Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

В двух частях

Часть 1

Составители:
Е.П. ДАВЛЕТЯРОВА
А.А. ЖУКОВА

Владимир 2012

УДК 519.92
ББК 22.18 р30
М54

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю.А. Алхутов

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М54 **Методические** рекомендации к лабораторным работам по дисциплине «Численные методы и исследование операций». В 2 ч. Ч. 1. / Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых ; сост. : Е. П. Давлетярова, А. А. Жукова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2012. – 44 с.

Содержат краткий теоретический материал и задания к лабораторным работам по темам дисциплины «Численные методы и исследование операций» профессионального цикла учебных планов подготовки бакалавров по направлению 050100 – педагогическое образование профилей «Информатика и физика», «Математика и информатика».

Предназначены для студентов-бакалавров 2 – 3-го курсов очной формы обучения.

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 519.92
ББК 22.18 р30

Предисловие

Одна из дисциплин профессионального цикла учебных планов подготовки бакалавров по направлению 050100 – педагогическое образование профилей «Информатика и физика», «Математика и информатика», составленных в соответствии с ФГОС ВПО третьего поколения, называется «Численные методы и исследование операций». Аккумулируя в себе знания, полученные студентами по математике и информатике, данная дисциплина способствует образованию у них навыков использования компьютера как вспомогательного средства для решения математических задач. Тем самым у бакалавров вырабатываются следующие общекультурные компетенции (ОК):

- владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);
- готовность использовать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки информации, готовность работать с компьютером как средством управления информацией (ОК-8).

Одной из содержательных линий школьного курса информатики является раздел «Численные методы». Знания, приобретенные школьниками при его изучении, используются в дальнейшем в рамках раздела «Формализация и моделирование». Именно поэтому одна из профессиональных компетенций, вырабатываемых у студентов при изучении дисциплины «Численные методы и исследование операций», – это способность разрабатывать и реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1).

Данные методические рекомендации содержат краткий теоретический материал и задания к лабораторным работам по основным способам решения задач дисциплины «Численные методы»; приведены 12 лабораторных работ, каждая из которых содержит несколько вариантов заданий.

Отличительной особенностью издания является наличие алгоритмов приближенного решения математических задач, легко транслируемых на любые языки структурного программирования высокого уровня. Приведенные в рекомендациях алгоритмы настолько формализованы, что могут быть реализованы даже старшими школьниками профильных классов с углубленным изучением информатики.

Лабораторная работа № 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ БИСЕКЦИИ, ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Решение уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

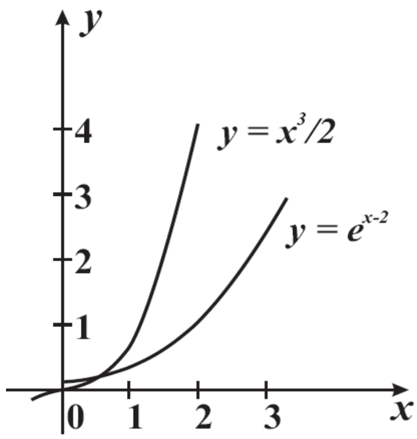
Решить такое уравнение – это значит установить, имеет ли оно корни, сколько их и найти их значения с нужной точностью. Подавляющее число уравнений не имеет аналитических формул для своих корней, поэтому на практике чаще используют различные приближенные (численные методы) решения уравнений. Приближенные методы нахождения корней в основном состоят из двух этапов.

Первый этап. Отделение корней, т.е. установление тесных промежутков, содержащих только один корень. Для этого, в частности, можно использовать графические методы.

Задача. Графически отделить отрезок с корнем для уравнения

$$e^{x-2} - \frac{1}{2}x^3 = 0.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду $e^{x-2} = \frac{1}{2}x^3$ и построим графики функций, стоящих в левой и правой части равенства.



На рисунке видно, что на отрезке $[0; 1]$ уравнение имеет единственный корень.

Второй этап. Уточнение приближенного значения корня до некоторой заданной степени точности.

При этом будем предполагать, что корень уравнения (1) на некотором отрезке $[a,\ b]$ уже отделен. Заметим, что существуют различные понятия точности. О том, как точно решено уравнение, можно судить, например, по тому, насколько значение $f(x)$ близко к 0 или по тому, насколько найденное решение x^* близко к точному решению x, и т.д. Нельзя сказать, что верно какое-то одно понятие точности, всё зависит от условий конкретной задачи.

Решение уравнения $f(x) = 0$ методом бисекции (деления отрезка пополам)

В основе данного метода лежит следующая *теорема*:

1. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и на концах этого принимает значения разных знаков, то внутри него, хотя бы в одной точке, она принимает значение 0.

2. Если функция $f(x)$ к тому же и монотонна, то корень внутри отрезка $[a, b]$ единственен.

