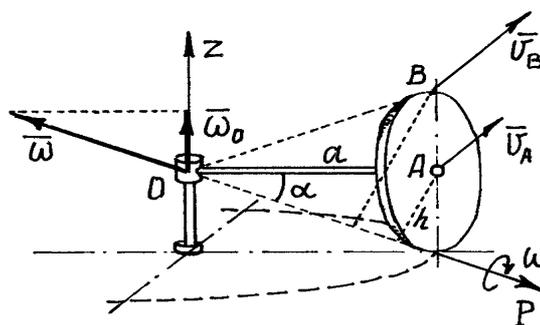


Рис. 9.9

Так как скорость точки касания диска с плоскостью равна нулю, то мгновенная ось вращения P проходит через эту точку. И вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ будет направлен по этой оси.

Точка A вместе с водилом OA вращается вокруг оси z . Поэтому её скорость $v_A = a\omega_0$ (см. рис. 9.9). Эта скорость определяет направление вращения диска вокруг оси P и направление вектора $\vec{\omega}$. Величина угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h}$ (h – расстояние от A до оси P). Теперь можно найти

скорость любой точки диска, рассматривая его движение как вращение вокруг оси P . Так, например, скорость точки B $v_B = 2h \cdot \omega$. Так как $h = R \cos \alpha$ и $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$, $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}}$, то

$$\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a\omega_0}{R \cos \alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0 \text{ и } v_B = 2a\omega_0.$$

4. Ускорения точек тела

Сначала определим угловое ускорение тела $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. При движении тела вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ может изменяться и по величине, и по направлению. Точка, расположенная на его конце, будет двигаться по некоторой траектории со скоростью \vec{u} (рис. 9.10). Если рассматривать вектор

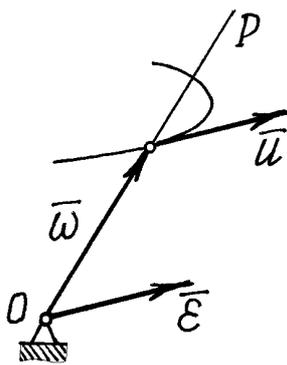


Рис. 9.10

$\vec{\omega}$ как радиус-вектор этой точки, то $\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$.

Итак, угловое ускорение тела можно определить как скорость точки, расположенной на конце вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u}.$$

Этот результат называется *теоремой Резаля*.

Теперь обратимся к определению ускорения точек. Ускорение какой-либо точки M тела

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

есть сумма двух векторов.

Первый вектор $\vec{W}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Модуль его $W_1 = \varepsilon r \sin \alpha_1 = \varepsilon h_1$, где h_1 – расстояние от точки M до вектора $\vec{\varepsilon}$. Направлен он перпендикулярно $\vec{\varepsilon}$ и \vec{r} . Но таким же способом определяется касательное ускорение (рис. 9.11). Поэтому первую составляющую ускорения определяют как касательное ускорение, предполагая, что тело вращается вокруг оси, совпадающей с вектором $\vec{\varepsilon}$. И обозначается этот вектор ускорения так:

$$\vec{W}_\tau^\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Второй вектор $\vec{W}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Модуль его $W_2 = \omega v \sin \alpha_2$, но $\alpha_2 = 90^\circ$, так как векторы $\vec{\omega}$ и \vec{v} перпендикулярны друг другу.

Значит, $W_2 = \omega v = \omega h_2 \omega = h_2 \omega^2$, где h_2 – расстояние от точки M до мгновенной оси P , до вектора $\vec{\omega}$.

Направлен вектор \vec{W}_2 перпендикулярно $\vec{\omega}$ и \vec{v} , то есть так же, как вектор нормального ускорения при вращении вокруг оси P или вектора $\vec{\omega}$. Поэтому этот вектор ускорения и обозначают соответственно так:

$$\vec{W}_n^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Итак, ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется как векторная сумма двух ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau^\varepsilon + \vec{W}_n^\omega. \quad (9.4)$$

Этот результат называется *теоремой Ривальса*.

Заметим, что в общем случае векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не совпадают и угол между \vec{W}_τ^ε и \vec{W}_n^ω не равен 90° , векторы не перпендикулярны друг другу, как это было при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Пример 9.3. Продолжим исследование движения диска (пример 9.2).

Модуль угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a}{R \cos \alpha} \omega_0 = \text{const}$. Значит, вектор $\vec{\omega}$ вместе с осью P , которая всегда проходит через точку касания диска с плоскостью, вращается вокруг оси z и описывает конус (рис. 9.12).

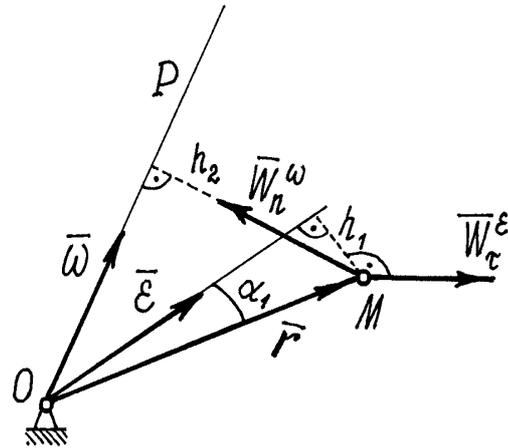


Рис 9.11

Точка M на конце вектора $\vec{\omega}$ движется по окружности радиусом $r = \omega \cdot \cos \alpha$ с угловой скоростью ω_0 . Поэтому угловое ускорение диска по теореме Резаля $\varepsilon = u_M = \omega \cos \alpha \cdot \omega_0 = \frac{a}{R} \omega_0^2$.

Откладывается вектор $\vec{\varepsilon}$ из неподвижной точки O . Направлен он как скорость \vec{u}_M параллельно оси x .

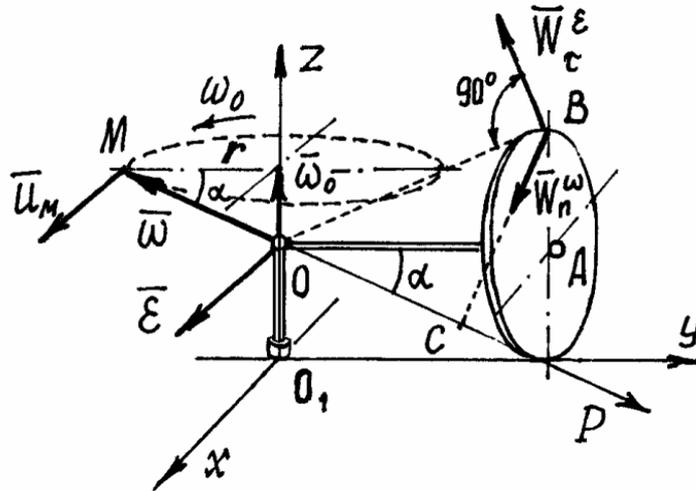


Рис. 9.12

Найдём ускорение точки B .

Ускорение $W_\tau^\varepsilon = OB \cdot \varepsilon = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2$. Направлен вектор \vec{W}_τ^ε перпендикулярно OB и расположен в плоскости zO_1y .

Ускорение $W_n^\omega = BC \cdot \omega^2 = 2h\omega^2 = 2h \frac{v_A^2}{h^2} = 2 \frac{a^2 \omega_0^2}{R \cos \alpha} = 2 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2$.

Вектор \vec{W}_n^ω направлен по BC перпендикулярно мгновенной оси P . Модуль вектора \vec{W}_B (этот вектор на рисунке не показан) найдём с помощью проекций, проектируя равенство (9.4) на оси x, y, z :

$$W_{Bx} = 0,$$

$$W_{By} = -W_\tau^\varepsilon \sin \alpha - W_n^\omega \sin \alpha = -3 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2 \sin \alpha = -3a\omega_0^2,$$

$$W_{Bz} = W_\tau^\varepsilon \cos \alpha - W_n^\omega \cos \alpha = -\frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2 \cos \alpha = -\frac{a^2}{R} \omega_0^2.$$

Значит, ускорение точки B $W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2 + W_{Bz}^2} = a\omega_0^2 \sqrt{9 + \frac{a^2}{R^2}}$.

§4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным движением называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости. Называется эта плоскость плоскостью движения (рис. 9.13).

Все точки прямой A_1A_2 , перпендикулярной этой плоскости, движутся одинаково, так как прямая перемещается поступательно. Поэтому для исследования движения всех точек тела достаточно определить движение только точек, расположенных в каком-нибудь сечении S , параллельном плоскости движения.

В дальнейшем на чертеже будем изображать лишь это сечение S , точки которого движутся в плоскости чертежа (рис. 9.14).

Положение сечения S и его точек будем определять в системе двух осей x и y . Это сечение S при движении тела, перемещаясь по плоскости, ещё и поворачивается. Поэтому положение сечения будем определять с помощью координат x_C и y_C какой-нибудь точки C (полюса) и углом φ между произвольно проведённой прямой CA и осью x (см. рис. 9.14).

Чтобы определить положение сечения S и его точек в любой момент времени, достаточно задать функции времени

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \right\}$$

Эти функции называются *уравнениями плоскопараллельного движения*.

Конечно, если полюсом назвать другую точку, например C_1 , то первые два уравнения изменятся, так как точка C_1 движется иначе и по другой траектории.

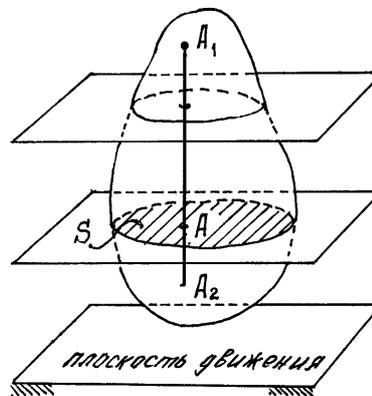


Рис. 9.13

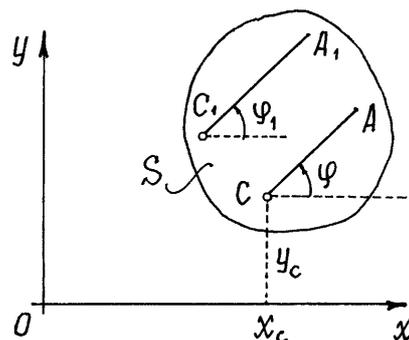


Рис. 9.14

А третье уравнение не зависит от выбора полюса. Действительно, если поворот тела определять углом φ_1 между осью x и прямой C_1A_1 , параллельной CA , то углы будут всегда равны $\varphi_1 = \varphi$ и законы их изменения – одинаковы.

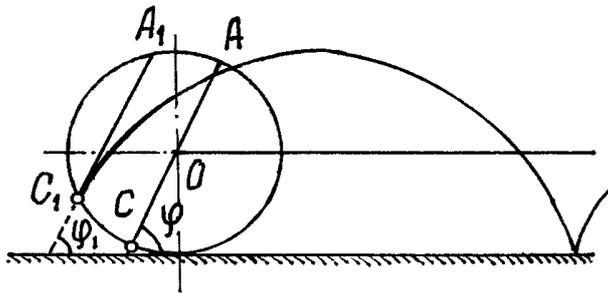


Рис.9.15

В качестве примера рассмотрим движение колеса, которое катится без скольжения по прямой (рис.9.15). Это движение будет плоскопараллельным,

потому что все точки колеса движутся в одной вертикальной плоскости.

У полюса O , центра колеса, траектория – прямая. А у полюса C_1 траектория – циклоида. Уравнения движения этих двух точек разные. А углы φ и φ_1 , которые составляют диаметр CA , и хорда C_1A_1 , параллельная диаметру, с горизонтальной прямой всегда равны. Значит, и угловые скорости $\omega = \dot{\varphi}$ и $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ и угловые ускорения $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$ будут соответственно одинаковы.

Нетрудно заметить, что плоскопараллельное движение тела можно представить как сумму двух движений: движения полюса по некоторой траектории и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс перпендикулярно плоскости движения (вращения вокруг полюса).

1. Скорости точек тела. Мгновенный центр скоростей

Пусть известны уравнения плоскопараллельного движения

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\}$$

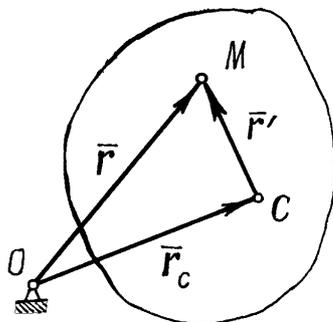


Рис.9.16

Найдём скорость какой-нибудь точки M (рис. 9.16).

Положение точки M определяется радиусом-вектором \vec{r} , положение полюса C – вектором \vec{r}_C . Проведём ещё один вектор \vec{r}' из полюса C в точку M . Тогда $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}'$.

Скорость точки M $\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$. Первое слагаемое этой суммы

равно скорости полюса $\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C$ (рис.9.17).

Чтобы найти второе, условно остановим движение полюса, положим $\vec{r}_C = \text{const}$. Тогда получится $\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}'}{dt}$. Значит, это второе слагаемое определяет скорость точки M при вращении тела вокруг как бы неподвижного полюса C и обозначается \vec{v}_{MC} .

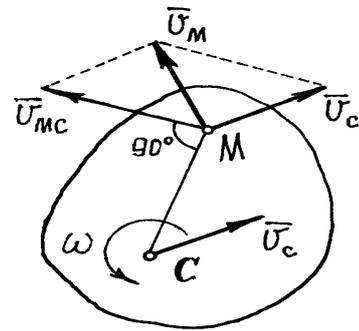


Рис. 9.17

Итак, скорость точки M тела есть векторная сумма скорости полюса и скорости точки при вращении тела вокруг полюса (рис. 9.17)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}. \quad (9.5)$$

Скорость полюса можно определить, например, с помощью уравнений движения, с помощью производных \dot{x}_C и \dot{y}_C (см. формулу 9.2). А скорость \vec{v}_{MC} – как скорость при вращении тела вокруг оси C $v_{MC} = MC \cdot \omega = MC \cdot \dot{\phi}$.

Найдём скорость ещё одной точки тела, точки C_v , положение которой определяется как (рис. 9.18). Повернём вектор скорости полюса \vec{v}_C на 90° по направлению угловой скорости ω . И в этом направлении отложим отрезок $CC_v = \frac{v_C}{\omega}$. Скорость этой точки C_v

$\vec{v}_{C_v} = \vec{v}_C + \vec{v}_{C_vC}$, но $v_{C_vC} = CC_v \cdot \omega = v_C$, а вектор этой скорости \vec{v}_{C_vC} перпендикулярен

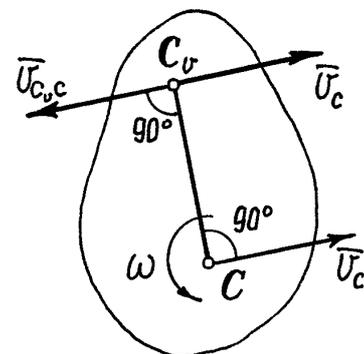


Рис. 9.18

CC_v и направлен в сторону, противоположную вектору \vec{v}_C . Значит, скорость точки C_v как сумма векторов \vec{v}_C и \vec{v}_{C_vC} будет равна нулю $\vec{v}_{C_v} = 0$.

Следовательно, при плоскопараллельном движении тела всегда можно найти такую точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка C_v называется мгновенным центром скоростей.

Положение этой точки на теле всё время меняется, так как скорость полюса в общем случае может изменяться и по величине, и по направлению; да и угловая скорость ω также переменна.

Пусть положение мгновенного центра скоростей C_v известно (рис. 9.19). Назовем его полюсом. Тогда скорость точки A по выражению (9.5)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Cv} + \vec{v}_{ACv}.$$

Но $\vec{v}_{Cv} = 0$. Значит, $\vec{v}_A = \vec{v}_{ACv}$ и величина её

$$v_A = AC_v \cdot \omega.$$

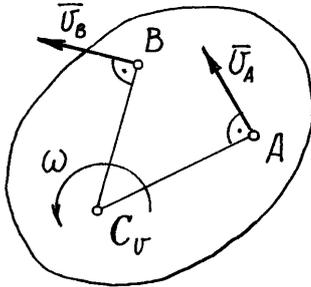


Рис. 9.19

Аналогично скорость другой точки B $\vec{v}_B = \vec{v}_{BCv}$ и $v_B = BC_v \cdot \omega$.

Следовательно, если известен мгновенный центр скоростей, то определение скоростей точек значительно упрощается. Предполагаем, что тело вращается вокруг

оси, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения, и находим скорости при таком вращении.

Существует несколько способов определения положения мгновенного центра скоростей.

а) Если известны скорости двух точек тела, то мгновенный центр скоростей C_v находится как точка пересечения перпендикуляров к векторам этих скоростей, проведённых из данных точек (см. рис. 9.19).

При этом может оказаться, что точки расположены на одном перпендикуляре к скоростям (рис. 9.20). В этом случае надо искать C_v как точку пересечения этого перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей. Этот способ следует из того, что скорости пропорциональны расстояниям от точек до C_v и полученные треугольники подобны.

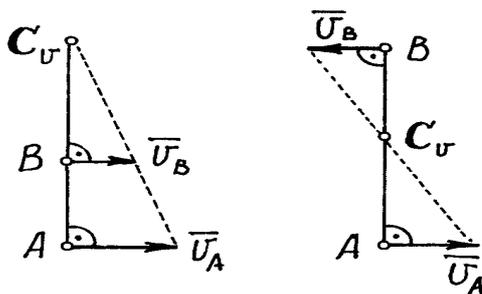


Рис. 9.20

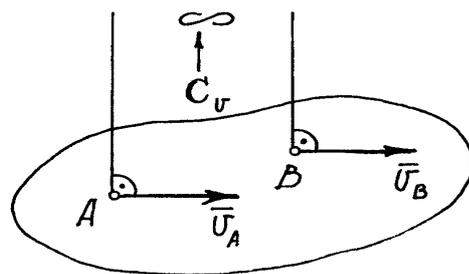


Рис. 9.21

Может получиться и так, как показано на рис. 9.21. В этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и угловая скорость $\omega = \frac{v_A}{AC_v} = 0$. А при $\omega = 0$ как при поступательном движении скорости всех точек тела будут равны $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$

б) Если тело катится без скольжения по неподвижной поверхности (рис. 9.22), то мгновенный центр скоростей находится в точке касания, так как проскальзывания нет и скорости этой точки тела и поверхности в данный момент одинаковы, то есть равны нулю.

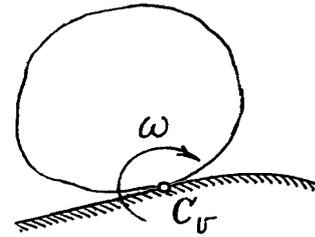


Рис. 9.22

Пример 9.4. Тело, имеющее форму катушки (рис. 9.23), катится своим средним цилиндром по неподвижной плоскости так, что расстояние $x_C = 3t$ см. Радиусы цилиндров известны: $R = 4$ см и $r = 2$ см. Определим скорости точек A , B и C .

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания катушки с плоскостью. Скорость полюса C

$$v_C = \dot{x}_C = 3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Угловая скорость катушки

$$\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{r} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Скорости точек A и B направлены перпендикулярно отрезкам прямых, соединяющих эти точки с мгновенным центром скоростей. Величины

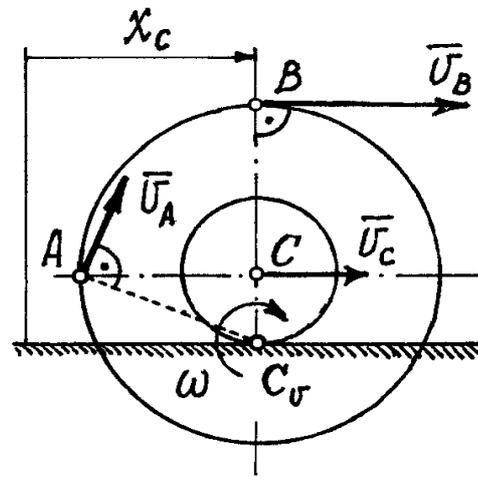


Рис. 9.23

скоростей как при вращении вокруг мгновенного центра скоростей C_v будут равны

$$v_A = AC_v \cdot \omega = \sqrt{r^2 + R^2} \omega = 6,71 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$v_B = BC_v \cdot \omega = (R + r) \omega = 9,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Пример 9.5. Стержень AB (рис. 9.24) скользит концами в вертикальной плоскости по взаимно перпендикулярным прямым так, что при угле с горизонтальной плоскостью, равном α , скорость нижнего конца $v_B = u$. Длина стержня $AB = l$. Определим скорость верхнего конца A и угловую скорость стержня.

Нетрудно определить направление вектора скорости точки A , скользящей по вертикальной прямой. Тогда C_v находится на пересечении перпендикуляров к \vec{v}_A и \vec{v}_B (рис. 9.24).

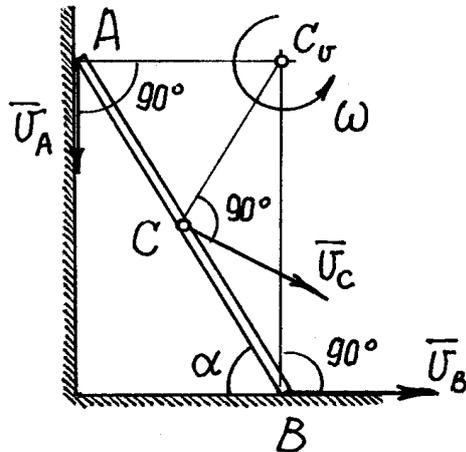


Рис. 9.24

$$\text{Угловая скорость } \omega = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{u}{l \sin \alpha}.$$

Скорость точки A

$$v_A = AC_v \cdot \omega = l \cos \alpha \frac{u}{l \sin \alpha} = u \operatorname{ctg} \alpha.$$

А скорость центра стержня C , например, направлена перпендикулярно CC_v и

$$\text{равна } v_C = CC_v \omega = \frac{l}{2} \omega = \frac{u}{2 \sin \alpha}.$$

При решении задач бывает полезна теорема о проекции скоростей точек на ось. Докажем её (рис. 9.25).

Зависимость между скоростями двух точек A и B : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Спроектируем это равенство на ось, проведённую по AB : $\text{пр.} \vec{v}_B = \text{пр.} \vec{v}_A + \text{пр.} \vec{v}_{BA}$. Но проекция скорости \vec{v}_{BA} на ось равна нулю. Поэтому $\text{пр.} \vec{v}_B = \text{пр.} \vec{v}_A$ или $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$.

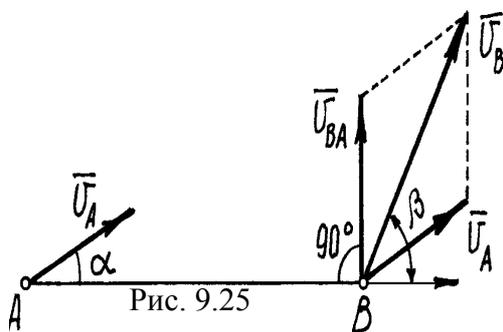


Рис. 9.25

Вывод. *Проекции скоростей двух точек тела на ось, проведённую по этим точкам, равны.*

Так, в примере 9.5 скорость точки A можно найти проще, используя эту теорему. Проектируя векторы скоростей на ось, проведённую по стержню AB , получим:

$$v_A \sin \alpha = v_B \cos \alpha \quad \text{и} \quad v_A = v_B \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = u \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. План скоростей

Пусть известны скорости нескольких точек плоского сечения тела (рис. 9.26). Если эти скорости отложить в масштабе из некоторой точки O и соединить их концы прямыми, то получится картинка, которая называется планом скоростей. (На рисунке $\vec{oa} = \vec{v}_A$, $\vec{oc} = \vec{v}_C$, $\vec{ob} = \vec{v}_B$).

Свойства плана скоростей

а) Стороны треугольников на плане скоростей перпендикулярны соответствующим прямым на плоскости тела.

Действительно, по (9.5) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Но на плане скоростей $\vec{v}_B = \vec{ob}$, $\vec{v}_A = \vec{oa}$. Значит, $\vec{v}_{BA} = \vec{ab}$; причём вектор скорости \vec{v}_{BA} перпендикулярен AB , поэтому и $ab \perp AB$. Точно так же $bc \perp BC$ и $ac \perp AC$.

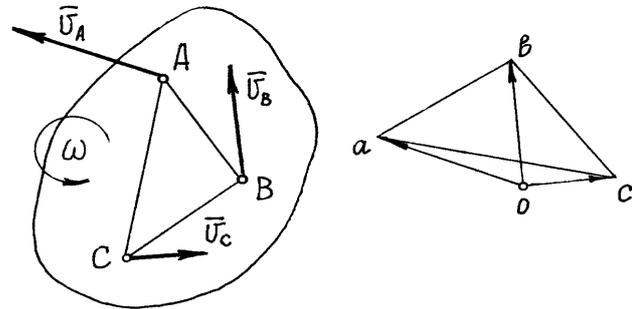


Рис. 9.26

б) Стороны плана скоростей пропорциональны соответствующим отрезкам прямых на плоскости тела.

Так как $v_{BA} = AB \cdot \omega = ab$, $v_{BC} = BC \cdot \omega = bc$, $v_{AC} = AC \cdot \omega = ac$, то отсюда и следует, что стороны плана скоростей пропорциональны отрезкам прямых на плоскости тела, так как умножаются на одну и ту же величину, равную ω .

Объединив оба свойства, можно сделать вывод, что *план скоростей подобен соответствующей фигуре на теле и повернут относительно её на 90° по направлению вращения*. Эти свойства плана скоростей позволяют определять скорости точек тела графическим способом.

Пример 9.6. На рис. 9.27 в масштабе изображён механизм. Известна угловая скорость ω_0 звена OA . Построим план скоростей механизма.

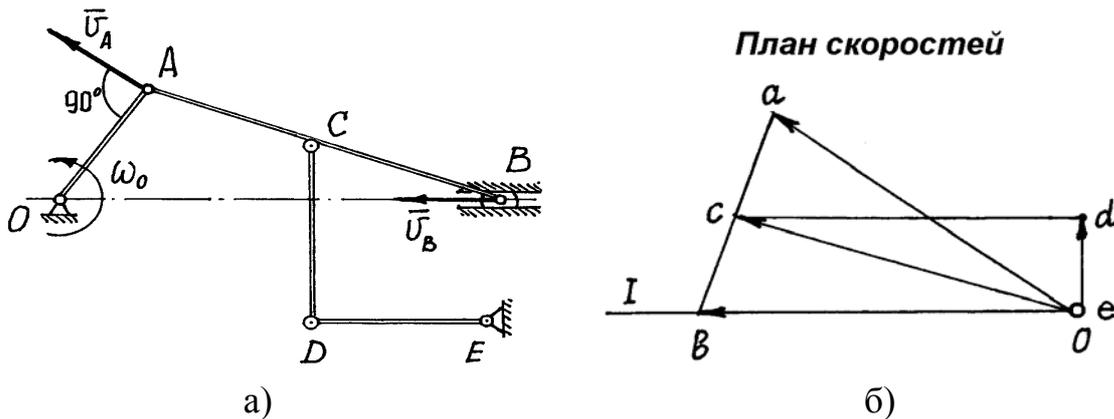


Рис. 9.27

Чтобы построить план скоростей, должна быть известна скорость какой-нибудь одной точки и хотя бы направление вектора скорости другой.

В нашем примере можно определить скорость точки A : $v_A = OA \cdot \omega_0$ и направление её вектора \vec{v}_A .

Откладываем (рис. 9.27, б) из точки o в масштабе $\overline{oa} = \vec{v}_A$. Известно направление вектора скорости ползуна B – горизонтальное (рис. 9.27, а). Проводим на плане скоростей из точки o прямую I по направлению скорости \vec{v}_B , на которой должна находиться точка b , определяющая скорость этой точки B . Так как стороны плана скоростей перпендикулярны соответствующим звеньям механизма, то из точки a проводим прямую перпендикулярно AB до пересечения с прямой I . Точка пересечения определит точку b , а значит, и скорость точки B : $\vec{v}_B = \overline{ob}$. По второму свойству плана скоростей его стороны подобны звеньям механизма. Точка C делит AB пополам, значит, и точка c должна делить ab пополам. Точка c определит на плане скоростей величину и направление скорости $\vec{v}_C = \overline{oc}$ (если c соединить с точкой o).

Скорость точки E равна нулю, поэтому точка e на плане скоростей совпадает с точкой o .

Далее. Должно быть $cd \perp CD$ и $de \perp DE$. Проводим эти прямые, найдем их точку пересечения d . Отрезок od определит вектор скорости $\vec{v}_D = \overline{od}$.

3. Ускорения точек тела. Мгновенный центр ускорений

Скорость точки тела находится как векторная сумма двух скоростей. Например, скорость точки A $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}$.

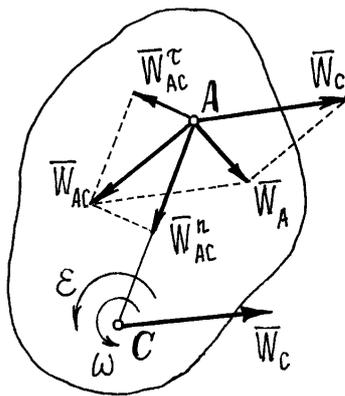


Рис. 9.28

$$\text{Ускорение её } \vec{w}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} + \frac{d\vec{v}_{AC}}{dt}.$$

Первое слагаемое этой суммы есть ускорение полюса $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{w}_C$. Если остановить движение полюса C , положив $\vec{v}_C = 0$, оставив лишь вращение тела, то окажется, что производная $\frac{d\vec{v}_{AC}}{dt} = \vec{w}_{AC}$, то есть равна ускорению точки A

при предположении, что тело лишь вращается вокруг неподвижного полюса C . Следовательно,

$\vec{w}_A = \vec{w}_C + \vec{w}_{AC}$. Но так как при вращении ускорение точки – сумма нормального и касательного ускорений, то

$$\vec{w}_A = \vec{w}_C + \vec{w}_{AC}^n + \vec{w}_{AC}^\tau, \quad (9.6)$$

где $W_{AC}^n = AC \cdot \omega^2$, а вектор \vec{W}_{AC}^n направлен к полюсу C (рис. 9.28); ускорение $W_{AC}^\tau = AC \cdot \varepsilon$ и вектор его направлен перпендикулярно AC в сторону, соответствующую направлению углового ускорения ε .

Пример 9.7. Диск катится без скольжения по прямой. Центр его C имеет скорость v_C и ускорение W_C (рис. 9.29). Найдём ускорение точки A .

Угловую скорость находим с помощью мгновенного центра скоростей

$$\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{R}.$$

Угловое ускорение при качении колеса по прямой можно найти как производную от угловой скорости. Имея в виду, что $CC_v = R = \text{const}$, а точка C движется по прямой, получим:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_C}{CC_v} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{W_C}{R}.$$

Если C – полюс, то

$$\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}^n + \vec{W}_{AC}^\tau, \quad \text{где}$$

$$W_{AC}^n = AC \cdot \omega^2 = R \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{v_C^2}{R};$$

$$W_{AC}^\tau = AC \cdot \varepsilon = R \frac{W_C}{R} = W_C.$$

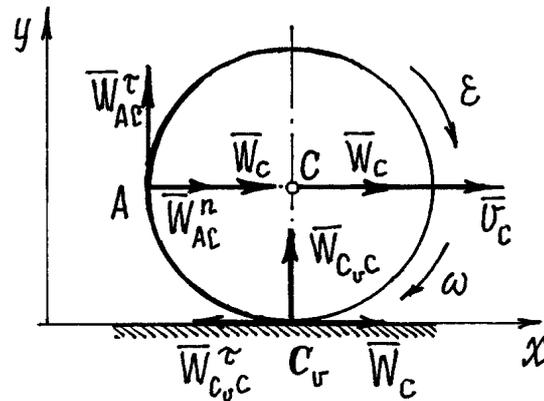


Рис. 9.29

Величину ускорения найдём с помощью проекций на оси x и y :

$$W_{Ax} = W_{AC}^n + W_C = \frac{v_C^2}{R} + W_C, \quad W_{Ay} = W_{AC}^\tau = W_C.$$

$$\text{Тогда } W_A = \sqrt{W_{Ax}^2 + W_{Ay}^2} = \frac{1}{R} \sqrt{(v_C^2 + RW_C)^2 + R^2 W_C^2}.$$

Ускорение мгновенного центра скоростей C_v : $\vec{W}_{C_v} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_v C}^n + \vec{W}_{C_v C}^\tau$, где $W_{C_v C}^n = R\omega^2 = \frac{v_C^2}{R}$; $W_{C_v C}^\tau = R\varepsilon = W_C$. И так как $\vec{W}_{C_v C}^\tau = -\vec{W}_C$, то

ускорение $\vec{W}_{C_v} = \vec{W}_{C_v C}^n$ и $W_{C_v} = \frac{v_C^2}{R} \neq 0$. Таким образом, ускорение мгновенного центра скоростей не равно нулю.

Пример 9.8. Вернёмся к примеру 9.5 (рис. 9.30). Найдём ускорение точки A , полагая $\vec{v}_B = \vec{u} = \text{const}$, то есть ускорение $\vec{W}_B = 0$. По (9.6) имеем

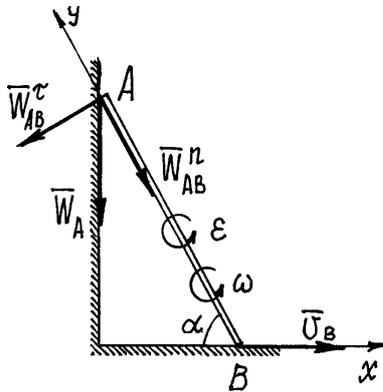


Рис. 9.30

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau, \quad (9.7)$$

где $W_{AB}^n = l\omega^2 = \frac{u^2}{l \sin^2 \alpha}$; $W_{AB}^\tau = l\varepsilon$, но направление вектора \vec{W}_{AB}^τ неизвестно, неизвестно и угловое ускорение ε .

Предположим, что вектор \vec{W}_{AB}^τ направлен перпендикулярно AB влево. Ускорение \vec{W}_A , конечно, направлено по траектории прямолинейного движения точки A , предположим, вниз.

Спроектируем векторное равенство (9.7) на оси x и y , получим два уравнения

$$0 = W_{AB}^n \cos \alpha - W_{AB}^\tau \sin \alpha \quad \text{и} \quad -W_A \sin \alpha = -W_{AB}^n.$$

Из второго уравнения находим ускорение точки A $W_A = \frac{W_{AB}^n}{\sin \alpha} = \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha}$.

Положительное значение W_A указывает на то, что направление вектора \vec{W}_A выбрано было правильно. Из первого уравнения теперь можно

найти ускорение $W_{AB}^\tau = W_{AB}^n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$

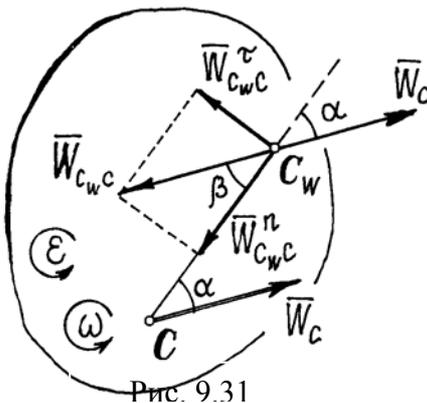


Рис. 9.31

$$= \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha} \cos \alpha \quad \text{и} \quad \text{угловое ускорение}$$

$$\varepsilon = \frac{W_{AB}^\tau}{l} = \frac{u^2}{l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha \quad (\text{направления}$$

\vec{W}_{AB}^τ и ε также выбраны верно).

Рассмотрим ещё раз плоскопараллельное движение тела (рис. 9.31). Пусть известны ускорение полюса \vec{W}_C , угловая скорость тела ω и его угловое ускорение ε .

Проведём из полюса C прямую под углом α таким, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad (9.8)$$

отложим этот угол от вектора \vec{W}_C по направлению углового ускорения ε .

И на этой прямой найдём точку C_W на расстоянии от C равном

$$CC_W = \frac{W_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Докажем, что ускорение этой точки C_W равно нулю. $\vec{W}_{C_W} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_W C} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_W C}^n + \vec{W}_{C_W C}^\tau$, где $W_{C_W C}^n = CC_W \cdot \omega^2$, $W_{C_W C}^\tau = CC_W \cdot \varepsilon$ и $W_{C_W C} = \sqrt{(W_{C_W C}^n)^2 + (W_{C_W C}^\tau)^2} = CC_W \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_C$. Найдём угол β между вектором $\vec{W}_{C_W C}$ и прямой CC_W .

Тангенс его $\operatorname{tg} \beta = \frac{W_{C_W C}^\tau}{W_{C_W C}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg} \alpha$. Значит $\beta = \alpha$. И сумма векто-

ров \vec{W}_C и $\vec{W}_{C_W C}$ равна нулю, то есть ускорение точки C_W равно нулю.

Следовательно, при плоскопараллельном движении у тела можно отыскать точку, ускорение которой в этот момент времени равно нулю. Такая точка C_W называется мгновенным центром ускорений.

Если у тела удастся найти эту точку, то определение ускорений точек тела значительно упрощается. Действительно, назначив точку C_W полюсом, ускорение которого равно нулю, формула сложения ускорений получится проще:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_{AC_W}^n + \vec{W}_{AC_W}^\tau.$$

То есть ускорения точек тела определяются как при вращении вокруг оси, проходящей через мгновенный центр ускорений перпендикулярно плоскости движения. Например, в примере 9.8 мгновенный центр ускорений находится в точке B и ускорение точки A будет определяться как при вращении её вокруг оси, проходящей через точку B .

Так как угол α между вектором ускорения точки и прямой, соединяющей её с мгновенным центром ускорений определяется лишь угловым ускорением ε и угловой скоростью ω (9.8), одинаковыми для всех точек, то эти углы, определяющие направление ускорений, для всех точек будут равными.

Например, на рис.9.32 показано распределение ускорений точек стержня AB (при $W_A = W_B$ угол $\alpha = 45^\circ$).

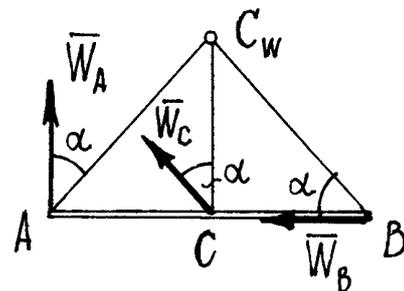


Рис. 9.32

Следует заметить, что мгновенный центр ускорений C_w и мгновенный центр скоростей C_v тела – это, как правило, разные точки.

Х. Сложное движение точки

§ 1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки

Довольно часто встречается движение точки, состоящее из нескольких движений. Вот два наглядных примера.

Первый. Наблюдатель, стоящий на высоком берегу реки, смотрит на

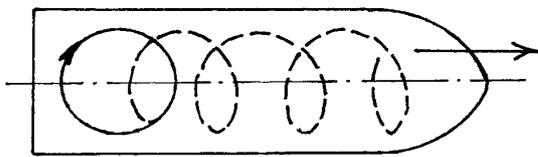


Рис. 10.1

прямолинейно движущийся теплоход, на верхней палубе которого по окружности ходит пассажир (рис. 10.1). Наблюдатель же видит довольно сложную «загогулину» (пунктирная линия) как результат сложения прямо-

линейного движения и движения по окружности.

Второй пример. Стержень вращается в плоскости вокруг оси O , а по нему движется колечко M (рис. 10.2). Неподвижный наблюдатель увидит движение колечка по спирали.

Эти движения имеют соответствующие названия: абсолютное, относительное и переносное.

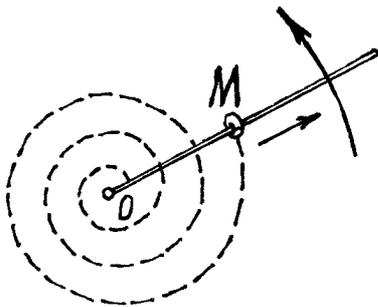


Рис. 10.2

Абсолютным движением называется движение точки, которое видит неподвижный наблюдатель («загогулина» и спираль в наших примерах).

Относительным движением – является движение точки, которое увидел бы наблюдатель, двигаясь вместе со средой (с теплоходом и со стержнем). В наших примерах – это движение пассажира по

окружности на палубе теплохода и прямолинейное скольжение колечка по стержню.

Переносное движение – это движение среды, по которой движется точка (прямолинейное движение теплохода и вращение стержня).

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того чтобы неподвижный наблюдатель увидел

относительное движение точки, надо остановить переносное движение. Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае при определении переносного движения точки обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того, в какой момент будет остановлено относительное движение, и от того, где точка находится на среде в этот момент, так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.*

Так, переносное движение пассажира – это движение той точки палубы, на которой находится пассажир. И в примере с колечком – это движение той точки стержня, где находится колечко в данный момент (движение по окружности радиусом OM).

Ещё несколько определений.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки (\vec{v} , \vec{W}) будем называть скорость и ускорение при абсолютном движении.

Относительной скоростью и относительным ускорением (\vec{v}_r , \vec{W}_r) – скорость и ускорение точки в относительном движении.

Переносная скорость и переносное ускорение точки (\vec{v}_e , \vec{W}_e) – это абсолютная скорость и абсолютное ускорение той точки среды, с которой совпадает движущаяся точка в данный момент времени.

Все эти движения можно попробовать определить с помощью координат и векторным способом.

На рис.10.3 показаны неподвижные оси x, y, z и движущиеся оси x_1, y_1, z_1 .

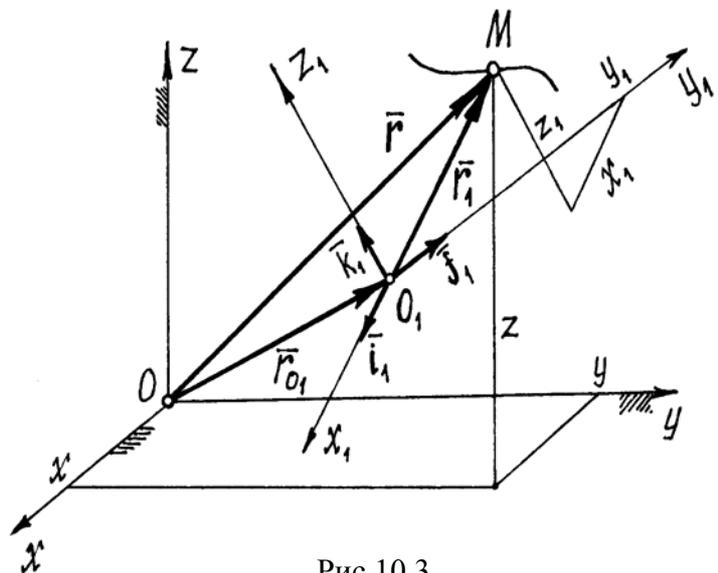


Рис.10.3

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(t), \\ y_1 &= y_1(t), \\ z_1 &= z_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Абсолютное движение точки M определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а относительное движение радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$. Радиус-вектор \vec{r}_{O_1} определяет движение начала подвижных осей O_1 (но не переносное движение точки $M!$).

§ 2. Определение абсолютной скорости точки

Абсолютная скорость точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Но $\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{r}_1$ (см. рис. 10.3),

где $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$, а $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – орты подвижных осей. Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \\ &= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} \end{aligned} \quad (10.3)$$

(орты $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – переменные, так как направление их меняется, функции времени t).

Используя метод остановки, с помощью выражения (10.3) можно определить относительную скорость точки и переносную. Действительно, остановив переносное движение, движение осей x_1, y_1, z_1 , то есть положив $\vec{r}_{O_1} = \text{const}$, $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$, из уравнения (10.3) получим

$$\vec{v}_r = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1. \quad (10.4)$$

А остановив относительное движение точки M ($x_1 = \text{const}$, $y_1 = \text{const}$, $z_1 = \text{const}$), получим её переносную скорость

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Поэтому из формулы (10.3) следует, что абсолютная скорость точки есть векторная сумма двух скоростей – переносной и относительной

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (10.5)$$

Пример 10.1. Колечко M движется по вращающемуся стержню так, что $OM = s = 3t^2$ (см) и $\varphi = 2t$ (рад) (рис. 10.4).

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением $s = s(t)$. Траектория точки M при переносном движении в момент времени t – окружность радиусом

$OM = s$. Поэтому относительная скорость

$v_r = \dot{s} = 6t \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и направлена по касательной к траектории вдоль стержня (см. рис. 10.4). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси,

$$v_e = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории точки при переносном движении перпендикулярно стержню. Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Модуль ее, так как $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$,

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

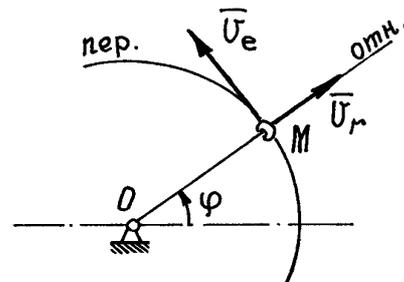


Рис. 10.4

§3. Определение абсолютного ускорения точки. Ускорение Кориолиса

Ускорение точки – первая производная по времени от вектора скорости. Поэтому абсолютное ускорение, используя формулу (10.3):

$$\begin{aligned} \vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) + \\ + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Воспользовавшись правилом остановки, можем найти относительное и переносное ускорения точки.

Положив в (10.6) $\vec{r}_{O_1} = \text{const}$, $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$, получим относительное ускорение:

$$\vec{W}_r = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \vec{i}_1 + \frac{d^2 y_1}{dt^2} \vec{j}_1 + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \vec{k}_1. \quad (10.7)$$

При $x_1 = \text{const}$, $y_1 = \text{const}$, $z_1 = \text{const}$ получим переносное ускорение

$$\vec{W}_e = \frac{d^2 \vec{r}_{O_1}}{dt^2} + x_1 \frac{d^2 \vec{i}_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 \vec{j}_1}{dt^2} + z_1 \frac{d^2 \vec{k}_1}{dt^2}.$$

Поэтому из формулы (10.6) следует, что абсолютное ускорение состоит не из двух, а из трех ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \quad (10.8)$$

Дополнительное ускорение \vec{W}_c называется ускорением Кориолиса (по имени ученого, впервые обнаружившего это ускорение), оно равно

$$\vec{W}_c = 2 \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right). \quad (10.9)$$

Это дополнительное ускорение появилось из-за того, что переносная скорость зависит от относительного движения, от положения точки на среде, а относительная скорость изменяется за счет переносного движения.

Проще всего определить ускорение Кориолиса в двух частных случаях.

1. Переносное движение – поступательное движение (система подвижных осей $O_1 x_1 y_1 z_1$ перемещается поступательно).

Так как подвижные оси при таком движении не поворачиваются, то орты $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$. И тогда по (10.9) ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 0$, а абсолютное ускорение станет суммой лишь двух ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r.$$

Это понятно, так как переносная скорость точки не будет зависеть от относительного движения, а переносное движение не изменяет направление вектора относительной скорости.

2. Переносное движение – вращение вокруг неподвижной оси.

Пусть подвижная система осей $O_1 x_1 y_1 z_1$ вращается вокруг неподвижной оси ξ с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ (рис. 10.5).

Представим орты осей как радиусы-векторы точек, расположенных на их концах. Тогда производные от орт по времени можно рассматривать как скорости этих точек.

Например, скорость точки A на конце вектора \vec{j}_1 $\vec{v}_A = \frac{d\vec{j}_1}{dt}$. Но так как модуль ее $v_A = \omega_e a = \omega_e \cdot j_1 \sin \beta$, а вектор скорости \vec{v}_A направлен перпендикулярно $\vec{\omega}_e$ и \vec{j}_1 в сторону вращения, то $\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$ (см.9.1).

Поэтому $\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$, аналогично

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1, \text{ и } \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1. \quad (10.10)$$

По (10.9) ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx_1}{dt} \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \vec{k}_1 \right)$.

И, учитывая (10.4), получим

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \quad (10.11)$$

Ускорение Кориолиса есть удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки.

Величина его

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin \alpha, \quad (10.12)$$

где α – острый угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и \vec{v}_r .

Замечание. Можно доказать, что этот результат верен при любом переносном движении, не только при вращении вокруг неподвижной оси.

Пример 10.2. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z . По поверхности его движется точка M (рис. 10.6). Конечно, скорость этого движения точки – относительная скорость \vec{v}_r , а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ направлено перпендикулярно этим двум векторам по правилу направления вектора векторного произведения так, как показано на рис. 10.6.