Пусть дано уравнение (1), где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, т.е. функция удовлетворяет указанной выше теореме. Для нахождения корня уравнения (1), принадлежащего отрезку $[a, b]$, делим этот отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения (1). Если $f(c) \neq 0$, что практически наиболее вероятно, то возможны два случая:

- $f(x)$ меняет знак на $[a, c]$;
- $f(x)$ меняет знак на $[c, b]$.

Выбирая тот из отрезков, на котором функция меняет знак, снова делим его пополам и т.д. Продолжая процесс половинного деления дальше, мы либо на каком-то этапе получим точный корень уравнения (1), либо сможем дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего этот корень, т.е. вычислить его с любой наперёд заданной точностью.

Алгоритм решения уравнения (1) методом бисекции имеет вид:

1. Ввод данных: концы отрезка $[a, b]$ и точность вычисления ε.
2. Проверка условий применимости метода:

а) функция $f(x)$ должна быть непрерывной на отрезке $[a, b]$ (данное условие проверить на компьютере нельзя, это необходимо сделать "вручную");

б) функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ должна принимать разные по знаку значения, т.е. необходимо проверить, справедливо неравенство $f(a)f(b) < 0$ или нет.

Если $f(a)f(b) > 0$, то метод неприменим. Конец алгоритма.

Если $f(a) = 0$, то a – корень уравнения (1). Конец алгоритма.

Если $f(b) = 0$, то b – корень уравнения (1). Конец алгоритма.

3. Нахождение середины отрезка $[a, b]$ – точки $c = \frac{a+b}{2}$.
4. Нахождение $f(c)$.

Если $f(c) = 0$, то c – корень уравнения (1). Конец алгоритма.

5. Проверка точности.

Точность будет достигнута, как только длина рассматриваемого отрезка $[a, b]$ станет меньше 2ε, т.е. будет выполнено одно из условий $|b - a| < 2\varepsilon$ или $|a - c| < \varepsilon$. Действительно, в этом случае в силу того, что точное решение ξ и приближённое решение c принадлежат одному и тому же отрезку $[a, b]$ и c – середина этого отрезка, то расстояние между ξ и c будет не больше ε, т.е. требуемая точность будет достигнута.

Итак, проверяем условие: если $|a - b| < 2\varepsilon$, то c – корень уравнения (1). Конец алгоритма.

6. Выбор отрезка, с которым будем работать дальше.

Если $f(a)f(c) < 0$, то дальше надо работать с отрезком $[a, c]$, иначе – с отрезком $[c, b]$. Для того чтобы не вводить новых переменных, осуществим следующее переприсваивание: если $f(a)f(c) < 0$, то b присвоим значение c (обозначение $b := c$), иначе $a := c$. В этом случае концы отрезка, с которым работаем, всегда будут находиться в переменных a, b.

7. Применение данного алгоритма к новому отрезку $[a; b]$, т.е. переходим к п. 3.

Метод хорд

Метод половинного деления можно ускорить, если использовать значения функции f, а не только их знаки. Одним из методов, учитывающих эту информацию, является метод хорд.

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a, b]$, причем $f(a)f(b) < 0$, $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, f' и f'' сохраняют знак на $[a, b]$. График функции $y = f(x)$ проходит через точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

Метод хорд заключается в следующем: через точки A и B проводим прямую, и точка ее пересечения с осью Ox будет приближением нашего решения: $c_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$.

В отличие от метода бисекции, при использовании которого приближение к корню может осуществляться с двух сторон, метод хорд дает приближение только с одной стороны. В зависимости от того, с какой стороны идет приближение, используются разные формулы. Если приближение происходит со стороны точки A при неподвижной точке B, то используется формула

$$c_n = c_{n-1} - \frac{b - c_{n-1}}{f(b) - f(c_{n-1})} f(c_{n-1}). \qquad (2)$$

Если неподвижной остается точка A, то используется формула

$$c_n = c_{n-1} - \frac{c_{n-1} - a}{f(c_{n-1}) - f(a)} f(c_{n-1}). \qquad (3)$$

Можно указать простой признак того, когда следует применять формулу (2), а когда (3): неподвижным должен оставаться тот из концов отрезка $[a, b]$, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.

Алгоритм решения уравнения $f(x) = 0$ *методом хорд* на компьютере имеет следующий вид:

1. Ввод данных: концы отрезка $[a, b]$ и точность вычисления ε.
2. Проверка условий применимости метода (проверка осуществляется без использования компьютера).
3. Выбор первого приближения: если $f(a)f''(a) > 0$, то первое приближение $c_0 = b$, неподвижный конец $d = a$; если $f(b)f''(b) > 0$, то первое приближение $c_0 = a$, неподвижный конец $d = b$.
4. Проверка точности: если $|f(c_0)| < \varepsilon$, то c_0 – корень. Конец алгоритма.
5. Вычисление следующего приближения: $c_0 = c_0 - \frac{c_0 - d}{f(c_0) - f(d)} f(c_0)$.
6. Переход к п.4.

В программе должны быть функции для вычисления f, f''.

Метод касательных

Метод касательных – это еще один способ решения уравнений вида (1). Условия применимости этого метода такие же, как и метода хорд.

Вычисления происходят по формуле $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$, где c_n – предыдущее приближение.

Алгоритм решения уравнения (1) методом касательных:

1. Ввод данных: концы отрезка $[a, b]$ и точность вычисления ε.
2. Проверка условий применимости метода (вручную).

3. Выбор первого приближения: если $f(a)f''(a) > 0$, то первое приближение $c = a$; если $f(b)f''(b) > 0$, то первое приближение $c = b$.

4. Проверка точности: если $|f(c)| < \varepsilon$, то c – корень. Конец алгоритма.

5. Вычисление следующего приближения: $c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$.

6. Переход к п. 4.

В программе должны быть функции для вычисления f, f', f''.

Задания

I. Напишите программу решения уравнений методом бисекции с заданной точностью.

II. Напишите программу решения уравнений методом касательных с заданной точностью.

III. Напишите программу решения уравнений методом хорд с заданной точностью.

IV. Используя методы бисекции, касательных, хорд, найдите с заданной точностью ε одни из корней уравнения. Сравните полученные результаты.

1. $x - \sin x = 0{,}25$, $\varepsilon = 0{,}00001$.
2. $\sqrt{x} - \cos(0{,}387x) = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
3. $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$.
4. $3x - \cos x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}000000001$.
5. $\mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}1) = x^2$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
6. $\mathrm{ctg}(1{,}05x) - x^2 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$.
7. $x \lg x - 1{,}2 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
8. $\mathrm{ctg}\, x - \frac{x}{4} = 0$, $\varepsilon = 0{,}0000001$.
9. $x^2 - 20 \sin x = 0$, $\varepsilon = 0{,}00001$.
10. $\mathrm{tg}(0{,}47x + 0{,}2) = x^2$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
11. $2x - \lg x - 7 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$.
12. $3x - \cos x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
13. $x^2 + 4 \sin x = 0$, $\varepsilon = 0{,}01$.
14. $\mathrm{ctg}\, x - \frac{x}{5} = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$.
15. $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.

Лабораторная работа № 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Уравнение $F(x) = 0$ всегда можно переписать в следующем виде: $f(x) = x$ и тогда для его решения используют метод последовательных приближений, теоретическая основа которого – теорема Банаха.

Теорема. Пусть f – сжимающее отображение полного метрического пространства K в себя. Тогда существует единственная точка этого пространства, переводимая отображением f в себя.

Это означает, что существует единственное решение уравнения $f(x) = x$, найти которое можно следующим образом: берется произвольная точка x_0, принадлежащая K, и составляется последовательность

$$x_1 = f(x_0),\quad x_2 = f(x_1),\quad \dots,\quad x_n = f(x_{n-1}),\quad \dots$$

Каждый член последовательности будет все ближе и ближе к искомому x, т.е. $x_n \to x$.

Рассмотрим частный случай. В качестве K возьмем отрезок $[a, b]$. Тогда $f(x)$ − функция, заданная на отрезке $[a, b]$. При этом должны выполняться следующие условия:

1) из того, что $x \in [a, b]$ должно следовать, что $f(x) \in [a, b]$ − условие того, что f − отображение $[a, b]$ в себя;

2) $|f(x) - f(y)| < \lambda |x - y|$, где $0 < \lambda < 1$ − условие того, что отображение f является сжимающим.

В качестве λ достаточно взять $\max_{[a,\ b]}|f'(\xi)|$.

Алгоритм решения уравнения $f(x) = x$ методом итераций имеет вид:

1. Ввод данных: концы отрезка $[a, b]$, точность ε и λ.
2. Выбор первого приближения $x_0 = \frac{a+b}{2}$.
3. Вычисляем $x_1 = f(x_0)$.
4. Вычисляем $|x_1 - x_0| \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}$ и сравниваем с ε.

Если $|x_1 - x_0| \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} > \varepsilon$, то переходим к п. 3, предварительно присвоив x_0 значение x_1, иначе x_1 − корень уравнения. Конец алгоритма.

Рассмотрим один из способов приведения уравнения $F(x) = 0$ к итерационному виду. Если $F'(x) > 0$, то умножим уравнение $F(x) = 0$ на $-\gamma$ и прибавим x к правой и левой частям уравнения:

$$x = x - \gamma F(x).$$

Если $F'(x) < 0$, то $x = x + \gamma F(x)$.