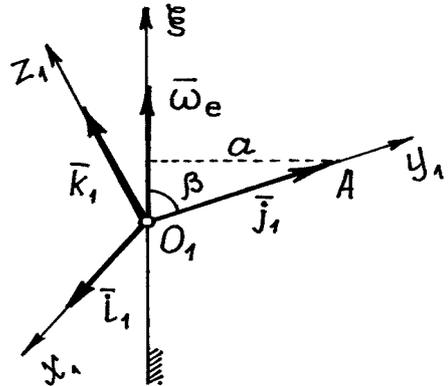


Рис. 10.5

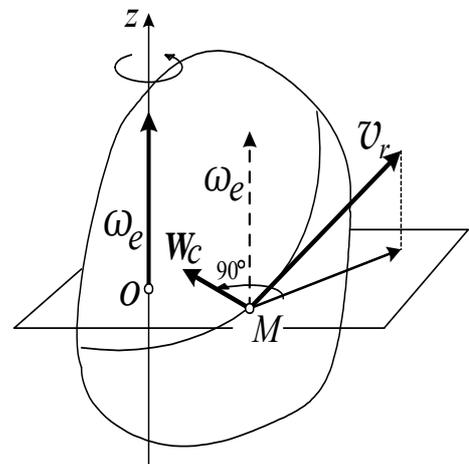


Рис. 10.6

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора \vec{W}_c : нужно спроектировать вектор относительной скорости \vec{v}_r на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90° градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора \vec{v}_r укажет направление кориолисова ускорения. Это правило было предложено Н.Е. Жуковским.

Пример 10.3. Вернемся к примеру 10.1. Найдем абсолютное ускорение колечка M

$$\vec{W}_M = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \quad (10.13)$$

Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом $OM = s$: $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$, где $W_e^n = s \cdot \omega_e^2 = 12t^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$,

$$\text{а } W_e^\tau = s\varepsilon_e = s \cdot \ddot{\phi} = 0.$$

Значит $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$ (рис.10.7). Относительное ускорение $W_r = \ddot{s} = 6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Ускорение Кориолиса

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 6t = 24t \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Вектор \vec{W}_c направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).

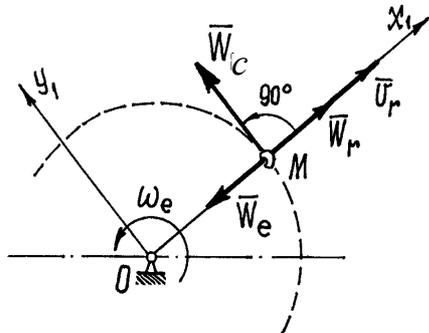


Рис.10.7

Величину абсолютного ускорения колечка M найдем с помощью проекций на подвижные оси x_1 и y_1 . Проектируя равенство (10.13) на оси, получим: $W_{x_1} = W_r - W_e = 6 - 12t^{-2} = 6(1 - 2t^{-2})$, $W_{y_1} = W_c = 24t$.

$$\text{Тогда } W_M = \sqrt{(W_{x_1})^2 + (W_{y_1})^2} = 6\sqrt{(1 - 2t^{-2})^2 + 16t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

XI. Сложное движение твердого тела

Так же как при сложном движении точки, нередко и движение тела можно рассматривать как сумму нескольких движений. Например, как состоящее из двух поступательных движений или как поступательного движения и вращения вокруг оси. Часто встречаются движения, состоящие из двух вращений вокруг осей или поступательного движения и вращения вокруг точки. Исследование движения точек, принадлежащих телу, совершающему сложное движение, можно проводить методами, изложенными в

разд.Х, никаких трудностей это не вызывает. Но анализ сложного движения тела, состоящего из нескольких вращений, обнаруживает некоторые особенности, которые следует рассмотреть специально.

§ 1. Сложение вращений тела вокруг двух осей

На рис. 11.1 изображено тело, которое совершает сложное движение – вращение вокруг оси, которая сама вращается вокруг другой, неподвижной оси. Естественно, первое вращение следует назвать относительным движением тела, второе – переносным, а соответствующие оси обозначить z_r и z_e .

Абсолютным движением будет вращение вокруг точки пересечения осей O . (Если тело имеет большой размер, то его точка, совпадающая с O , все время будет неподвижной). Угловые скорости переносного вращения и относительного вращения изображаются векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$, отложенными из неподвижной точки O , точки пересечения осей, по соответствующим осям.

Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки M тела, положение которой определяется радиусом-вектором \vec{r} (рис 11.1).

Как известно, она складывается из двух скоростей: относительной и переносной (10.5) $\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Но относительное движение тела (используя правило остановки в разд.Х,§1) есть вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг оси z_r , а положение точки M при этом определяется радиусом-вектором \vec{r} . Поэтому по (9.1) $\vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}$.

Переносное движение тела в данный момент времени, опять используя правило остановки, тоже есть вращение, но вокруг оси z_e с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, и положение

точки M опять будет определяться тем же радиусом-вектором \vec{r} . Поэтому и переносная скорость $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$.

Абсолютная же скорость, скорость при вращении вокруг неподвижной точки O , при сферическом движении определяется аналогично (по формуле 9.3) $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ – абсолютная угловая скорость, направленная по мгновенной оси вращения P .

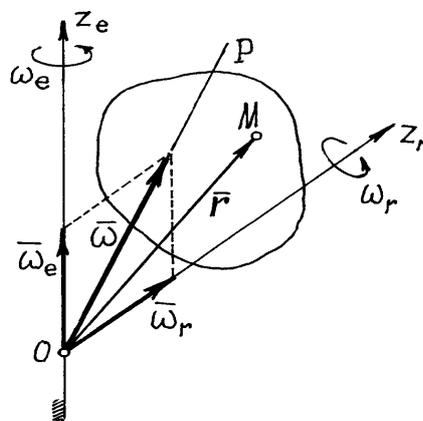


Рис. 11.1

По формуле сложения скоростей получим $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_r \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ или $\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r}$. Отсюда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$.

То есть мгновенная угловая скорость, угловая скорость абсолютного движения есть векторная сумма угловых скоростей переносного и относительного движений. А мгновенная ось вращения P , направленная по вектору $\vec{\omega}$, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ (см. рис 11.1).

Частные случаи:

1. Оси вращения z_e и z_r параллельны, направления вращений одинаковы (рис 11.2).

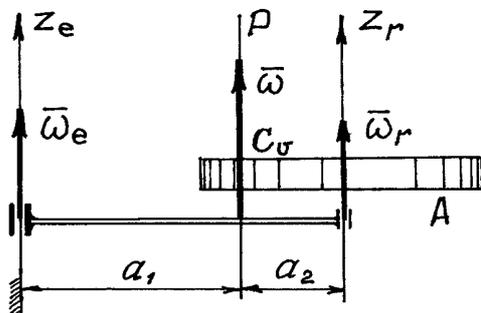


Рис. 11.2

Так как векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ параллельны и направлены в одну сторону, то абсолютная угловая скорость по величине равна сумме их модулей $\omega = \omega_e + \omega_r$, и вектор ее направлен в ту же сторону. Мгновенная ось вращения P делит расстояние между осями на части, обратно пропорциональные ω_e и ω_r :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad (\text{аналогично равнодействующей параллельных сил}).$$

В этом частном случае тело A совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей C_v находится на оси P .

2. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны (рис. 11.3).

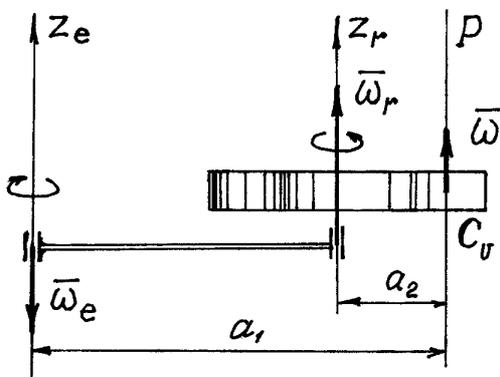


Рис. 11.3

В этом случае $\omega = \omega_r - \omega_e$ (при $\omega_r > \omega_e$). Мгновенная ось вращения и мгновенный центр скоростей находятся за вектором большей угловой скорости на расстояниях таких, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$ (опять по аналогии определения положения равнодействующей параллельных сил).

3. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны и угловые скорости равны

Угловая скорость абсолютного движения будет равна нулю и, следовательно, тело совершает поступательное движение. Этот случай называется *парой вращений* по аналогии с парой сил.

Пример 11.1. Диск радиусом R вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω_1 , а эта ось вместе с рамкой вращается вокруг вертикальной неподвижной оси с угловой скоростью ω_2 (рис.11.4).

Горизонтальная ось – это ось относительного вращения диска z_r ; вертикальная ось – ось его переносного вращения z_e . Соответственно угловые скорости $\omega_r = \omega_1$, $\omega_e = \omega_2$, векторы их направлены по осям z_r и z_e . Абсолютная угловая скорость диска $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$, а модуль ее, так как $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_r$, $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

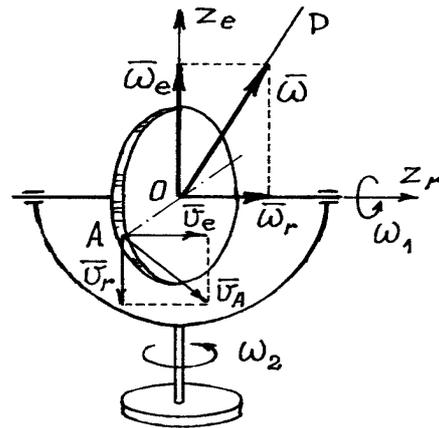


Рис. 11.4

Скорость точки A , например, можно найти как сумму переносной и относительной скоростей: $\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, где $v_e = R\omega_e = R\omega_2$, $v_r = R\omega_r = R\omega_1$ и $v_A = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2}$ или как при абсолютном движении, при вращении вокруг мгновенной оси P , $v_A = R\omega = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

Вектор скорости \vec{v}_A будет расположен в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$ и оси P .

Пример 11.2. Водило OA с укрепленными на нем двумя колесами 2 и 3 вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_0 . Колесо 2 при этом будет обкатываться по неподвижному колесу 1 и заставит вращаться колесо 3. Найдём угловую скорость ω_3 этого колеса. Радиусы – R_1, R_2, R_3 (рис.11.5).

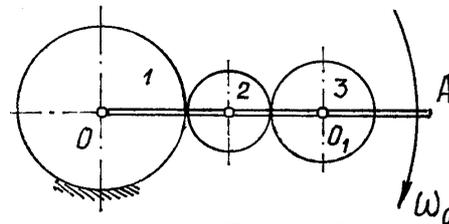


Рис. 11.5

Колесо 3 участвует в двух движениях. Вращается вместе с водилом вокруг неподвижной оси O и относительно своей оси O_1 .

Ось O будет осью переносного вращения, ось O_1 – относительного. Переносная угловая скорость колеса 3 – это угловая скорость водила $\omega_e = \omega_0$, направленная по часовой стрелке, как ω_0 .

Чтобы определить угловую скорость относительного движения, наблюдателю нужно находиться на водиле. Он увидит водило неподвижным, колесо 1 вращающимся против часовой стрелки со скоростью ω_0 (рис. 11.6), а колесо 3 – вращающимся с относительной угловой скоростью ω_r

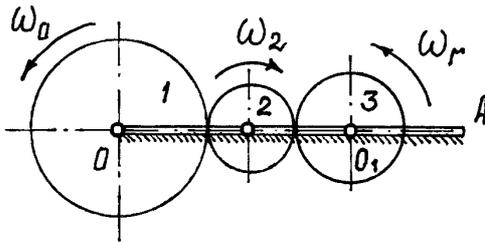


Рис. 11.6

против часовой стрелки. Так как $\frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$; $\frac{\omega_r}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$, то $\omega_r = \frac{R_1}{R_3} \omega_0$. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны. Поэтому скорость $\omega_3 = \omega_r - \omega_e = \left(\frac{R_1}{R_3} - 1\right) \omega_0$ и

направлена так же, как ω_r , против часовой стрелки. В частности, если $R_3 = R_1$, то $\omega_r = \omega_e$ и $\omega_3 = 0$, колесо 3 будет двигаться поступательно.

Исследование движения других подобных конструкций (планетарных и дифференциальных редукторов, передач) ведется аналогичным способом.

Переносной угловой скоростью является угловая скорость водила (рамки, крестовины и т.п.), а чтобы определить относительную скорость какого-либо колеса, нужно водило остановить, а неподвижное колесо заставить вращаться с угловой скоростью водила, но в противоположную сторону.

Угловые ускорения тела в абсолютном движении можно искать как производную $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, где $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$. Покажем (рис.11.7) единичные векторы \vec{k}_e и \vec{k}_r (орты осей z_e и z_r), а векторы угловых скоростей запишем так: $\vec{\omega}_e = \omega_e \cdot \vec{k}_e$, $\vec{\omega}_r = \omega_r \cdot \vec{k}_r$.

Тогда $\vec{\omega} = \omega_e \vec{k}_e + \omega_r \vec{k}_r$ и угловое ускорение при $\vec{k}_e = \text{const}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} \vec{k}_e + \frac{d\omega_r}{dt} \vec{k}_r + \omega_r \frac{d\vec{k}_r}{dt}.$$

Здесь $\frac{d\omega_e}{dt} = \varepsilon_e$, $\frac{d\omega_r}{dt} = \varepsilon_r$ и по формуле (10.10) $\frac{d\vec{k}_r}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_r$. Поэтому

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_e \vec{k}_e + \varepsilon_r \vec{k}_r + \omega_r (\vec{\omega}_e \times \vec{k}_r) \quad \text{или} \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \quad \text{и} \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_*,$$

где $\vec{\varepsilon}_e$ – угловое ускорение переносного вращения; $\vec{\varepsilon}_r$ – угловое ускорение относительного вращения; $\vec{\varepsilon}_* = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ – добавочное угловое ускорение, которое определяет изменение относительной угловой скорости $\vec{\omega}_r$ при переносном движении. Направлен этот вектор перпендикулярно осям z_e и z_r , как скорость конца вектора $\vec{\omega}_r$. Модуль добавочного углового ускорения $\varepsilon_* = \omega_e \cdot \omega_r \sin \alpha$, где α – угол между осями.

Конечно, если оси вращения параллельны, это угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_*$ будет равно нулю, так как $\alpha = 0$.

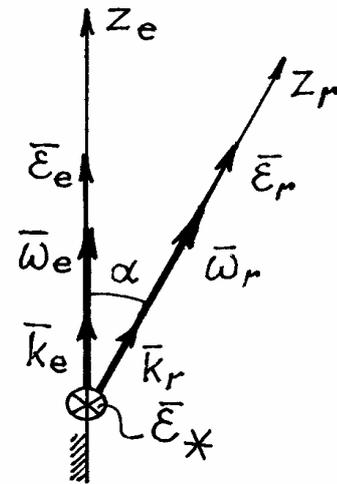


Рис. 11.7

§ 2. Общий случай движения тела

Произвольное движение тела – это общий случай движения. Его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного вместе с произвольно выбранным полюсом C и вращения вокруг этого полюса. Первое движение определяется уравнениями движения полюса, точки C ,

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ z_C &= z_C(t). \end{aligned} \right\}$$

А второе движение – уравнениями вращения вокруг точки C с помощью углов Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \right\}$$

Скорости и ускорения точек тела в общем случае при произвольном движении определяются такими же методами, как при сложном движении точки (см. разд. X).

ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ «КИНЕМАТИКА»

<p>К – 1</p>		<p>Тело, состоящее из двух цилиндров, радиусы которых $r = \sqrt{3} = 1,73$ см и $R = 3$ см, скатывается без скольжения по наклонной плоскости с угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. Определить скорости точек $C, 1, 2, 3, 4$.</p>
<p>К – 2</p>		<p>Диск радиусом $R = 10$ см катится без скольжения по прямой с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. Найти ускорения точек $C, 1, 2, 3, 4$ и мгновенные центры скоростей и ускорений.</p>
<p>К – 3</p>		<p>Квадрат со стороной 6 см вращается вокруг оси A с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. По стороне квадрата движется точка M так, что $s = OM = 3t^2$ см. Определить в момент $t = 1$ с абсолютную скорость точки v_M и её абсолютное ускорение W_M.</p>

Ответы на тесты на с.232

ДИНАМИКА

ХII. Аксиомы динамики

В кинематике исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом, и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В динамике решается более сложная и важная задача. Определяется движение тел под действием сил, приложенных к ним, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на их движение.

В основе динамики лежат несколько аксиом. Это известные законы Ньютона. Чтобы их сформулировать, введем несколько понятий.

Первое – *материальная точка*. Материальной точкой будем называть тело, обладающее массой, размеры которого можно не учитывать при определении его движения. Так что материальная точка на самом деле может оказаться довольно солидных размеров. Все зависит от масштабов пространства, в котором тело движется, и от других обстоятельств.

Второе. Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Теперь можно сформулировать первую аксиому.

§1. Первая аксиома

В основе этой аксиомы лежит первый закон Ньютона. Запишем ее так:
Изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно либо находится в покое, в равновесии.

Правда, при этом возникает вопрос: а относительно чего совершается такое движение? Конечно, наблюдение за таким движением должно вестись из системы отсчета, которая сама движется равномерно и прямолинейно.

Такая система, относительно которой изолированные материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*.

Если материальная точка в такой инерциальной системе не находится в равновесии, то эта точка не будет изолированной. Значит, на нее оказывается действие со стороны других тел, которые выводят ее из состояния равновесия, то есть на нее действуют силы.

§2. Вторая аксиома. Основное уравнение динамики

Из второго закона Ньютона следует, что сила, действующая на точку, изменяет ее движение. Это изменение, как известно из кинематики, характеризуется ускорением. Поэтому вторую аксиому сформулируем так:

При действии на материальную точку силы у точки появляется ускорение, пропорциональное силе и имеющее ее направление.

Эту зависимость можно записать в виде формулы $\vec{F} = m\vec{W}$. Коэффициент пропорциональности m называется массой точки.

Если на точку действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, равнодействующей $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, и предыдущее равенство записать так:

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i. \quad (12.1)$$

Это векторное равенство называется *основным уравнением динамики*.

При свободном падении тела на него действует сила P , сила тяжести, которую вблизи поверхности Земли будем называть весом тела. Если не учитывать другие силы, например сопротивление воздуха, то это будет единственная сила, приложенная к телу. Тогда по формуле получим $mW = P$. Но при этом движении $W = g$, равно ускорению свободного падения. Поэтому массу тела будем определять так: $m = \frac{P}{g}$.

§3. Третья аксиома. Сила инерции

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к этим телам.

Конечно, нельзя сказать, что эти две силы уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

Проведем небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжелое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе \vec{F} , той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть *силой инерции* этой точки, $\vec{F}^{\text{ин}}$. По третьей аксиоме она равна и противоположна действующей на точку силе \vec{F} , $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$. Но на основании второй аксиомы $\vec{F} = m\vec{W}$. Поэтому $\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W}$.

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению ее массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = mW \quad (12.2)$$

и направлена в сторону, противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$. Поэтому сила инерции

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W} = -m\vec{W}_n - m\vec{W}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть ее можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции (см. рисунок). Причем

$$F_n^{\text{ин}} = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt}.$$

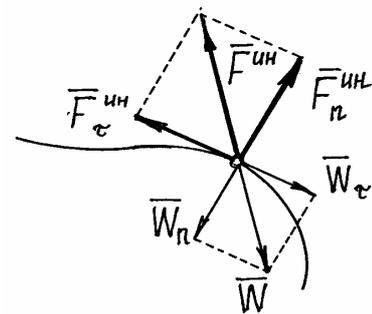


Рис. 12.1

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет ее движение. Это очень важно помнить.

ХIII. Динамика материальной точки

Исследование движения тел начнем с анализа движения материальной точки. При этом приходится решать две задачи. Первая задача – известно, как точка движется, нужно определить силы, вызывающие это движение; вторая, обратная задача – известны силы, действующие на точку, определить, как она будет двигаться.

§1. Метод кинестатики

Методом кинестатики обычно решается первая задача.

Пусть на точку действует несколько сил. Составим для нее основное уравнение динамики: $m\vec{W} = \Sigma\vec{F}_i$. Перенесем все члены в одну сторону уравнения и запишем так: $\Sigma\vec{F}_i - m\vec{W} = 0$ или $\Sigma\vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0$.

Это уравнение напоминает условие равновесия сходящихся сил. Поэтому можно сделать вывод, что, если к движущейся материальной точке приложить ее силу инерции, то точка будет находиться в равновесии. (Вспомним, что на самом деле сила инерции не приложена к материальной точке и точка не находится в равновесии.) Отсюда следует метод решения таких задач, который и называется методом кинестатики.

Если к силам, действующим на точку, добавить ее силу инерции, то задачу можно решать методами статики, составлением уравнений равновесия.

Пример 13.1. При движении автомобиля с постоянным ускорением \vec{W} маятник (материальная точка, подвешенная на нити) отклоняется от вертикали на угол α (рис. 13.1). Определим, с каким ускорением движется автомобиль и натяжение нити.

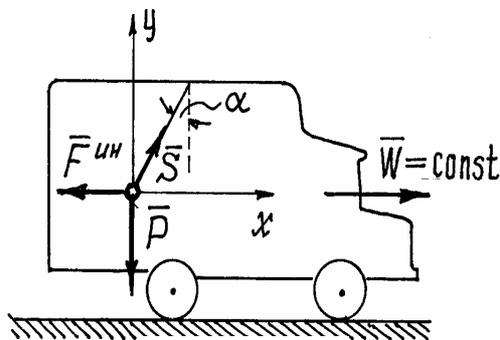


Рис. 13.1

Рассмотрим «динамическое равновесие» точки. Его так называют потому, что на самом деле точка не находится в равновесии, она движется с ускорением.

На точку действуют силы: вес \vec{P} и натяжение нити \vec{S} , реакция нити. Приложим к точке ее силу инерции

$$F^{\text{ин}} = mW = \frac{P}{g}W, \text{ направленную в}$$

сторону, противоположную ускорению точки и автомобиля, и составим уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0; & \quad -F^{\text{ин}} + S \sin \alpha = 0; \\ \sum Y_i = 0; & \quad S \cos \alpha - P = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует $S = \frac{P}{\cos \alpha}$. Из первого $-\frac{P}{g}W + S \sin \alpha = 0$.

Определяем ускорение $W = \frac{g}{P}S \sin \alpha = \frac{g}{P} \frac{P}{\cos \alpha} \sin \alpha = g \cdot \text{tg} \alpha$.

§2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1. Определение движения точки координатным способом

Пусть точка M движется под действием нескольких сил (рис. 13.2). Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$ и спроектируем это векторное равенство на оси x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} mW_x &= \sum X_i, \\ mW_y &= \sum Y_i, \\ mW_z &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\}$$

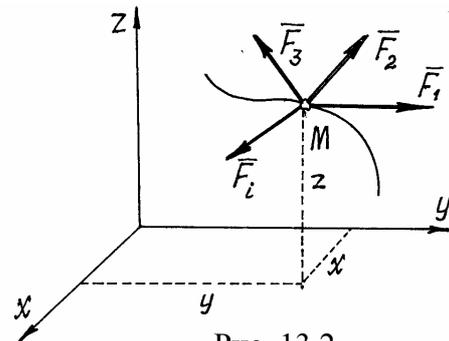


Рис. 13.2

Но проекции ускорения на оси есть вторые производные от координат точки по времени. Поэтому получим

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Эти уравнения и являются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*. Решив их, с учетом начальных условий получим уравнения движения точки:
 $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$

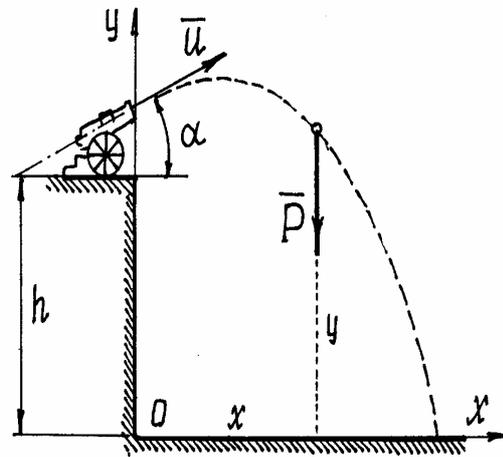


Рис. 13.3

Пример 13.2. Из пушки, установленной на высоте h , произвели выстрел под углом α к горизонту (рис. 13.3). Ядро вылетело из ствола орудия со скоростью u . Определим уравнения движения ядра.

Чтобы правильно составить дифференциальные уравнения движения, надо решать подобные задачи по определенной схеме:

а) назначить систему координат (количество осей, их направление и начало координат). Удачно выбранные оси упрощают решение;

б) показать точку в промежуточном положении. При этом надо проследить за тем, чтобы координаты такого положения обязательно были положительными (см. рис. 13.3);

в) показать силы, действующие на точку в этом промежуточном положении (силы инерции не показывать!).

В примере 13.2 – это только сила \vec{P} , вес ядра. Сопротивление воздуха учитывать не будем;

г) составить дифференциальные уравнения по формулам (13.1):
 $\frac{P}{g}\ddot{x} = 0, \quad \frac{P}{g}\ddot{y} = -P$. Отсюда получим два уравнения: $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = -g$;

д) решить дифференциальные уравнения.

Полученные здесь уравнения – линейные уравнения второго порядка, в правой части – постоянные. Решение этих уравнений элементарно.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + D_1, \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} x = C_1t + C_2, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1t + D_2. \end{array} \right\}$$

Осталось найти постоянные интегрирования. Подставляем начальные условия (при $t = 0$ $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_x = u \cos \alpha$, $\dot{y} = v_y = u \sin \alpha$) в эти четыре уравнения: $u \cos \alpha = C_1$, $u \sin \alpha = D_1$, $0 = C_2$, $h = D_2$.

Подставляем в уравнения значения постоянных и записываем уравнения движения точки в окончательном виде

$$\left. \begin{array}{l} x = ut \cos \alpha, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \sin \alpha + h. \end{array} \right\}$$

Имея эти уравнения, как известно из раздела кинематики, можно определить и траекторию движения ядра, и скорость, и ускорение, и положение ядра в любой момент времени.

Как видно из этого примера, схема решения задач довольно проста. Сложности могут возникнуть только при решении дифференциальных уравнений, которые могут оказаться непростыми.

2. Определение движения точки естественным способом

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченное какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем непросто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 13.4).

На точку M , кроме заданных активных сил \vec{F}_i , действует реакция линии. Показываем составляющие реакции \vec{R} по естественным осям \vec{N} , \vec{T} , \vec{B} .

Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\left. \begin{aligned} mW_n &= \sum F_{in} + N, \\ mW_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ mW_B &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\}$$

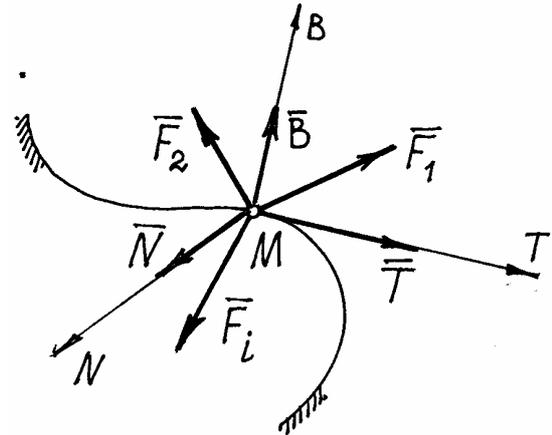


Рис. 13.4

Так как $W_n = \frac{v^2}{\rho}$, $W_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$, $W_b = 0$, то получим дифференциальные уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m \ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Здесь сила \vec{T} равна силе трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то сила $T = 0$ и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s :

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

Решив это уравнение, получим закон движения точки $s = s(t)$, а значит, при необходимости и скорость, и ускорение. Первое и третье уравнения (13.2) позволят найти реакции \vec{N} и \vec{B} .

Пример 13.3. Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиусом r . Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению (рис. 13.5).

Схема решения задачи та же, что и при координатном способе (пример 13.2). Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси N и T движутся вместе с

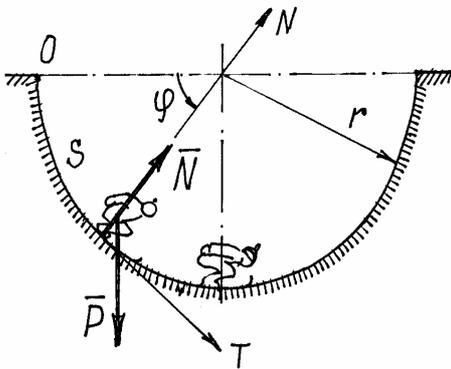


Рис. 13.5

лыжником. Так как траектория – плоская линия, то ось B , направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось B действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения по формуле (13.2) получим такие

$$\frac{P}{g} \ddot{s} = P \cos \varphi; \quad \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi. \quad (13.3)$$

Первое уравнение получилось нелинейным: $\ddot{s} = g \cos \varphi$. Так как $s = r\varphi$, то его можно переписать так:

$\ddot{\varphi} - \frac{g}{r} \cos \varphi = 0$. Такое уравнение можно один раз проинтегрировать. За-

пишем $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$. Тогда в дифференциальном уравнении

переменные разделятся $d\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \cos \varphi \cdot d\varphi$. Интегрирование дает решение

$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \sin \varphi + C_1$. Так как при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{r} \sin \varphi}, \quad \text{а} \quad \dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr \sin \varphi}.$$

К сожалению, в элементарных функциях второй интеграл найти невозможно. Но и полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла φ . Так, в нижнем положении при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$. А из второго

уравнения (13.3) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ можно определить давление $N = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} =$

$$= P + \frac{P}{g} \frac{2gr}{r} = 3P. \quad \text{То есть давление на лыжника в нижнем положении равно его трехкратному весу.}$$

§3. Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было, как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение. Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка M (рис. 13.6) под действием некоторых сил \vec{F}_i совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами x, y, z , относительное – координатами x_1, y_1, z_1 .

Составим основное уравнение динамики для точки: $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$, где абсолютное ускорение $\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c$. Поэтому уравнение будет $m(\vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c) = \sum \vec{F}_i$ или $m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{W}_e - m\vec{W}_c$.

Но $(-m\vec{W}_e) = \vec{F}_e^{\text{ин}}$ – переносная сила инерции, $(-m\vec{W}_c) = \vec{F}_c^{\text{ин}}$ – кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так:

$$m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}}. \quad (13.4)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси x_1, y_1, z_1 , имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \sum X_i + X_e^{\text{ин}} + X_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{y}_1 &= \sum Y_i + Y_e^{\text{ин}} + Y_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{z}_1 &= \sum Z_i + Z_e^{\text{ин}} + Z_c^{\text{ин}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения (13.1), замечаем, что *относительное движение материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.*

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, то есть подвижная система инерциальная, то ускорения $\vec{W}_e = 0$ и

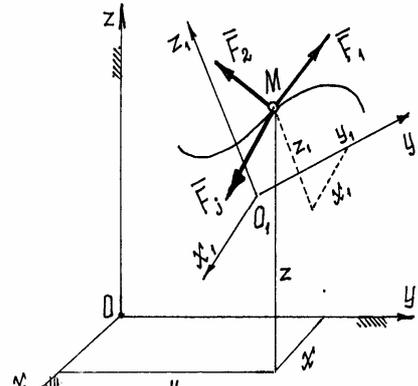


Рис. 13.6

$\vec{W}_c = 0$. Значит, $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0$, $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ и дифференциальные уравнения (13.5) будут точно совпадать с дифференциальными уравнениями абсолютного движения (13.1). Следовательно, движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г. Галилеем и называется его именем – принцип относительности Галилея.

Пример 13.4. Вагон движется с постоянным ускорением \vec{W} . Определим траекторию движения предмета, упавшего с полки высотой h , которую увидит наблюдатель, пассажир, сидящий в вагоне (рис. 13.7).

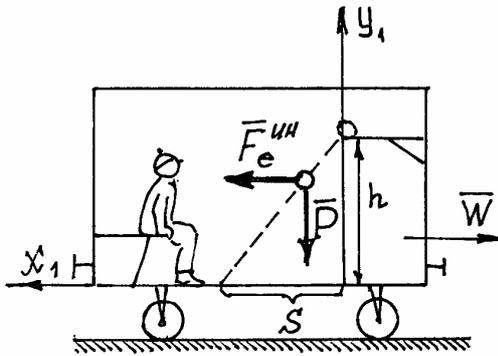


Рис. 13.7

Порядок решения задачи тот же, что и при определении абсолютного движения. Только оси надо провести по вагону и учесть кроме веса предмета \vec{P} переносную силу инерции $F_e^{\text{ин}} = m \cdot W_e = \frac{P}{g} W$ (кориолисова сила инерции $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$, переносное движение поступательное).

Дифференциальные уравнения относительного движения получаются такими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_1 &= F_e^{\text{ин}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_1 &= -P, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= W, \\ \ddot{y}_1 &= -g. \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Wt + C_1, & x_1 &= \frac{1}{2} Wt^2 + C_1 t + C_2, \\ \dot{y}_1 &= -gt + D_1, & y_1 &= -\frac{1}{2} gt^2 + D_1 t + D_2. \end{aligned}$$

Используя начальные условия (при $t = 0$ $x_1 = 0$, $y_1 = h$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, так как $v_r = 0$), найдем постоянные интегрирования: $C_1 = C_2 = D_1 = 0$,

$D_2 = h$. Поэтому уравнения движения $x_1 = \frac{1}{2}Wt^2$, $y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2$. Траекторию движения получим, исключив параметр t : $y_1 = h - \frac{g}{W}x_1$. Это уравнение прямой (см. рис. 13.7). Предмет упадет на пол вагона на расстоянии $s = h \frac{W}{g}$ от края полки (при $y_1 = 0$ координата $x_1 = s$).

Если вагон будет двигаться равномерно ($W = 0$), то $s = 0$. Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

Пример 13.5. Внутри трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг вертикальной оси, находится шарик M , привязанный нитью длиной a к оси вращения (рис. 13.8). Определим движение шарика в трубке после того, как нить оборвется. Сопротивление движению учитывать не будем.

Траектория движения шарика в трубке – прямая. Поэтому для определения этого движения достаточно одной координаты x_1 . Начало координат, точка O , – на оси вращения. В промежуточном положении на шарик действуют силы: вес \vec{P} , две составляющие реакции трубки \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Добавляем переносную силу

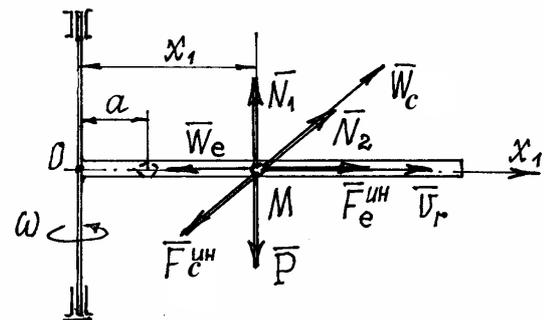


Рис. 13.8

инерции $F_e^{\text{ин}} = \frac{P}{g}W_e = \frac{P}{g}W_e^n = \frac{P}{g}x_1\omega^2$, кориолисову силу инерции

$F_c^{\text{ин}} = \frac{P}{g}W_c = \frac{P}{g} \cdot 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \frac{P}{g} \omega \dot{x}_1$ и составляем дифференциальное

уравнение движения $\frac{P}{g} \ddot{x}_1 = F_e^{\text{ин}}$. Или после подстановки значения переносной силы инерции и преобразований $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$.

Решение такого дифференциального уравнения, как известно, имеет вид: $x_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ и $\dot{x}_1 = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$. Так как при $t = 0$ $x_1 = a$

и $v_r = \dot{x}_1 = 0$, то $C_1 + C_2 = a$, $C_1 - C_2 = 0$. Значит $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$ и уравнение

движения станет таким: $x_1 = \frac{1}{2}a(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cdot \text{ch} \omega t$.

Относительная скорость шарика $v_r = \dot{x}_1 = a\omega \cdot \text{sh} \omega t$. А так как $\text{ch}^2 \omega t - \text{sh}^2 \omega t = 1$, то $v_r = a\omega \sqrt{\text{ch}^2 \omega t - 1} = a\omega \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} = \omega \sqrt{x_1^2 - a^2}$. Можно теперь определить относительную скорость шарика в любом положении. Так, шарик вылетит из трубки длиной l со скоростью $v_r = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$.

XIV. Материальная система

§1. Основные определения и характеристики

Материальной системой будем называть совокупность материальных точек, связанных между собой определенным образом (стержнями, нитями, винтами, пружинами и т.п., в том числе и силами взаимодействия).

Абсолютно твердое тело также является материальной системой, у которой точек бесконечное множество и связаны они между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Центром масс материальной системы называется геометрическая точка C , положение которой определяется радиусом-вектором \vec{r}_c таким, что

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (14.1)$$

где \vec{r}_i – радиусы-векторы отдельных точек с массами m_i ; $M = \sum m_i$ – масса всей системы.

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \quad (14.2)$$

Умножив числитель и знаменатель в (14.1) и (14.2) на g (ускорение свободного падения) убедимся, что вблизи поверхности Земли ($g = \text{const}$) центр масс совпадает с центром тяжести материальной системы, так как $m_i g = P_i$ – вес точек системы, сила тяжести их.

При исследовании движения материальной системы силы, действующие на ее точки, иногда приходится делить на классы: или на внешние и внутренние, или на активные (задаваемые) и реакции связей.

Внешними силами (обозначать будем $\vec{F}^{(e)}$) являются силы, действующие на точки системы со стороны точек, принадлежащих другим системам.

Внутренние силы ($\vec{F}^{(i)}$) – силы взаимодействия между точками системы. Эти силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю, то есть:
$$\vec{R}' = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)} = 0$$

и
$$\vec{M}_O = \sum_{j=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}) = 0.$$

Конечно, при этом внутренние силы не всегда уравниваются: под действием этих сил отдельные точки системы могут перемещаться относительно друг друга.

Реакции связей или просто – *реакции*, это силы, которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы, заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

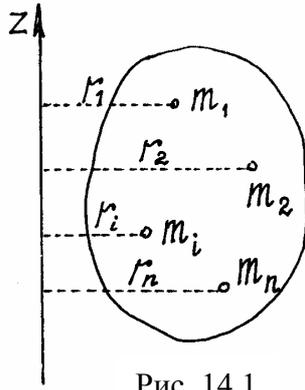
Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

§2. Моменты инерции тел

Инерционные свойства твердого тела характеризуются не только его массой M , определяющей инерционность при поступательном движении, но и моментом инерции, определяющим инерционность вращательного движения тела.

Моментом инерции тела относительно оси называется сумма произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от точки до оси

$$J_z = \sum m_i r_i^2. \quad (14.3)$$



Заметим сразу, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения (рис. 14.1).

Для однородных тел простой симметричной формы момент инерции можно найти в справочниках. А моменты инерции некоторых тел, которые чаще всего встречаются при исследовании движения материальных систем, даны на рис. 14.2.

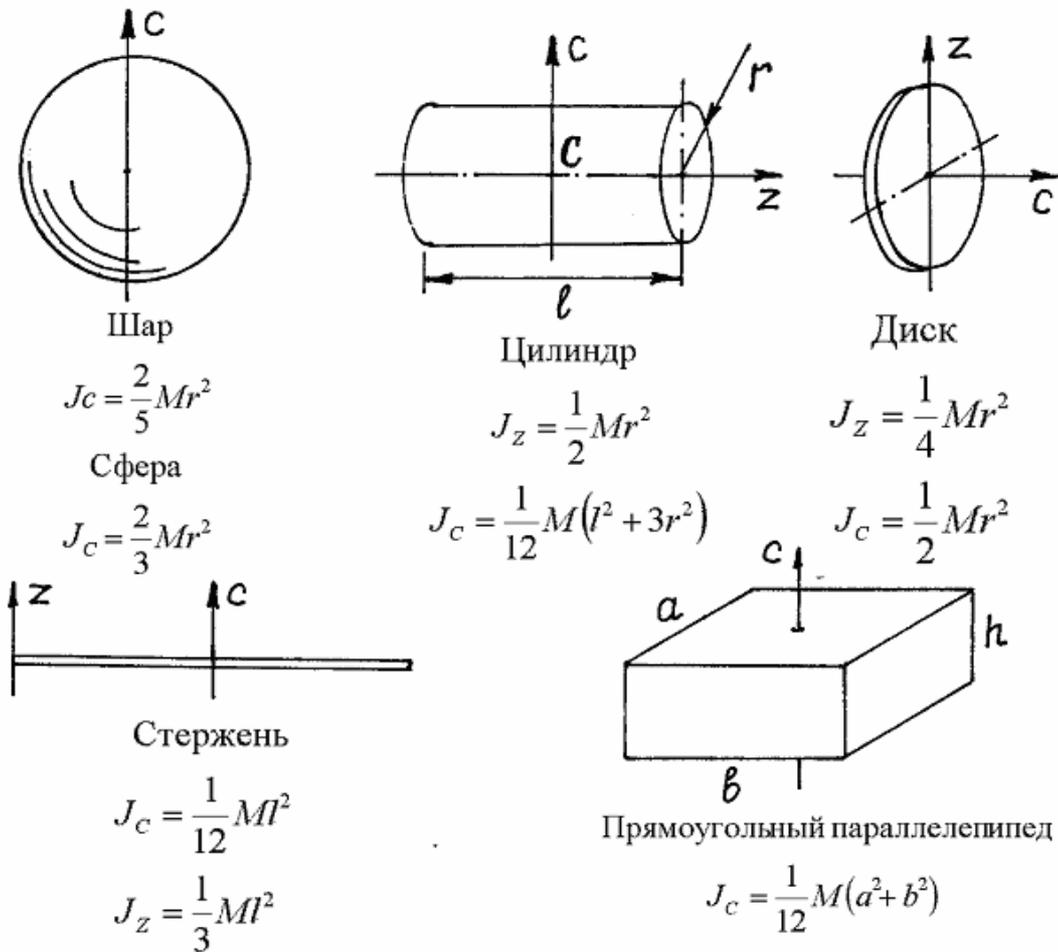


Рис. 14.2

На рисунке даны моменты инерции тел относительно осей симметрии. Но нередко при исследовании движения реальных механизмов приходится определять моменты инерции относительно осей, не совпадающих с осями симметрии. Этому помогают следующие теоремы.

*Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела
относительно параллельных осей*

Найдем зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей z и C (рис. 14.3). Ось C , проходящая через центр масс тела, называется центральной осью. Расстояние между осями – a .

По определению (14.3) $J_z = \sum m_i r_i^2$, причём $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Но из заштрихованного прямоугольного треугольника (см. рис. 14.3) следует, что $\rho_i^2 = x_i^2 + (a - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + a^2 - 2ay_i = r_i^2 + a^2 - 2ay_i$. Значит $r_i^2 = \rho_i^2 - a^2 + 2ay_i$ и момент инерции относительно оси z $J_z = \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i a^2 + \sum m_i 2ay_i = J_c - Ma^2 + 2a \sum m_i y_i$.

Но по формуле (14.2) сумма $\sum m_i y_i = M y_c = Ma$.

Поэтому $J_z = J_c - Ma^2 + 2Ma^2 = J_c + Ma^2$.

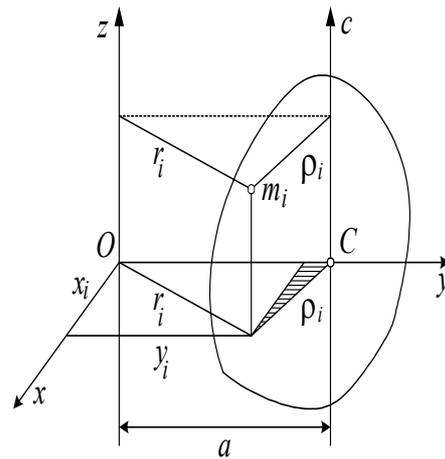


Рис.14.3

Следовательно, момент инерции тела относительно оси z равен сумме момента инерции тела относительно центральной оси C , параллельной оси z , и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J_z = J_c + Ma^2. \quad (14.4)$$

Так, например, момент инерции стержня относительно оси z (см. рис.14.2) $J_z = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$. А момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно оси z , проведенной по какому-нибудь вертикальному ребру $J_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) + M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$.

Момент инерции тела относительно произвольной оси

Найдем момент инерции тела относительно оси u , проходящей через некоторую точку O (рис. 14.4).

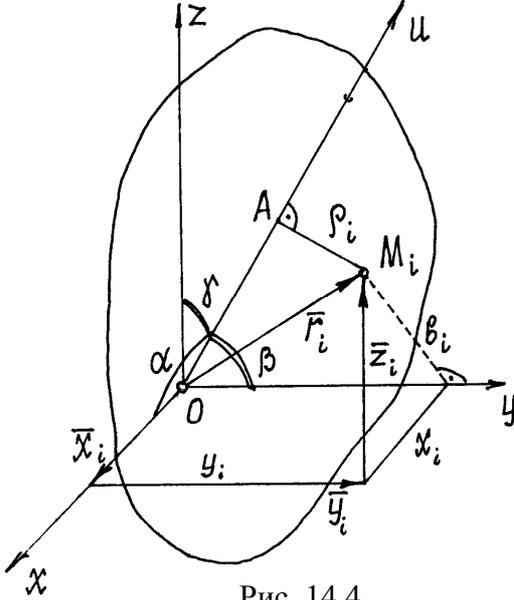


Рис. 14.4

По определению момент инерции

$$J_u = \sum m_i \rho_i^2.$$

Поместим в точку O начало координатных осей x, y, z . Из прямоугольного треугольника OAM_i следует $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$, где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. И так как радиус-вектор точки M_i равен $\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$, то, проектируя это равенство на ось u , получим $OA = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma$ (α, β, γ — углы между осью u и осями x, y, z).

Как известно из тригонометрии

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad \text{Поэтому}$$

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= r_i^2 - OA^2 = r_i^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= x_i^2 \cos^2 \alpha + x_i^2 \cos^2 \beta + x_i^2 \cos^2 \gamma + y_i^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \beta + y_i^2 \cos^2 \gamma + z_i^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ z_i^2 \cos^2 \beta + z_i^2 \cos^2 \gamma - x_i^2 \cos^2 \alpha - y_i^2 \cos^2 \beta - z_i^2 \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - \\ &- 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

И, группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов, $\rho_i^2 = (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma$.

Но $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2$; $x_i^2 + z_i^2 = b_i^2$; $x_i^2 + y_i^2 = c_i^2$, где a_i, b_i, c_i — расстояния от точки M_i до осей x, y, z соответственно. Поэтому

$$J_u = \sum m_i \rho_i^2 = \left(\sum m_i a_i^2 \right) \cos^2 \alpha + \left(\sum m_i b_i^2 \right) \cos^2 \beta + \left(\sum m_i c_i^2 \right) \cos^2 \gamma - 2 \left(\sum m_i x_i y_i \right) \cos \alpha \cos \beta - 2 \left(\sum m_i y_i z_i \right) \cos \beta \cos \gamma - 2 \left(\sum m_i x_i z_i \right) \cos \alpha \cos \gamma$$

$$\text{или } J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma, \quad (14.5)$$

где J_x, J_y, J_z — моменты инерции тела относительно осей координат;

J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} – центробежные моменты инерции относительно осей, отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции*. Например, если $J_{yz} = 0$ и $J_{xz} = 0$, то ось z – главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка O , от выбора начала координат, то обязательно надо указать, для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс C , то все главные оси инерции называются *главными центральными осями инерции*.

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (14.5) упрощается

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (14.6)$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось z по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно отыскать точку с координатами $(-x_i, -y_i, z_i)$ и поэтому центробежные моменты инерции $J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ и $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$. Значит ось z – главная ось инерции и центральная ось, так как центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причем, эта ось будет главной для любой точки, расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная ей, будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось z перпендикулярно плоскости симметрии из любой ее точки O , назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно найти симметричную ей точку с координатами $(x_i, y_i, -z_i)$. Поэтому центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} будут равны нулю. Значит ось z – главная ось инерции.

Пример. Определим момент инерции диска относительно оси u , расположенной под углом γ к оси симметрии диска z , в плоскости yCz (рис. 14.5).

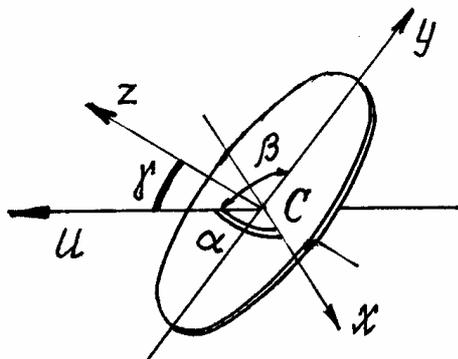


Рис. 14.5

Оси x , y и z – главные центральные оси инерции, так как они являются осями симметрии.

Тогда $J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$, где γ – угол между осями u и z ; угол β – угол между осями u и y , равный $(90^\circ + \gamma)$; угол α – угол между осями u и x , равный 90° . Поэтому

$$J_u = J_x \cos^2 90^\circ + J_y \cos^2 (90^\circ + \gamma) + J_z \cos^2 \gamma = J_y \sin^2 \gamma + J_z \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} Mr^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} Mr^2 \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} Mr^2 (\sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma).$$

XV. Энергия материальной системы

§1. Работа силы

Если точка приложения силы движется по прямолинейной траектории, то работой постоянной по величине и направлению силы \vec{F} на перемещении точки, равном s (рис. 15.1), называется выражение

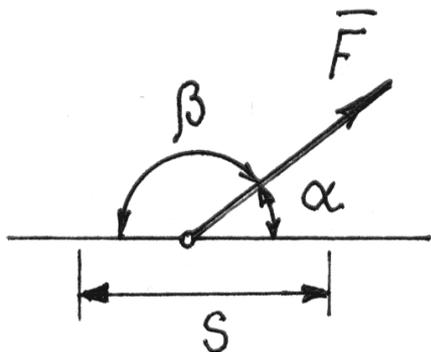


Рис. 15.1

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (15.1)$$

Поскольку от выбора угла α или β зависит знак работы, то договоримся брать всегда *острый* угол α между вектором силы и траекторией. И будем считать работу положительной, если направление силы совпадает с направлением перемещения точки приложения силы из начального положения в конечное.

Из (15.1) следует, что если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

Если вектор силы изменяется и точка приложения ее движется по кривой линии, то формула (15.1) неприменима. В этом случае надо сначала вычислить *элементарную работу* силы на перемещении ds (рис. 15.2)

$$dA = Fds \cdot \cos \alpha, \quad (15.2)$$

где α – угол между касательной осью T и вектором силы \vec{F} . А затем, предполагая силу F и угол α функциями s , найти криволинейный интеграл на перемещении по дуге из положения M_1 в положение M_2 :

$$A = \int_{(s)} Fds \cos \alpha.$$

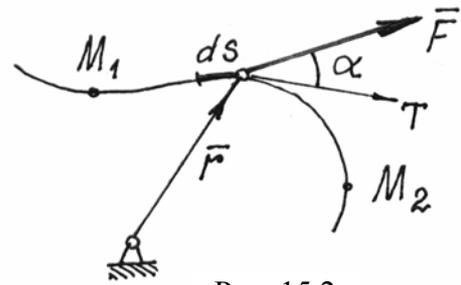


Рис. 15.2

Выражение элементарной работы dA можно преобразовать, полагая $ds = vdt$ и $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$dA = F \cdot vdt \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (15.3)$$

Определим далее радиус-вектор точки M с помощью ее координат: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ и $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, а вектор силы – с помощью проекций на оси: $\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$. Тогда скалярное произведение двух векторов $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, то есть элементарная работа силы

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (15.4)$$

Конечно, чтобы проинтегрировать это выражение, надо проекции силы определять как функции координат точки приложения силы.

Пример 15.1. Работа веса тела (силы тяжести).

Пусть тело перемещается вблизи поверхности Земли из одного положения в другое так, что центр тяжести его движется по кривой линии (рис.15.3). Элементарная работа силы \vec{P} , постоянной и направленной вертикально вниз, по выражению (15.4), $dA = -Pdz$. Поэтому

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} Pdz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$$

или

$$A = Ph. \quad (15.5)$$

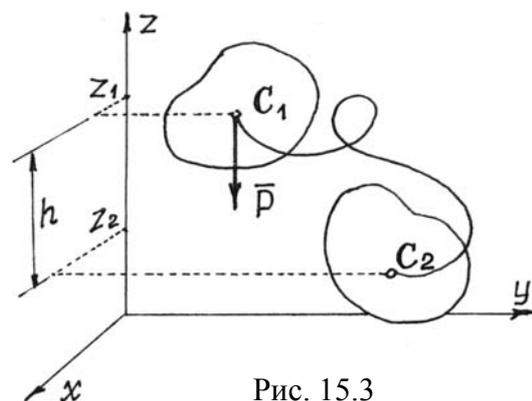


Рис. 15.3

Следовательно, работа веса тела (постоянной силы тяжести) не зависит от траектории движения центра тяжести. Определяется лишь высотой, на которую опустится или поднимется центр тяжести.

Пример 5.12. Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

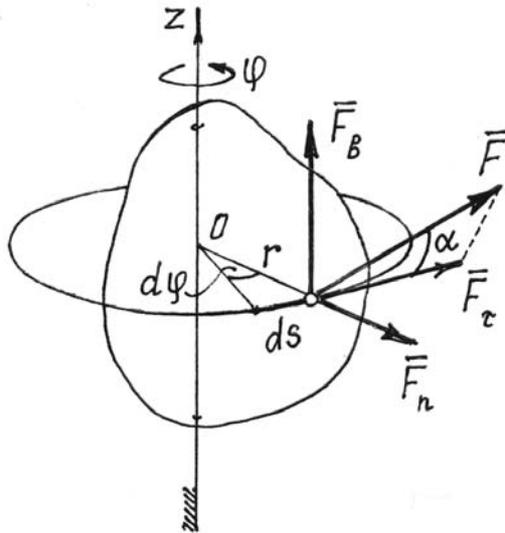


Рис. 15.4

В этом случае (рис.15.4) точка приложения силы \vec{F} движется по дуге окружности радиусом r . Элементарная работа вычисляется по формуле (15.2) $dA = F ds \cdot \cos \alpha$, где $ds = r d\varphi$. Поэтому $dA = Fr d\varphi \cdot \cos \alpha$.

Но $Fr \cdot \cos \alpha = F_{\tau} r = M_z(\vec{F})$. Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (см. рис. 15.4). (Моменты сил \vec{F}_b и \vec{F}_n относительно оси z равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(\vec{F}) \cdot d\varphi. \quad (15.6)$$

В частности, если момент силы относительно оси $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, работа силы при повороте тела на угол φ равна

$$A = \pm M_z(\vec{F}) \cdot \varphi. \quad (15.7)$$

Знак работы определяется знаками момента силы и угла поворота. Если они одинаковы, работа положительная.

Из формулы (15.7) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом m расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол φ

$$A = \pm m\varphi. \quad (15.8)$$

Если же пара сил действует в плоскости, не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Первую расположить в плоскости, перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента \vec{m} по соответствующим направлениям $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$. Конечно, работу будет совершать только первая пара с моментом $m_1 = m \cdot \cos \gamma$, где γ – угол между вектором \vec{m} и осью вращения z ,

$$A = \pm m\varphi \cdot \cos \gamma. \quad (15.9)$$

Пример 15.3. Работа силы упругости.

Такая сила (рис. 15.5) возникает при деформации упругого тела. Если сила подчиняется закону Гука, то ее величина будет пропорциональна деформации. Так, при удлинении, например, пружины на величину x сила равна $F = cx$. (Постоянная, коэффициент c , называется жесткостью пружины). Сила эта переменная. Поэтому по (15.4) $dA = -F \cdot dx = -cx \cdot dx$. И, если начало координат O находится на конце недеформированной пружины, то полная работа при перемещении конца пружины от положения x_1 до x_2 ($x_2 > x_1$)

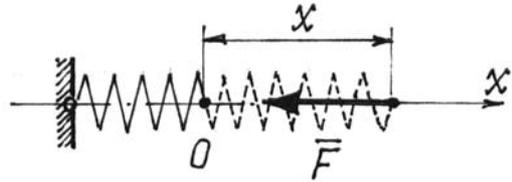


Рис. 15.5

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = -\frac{1}{2}c(x_2^2 - x_1^2). \quad (15.10)$$

Конечно, при увеличении деформации (сжатия или растяжения) работа силы – отрицательная; при уменьшении – положительная.

Этот результат верен для любого упругого тела. И деформацией может быть не только линейное перемещение, но и угол поворота, и объем тела и др. Соответственно изменится и размерность коэффициента жесткости.

§2. Потенциальная энергия

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется *силовым полем*.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции $u = u(x, y, z)$. Если эта функция не зависит от времени, то такое поле называется *стационарным*. Если во всех точках она одинакова, то поле – *однородное*.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (15.11)$$

то такое поле называется *потенциальным*.

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 (рис. 15.6).

Элементарная работа по выражению (15.4)

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du.$$

Это есть полный дифференциал силовой функции.

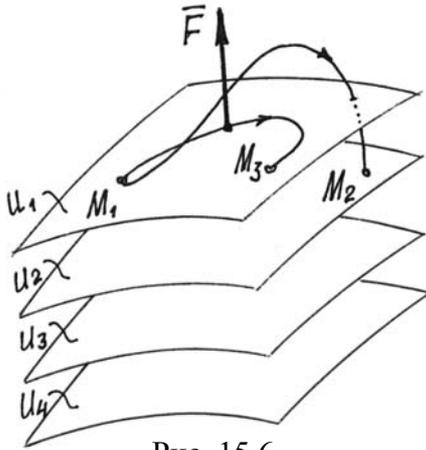


Рис. 15.6

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \quad (15.12)$$

где u_2 и u_1 – значения силовой функции в точках M_2 и M_1 .

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы \vec{F} будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку M_3 , если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это «слоёное пространство», состоящее из таких поверхностей (см. рис.15.6). Эти поверхности называются *поверхностями уровня*, или *экипотенциальными поверхностями*. Уравнения их: $u(x, y, z) = C$ (C – постоянная, равная значению u в точках этой поверхности). А силовую функцию называют соответственно *потенциалом* поля.

Конечно, экипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом. Поскольку при перемещении точки по экипотенциальной поверхности работа силы \vec{F} равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее $u = u_0$).

Работа, которую совершит сила \vec{F} при переходе материальной точки из определенного места M на нулевую поверхность, называют *потенциальной энергией* Π точки в этом определенном месте M .

Следовательно, $\Pi = A = u_0 - u.$ (15.13)

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности. По формуле (15.13) силовая функция $u = u_0 - \Pi$. Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (15.11), так как $u_0 = \text{const}$

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (15.14)$$

и вектор силы $\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) = -\text{grad } \Pi$.

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

1. Поле силы тяжести

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во всех точках одинакова $\vec{F} = \vec{P}$, равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 15.7), а уравнения их: $u = z = C$.

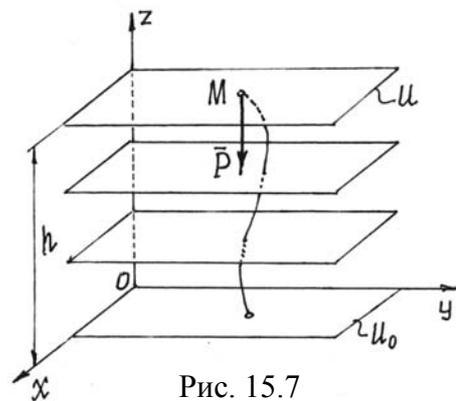


Рис. 15.7

Если нулевой поверхностью назначить плоскость xOy , то потенциальная энергия точки в положении M будет равна работе силы тяжести (15.5):

$$\Pi = A = Ph.$$

2. Поле упругой силы

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила (см. пример 15.3). То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку M_0 , где находится конец недеформированной пружины (рис. 15.8).

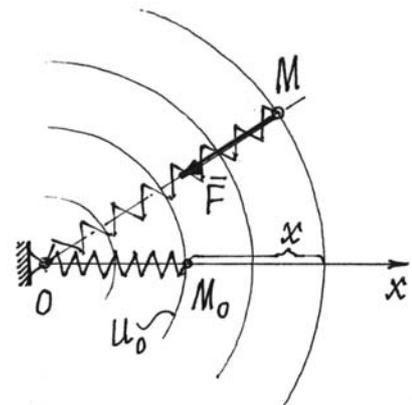


Рис. 15.8

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы \vec{F} будет равна нулю. Значит, эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке O .

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку M_0 через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении её конца M $\Pi = A = \frac{1}{2}cx^2$ по формуле (15.10).

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной ($\Pi > 0$) и в растянутом, и в сжатом состояниях.

§3. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – это половина произведения ее массы на квадрат скорости $\frac{1}{2}mv^2$. Кинетическая энергия материальной системы – сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (15.15)$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина, так как $(\vec{v}_i)^2 = v_i^2$. Для твердого тела формула (15.15) принимает более конкретный вид.

1. Кинетическая энергия тела при поступательном движении

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости $\vec{v}_i = \vec{v}$, то его кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v^2}{2} = \frac{1}{2}v^2 \sum m_i = \frac{1}{2}v^2 M \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2}Mv^2, \quad (15.16)$$

где M – масса тела, v – скорость любой его точки.

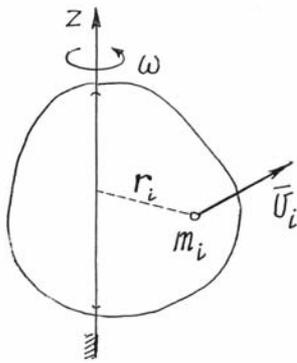


Рис. 15.9

2. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорости его точек $v_i = r_i \omega$ (рис.15.9). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (15.17)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z .

3. Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении

С помощью мгновенного центра скоростей C_v скорость точки тела определяется как произведение расстояния a_i от точки до C_v на угловую скорость: $v_i = a_i\omega$ (рис.15.10).

Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i a_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i a_i^2 = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2,$$

где J_{C_v} – момент инерции тела относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Так как положение C_v на теле меняется, то полученный результат не очень удобен. С помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера (14.4) можно получить более удобное выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_c + Ma^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M (a\omega)^2$$

или, так как $a\omega = v_C$ (см. рис.15.10),

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (15.18)$$

где v_C – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно центральной оси, оси C , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

4. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

При таком движении скорости точек тела определяются как при вращении вокруг мгновенной оси P : $v_i = h_i\omega$ (рис. 15.11).

Поэтому кинетическая энергия тела

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i h_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2$$

или
$$T = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \quad (15.19)$$

где J_P – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения P . Конечно, полученный результат не очень удобен, так как ось P все время меняет свое положение в теле.

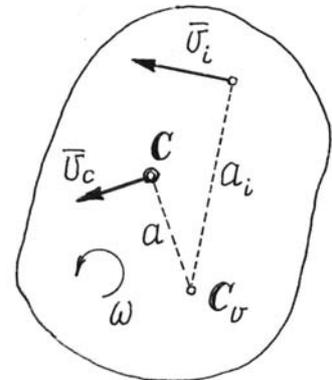


Рис. 15.10

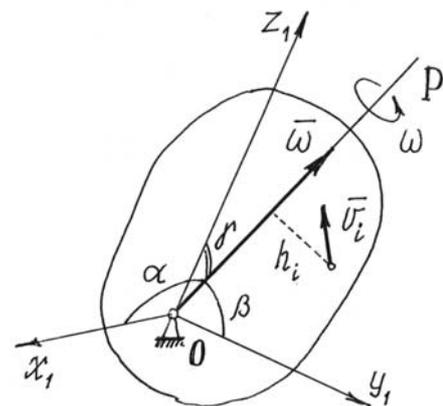


Рис. 15.11

Если у тела в точке O можно отыскать главные оси инерции, то по формуле (14.6) получим $J_P = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$. Тогда кинетическая энергия по (15.19) получится такой:

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\omega \cos \alpha)^2 + J_y (\omega \cos \beta)^2 + J_z (\omega \cos \gamma)^2]$$

или окончательно,
$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (15.20)$$

где J_x, J_y, J_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

Для самого общего случая движения материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кенига*.

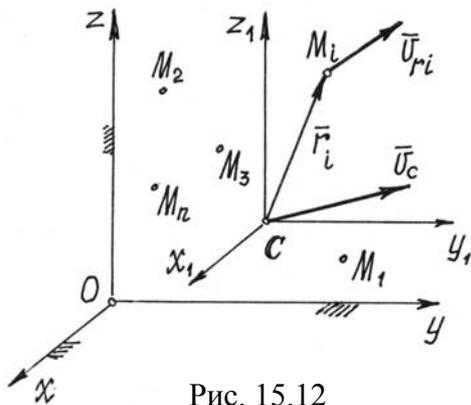


Рис. 15.12

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис. 15.12). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1 . Тогда скорость точек $\vec{v}_i = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек одинаковы, равны \vec{v}_C . Значит, $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}$ и кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{ri})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + v_{ri}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_C^2 + \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ri}^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum m_i \vec{v}_{ri} + T_r. \end{aligned}$$

По определению центра масс (14.1) его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю $\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{v}_{ri} = 0$.

Поэтому окончательно кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r. \quad (15.21)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

Так, при плоскопараллельном движении по доказанной теореме Кенига формула (15.18) получается сразу, так как относительное движение есть вращение вокруг центральной оси C .

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс C и относительного – вращения вокруг точки C), по теореме Кенига (15.21) получим

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2),$$

где J_x, J_y, J_z – главные центральные оси инерции тела.

§4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Так как ускорение i -ых точек материальной системы $\vec{W}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$, то основные уравнения динамики для этих точек будут $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$, где \vec{F}_i – равнодействующая сил, приложенных к i -й точке. Умножим скалярно левую и правую части этого равенства на \vec{v}_i : $\vec{v}_i \cdot m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ и введем слева вектор \vec{v}_i под знак дифференциала, а справа учтем, что $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$. Получим $m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = \vec{F}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$. Или окончательно $d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = dA_i$.

Сложив такие равенства, составленные для всех точек системы, получим: $d \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum dA_i$ или $dT = \sum dA_i$. Проинтегрируем затем на переходе системы из одного положения в другое: $\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum \int_{S_i} dA_i$. Получим $T_2 - T_1 = \sum A_i$. Запишем результат в виде

$$T_2 - T_1 = A. \tag{15.22}$$

Это значит, *изменение кинетической энергии движущейся материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно сумме работ сил, приложенных к системе, на этом переходе.*

Замечания к теореме.

1. Нетрудно убедиться, что реакции связей без трения работу не совершают. Поэтому при использовании теоремы в этом случае учитываются только активные, задаваемые силы (см. XIV, §1).

2. Внутренние силы, вообще говоря, учитывать надо, несмотря на то, что сумма их равна нулю. Простой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, неупругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

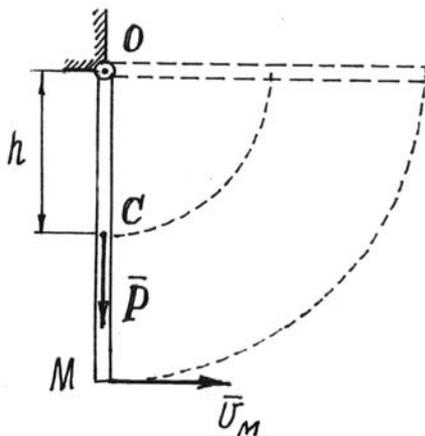


Рис. 15.13

Пример 15.4. Какую скорость надо сообщить точке M стержня, прикрепленного верхним концом с помощью шарнира O к неподвижной поверхности (рис.15.13), чтобы стержень совершил четверть оборота?

В первом вертикальном положении кинетическая энергия стержня, начавшего вращаться вокруг оси O :

$$T_1 = \frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \frac{v_M^2}{l^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2.$$

Во втором положении, где стержень достигнет горизонтального положения и остановится на мгновение, $T_2 = 0$.

Работу совершит только вес стержня P $A = -Ph = -P \frac{l}{2}$. По теореме

получим уравнение $-\frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2 = -P \frac{l}{2}$, из которого следует $v_M = \sqrt{3gl}$.

§5. Закон сохранения энергии

Рассмотрим движение материальной системы в потенциальном поле под действием только сил этого поля. В каком-либо одном положении потенциальная энергия для всех точек системы по (15.13), $\Pi_1 = u_0 - u_1$. В другом каком-то положении $\Pi_2 = u_0 - u_2$. Разность потенциальных энергий $\Pi_1 - \Pi_2 = u_2 - u_1$, что равно работе A , совершенной силами поля на переходе системы из первого положения во второе. Но эта работа по теореме об изменении кинетической энергии $A = T_2 - T_1$. Значит, $\Pi_1 - \Pi_2 = T_2 - T_1$ или $\Pi_1 + T_1 = \Pi_2 + T_2$.

А так как положения системы выбраны произвольно, можно утверждать, что *при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной*

$$\Pi + T = \text{const.} \quad (15.23)$$

Это и есть закон сохранения механической энергии.

Такую материальную систему, при движении которой действует этот закон, называют *консервативной системой* (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется).

XVI. Принцип Даламбера

§1. Принцип Даламбера

Метод кинетостатики, сформулированный ранее (XIII, §1), позволяет рассматривать движущуюся материальную точку как бы находящуюся в состоянии равновесия, если приложить к ней ее силу инерции. Применив этот метод ко всем точкам материальной системы, можно сказать, что если к точкам системы приложить их силы инерции, то система будет находиться в равновесии, а главный вектор всех сил (внешних, внутренних и сил инерции точек) и главный момент их будут равны нулю:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)} + \sum \vec{F}_j^{\text{ин}} = 0,$$

$$\vec{M}_o = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{(i)}) + \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{\text{ин}}) = 0.$$

Сразу заметим, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю (XIV, §1). Поэтому внутренние силы исключаются при исследовании движения материальной системы этим методом.

Из сказанного выше следует метод решения задач динамики, который называют принципом Даламбера. Он заключается в том, что *задачу динамики, исследования движения материальной системы, можно решать методами статики, составлением известных уравнений равновесия, учитывая силы инерции точек системы.*

Но этот удобный метод усложняется определением сил инерции твердых тел. Поэтому следует научиться складывать силы инерции точек тела, находить их главный вектор $\vec{R}'_{ин}$ и главный момент $\vec{M}_O^{ин}$ или равнодействующую $\vec{R}_{ин}$.

§2. Силы инерции твердого тела

Главный вектор сил инерции точек тела $\vec{R}'_{ин} = \sum \vec{F}_i^{ин} = -\sum m_i \vec{W}_i$. Но из определения радиуса-вектора центра масс $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ следует $M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$. Взяв вторую производную по времени, получим $M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ или $\sum m_i \vec{W}_i = M\vec{W}_C$. Поэтому *главный вектор сил инерции точек тела при любом его движении*

$$\vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_C.$$

То есть модуль главного вектора равен произведению массы тела на ускорение его центра масс $R'_{ин} = MW_C$ и направлен вектор $\vec{R}'_{ин}$ в сторону, противоположную вектору ускорения центра масс.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, то есть он не зависит от выбора этой точки.

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Твердое тело движется поступательно.*

При таком движении главный момент сил инерции можно не определять, а находить сразу равнодействующую этих сил. Как известно, она равна главному вектору $\vec{R}_{ин} = \vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_C$, но имеет *определенную* точку приложения.

Поскольку при поступательном движении все точки тела имеют равные и параллельные векторы ускорений $\vec{W}_i = \vec{W}_C$, то силы инерции их также будут параллельными и направленными в одну сторону. Но равнодействующая таких параллельных сил приложена к точке, радиус-вектор которой $\vec{r} = \frac{\sum F_i^{ин} \vec{r}_i}{\sum F_i^{ин}} = \frac{\sum m_i W_i \vec{r}_i}{\sum m_i W_i} = \frac{\sum m_i W_C \vec{r}_i}{\sum m_i W_C} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$, равен радиус-вектору центра масс.

Следовательно, равнодействующая сил инерции точек тела при поступательном движении приложена к центру масс тела как к центру параллельных сил.

2. *Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси*

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 16.1).

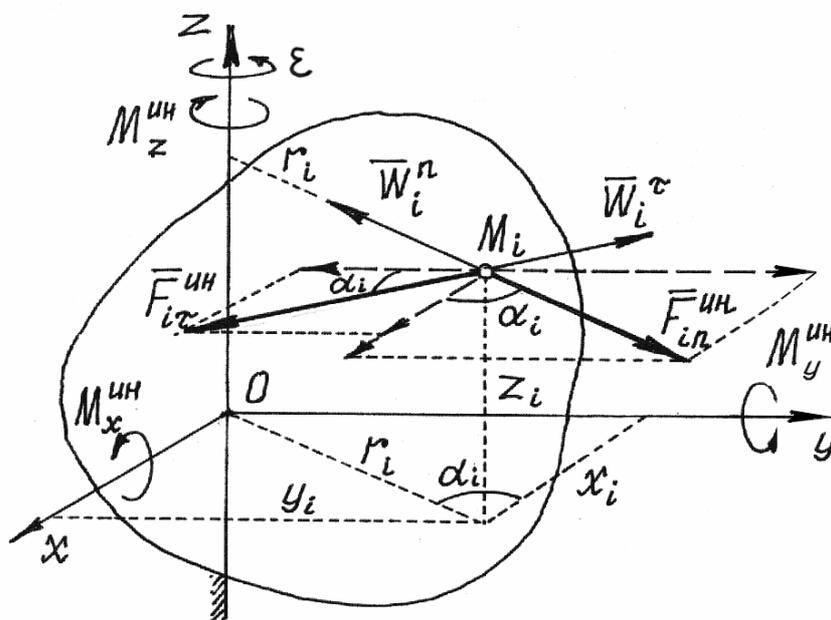


Рис.16.1

Проведем в теле, в какой-нибудь точке O на оси z , еще две оси x и y , перпендикулярные друг другу, и оси z , которые вращаются вместе с телом.

Определим касательное и нормальное ускорения некоторой точки M_i :
 $W_i^\tau = r_i \varepsilon$, $W_i^n = r_i \omega^2$ и соответствующие им силы инерции
 $F_{i\tau}^{\text{ин}} = m_i W_i^\tau$, $F_{in}^{\text{ин}} = m_i W_i^n$, направленные противоположно ускорениям.
 Тогда главный момент сил инерции всех точек тела относительно оси z

$$\begin{aligned} M_z^{\text{ин}} &= \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_z(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) = -\sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \cdot r_i = \\ &= -\sum m_i W_i^\tau r_i = -\sum m_i r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_z. \end{aligned}$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_z^{\text{ин}} = J_z \varepsilon.$$

Направляется он в сторону, противоположную угловому ускорению.

Главный момент сил инерции точек тела относительно оси x , раскладывая силы инерции на две составляющие, параллельные и перпендикулярные оси x (см. рис.16.1), получается таким:

$$\begin{aligned} M_x^{\text{ин}} &= \sum M_x(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_x(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \\ &= \sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{\text{ин}} \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i W_i^\tau \cos \alpha_i \cdot z_i - \\ &- \sum m_i W_i^n \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i. \end{aligned}$$

А так как $r_i \cos \alpha_i = x_i$ и $r_i \sin \alpha_i = y_i$, то $M_x^{\text{ин}} = \varepsilon \sum m_i x_i z_i - \omega^2 \sum m_i y_i z_i =$
 $= \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}.$

Итак, главный момент сил инерции относительно оси x

$$M_x^{\text{ин}} = J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2,$$

где J_{xz} , J_{yz} – центробежные моменты инерции тела относительно соответствующих осей в точке O (см. XIV, §2).

В частности, если тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси вращения z , то эта ось z будет главной осью инерции $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и тогда $M_x^{\text{ин}} = 0.$

Осталось вычислить главный момент сил инерции относительно оси y

$$\begin{aligned} M_y^{\text{ин}} &= \sum M_y(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_y(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{\text{ин}} \cos \alpha_i \cdot z_i = \\ &= \sum m_i W_i^\tau \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i W_i^n \cos \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i - \\ &- \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i = \varepsilon \sum m_i y_i z_i - \omega^2 \sum m_i x_i z_i = \varepsilon J_{yz} - \omega^2 J_{xz}. \end{aligned}$$

Следовательно, главный момент сил инерции точек тела относительно оси y

$$M_y^{\text{ин}} = J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2.$$

Опять, если тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, этот момент $M_y^{\text{ин}} = 0$.

Примечания

а) Определив главные моменты сил инерции точек тела относительно взаимно перпендикулярных осей x, y, z , можно найти главный момент относительно точки O , начала координат,

$$M_o^{\text{ин}} = \sqrt{(M_x^{\text{ин}})^2 + (M_y^{\text{ин}})^2 + (M_z^{\text{ин}})^2},$$

так как главные моменты относительно осей $M_x^{\text{ин}}, M_y^{\text{ин}}, M_z^{\text{ин}}$ являются проекциями вектора $\vec{M}_o^{\text{ин}}$ на оси.

б) Если у тела имеется плоскость материальной симметрии, перпендикулярная оси вращения z , то нетрудно отыскать равнодействующую сил инерции точек тела $\vec{R}_{\text{ин}}$.

Она будет расположена в этой плоскости и равна главному вектору $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_C$.

Центр масс также находится в этой плоскости.

На рис.16.2 дано сечение тела плоскостью симметрии (точка O – точка пересечения оси вращения z и этой плоскости) и показаны центр масс C , ускорение центра масс \vec{W}_C и направление вектора равнодействующей $\vec{R}_{\text{ин}}$.

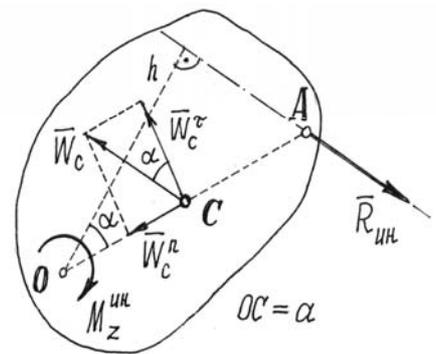


Рис.16.2

Легко находится расстояние h от оси z , от точки O , до линии действия равнодействующей $h = \frac{M_z^{\text{ин}}}{R'_{\text{ин}}} = \frac{J_z \varepsilon}{M W_C}$.

Но лучше найти расстояние OA от оси до линии действия равнодействующей, проведенное через центр масс C :

$$OA = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{J_z \varepsilon}{MW_C \cos \alpha} = \frac{J_z \varepsilon}{MW_C^\tau} = \frac{J_z \varepsilon}{Ma \varepsilon} = \frac{J_z}{Ma}. \quad (16.1)$$

Это расстояние удобнее тем, что оно не зависит от закона вращения тела, определяется только его геометрией. Следовательно, в этом случае у тела имеется такая точка A , к которой всегда приложена равнодействующая сил инерции точек тела (направление линии действия вектора $\vec{R}'_{ин}$, конечно, может быть различным, зависящим от закона вращения, но параллельным вектору ускорения \vec{W}_C).

3. Тело совершает плоскопараллельное движение

При плоскопараллельном движении ускорение точки тела есть сумма трех ускорений: ускорения полюса, нормального ускорения и касательного ускорения точки при вращении вокруг полюса. Если полюс – центр масс C , то ускорение i -й точки $\vec{W}_i = \vec{W}_C + \vec{W}_{ic}^n + \vec{W}_{ic}^\tau$. Соответственно у точки будут три составляющие силы инерции: $\vec{F}_{ie}^{ин}$, $\vec{F}_{in}^{ин}$, $\vec{F}_{it}^{ин}$ (рис. 16.3).

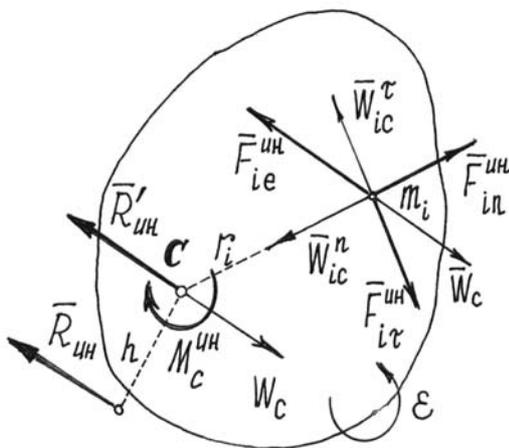


Рис. 16.3

Тогда главный момент сил инерции точек тела относительно оси C , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $M_c^{ин} = \sum M_c(\vec{F}_{ie}^{ин}) + \sum M_c(\vec{F}_{in}^{ин}) + \sum M_c(\vec{F}_{it}^{ин})$. Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей сил $\vec{F}_{ie}^{ин}$, которая приложена к центру масс, потому что переносное движение тела при плоскопараллельном движении – поступательное.

Вторая сумма также равна нулю, так как линии действия этих сил $\vec{F}_{in}^{ин}$ пересекают ось C . Поэтому

$$\begin{aligned} M_c^{ин} &= \sum M_c(\vec{F}_{it}^{ин}) = -\sum F_{it}^{ин} \cdot r_i = -\sum m_i W_{ic}^\tau \cdot r_i = \\ &= -\sum m_i \cdot r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_c. \end{aligned}$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси C , перпендикулярной плос-

кости движения, равен произведению момента инерции относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon.$$

Направляется этот момент в сторону, противоположную направлению углового ускорения ε .

При желании можно найти равнодействующую сил инерции. Она будет равна главному вектору $\vec{R}'_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_c$, параллельна ему, а линия действия ее будет находиться на расстоянии $h = \frac{M_c^{\text{ин}}}{R'_{\text{ин}}}$ от центра масс,

отложенном перпендикулярно $\vec{R}'_{\text{ин}}$ в сторону, определяемую направлением момента $M_c^{\text{ин}}$ (см. рис.16.3).

Принцип Даламбера удобно использовать при решении задач, в которых требуется определить неизвестные силы и иногда ускорение.

Пример 16.1. Шар весом P скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Определим реакции плоскости и ускорение центра масс C .

Показываем внешние силы, действующие на шар: вес \vec{P} , реакции \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (трение качения учитывать не будем). Добавляем силы инерции: главный вектор $\vec{R}'_{\text{ин}}$, приложенный к центру масс, и главный момент сил инерции относительно центральной оси (рис.16.4). Величина их

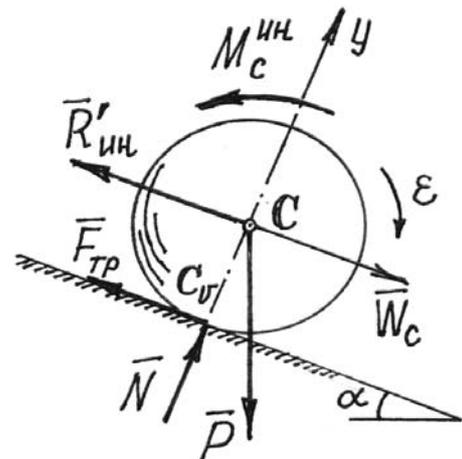


Рис. 16.4

$$R'_{\text{ин}} = MW_c = \frac{P}{g} W_c;$$

$$M_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r W_c.$$

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_{ic_v} = 0; \quad R'_{\text{ин}} \cdot r - Pr \cdot \sin \alpha + M_c^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum M_{ic} = 0; \quad -F_{\text{тр}} \cdot r + M_c^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N - P \cos \alpha = 0.$$

Из первого уравнения находим ускорение центра масс. Так как $\frac{P}{g}W_C r - P \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{2}{5} \frac{P}{g} W_C r = 0$, то $W_C = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha$. Из второго уравнения – силу трения $F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} P \cdot \sin \alpha$; из третьего – нормальную реакцию $N = P \cos \alpha$.

Так как при движении без скольжения сила трения $F_{\text{тр}} \leq fN$, то шар будет скатываться без скольжения, если выполняется условие $\frac{2}{7} P \sin \alpha \leq fP$ или $f \geq \frac{2}{7} \text{tg} \alpha$.

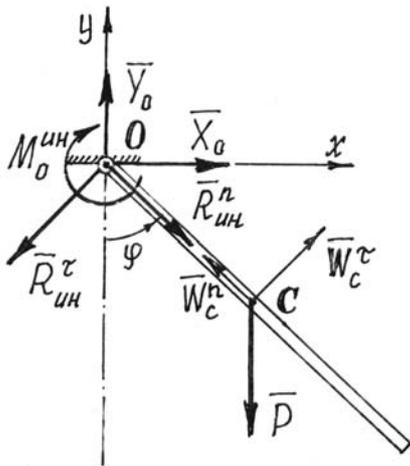


Рис. 16.5

Пример 16.2. Однородный стержень весом P и длиной l качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг оси O (рис.16.5). Определим движение стержня и реакции оси.

На стержень действуют сила \bar{P} и реакции оси \bar{X}_O и \bar{Y}_O . Добавляем силы инерции. Приводим их к точке O на оси вращения. Главный вектор сил инерции, состоит из двух векторов, равным по величине:

$$R_{\text{ин}}^n = MW_C^n = \frac{P l}{g 2} \omega^2 = \frac{P l}{g 2} \dot{\varphi}^2; \quad R_{\text{ин}}^\tau = MW_C^\tau = \frac{P l}{g 2} \varepsilon = \frac{P l}{g 2} \ddot{\varphi}.$$

Главный момент сил инерции относительно оси вращения O

$$M_O^{\text{ин}} = J_O \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi}.$$

Направляем его в сторону, противоположную предполагаемому положительному направлению углового ускорения ε .

Составляем уравнение равновесия, уравнение моментов сил относительно оси O ,

$$\Sigma M_{iO} = 0; \quad -M_O^{\text{ин}} - P \frac{l}{2} \sin \varphi = 0.$$

Подставив значение $M_O^{\text{ин}}$, получим дифференциальное уравнение вращения

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (16.2)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение. Решение его в элементарных функциях не существует. Но первый интеграл можно найти.

Так как $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}d\dot{\varphi}}{d\varphi}$, то в уравнении (16.2) переменные разделяются: $\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{2g}{3l} \sin\varphi \cdot d\varphi$. Проинтегрировав, получим $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{3l} \cos\varphi + C_1$.

Если движение началось из горизонтального положения (при $t = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi} = 0$), то постоянная $C_1 = 0$. И тогда $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{4g}{3l} \cos\varphi}$.

Составив уравнения проекций сил на оси x и y ,

$$\sum X_i = 0; \quad X_o - R_{\text{ИН}}^{\tau} \cos\varphi + R_{\text{ИН}}^n \sin\varphi = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_o - P - R_{\text{ИН}}^{\tau} \sin\varphi - R_{\text{ИН}}^n \cos\varphi = 0,$$

найдем реакции:

$$\begin{aligned} X_o &= R_{\text{ИН}}^{\tau} \cos\varphi - R_{\text{ИН}}^n \sin\varphi = \frac{Pl}{g} \frac{\dot{\varphi}}{2} \cos\varphi - \frac{Pl}{g} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \sin\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Pl}{g} \cdot \left(-\frac{2g}{3l} \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{4g}{3l} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \right) = -\frac{1}{2} P \cdot \sin 2\varphi; \\ Y_o &= P + R_{\text{ИН}}^{\tau} \sin\varphi + R_{\text{ИН}}^n \cos\varphi = P + \frac{Pl}{g} \frac{\dot{\varphi}}{2} \sin\varphi + \frac{Pl}{g} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \cos\varphi = \\ &= P + \frac{Pl}{g} \cdot \left(-\frac{2g}{3l} \sin^2\varphi + \frac{4g}{3l} \cos^2\varphi \right) = \frac{1}{3} P (2 + 3\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Так, например, в начале движения при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $X_o = 0$ и $Y_o = \frac{2}{3} P$.

А в нижнем положении при $\varphi = 0$ $X_o = 0$ и $Y_o = \frac{5}{3} P$.

Заметим, что при решении этой задачи вместо главного вектора и главного момента сил инерции можно было показать только равнодействующую сил инерции, равную, конечно, главному вектору и приложенную

(см. выражение (16.1)) к точке A на расстоянии $OA = \frac{J_o}{M \cdot OC} = \frac{Ml^2}{3M \cdot 0,5l} = \frac{2}{3} l$.

XVII. Принцип возможных перемещений

§1. Возможные перемещения. Классификация связей

Рассмотрим возможные перемещения точки M на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром O (рис.17.1,*а*). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

Возможным перемещением δs точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы и без нарушения этих связей.

К этому определению следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное*; что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

На рис. 17.1 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем. Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например, $\delta s_M = OM \cdot \delta\varphi$; $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$; $\delta s_B = OB \cdot \delta\varphi$ (рис. 17.1,*а* и 17.1,*б*).

*Если связи – не стационарные, изменяются с течением времени, то действительное перемещение может не быть одним из возможных.

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена AB (рис.17.1, в) определяются с помощью мгновенного центра скоростей C_v этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении есть поворот на малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол можно определить.

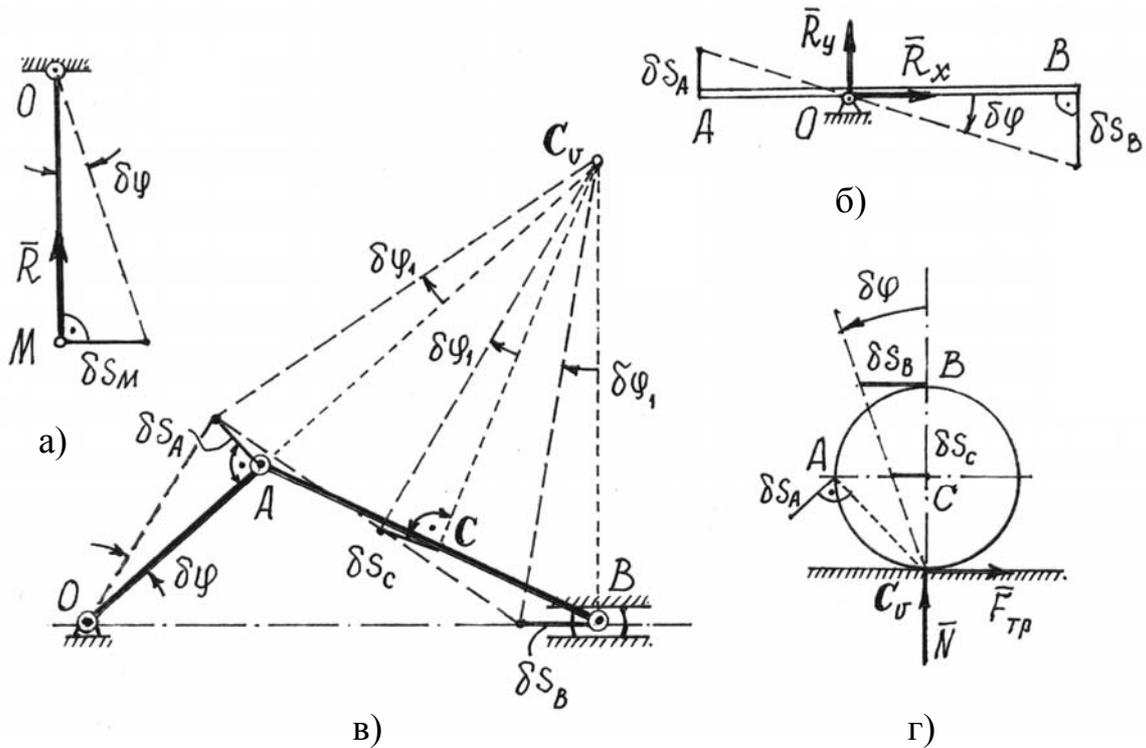


Рис. 17.1

Так как $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$, то $\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{AC_v} = \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$, а перемещение ползуна B $\delta s_B = BC_v \cdot \delta\varphi_1 = BC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$ и точки C $\delta s_C = CC_v \delta\varphi_1 = CC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$. То есть перемещения всех точек этого механизма можно выразить через одно возможное перемещение, перемещение звена OA через угол $\delta\varphi$.

Аналогично поворотом на малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей C_v определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.17.2, з).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями*. К таким связям относятся, например, все связи без трения. Кстати, об этом сказано было еще в XV, §4.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными*.

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними* в зависимости от того, препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными*, кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

§2. Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравниваются. Если \vec{F}_i – равнодействующая всех активных сил, приложенных к i -й точке, а \vec{R}_i – реакция связей этой точки, то (рис.17.2) $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$.

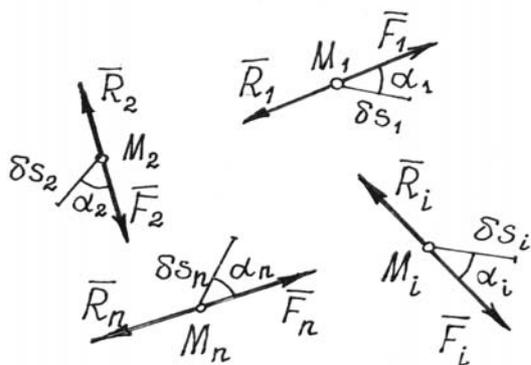


Рис. 17.2

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \dots, \delta s_n$.

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях. Так как силы, приложенные к каждой точке, уравниваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то

сумма работ этих сил на перемещении δs_i будет равна нулю: $F_i \delta s_i \cos \alpha_i - R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$. Значит, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \quad (17.1)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики*.

При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых сил на всяком возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей $\delta s_i = v_i \delta t$, где время δt – произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (17.1) запишется так: $\sum F_i v_i \delta t \cos \alpha_i = 0$, а, поделив его на δt , получим

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0, \quad (17.2)$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (17.2) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности находить и неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Пример 17.1. Какую силу F надо приложить к желобу с грузом весом P , чтобы удержать его в равновесии (рис.17.3)?

Эту задачу можно решить известными методами статики, составляя уравнения равновесия. Но при этом придется прежде отыскать усилия в стержнях. Принцип возможных перемещений позволяет найти силу F проще с помощью общего уравнения статики.

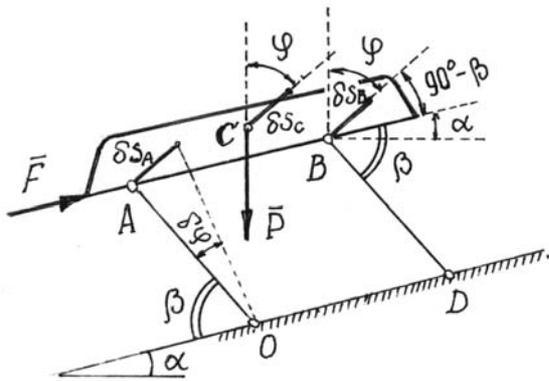


Рис. 17.3

Показываем активные силы \vec{P} и \vec{F} . Даем системе возможное перемещение, повернув стержень AO на угол $\delta\varphi$ (см. рис.17.3). Так как желоб совершит поступательное движение, то значит перемещения всех его точек будут одинаковы

$$\delta s_A = \delta s_B = \delta s_C = AO \cdot \delta\varphi = a \cdot \delta\varphi,$$

где $a = AO = BD$.

Составляем уравнение работ: $F \delta s_A \cos(90^\circ - \beta) - P \delta s_C \cos\varphi = 0$. Угол $\varphi = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha$. Поэтому получим $F a \delta\varphi \cdot \sin\beta - P a \delta\varphi \cos(\beta - \alpha) = 0$. Отсюда $F = P \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$.

Пример 17.2. На рис.17.4 изображена конструкция, состоящая из четырех одинаковых Т-образных рам, соединенных шарнирами K, M, Q .

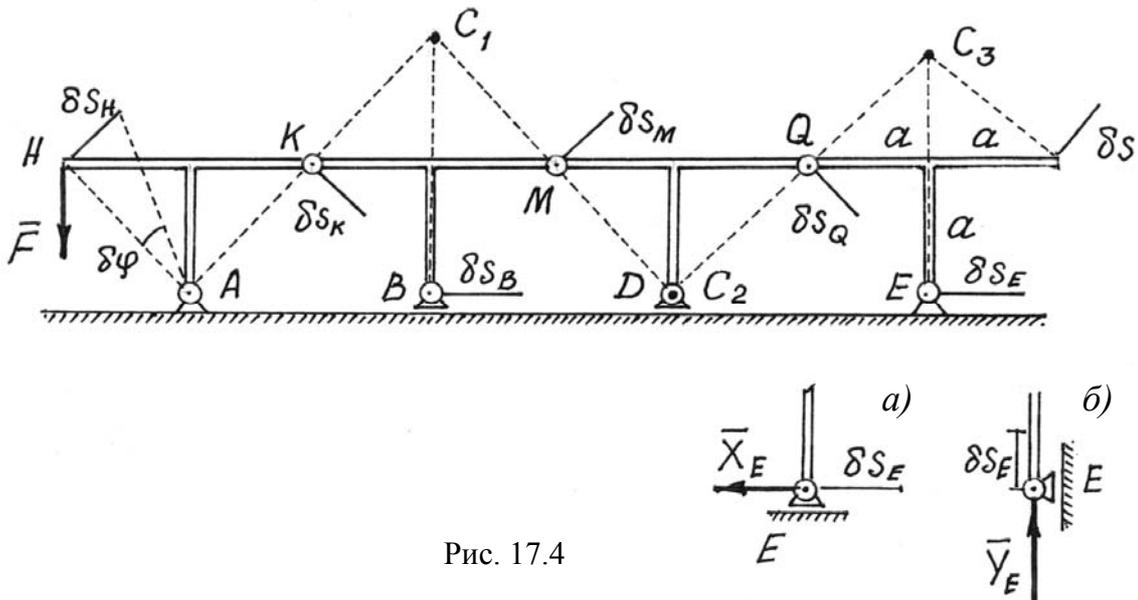


Рис. 17.4

Опоры A и E – шарнирно-неподвижные, B и D – шарнирно-подвижные.

Определим горизонтальную составляющую \vec{X}_E реакции опоры E , вызванную силой \vec{F} , приложенной к левой раме.

Методы статики дадут довольно сложное и длинное решение, так как придется рассматривать равновесие четырех рам и решать систему из 12 уравнений с 12 неизвестными.

Принцип возможных перемещений дает более простое и короткое решение. Надо изменить конструкцию опоры E . Сделаем ее подвижной, а чтобы система осталась в равновесии, приложим к опоре силу \vec{X}_E , ту силу, которую нужно определить (рис. 17.4, а).