Обозначим $x - \gamma F(x)$ через $f(x)$. Подберем γ так, чтобы $|f'(x)| < 1$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$m \leq |F'(x)| \leq M.$$

Тогда в качестве γ возьмем $\frac{1}{M}$. Действительно, в этом случае

$$f'(x) = 1 - \gamma F'(x),$$

$$1 - \gamma M \leq |f'(x)| \leq 1 - \gamma m,$$

$$|f'(x)| \leq 1 - \frac{m}{M}.$$

Тогда в качестве λ можно взять $1 - \frac{m}{M} < 1$.

Рассмотрим ***пример***. На отрезке $[0{,}1, 1]$ уравнение $x \cdot 2^x = 1$ необходимо привести к итерационному виду. Перенесем все слагаемые в одну часть $1 - x \cdot 2^x = 0$ и введем функцию $F(x) = 1 - x \cdot 2^x$, тогда $F'(x) = -2^x - x \cdot 2^x \ln 2$.

Найдем m и M. Для этого выясним, имеет ли уравнение $F''(x) = 0$ корни на рассматриваемом отрезке и вычислим значение функции $F'(x)$ в найденных точках и на концах отрезка. Итак,

$$F''(x) = -2^{x+1} \ln 2 - x \cdot 2^x \ln^2 2,$$

$$F''(x) = 0 \Rightarrow -2^x \ln 2\,(2 + x \ln 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\ln 2}.$$

Очевидно, что $x \notin [0{,}1; 1]$. Вычислим значения F' в точках 0,1 и 1:

$$F'(0{,}1) = -2^{0{,}1} - 0{,}1 \cdot 2^{0{,}1} \ln 2 \approx -1{,}146,$$

$$F'(1) = -2 - \ln 2 \approx -3{,}386.$$

Таким образом, найдены $m \approx -1{,}15$ и $M \approx -3{,}386$ (округление происходит в большую по модулю сторону).

В этом случае исходное уравнение можно переписать в следующем виде: $x = x \pm \frac{1}{4}(1 - x \cdot 2^x)$.

Выбор знака перед коэффициентом $\frac{1}{4}$ зависит от знака производной функции $F(x)$. $F'(x) = -2^x - x \cdot 2^x \ln 2 < 0$ на отрезке $[0{,}1; 1]$, поэтому перед коэффициентом $\frac{1}{4}$ должен стоять знак плюс:

$x = x + \frac{1}{4}(1 - x \cdot 2^x)$. В качестве λ в рассматриваемом примере можно взять величину $1 - \frac{1{,}146}{3{,}386}$.

Задания

I. Напишите программу решения уравнений методом итераций с заранее заданной точностью.

II. Отделите отрезок с корнем, приведите уравнение к итерационному виду и решите его с помощью метода итераций.

1. $x \cdot 2^x = 1$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
2. $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
3. $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$.
4. $3x - \cos x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}000000001$.
5. $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
6. $\operatorname{ctg}(1{,}05x) - x^2 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$.
7. $x \lg x - 1{,}2 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
8. $(2-x)e^x = 0$, $\varepsilon = 0{,}0000001$.
9. $x^2 - 20\sin x = 0$, $\varepsilon = 0{,}00001$.
10. $2{,}2x - 2^x = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
11. $2x - \lg x - 7 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$.
12. $3x - \cos x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
13. $x^2 + 4\sin x = 0$, $\varepsilon = 0{,}01$.
14. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$.
15. $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}00001$.

Лабораторная работа № 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ЖОРДАНА – ГАУССА

Пусть дана система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

основная матрица которой невырожденная.

Основная идея метода Жордана – Гаусса заключается в том, чтобы, используя равносильные преобразования, привести основную матрицу системы к единичной. В этом случае решением системы будет столбец свободных членов.

Алгоритм решения системы линейных уравнений на компьютере по методу Жордана – Гаусса будет иметь следующий вид:

1. Ввод данных: количество неизвестных n; расширенная матрица системы A размером $n(n+1)$.

2. Открываем цикл по номеру столбца j. В цикле:

а) выбираем ведущий элемент, т.е. самый большой по модулю элемент в рассматриваемом столбце, начиная с диагонального и ниже. В качестве ведущего элемента необходимо взять наибольший по модулю элемент. Строка, в которой находится ведущий элемент, тоже называется ведущей. Если ведущий элемент равен нулю, то метод неприменим. Конец алгоритма;

б) меняем местами ведущую строку и строку с номером j;

в) делим ведущую строку на ведущий элемент;

г) по номеру строки обнуляем ведущий столбец. Для этого из каждой строки, кроме ведущей, надо вычесть ведущую строку, умноженную на соответствующий элемент.