Даем затем системе возможное перемещение, повернув левую раму вокруг опоры A на угол $\delta\varphi$. С помощью мгновенных центров скоростей C_1 , C_2 и C_3 каждой рамы обнаруживаем, что $\delta s_H = \delta s_K = \delta s_M = \delta s_Q$, а

$$\frac{\delta s_E}{\delta s_Q} = \frac{EC_3}{QC_3} \quad \text{или} \quad \delta s_E = \frac{EC_3}{QC_3} \delta s_Q = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \delta s_Q = \delta s_Q \sqrt{2}.$$

Составляем уравнение работ, общее уравнение статики $-F \delta s_H \cos 45^\circ - X_E \delta s_E = 0$ или

$$-F \delta s_H \frac{\sqrt{2}}{2} - X_E \delta s_Q \sqrt{2} = 0. \quad \text{Отсюда} \quad X_E = -\frac{1}{2} F.$$

Чтобы определить вертикальную составляющую \vec{Y}_E реакции опоры E , ее надо вновь переделать (рис. 17.4, б), дать системе соответствующее возможное перемещение и составить уравнение работ.

§3. Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит, можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (17.1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i = 0. \quad (17.3)$$

Или по принципу возможных скоростей (17.2)

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} v_i \cos \beta_i = 0.$$

Эти уравнения называют *общим уравнением динамики*. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем (см. XVI, §2). Стоит подчеркнуть еще одно достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

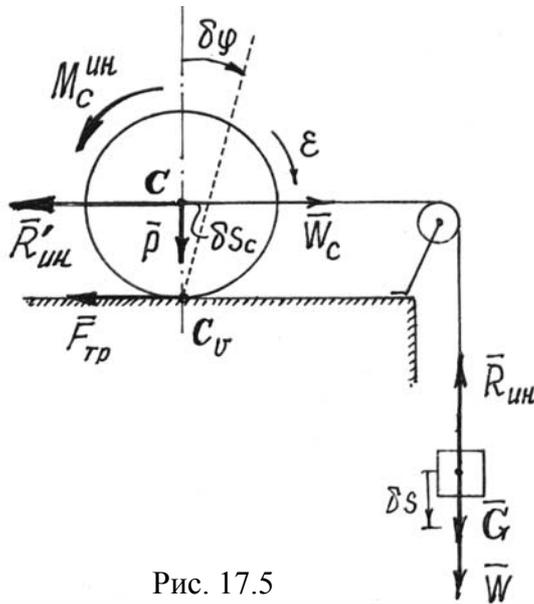


Рис. 17.5

Пример 17.3. Определим ускорение груза G (рис. 17.5). Вес цилиндра – P , радиус – r . Цилиндр катится по плоскости без скольжения.

Показываем задаваемые силы – \vec{P} , \vec{G} , $\vec{F}_{тр}$. Добавляем силы инерции. Сила инерции груза, движущегося поступательно:

$$R_{инн} = \frac{G}{g} W.$$

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Главный вектор сил инерции точек его

$$R'_{инн} = \frac{P}{g} W_c = \frac{P}{g} W.$$

Главный момент сил инерции относительно центральной оси C

$$M_c^{инн} = J_c \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r W, \text{ так как } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_c}{r} = \frac{1}{r} \frac{dv_c}{dt} = \frac{W_c}{r}.$$

Даем системе возможное перемещение, сдвинув груз вниз на малую величину δs . Центр цилиндра сместится вправо на величину $\delta s_c = \delta s$, а весь цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей C_v на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_c}{r} = \frac{\delta s}{r}.$$

Вычисляем работу сил на этих перемещениях и составляем уравнение работ, общее уравнение динамики

$$G \cdot \delta s - R_{инн} \cdot \delta s - R'_{инн} \cdot \delta s_c - M_c^{инн} \cdot \delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta s = \delta s_c = r\delta\varphi$, то, подставив значения сил инерции, получим уравнение:

$$Gr\delta\varphi - \frac{G}{g} Wr \cdot \delta\varphi - \frac{P}{g} Wr \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} \frac{P}{g} Wr \cdot \delta\varphi = 0,$$

из которого находим
$$W = \frac{2G}{2G + 3P} g.$$

VIII. Уравнения Лагранжа

§1. Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д. Так, на рис.18.1 положение балочки AB и всех ее точек вполне определяется углом φ .

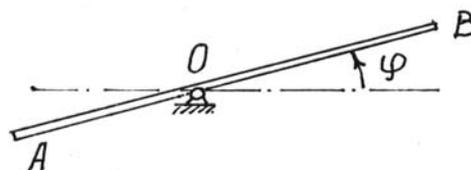


Рис. 18.1

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис. 18.2) можно задать углом поворота φ кривошипа или расстоянием s , определяющим положение ползуна B (при $0 < \varphi < \pi$).

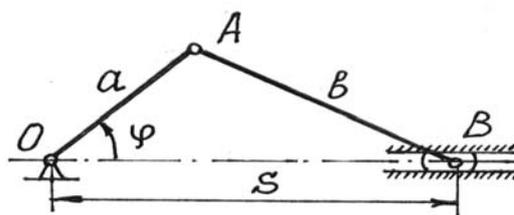


Рис. 18.2

Положение сферического маятника (рис. 18.3) определяется заданием двух параметров, углов φ_1 и φ_2 .

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

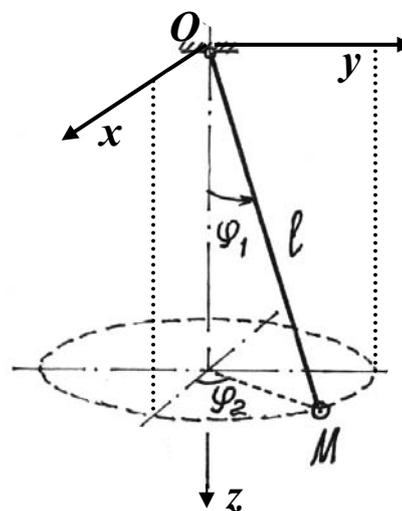


Рис. 18.3

Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 18.2) указаны две обобщенные координаты φ и s . Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно определить через другую: $s = a \cdot \cos \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}$.

А вот у маятника (рис. 18.3) две степени свободы, так как определяется его положение двумя независимыми обобщенными координатами. Кстати, если длина маятника изменяется, то для определения положения точки M потребуется еще один параметр – обобщенная координата l , длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой q . Пусть материальная система имеет s степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \dots, q_s$.

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты n точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.1)$$

Так, у маятника (см. рис. 18.3) координаты точки M

$$\begin{aligned} x_M &= l \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ y_M &= l \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ z_M &= l \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

есть функции координат l, φ_1, φ_2 и времени t , если $l = l(t)$.

Соответственно и радиус-вектор точек системы можно определить как функцию обобщенных координат и времени

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (18.2)$$

§2. Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_k можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_k . Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_k , соответствующую обобщенной координате q_k , надо дать этой координате приращение δq_k (увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_k :

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i, \quad (18.3)$$

где δs_i – перемещение i -й точки системы, полученное за счет изменения k -й обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе (см. выражения (15.3) и (15.4))

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}.$$

И так как $\delta \vec{r}_i$ есть приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$ за счет приращения координаты q_k при остальных неизменных координатах и времени t , отношение $\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}$ можно определять как частную производную $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (18.4)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (18.1).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля (15.14), проекции которых $X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$,

$Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$, $Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$, где $\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$, а координаты точек – функции

обобщенных координат, то

$$Q_k = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (18.5)$$

Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s).$$

Замечания.

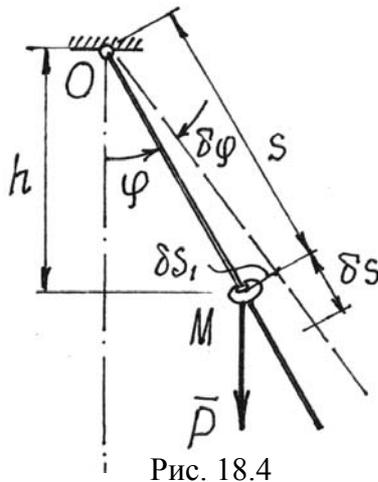
Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Единица измерения обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так, если $[q] = \text{метр}$, то единица измерения

$[Q] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{ньютон}$; если $[q] = \text{радиан}$, то $[Q] = \text{Н} \cdot \text{м}$; если $[q] = \text{м}^2$, то

$[Q] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и т.п.

Пример 18.1. По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит колечко M весом P (рис. 18.4). Стержень считаем невесомым.



Определим обобщенные силы.

Система имеет две степени свободы. Назначаем две обобщенные координаты s и φ . Найдем обобщенную силу, соответствующую координате s . Даем приращение δs этой координате и, оставив вторую координату φ неизменной, вычисляя работу единственной активной силы P , получим обобщенную силу

$$Q_s = \frac{1}{\delta s} (P \cdot \delta s \cdot \cos \varphi) = P \cos \varphi.$$

Затем даем приращение $\delta \varphi$ координате φ , полагая $s = \text{const}$. При повороте стержня на угол $\delta \varphi$ точка приложения силы P , колечко M , переместится на $\delta s_1 = s \cdot \delta \varphi$. Обобщенная сила получится такой:

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta \varphi} (-P \cdot \delta s_1 \cdot \sin \varphi) = -\frac{1}{\delta \varphi} P s \cdot \delta \varphi \cdot \sin \varphi = -P s \cdot \sin \varphi.$$

Так как система консервативная, обобщенные силы можно найти и с помощью потенциальной энергии $\Pi = -Ph = -Ps \cdot \cos \varphi$. Получим

$$Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = P \cos \varphi \quad \text{и} \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -P s \cdot \sin \varphi. \quad \text{Получается гораздо проще.}$$

§3. Уравнения равновесия Лагранжа

По определению (18.3) обобщенные силы $Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i$,

при $k = 1, 2, 3, \dots, s$, где s – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений (17.1) $\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$. Здесь δs_i – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все её обобщенные силы равны нулю

$$Q_k = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.6)$$

Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах*, или *уравнения равновесия Лагранжа*, позволяют решать задачи статики еще одним методом.

Если система консервативная, то $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$. Значит, в положении

равновесия $\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$. То есть в положении равновесия такой материальной

системы ее потенциальная энергия либо максимальна, либо минимальна, то есть функция $\Pi(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис. 18.5). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум. Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние, то эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

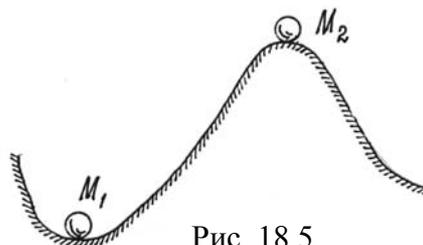


Рис. 18.5

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется второй производной, ее значением в положении равновесия

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0. \quad (18.7)$$

Пример 18.2. Стержень OA весом P может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис.18.6). Найдём положения равновесия и исследуем их устойчивость.

Стержень имеет только одну степень свободы. Обобщенная координата – угол φ . Относительно нижнего, нулевого, положения потенциальная энергия $\Pi = Ph$ или $\Pi = P\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi\right) = \frac{1}{2} Pl(1 - \cos \varphi)$. В положении

равновесия должно быть $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} Pl \sin \varphi = 0$.

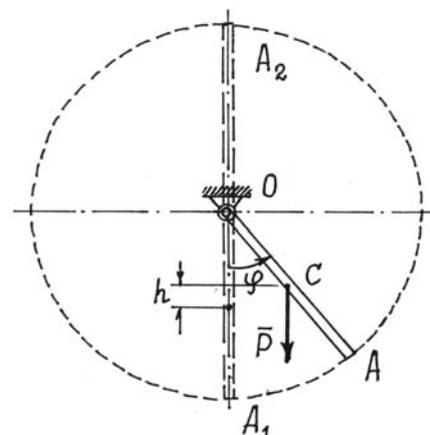


Рис. 18.6

Отсюда имеем два положения, соответствующие углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ (положения OA_1 и OA_2).

Исследуем их устойчивость. Находим вторую производную $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl \cos \varphi$. Конечно, при $\varphi = \varphi_1 = 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl > 0$. Положение равновесия устойчиво. А при $\varphi = \varphi_2 = \pi$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} Pl < 0$. Значит, второе положение равновесия – неустойчиво. Результаты очевидны.

§4. Обобщенные силы инерции

По той же методике (18.4), по которой вычислялись обобщенные силы Q_k , соответствующие активным задаваемым силам, определяются и обобщенные силы $Q_k^{\text{ин}}$, соответствующие силам инерции точек системы:

$$Q_k^{\text{ин}} = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i = \frac{1}{\delta q_k} \sum \bar{F}_i^{\text{ин}} \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{\text{ин}} \frac{\delta \bar{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8a)$$

$$\text{И так как } \bar{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \bar{W}_i = -m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}, \text{ то } Q_k^{\text{ин}} = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8b)$$

Немного математических преобразований.

Очевидно, $\frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} + \bar{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$. Отсюда

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) - \bar{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.9)$$

Так как $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$, а $q_k = q_k(t)$, ($k = 1, 2, 3, \dots, s$), то

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}, \text{ где } \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Значит, частная производная скорости \bar{v}_i по \dot{q}_k

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.10)$$

Кроме того, в последнем члене (18.9) можно поменять порядок дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}. \quad (18.11)$$

Подставляя (18.10) и (18.11) в (18.9), а потом (18.9) в (18.8б), получим:

$$Q_k^{\text{ин}} = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right].$$

Разделив последнюю сумму на две и имея в виду, что сумма производных равна производной от суммы, получим:

$$Q_k^{\text{ин}} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (18.12)$$

где $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ – обобщенная скорость.

§5. Уравнения Лагранжа

По определению (18.3) и (18.8а) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i; \quad Q_k^{\text{ин}} = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Сумма их $Q_k + Q_k^{\text{ин}} = \frac{1}{\delta q_k} (\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i)$ или

$$(Q_k + Q_k^{\text{ин}}) \delta q_k = \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Но на основании общего уравнения динамики (17.3) правая часть равенства равна нулю. И так как все δq_k ($k = 1, 2, 3, \dots, s$) отличны от нуля, то $Q_k + Q_k^{\text{ин}} = 0$. Подставив значение обобщенной силы инерции (18.12), получим уравнение:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.13)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго рода* или просто – *уравнениями Лагранжа*. Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (18.14)$$

или
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (18.15)$$

где $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты q_j не входят явно в функцию Лагранжа (или в T и Π). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще. Так как $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, то $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots, k$).

Первые интегралы последних уравнений находятся сразу. Они называются *циклическими интегралами*

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const.} \quad (18.16)$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Пример 18.3. Продолжим исследование движения колечка M на качающемся стержне (см. пример 18.1).

Обобщенные координаты назначены – φ и s (рис.18.7). Обобщенные силы определены: $Q_s = P \cos \varphi$ и $Q_\varphi = -Ps \cdot \sin \varphi$.

Кинетическая энергия колечка $T = \frac{1}{2}mv^2$. Где $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, а $v^2 = v_e^2 + v_r^2$ и $v_e = s\omega = s\dot{\varphi}$, $v_r = \dot{s}$. Поэтому $T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (s^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2)$.

Составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Так как $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \dot{s}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \ddot{s}$,

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{P}{g} s\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{P}{g} s^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} (2s\dot{s}\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

то уравнения получаются такими:

$$\frac{P}{g} \ddot{s} - \frac{P}{g} s\dot{\varphi}^2 = P \cos \varphi,$$

$$\frac{P}{g} (2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi})s = -Ps \cdot \sin \varphi$$

или $\left. \begin{aligned} \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 - g \cdot \cos \varphi &= 0, \\ s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi} + g \cdot \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$ Получили два нелинейных дифференциаль-

ных уравнения второго порядка, для решения которых нужны специальные методы.

Пример 18.4. Составим дифференциальное уравнение движения балочки AB , которая перекачивается без скольжения по цилиндрической поверхности (рис.18.8). Длина балочки $AB = l$, вес $-P$.

В положении равновесия балочка располагалась горизонтально и центр тяжести C ее находился на верхней точке цилиндра. Балочка имеет одну степень свободы. Положение этой балочки определяется обобщенной координатой – углом φ .

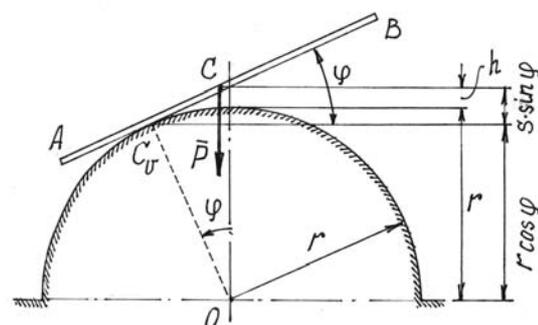


Рис. 18.8

Система консервативная. Поэтому уравнение Лагранжа составим с помощью потенциальной энергии $\Pi = mgh$, вычисленной относительно горизонтального положения. В точке касания находится мгновенный центр

скоростей и $CC_v = s = r\varphi$ (CC_v равно длине дуги окружности с углом φ). Поэтому $h = r \cdot \cos \varphi + s \cdot \sin \varphi - r$ (см. рис. 18.8) и $\Pi = mgr(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1)$.

Кинетическая энергия (балка совершает плоскопараллельное движение)

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}ms^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\varphi}^2.$$

Находим необходимые производные для уравнения $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \left[2r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} \right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mr^2\varphi\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr(-\sin \varphi + \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) = mgr\varphi \cos \varphi.$$

Составляем уравнение

$$m \left[2r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} \right] - mr^2\varphi\dot{\varphi}^2 + mgr\varphi \cos \varphi = 0.$$

Окончательно получаем

$$(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} + r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + gr\varphi \cos \varphi = 0.$$

XIX. Общие теоремы динамики

В предыдущих разделах излагались методы определения движения материальной системы, которые сводились к составлению дифференциальных уравнений, как правило, второго порядка. И решение их оказывалось не всегда простым.

Если ввести новые обобщенные понятия, характеризующие свойства и движение системы в целом, то эти трудности нередко можно обойти. К ним относятся понятия о центре масс и кинетической энергии, которые уже нам знакомы, понятия о количестве движения материальной системы и моменте количества движения.

Теоремы, определяющие изменение этих характеристик, позволяют получить более полное представление о движении материальной системы.

Одна из теорем, теорема об изменении кинетической энергии, уже доказана в XV, §4.

§1. Теорема о движении центра масс

Иногда, чтобы оценить движение материальной системы в целом, достаточно определить движение какой-нибудь одной ее точки. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать, как он будет кувыряться во время полета, важно установить, попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Оказывается, довольно просто можно определить движение центра масс материальной системы. Составим для каждой j -й точки материальной системы основное уравнение динамики (12.2), разделив силы, действующие на точки, на внешние и внутренние: $m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$. Затем сложим эти уравнения: $\sum m_j \vec{W}_j = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)}$ (*). Вторую сумму в правой части равенства можно отбросить, так как векторная сумма внутренних сил равна нулю. Левую часть можно записать иначе. Так как радиус-вектор центра масс (см.14.1) $\vec{r}_C = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{M}$, то $\sum m_j \vec{r}_j = M \vec{r}_C$. Взяв вторую производную по времени (полагая массу постоянной), получим $\sum m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$ или $\sum m_j \vec{W}_j = M \vec{W}_C$. Подставив эту сумму в левую часть равенства (*), получим

$$M \vec{W}_C = \sum \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.1)$$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат x , y , и z . Вспоминая, что проекции вектора ускорения \vec{W}_C на оси есть вторые производные по времени от координат точки, получим дифференциальные уравнения движения центра масс

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= \sum X_j^{(e)}, \\ M \ddot{y}_C &= \sum Y_j^{(e)}, \\ M \ddot{z}_C &= \sum Z_j^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями движения материальной точки (13.1) и уравнение (19.1) с основным уравнением динамики (12.1), можно сформулировать закон движения центра масс.

Движение центра масс материальной системы определяется так же, как движение материальной точки, масса которой равна массе всей системы, под действием внешних сил, приложенных ко всем точкам системы.

Теорема о движении центра масс позволяет сделать несколько важных замечаний.

Первое. Внутренние силы не могут изменить движение центра масс системы. Они вызывают движение лишь отдельных тел и точек системы.

Так, движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, равных силам трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы тормозные колодки не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Второе. Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма их равна нулю, то центр масс системы будет либо находиться в покое, либо двигаться равномерно и прямолинейно, так как ускорение центра масс равно нулю $\vec{W}_C = 0$.

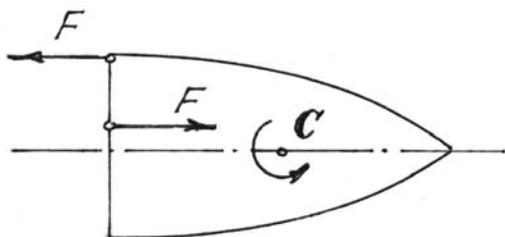


Рис. 19.1

Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис. 19.1), то центр масс C его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться вокруг центра масс. И неважно, где приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары сил на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси C .

Пример 19.1. Человек перешел с кормы лодки на нос. Определим перемещение лодки s (рис.19.2). Вес лодки – P_1 , человека – P_2 , длина лодки – l . Сопротивление движению не учитываем. Определим движение центра масс C системы, состоящей из человека и лодки.

Составляем дифференциальное уравнение движения центра масс по оси x (19.2): $M\ddot{x}_C = \sum X_i^{(e)}$. Но так как проекции внешних сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , и \vec{N} на ось x равны нулю, то $\ddot{x}_C = 0$. Проинтегрировав дважды это уравнение, получим $\dot{x}_C = C_1$ и $x_C = C_1 t + C_2$. Но в начале движения система была неподвижна : $v_C = \dot{x}_C = 0$. Значит, $C_1 = 0$ и $x_C = \text{const}$.

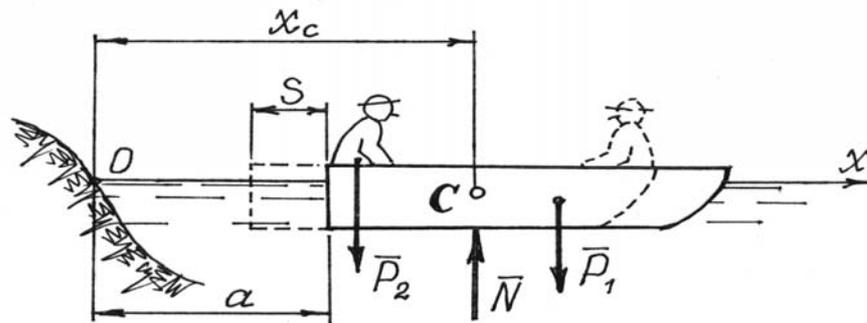


Рис. 19.2

Найдем координату x_C в первом положении системы, когда человек находился на корме, как координату центра тяжести по формулам (14.2)

$$x_C = \frac{P_1(a + 0,5l) + P_2 a}{P_1 + P_2} = a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l.$$

И во втором положении, когда человек перейдет на нос лодки:

$$x_C = \frac{P_1(a - s + 0,5l) + P_2(a - s + l)}{P_1 + P_2} = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Приравниваем координаты, так как $x_C = \text{const}$

$$a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Из этого равенства находим перемещение лодки

$$s = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l - \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = \frac{P_2}{P_1 + P_2} l.$$

§2. Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость $\vec{k} = m\vec{v}$. Это есть вектор, который направляется как вектор скорости по касательной к траектории (рис. 19.3).

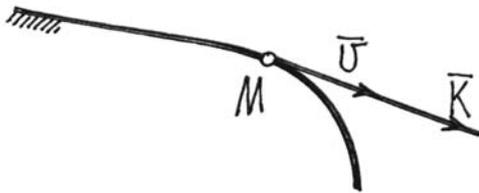


Рис. 19.3

Количеством движения материальной системы будем называть векторную сумму количеств движения всех точек системы

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (19.3)$$

Как известно (14.1), радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ или $\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_C$. Найдем производную по времени от этого равенства $\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ или $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$. Значит, по формуле (19.3) количество движения материальной системы при любом ее движении определяется довольно просто как произведение массы системы на скорость ее центра масс

$$\vec{K} = M \vec{v}_C. \quad (19.4)$$

Направляется вектор количества движения так же, как вектор скорости центра масс C . Количество движения точки – связанный вектор, он приложен к этой точке. Поэтому и для вектора количества движения системы можно ввести понятие точки приложения. Правда, найти ее не всегда просто. Но при поступательном движении твердого тела это сделать не сложно.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные, параллельные векторы скорости, то и векторы количества движения их будут параллельны. Поэтому точку приложения вектора \vec{K} можно определять как центр параллельных векторов \vec{k}_i (см. раздел «Статика»), радиус-вектор которого $\vec{r} = \frac{\sum k_i \vec{r}_i}{K} = \frac{\sum m_i v_i \vec{r}_i}{M v_C}$. Но $v_i = v_C$, значит $\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$, равен радиусу-вектору центра масс, то есть вектор количества движения тела при поступательном движении приложен к центру масс. При других движениях тела определить точку приложения вектора \vec{K} сложнее.

Введем еще одно понятие – *импульс силы*. Импульсом \vec{S} постоянной силы \vec{F} за время ее действия t называется произведение

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t. \quad (19.5)$$

Если же сила переменна, то определяют сначала элементарный импульс за время dt : $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$, а потом интегрируют на интервале от t_1 до t_2

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt. \quad (19.6)$$

Перейдем теперь к выводу теоремы.

Запишем для каждой j -й точки материальной системы основное уравнение динамики, разделив силы на внешние и внутренние:

$$m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)} \quad \text{или} \quad m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}.$$

Введем массу m_j под знак дифференциала $\frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$.

Сложим все эти равенства. Получим $\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$

или $\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$. Но последняя сумма, векторная сумма внутренних сил, равна нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.7)$$

Производная по времени от вектора количества движения материальной системы равна векторной сумме внешних сил, приложенных к точкам системы.

Чтобы получить уравнения, удобные для исследования движения системы, спроектируем векторное равенство (19.7) на оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum Z_i^{(e)}. \quad (19.8)$$

И ещё. Проинтегрируем уравнение (19.7) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое

$$\int_{\vec{K}_1}^{\vec{K}_2} d\vec{K} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} \cdot dt.$$

Получим теорему об изменении количества движения, записанную в другой форме:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i^{(e)}. \quad (19.9)$$

Изменение количества движения материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно векторной сумме импульсов внешних сил за время перехода.

Спроектировав векторное равенство (19.9) на оси, получим скалярные уравнения, которые используются при решении задач:

$$\left. \begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum S_{ix}^{(e)}, \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum S_{iy}^{(e)}, \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum S_{iz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Разность проекций вектора количества движения в конечном и начальном положениях системы на ось равна сумме проекций импульсов внешних сил на эту ось.

Теорему об изменении количества движения обычно используют для решения задач, по условию которых требуется установить зависимость между изменениями массы, перемещением тел системы и их скорости.

Пример 19.2. Груз весом P спускается по кузову автомобиля со скоростью u (рис. 19.4). При этом сам автомобиль начнет движение. Определим его скорость v_1 . Вес автомобиля – G . Сопротивления движению не учитываем.

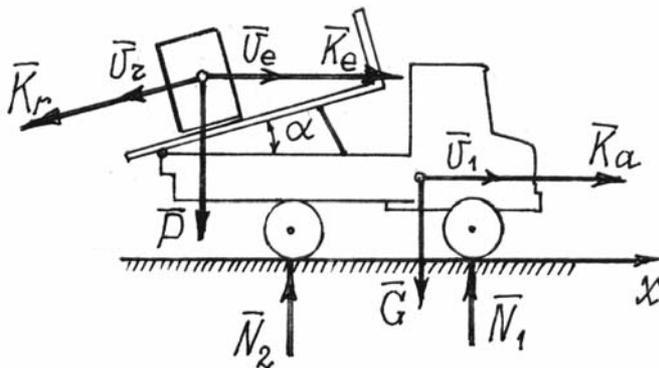


Рис. 19.4

Составим уравнение (19.10) для оси x

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^{(e)}.$$

В начале движения количество движения всей системы равно нулю $\vec{K}_1 = 0$, система была неподвижна. Во втором положении количество движения системы складывается из количества движения автомобиля $K_a = \frac{G}{g} v_1$ (предполагается, что он движется вправо) и количества движения груза.

Абсолютная скорость груза $\vec{v}_{\text{гр}} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Относительная скорость $\vec{v}_r = \vec{u}$, переносная $\vec{v}_e = \vec{v}_1$. Соответственно этим скоростям показываем две составляющие вектора количества движения груза: \vec{K}_r и \vec{K}_e .

Все внешние силы (вес \vec{P} и \vec{G} , реакции плоскости \vec{N}_1, \vec{N}_2) направлены вертикально, и импульсы их будут вертикальными. Составляем уравнение, проектируя все векторы на ось x :

$$K_a + K_e - K_r \cos \alpha = 0.$$

Подставляем их значения $\frac{G}{g}v_1 + \frac{P}{g}v_1 - \frac{P}{g}u \cdot \cos \alpha = 0$. Отсюда

$$v_1 = \frac{P}{P + G} u \cdot \cos \alpha.$$

Пример 19.3. Определим горизонтальное давление трубы на опору A (рис. 19.5). В трубе движется жидкость со скоростью v . Диаметр трубы — d .

По теореме (19.9) $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^{(e)}$. Рассмотрим движение жидкости, заключенной между сечениями 1 и 1'. Через время t сечения окажутся в положениях 2 и 2' соответственно (см. рис. 19.5).

В первом положении количество движения \vec{K}_1 складывалось из количеств движения объемов I и II:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_I + \vec{K}_{II}.$$

Во втором положении $\vec{K}_2 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III}$.

Тогда изменение количества движения $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III} - \vec{K}_I - \vec{K}_{II} = \vec{K}_{III} - \vec{K}_I$. И уравнение (19.9) за-

пишется так: $\vec{K}_{III} - \vec{K}_I = \sum \vec{S}_i^{(e)}$ (*).

Единственными внешними силами будут вес жидкости, вес трубы и реакция опоры \vec{N} . Проектируются на ось x только вектор импульса реакции $\vec{S} = \vec{N}t$ и вектор \vec{K}_{III} .

Проектируя равенство (*) на ось x , получим $K_{III} = Nt$ (**). Так как

объем жидкости $V_{III} = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi d^2}{4} vt$ и плотность ее ρ , то $K_{III} = \rho V_{III} v =$

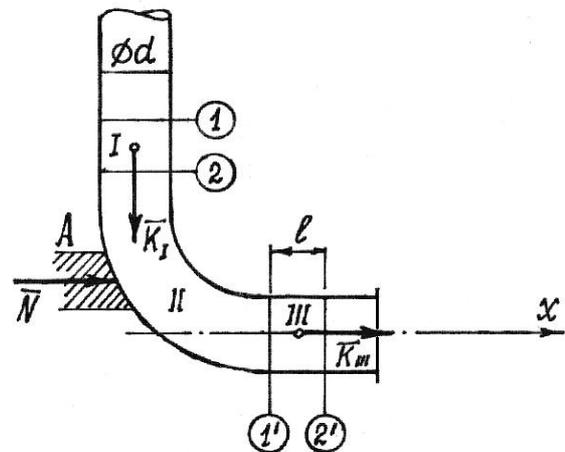


Рис. 19.5

$= \rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t$. Тогда по (**) получим уравнение $\rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t = Nt$, из которого $N = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho v^2$. Давление на опору равно N , но будет направлено, конечно, в противоположную сторону.

§3. Теорема об изменении момента количества движения

1. Момент количества движения

Так как количество движения – вектор, имеющий определенную линию действия (и даже определенную точку приложения), то можно находить момент этого вектора относительно точки и оси так же, как определяли соответствующие моменты силы.

Сначала о моменте количества движения материальной точки.

Ее момент количества движения \vec{k} относительно точки O по величине равен $l_O = kh$, где h – плечо вектора \vec{k} с соответствующим знаком (+) или (–). Как вектор он определяется векторным произведением (рис. 19.6)

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{k}.$$

Момент количества движения l_z относительно оси находится так же как находили ранее момент силы. И зависимость между моментами относительно точки и оси аналогична

$$l_z = l_O \cos \alpha.$$

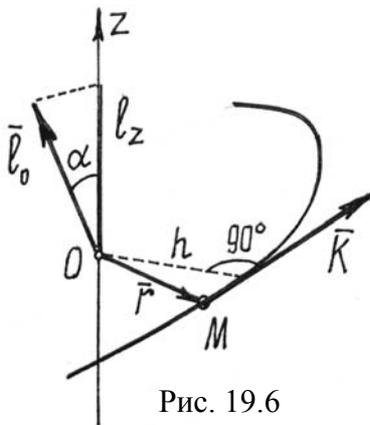


Рис. 19.6

То есть момент количества движения материальной точки относительно оси равен проекции вектора момента количества движения относительно какой-либо точки O , расположенной на оси, на эту ось.

Для движущейся материальной системы вводится понятие *главного момента количеств движения относительно центра O* как векторной суммы моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра O

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_{O_i}. \quad (19.11)$$

Вводится и понятие *главного момента количеств движения относительно оси* как алгебраической суммы моментов количеств движения точек системы относительно этой оси z

$$L_z = \sum l_{zi}. \quad (19.12)$$

Зависимость между ними аналогична зависимости между соответствующими главными моментами сил

$$L_z = L_O \cos \gamma. \quad (19.13)$$

Главный момент количеств движения относительно оси равен проекции вектора главного момента относительно точки, расположенной на оси, на эту ось. Для твердого тела как материальной системы при некоторых движениях главный момент относительно оси определяется довольно просто.

Так, если тело вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 19.7), главный момент количеств движения относительно оси вращения

$$L_z = \sum l_{zi} = \sum k_i h_i = \sum m_i v_i h_i = \sum m_i h_i \omega \cdot h_i = \omega \sum m_i h_i^2 = \omega \cdot J_z. \quad (19.14)$$

То есть равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость $L_z = J_z \omega$

и направлен он по направлению вращения тела.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, то вектор количества движения тела \vec{K} расположен в этой плоскости на расстоянии h от оси, равном

$$h = OA = \frac{L_z}{K} = \frac{J_z \omega}{M v_c} = \frac{J_z \omega}{Ma \omega} = \frac{J_z}{Ma}. \quad (19.14a)$$

На рис. 19.8 показано сечение тела этой плоскостью симметрии и положение вектора количества движения \vec{K} . Заметим, что этот вектор приложен к той же точке A , к которой приложена равнодействующая сил инерции точек тела $\vec{R}_{ин}$ (см. рис. 16.1).

Можно найти главный момент количеств движения тела и при плоскопараллельном движении относительно центральной оси C (рис. 19.9). Скорость произвольно выбранной точки M_i $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{MC}$, а соответствующие скоростям модули векторов количества движения равны $k_{ei} = m_i v_c$

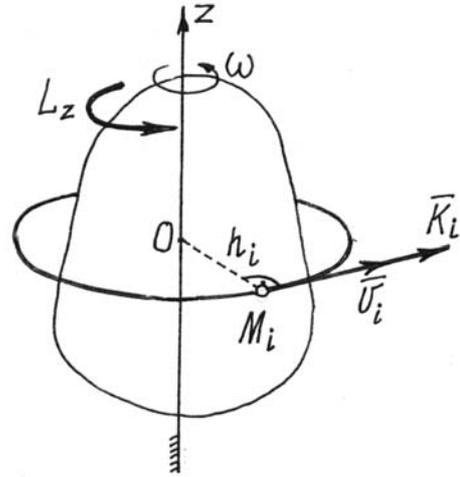


Рис. 19.7

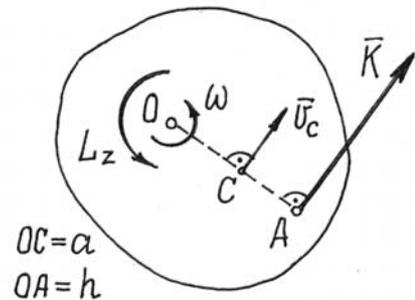


Рис. 19.8

и $k_{ri} = m_i v_{MC} = m_i r_i \omega$. Главный момент количеств движения точек тела относительно оси C , перпендикулярной плоскости движения:

$$L_C = \sum l_{ei} + \sum l_{ri}.$$

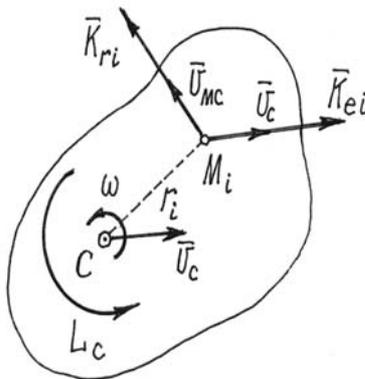


Рис. 19.9

Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона эта сумма моментов векторов \vec{K}_{ei} равна моменту их «равнодействующей», которая приложена к центру масс C , потому что переносное движение при плоскопараллельном движении поступательное (XIX, §2). Поэтому главный момент количеств движения будет равен

$$L_C = \sum l_{ri} = \sum k_{ri} \cdot r_i = \sum m_i r_i \omega_i \cdot r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega \cdot J_C.$$

Значит, главный момент количеств движения точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси C , перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость

$$L_C = J_C \omega \tag{19.15}$$

и имеет направление, совпадающее с направлением вращения, с направлением угловой скорости.

Аналогичный результат получается и для главного момента количеств движения относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей. Действительно, скорость точек тела $v_i = a_i \omega$ (рис. 19.10) и главный момент

$$L_{C_v} = \sum l_{C_v i} = \sum k_i a_i = \sum m_i v_i a_i = \sum m_i a_i \omega \cdot a_i = \omega \sum m_i a_i^2 = \omega \cdot J_{C_v}.$$

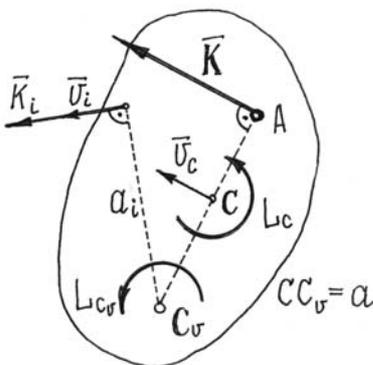


Рис. 19.10

$$\text{Итак, } L_{C_v} = J_{C_v} \omega, \tag{19.16}$$

где J_{C_v} – момент инерции тела относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

При плоскопараллельном движении также можно найти положение вектора количества движения \vec{K} (см. рис. 19.10). Он будет направлен параллельно скорости центра масс \vec{v}_c и находиться на расстояниях от центра масс C

$$AC = \frac{L_c}{K} = \frac{J_c \omega}{M v_c} = \frac{J_c \omega}{M a \omega} = \frac{J_c}{M a} \quad \text{и от мгновенного центра скоростей } C_v$$

$$AC_v = \frac{L_{C_v}}{K} = \frac{J_{C_v} \omega}{M v_c} = \frac{J_{C_v} \omega}{M a \omega} = \frac{J_{C_v}}{M a}.$$

Очень похоже на результат, полученный при вращении тела вокруг неподвижной оси. Но разница в том, что здесь положение точки A меняется, так как меняется положение мгновенного центра скоростей C_v .

2. Теорема о моменте количества движения

Рассмотрим движение материальной системы под действием внешних $\vec{F}_j^{(e)}$ и внутренних $\vec{F}_j^{(i)}$ сил ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Определим момент количества движения каждой точки этой системы относительно некоторого неподвижного центра O $\vec{l}_{Oj} = \vec{r}_j \times \vec{k}_j$ и найдем его производную по времени

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{k}_j) = \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{v}_j \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt}.$$

Первый член равен нулю, так как векторы \vec{v}_j и \vec{k}_j совпадают по направлению. Так как по (19.7) $\frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$, то второй член

$$\vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{r}_j \times (\vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}) = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}).$$

Поэтому $\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)})$. Сложим правые и левые части этих равенств, составленных для всех точек системы:

$$\sum \frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}).$$

Вторая сумма в правой части равна нулю, так как главный момент внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Оставшуюся часть равенства перепишем так:

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O^{(e)}. \quad (19.17)$$

Производная по времени главного момента количества движения материальной системы относительно неподвижной точки O равна главному моменту внешних сил, приложенных к системе, относительно той же точки O .

Оказывается, точно так же формулируется эта теорема и относительно центра масс произвольно движущейся материальной системы. Действительно, рассмотрим движение системы как сумму двух движений: переносного – поступательного движения системы осей вместе с центром масс и относительного – относительно этих осей.

В разд. XIII, §3 мы установили, что движение точек, а значит, и всей материальной системы относительно движущейся системы координатных осей можно определять так же, как относительно неподвижных, если учесть переносные и кориолисовы силы инерции.

Значит, таким способом можно записать и теорему о моменте количества движения относительно движущегося центра масс C

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)} + \sum \vec{M}_C \left(\vec{F}_{ei}^{\text{ин}} \right) + \sum \vec{M}_C \left(\vec{F}_{\text{кор}.i}^{\text{ин}} \right).$$

Но сумма моментов кориолисовых сил инерции равна нулю, так как при переносном поступательном движении эти силы отсутствуют. И первая сумма, сумма моментов переносных сил инерции, тоже равна нулю. Потому что по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей $\vec{R}_e^{\text{ин}}$ этих сил, которая при переносном поступательном движении приложена к центру масс (см. XVI, §1).

Поэтому теорема об изменении количества движения относительно центра масс C движущейся системы записывается так же, как относительно неподвижной точки

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}. \quad (19.18)$$

Спроектировав векторные уравнения (19.17) и (19.18) на какую-нибудь ось, проходящую через точку O или точку C , получим уравнения, с помощью которых и решаются задачи динамики:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \quad (19.19)$$

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C^{(e)}, \quad (19.20)$$

где L_z и L_C – главные моменты количества движения системы относительно неподвижной оси z и оси C , смотри выражение (19.13), а $M_z^{(e)}$ и $M_C^{(e)}$ – главные моменты внешних сил относительно этих осей.

К теореме о моменте количества движения следует сделать очень важные и полезные замечания. Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма моментов их относительно неподвижной точки O или центра масс C равна нулю, то по (19.17) и (19.18) $\vec{L}_O = \text{const}$ и $\vec{L}_C = \text{const}$. То есть главные моменты количеств движения относительно этих точек все время остаются постоянными.

То же самое можно сказать и о моментах относительно осей: если главный момент внешних сил относительно какой-нибудь оси z , проходящей через неподвижную точку O , или относительно какой-нибудь оси C , проходящей через центр масс системы, равен нулю, то главные моменты количеств движения системы относительно этих осей остаются все время постоянными, $L_z = \text{const}$ и $L_C = \text{const}$.

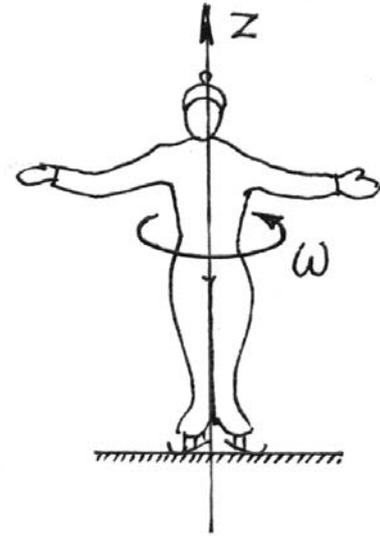


Рис. 19.11

Например, на фигуриста, вращающегося на льду (рис. 19.11) вокруг оси z , действуют внешние силы – вес и реакция гладкого льда.

Моменты их относительно оси z равны нулю. Поэтому $L_z = \text{const}$.

Но $L_z = J_z \omega$, значит, $J_z \omega = \text{const}$. Отсюда следует, что если уменьшится момент инерции J_z (фигурист прижмет руки к туловищу), увеличится скорость вращения.

Еще пример. Вертолет, неподвижно висящий в воздухе (рис. 19.12). Лопасты винта вращаются с угловой скоростью ω_B . Вес вертолета \vec{P} уравновешивается подъемной силой \vec{F} . Момент их относительно вертикальной оси C равен нулю. Поэтому $L_C = \text{const}$.

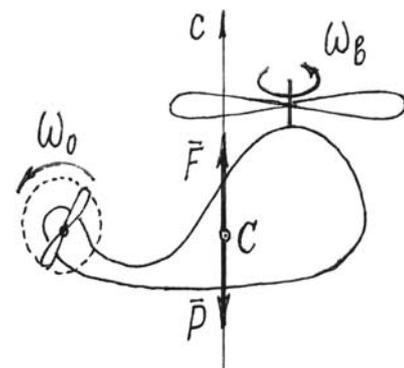


Рис. 19.12

Если изменится скорость вращения винта ω_B , изменится и момент количества движения винта $L_B = J_B \omega_B$. А чтобы общий момент

количеств движения вертолета остался прежним, необходимо вращать корпус вертолета с угловой скоростью ω_K так, чтобы обязательно выполнилось условие $L_C = J_B \omega_B + J_K \omega_K = \text{const}$.

Значит, если винт увеличит угловую скорость, корпус начнет вращаться, но в противоположном направлении; уменьшит – корпус начнет вращаться в том же направлении. Чтобы не произошло этого нежелательного явления, у некоторых типов вертолетов предусмотрен еще один винт на хвосте, вращающийся в вертикальной плоскости и создающий горизонтальную внешнюю силу. Эта сила и будет ликвидировать вращение корпуса изменением момента L_c .

Несколько примеров на решение задач с помощью этой теоремы.

Пример 19.4. Однородный сплошной цилиндр вращается вокруг горизонтальной оси O под действием намотанной на него нити с грузом на конце (рис. 19.13). Вес цилиндра – P_1 , груза – P_2 . Радиус цилиндра – r .

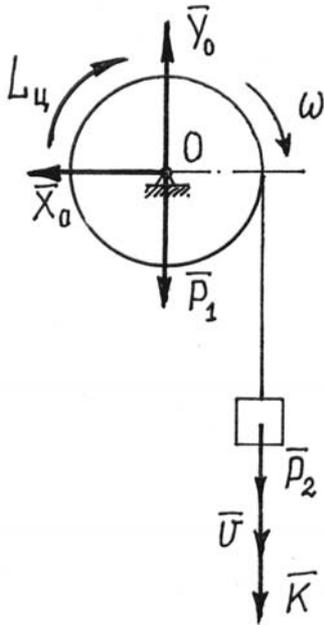


Рис. 19.13

По теореме (19.19) $\frac{dL_o}{dt} = M_o^{(e)}$, так как

$$L_o = L_{ц} + L_{гр} = -J_o \omega - Kr = -\frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r^2 \omega - \frac{P_2}{g} vr = -\frac{P_1 + 2P_2}{2g} r^2 \omega, \text{ где } v = r\omega, \text{ то, взяв произ-$$

водную по времени и приравняв ее к $M_o^{(e)} = -P_2 r$,

получим: $-\frac{P_1 + 2P_2}{2g} r^2 \frac{d\omega}{dt} = -P_2 r$. Отсюда угловое

ускорение $\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} \frac{g}{r}$, а ускорение груза

$$W = r\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} g.$$

Пример 19.5. Внутри трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис. 19.14), движется шарик M . Вначале, когда шарик находился на расстоянии a от оси, угловая скорость трубки была ω_0 . Определим угловую скорость в зависимости от положения шарика, от расстояния s . Вес шарика – P_1 ; трубки – P_2 , длина ее – l .

Главный момент внешних сил (веса, реакций подшипников) относительно оси вращения равен нулю. Значит, $L_z = \text{const}$ или $L_z^{(1)} = L_z^{(2)}$.

В первом положении, в начальном,
 $L_z^{(1)} = L_{\text{трубки}} + L_{\text{шарика}} = J_z \omega_0 + K_e a$,
 где момент инерции трубки относительно
 оси вращения как стержня

$$J_z = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2.$$

Количество движения шарика в пере-
 носном движении

$$K_e = \frac{P_1}{g} v_e = \frac{P_1}{g} a \omega_0.$$

Поэтому в первом положении

$$\begin{aligned} L_z^{(1)} &= \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega_0 + \frac{P_1}{g} a^2 \omega_0 = \\ &= \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0. \end{aligned}$$

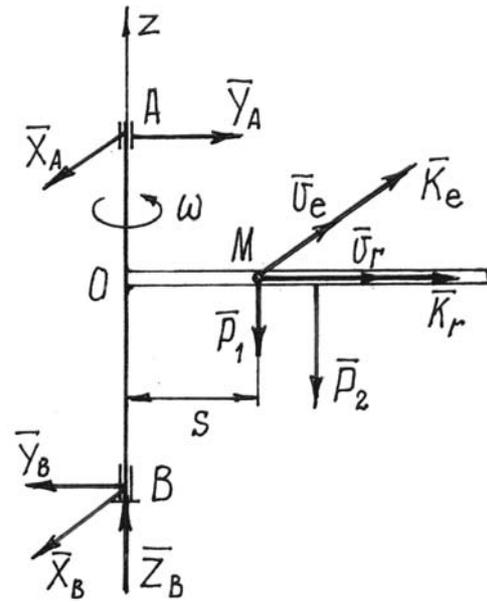


Рис. 19.14

Во втором положении, на расстоянии s,

$$L_z^{(2)} = J_z \omega + K_e s = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega + \frac{P_1}{g} s^2 \omega = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega.$$

(Момент вектора количества движения шарика в относительном движении \bar{K}_r относительно оси вращения равен нулю).