3. Выводим на экран полученные решения, т.е. $(n+1)$-й столбец матрицы A. Конец алгоритма.

Задания

I. Напишите программу решения системы линейных уравнений методом Жордана – Гаусса.

II. Решите систему линейных уравнений и проверьте найденное решение.

1. $$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8, \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5, \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3, \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 5{,}7x_1 - 12{,}5x_2 + 9{,}2x_3 - 10{,}1x_4 = 14{,}3, \\ 5x_1 - 3x_2 - 14{,}9x_3 + 11{,}2x_4 = 16{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 2{,}4x_2 - 18{,}8x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 2x_4 = 8, \\ 7x_1 - 11x_2 + x_3 - 6x_4 = -1, \\ 12x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7{,}2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = -4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = -6{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = 1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = -7{,}2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 19x_3 - 10x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 - 14x_3 + 13x_4 = 6, \\ 7x_1 - 11x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -1, \\ 14x_1 + 23x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 3, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4, \\ 5{,}7x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6, \\ 7{,}1x_1 + 11x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = -7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 7{,}3x_1 + 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 21{,}4x_2 + 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 44x_1 - 25x_2 + 192x_3 - 108x_4 = 43, \\ 55x_1 - 93x_2 - 142x_3 + 132x_4 = 68, \\ 71x_1 - 115x_2 + 53x_3 - 67x_4 = -18, \\ 142x_1 + 234x_2 - 88x_3 + 53x_4 = 72. \end{cases}$

III. Решите систему линейных уравнений, если известно количество неизвестных и формулы, по которым вычисляются элементы основной матрицы системы $a_{i,j}$ и столбца свободных членов b_i. Проверьте найденное решение. Что является точным решением системы? Обоснуйте полученные результаты.

1. $n = 13,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $\mathrm{b_i} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_{i,j}}.$
2. $n = 11,$ $a_{i,j} = \frac{10}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$
3. $n = 10,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_{i,j}.$
4. $n = 15,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} 5a_{i,j}.$
5. $n = 12,$ $a_{i,j} = \frac{-1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$
6. $n = 13,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} - a_{i,j}.$
7. $n = 10,$ $a_{i,j} = \frac{2}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j 2a_{i,j}.$
8. $n = 11,$ $a_{i,j} = \frac{-10}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$
9. $n = 15,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} 100a_{i,j}.$
10. $n = 13,$ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j},$ $b_i = \sum_{j=1}^{n} 0{,}5a_{i,j}.$

Лабораторная работа № 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Пусть дана неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \tag{5}$$

Используя систему (5) и выбрав начальную точку $x^{(0)}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$, можно построить итерационную последовательность точек n-мерного пространства (аналогично методу итерации для уравнений):

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \tag{6}$$

где $x^{(1)} = F\left(x^{(0)}\right), x^{(2)} = F\left(x^{(1)}\right), \dots$.

Оказывается, что при определенных условиях последовательность (6) сходится и ее предел является решением системы (5), а значит и системы (4).

Теоретической основой данного метода выступает следующая теорема.

Теорема. Если F – сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, то существует единственная неподвижная точка x такая, что $x = Fx$.

Условия, накладываемые на отображение, определяемое правой частью системы (5), зависят от используемой метрики.

Пусть x и y – две точки n-мерного пространства.

1. Если используется метрика
$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$
то условием того, что отображение, задаваемое правой частью системы (5), будет
$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$
т.е. максимальная из систем модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (5), взятых по строкам, должна быть меньше единицы.

2. Если используется метрика
$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$
то условие будет иметь вид
$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$
т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (5), взятых по строкам, должна быть меньше единицы.

Для решения системы (5) методом итераций достаточно установить, что отображение, задаваемое правой частью системы (5), является сжимающим. Если это так, то метод итераций применим к системе (5), причем ее решение может быть получено с любой точностью при произвольном начальном приближении. Считается, что точность ε достигнута, если

$$\rho\left(x, x^{(k)}\right) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho\left(x^{(k-1)}, x^{(k)}\right) < \varepsilon.$$

Приведение системы линейных уравнений к итерационному виду

Пусть дана система (4). Как из нее получить систему вида (5), удовлетворяющую условиям сжимающего отображения? Существует несколько способов:

1. Если у системы (4) диагональные элементы основной матрицы значительно преобладают над остальными элементами, то в этом случае все уравнения системы (4) надо поделить на соответствующие диагональные элементы и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1. В результате получится система, у которой все $\left|\alpha_{ij}\right| < 1$.

Теперь необходимо проверить условия сходимости метода. Если ни одно из них не выполняется, то надо вернуться к исходной системе и попробовать провести какие-нибудь другие преобразования.

2. Если основная матрица системы $LX = K$ близка к единичной E, то систему переписывают в виде $X = AX + B$ и проверяют условия сходимости метода.

3. Необходимо подобрать матрицу H такую, чтобы матрица HL была близка к единичной: $HLX = HK$ и применить способ 2.

Рассмотрим ***пример***. Систему

$$\begin{cases} 2{,}34\,x_1 - 4{,}21\,x_2 - 11{,}61\,x_3 = 14{,}41, & (I) \\ 8{,}04\,x_1 + 5{,}22\,x_2 + 0{,}27\,x_3 = -6{,}44, & (II) \\ 3{,}92\,x_1 - 7{,}99\,x_2 + 8{,}37\,x_3 = 55{,}56 & (III) \end{cases}$$

необходимо привести к итерационному виду. Попробуем получить систему с преобладающими диагональными элементами. Переставим уравнения системы местами и сложим два из них:

$$\begin{cases} 8{,}04\,x_1 + 5{,}22\,x_2 + 0{,}27\,x_3 = -6{,}44, & (II) \\ 6{,}26\,x_1 - 12{,}20\,x_2 - 3{,}24\,x_3 = 69{,}97, & (I)+(III) \\ 2{,}34\,x_1 - 4{,}21\,x_2 - 11{,}61\,x_3 = 14{,}41. & (I) \end{cases}$$

Разделим каждое уравнение получившейся системы на соответствующие диагональные элементы и выразим x_i:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}65\,x_2 - 0{,}03\,x_3 - 0{,}8, \\ x_2 = 0{,}51\,x_1 - 0{,}27\,x_3 - 5{,}74, \\ x_3 = 0{,}21\,x_1 - 0{,}36\,x_2 - 1{,}24. \end{cases}$$

Проверим условие сходимости для всех метрик:

$$\alpha_1 = \max\{0{,}68; 0{,}78; 0{,}56\} = 0{,}78 < 1,$$

$$\alpha_2 = \max\{0{,}71; 1{,}01; 0{,}3\} = 1{,}01 > 1.$$

Условие сходимости выполнено для первой метрики.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом итераций:

1. Ввод данных: количество неизвестных n, матрица коэффициентов системы, точность ε. Матрицу коэффициентов системы будем хранить в массиве размером $n(n+1)$.

2. Приведение системы к итерационному виду. Будем рассматривать только системы с преобладающими диагональными элементами, поэтому данный шаг будет состоять из двух этапов:

   а) делим элементы матрицы A на соответствующие диагональные элементы со знаком минус, т.е. на $-a_{ii}$;

   б) обнуляем диагональные элементы.

3. Вычисляем α и выбираем метрику.

4. Выбираем первое приближение. В качестве первого приближения можно взять любой вектор-столбец. Для определенности в качестве первого приближения будем брать столбец свободных членов $(xs) = b$.

5. Считаем второе приближение: $(xn) = A(xs) - b$.

6. Проверяем точность. Если $\rho\big((xs),(xn)\big) \geq \varepsilon\,\frac{1-\alpha}{\alpha}$, то $(xs) = (xn)$. Переход к п. 5.

7. Вывод результатов: (xn) − решение.

Задания

I. Напишите программу решения системы линейных уравнений методом итераций с заранее заданной точностью.

II. Приведите примеры систем с преобладающими диагональными элементами. Запишите эти системы в итерационном виде. Решите получившиеся системы с использованием первой (второй) метрики с заранее заданной точностью. Проверьте найденное решение. Приведите пример системы, для которой метод итераций не применим. Обоснуйте правильность полученных результатов.

Лабораторная работа № 5. МЕТОД ХОЛЕЦКОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ

С помощью метода Холецкого можно решать системы линейных уравнений вида

$$Ax = b,$$

где A − симметрическая положительно определенная матрица; x − столбец неизвестных; b – столбец свободных членов.

Теоретической основой метода является следующая теорема.

Теорема. Если A − симметрическая положительно определенная матрица, то существует и единственное ее разложение в виде $A = L\,L^T$, где L − нижняя треугольная матрица; L^T – транспонированная к ней верхняя треугольная матрица:

$$L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \qquad L^T = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Используя данную теорему, можно записать $(LL^T)x = b$.

Применив ассоциативность умножения матриц, получим $L(L^T x) = b$.

Обозначив $L^T x$ через y, будем иметь две системы треугольного вида $Ly = b$ и $L^T x = y$, решение которых не представляет труда.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Холецкого:

1. Ввод данных: количество неизвестных n, коэффициенты основной матрицы системы A и столбец свободных членов b, точность ε.
2. Проверка применимости метода:

1) симметричность матрицы A: если $a_{ij} \neq a_{ji}$, то матрица симметрической не является, метод неприменим. Конец алгоритма;

2) положительная определенность матрицы A проверяется вручную.