Приравнивая $L_z^{(1)}$ и $L_z^{(2)}$, получим уравнение

$$\frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0 = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega,$$

из которого находим
$$\omega = \frac{P_2 l^2 + 3P_1 a^2}{P_2 l^2 + 3P_1 s^2} \omega_0.$$

Скорость вращения трубки будет уменьшаться с увеличением рас-
 стояния s.

§4. Дифференциальные уравнения вращения твердого тела

Теорема об изменении момента количества движения очень удобна при исследовании вращения твердого тела.

1. Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси

Тело вращается вокруг неподвижной оси z под действием внешних сил, в том числе и реакций подшипников A и B (рис.19.15).

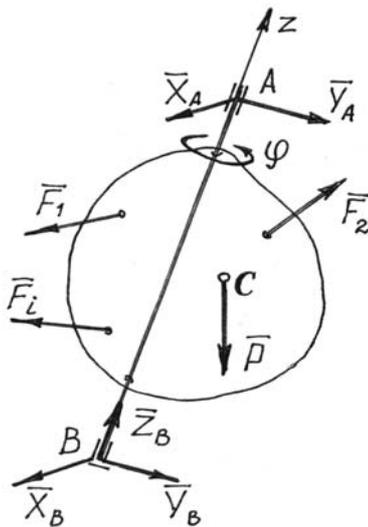


Рис.19.15

По теореме (19.19)

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}.$$

Так как $L_z = J_z \omega = J_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \dot{\varphi}$, то получается дифференциальное уравнение вращения тела

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z \left(\vec{F}_i^{(e)} \right). \quad (19.21)$$

Заметим, что реакции подшипников в уравнение не входят.

Пример 19.6. Стержень весом P и длиной l качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг горизонтальной оси O (рис.19.16). Составим уравнение качаний стержня.

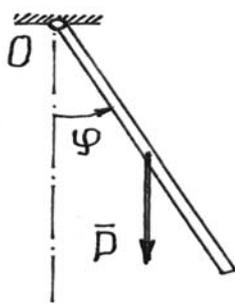


Рис. 19.16

Так как $J_O = \frac{1}{3} P l^2$, а реакции оси не учитываются, то по (19.21) получим $\frac{1}{3} P l^2 \ddot{\varphi} = -P \frac{l}{2} \sin \varphi$

или
$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l} \sin \varphi = 0.$$

2. Дифференциальное уравнение вращения тела при плоскопараллельном движении

Как известно, плоскопараллельное движение тела состоит из двух: поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс перпендикулярно плоскости движения. Причем, это вращение не зависит от выбора полюса.

Если полюсом назначить центр масс тела, то с помощью теоремы о моменте количества движения по формуле (19.20) сразу получим дифференциальное уравнение вращения ($L_c = J_c \omega = J_c \dot{\phi}$):

$$J_c \ddot{\phi} = \sum M_c \left(\vec{F}_i^{(e)} \right), \quad (19.22)$$

где J_c – момент инерции тела относительно центральной оси C , перпендикулярной плоскости движения.

Иногда полезно и выгодно составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей. Это уравнение проще получить, воспользовавшись принципом Даламбера.

Приведем силы инерции точек тела к центру масс C (рис. 19.17). Главный вектор сил инерции найдем как сумму касательной составляющей $\vec{R}_{ин}^\tau$, направленной так же, как и скорость перпендикулярно CC_v , и нормальной составляющей $\vec{R}_{ин}^n$, направленной перпендикулярно $\vec{R}_{ин}^\tau$, то есть по CC_v .

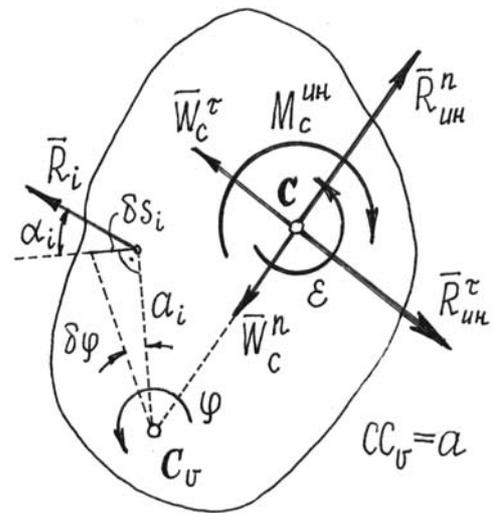


Рис. 19.17

Главный момент сил инерции $M_c^{ин} = J_c \epsilon = J_c \ddot{\phi}$ и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ϵ , которое считаем положительным. Внешние силы на рисунке не показаны.

По принципу Даламбера, составив уравнение моментов относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей, получим:

$$-M_c^{ин} - R_{ин}^\tau a + \sum M_{C_v} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$$

И, так как $R_{ин}^\tau = M W_C^\tau = M \frac{dv_c}{dt} = M \frac{d}{dt}(a\omega) = M(\dot{a}\omega + a\dot{\omega}) = M(\dot{a}\dot{\phi} + a\ddot{\phi})$,

то уравнение получится таким: $-J_c \ddot{\phi} - M\dot{a}\dot{\phi} - Ma\ddot{\phi} + \sum M_{C_v} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$

Но $M\dot{a}\dot{\varphi}a = M(a\omega)\dot{a} = Mv_c\dot{a} = K\dot{a}$. Подставим в уравнение, получим

$$-J_C\ddot{\varphi} - K\dot{a} - Ma^2\ddot{\varphi} + \sum M_{Cv} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$$

Или $(J_C + Ma^2)\ddot{\varphi} + K\dot{a} = \sum M_{Cv} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right) = 0$. И окончательно

$$J_{Cv}\ddot{\varphi} + K\dot{a} = \sum M_{Cv} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right), \quad (19.23)$$

где $K = Mv_c$ – количество движений тела, $a = CC_v$ и $\dot{a} = \frac{da}{dt}$.

Несмотря на то что в этом уравнении в сравнении с (19.22) появился дополнительный член, оно довольно часто оказывается более выгодным. Во-первых, нередко при движении тела расстояние $a = CC_v = \text{const}$ и этот дополнительный член исчезает, уравнение оказывается по форме таким же, как относительно центральной оси C (19.22):

$$J_{Cv}\ddot{\varphi} = \sum M_{Cv} \left(\vec{F}_i^{(e)} \right).$$

Во-вторых, реакции идеальных связей не войдут в уравнение. И это очень существенное преимущество.

Действительно, по определению идеальных связей сумма работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0.$$

Но при плоскопараллельном движении возможные перемещения точек определяются поворотом тела на малый угол вокруг мгновенного центра скоростей: $\delta s_i = a_i \delta \varphi$, где a_i – расстояние от точки до C_v (см. рис. 19.17). Поэтому сумма работ реакций

$$\sum R_i a_i \delta \varphi \cos \alpha_i = \delta \varphi \sum R_i a_i \cos \alpha_i = \delta \varphi \sum M_{Cv} \left(\vec{R}_i \right) = 0.$$

А так как $\delta \varphi \neq 0$, то $\sum M_{Cv} \left(\vec{R}_i \right) = 0$.

Сумма моментов реакций идеальных связей тела относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей, равна нулю.

Пример 19.7. Однородный круглый цилиндр скатывается по наклонной плоскости (рис.19.18). Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Так как $a = CC_v = r = \text{const}$ и, значит, $\dot{a} = 0$, составим дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей.

Момент инерции цилиндра относительно оси C_v

$$J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2. \text{ Уравнение получится таким:}$$

$$\frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = -P r \sin \alpha \quad \text{или} \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha.$$

Знак (-) указывает на направление углового ускорения – по часовой стрелке. Обратим внимание на то, что реакции не вошли в уравнение.

Чтобы определить реакцию $F_{\text{тр}}$, можно составить еще одно дифференциальное уравнение вращения относительно центральной

оси C (19.22): $\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}} r$. Отсюда

$$F_{\text{тр}} = -\frac{1}{2} \frac{P}{g} r \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r \cdot \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha = \frac{1}{3} P \sin \alpha.$$

Конечно, $N = P \cos \alpha$. Чтобы тело катилось без скольжения, должно выполняться условие $F_{\text{тр}} < fN$ или $\frac{1}{3} P \sin \alpha < fP \cos \alpha$. Поэтому коэффициент

трения скольжения должен удовлетворять условию $f > \frac{1}{3} \text{tg} \alpha$.

Пример 19.8. Балочка AB длиной l и весом P падает, скользя концами по гладким поверхностям стены и пола (рис. 19.19). Составим дифференциальное уравнение вращения.

Здесь $a = CC_v = \frac{l}{2} = \text{const}$. Поэтому опять выгоднее составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v . Тем более, что неизвестные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B не войдут в это уравнение.

Так как $J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2 + \frac{P}{g} \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2$, то уравнение получится таким: $\frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = P \frac{l}{2} \sin \varphi$ или

$$\ddot{\varphi} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

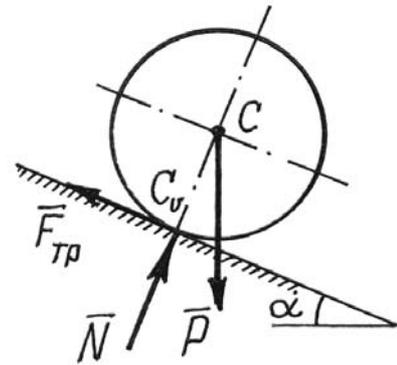


Рис. 19.18

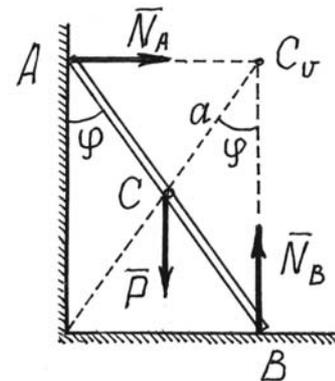
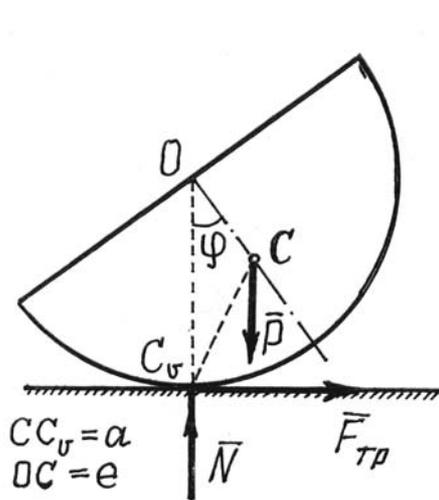


Рис. 19.19

Пример 19.9. Тело, имеющее форму половины кругового цилиндра, катается по горизонтальной плоскости без скольжения (рис. 19.20). Вес его P . Положение центра тяжести определяется расстоянием



$OC = e = \frac{4r}{3\pi}$, момент инерции относи-

тельно оси O равен $J_O = \frac{1}{2}Mr^2$.

Поскольку неизвестны ни сила трения $F_{тр}$, ни нормальная реакция N , выгоднее составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v по формуле (19.23). Момент инерции тела относительно оси C_v по теореме Гюйгенса-Штейнера $J_{C_v} = J_C + Ma^2$, а $J_O = J_C + Me^2$, поэтому $J_{C_v} = J_O + M(a^2 - e^2)$.

Рис. 19.20

Расстояние $a = CC_v = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}$, производная $\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2er\dot{\varphi} \sin \varphi}{2\sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}} = \frac{er}{a} \dot{\varphi} \sin \varphi$. Количество движения $K = \frac{P}{g} v_c = \frac{P}{g} a \dot{\varphi}$.

Составляем дифференциальное уравнение (19.23)

$$[J_O + M(a^2 - e^2)] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} a \dot{\varphi}^2 \frac{er}{a} \sin \varphi = -Pes \sin \varphi$$

или
$$\left[\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} (a^2 - e^2) \right] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} er \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + Pes \sin \varphi = 0.$$

После подстановки значения a получим

$$(3r - 4e \cos \varphi) \ddot{\varphi} + 2e \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \right) \sin \varphi = 0$$

или окончательно, подставив значение $e = \frac{4r}{3\pi}$,

$$(9\pi - 16 \cos \varphi) r \ddot{\varphi} + 8(r \dot{\varphi}^2 + g) \sin \varphi = 0.$$

Чтобы убедиться, что использованное здесь решение удобнее, стоит сравнить его с решением другим методом*, которое заняло почти 1,5 страницы и где рассмотрен лишь только частный случай – малые колебания.

§5. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела

Плоскопараллельное движение тела, как известно, складывается из двух: поступательного движения вместе с некоторым полюсом (переносное движение) и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс (относительное движение).

Если полюсом назначить центр масс тела C , то движение его, а значит и поступательное переносное движение, можно определить с помощью теоремы о движении центра масс, составив уравнения (19.2),

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum X_i^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C &= \sum Y_i^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Относительное движение определяется составлением дифференциального уравнения вращения относительно центральной оси (19.22)

$$J_C \ddot{\phi} = \sum M_C \left(\overline{F}_i^{(e)} \right) \quad (19.25)$$

или относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей (19.23):

$$J_{C_v} \ddot{\phi} + K\dot{a} = \sum M_{C_v} \left(\overline{F}_i^{(e)} \right). \quad (19.26)$$

Комбинация любых трех уравнений из этих четырех позволит определить плоскопараллельное движение тела.

Пример 19.10. Стержень качался как маятник, вращаясь в вертикальной плоскости вокруг шарнира O . В момент, когда стержень был в вертикальном положении и угловая скорость его была ω_0 , шарнир разрушился. Определим дальнейшее движение стержня.

Стержень начнет совершать плоскопараллельное движение. На рис. 19.21 показано его промежуточное положение.

Составим дифференциальные уравнения движения (19.24) и (19.25).

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = P, \quad J_C \ddot{\phi} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = g, \quad \ddot{\phi} = 0.$$

Интегрируем их дважды

* Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2т. – М.: Наука, 1985. Т.2 – 282 с.

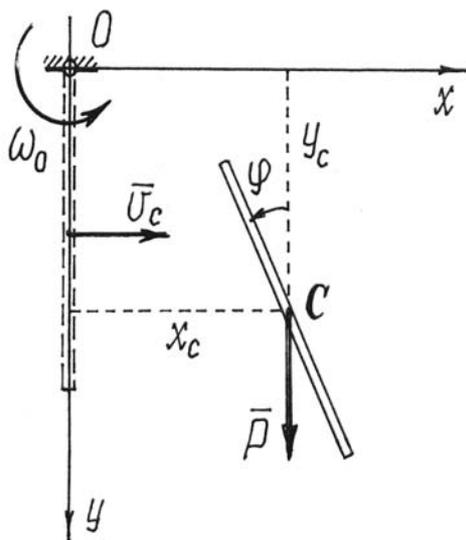


Рис. 19.21

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= C_1, \\ \dot{y}_C &= gt + D_1, \\ \dot{\varphi} &= B_1, \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} x_C &= C_1 t + C_2, \\ y_C &= \frac{1}{2} g t^2 + D_1 t + D_2, \\ \varphi &= B_1 t + B_2. \end{aligned} \right\}$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x_C = 0$,
 $y_C = \frac{l}{2}$, $\dot{x}_C = v_C = \frac{1}{2} l \omega_0$, $\dot{y}_C = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$.

Подставив их в последние шесть уравнений, найдём значения постоянных: $C_1 = \frac{1}{2} l \omega_0$,

$$C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{2} l, \quad B_1 = \omega_0, \quad B_2 = 0.$$

Тогда уравнения плоскопараллельного движения стержня будут

$$x_C = \frac{1}{2} l \omega_0 t; \quad y_C = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} l; \quad \varphi = \omega_0 t.$$

Например, стержень займет горизонтальное положение $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в момент $t = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_0}$, когда центр масс его будет в точке с координатами

$$x_C = \frac{1}{4} \pi l, \quad y_C = \frac{1}{8} \left(\pi^2 \frac{g}{\omega_0^2} + 4l \right).$$

XX. Основы теории колебаний

§1. Основные определения колебательного движения

Колебательным движением материальной системы называется такое ее движение, при котором она через некоторые промежутки времени постоянно возвращается к определенному положению. Нетрудно обнаружить, что большинство окружающих нас систем совершают колебательное движение.

Если время, за которое все точки системы возвращаются к любому определенному положению с одними и теми же скоростями, постоянно и

одинаково, то такое время T называется *периодом колебаний*. А эти колебания – периодическим колебательным движением.

На рис. 20.1 показан пример изменения какой-то обобщенной координаты q при довольно сложном колебательном процессе. А на рис. 20.2 пример более организованных, *периодических колебаний*.

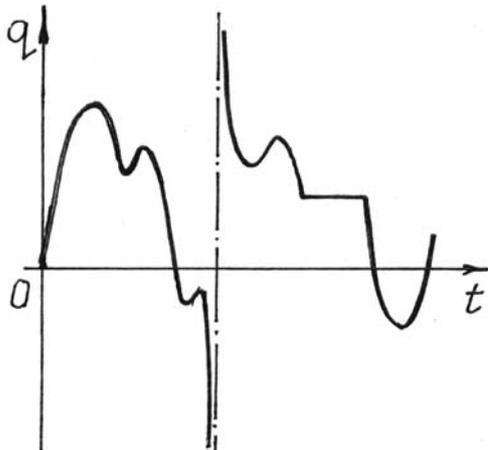


Рис. 20.1

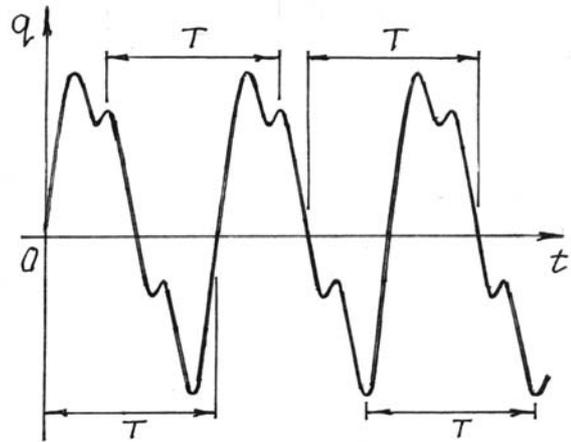


Рис. 20.2

При периодическом процессе значения функции, описывающей движение системы, повторяются через каждый период T , то есть

$$q(t) = q(t + T). \quad (20.1)$$

Если эта функция имеет вид

$$q = a \sin(kt + \beta), \quad (20.2)$$

то такое колебательное движение называется *гармоническим*. График такого движения дан на рис. 20.3.

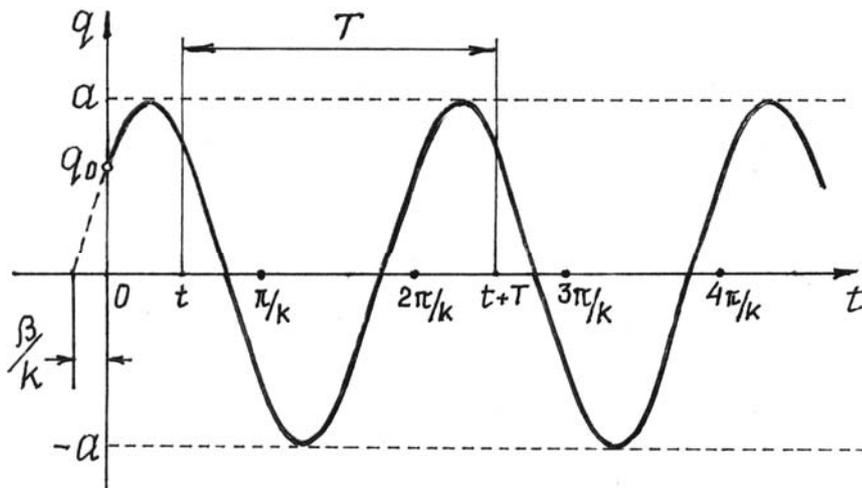


Рис. 20.3

По (20.2) $q_0 = a \sin \beta$ – начальная координата, определяющая положение системы в начале движения (при $t = 0$); a – амплитуда колебаний,

имеет размерность обобщенной координаты; $(kt + \beta)$ – фаза колебаний, β – начальная фаза; k – частота колебаний, с^{-1} .

Период колебаний найдем, используя свойство (20.1):

$$a \sin(kt + \beta) = a \sin[k(t + T) + \beta].$$

Отсюда, так как период синуса равен 2π , $kt + \beta = k(t + T) + \beta - 2\pi$. Значит, период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (20.3)$$

Вообще существует много всяких типов колебаний. Выделим в первую очередь линейные и нелинейные колебания. Названия их определяются видом дифференциальных уравнений, которые описывают колебательное движение материальной системы.

Исследование нелинейных колебаний значительно усложняется, так как нет общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Но если рассматривать малые колебания, такие, при которых координата и скорость изменяются на малую величину, то многие нелинейные уравнения станут линейными и исследование движения значительно упростится.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые, линейные колебания. И, мало того, колебания системы только с одной степенью свободы. Естественно, колебания системы могут совершаться только около устойчивого положения равновесия.

Если система консервативная, то найти положение равновесия и определить устойчивость его можно с помощью потенциальной энергии. В разд. XVIII, §3 установлено, что в положении равновесия выполняется условие

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \text{ и если в положении равновесия } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0, \text{ то равновесие бу-}$$

дет устойчиво.

Договоримся отсчитывать координату от положения равновесия ($q_0 = 0$), а потенциальную энергию там считать равной нулю ($\Pi_0 = 0$). Тогда, по определению малых колебаний, обобщенная координата q всегда будет малой величиной.

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена около положения равновесия

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} \cdot q + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} \cdot q^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_{q=0} \cdot q^3 + \dots$$

Так как $\Pi(0) = 0$ и $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} = 0$, и отбросив члены третьего и выше

порядка малости, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (20.4)$$

где коэффициент $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0$ по условию устойчивости.

Поэтому потенциальная энергия колебательной системы, отсчитываемая от положения устойчивого равновесия, будет всегда положительной. Кинетическую энергию системы при малых колебаниях также можно преобразовать.

Кинетическая энергия системы $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$, а так как радиус-вектор точек

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q) \text{ и } q = q(t), \text{ то } \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}. \text{ Поэтому } T = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 A(q),$$

где $A(q) = \sum m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}\right)^2$. Эту функцию $A(q)$ можно разложить в ряд Мак-

лорена по степеням q около положения равновесия и учесть только первый член: $A(q) = A(0) + \dots$. Остальные члены можно не учитывать, так как после подстановки $A(q)$ в кинетическую энергию T они станут величинами третьего и выше порядка.

Обозначив постоянную $A(0) = a$, получим:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (20.5)$$

Коэффициент a называется коэффициентом инерции. Конечно, $a > 0$, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Замечание. Практически при исследовании конкретных колебательных систем приходится раскладывать в ряд функции, содержащие чаще всего $\sin x$, $\cos x$, e^x . Разложение их с точностью до малых второго порядка известны: $\sin x = x$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

§2. Малые свободные колебания системы

Свободными колебаниями называется колебательное движение системы, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Составим уравнение Лагранжа для консервативной системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Используя (20.4) и (20.5), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний $a\ddot{q} + cq = 0$ или, обозначив $\frac{c}{a} = k^2$,

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (20.6)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами известно

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (20.7)$$

или, используя другие постоянные $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2}$,

$$q = a \sin(kt + \beta). \quad (20.8)$$

Следовательно, малые свободные колебания – гармонические колебания, причем амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями (q и \dot{q} при $t = 0$), а частота колебаний k и период T не зависят от начальных условий, определяются только конструкцией системы. Обычно частоту колебаний находят сравнением полученного дифференциального уравнения с уравнением (20.6).

Пример 20.1. Тело весом P подвешено на нити, перекинутой через блок и прикрепленной к пружине (рис. 20.4). Вес блока G , радиус – r ; жесткость пружины s . Определим период свободных колебаний системы.

Назначим обобщенной координатой смещение z груза по вертикали от положения равновесия, при котором пружина была растянута на величину f . Тогда потенциальная энергия относительно положения равновесия $\Pi = -Pz + \frac{1}{2}c(z+f)^2 - \frac{1}{2}cf^2$. Где $(z+f)$ – полная деформация пружины, а $\frac{1}{2}cf^2$ – потенциальная энергия пружины в положении равновесия, которую вычитаем из потенциальной энергии полностью деформированной пружины. Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{aligned}\Pi &= -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf + \frac{1}{2}cf^2 - \frac{1}{2}cf^2 = \\ &= -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf = (-P + cf)z + \frac{1}{2}cz^2.\end{aligned}$$

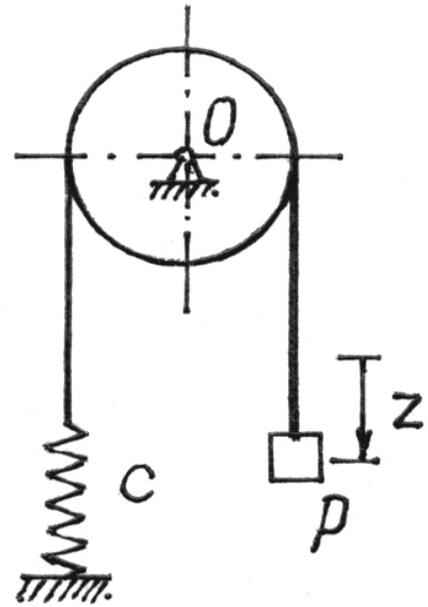


Рис. 20.4

В положении равновесия должно выполняться условие

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (-P + cf + cz)_{z=0} = 0. \quad \text{Отсюда } P = cf, \text{ значит, } \Pi = \frac{1}{2}cz^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \cdot \frac{z^2}{r^2} = \frac{1}{4g} (2P + G) \dot{z}^2.$$

Составив уравнение Лагранжа, получим: $\frac{1}{2g} (2P + G) \ddot{z} + cz = 0$

или $\ddot{z} + \frac{2cg}{2P + G} z = 0$. Сравнивая с формулой (20.6), находим частоту

колебаний $k = \sqrt{\frac{2cg}{2P + G}}$ и затем период $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{2P + G}{2cg}}$.

Пример 20.2. Определим период малых колебаний балочки AB на цилиндрической поверхности (см. пример 18.4).

Потенциальная и кинетическая энергии определены. Разложим их в ряд с точностью до малых величин второго порядка. Для этого достаточно положить $\sin \varphi = \varphi$, а $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Получим $\Pi = mgr(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 - 1) = \frac{1}{2} mgr \varphi^2$.

Кинетическая энергия получится такой, если отбросить член четвертого порядка, содержащий произведение $\varphi^2 \dot{\varphi}^2$: $T = \frac{1}{24} ml^2 \dot{\varphi}^2$.

Составляем уравнение Лагранжа. Определив производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \dot{\varphi}$; $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi}$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr\varphi$, получим уравнение $\frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi} + mgr\varphi = 0$. Приводим его к форме (20.6): $\ddot{\varphi} + 12 \frac{gr}{l^2} \varphi = 0$. Поэтому

частота малых колебаний $k = \sqrt{12 \frac{gr}{l^2}} = 2 \frac{\sqrt{3gr}}{l}$, а период $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gr}}$.

§3. Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению

Известно, что свободные колебания не длятся очень долго. Как правило, они, как говорят, затухают и довольно скоро. Причиной этому является чаще всего сопротивление среды, в которой движутся части колебательной системы.

Обычно считают это сопротивление пропорциональным скорости. Пусть на каждую точку материальной системы действует сила сопротивления $\vec{R}_i = -v_i \vec{v}_i$. Обобщенная сила, соответствующая этим силам:

$$Q' = \frac{1}{\delta q} \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{R}_i \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q} = \sum \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$$

Скорость точек $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}$, так как $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ – сложная функция,

координата $q = q(t)$. Поэтому $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$. Значит, $Q' = \sum \vec{R}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} =$
 $= -\sum v_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = -\sum v_i \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum \frac{1}{2} v_i v_i^2$. Обозначим $\sum \frac{1}{2} v_i v_i^2 = \Phi$.

Тогда обобщенная сила сопротивления $Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$.

Заметим, что по форме эта функция Φ аналогична кинетической энергии T . Поэтому, если разложить ее в ряд Маклорена и учесть члены лишь второго порядка малости, результат получится тоже аналогич-

ным (20.5): $\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$ (коэффициент b также будет положительным). И тогда обобщенная сила сопротивления движению

$$Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b\dot{q}. \quad (20.9)$$

Функция Φ называется диссипативной, или функцией рассеивания энергии системы.

После подстановки в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q'$ получим дифференциальное уравнение $a\ddot{q} + c\dot{q} = -b\dot{q}$ или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \quad (20.10)$$

где $n = \frac{b}{2a}$ – коэффициент сопротивления, $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ – частота свободных колебаний без сопротивления.

Найдем решение уравнения (20.10). Характеристическое уравнение $z^2 + 2nz + k^2 = 0$. Корни его $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ могут быть и комплексными, и вещественными в зависимости от сопротивления, от величины коэффициента n .

Случай малого сопротивления ($n < k$).

Корни получаются комплексными $z_{1,2} = -n \pm i\lambda$, где $\lambda = \sqrt{k^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$. Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) \quad (20.11)$$

или

$$q = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta), \quad (20.12)$$

где постоянные C_1 и C_2 или a и β находятся по начальным условиям.

Сравнивая решение (20.12) с (20.2), делаем вывод, что это будут колебания, но не гармонические, так как амплитуда колебаний, равная ae^{-nt} , непостоянная, уменьшается с течением времени. Поэтому такие колебания и называются *затухающими*.

График таких колебаний дан на рис. 20.5.

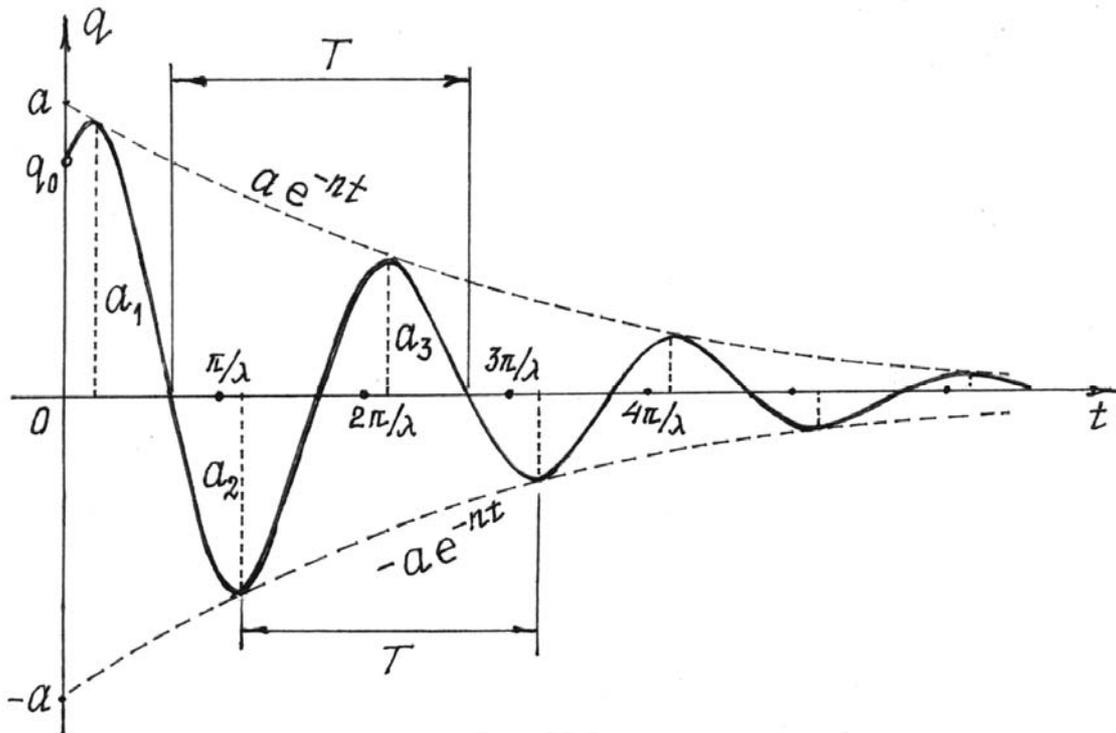


Рис. 20.5

Следует заметить, что колебательный процесс не будет периодическим. Но, так как система проходит через положение равновесия через равное время, все-таки вводят понятие периода $T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$.

Если сравнить этот период колебаний с периодом колебаний системы без сопротивления (20.3), увидим, что сопротивление увеличивает период колебаний и уменьшает их частоту.

Интересна закономерность изменения амплитуды. Найдем отношение соседних амплитуд (через полпериода $T/2$)

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{ae^{-nt}}{ae^{-n(t+T/2)}} = e^{nT/2} = \text{const.}$$

То есть амплитуды уменьшаются по закону геометрической прогрессии, знаменателем которой является величина $e^{nT/2}$. Натуральный логарифм ее, равный $\frac{1}{2}nT$, называется логарифмическим декрементом колебаний.

Конечно, через период амплитуда уменьшится в e^{nT} раз, а через m периодов – в e^{mnT} раз.

б) *Случай большого сопротивления ($n > k$).*

Корни характеристического уравнения получатся вещественными: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. В этом случае, как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (20.10)

$$q = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} \right). \quad (20.13)$$

Решение явно неколебательное, непериодическое.

Графики таких движений показаны на рис. 20.6. Вид движения зависит от начальных условий и величины коэффициента сопротивления n .

в) *Случай равного сопротивления ($n = k$).*

Корни характеристического уравнения получаются равными $z_{1,2} = -n$. Поэтому решение дифференциального уравнения

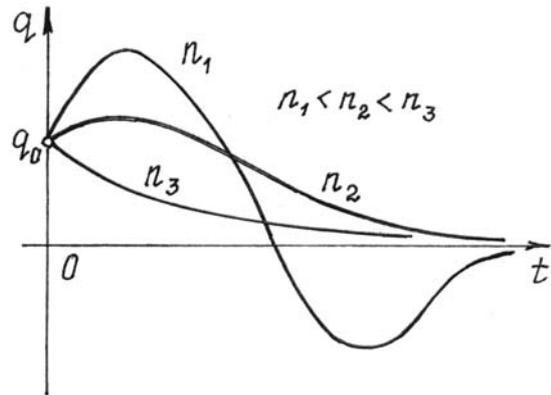


Рис. 20.6

$$q = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (20.14)$$

Движение и в этом случае не будет колебательным.

§4. Вынужденные колебания системы

Если сила, которая вывела систему из положения равновесия, продолжает действовать, то такое колебание не будет свободным, будет вынужденным. И эта сила называется *возмущающей силой*.

Рассмотрим колебательное движение под действием обобщенной возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону $Q = Q_0 \sin(pt + \gamma)$, где Q_0 – максимальная величина возмущающей силы; p – частота изменения силы; γ – начальная фаза изменения силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний получится таким:

$$\ddot{q} + k^2 q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \quad (20.15)$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения. Общее решение уже было получено в §2

(см. формулу (20.7) или (20.8)). Частное решение ищем в виде $q_{\text{ч.н}} = A \sin(pt + \gamma)$. Подставив частное решение в дифференциальное уравнение (20.15), получим $-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + k^2 A \sin(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma)$. Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2}. \quad (20.16)$$

Значит, полное решение уравнения (20.15)

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin(pt + \gamma). \quad (20.17)$$

Так как общее и частное решения совершаются с разными частотами, то вынужденные колебания не будут гармоническими. Но, как нам уже известно, общее решение определяет свободные колебания, которые с течением времени довольно быстро затухают. Поэтому интерес представляют только установившиеся колебания

$$q = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma). \quad (20.18)$$

Отсюда следует, что установившиеся вынужденные колебания будут гармоническими с частотой p , равной частоте возмущающей силы, и что они не зависят от начальных условий. И самое интересное – амплитуда колебаний A зависит от частоты p возмущающей силы. График этой зависимости дан на рис. 20.7.

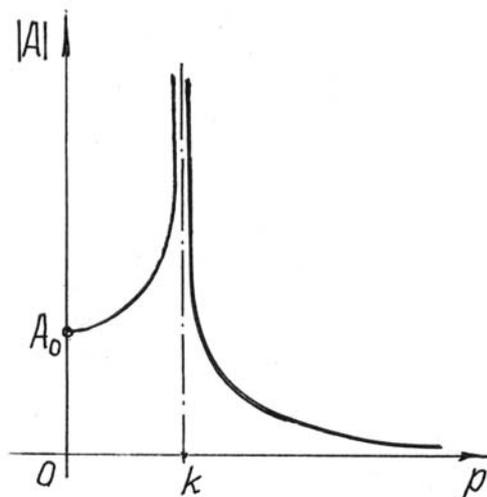


Рис.20.7

Первое, что надо отметить, при $p = k$ (частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний) амплитуда увеличивается до бесконечности. Это явление называется *резонансом*. Как известно из курса высшей математики, при $p = k$ решение (20.17) не будет удовлетворять уравнению (20.15). Частное решение надо искать в другом виде

$$q = Bt \cos(pt + \gamma).$$

Подставив его в уравнение (20.15), получим:

$$-Bps \sin(pt + \gamma) - Bps \sin(pt + \gamma) - Btp^2 \cos(pt + \gamma) + Btp^2 \cos(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma).$$

Отсюда $B = -\frac{Q_0}{2p}$ и частное решение, определяющее вынужденные колебания при резонансе, получится таким:

$$q = -\frac{Q_0}{2p} t \cos(pt + \gamma). \quad (20.19)$$

Видим, что амплитуда колебаний беспредельно равномерно увеличивается (рис. 20.8). Амплитуда не сразу становится бесконечно большой. И даже малая возмущающая сила может раскачать систему до больших амплитуд и вызвать разрушение конструкции.

Интересен еще один случай, при котором частота p возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний, $p \approx k$, но не равна ей.

Воспользуемся решением (20.17), положив для простоты $\gamma = 0$. Пусть в начале движения координата и скорость равнялись нулю (при $t = 0$ $q = 0$ и $\dot{q} = 0$). Подставим эти начальные условия в уравнения $q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin pt$,

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + Ap \cos pt.$$

Получим два уравнения $0 = C_1$ и $0 = C_2 k + Ap$, из которых находим $C_1 = 0$, $C_2 = -A \frac{p}{k}$. Тогда уравнение колебаний $q = -A \left(\frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right)$.

Так как $\frac{p}{k} \approx 1$ и $(k^2 - p^2) = (k - p)(k + p) \approx 2p(k - p)$, то по формуле (20.16)

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \cong \frac{Q_0}{2p(k - p)}.$$

Кроме того, $(\sin kt - \sin pt) = 2 \cos \frac{k+p}{2} t \cdot \sin \frac{k-p}{2} t \approx 2 \cos pt \cdot \sin \frac{k-p}{2} t$.

Уравнение движения получится таким:

$$q = -\frac{Q_0}{p(k - p)} \sin \frac{k-p}{2} t \cdot \cos pt. \quad (20.20)$$

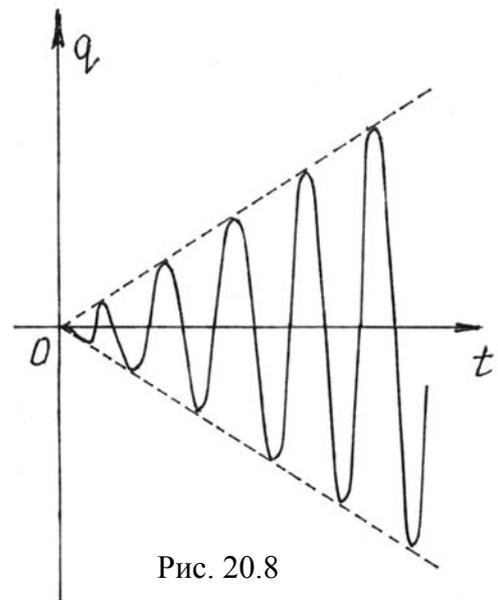


Рис. 20.8

Рассматривая функцию, стоящую перед $\cos pt$, как амплитуду колебаний, замечаем, что она изменяется по гармоническому закону с периодом $T_A = \frac{4\pi}{k-p}$ от нуля до максимального значения $A_{\max} = \frac{Q_0}{p(k-p)}$ (рис. 20.9). Сами колебания совершаются с частотой p и периодом $T_k = \frac{2\pi}{p}$.

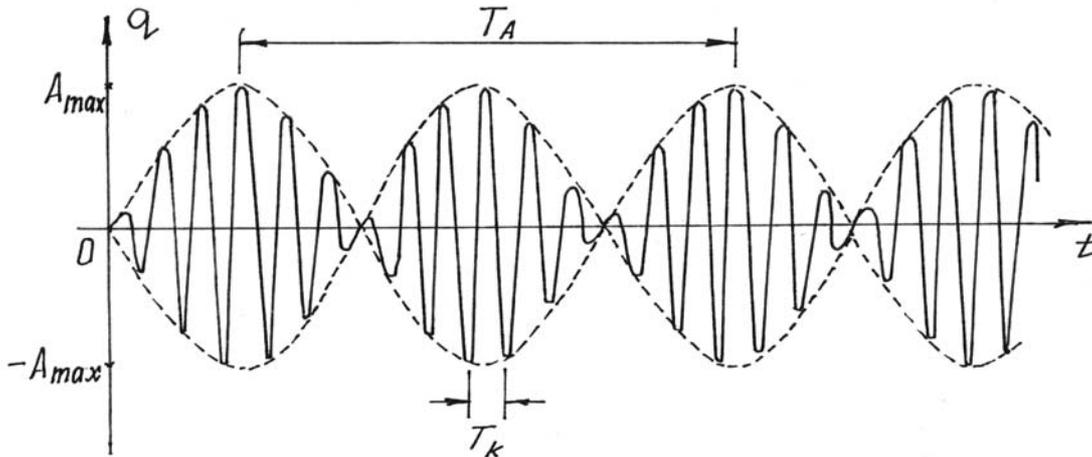


Рис. 20.9

Чем ближе частота возмущающей силы p к частоте k , то есть чем ближе к резонансу, тем больше будет период амплитуды T_A и больше амплитуда A_{\max} . И тем больше будет похож график на рис. 20.9 на график на рис. 20.8, изображающий колебания при резонансе. Эти колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются *биениями*. Такое явление часто встречается, например, в радиотехнике.

Мы исследовали вынужденные колебания под действием возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Но нередко она оказывается более сложной. Приходится использовать специальные математические методы, чтобы получить более-менее точный результат.

Если возмущающая сила периодическая и ее можно разложить в ряд Фурье, то решение может оказаться не очень сложным. Пусть возмущающая сила описывается периодической функцией $Q = Q(t)$ с периодом $T_B = \frac{2\pi}{p}$, p – частота изменения этой функции, и конструкция её позволяет разложить функцию в ряд Фурье $Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin(jpt + \gamma_j)$, где Q_j и γ_j – коэффициенты Фурье, определяемые по специальным формулам.

Частное решение дифференциального уравнения (20.15) получится в виде ряда

$$q = A_0 + \sum_{j=1}^s \frac{Q_j}{k^2 - (jp)^2} \sin(jpt + \gamma_j) = \frac{Q_0}{k^2} + \frac{Q_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma_1) + \frac{Q_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \gamma_2) + \frac{Q_3}{k^2 - (3p)^2} \sin(3pt + \gamma_3) + \dots$$

Количество s членов этого ряда стараются иметь не очень большим, если ряд хорошо сходится.

Решение получается как сумма нескольких синусоид («гармоник») с кратными частотами. Наименьшая частота p называется основной частотой. Интересно, что в полученном решении возможно несколько резонансов, столько, сколько гармоник: при $p = k$, $p = \frac{1}{2}k$, $p = \frac{1}{3}k$ и т.д.

§5. Влияние сопротивления на вынужденные колебания

Если учесть сопротивление среды, пропорциональное скорости, как это было сделано в §3, дифференциальное уравнение колебаний получится таким:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \quad (20.21)$$

Решение его состоит из общего и частного решений. Общее мы уже находили в §3. Например, при малом сопротивлении ($n < k$)

$$q_{0.0} = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta), \quad \text{где } \lambda = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Частное решение будем искать в виде $q_{\text{ч.н.}} = A \sin(pt + \gamma - \varepsilon)$. Чтобы определить коэффициенты A и ε , подставим это решение в уравнение (20.21). Получим

$$\begin{aligned} -Ap^2 \sin(pt + \gamma - \varepsilon) + 2Anp \cos(pt + \gamma - \varepsilon) + k^2 A \sin(pt + \gamma - \varepsilon) = \\ = Q_0 \sin(pt + \gamma - \varepsilon) \cos \varepsilon + Q_0 \sin \varepsilon \cdot \cos(pt + \gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

(правую часть уравнения (20.21) представили как синус суммы двух углов: $\sin[(pt + \gamma - \varepsilon) + \varepsilon]$). Полученное уравнение обратится в тождество, если будут выполнены два условия (сгруппировав члены, содержащие $\sin(pt + \gamma - \varepsilon)$ и $\cos(pt + \gamma - \varepsilon)$):

$$-Ap^2 + Ak^2 = Q_0 \cos \varepsilon \quad \text{и} \quad 2Anp = Q_0 \sin \varepsilon.$$

Из этих уравнений получим

$$A = \frac{Q_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \text{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (20.22)$$

Полное решение уравнения (20.21) будет таким:

$$q = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta) + A \sin(pt + \gamma - \varepsilon). \quad (20.23)$$

Очевидно, за счет сопротивления с течением времени первый член стремится к нулю. Поэтому можно заключить, что установившиеся вынужденные колебания и с учетом сопротивления среды будут гармоническими.

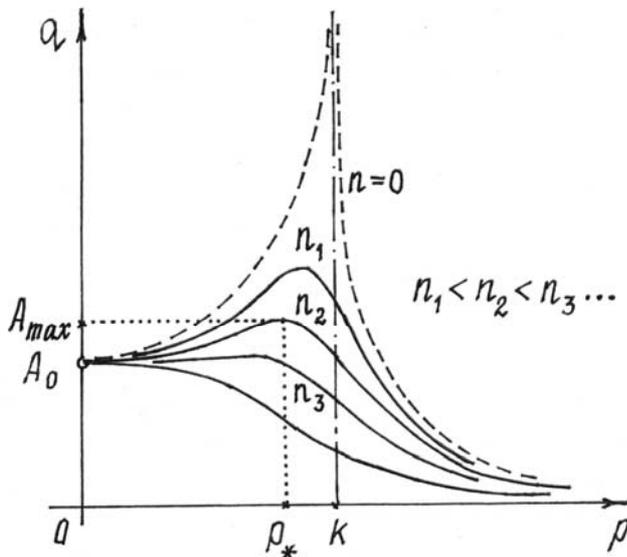


Рис. 20.10

Причем, во-первых, частота колебаний равна частоте изменения возмущающей силы; во-вторых, колебания не зависят от начальных условий и, в-третьих, амплитуда колебаний A зависит от частоты p и от сопротивления среды, характеризующегося коэффициентом n .

График этой зависимости от p и n дан на рис. 20.10. Из графика видно, что при сопротивлении амплитуда колебаний – конечная величина. И максимум амплитуды будет не при $p = k$, а при несколько меньшей частоте p_* . Ее можно оп-

ределить, отыскав максимум амплитуды A или лучше минимум функции $F = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$. Приравняв к нулю производную от этой функции, $\frac{dF}{dp} = 2(k^2 - p^2)(-2p) + 8n^2 p = 0$, найдем эту частоту $p_* = \sqrt{k^2 - 2n^2}$.

И тогда величина максимальной амплитуды, подставив p_* в (20.22),

$$A_{\max} = \frac{Q_0}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

XXI. Удар

§1. Явление удара

Ударом будем называть кратковременное действие на тело некоторой силы \vec{F} . Силы, возникающей, например, при встрече двух массивных тел. Опыт показывает, что взаимодействие их очень кратковременно (время контакта исчисляется тысячными долями секунды), а сила удара довольно велика (в сотни раз превышает вес этих тел). Да и сама сила не постоянна по величине. Поэтому явление удара – сложный процесс, сопровождаю-

щийся к тому же деформацией тел. Точное исследование его требует знания физики твердого тела, законов тепловых процессов, теории упругости и др.

Мы же воспользуемся довольно простыми методами исследования, но которые, как подтверждает практика, достаточно правильно объясняют явление удара. Поскольку сила удара \vec{F} очень велика, а продолжительность его, время τ , мало, при описании процесса удара будем пользоваться не дифференциальными уравнениями движения, а теоремой об изменении количества движения. Потому что измеряемой конечной величиной является не сила удара, а ее импульс $\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt$.

Чтобы сформулировать первые особенности явления удара, рассмотрим сначала действие такой силы на материальную точку.