3. Нахождение разложения матрицы A:

1) если $a_{11} > 0$, то $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$, иначе метод неприменим. Конец алгоритма;

2) $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$, если $a_{22} - l_{21}^2 > 0$, то $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$, иначе метод неприменим. Конец алгоритма;

3) в цикле по номеру строки k матрицы L находим разложение A:

а) $f = L_1 p$,

где $f = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{k-1\,k})$, $p = (l_{1k}, l_{2k}, \dots, l_{k-1\,k})$;

б) $z = \sqrt{w - (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2)}$,

где $w = a_{kk}$, $z = l_{kk}$.

4. Решаем систему $Ly = b$, т.е. систему вида

$$\begin{cases} l_{11}y_1 = b_1, \\ l_{21}y_1 + l_{22}y_2 = b_2, \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + l_{33}y_3 = b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + l_{n3}y_3 + \ \dots + l_{nn}y_n = b_n. \end{cases}$$

Ее неизвестные вычисляются последовательно по формулам

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad y_2 = \frac{b_2 - l_{21}y_1}{l_{22}}, \quad y_3 = \frac{b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2}{l_{33}}, \quad \dots$$

В общем случае будем иметь

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ii}}.$$

5. Решаем систему $L^T x = b$, т.е. систему вида

$$\begin{cases} l_{11}x_1 + l_{21}x_2 + \cdots + l_{n1}x_n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{n-2\,n-2}x_{n-2} + l_{n-1\,n-2}x_{n-1} + l_{nn-2}x_n = y_{n-2}, \\ l_{n-1\,n-1}x_{n-1} + l_{nn-1}x_n = y_{n-1}, \\ \qquad\qquad l_{nn}x_n = y_n. \end{cases}$$

Ее неизвестные вычисляются последовательно с конца:

$$x_n = \frac{y_n}{l_{nn}}, \quad x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - l_{n\,n-1}x_n}{l_{n-1\,n-1}},$$

$$x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - l_{n\,n-2}x_n\, x_{n-1} - l_{n-1\,n-2}\, x_{n-1},}{l_{n-2\,n-2}}, \quad \dots$$

В общем случае формула для вычисления x_i будет иметь вид

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j}{l_{ii}}.$$

6. Уточнение:

1) вычисляем b^1, подставляя найденное решение x^1 в исходную систему $Ax = b$;

2) находим r^1 по формуле $r^1 = b - b^1$;

3) решаем систему $Ax = r^{-1}$ и находим уточнение x текущего решения x^1: $x^1 = x^1 + x$;

4) проверяем точность: если $\|r\| < \varepsilon$, где $\|r\|$ − норма вектора r, то x^1 − решение системы, конец алгоритма; иначе переход на п. «а».

Задания

I. Напишите программу решения системы линейных уравнений методом Холецкого с заданной точностью.

II. Решите систему линейных уравнений методом Холецкого с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}01$ и проверьте найденное решение.

1. $\begin{cases} 16x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27, \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13, \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3{,}1x_1 - 2{,}1x_2 + 1{,}1x_3 = 1{,}2, \\ -2{,}1x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}4x_3 = 2{,}1, \\ 1{,}1x_1 - 2{,}4x_2 + 1{,}1x_3 = 3{,}1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3{,}4x_1 - 2{,}2x_2 + 1{,}7x_3 = 1{,}7, \\ -2{,}2x_1 + 1{,}2x_2 - 2{,}5x_3 = 2{,}3, \\ 1{,}7x_1 - 2{,}5x_2 + 1{,}8x_3 = 3{,}4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2{,}45x_1 + 1{,}75x_2 - 3{,}24x_3 = 1{,}23, \\ 1{,}75x_1 - 1{,}16x_2 + 2{,}18x_3 = 3{,}43, \\ -3{,}24x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}85x_3 = -0{,}16. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2{,}5x_1 + 1{,}5x_2 - 3{,}4x_3 = 1{,}3, \\ 1{,}5x_1 - 1{,}6x_2 + 2{,}8x_3 = 3{,}3, \\ -3{,}4x_1 + 2{,}8x_2 - 1{,}5x_3 = -0{,}6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 1{,}7x_2 - 3{,}2x_3 = 1{,}2, \\ 1{,}7x_1 - 1{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 3{,}4, \\ -3{,}2x_1 + 2{,}1x_2 - 1{,}8x_3 = -0{,}1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 14, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

III. Решите систему линейных уравнений методом Холецкого с заранее заданной точностью ε, если известно количество неизвестных и формулы, по которым вычисляются элементы основной матрицы системы $a_{i,j}$ и столбца свободных членов b_i. Проверьте найденное решение. Что является точным решением системы? Обоснуйте полученные результаты.