Пусть к материальной точке M , движущейся под действием обычных сил \vec{F}_i по некоторой траектории (рис. 21.1), в какой-то момент была приложена мгновенная, большая сила \vec{F} . С помощью теоремы об изменении количества движения за время удара τ составляем уравнение $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}$, где \vec{v}_2 и \vec{v}_1 – скорости точки в конце и в начале удара; \vec{S} – импульс мгновенной силы \vec{F} . Импульсами обычных сил, под действием которых точка двигалась, можно пренебречь – за время τ они будут очень малы.

Из уравнения находим изменение скорости за время удара (рис. 21.1)

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{S}/m.$$

Это изменение скорости оказывается конечной величиной.

Дальнейшее движение точки начнется со скоростью \vec{v}_2 и продолжится под действием прежних сил, но по траектории, получившей излом.

Теперь можно сделать несколько выводов.

1. При исследовании явления удара обычные силы можно не учитывать.
2. Так как время τ мало, перемещением точки за время удара можно пренебречь.
3. Единственный результат действия удара – только изменение вектора скорости.

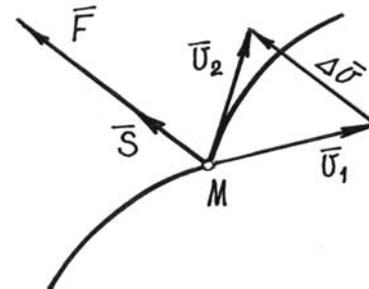


Рис. 21.1

§2. Прямой центральный удар двух тел

Удар называется *прямым и центральным*, если центры масс тел до удара двигались по одной прямой, по оси x , точка встречи их поверхностей оказывается на этой же прямой и общая касательная T к поверхностям будет перпендикулярна оси x (рис. 21.2).

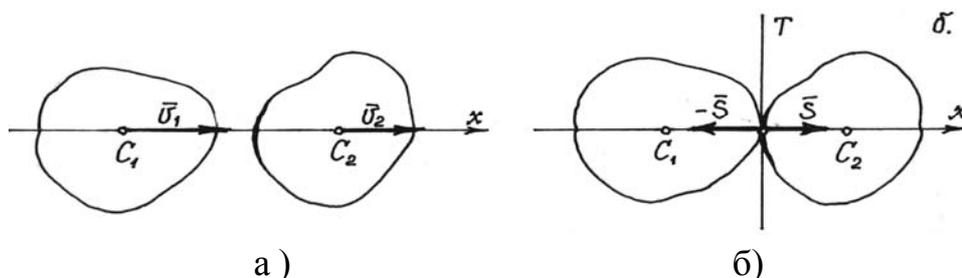


Рис. 21.2

Если касательная T не перпендикулярна этой оси, удар называется *косым*.

Пусть тела двигались поступательно со скоростями их центров масс \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Определим, каковы будут их скорости \vec{u}_1 и \vec{u}_2 после удара. За время удара τ на тела действуют ударные силы \vec{F} , импульсы \vec{S} которых, приложенные в точке касания, показаны на рис. 21.2, б. По теореме об изменении количества движения в проекциях на ось x получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - v_1) &= -S, \\ m_2(u_2 - v_2) &= S, \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

где m_1 и m_2 – массы тел; v_1 , v_2 , u_1 , u_2 – проекции скоростей на ось x .

Конечно, этих двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных (u_1 , u_2 и S). Нужно еще одно, которое, естественно, должно характеризовать изменение физических свойств этих тел в процессе удара, учитывать упругость материала и его диссипативные свойства.

Рассмотрим сначала удар пластичных тел, таких, которые по окончании удара не восстанавливают деформированный объем и продолжают двигаться как одно целое со скоростью u , то есть $u_1 = u_2 = u$. Это и будет недостающее третье уравнение. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S, \\ m_2(u - v_2) &= S. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Решив эти уравнения, получим:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (21.3)$$

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (21.4)$$

Так как величина импульса S должна быть положительной, то для того чтобы произошел удар, требуется выполнение условия $v_1 > v_2$. Нетрудно убедиться, что удар пластичных неупругих тел сопровождается потерей их кинетической энергии.

Кинетическая энергия тел до удара $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$. После удара $T_2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2$. Отсюда $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)(v_1 + u) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)(v_2 + u)$. Или, учитывая (21.2),

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} S (v_1 + u) - \frac{1}{2} S (v_2 + u) = \frac{1}{2} S (v_1 - v_2)$. И, подставив значение импульса S , по (21.4) получим:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (21.5)$$

Эта «потерянная» энергия расходуется на деформацию тел, на нагревание их при ударе (можно убедиться, что после нескольких ударов молотком деформированное тело сильно нагревается).

Заметим, что если одно из тел до удара было неподвижным, например $v_2 = 0$, то потерянная энергия

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$

(так как энергия тел до удара в этом случае была только у первого тела $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$). Таким образом, потерянная энергия, затраченная на деформацию тел, составляет часть энергии ударяющего тела.

Следовательно, при ковке металла, когда желательно, чтобы ΔT было побольше, отношение $\frac{m_1}{m_2}$ нужно сделать как можно меньше, $m_2 \gg m_1$. Поэтому наковальню делают тяжелой, массивной. Аналогично при клепке какой-либо детали молоток надо выбирать полегче. И, наоборот, при забивании гвоздя или сваи в грунт молоток (или бабу копра) надо брать потяжелее, чтобы деформация тел была меньше и большая часть энергии пошла на перемещение тела.

Перейдем теперь к удару упругих тел. Ударный процесс таких тел происходит гораздо сложнее. Под действием ударной силы деформация их сначала увеличивается до тех пор, пока скорости тел не уравниваются. А затем за счет упругости материала начнется восстановление формы. Скорости тел начнут изменяться до тех пор, пока тела не отделятся друг от друга.

Разделим процесс удара на две стадии: от начала удара до того момента, когда скорости их уравниваются и будут равными u ; и от этого момента до конца удара, когда тела разойдутся со скоростями u_1 и u_2 .

Для каждой стадии получим по два уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S_1, \\ m_2(u - v_2) &= S_1; \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - u) &= -S_2, \\ m_2(u_2 - u) &= S_2, \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

где S_1 и S_2 – величины импульсов взаимных реакций тел для первой и второй стадий.

Уравнения (21.6) аналогичны уравнениям (21.2). Решая их, получим:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

В уравнениях (21.7) три неизвестные величины (u_1 , u_2 , S_2). Не хватает одного уравнения, которое опять должно характеризовать физические свойства этих тел.

Положим отношение импульсов $\frac{S_2}{S_1} = k$. Это и будет дополнительное третье уравнение.

Опыт показывает, что величину k можно считать зависящей только от упругих свойств этих тел. (Правда, более точные эксперименты показывают, что есть некоторые зависимости и от их формы). Определяется этот коэффициент экспериментально для каждого конкретного тела. Называется он *коэффициентом восстановления скорости*. Величина его $0 \leq k \leq 1$. У пластичных тел $k = 0$, у абсолютно упругих тел $k = 1$.

Решая теперь уравнения (21.7) и (21.6), получим скорости тел после окончания удара:

$$u_1 = u + k(u - v_1); \quad u_2 = u + k(u - v_2). \quad (21.8)$$

Можно найти, как и при ударе пластичных тел, потерю кинетической энергии при ударе упругих тел. Она получится такой:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2). \quad (21.9)$$

Заметим, что при ударе абсолютно упругих тел ($k = 1$) кинетическая энергия не изменяется, не «теряется» ($\Delta T = 0$, $T_1 = T_2$).

Пример. Металлический шарик падает с высоты h_1 на горизонтальную массивную плиту. После удара он подскакивает на высоту h_2 (рис. 21.3).

В начале удара о плиту проекция скорости шарика на ось x $v_1 = -\sqrt{2gh_1}$, а скорость неподвижной плиты $v_2 = 0$. Считая, что масса плиты $m_2 \gg m_1$, много больше массы шарика, можно положить $u = 0$ и $u_2 = 0$. Тогда по (21.8) $u_1 = -kv_1$. (Теперь, кстати, понятно, почему коэффициент k называется коэффициентом восстановления скорости.)

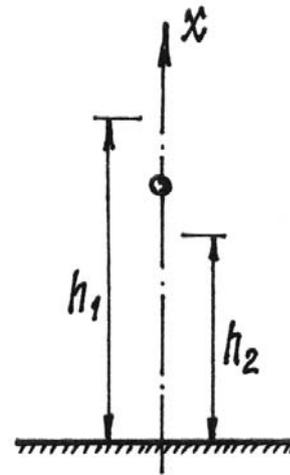


Рис. 21.3

Итак, скорость шарика в конце удара $u_1 = k\sqrt{2gh_1}$ и направлена вверх ($u_1 > 0$). Шарик подскакивает на высоту h_2 , связанную со скоростью формулой $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. Значит, $\sqrt{2gh_2} = k\sqrt{2gh_1}$ и $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$. По последней формуле, кстати, и определяется коэффициент восстановления k для материалов, из которых сделаны шарик и плита.

§3. Удар по вращающемуся телу

При исследовании удара по вращающемуся телу, кроме теоремы об изменении количества движения, приходится использовать и теорему об изменении момента количества движения (XIX, §3). Относительно оси вращения (19.19) её запишем так: $dL_z = \sum M_z(\vec{F})dt$ и после интегрирования за время удара τ получим $L_z^K - L_z^H = \sum \int_0^\tau M_z(\vec{F}_i)dt$ или

$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum \int_0^\tau M_z(\vec{F}_i)dt$, где ω_1 и ω_2 – угловые скорости тела в начале и в конце удара; \vec{F}_i – ударные силы.

Правую часть надо немного преобразовать. Найдем сначала интеграл момента ударной силы относительно неподвижной точки O

$$\int_0^\tau \vec{M}_O(\vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \vec{r}_i \times \int_0^\tau \vec{F}_i dt = \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{M}_O(\vec{S}_i).$$

При этом предполагалось, что за малое время удара τ радиус-вектор \vec{r}_i считался неизменным, постоянным.

Проектируя результат этого векторного равенства на ось вращения z , проходящую через точку O , получим $\int_0^\tau M_z(\vec{F}_i) dt = M_z(\vec{S}_i)$, то есть интеграл равен моменту вектора импульса ударной силы относительно оси вращения. Теорема о моменте количества движения в преобразованном виде запишется теперь так:

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_z(\vec{S}_i). \quad (21.10)$$

В качестве примера рассмотрим удар вращающегося тела о неподвижную преграду. Тело, вращаясь вокруг горизонтальной оси O , ударяется о преграду A (рис. 21.4). Определим ударные импульсы сил, возникающих в подшипниках на оси, \vec{S}_x и \vec{S}_y .

По теореме об изменении количества движения $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i$ в проекциях на оси x и y получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} mv_1 - mu_1 &= S + S_x, \\ 0 &= S_y, \end{aligned} \right\}$$

где скорости центра масс C в начале и конце удара: $v_1 = a\omega_1$, $u_1 = a\omega_2$.

Поэтому первое уравнение станет таким: $ma(\omega_2 - \omega_1) = S + S_x$.

Третье уравнение по формуле (21.10) получится в виде $J_z(\omega_2 - \omega_1) = Sl$,

из которого находим $S = \frac{J_z}{l}(\omega_2 - \omega_1)$.

И так как коэффициент восстановления

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

то $S = -\frac{J_z}{l}(1-k)\omega_1$ (в нашем примере

$\omega_1 < 0$, поэтому ударный импульс $S > 0$, направлен так, как показано на рис. 21.4).

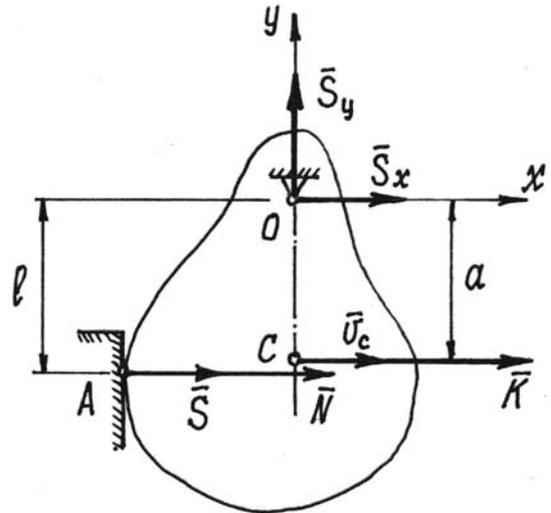


Рис. 21.4

Находим импульсы реакции оси: $S_y = 0$, $S_x = ma(\omega_2 - \omega_1) - S = -ma(1-k)\omega_1 + \frac{J_z}{l}(1-k)\omega_1 = \left(\frac{J_z}{l} - ma\right)(1-k)\omega_1$. Обязательно надо обра-

тить внимание на то, что при $l = \frac{J_z}{ma} = l_{уд}$ ударные импульсы в подшипниках оси будут равны нулю.

Место, точка удара, расположенная на этом расстоянии $l_{уд}$ от оси вращения, называется *центром удара*. При ударе по телу в этом месте ударные силы в подшипниках не возникают. Кстати, заметим, что центр удара совпадает с точкой, где приложены равнодействующая сил инерции (16.1) и вектор количества движения (см. формулу (19.14a)).

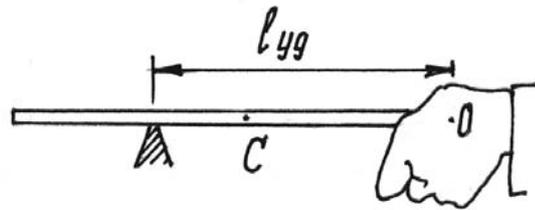


Рис. 21.5

Вспомним, что при ударе длинной палкой по неподвижному предмету мы нередко испытывали рукой неприятный ударный импульс, как говорят «отбивали руку». Нетрудно найти в этом случае центр удара – место, которым следует ударить, чтобы не почувствовать это неприятное ощущение (рис. 21.5).

Так как $J_o = \frac{1}{3}ml^2$ (l – длина палки) и $a = OC = 0,5l$, то $l_{уд} = \frac{ml^2}{3 \cdot m \cdot 0,5l} = \frac{2}{3}l$.

Следовательно, центр удара находится на расстоянии трети длины от конца палки. Понятие центра удара учитывают при создании различных ударных механизмов и других конструкций, где встречаются ударные процессы.

ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ «ДИНАМИКА»

Д – 1

Вагон поезда с прозрачной боковой стенкой движется с постоянной скоростью по прямой линии. Какие траектории предмета, упавшего с верхней точки, увидят пассажир, сидящий в вагоне, и человек, стоящий на перроне?

Д – 2

Водитель автомобиля нажал на педаль тормоза. А сила инерции прижала его к спинке сидения. Почему?

Д – 3

Какие берега рек, текущих по меридиану в северном и южном полушариях Земли, круче?

Д – 4

Чему равен момент инерции однородного цилиндра относительно оси, совпадающей с образующей цилиндра?

Д – 5

Где потенциальная энергия тела больше: на полу или на столе?

Д – 6

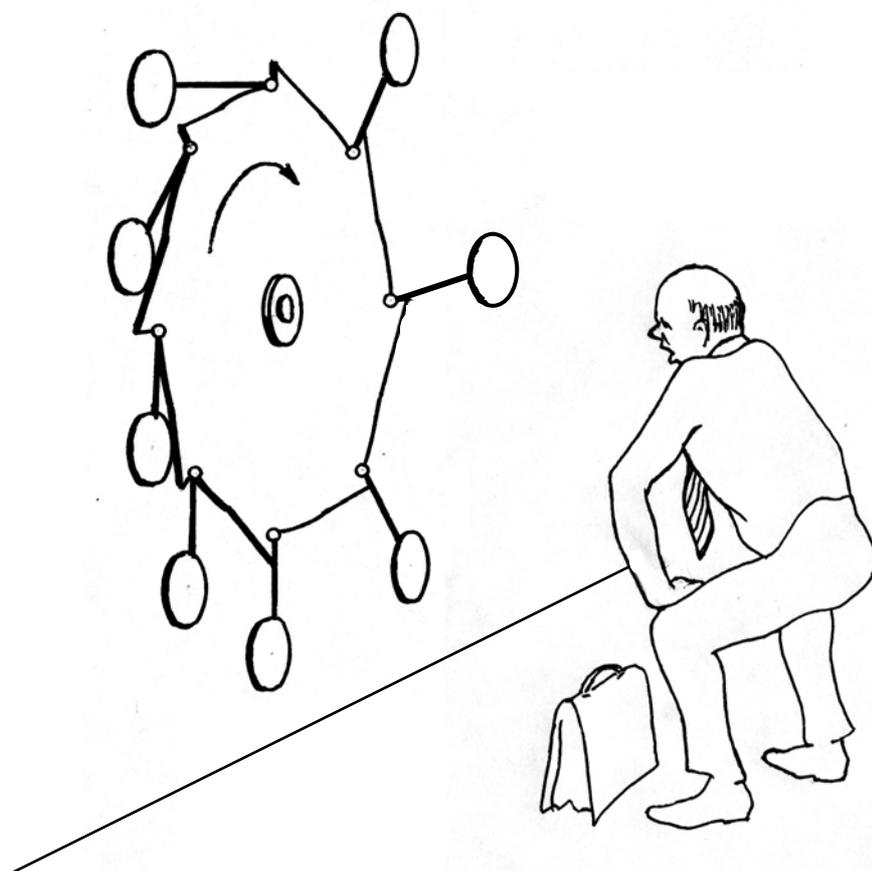
Как изменится скорость центра масс системы, если увеличится её кинетическая энергия за счет вращения отдельных частей этой системы?

Д – 7

Где находится линия действия равнодействующей сил инерции точек шара радиусом r , катящегося по прямой?

Ответы на тесты на с. 232.

БЕСЕДЫ О ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ



БЕСЕДА ПЕРВАЯ «ЛЕТАЮЩИЙ БУБЛИК»

В дверях кафедры показалась рыжая голова Алексея Игнатъева, студента II курса мехфака.

Все, кто был на кафедре, лукаво улыбнулись, а Леднёв, как всегда, с ехидцей, произнёс: «Держись, Степаныч, не бойсь!».

- Николай Степанович, можно с вами поговорить?

- Ну что с тобой поделаешь, проходи, садись. Что тебя опять беспокоит?

Алексей подвинул стул, сел, разложил на столе листки с какими-то расчётами.

- Вот вы, Николай Степанович, на лекции доказывали, что, как следует из теоремы о движении центра масс, внутренние силы не могут заставить тело двигаться. Приводили в пример какие-то машины Дина. Который якобы доказывал, что его машины могут двигаться в пространстве за счёт вращения эксцентриков, создающих внутренние силы инерции ...

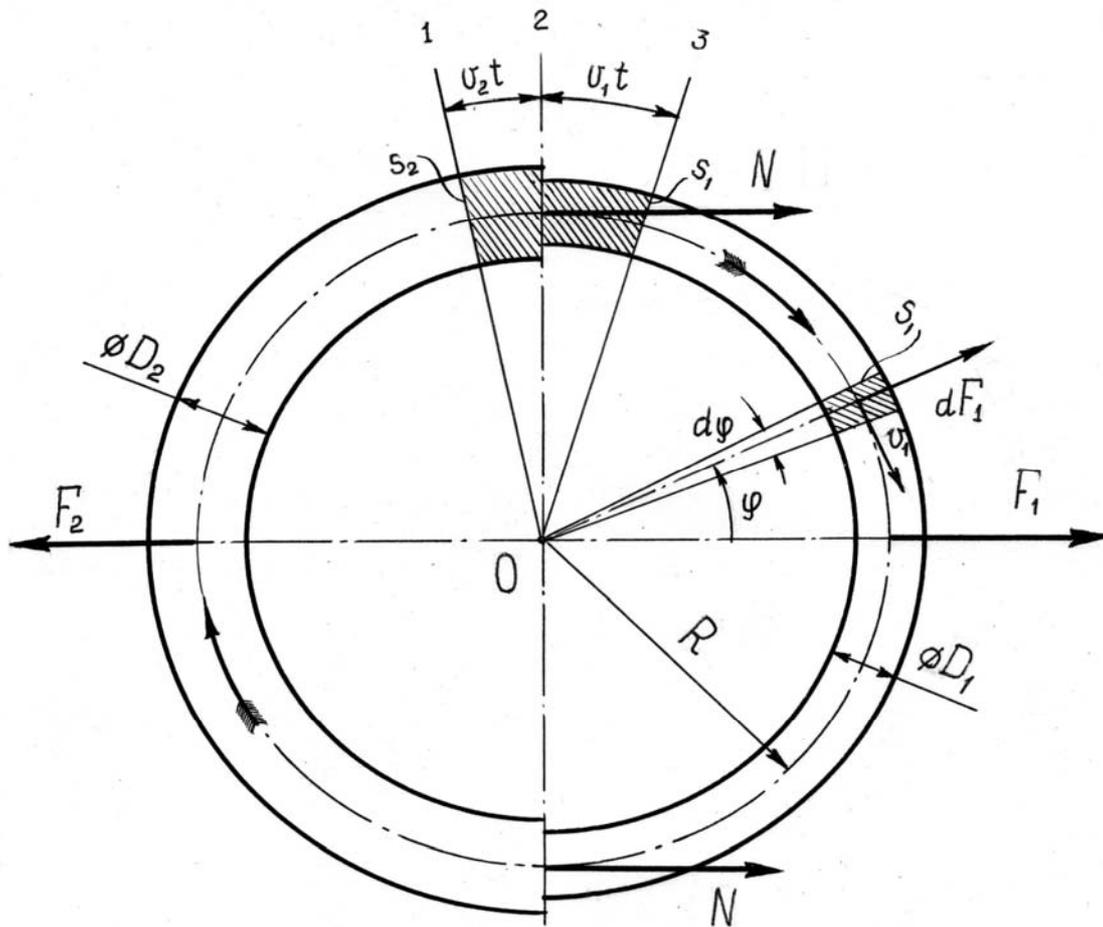
- Конечно, Алёша, это чепуха. Хотя, вообще-то, не надо забывать, что внутренние силы могут вызвать появление внешних сил, которые и заставят тело или конструкцию, целую машину, перемещаться, например, по неподвижной поверхности. Возьмём автомобиль. Давление газа на днища поршней в цилиндрах двигателя – внутренние силы. Но через посредство трансмиссии они вызывают появление сил трения от дороги, действующие на колёса. Это уже внешние силы. Они и будут создавать силы,двигающие автомобиль. Но, конечно, в космосе или просто на гладкой поверхности этих сил трения не будет. И, как бы быстро колёса не вращались, автомобиль и с места не стронется.

- Вот-вот, - перебил Алексей, - а я хочу доказать... и на простой конструкции, что и внутренние силы могут вызвать движение тела. Даже по абсолютно гладкой поверхности. Смотрите...

Алексей показал листок, на котором изображено что-то вроде бублика – кольцо, половинки, которого были трубками разного диаметра (см. рисунок).

- Внутри находится мотор, который гонит жидкость по этому кольцу. В левой половинке, где диаметр больше, скорость жидкости – v_2 , в правой – v_1 . Конечно, v_1 больше чем v_2 , так как по закону непрерывности струи, количество жидкости, протекающей в сечениях за секунду, должно быть одинаково: $S_1 v_1 = S_2 v_2$ или $0,25 \pi D_1^2 v_1 = 0,25 \pi D_2^2 v_2$, то есть $v_2 = (D_1^2 / D_2^2) v_1$.

- Так, интересно... Ты, оказывается, и в физике, гидродинамике, разбираешься, молодец. И что же получается? Силы инерции в этих половинках окажутся разными? Верно?



- Ну, да... Смотрите. Возьмём в правой трубке малую часть жидкости объёмом $dV = S_1 R d\varphi$. На неё действует центробежная сила инерции

$$dF_1 = dm \frac{v_1^2}{R} = S_1 R d\varphi \rho \frac{v_1^2}{R} = S_1 \rho v_1^2 d\varphi. \text{ Здесь } \rho \text{ – плотность жидкости.}$$

Равнодействующую сил инерции частиц всего объёма жидкости в правой трубке найдём как определённый интеграл для φ от $-\pi/2$ до $+\pi/2$:
 $F_1 = \int S_1 \rho v_1^2 \cos\varphi d\varphi.$

- Правильно, Алексей. Полукольцо имеет ось симметрии, поэтому составляющие сил инерции, перпендикулярные этой оси, будут уравниваться. И чему же равна эта сила? Давай без подробностей.

- Она будет равна $F_1 = 2 S_1 \rho v_1^2$.

- Так. А сила, действующая на левую, более толстую половинку кольца, наверное, получится аналогичной: $F_2 = 2 S_2 \rho v_2^2$? Верно?

- Да, да! А разность между ними будет равна $F = F_1 - F_2 = 2 \rho (S_1 v_1^2 - S_2 v_2^2)$. И, подставив значения площадей сечений S_1 и S_2 и зависимости между скоростями, получим:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \pi \rho D_1^2 \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right) v_1^2.$$

А так как $D_2 > D_1$, то $F_1 > F_2$, силы не уравновешиваются и это кольцо будет двигаться поступательно под действием внутренних сил! Здорово!

- Гениально! Ты уверен, что ничего не забыл, что всё учёл?

- Конечно! Я даже обратил внимание, что, чем больше диаметр толстой половины, тем больше будет эта сила F .

- Всё это так... Но почему ты не веришь законам механики? Я о тебе был лучшего мнения. Ты, Алексей, просто забыл учесть силы, действующие на трубки в местах их соединения. Давай вернёмся к твоему чертежу. Рассмотрим верхнее сочленение. Выделим малый объём жидкости между сечениями 1 и 2. За время t он перейдёт в правую трубку и займёт положение, ограниченное сечениями 2 и 3.

Количество движения этого объёма жидкости в первом положении $K_1 = mv_2 = 0,25 \pi D_2^2 t v_2 \rho v_2 = 0,25 \pi D_2^2 \rho v_2^2 t$; во втором положении этого объёма, в трубке малого сечения, $K_2 = mv_1 = 0,25 \pi D_1^2 \rho v_1^2 t$.

По теореме об изменении количества движения в проекции на ось $K_2 - K_1 = Nt$, где N – давление на жидкость в этом сочленении со стороны трубки. Значит, $0,25\pi\rho (D_1^2 v_1^2 - D_2^2 v_2^2)t = Nt$. Или $N = 0,25\pi\rho D_1^2 \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right) v_1^2$,

а вектор его направлен вправо. Соответственно реакция жидкости на трубку будет направлена в противоположную сторону, влево. То есть жидкость, как бы упираясь в левую половинку «бублика», продавливается в более тонкую трубку.

Если таким же образом рассмотреть движение жидкости в нижнем сочленении, получим там давление N на жидкость такой же величины и направленным также вправо. В этом месте сила N будет придерживать жидкость, заставит её уменьшить скорость. А реакция жидкости на трубку опять будет направлена влево. Сложив эти две силы, получим

$$2N = \frac{1}{2} \pi \rho D_1^2 \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right) v_1^2 = F.$$

То есть они будут уравнивать найденную выше силу инерции. Бублик останется в равновесии!

- Ну, Николай Степанович, опять вы разочаровали меня... Я-то надеялся, если не на открытие в науке, то хотя бы на ценное изобретение... Шучу, конечно...

- Увы, Алёша, к сожалению твоему, все законы механики точны и не оставляют места чему-то противоестественному. А вообще-то ты молодец, - сказал Николай Степанович, прощаясь. - Сомневаться – это хорошо. В конце концов, ты найдёшь какую-нибудь интересную тонкость в науке и используешь её для большого дела, открытия.

БЕСЕДА ВТОРАЯ «ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Николай Степанович шёл по коридору после лекции перепачканный мелом. Хотелось поскорее добраться до кафедры и привести себя в порядок. Но студенты шли потоком во всех направлениях. Некоторые здоровались, уступали дорогу, а большинство не обращало на него ну никакого внимания – шумели, толкали словно незнакомого, постороннего, хотя совсем недавно слушали его лекции, сдавали экзамены и зачёты. А некоторые даже несколько раз.

Николай Степанович даже обрадовался, увидев Алексея: наверняка сейчас что-нибудь спросит, но хоть проведёт через эту неуправляемую массу толкающихся тел.

- Николай Степанович! Здравствуйте, а я как раз к вам шёл. Хотел маленький вопросик задать.

- Знаю я твой «маленький вопросик»! Ты специалист по таким «вопросикам» ... Лучше проводи меня до кафедры через эту толпу жаждущих знаний ...

Вымыв руки и отряхнув мел с рукавов, Николай Степанович посадил рядом Алексея: « - Ну, что у тебя?»

- Вот мы с ребятами недавно спорили и не смогли объяснить, почему аптекарские весы при равновесии устанавливаются горизонтально. Ведь плечи одинаковых сил тяжести чаш с гирями и грузом всегда равны, значит, равновесие должно быть не только в горизонтальном положении.

- А! Этот вопрос частенько возникает. И не только у вас, студентов. Даже преподаватели не сразу догадываются в чём дело. А ведь всё очень просто. Вы обратили внимание на то, что точки, где подвешены чаши весов, и точка, вокруг которой вращается рычаг, не расположены на одной прямой? Вот посмотри на рис. 2.1, а. В положении равновесия, когда рычаг AB горизонтален, плечи сил одинаковы, равны $AC = CB = b$. Если же рычаг

повернуть на угол φ (он займёт положение, изображенное штриховыми линиями), плечи окажутся разными, обозначая $OC = a$:

$$h_1 = b \cos \varphi - a \sin \varphi ,$$

$$h_2 = b \cos \varphi + a \sin \varphi .$$

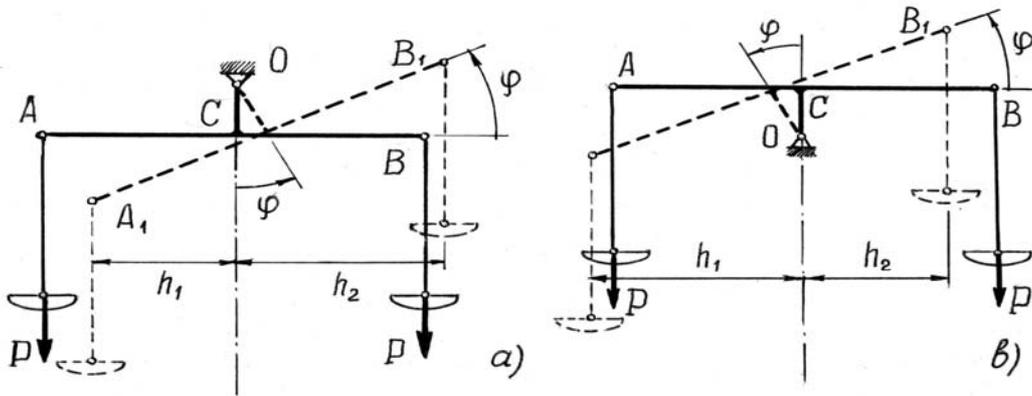


Рис. 2.1

Плечо h_1 будет меньше h_2 . И моменты сил станут не равными. Правая чаша весов B_1 потянет рычаг вниз, угол φ окажется по другую сторону горизонтали, плечо h_1 станет больше h_2 . Вращение начнётся в другую сторону. После нескольких колебаний рычаг практически при наличии сил трения займёт горизонтальное положение

Обрати внимание, Алёша, если шарнир O находится ниже прямой AB и рычаг вывести из горизонтального положения, то левое плечо h_1 будет больше h_2

$$h_1 = b \cos \varphi + a \sin \varphi ,$$

$$h_2 = b \cos \varphi - a \sin \varphi$$

и левая чаша весов A_1 потянет рычаг вниз, против часовой стрелки. Угол φ станет увеличиваться ещё больше и ни о каком равновесии говорить не придётся.

- Теперь понятно, - сказал Алексей, - оказывается, действительно, всё довольно просто.

- Ты, Алёша, затронул очень интересный и очень важный вопрос - об устойчивости положения равновесия твёрдого тела. Вот в первом рассмотренном нами случае равновесие весов было устойчиво: если рычаг вывести из горизонтального положения, он вновь вернётся в первоначальное положение. Во втором случае, если отклонить рычаг от такого же равновесного горизонтального положения даже на очень малый угол, он уже никогда не вернётся в горизонтальное положение, угол будет увеличиваться. Равновесие окажется неустойчивым.

К сожалению, в нынешних учебниках по теоретической механике, да и вообще в прикладной механике, почему-то никто не рассматривает этот очень важный для практики вопрос.

Если хочешь, Алёша, приходи к нам на кафедру в следующий четверг на методический семинар. Там мы об этом будем говорить.

- Спасибо, Николай Степанович, я приду и, если можно, приведу ещё двоих...

- Приходите.

*Сообщение Николая Степановича на методическом семинаре
кафедры теоретической и прикладной механики*

Как следует из курса теоретической механики, твёрдое тело будет неподвижным, в состоянии покоя или равновесия, если выполняются два условия: главный вектор сил, приложенных к телу (векторная сумма сил), равен нулю, $\vec{R}' = \sum \vec{F}_i = 0$, и главный момент сил (векторная сумма моментов сил относительно любой точки) тоже равен нулю, $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0$.

Что произойдёт с этим телом, если в некоторый момент оно изменит своё положение: повернётся на малый угол или переместится в другое близкое место? Вернётся оно в первоначальное положение или равновесие нарушится, и тело начнёт удаляться от положения равновесия? То есть устойчиво было равновесие тела или неустойчиво?

Предполагая время выхода тела из равновесного состояния достаточно малым, можно считать, что точки приложения сил к телу и направление векторов сил относительно неподвижной системы не изменились. Естественно, главный вектор \vec{R}' останется прежним, равным нулю. Но главный момент \vec{M}_O изменится, так как плечи сил будут другими, станет не равным нулю. Тело начнёт вращаться под действием появившейся пары сил.

Если эта пара будет стремиться вернуть тело в прежнее равновесное состояние, равновесие считается устойчивым. Если же она будет направлена в сторону, в которую началось вращение, и тем самым будет удалять тело от первоначального положения, то такое равновесие тела следует считать – неустойчивым.

В этом легко убедиться, рассмотрев, например, равновесие тела под действием двух сил. Такие силы, конечно, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Но они могут оказывать на тело разное действие в зависимости от взаимного направления: либо будут сжимать тело, либо растягивать. В первом случае, при сжатии, равновесие будет неустойчивым; во втором, при растяжении, устойчивым. Это довольно очевидно, достаточно повернуть тело на малый угол в любом направлении.

Итак. Об устойчивости равновесия твёрдого тела можно судить лишь по поведению главного момента сил, приложенных к телу.

Пусть тело, находящееся в равновесии, повернулось вокруг некоторой оси z , перпендикулярной плоскости чертежа, на малый угол $\Delta\varphi$, например, против часовой стрелки (рис. 2.2).

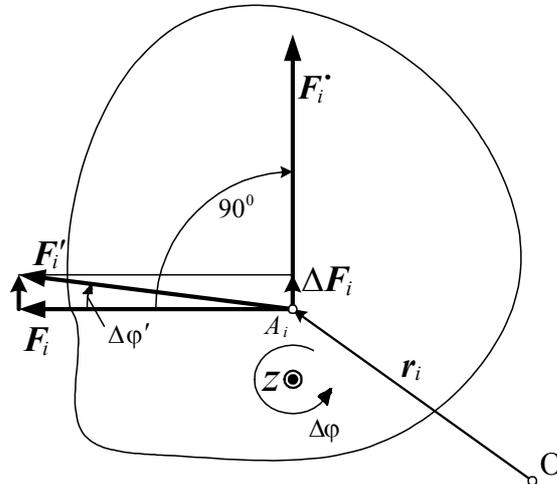


Рис. 2.2

Только в дальнейшем для удобства математического анализа положим, что не тело, а силы повернулись вокруг точек приложения на одинаковые углы $\Delta\varphi'$, равные $\Delta\varphi$, но в противоположном направлении.

На рисунке показана только одна из всех сил, сила \vec{F}_i . Её повернули вокруг точки приложения A_i и она заняла положение \vec{F}_i' , изменившись на вектор $\Delta\vec{F}_i$ такой, что $\vec{F}_i' = \vec{F}_i + \Delta\vec{F}_i$. Изменение силы при малом угле $\Delta\varphi'$ можно считать по модулю равным $\Delta F_i = F_i \Delta\varphi'$ и направленным перпендикулярно \vec{F}_i в сторону поворота силы.

Найдём теперь сумму моментов повернутых сил \vec{F}_i' относительно некоторой точки O , то есть момент $\vec{M}_{вр}$ соответствующей пары сил:

$$\vec{M}_{вр} = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_i') = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i') = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \Sigma(\vec{r}_i \times \Delta\vec{F}_i) = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \Sigma \vec{M}_O(\Delta\vec{F}_i).$$

Но первая сумма здесь – есть главный момент заданных сил. Она равна нулю по условию равновесия. Значит момент вращающей пары $\vec{M}_{вр} = \Sigma \vec{M}_O(\Delta\vec{F}_i)$ равен лишь сумме моментов добавленных сил $\Delta\vec{F}_i$.

Повернём теперь заданные силы \vec{F}_i вокруг точек приложения по направлению $\Delta\varphi'$ на угол 90° (см. рис. 2.2). Они займут положения \vec{F}_i^\bullet , совпадающие с $\Delta\vec{F}_i$. Поэтому можно написать: $\Delta F_i = F_i^* \cdot \Delta\varphi'$. Тогда момент вращающей пары

$$\vec{M}_{\text{вр}} = \Sigma(\vec{r}_i \times \Delta\vec{F}_i) = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^\bullet \Delta\varphi') = \Delta\varphi' \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^\bullet) = \Delta\varphi' \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_i^\bullet).$$

Если эта пара, определяемая суммой моментов повернутых на 90° сил стремится повернуть тело в начальное, равновесное, положение, то есть будет направлена по стрелке угла $\Delta\varphi'$, то равновесие тела следует считать устойчивым. Если в противоположную сторону – неустойчивым.

Теперь можно сформулировать теорему, правило определения устойчивости равновесия твёрдого тела.

«Нужно заданные силы повернуть на 90° вокруг точек приложения, вокруг параллельных осей, в каком-нибудь направлении и определить сумму моментов повернутых сил относительно какой-либо точки, то есть найти момент соответствующей пары $M_{\text{вр}}$.

Если эта пара будет стремиться повернуть тело в том же направлении, в котором повернуты силы, то равновесие тела устойчиво.

Если в противоположном направлении или при $M_{\text{вр}} = 0$, равновесие – неустойчиво»

Замечания.

1. Если на тело действуют силы произвольно расположенные, то следует проверить устойчивость равновесия при повороте вокруг трёх взаимно перпендикулярных осей. Предварительно надо разложить силы на составляющие, параллельные этим осям.

2. Конечно, устойчивость равновесия имеет смысл исследовать только у тел, имеющих степени свободы.

Небольшой пример. Прямоугольное тело находится в равновесии под действием сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ($F_1 = F_2 = F$) (рис. 2.3). Реакции неподвижного шарнира O : $X_0 = 0$, $Y_0 = 2F$.

Проверим устойчивость равновесия тела. Повернём все силы на 90° против часовой стрелки. Найдём вращающий момент относительно шарнира O : $M_O = -F_1^* h + F_2^* (b - h) = F(b - 2h)$.

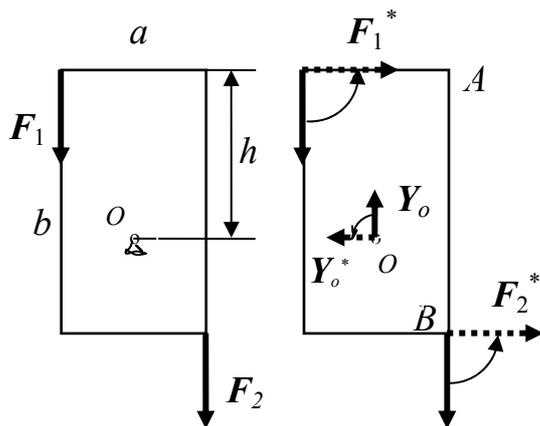


Рис. 2.3

Чтобы равновесие было устойчивым, момент M_O должен быть положительным, направленным против часовой стрелки, то есть чтобы выполнялось условие $h < 0,5 b$.

Аналогичный результат получим, конечно, определив момент сил и относительно, например, точки B :

$$M_B = -F_1^* \cdot b + Y_O \cdot (b - h) = -F \cdot b + 2F(b - h) = F(b - 2h).$$

Таким же способом можно было определить устойчивость равновесия и аптечных весов, рассмотренных на рис. 2.1, *a* и 2.1, *б*.

В заключение следует заметить, что в основу данной теоремы об устойчивости равновесия твёрдого тела положена идея, предложенная ещё в сороковых годах прошлого века доцентом Ленинградского инженерно-строительного института В.С. Костроминым.

БЕСЕДА ТРЕТЬЯ «МГНОВЕННО ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА»

- Николай Степанович, со мной в комнате живёт студент первого курса. Ему дали на дом задачу по статике, а он никак не может её решить. Самое смешное - и я не могу. Хвастался, что неплохо разбираюсь в теоретической механике и вот попал впросак. Чувствую, что задача какая-то странная. А в чём дело - не пойму.

- Бывает такое и нередко. Ну-ка, покажи задачу.

Алексей вытащил из папки лист, на котором нарисована схема пространственной конструкции, квадратная плита весом P на шести стержнях (рис. 3.1), и решение задачи.

Николай Степанович посмотрел, усмехнулся и сказал:

- Знакомая задача. Даже знаю в каком сборнике её взяли [9, с.42]. Там, кстати, ещё есть подобные интересные задачи. Ну и что же у вас получилось?

- Да вот результат: $S_1 + S_3 = -0,5 P$ и $S_5 + S_6 = -0,5 P$. А чему они равны - не известно. Судя по ответу, все эти силы равны и равны $0,25 P$. Но ведь тут неопределённость получается. Может быть и $S_1 = 0$, а $S_3 = -0,5 P$ или $S_1 = -0,2 P$, а $S_3 = -0,3 P$ или даже $S_1 = P$, а $S_3 = -1,5 P$.

А ведь задача-то статически определяемая, число неизвестных равно числу возможных уравнений равновесия!

- Ну что ж, Алёша, ты открыл одну очень интересную страницу в теоретической механике, про которую забывают даже некоторые авторы задач и, что ещё опаснее, даже разработчики строительных конструкций. Не мудрено, что такие конструкции разрушаются. Вспомни, как развалился недавно аквапарк в Москве. Хорошо, что аналогичным конструкциям в строительной механике уделяется хоть немного внимания. А в курсе теоретической механики, к сожалению, об этом вообще ничего не говорится.

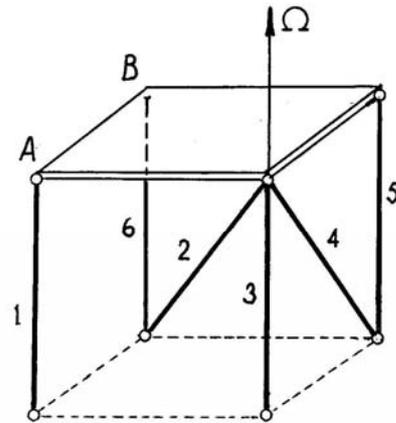


Рис.3.1

Дело в том, Алёша, что кроме статически определяемых и статически неопределяемых систем, о которых говорится в теоретической механике, существуют ещё и *мгновенно изменяемые* системы, конструкции.

Это такие системы, отдельные части которых имеют возможность совершать малые перемещения, допускаемые связями. С такими перемещениями ты, Алёша, знаком. О них подробно говорилось в разделе динамики. Это – возможные перемещения.

- Конечно, вспоминаю. Был такой принцип возможных перемещений.

- Правильно. Вспомни ещё, что для плоской конструкции возможные перемещения точек определяются при повороте на малый угол вокруг мгновенного центра скоростей C_v . А для пространственной конструкции – при повороте вокруг мгновенной оси вращения Ω .

Если мгновенно изменяемая система состоит из нескольких тел, то у каждого тела должен быть свой мгновенный центр скоростей, но возможные перемещения точек контакта этих тел должны быть совместимы. Вот несколько примеров таких мгновенно изменяемых систем (рис. 3.2).

На схемах 3.2а и 3.2, б мгновенная изменяемость очевидна: все точки тел ACB имеют возможные перемещения, определяемые мгновенными центрами скоростей. Да и у схемы 3.2, в всё понятно: возможные перемещения определяются поворотом тел вокруг шарниров A и D и пропорциональны. А у схемы 3.2, д легко обнаружить совместимость возможных перемещений муфты M и соответствующей точки у стержня AO_1 .

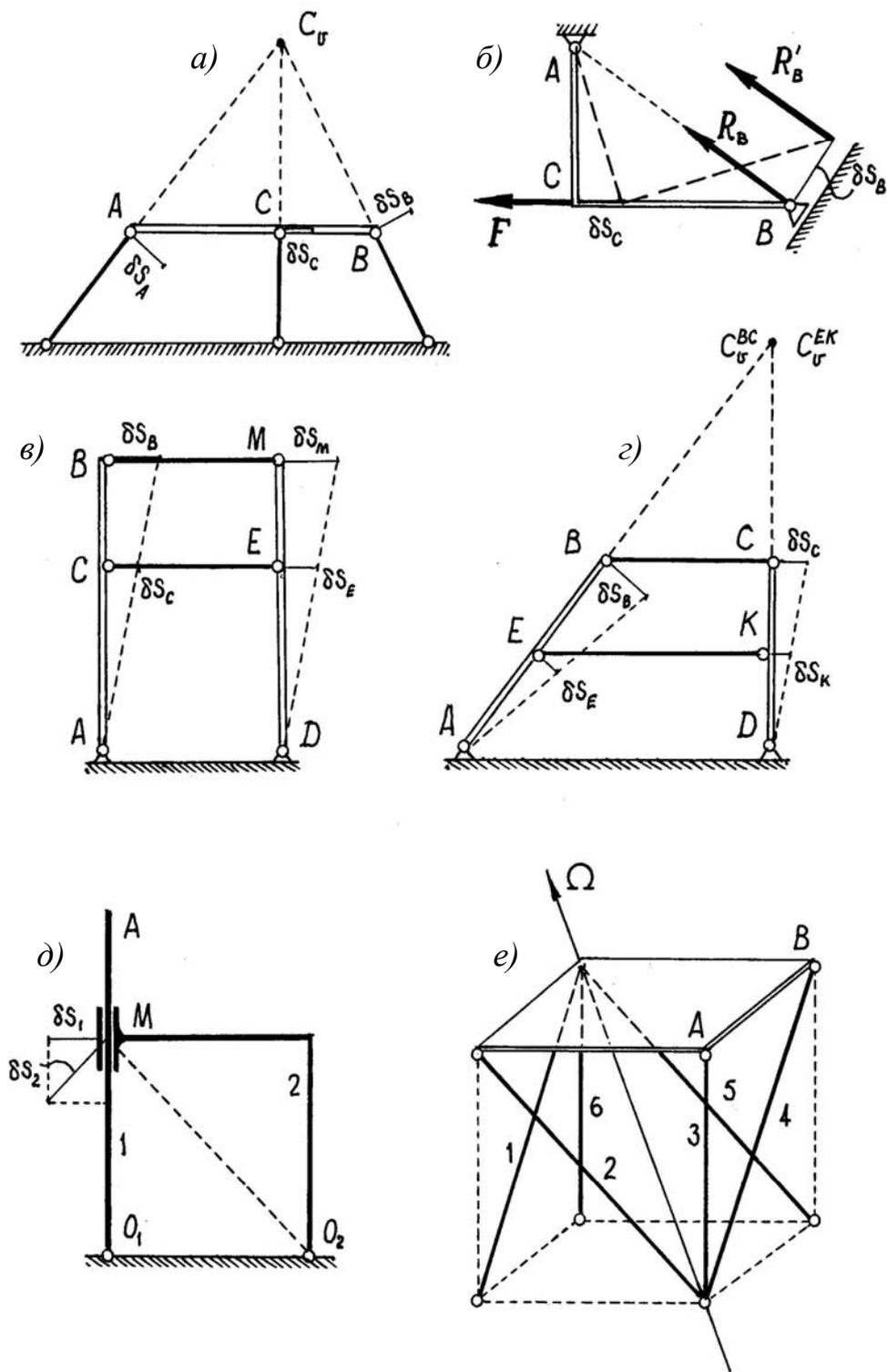


Рис. 3.2

У конструкции 3.2, *г*, имеющей два совпадающих мгновенных центра скоростей стержней *BC* и *EK*, можно доказать, что возможные перемещения точек стержней пропорциональны расстояниям до этих центров. У пространственных конструкций (3.1 и 3.2, *е*) легко находятся мгновенные оси вращения Ω .

- Николай Степанович, так возможно ли какое-то решение при исследовании таких систем? Ведь конструкции-то их осуществимы.

- Если определять реакции связей таких конструкций, выявляются интересные результаты.

В конструкции 3.1 ты, Алёша, их уже обнаружил: нет решения, невозможно определить усилия в четырёх стержнях от силы *P*, веса плиты. А ещё интереснее получилось бы решение, если добавить ещё силу *F*, направленную по стороне *AB*. Составив уравнение моментов сил относительно оси Ω , ты обнаружил бы, что эта сила $F = 0$! Так как моменты других сил, усилий в стержнях и силы *P* равны нулю.

Такой же интересный результат получился бы и в системе 3.2, *е*, если приложить силу к плите, направленную по стороне *AB*, например.

Кроме того что исследование мгновенно изменяемых систем практически невозможно, появляется ещё одна, более опасная особенность. После того, как система совершит малые перемещения, то есть несколько изменит свою форму, система станет статически определимой. Но реакции некоторых связей окажутся очень большими и конструкция может разрушиться.

Если хочешь, Алёша, можешь проверить и убедиться, что это так. Например, дай малое перемещение уголку *ACB* на схеме 3.2, *б* (это положение показано штриховыми линиями) и составь уравнение моментов, при $AC=a$

$$\sum M_A(F_i) = 0; -F \cdot a + R_B' \cdot \delta s_B = 0.$$

Получим $R_B' = \frac{F \cdot a}{\delta s_B}$. Перемещение δs_B очень мало. Значит реакция R_B'

получится очень большой.

- Так как же проверить систему на мгновенную изменяемость? Только так, как вы, Николай Степанович, сейчас показали? Или существуют другие методы и способы?

- Можно использовать некоторые специальные признаки. Есть одна довольно интересная статья [1] в сборнике научно-методических статей по теоретической механике, опубликованной ещё в 1981 г., в которой автор Александров В.В. доказал, что если определитель системы уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных, окажется равным нулю, то такая система является мгновенно изменяемой. Конечно, если число неизвестных равно количеству уравнений равновесия.

Если хочешь, можешь проверить, исследовав схемы на рис. 3.2. Все определители окажутся равными нулю.

- Да, нет. Я верю, Николай Степанович. А как можно исправить такую мгновенно изменяемую конструкцию, чтобы она могла работать?

- Надо лишь немного изменить её конструкцию, изменить углы или размеры. Вот, например, в схеме 3.2а - изменить направление хотя бы одного какого-нибудь стержня так, чтобы они не пересекались в одной точке.

В схеме 3.2, в можно изменить длины балочек AB и MD . Например, шарнирную опору D опустить ниже.

- Ну, спасибо, Николай Степанович. Я, кажется, стал немного умнее. Пойду, расскажу всё своему соседу. Может поймёт, как интересна теоретическая механика.

БЕСЕДА ЧЕТВЁРТАЯ «О РАБОТЕ СИЛЫ»

Николай Степанович встретил Игнатьева в коридоре.

- Ну-ка, Алёша, зайди ко мне. Есть интересное предложение.

Взял его за локоть, как старого знакомого, довёл до кафедры, усадил рядом.

- В апреле, Алёша, будет студенческая научная конференция. Если не против, я могу предложить тебе очень интересную тему. Не возражаешь?

- Да, нет. Я могу. Ещё целый месяц впереди.

- Ну и хорошо. Я сначала дам тебе маленькую, но необычную задачу. Таковую даже не в каждом сборнике найдёшь. Я уже и условие приготовил. Вот смотри (рис. 4.1). Со стола спускается тяжёлая однородная нить длиной l . Сначала конец её A был на краю стола и нить была неподвижна. Пренебрегая всякими сопротивлениями и жесткостью нити, нужно определить, как будет соскальзывать нить со стола, как будут двигаться её точки, например, точка A .

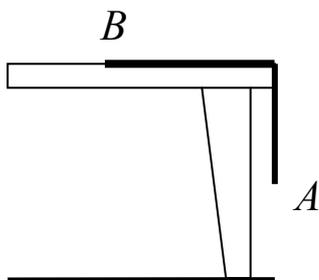


Рис. 4.1

Решай задачу с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Только имей в виду, что работу веса свешивающейся части нити придётся находить с помощью элементарной работы, так как эта сила переменна и точка приложения её относительно нити перемещается. Ведь так? Больше ничего подсказывать не буду. Мне интересно, заметишь ли ты некоторые особенности и как ты с ними справишься. Недели тебе хватит? Ну и хорошо. Жду тебя в следующий четверг.

Игнатьев, как и договаривались, появился в точно назначенное время.

- Вот, Николай Степанович, посмотрите, что у меня получилось. С кинетической энергией всё просто. В начале движения $T_1 = 0$; после того, как часть нити соскользнет со стола, кинетическая энергия $T_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$, так как все точки нити имеют одинаковые скорости. Работа

веса P_2 горизонтальной части нити равна нулю. А вот при вычислении работы, которую совершит вес P_1 свешивающейся части, как вы и наметили тогда, появляется что-то интересное. По правилам элементарную работу надо вычислять по формуле $dA = X dx$,

где X - проекция силы на ось x (рис. 4.2), а dx - дифференциал координаты x точки приложения силы, находящейся посередине свешивающейся части. Элементарная работа получается такой, имея в виду, что $P_1 = \frac{P}{l} 2x$, $dA = 2 \frac{P}{l} x \cdot dx$. Проинтегрировав,

получим $A = 2 \frac{P}{l} \int_0^{0,5s} x dx$, где $s = 2x$ дли-

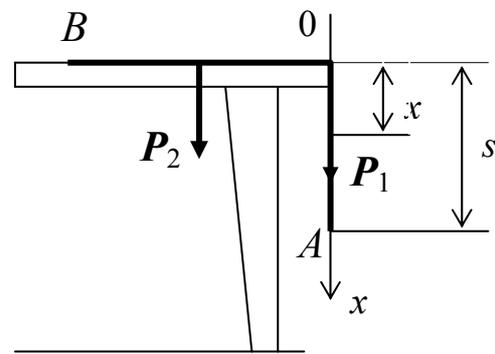


Рис.4.2

на вертикальной части нити, или

$A = \frac{1}{4} \frac{P}{l} s^2$. По теореме $T_2 - T_1 = A$ получаем уравнение $\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = \frac{1}{4} \frac{P}{l} s^2$,

из которого находим скорость точек нити $v = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{l} s^2}$.

- Ты, Алёша, как это кажется, действовал правильно. Но давай сделаем небольшую проверку. Когда конец B , последняя точка нити, соскользнет со стола, то есть при $s = l$, скорость нити по твоему решению будет $v = \sqrt{\frac{1}{2} gl}$. Так? А должно получиться иначе. Ведь, когда вся нить станет

вертикальной, работа веса нити будет $A = Ph = P \frac{l}{2}$, где h - высота, на которую опустится центр тяжести всей нити. По теореме об изменении кинетической энергии получим $\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = P \frac{l}{2}$, откуда $v = \sqrt{gl}$. Больше, чем в твоём решении! Значит метод, которым ты решал задачу и вроде бы правильно делал, не верен!

Давай договоримся так. Я тебе дам одну статейку на эту тему. Ты её проштудируй, разберись и сделай сообщение на методическом семинаре нашей кафедры. Многим из нас это будет очень интересно. А для тебя – хорошая тренировка для будущей научной работы. Только не тяни. Студенческая конференция не за горами. Надо будет, приходи – я помогу.

*Сообщение студента Алексея Игнатьева на методическом семинаре
кафедры теоретической и прикладной механики*

Элементарная работа силы определяется по известной формуле

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = X dx + Y dy + Z dz ,$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки приложения силы; x, y, z – координаты этой точки; X, Y, Z – проекции силы на оси.

Но эта формула верна лишь для силы, вектор которой закреплён в точке тела. Если же точка приложения вектора силы меняет своё положение на теле, то не всё оказывается понятным. Действительно, какое в этом случае надо вычислять изменение радиуса-вектора? Абсолютное?

В сборнике научно-методических статей по теоретической механике (выпуск 11-й) [7] доказана теорема, которая даёт ответ на этот вопрос.

«Мощность некоторой силы \vec{F} , точка приложения которой перемещается по телу, есть скалярное произведение вектора этой силы на вектор скорости той точки тела, с которой совпадает в данный момент начало вектора этой силы».

Здесь и далее для удобства доказательств и решения задач вычисляется мощность силы, с помощью которой легко определяется затем и работа силы.

Очень полезны следствия из этой теоремы.

1. Если тело движется поступательно (скорости всех точек его одинаковы), то перемещение точки приложения силы по телу можно не учитывать и предполагать этот вектор закреплённым в произвольно выбранной точке тела.

2. Если вектор силы перемещается по твёрдому телу вдоль определённой линии действия, то мощность, а значит и работа силы, не будут зависеть от такого перемещения, так как проекции вектора скорости точек тела на эту линию равны (см. теорему на с. 74).

Силы, точка приложения которых перемещается относительно движущегося тела, встречаются нередко. Обычно это силы трения, возникающие при скольжении одного тела по поверхности другого; сила тяжести тела переменной массы или формы; натяжение нити, намотанной на тело и некоторые другие силы.

Вот несколько примеров.

Задача, предложенная Николаем Степановичем (см. рис. 4.2). Там центр тяжести, точка приложения веса P_1 свешивающейся части нити перемещается по нити. И эта часть нити движется поступательно, поэтому точку приложения силы P_1 удобно перенести на конец A нити.

Направим ось x вниз и начало координат возьмём на краю стола. Тогда элементарная работа силы $P_1 = \frac{P}{l}x$ будет $dA = \frac{P}{l}x dx$. А полная работа

$A = \int_0^x \frac{P}{l}x dx = \frac{1}{2} \frac{P}{l}x^2$. И, так как в начале движения, когда $x = 0$, кинетическая

энергия $T_1 = 0$, а в промежуточном положении $T_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$, то по

теореме об изменении кинетической энергии ($T_2 - T_1 = A$) получим урав-

нение $\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{l} x^2$, из которого находим $v = \sqrt{\frac{x^2}{l} g}$.

В частности, когда последняя точка нити B соскользнёт со стола ($x = l$), скорость точек нити будет $v = \sqrt{lg}$. Решение получается правильным.

Ещё одна задача. Тяжёлая однородная нить длиной l была прикреплена обоими концами к точке O , располагалась вертикально и была неподвижна. Затем один конец её отцепился от точки O и точки правой части нити стали двигаться вниз так, что вся нить оставалась вертикальной (рис.4.3). Определим движение свободного конца нити.

Начало координат возьмём в точке O . Движение конца нити определяем координатой x . Вес движущейся в этот момент части нити

$$P_x = \frac{P}{l} l_x = \frac{1}{2} P \frac{l-x}{l}.$$

Кинетическая энергия точек нити в начале движения $T_1 = 0$; в промежуточном положении $T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_x}{g} v^2 = \frac{1}{4} \frac{P}{g} \frac{l-x}{l} v^2$. Элементарная работа веса движущейся части нити, так как она опускается поступательно $dA = P_x \cdot dx = \frac{1}{2} P \frac{l-x}{l} dx$. Работа веса на перемещении x $A = \frac{1}{2} \frac{P}{l} \int_0^x (l-x) dx = \frac{1}{4} \frac{P}{l} x(2l-x)$.

По теореме $T_2 - T_1 = A$, получим уравнение

$$\frac{1}{4} \frac{P}{g} \frac{l-x}{l} v^2 = \frac{1}{4} \frac{P}{l} x(2l-x),$$

из которого находим скорость конца нити в данном положении $v = \sqrt{\frac{(2l-x)x}{l-x} g}$.

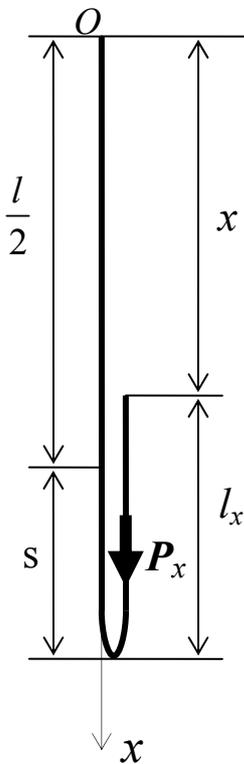


Рис.4.3

Теперь можно определить скорость конца нити в любом положении.

Николай Степанович терпеливо выслушал решение этой задачи и сделал замечание.

- Ты, Алёша, использовал теорему об изменении кинетической энергии. Но, к сожалению, в таком виде эта теорема здесь не работает, так как мы имеем дело с телом переменной массы. Так что полученный результат не верен. А вот решение первой задачи было правильным, там масса движущейся нити постоянна. Об определении движения тел переменной массы мы с тобой как-нибудь специально поговорим. Но даже при твоём не совсем правильном решении можно сделать неожиданный, но правильный вывод. Обрати внимание, что в конце движения при $x = l$ скорость v становится бесконечно большой. Правда, это очень интересно? Если ты когда-нибудь видел и слышал, как хлопают кнутом пастухи, то теперь можешь объяснить, как это у них получается. Скорость точки на конце кнута преодолевает

звуковой барьер (как реактивный самолёт) и слышится резкий хлопок. Можешь сам попробовать: щёлкнуть даже коротким хлыстом с тонким концом.

- У меня, Николай Степанович, есть ещё один, кажется, интересный пример. Вот я нарисовал диск, который равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис.4.4), а по нему с постоянной скоростью v в одной плоскости с осью вращения скользит вертикальный стержень.

Силы трения действуют и на диск, и на стержень. Какую работу совершают эти силы?

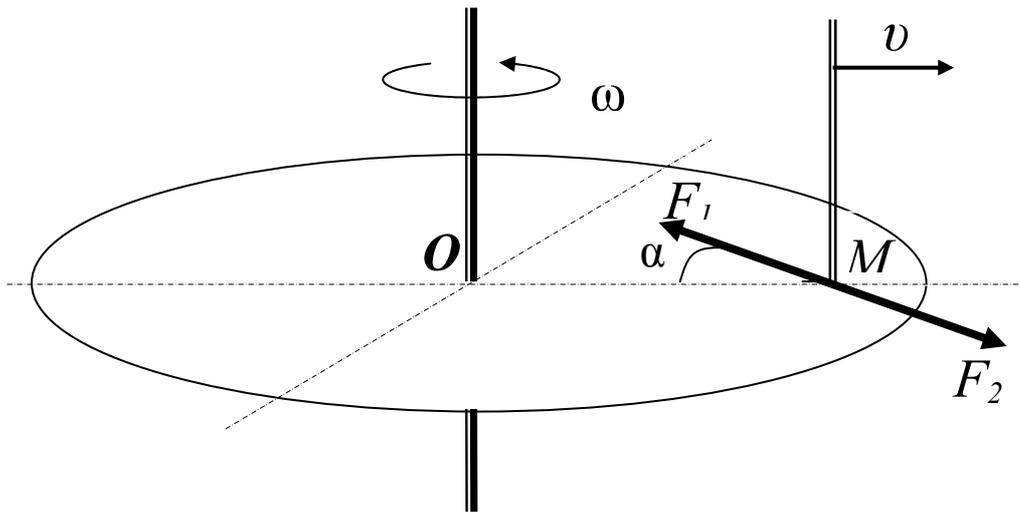


Рис.4.4

На основании первого следствия из теоремы следует показать две силы трения. Одна сила \vec{F}_1 приложена к стержню, направлена в сторону, противоположную его скорости относительно вращающегося диска, и мощность её равна $W_1 = -F_1 \cdot v \cdot \cos\alpha = -Nf v \cos\alpha$, где N – нормальная реакция диска, f – коэффициент трения скольжения, α – угол между вектором скорости стержня \vec{v} и вектором силы трения \vec{F}_1 . Другая сила \vec{F}_2 , равная и противоположно направленная силе \vec{F}_1 , приложена к диску. Мощность её, определяемая скоростью той точки диска, на которую опирается стержень, равна $W_2 = -F_2 v_e \sin\alpha = -F_2 OM \omega \sin\alpha = -Nf v t \omega \sin\alpha$.

Из рис.4.5, на котором показаны скорости точки M стержня, следует

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_e}{v} = \frac{vt\omega}{v} = \omega t.$$

Значит, $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\omega t}$. Поэтому полная

мощность сил трения $W = W_1 + W_2 =$

$$= -Nf v \left(\frac{1}{\omega t} + \omega t \right) \sin\alpha.$$

Так как $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\omega t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$, то $W = -Nf v \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$.

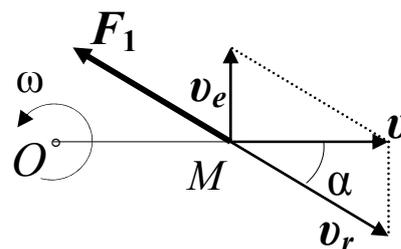


Рис.4.5

Работу сил трения на перемещении за время t можно найти как интеграл:

$$A = \int_0^t W dt = -\frac{1}{2} N f \frac{v}{\omega} \left(\omega t \sqrt{1 + \omega^2 t^2} + \operatorname{Arsh} \omega t \right).$$

- Ну, ты, Алёша, молодец. Хорошо разобрался в этой теории. Да и высшую математику знаешь неплохо.

В заключении Николай Степанович отметил, что материал, о котором рассказал А.Игнатъев, очень интересный. И, если кто заинтересовался, пусть попробует ответить хотя бы на пару таких вопросов: будет ли совершать работу вес куска льда, поставленного на горячую сковородку и, наоборот, если испаряется только верхняя часть его; будет ли совершать работу вес пассажира, шагающего вверх по эскалатору, который движется вниз с такой же скоростью?

БЕСЕДА ПЯТАЯ «ПОГОВОРИМ О СИЛАХ»

- Николай Степанович, можно задать вам, как мне кажется, довольно вредный вопрос?

- Это почему же «вредный», Алёша? Ты меня прямо напугал ...

- А вот я сейчас посмотрю, как будете, извините, оправдывать сказанное на прошлой лекции. Помните, когда говорили о теореме о движении центра масс, вы доказывали, что изменить его движение могут только внешние силы. И привели два интересных примера. Мол, автомобиль движется под действием сил трения, возникающих между ведущими колёсами и дорогой, так как это единственные внешние силы, приложенные к автомобилю, которые направлены горизонтально и вперёд.

И второй пример. Что человек может подпрыгнуть только за счёт реакции, нормальной реакции поверхности, так как это единственная внешняя сила, приложенная к человеку, которая направлена вертикально вверх.

- Ну и что же тебя смущает, дорогой Алёша?

- А как объяснить, почему человек, стоящий, например, на скамейке, подпрыгивает, а скамейка остаётся неподвижной? Ведь нормальная реакция поверхности приложена в первую очередь к скамейке и будет такой же, даже большей, величины? А вот, если скамейку прикрепить к ногам человека, то она «подпрыгнет» вместе с человеком! При условии, конечно, что скамейка не очень тяжёлая. Значит, к человеку прикладывается какая-то другая сила, направленная вверх и приложенная только к человеку!

- Да, - подумав немного, сказал Николай Степанович, - это интересно. Признаться, меня самого иногда смущало такое примитивное и, казалось бы, естественное объяснение. И если уж даже для тебя такое объяснение оказывается не очень доказательным, давай попробуем во всём этом разобраться. Ты, Алёша, поднимаешь интересный вопрос.

- И ещё, Николай Степанович, эти силы, сила трения у колёс автомобиля и нормальная реакция у подпрыгивающего человека приложены к поверхностям тел в точках, скорости которых равны нулю, и работу не совершают. Об этом я докладывал как-то на методическом семинаре кафедры. Значит, эти силы не могут изменить кинетическую энергию тел, то есть не могут и заставить эти тела двигаться.

- Давай разберёмся сначала с прыгающим человеком. Тут, Алёша, нам надо рассуждать так. Рассмотрим сам процесс прыжка.

Готовясь к прыжку, человек приседает (рис. 5.1), сжимая мышцы ног и бёдер как пружины. Затем резко выпрямляется под действием силы F , вызванной этой «пружиной». Тело приобретает скорость центра тяжести v_c , направленную вверх. И как только, в какой-то момент t_0 , выпрямление «пружины» закончится, туловище по инерции продолжит движение вверх, увлекая за собой и ноги, отделив их от поверхности пола.

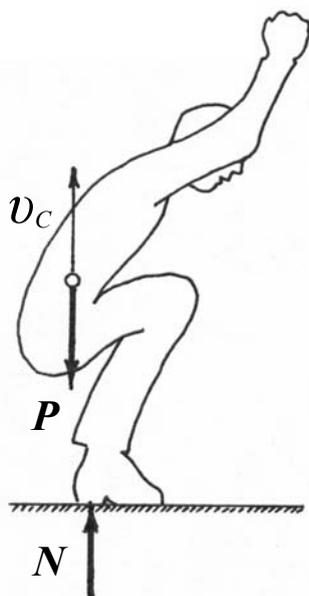


Рис. 5.1

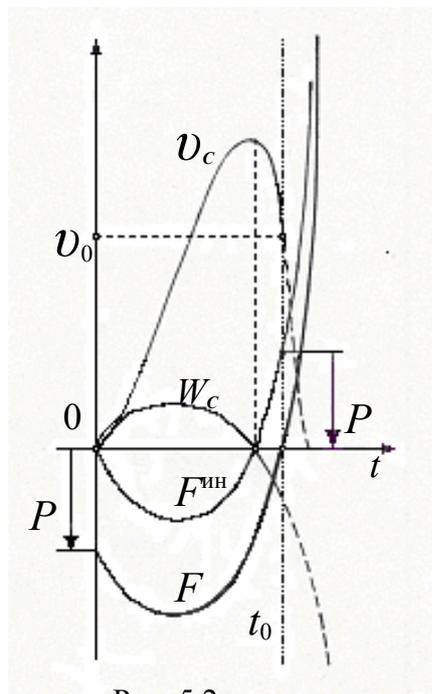


Рис. 5.2

Таким образом, прыжок человека происходит не под действием реакции пола N на подошвы ботинок, а вызывается «упругой» силой F сжатых ног, приложенной к туловищу.

Кстати эта сила F , вызывающая движение тела, порождает силу инерции его. По принципу Даламбера сила $F = F^{\text{ин}} - P$. А сила инерции определяется ускорением тела, изменением скорости. На рис. 5.2 даны графики характеристик движения. Видим, что скорость v_c , достигнув максимума где-то в конце выпрямления ног, начнёт быстро уменьшаться. Ускорение \vec{W}_c становится большим и направленным вниз, а сила инерции – вверх. И чем быстрее изменяется скорость, тем больше ускорение и сила инерции, а значит, и сила F , и тем выше человек подпрыгнет.

Так что спортсмену надо заранее хорошо потренироваться, продумать сам процесс выпрямления ног. И не так как выпрямляется обычная пружина, по гармоническому закону. А сделать так, чтобы в конце выпрямления скорость тела была как можно больше, а остановка его была бы резкой, кратковременной. Опытные спортсмены это знают и автоматически, а может инстинктивно, так и поступают.

- Мой сосед в общежитии как раз занимается прыжками. Я его познакомлю с нашими выводами. Может, они его заинтересуют и помогут в чём-то. А теперь, Николай Степанович, давайте разберёмся с движением автомобиля.

- Конечно. Но сначала, Алёша, скажи мне, какие силы двигают вагонетку, которую толкает человек. Вот посмотри на эту картинку (рис.5.3). Наверное, не сила трения $F_{\text{тр}}$, приложенная к подошве ботинка, хотя это единственная внешняя сила действующая на систему человек-вагонетка и направленная горизонтально. Скорее всего это будет сила F , приложенная руками человека к вагонетке, и равная силе трения $F_{\text{тр}}$.

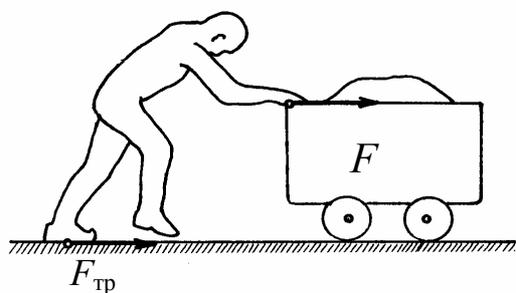


Рис.5.3

Теперь по аналогии можно сообразить, какие силы движут автомобиль. Конечно, это силы, приложенные колёсами к оси автомобиля. Колёса играют роль человека в примере с вагонеткой.

От двигателя автомобиля с помощью трансмиссии на ведущие колёса действует пара с каким-то моментом $M_{\text{кр}}$, состоящая из двух сил.. Одна, сила F_1 , приложена к оси, другая F_2 такой же величины – к дороге (рис.5.4). Эта последняя сила F_2 , если нет проскальзывания колёс, уравновешивается силой трения со стороны дороги. Остаётся лишь сила F_1 , приложенная к оси. Она и является движущей силой. И равна она, ко-

нечно, силе трения. Поэтому мы, упрощая эту схему, и говорили, что движущей силой является сила трения. На самом деле следует считать движущей силой силу F_1 , приложенную к оси автомобиля. То есть колёса, упираясь в поверхность дороги, толкают автомобиль.

Работа силы трения $F_{тр}$ равна нулю, так как она приложена к точке касания колеса, к мгновенному центру скоростей, скорость которой равна нулю. А работу совершает сила F_1 на каком-то перемещении автомобиля s : $A = F_1 \cdot s$;
или пара: $A = M_{кр} \cdot \varphi = F_1 R \cdot \frac{s}{R} = F_1 \cdot s$.

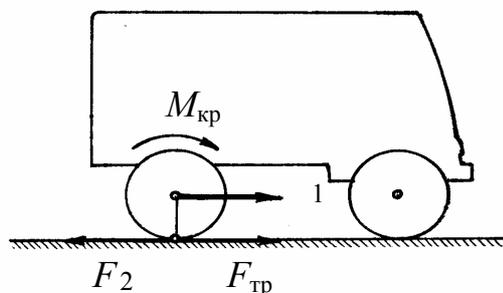


Рис.5.4

s .

- Хорошо, Николай Степанович, тут вы меня уговорили. А объясните теперь, под действием каких сил ходит человек?

- Ну, здесь, Алёша, совсем просто. Тут никакой движущей силы нет. Человек, шагая по дороге, переносит массу своего тела с одной ноги на другую. Правда, позволяет это делать сила трения со стороны дороги. Но она не двигает человека, а лишь препятствует скольжению ног.

- Спасибо, Николай Степанович. Я вам, наверно, надоел своими глупыми вопросами?

- Да, нет. Твои, как ты говоришь «глупые» вопросы и мне порою бывают интересны. Позволяют иногда избавиться от привычных представлений о некоторых явлениях, по-другому их объяснить.

БЕСЕДА ШЕСТАЯ «О ВЕЛОСИПЕДЕ»

- Николай Степанович, мы с ребятами пытались понять, почему на велосипеде можно ездить, не держась за руль, «без рук». И мне кажется, что моё объяснение, которое я предложил, самое правильное

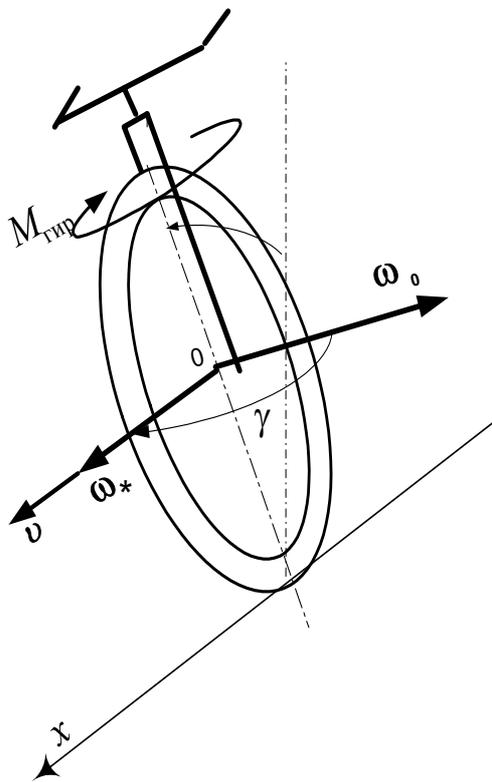
- Ну, и как же ты объяснил это движение «без рук»?

- Я не забыл ваши лекции по теории гироскопа. Ведь переднее колесо, которым управляется велосипед, очень похоже на гироскоп. У него есть ось материальной симметрии и вращается оно с большой скоростью вокруг этой оси.

Теперь вспомним, почему велосипед вообще едет и не падает. Все знают, что если он начнёт падать, то нужно руль повернуть в сторону падения и велосипед выправится. Велосипедист это делает инстинктивно и в самом начале падения. Так что эти действия и не заметны.

- Так. Всё это верно. И что же произойдёт, когда велосипедист отпустит руль?

- Да всё очень просто объясняется с помощью гироскопического момента. Он возникает, когда ось гироскопа отклоняется, совершает поворот вокруг какой-то другой оси. Вот я нарисовал картинку. Правда, не весь велосипед, а только переднее колесо с рулём (см. рисунок). На этой картинке



велосипед движется к нам со скоростью v . Колесо вращается вокруг своей оси с угловой скоростью собственного вращения ω_0 . Пусть велосипед начал отклоняться от вертикальной плоскости вправо, вращаясь вокруг горизонтальной оси x с угловой скоростью ω_* . Вектор её я нарисовал в центре колеса.

Гироскопический момент $M_{\text{гир}}$ поворачивает колесо с рулём так, чтобы вектор ω_0 совпал с вектором ω_* , то есть вправо, в сторону падения велосипеда. И велосипед вернётся в вертикальную плоскость.

- Что ж, Алёша, ты стал хорошо пользоваться понятиями теоретической механики. Всё правильно. Но ты хоть попробовал оценить величину этого гироскопического момента?

- Попробовал. Гироскопический момент определяется формулой $M_{\text{гир}} = J_0 \omega_* \omega_0 \sin \gamma$. Причём у нас $\gamma = 90^\circ$ и $\sin \gamma = 1$. Величина гироскопического момента в основном определяется моментом инерции J_0 и угловой скоростью собственного вращения ω_0 , которая зависит от скорости движения велосипеда: $\omega_0 = v/R$. Так что велосипед будет тем устойчивее, чем колесо массивнее и чем больше скорость движения v .

- Молодец, Алёша. А как, по-твоему, можно повернуть велосипед во время движения, например, вправо, «без руля»?

- Конечно можно. Надо движением туловища наклонить велосипед в правую сторону. Колесо, как мы только что выяснили, тоже повернётся вправо. И велосипед поедет туда, куда мы захотели. А чтобы удержать колесо в этом положении, нужно моментом веса человека относительно оси x

уравновесить гироскопический момент, который в этом случае, когда вектор ω_* направлен вертикально вниз, располагается в плоскости, перпендикулярной оси x и стремится вернуть колесо в первоначальное нормальное положение.

- Всё отлично, Алёша. Только небольшое, но важное замечание. Твоя картинка не очень точна. У велосипеда передняя вилка на самом деле расположена не вертикально – немного наклонена назад. И мало того, она не прямая, а изогнута внизу вперёд. Зачем так сделано? При твоей конструкции, посмотри на рисунок, сила трения от дороги, приложенная к колесу, направлена по оси x . Причём всегда, как бы мы не поворачивали колесо. Такая сила трения не может повернуть велосипед. А вот у реальной конструкции при повороте колеса эта сила трения окажется в стороне от оси x , создаст момент, пару сил, которая и поворачивает велосипед.

А вообще я доволен тобой. Чувствуется, что наши беседы вызвали у тебя большой интерес к теоретической механике, помогли понять законы механики и научили пользоваться ими. Появятся ещё какие идеи или вопросы, приходи.

БЕСЕДА СЕДЬМАЯ «О ТЕОРЕМЕ ПРО КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ И НЕМНОГО ОБ УДАРЕ»

- Николай Степанович, один преподаватель кафедры физики предложил студентам группы, в которой он вёл занятия, очень оригинальный способ, как надо действовать человеку, если он случайно или по вынужденным катастрофическим обстоятельствам начал падать с большой высоты. Чтобы скорость падения в момент встречи с землёй была меньше, надо мол перед самым падением быстро двигать, крутить-вертеть руками и ногами, извиваться всем телом, то есть значительно увеличить кинетическую энергию. По теореме об изменении кинетической энергии $T_2 - T_1 = A$, где $T_1 = 0$, работа $A = mgh$, а кинетическая энергия в конце будет $T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + T_*$, где T_* – дополнительное увеличение энергии, получаем

$$\frac{1}{2}mv^2 + T_* = mgh. \text{ Тогда скорость падения } v = \sqrt{2gh - 2\frac{T_*}{m}}. \text{ Вот так!}$$

Так что, если очень постараться, можно скорость падения сделать даже равной нулю. И никакого парашюта не надо!

- И что, Алёша, всё это предлагалось вполне серьёзно?

- Не знаю. Правда, он предложил студентам сначала разобраться в этом, а потом уж «прыгать с пятого этажа».

- Слава богу ... Ваш физик пошутил, конечно. А как восприняли студенты такое предложение?

- Некоторые сказали, что всё это ерунда, что такого быть не может. Но объяснить, опровергнуть не могли.

- А как ты сам, Алёша, думаешь?

- Ну, меня, старого воробья, на мякине не проведёшь. Мне кажется всё довольно просто. Не следует забывать, что надо учитывать работу не только внешних, но и внутренних сил. Чтобы двигать руками и ногами нужно совершить работу внутренними силами – силами мышц и других частей тела. Эта работа окажется в точности равной этой дополнительной энергии T^* .

И, кроме того, Николай Степанович, теорема о движении центра масс утверждает, что внутренние силы не могут изменить движение центра масс тела, так как сумма их всегда равна нулю.

- Всё правильно. Но у этой простой, казалось бы, теоремы есть мелкие, но очень вредные «заковыки». Некоторые механики утверждают, что внутренние силы не надо учитывать при движении неизменяемой системы. А что такое «неизменяемая» система – не уточняют. Говорят, что падающий человек – неизменяемая система. Поэтому, мол, внутренние силы учитывать не надо. Но какая же она неизменяемая, эта система, руки-ноги то меняют своё положение. Или другой пример: автомобиль – изменяемая система? Конечно. У него там много чего крутится-вертится. Так надо учитывать внутренние силы при движении таких систем? Работу внутренних сил надо учитывать, если, конечно, она совершается. А сумму внутренних сил – нет. Главный вектор и главный момент их будут равны нулю. Хотя они, как ты знаешь, могут и не уравниваться, так как приложены к разным точкам и могут изменять форму системы.

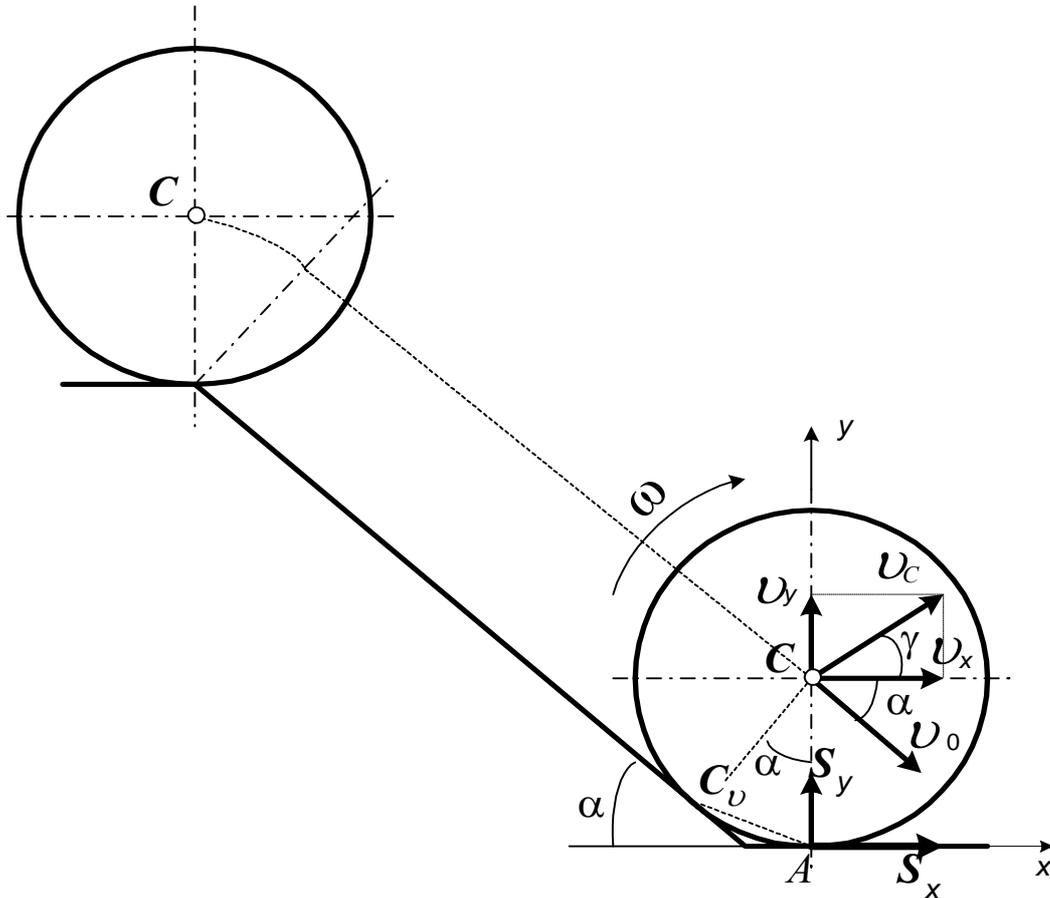
Неизменяемой является лишь система, состоящая из неизменяемых, абсолютно твёрдых тел, соединённых друг с другом недеформируемыми связями (в том числе и нерастяжимыми нитями) так, что расстояние между телами не меняется.

- Я это всё знаю, Николай Степанович. На лекции вы об этом говорили. А нет ли у вас интересной задачи, с какой-нибудь «заковыкой»?

- Что ж, вот тебе задачка, которую обычно решают на практических занятиях. Но только не всегда обращают внимание на некоторые подробности и частности. А они не так уж и скучны, и просты.

Вот я рисую диск, который стоит на краю горизонтальной плоскости и начинает скатываться без скольжения по наклонной плоскости. Нарисуй поточнее траекторию движения центра масс и найди его скорость в момент, когда диск начнёт качение по нижней, горизонтальной плоскости. А я пока схожу в деканат, там скоро начнётся небольшое совещание.

- Ну, что у тебя, Алёша, получилось? Смотрю твой рисунок. Так, начало правильное. Диск сначала вращается вокруг верхнего угла, траектория центра – дуга. Потом диск катится вниз, траектория – прямая линия. А какая картинка получается в нижнем углу?



- А вот эта картинка, Николай Степанович, для меня не очень ясна. Мне, кажется, тут произойдёт удар диска о горизонтальную плоскость в точке A . Вектор скорости центра v_0 в начале удара был параллелен наклонной плоскости. Потом мгновенно становится горизонтальным. А чему становится равной эта скорость, сразу и не соображу.

- Давай вместе разберёмся. Явление удара исследуется с помощью двух теорем: теоремы об изменении количества движения $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^e$

и теоремы о моменте количества движения $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^e$. В проекциях на оси

x и y получим уравнения: $mv_x - mv_0 \cos\alpha = S_x$; $mv_y - mv_0 \sin\alpha = S_y$ и

$J_c(\omega - \omega_0) = S_x \cdot r$. Где v_0 – скорость центра масс диска в начале удара с соответствующей угловой скоростью ω_0 ; v_x и v_y – проекции скорости центра масс на оси в конце удара при угловой скорости ω ; S_x и S_y – проекции импульса ударной силы в точке A .

После преобразований получим три уравнения

$$v_x = v_0 \cos \alpha + S_x / m,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha + S_y / m,$$

$$\omega = \omega_0 + S_x \cdot r / J_c.$$

Определим ещё скорость точки A , точки контакта диска с горизонтальной плоскостью в конце удара, проекции которой $V_x = v_x - r\omega$ и $V_y = v_y$. Нам не хватает двух уравнений, которые должны характеризовать результат удара, физические свойства поверхности и тела. Будем считать, что скольжение отсутствует. Тогда $V_x = 0$ и, значит, $v_x = r\omega$.

Затем положим, как это обычно предполагается при исследовании удара, что скорость отскока после удара пропорциональна скорости в начале удара: $V_y = -k V_{0y}$. Коэффициент k – называется коэффициентом восстановления скорости. Определяется он опытным путём. Так как $V_{0y} = -v_0 \sin \alpha$, то $v_y = V_y = k v_0 \sin \alpha$ (см. рисунок).

Итак, имеем пять уравнений с пятью неизвестными, и все они теперь могут быть определены. Так, для диска, момент инерции которого $J_c = 0,5 mr^2$, легко находим проекции скорости центра масс на оси

$$v_x = v_0 (2 \cos \alpha - 1),$$

$$v_y = k v_0 \sin \alpha.$$

Значит, диск подскакивает над плоскостью под углом γ таким, что тангенс его $\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_y}{v_x} = k \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1}$, и диск будет вращаться с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v_x}{r} = \frac{v_0}{r} (2 \cos \alpha - 1) = \omega_0 (2 \cos \alpha - 1).$$

Если упругость поверхности равна нулю ($k = 0$), то скорость центра v_c будет направлена параллельно плоскости, горизонтально ($v_y = 0$) и равна $v_c = r\omega = v_0 (2 \cos \alpha - 1)$. Интересно, что при $\alpha \geq 60^\circ$ скорость $v_c \leq 0$, что невозможно. Значит, диск остановится. Вся энергия уйдёт на деформацию поверхности.

И ещё один важный вывод. Чтобы не произошло такого удара и всех этих нежелательных явлений, переход от наклонной плоскости к горизон-

тальной должен быть плавным, по кривой, радиус кривизны которой должен быть больше радиуса диска.

- Спасибо, Николай Степанович, за интересную задачу. А вот с явлением удара мне надо познакомиться подробнее. До свидания.

БЕСЕДА ВОСЬМАЯ «КОЕ-ЧТО О СКАЛЯРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ»

- Ну и любопытный же ты, Алёша ... Откуда ты об этом узнал?

- Я подслушал, как у вас на кафедре об этом говорили. Не то возмущались, не то удивлялись. А толком не понял, о чём шёл разговор.

- Что ж, если тебе интересно, я сейчас расскажу. Тем более это тебе будет полезно. Ведь ты после института всерьёз хочешь заняться теоретической механикой. Разговор шёл о принципе возможных перемещений и, в частности, об этом *возможном*, или по-другому *виртуальном* перемещении. Ты знаешь, что это такое, объяснить не буду. Мы спорили о том, как его изображать – вектором или малым отрезком касательной к траектории возможного движения точки. Большинство учёных представляют его в виде вектора, малого приращения радиуса-вектора точки – $\delta \vec{r}$. И в результате из-за этого иногда получают странный и неверный вывод. Началом разговора на кафедре послужила цитата из одного солидного учебника, автор которого считался большим авторитетом ещё сто лет тому назад [8, с.303].

Короче. Он написал буквально следующее.

« ... Для любого виртуального перемещения сумма элементарных работ реакций идеальных связей равна нулю: $\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, при этом для поступательного перемещения множитель $\delta \vec{r}_i$ один и тот же для всех частиц, и потому он может быть вынесен за знак суммы, т.е. мы имеем $\delta \vec{r}_i \cdot \sum \vec{R}_i = 0$; отсюда ввиду произвольности $\delta \vec{r}_i$ находим: $\sum \vec{R}_i = 0$, что мы и хотели доказать».

Так он хотел доказать, что *при поступательном движении тела векторная сумма реакций идеальных связей равна нулю*.

Даже простой пример показывает, что это не так. Действительно, при некотором поступательном скольжении твёрдого тела по гладкой плоскости реакциями являются перпендикулярные плоскости силы и сумма их, конечно, не равна нулю.

При доказательстве им допущена грубая ошибка. Ведь скалярное произведение двух векторов может быть равно нулю не только тогда, когда равен нулю один из них, но и тогда, когда они перпендикулярны друг дру-

гу. Если бы он записал условие идеальности реакций в алгебраическом виде, то получилось бы так:

$$\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum R_i \delta r_i \cos \alpha_i = \delta r_i \sum R_i \cos \alpha_i = 0.$$

Отсюда следует, что это условие будет выполняться не только при $\sum \vec{R}_i = 0$, но и при $\alpha_i = 90^\circ$ или $\cos \alpha_i = 0$, то есть, если возможные перемещения перпендикулярны силам. Как это и получилось в моём примере.

- Ого, Николай Степанович, мне кажется, что даже я не сделал бы такой элементарной ошибки.

- Надеюсь. Получается так, что чем умнее и опытнее учёные мужи, тем больше у них небрежности в рассуждениях. Аналогичные ошибки мы обнаружили и в других, более современных учебниках.

Вот сам посудите. При свободном движении тела возможные перемещения точек есть результат суммы двух перемещений (см. рисунок): перемещения $\delta \vec{r}_c$ какого-либо полюса C и

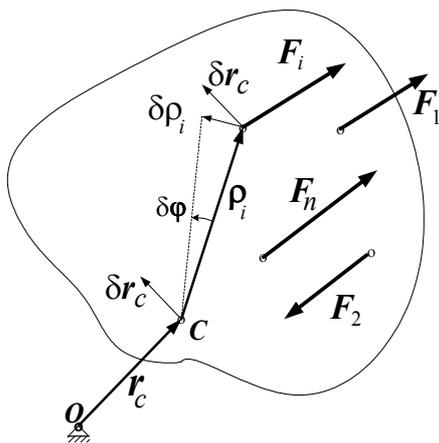


Рис.8.1

поворота точек вокруг этого полюса, перемещения $\delta \vec{r}_i$: $\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_c + \delta \vec{\phi} \times \vec{\rho}_i$, где $\delta \vec{\phi}$ вектор бесконечно малого поворота тела. Тогда по принципу возможных перемещений при равновесии тела

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_c + \sum \vec{F}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{\rho}_i) = \\ &= \delta \vec{r}_c \cdot \sum \vec{F}_i + \delta \vec{\phi} \cdot \sum (\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) = \\ &= \delta \vec{r}_c \cdot \sum \vec{F}_i + \delta \vec{\phi} \cdot \sum \vec{M}_c(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned}$$

Далее авторы рассуждают так [3,5].

«В силу произвольности векторов $\delta \vec{r}_c$ и

$$\delta \vec{\phi} \text{ получим: } \sum \vec{F}_i = 0 \text{ и } \sum \vec{M}_c(\vec{F}_i) = 0.$$

То есть получаем известные условия равенства нулю главного вектора и главного момента сил, условия равновесия тела».

Но, а если эти силы, действующие на тело, параллельны и перемещения $\delta \vec{r}_c$ окажутся перпендикулярными им, да ещё и вектор $\delta \vec{\phi}$ назначим параллельным этим силам, то эти условия будут удовлетворяться и для неуравновешивающихся сил. Вот таков ляпсус получается, когда забываем, как определяется скалярное произведение векторов, что они могут оказаться перпендикулярными друг другу.

Поэтому я и стараюсь, Алёша, возможные перемещения не представлять вектором. В этом нет особой необходимости и это будет проще и надёжнее.

И ещё одно замечание. Вот когда ты станешь лектором ... Не смейся, я надеюсь на это. Зачем же мы тогда столько копаемся в теоретической механике? Вот когда ты станешь лектором, преподавателем, то, формулируя принцип возможных перемещений, не говори «сумма работ сил на *любом* возможном перемещении», а говори - на *всяком* возможном перемещении. Чтобы хотя бы одно из них не оказалось перпендикулярным силам. Всё понял? Ну и хорошо.

БЕСЕДА ДЕВЯТАЯ «PERPETUUM MOBILE»

- Николай Степанович, зачем вы направили ко мне этого изобретателя? Он же придумал «вечный двигатель»! Я сначала пытался убедить его, что таких двигателей не существует и быть не может. Но он был так настойчив, что мне пришлось посмотреть его проект. И сразу обнаружилась его элементарная безграмотность в механике и физике. Он даже правило рычага не знает. Да и школьная математика у него хромает. В общем, он стал ругаться, обзывать меня по-всякому... и я прогнал его.

- Ох, Алёша, извини меня ... Я специально его к тебе направил, чтобы потом поговорить об этих «вечных двигателях».

Мне самому не раз приходилось разговаривать с такими изобретателями. И убедить их в бесплодности попыток построить такую конструкцию невозможно. Даже встречал таких изобретателей, которые и изучали когда-то механику, знают её законы, в том числе и закон сохранения энергии. Доказать им это практически очень трудно, так как конструкции порой такие заковыристые, что математические исследования движения этих систем, как правило, очень сложны.

Ранее были такие доморощенные изобретатели, которые всю жизнь посвящали совершенствованию своего детища. Первые конструкции «вечного двигателя» появлялись ещё в XIII веке. И, чтобы избавиться от назойливости этих изобретателей, в 1775 году французская академия сделала официальное заявление, что никакие проекты вечных двигателей к рассмотрению и испытаниям больше не принимаются.

Несмотря на это до сих пор такие проекты поступают. Ты сам в этом только что убедился. А вот на рис. 9.1 проект «вечного двигателя» ещё XIII века. Ты сможешь понять принцип его действия? Грузы на стержнях перекидываются на шарнирах и давят на упоры, прикреплённые к колесу. По мысли автора, колесо будет само всё время, вращаться по часовой стрелке.

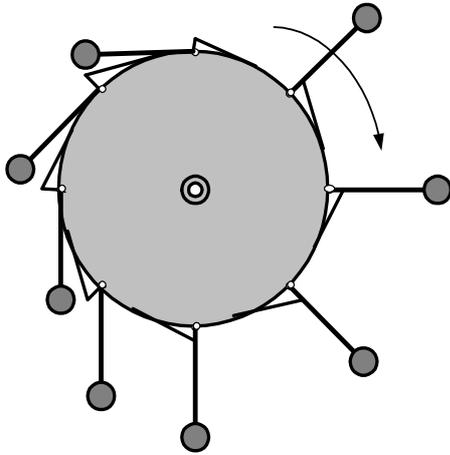


Рис.9.1

На первый взгляд он прав, так как сумма моментов правых грузов весом P относительно оси вращения

$$M_{\text{пр}} = P(l + r) \cos 45^\circ + P(l + r) + P(l + r) \cos 45^\circ = P(l + r)(1 + 2 \cos 45^\circ)$$

больше суммы моментов левых

$$M_{\text{лев}} = Pl + P(l + r) \cos 45^\circ + Pr + Pr \cos 45^\circ = P(l + r) + P(l + 2r) \cos 45^\circ.$$

Разность их легко подсчитать

$$\Delta_1 = M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}} = Pl \cos 45^\circ.$$

И когда колесо сделает четверть оборота, все стержни с грузами повернутся, картинка опять станет прежней и новые грузы заставят колесо сделать следующую четверть оборота и так далее. И чем больше длина стержней l , считает автор, тем больше будет эта разность Δ_1 и тем быстрее колесо будет вращаться.

- Но, Николай Степанович, даже из этой картинки видно, что когда колесо повернётся на 45° , момент сил тяжести левых грузов, наверное, станет больше момента правых! И он затормозит вращение колеса.

- Да, ты прав. Момент левых будет больше момента правых на величину $\Delta_2 = Pl \cos 45^\circ$. В конце концов, учитывая ещё и трение в подшипниках оси, колесо остановится, сделав по инерции несколько оборотов. Так что, конечно, этот «вечный двигатель» работать не будет.

Но неожиданно через шестьсот с лишним лет в 1910 году нашёлся новый изобретатель похожего колеса. Даже известно имя автора, которым и называется его изобретение – колесо Орфиреуса. Он рассуждал так. Во-первых, надо сделать длиннее стержни и тогда Δ_1 будет значительно больше, торможение станет меньше. И, во-вторых, надо сделать не восемь стержней, а как можно больше. Стержни будут непрерывно перекидываться и торможения, мол, практически не будет.

Хороша его идея? Но научное учреждение, куда он направил свой проект, отвергло его, даже не рассмотрев. И правильно сделало. Но я всё же попробовал провести небольшой анализ, чтобы убедить сторонников Орфиреуса, что его конструкция работать не будет.

Вот это колесо (рис. 9.2). Я, правда, нарисовал не очень много этих грузиков, всего 24, но определенные выводы можно всё-таки сделать.

Тебе понятна его конструкция? Я сначала предположил, что колесо вращается по часовой стрелке (рис. 9.2). Тогда грузики расположатся так, как показано на рисунке.

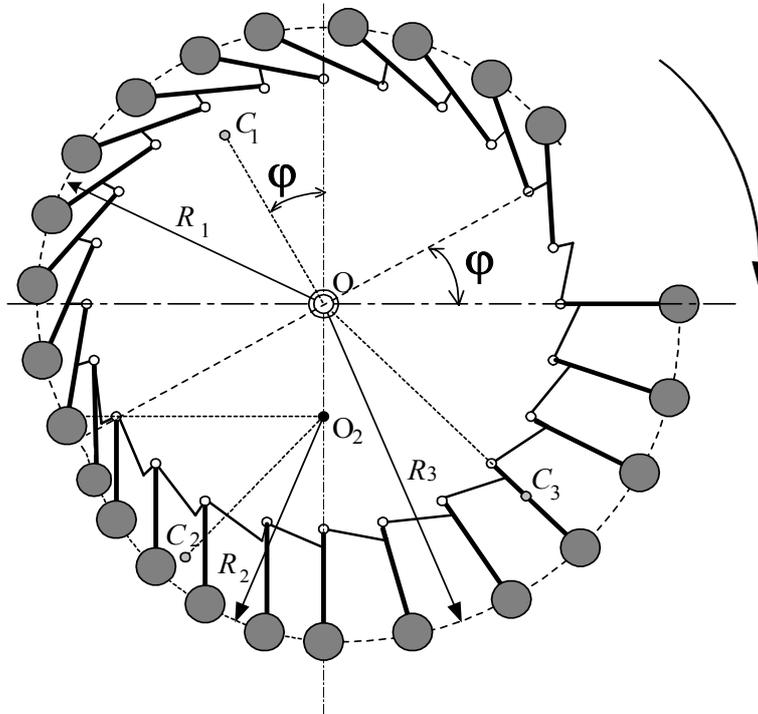


Рис. 9.2

Из рисунка видно, что расположение грузиков можно разбить на три области: первая – состоящая из грузиков, откиннутых на косые стороны упоров и расположенных на полуокружности радиусом $R_1 = l / \sin\varphi$; вторая – из вертикально висящих грузиков, расположенных на четверти окружности радиусом $R_2 = r$, равном радиусу самого колеса с центром O_2 , смещённым вниз на длину стержней l . И третья область – занимающая тоже четверть окружности, окружности радиусом $R_3 = r + l$, образованной грузиками, стержни которых опираются на прямые стороны упоров.

Центр тяжести грузиков в каждой области можно найти как центр тяжести соответствующих дуг окружностей (полагая, что грузики располагаются по ней равномерно) по известной формуле $OC = R \frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2}$. Так, центр C_1 первой области находится на расстоянии OC_1 по оси симметрии дуги, равном $OC_1 = R_1 \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \frac{l}{\sin \varphi}$. Центр тяжести C_2 грузиков во второй области – на расстоянии O_2C_2 , расположенном под углом 45° , рав-

ном $O_2C_2 = \frac{4r}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r$. Центр тяжести грузиков в третьей области на-

ходится аналогично: $OC_3 = R_3 \frac{\sin \pi/4}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (r+l)$.

Теперь можно определить момент сил тяжести грузиков относительно оси вращения

$$M_O = P_1 \cdot OC_1 \cdot \sin \varphi + P_2 \cdot O_2C_2 \cdot \sin 45^\circ - P_3 \cdot OC_3 \cdot \sin 45^\circ.$$

Учитывая количество грузиков в каждой области, получим:

$$M_O = 12P \frac{2}{\pi} \frac{l}{\sin \varphi} \sin \varphi + 6P \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \frac{\sqrt{2}}{2} - 6P \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (r+l) \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \frac{l}{\pi} P > 0.$$

То есть на самом деле при таком расположении грузиков они будут вращать колесо не по часовой, а против часовой стрелки. И располагаться будут тогда так, как показано на рис. 9.3. Но при таком расположении грузиков даже без математических расчётов ясно, что вращение будет происходить по часовой стрелке.

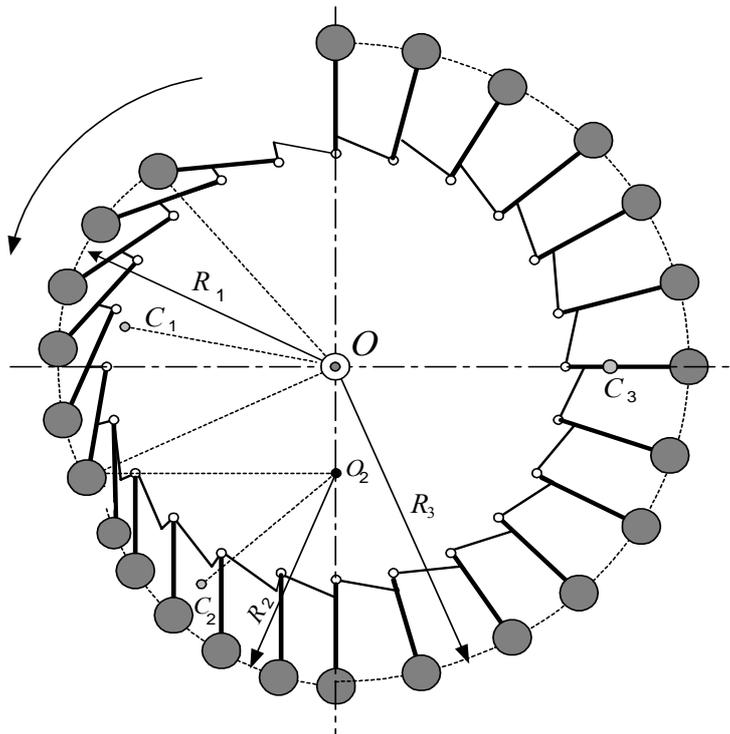


Рис. 3.9

При такой неопределённости направления вращения естественно предположить, что существует положение равновесия, в котором колесо

при наличии трения в подшипниках оси в конце концов остановится и успокоится.

Я, Алёша, специально направил нынешнего изобретателя к тебе, чтобы обратить твоё внимание на эти «вечные двигатели». Чтобы ты сразу, с порога, отвергал их и не тратил силы на доказательства.

Кстати, ещё недавно, в феврале нынешнего (!) года, я увидел по центральному телевидению нового изобретателя «вечного двигателя». Какой-то токарь построил у себя в гараже электродвигатель, который работает от силового поля постоянного магнита. И КПД двигателя якобы больше единицы – 1,2! Мало того, какие-то профессора пытаются и не могут объяснить это явление! Так что материал и выводы из нашей беседы, Алёша, до сих пор актуальны.

БЕСЕДА ДЕСЯТАЯ «ПРО МАССУ, КОТОРАЯ ИЗМЕНЯЕТСЯ»

- Помнишь, Алёша, как-то мы с тобой говорили о работе силы, точка приложения которой перемещается по движущемуся телу. И ты в качестве примера определял движение тяжёлой нити с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (см. рис. 4.3). А я тогда забраковал твоё решение, так как масса нити изменяется и теорему в обычном виде применять нельзя.

- Да, я помню. И сегодня вы хотите растолковать мне, как определяется движение тел переменной массы? Это, наверно, не так просто.

- Но и не очень сложно. Всю теорию я рассказывать не собираюсь. Познакомлю только с выводами, методами решения задач.

Впервые основной закон динамики точки переменной массы был открыт профессором Петербургского политехнического института И.В. Мещерским ещё в 1897 году [3, 4, 5]. Идея его сводится к тому, что при исследовании движения тела, к которому непрерывно прибавляются или от которого отделяются частицы, материальные точки, надо учитывать кроме обычных сил ещё и дополнительные реактивные силы $\vec{\Phi}$, зависящие как от массы этих частиц dm , так и от скорости их \vec{u} .

Для точки переменной массы M основное уравнение динамики записывается так:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}. \quad (10.1)$$

Реактивная сила $\vec{\Phi} = -\frac{dm_1}{dt}(\vec{u}_1 - \vec{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\vec{u}_2 - \vec{v})$, где dm_1 и \vec{u}_1 – масса и абсолютная скорость отделяемых частиц, а dm_2 и \vec{u}_2 – соответственно масса и скорость присоединяемых частиц, \vec{v} – скорость самой точки.

Основные теоремы для тела переменной массы по форме похожи на соответствующие теоремы для тела постоянной массы. Надо только иметь в виду, что центр масс перемещается по телу. Поэтому, например, количество движения определяется также, как для тела постоянной массы: $\vec{K} = M\vec{v}_c$, только здесь \vec{v}_c – скорость той точки тела, с которой совпадает центр масс в данный момент.

- Николай Степанович, ведь мы как раз говорили об этом в одной «беседе», когда докладывали на кафедре о работе силы, точка приложения которой перемещается по телу!

- Да-да, правильно. Ну, а теорема об изменении количества движения тела переменной массы после несложных математических преобразований запишется так, в дифференциальном виде:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \sum \vec{F}^{(e)} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2. \quad (10.2)$$

В частности, для системы переменной массы, у которой частицы либо только отделяются, или только присоединяются ($dm_2 = 0$ или $dm_1 = 0$) это уравнение соответственно становится проще. Интересен и случай, когда абсолютные скорости тех и других частиц равны нулю – уравнение становится совсем удобным, похожим на теорему об изменении количества движения тела постоянной массы

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \sum \vec{F}^{(e)}. \quad (10.3)$$

Полезна при решении задач и теорема об изменении кинетической энергии тела переменной массы. Например, для тела, от которого лишь отделяются частицы, теорема записывается так (при $dm < 0$):

$$d\left(\frac{Mv_c^2}{2}\right) + \frac{1}{2}v^2 dm = dA + (\vec{u} \cdot \vec{v}) dm. \quad (10.4)$$

А если частицы отделяются с абсолютной скоростью, равной нулю, $\vec{u} = 0$, или $\vec{u} \perp \vec{v}$, то совсем просто:

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right) + \frac{1}{2}v^2 dm = dA. \quad (10.5)$$

То есть от кинетической энергии тела вычитается кинетическая энергия отделяющихся частиц ($dm < 0$).

- Николай Степанович, вы говорили, что всё очень просто. А мне кажется – совсем не просто. Ведь для тела постоянной массы теорема выглядит удобнее, записывается в проинтегрированном виде. Там оставалось только подставить значения кинетической энергии в двух положениях и вычислить работу сил. А тут, наверное, придётся решать дифференциальное уравнение и совсем не простое.

- Ты прав, конечно. Но математики дифференциальные уравнения умеют решать разными способами. Так что это трудности не механики, а математики.

Вернёмся к твоей задаче: движение по вертикали одного конца нити при закреплённом втором (см. рис.4.3). Помнишь эту задачу? Там как раз скорость отделяемых частиц $\vec{u} = 0$. Поэтому воспользуемся уравнением (10.5).

Масса движущейся части нити $M = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{l-x}{l}$, масса отделяемых частиц $dm = dM = -\frac{1}{2} \frac{P}{g} dx$, элементарная работа $dA = \frac{1}{2} P \frac{l-x}{l} dx$. (Я использую результаты твоего прошлого решения, они и тут будут такими же.) Причём, $v_c = v = \dot{x}$, так как эта часть нити движется поступательно.

Находим дифференциал кинетической энергии тела

$$d\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(dMv^2 + M2vdv) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2dx + 2\frac{1}{2}\frac{P}{g}\frac{l-x}{l}v dv\right) = \\ = \frac{P}{4gl}[-v^2dx + 2(l-x)v dv] \quad \text{и подставляем в уравнение (10.5):}$$

$$\frac{P}{4gl}[-v^2dx + 2(l-x)v dv - v^2dx] = \frac{1}{2}\frac{P}{gl}dx.$$

Поделив на dt , после математических преобразований получим дифференциальное уравнение $(l-x)\ddot{x} - \dot{x}^2 = (l-x)g$. Положив в нём $(l-x) = z$, уравнение запишем так: $z\ddot{z} + \dot{z}^2 = -gz$. (10.6)

Решение этого нелинейного уравнения, поверь мне: $\dot{z}^2 = \frac{C}{z^2} - \frac{2}{3}gz$.

Так как при $x = 0$ $\dot{x} = 0$, то $z = l$, $\dot{z} = 0$ и постоянная $C = \frac{2}{3}gl^3$. Зна-

чит, $\dot{z}^2 = \frac{2}{3}g\frac{l^3}{z^2} - \frac{2}{3}gz = \frac{2}{3}g\frac{l^3 - z^3}{z^2}$ и скорость конца нити после

подстановки $z = l - x$ будет такой: $v = \frac{1}{l-x}\sqrt{\frac{2}{3}g[l^3 - (l-x)^3]}$.

Если сравнить с результатом твоего прошлого неправильного решения, то можно заметить, что при одинаковой качественной зависимости $v = v(x)$ значения скорости получаются несколько бóльшими. Так, при $x = \frac{l}{2}$ у тебя $v = \sqrt{\frac{3}{2}gl}$, а у меня здесь $v = \sqrt{\frac{7}{3}gl}$. Это естественно, потому что при той же работе силы тяжести кинетическая энергия тела получается меньше.

И ещё. Так как теорема эта используется в дифференциальном виде, то для исследования движения аналогичных систем иногда выгоднее использовать теорему об изменении количества движения, которая для тела с отделяющимися частицами записывается так:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \sum \vec{F}^{(e)} - \frac{dM}{dt}\vec{u}. \quad (10.7)$$

А для некоторых частных случаев получается ещё проще. Так, если абсолютная скорость отделяемых частиц $\vec{u} = 0$, уравнение становится таким:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \sum \vec{F}^{(e)}. \quad (10.8)$$

То есть по форме напоминает теорему для тела постоянной массы. А если относительная скорость равна нулю ($\vec{u} = \vec{v}_c$), то ещё проще

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)}. \quad (10.9)$$

В этом случае срабатывает и закон сохранения количества движения: при $\sum \vec{F}^{(e)} = 0$ получается $\vec{v}_c = \text{const}$.

Только что рассмотренную задачу можно решить проще с помощью этой теоремы (10.8), так как абсолютная скорость \vec{u} отделяемых частиц равна нулю

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} P \frac{l-x}{g} \dot{x} \right) = \frac{1}{2} P \frac{l-x}{l} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} [(l-x)\dot{x}] = g(l-x).$$

Вычислив производные, получим то же уравнение, что и ранее:

$$(l-x)\ddot{x} - \dot{x}^2 = (l-x)g.$$

На сегодня, Алёша, хватит. Я сообщил довольно много сложного материала. Тебе надо его освоить, так сказать, переварить. Попробуй дома

решить вот такую непростую задачу. Я понимаю, тебе сейчас не до этого – экзаменационная сессия скоро, зачётов много. И я тебя не тороплю. Когда сможешь, приходи. Не получится, тоже приходи.

Задача Николая Степановича

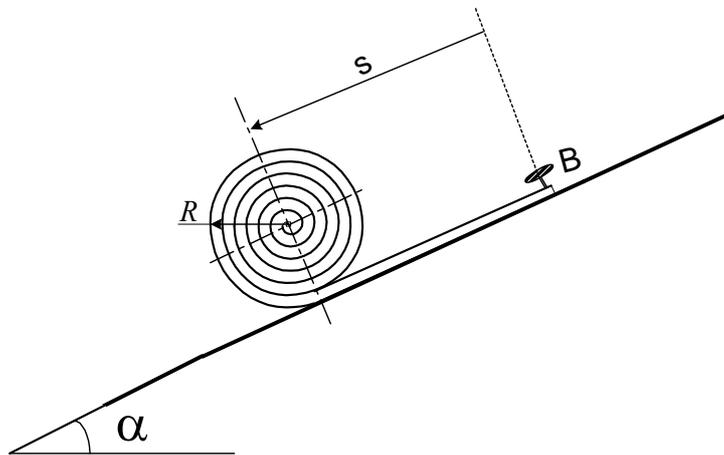


Рис.10.1

Рулон однородной тяжёлой ленты скатывается по наклонной плоскости. При этом лента, прикрепленная свободным концом B к плоскости, разматывается. Определить скорость центра рулона как функцию длины смотанной нити s . Полная длина нити – l_0 , толщина нити – δ .

(Задача оказалась сложной. Алёша не сумел её решить. Поэтому даём решение, сделанное самим автором этой задачи, Николаем Степановичем.)

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в форме (10.5), так как абсолютные скорости отделяемых от рулона частей ленты равны нулю $dT + \frac{1}{2}v^2 dM = dA$.

Если радиус скатывающегося рулона – R , то длина ленты на рулоне (как площадь рулона, делённая на толщину ленты) $l = \frac{\pi}{\delta}R^2$ и $s = l_0 - l$.

Масса рулона $M = \pi R^2 \rho$, где ρ – масса единицы площади рулона. Или $M = l\delta\rho$. Масса отделяющихся частей $dM = -\delta\rho dl$. Кинетическая энергия рулона, как цилиндра при плоскопараллельном движении,

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2. \quad \text{Так как } J_c = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{\delta^2}{\pi} l^2, \quad \text{а } v_c = \dot{s} = -\dot{l} \quad \text{и}$$

$$\omega^2 = \frac{\dot{l}^2}{R^2} = \frac{\pi \dot{l}^2}{l \delta}, \quad \text{то } T = \frac{1}{2} l \delta \rho \dot{l}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho \frac{\delta^2}{\pi} l^2 \frac{\pi \dot{l}^2}{l \delta} = \frac{3}{4} \delta \rho l \dot{l}^2.$$

Элементарная работа силы тяжести рулона $dA = Mg ds \sin \alpha = l \delta \rho g (-dl) \sin \alpha = -\delta \rho g l dl \sin \alpha$. Определяем дифференциал кинетической энергии $dT = \frac{3}{4} \delta \rho (l^2 dl + 2l \dot{l} d\dot{l})$ и составляем уравнение

$$\frac{3}{4} \delta \rho (l^2 dl + 2l \dot{l} d\dot{l}) - \frac{1}{2} l^2 \delta \rho dl = -\delta \rho g l dl \sin \alpha.$$

Поделив на dt , получим

$$\frac{3}{4} \dot{l}^3 + \frac{3}{2} l \dot{l} \ddot{l} - \frac{1}{2} \dot{l}^3 = -l \dot{l} g \sin \alpha \quad \text{или} \quad 6 l \ddot{l} + \dot{l}^2 = -4 l g \sin \alpha. \quad (10.10)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение. Попробуем найти его решение. Тем более, что уравнения такого вида обычно получаются при исследовании тел переменной массы.

Обозначим $\dot{l}^2 = u$, тогда $\ddot{l} = \frac{d\dot{l}}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = \dot{l} \frac{d\dot{l}}{dl} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{l}^2}{dl} = \frac{1}{2} \frac{du}{dl}$ и уравнение (10.10) можно привести к виду

$$\frac{du}{dl} + \frac{u}{3l} = -\frac{4}{3} g \sin \alpha. \quad (10.11)$$

Представим переменную u как произведение двух функций

$$u = a \cdot b \quad (10.12)$$

Тогда $u' = a'b + ab'$ (штрихом обозначена производная по l). Подставим в уравнение (10.11):

$$a'b + a \left(b' + \frac{b}{3l} \right) = -\frac{4}{3} g \sin \alpha. \quad (10.13)$$

Одну из переменных a и b можно выбрать произвольно. Положим $b' = -\frac{1}{3} \frac{b}{l}$ или $\frac{db}{b} = -\frac{1}{3} \frac{dl}{l}$. Отсюда $\ln b = \ln l^{-\frac{1}{3}}$. Значит $b = l^{-\frac{1}{3}}$. Подставив

результаты в (10.13), получим $\frac{da}{dl} l^{-\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3} g \sin \alpha$ или $da = -\frac{4}{3} g l^{\frac{1}{3}} dl \sin \alpha$.

Проинтегрировав, найдём $a = -\frac{4}{3}g \frac{l^{\frac{4}{3}}}{4} \sin \alpha + C = -gl^{4/3} \sin \alpha + C$.

Поэтому функция u , по (10.12), $u = ab = l^{-1/3} (C - gl^{4/3} \sin \alpha)$. В начале движения $u = \dot{l}^2 = 0$ и $l = l_0$. Значит, $C = gl_0^{4/3} \sin \alpha$ и

$$u = \dot{l}^2 = g \frac{l_0^{4/3}}{l^{1/3}} \sin \alpha - gl \sin \alpha = g \left(l_0^3 \sqrt{\frac{l_0}{l}} - l \right) \sin \alpha. \text{ И так как } v_c^2 = \dot{l}^2, \text{ а}$$

$l = l_0 - s$, то окончательно

$$v_c^2 = g \left[l_0^3 \sqrt{\frac{l_0}{l_0 - s}} - (l_0 - s) \right] \sin \alpha. \quad (10.14)$$

Так как с течением времени длина ленты в рулоне $l = l_0 - s$ уменьшается, то скорость центра рулона v_c увеличивается. И в конце движения, когда вся лента сматывается, при $s = l_0$, скорость конца ленты станет равной бесконечности.

Николай Степанович предложил решение ещё одной очень интересной задачи, в которой также определяется движение тела переменной массы. Вот эта задача (рис. 10.2).

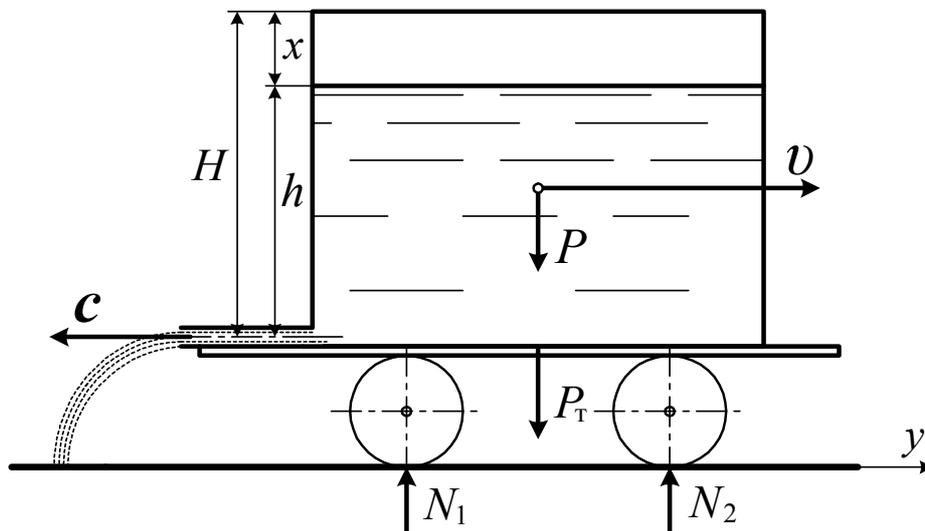


Рис.10.2

На тележке установлен бак, доверху заполненный жидкостью. В некоторый момент жидкость стала вытекать из горизонтальной сливной трубы.

И под действием реактивной силы тележка начала движение. Определим её движение, предполагая, что уровень жидкости всё время остаётся горизонтальным. Сопротивления движению учитывать не будем.

На примере решения этой задачи ещё раз продемонстрируем методику исследования движения тел переменной массы. Воспользуемся уравнением Мещерского (10.1), которое запишем так:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)} + \frac{dM}{dt} \vec{c}, \quad (10.15)$$

где \vec{c} – относительная скорость вытекающей жидкости.

Проектируя уравнение на горизонтальную ось (рис.10.2), получим: $M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} c$ или $M dv + dM c = 0$, где M – масса тележки с баком.

Она равна $M = M_T + M_{\text{жид}} = M_T + sh\rho$ (s – площадь бака, h – высота уровня жидкости, ρ – плотность жидкости). Масса отделяющихся частиц $dM = s\rho dh$. Так как скорость вытекающей жидкости по формуле Торичелли $c = \sqrt{2gh}$, то $h = \frac{c^2}{2g}$ и $dh = \frac{c}{g} dc$.

Дифференциальное уравнение движения получится таким:

$$\left(M_T + \frac{s\rho}{2g} c^2 \right) dv + s\rho \frac{c^2}{g} dc = 0.$$

Обозначим $2 \frac{M_T g}{s\rho} = \mu^2$. После несложных преобразований получим

уравнение
$$dv = -2 \frac{c^2}{\mu^2 + c^2} dc. \quad (10.16)$$

Решение его известно (это табличный интеграл): $v = -2 \left(c - \arctg \frac{c}{\mu} + C_1 \right)$.

Так как в начале движения при $t = 0$ $v_0 = 0$ и $c_0 = \sqrt{2gH}$, то $C_1 = \arctg \frac{c_0}{\mu} - c$. Значит, $v = 2 \left[(c_0 - c) - \mu \left(\arctg \frac{c_0}{\mu} - \arctg \frac{c}{\mu} \right) \right]$. И при $h = H - x$,

$$v = 2 \left\{ \left[\sqrt{2gH} - \sqrt{2g(H-x)} \right] - \mu \left[\arctg \frac{\sqrt{2gH}}{\mu} - \arctg \frac{\sqrt{2g(H-x)}}{\mu} \right] \right\}. \quad (10.17)$$

Наконец, по закону непрерывности струи протекающей жидкости за единицу времени, имеем равенство $s \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \pi d^2 c = \frac{1}{4} \pi d^2 \sqrt{2g(H-x)}$, где d – диаметр сливной трубы.

Обозначим для удобства $\frac{\pi d^2}{4s} \sqrt{2g} = a$. Тогда $\frac{dx}{dt} = a \sqrt{H-x}$. Разделив переменные и проинтегрировав, получим $-\sqrt{H-x} = at + C_2$. И так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_2 = -2\sqrt{H}$. Поэтому $-2\sqrt{H-x} = at - 2\sqrt{H}$ или $4(H-x) = (at - 2\sqrt{H})^2$ и $x = H - 0,25(at - 2\sqrt{H})^2$. Подставив это значение $x = x(t)$ в (10.17), получим зависимость скорости тележки от времени. График скорости $v = v(t)$, похожий на параболу, имеет вид, показанный на рис. 10.3.

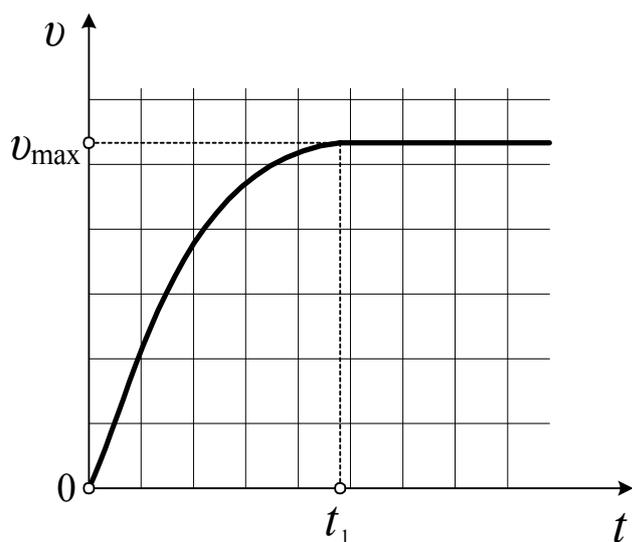


Рис.10.3 $H = 2$ м, $M_T = 1000$ кг

В момент $t_1 = \frac{2}{a} \sqrt{H}$, когда выльется вся жидкость ($x = H$), скорость станет максимальной, постоянной и равной

$$v_{\max} = 2 \left(\sqrt{2gH} - \mu \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2gH}}{\mu} \right). C$$

тоит заметить, что эта скорость не зависит от диаметра сливной трубы. Например, при $s = 4$ м²,

$$\mu = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 9,8}{4 \cdot 1000}} = 2,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$\text{и } v_{\max} = 2 \left(\sqrt{2g \cdot 2} - 2,2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2g \cdot 2}}{2,2} \right) = 2(6,26 - 2,7) = 7,12 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

БЕСЕДА ОДИННАДЦАТАЯ «ПРО РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИЛЫ»

- Слушай, Алексей... У тебя же каникулы начались, езжай домой. Отдыхать надо. А ты опять ко мне с какими-то вопросами. Ну, ладно, что тебя интересует, что тебе не нравится?

- Да, у меня, Николай Степанович, совсем маленький вопросик. Это о распределённой нагрузке. В учебниках по теоретической механике, да и в ваших лекциях, рассматривалась нагрузка распределённая только по прямой линии. Да и располагалась эта линия либо горизонтально, либо вертикально. И ни одной задачки не было, в которой нагрузка приложена к наклонной прямой и тем более к кривой линии.

- Ты считаешь, что надо о распределённых силах поговорить подробнее? Может ты и прав. Действительно, мы рассматриваем только простейшие случаи. Хотя, Алёша, есть учебники и задачки, в которых можно найти примеры нагрузки распределённой и по наклонной прямой линии и сделаны замечания о решении задач с неравномерно распределёнными силами и не только по прямой линии. Кстати, и я на лекции говорил о силе, распределённой по дуге окружности.

- Я помню, Николай Степанович. Но ваш пример довольно примитивен, прост.

- Ишь-ты, уж начал критиковать и учителя своего! Ладно, не сержусь. Ты прав. Пойдём на кафедру, я покажу подготовленную недавно статейку как раз на эту тему. Ты словно предугадал её появление. Опубликовать её я ещё не успел. Так что ты первый, кому её показываю. Вот рукопись этой статьи. Но я статью тебе не дам, просто расскажу её содержание.

- Вот смотри... Распределённую нагрузку, действующую на точки тела, я бы разделил на два класса. Во-первых, на *собственные силы*, силы принадлежащие самим точкам, которые не зависят от того, как деформировано тело и как оно расположено. Такие силы называют ещё объёмными, или массовыми силами, то есть действующими на единицу объёма или массы. Подобные силы появляются, когда тело находится в однородном силовом поле. Например, сила тяжести тела, вес, это распределённые силы, распределённые по всем его точкам. Мало того, они всегда направлены вертикально и равнодействующая их, вес всего тела, сосредоточенная сила, приложенная к центру тяжести и равная сумме этих параллельных сил.

К таким силам можно отнести также и силы электрического или магнитного полей.

Интенсивность q таких собственных сил, например, сил тяжести, определяется как сила, равная весу единицы объёма, площади или, если тело – линия (рис.11.1), единицы длины. А размерность интенсивности равна размерности силы, делённой на размерность площади, объёма или длины.

Конечно, интенсивность q может быть не постоянной, не равномерно распределённой по длине, если эта линия не однородна по массе. И тогда равнодействующая их, вес всей линии будет сосредоточенной силой и может быть определена как криволинейный интеграл:

$$Q = P = \int_{(l)} q(l) \cdot dl.$$

А точка приложения или линия действия равнодействующей находится по правилам определения центра тяжести с помощью теоремы Вариньона

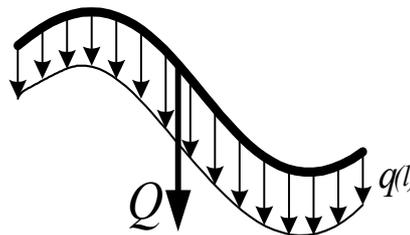


Рис.11.1

Второй класс – силы также распределённые, но действующие на данное тело со стороны другого тела или со стороны среды, в которой данное тело находится, например, при действии жидкости или газа (воды, ветра и т.п.). Такими силами является и вес частиц какого-то тяжелого материала, насыпанного на тело. Подобную нагрузку называют ещё *поверхностными силами*.

На рис.11.2 показана неравномерно распределённая поверхностная нагрузка, действующая на наклонную прямую, например, действие веса снега на часть крыши дома. (Здесь и в дальнейшем мы будем представлять линию в виде ленты, имеющей ширину. То есть она практически больше похожа на узкую поверхность).

Заметим, что эти параллельные силы интенсивности q можно условно перенести по линиям действия на горизонтальную прямую, на ось x . Но тогда интенсивность будет определяться другой закономерностью $q' = q(x)$, а величина равнодействующей

$$Q = \int_0^a q(x) dx$$

останется прежней так же, как и линия действия её.

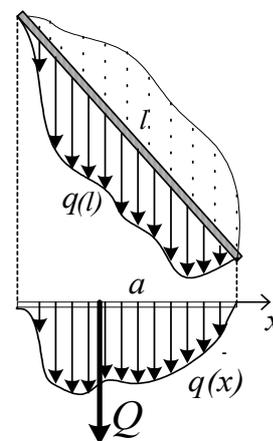


Рис.11.2

Нередко эти поверхностные силы интенсивности q оказываются перпендикулярными прямой линии, а при действии на кривую линию, направленными по нормальям к ней, если считать эти линии гладкими, не учитывать трение и какие-то другие препятствия, ограничивающие скольжение нагрузки. К таким нагрузкам относится, например, давление жидкости или газа как в состоянии покоя, так и при движении.

Вспомни, Алёша, физику, где доказывалось, что давление идеальной невязкой жидкости всегда направлено по нормальям к поверхности тела.

- Действительно (рис.11.3), если разложить силу интенсивности \vec{q} на две составляющие по нормали к линии \vec{q}_n и по касательной к ней \vec{q}_τ

($\vec{q} = \vec{q}_n + \vec{q}_\tau$), то при отсутствии трения должна быть равной нулю \vec{q}_τ , и останется тогда только нормальная составляющая \vec{q}_n . Если линия прямая, расположенная под углом α к вертикали, то действие среды на прямую будет определяться лишь нормальной интенсивностью $q_n = q \cos \alpha$. И равнодействующая интенсивности будет равна $N = q_n \cdot l = q \cos \alpha \cdot l = q a = Q$, то есть равна равнодействующей сил, приложенных к линии со стороны среды.

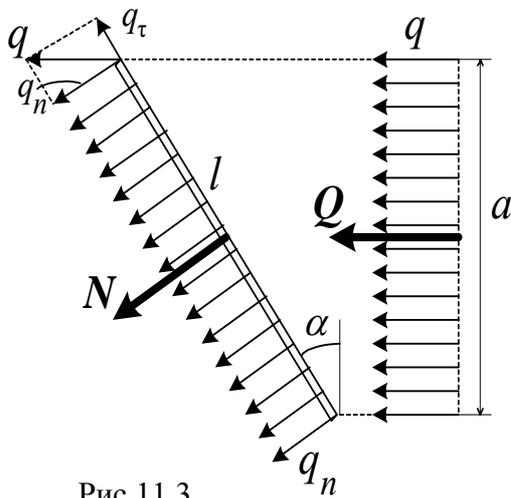


Рис.11.3

На рис.11.4 рассмотрен более сложный пример. Показано действие движущегося потока жидкости интенсивности q на дугу, равную четверти окружности радиусом R .

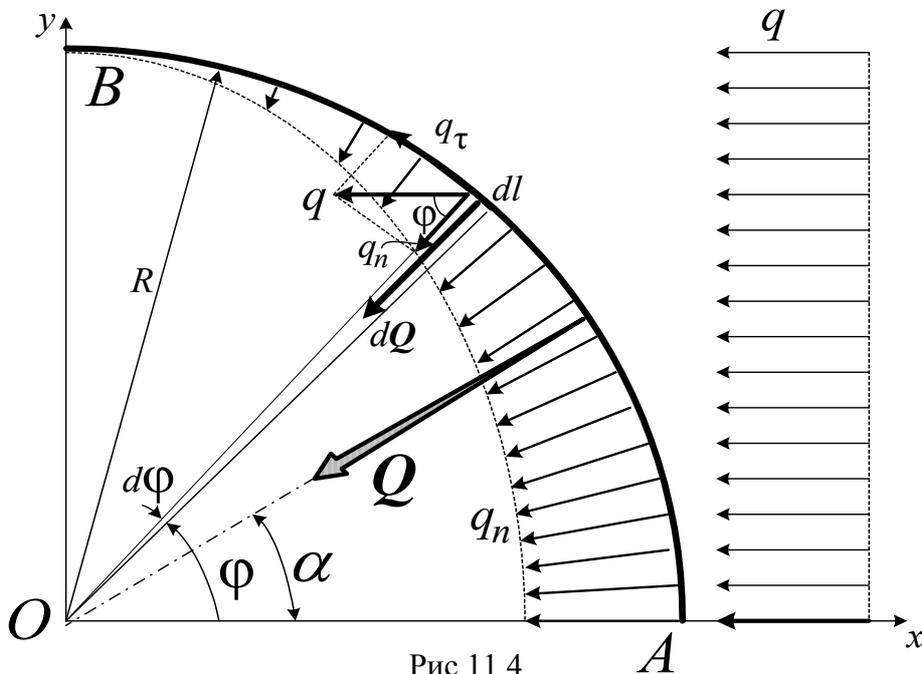


Рис.11.4

Если каждую силу интенсивности \vec{q} разложить на составляющие, касательную \vec{q}_τ и нормальную \vec{q}_n и учесть только нормальную составляющую, направленную по радиусу дуги, получится распределённая неравномерная нагрузка интенсивности $q_n = q \cos \varphi$, где φ – угол, определяющий точку приложения данной силы \vec{q}_n .

Сила, действующая в данном месте на участок длиной dl , элементарная сила $dQ = q_n dl = q_n R d\varphi = q R \cos \varphi \cdot d\varphi$.

Проекция на ось x равнодействующей всей нагрузки

$$Q_x = -\int_A^B dQ \cos \varphi = -qR \int_0^{0,5\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = -qR \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right)_0^{0,5\pi} = -\frac{1}{4} qR \pi.$$

Проекция на ось y

$$\begin{aligned} Q_y &= -\int_A^B dQ \cdot \sin \varphi = -qR \int_0^{0,5\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} qR \int_0^{0,5\pi} \sin 2\varphi \cdot d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} qR \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right)_0^{0,5\pi} = -\frac{1}{2} qR. \end{aligned}$$

Величина всей равнодействующей нагрузки на дугу

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \frac{1}{4} qR \sqrt{\pi^2 + 4} = 0,93qR.$$

Вектор равнодействующей сходящихся сил \vec{q}_n направлен по радиусу дуги к центру O под углом α , тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_y}{Q_x} = \frac{2}{\pi} = 0,637$.

И угол $\alpha = 32,48^\circ$.

Интересную и полезную зависимость обнаружил С.Тимошенко («Инженерная механика», 1960 г., с.149).

Равномерная нагрузка, равномерное давление q_n на любую кривую эквивалентна такому же давлению, действующему на хорду AB этой линии (рис.11.5).

Доказывается это просто. Разложим силу

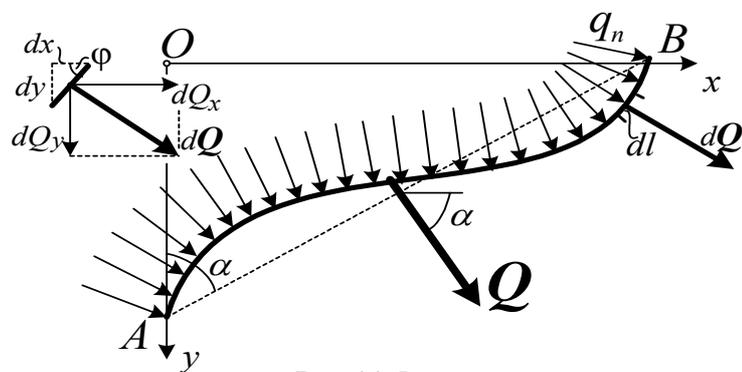


Рис.11.5

$d\vec{Q}$, действующую на элемент дуги длиной dl на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$dQ_x = dQ \cdot \sin\varphi = q_n dl \frac{dy}{dl} = q_n dy, \quad dQ_y = dQ \cdot \cos\varphi = q_n dl \frac{dx}{dl} = q_n dx.$$

Тогда проекции равнодействующей \vec{Q} на оси:

$$Q_x = \int_0^{OA} q_n dy = q_n \cdot OA; \quad Q_y = \int_0^{OB} q_n dx = q_n \cdot OB$$

и её величина, модуль, $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = q_n \sqrt{OA^2 + OB^2} = q_n \cdot AB$. Направлена

равнодействующая под углом α , тангенс которого $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q_y}{Q_x} = \frac{OB}{OA}$, то есть

перпендикулярно хорде AB . Иллюстрацией к этому являются и результаты, полученные в примере в §3, гл. VI (рис.6.10).

- Ну, всё, Алексей, хватит на сегодня. До сентября больше не появляйся, отдыхай.

ОТВЕТЫ НА ТЕСТЫ

С – 1: $X_1 = 0, Y_1 = 2,0 \text{ Н}, V_1 = 1,0 \text{ Н}; X_2 = 2,6 \text{ Н}, Y_2 = -1,5 \text{ Н}, V_2 = 1,5 \text{ Н}.$

$$M_A(\vec{F}_1) = M_B(\vec{F}_1) = 0, \quad M_C(\vec{F}_1) = M_D(\vec{F}_1) = -24,24 \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$M_A(\vec{F}_2) = -18,19 \text{ Н}\cdot\text{см}, \quad M_B(\vec{F}_2) = M_D(\vec{F}_2) = 0, \quad M_C(\vec{F}_2) = 18,19 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

С – 2: $X_1 = 0, Y_1 = -F_1, Z_1 = 0; X_2 = -F_2 \cos\alpha, Y_2 = 0, Z_2 = F_2 \sin\alpha, X_3 = -F_3 \cos\beta \cdot \sin\gamma,$

$$Y_3 = F_3 \cos\beta \cdot \cos\gamma, \quad Z_3 = -F_3 \sin\beta.$$

$$M_X(\vec{F}_1) = F_1 a, \quad M_Y(\vec{F}_1) = M_Z(\vec{F}_1) = 0; \quad M_X(\vec{F}_2) = F_2 \sin\alpha \cdot c, \quad M_Y(\vec{F}_2) = -F_2 \sin\alpha \cdot b,$$

$$M_Z(\vec{F}_2) = F_2 \cos\alpha \cdot c; \quad M_X(\vec{F}_3) = F_3 \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot a, \quad M_Y(\vec{F}_3) = 0, \quad M_Z(\vec{F}_3) = F_3 \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot b.$$

С – 3: $\bar{Z}_A, \bar{m}_x, \bar{m}_y; \bar{X}_B, \bar{Z}_B; \bar{X}_C, \bar{Z}_C, \bar{m}_x, \bar{m}_z.$

К – 1: $v_c = 3,46 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}, v_1 = v_3 = 6,93 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}, v_2 = 9,46 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}, v_4 = 2,54 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}.$

К – 2: $W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 40 \text{ см}\cdot\text{с}^{-2}, W_C = 0; C_v - \text{ в точке 4}, C_W - \text{ в точке C}.$

Д – 1: Вертикальная прямая и парабола.

Д – 2: Автомобиль двигался назад.

Д – 3: В северном – правые, в южном – левые.

Д – 4: $1,5r.$

Д – 5: Все зависит от выбора нулевой эквипотенциальной поверхности, плоскости.

Д – 6: Не изменится в соответствии с законом движения центра масс.

Д – 7: Параллельно этой прямой на расстоянии $1,4r.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем курсе теоретической механики в каждом разделе даны примеры, иллюстрирующие теоретический материал, и порядок решения соответствующих задач. Но для успешного усвоения теоретического материала этого недостаточно. Необходимо дополнительно решить определенное количество задач и выполнить несколько специальных курсовых работ. Для этого здесь после каждого раздела даётся несколько контрольных тестов.

В соответствии с учебным планом и программой сокращенных курсов для определённых специальностей по усмотрению кафедры могут быть исключены или вынесены на самостоятельное изучение некоторые разделы или пункты и понятия из настоящего учебного пособия.

Из раздела «Статика»:

1. Центр параллельных сил. Центр тяжести симметричных тел, тел составленных из плоскостей и стержней (VI, § 1, 2).

2. Трение скольжения гибкой нити по цилиндрической поверхности.

Формула Эйлера (VII, в § 1).

Из раздела «Кинематика»:

1. Вращение тела вокруг неподвижной точки (IX, § 3).

2. План скоростей (IX, § 4, п.2).

3. Ускорение Кориолиса при сложном движении точки (X, § 3) можно дать без доказательства.

4. Общий случай движения тела (XI, § 2).

Из раздела «Динамика»:

1. Момент инерции тела относительно произвольных осей, главные оси инерции и главные моменты инерции (XIV, в §2).

2. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, и теорема Кенига (XV, § 3, п.4).

3. Главные моменты сил инерции тела относительно осей, перпендикулярных неподвижной оси вращения (XVI, § 2 в п.2).

4. Обобщенные силы инерции (XVIII, § 4).

5. Вывод уравнений Лагранжа (XVIII, § 5).

6. Теорема об изменении количества движения (XIX, § 2), теорема о моменте количества движения (XIX, § 3) и дифференциальные уравнения вращения тела (XIX, § 4, § 5).

7. Основы теории колебаний (XX). Если теорию колебаний решено оставить в программе, то можно исключить решение дифференциального уравнения колебаний при резонансе ($p = \kappa$) и явление биений (XX, в § 4), а также влияние сопротивления на вынужденные колебания (XX, § 5).

8. Удар (XXI).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Александров, В. В.** О критериях статической определимости задач статики: сб. науч.-метод. ст. по теорет. механике / В. В. Александров. – М. : Высш. шк., 1981. Вып. 11. – С. 102 – 107.
2. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики: В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1971. – Т. 2. – 463 с.
3. **Космодемьянский, А. А.** Курс теоретической механики / А. А. Космодемьянский. – М. : Гос. уч.-пед. изд-во, 1955. – 656 с.
4. **Ландау, Л. Д.** Физические тела / Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский. – М. : Наука, 1982. – 208 с.
5. **Литлвуд, Дж.** Математическая смесь / Дж. Литлвуд. – М. : Наука, 1965. – 151 с.
6. **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики: В 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1955. – Т. 2. – 595 с.
7. **Новожилов, А. И.** О работе силы: сб. науч.-метод. ст. по теорет. Механике / А. И. Новожилов. – М. : Высш. шк., 1981. – Вып. 11. – С. 108 – 113.
8. **Суслов, Г. К.** Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – М. : Гостехиздат, 1946. – 656 с.
9. **Файн, А. М.** Сборник задач по теоретической механике / А. М. Файн. – М. : Высш. шк., 1978. – 190 с.

Учебное издание

Новожилов Альберт Иванович

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Редактор А.П. Володина

Технический редактор Н.В. Тупицына

Корректор В.В. Гурова

Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 13.01.06.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 14,26. Тираж 400 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.