$$n = 3,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}01.$$

$$2. n = 4,\ \ a_{i,j} = \frac{10}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}001.$$

$$3. n = 5,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_{i,j}, \quad \varepsilon = 0{,}0000001.$$

$$4. n = 4,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} 5a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}001.$$

$$5. n = 3,\ \ a_{i,j} = \frac{-1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}01.$$

$$6. n = 5,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} -a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}000001.$$

$$7. n = 3,\ \ a_{i,j} = \frac{2}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j 2\, a_{i,j}, \varepsilon = 0{,}0001.$$

$$8. n = 4,\ \ a_{i,j} = \frac{-10}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}000001.$$

$$9. n = 5,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} 100a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}001.$$

$$10. n = 3,\ \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} 0{,}5a_{i,j}, \qquad \varepsilon = 0{,}01.$$

Лабораторная работа № 6. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Предположим, что известны значения функции в каких-то точках $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$. Необходимо найти такой полином

$$P(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

где $\varphi_i(x)$ – многочлены степени не больше, чем n, что

$$P(x_0) = y_0,\quad P(x_1) = y_1, \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа задается формулой

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{Q(x)}{(x - x_k)Q'(x_k)},$$

где $Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ – фундаментальный многочлен в форме Лагранжа.

Алгоритм построения интерполяционного многочлена Лагранжа на компьютере имеет следующий вид:

1. Ввод данных: количество точек и сами точки $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$.
2. Построение фундаментального многочлена. Строить многочлен $Q(x)$ будем в цикле от 0 до n по формуле $Q(x) = Q(x)(x - x_i)$. При этом перед началом цикла $Q(x)$ присвоим значение 1, т.е. обнулим все его коэффициенты кроме свободного члена (он равен 0):

```
for i:=1 to n do
Q[i]:=0;
Q[0]:=1
```

Возникает вопрос: как умножить многочлен на одночлен?

Если перемножить многочлен и одночлен «вручную», то получим

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots + a_nx^n)(x - \alpha) =$$
$$= -\alpha a_0 + (a_0 - \alpha a_1)x + (a_1 - \alpha a_2)x^2 + \ \ldots + (a_{n-1} - \alpha a_n)x^n + a_nx^{n+1}.$$

Если ввести фиктивное число $a_{-1} = 0$, то коэффициент перед x_0 примет вид $a_{-1} - \alpha a_0$. При вычислении коэффициентов будем сдвигаться от a_n к a_0. В этом случае, чтобы зря не тратить память, вновь вычисленные коэффициенты будем записывать на старые места. Этот способ умножения на одночлен называется схемой Горнера:

```
Q[-1]:=0;
for i:=0 to n do
```

for j:=i+1 downto 0 do
*Q[j]:=Q[j-1]-x[i]*Q[j]*

3. В цикле по номеру точки k от 0 до n:
   а) вычисляем частное
$$\frac{Q(x)}{x - x_k}.$$

Как разделить многочлен на одночлен?

Пусть $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ \dots + b_nx^n$ – искомый многочлен и
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} =$$
$$= (x - \alpha)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ \dots + b_nx^n).$$

Тогда $b_{i-1} - \alpha b_i = a_i$ и, значит, $b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$. Следовательно, вычисление коэффициентов многочлена $\frac{Q(x)}{x - x_k}$ должно происходить в цикле от n до 1 с учетом того, что $b_n = a_{n+1}$:

b[n]:=Q[n+1];
for i:=n to 1 do
b[i-1]:=Q[i]+x[k]∗b[i]

   б) вычисление $Q'(x_k)$. Представим многочлен $Q'(x)$ в виде
$$Q'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + x(a_3 + \ \dots\ xa_n)\big)\dots\big).$$

По этой формуле значение многочлена $Q'(x)$ в точке x_k будем вычислять в цикле от n до 0:

p:=(n+1)Q[n+1];
for i:=n to 1 do
p:=p∗x[k]+i∗Q[i]

   в) находим $P(x)$ по формуле
$$P(x) = P(x) + y_k \frac{Q(x)}{(x - x_k) \cdot Q'(x_k)}.$$

4. Вывод результата – коэффициенты многочлена $P(x)$.

Задания

I. Напишите программу для нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа.

II. Сколько и какие точки нужно ввести, чтобы приближающий многочлен Лагранжа имел указанный вид? Проверьте правильность своего ответа с помощью ранее написанной программы.

1. $x + 1$.
2. $x^2 + x - 5$.
3. x^2.
4. $3x^2 - 2$.
5. $5x - 4$.
6. x^5.
7. $x^4 - 2x^2 + 1$.
8. $x^2 + 1$.
9. $x^3 + x^2$.
10. $x^4 - x^2$.

III. Сколько и какие точки нужно ввести, чтобы как можно лучше приблизить указанную функцию на данном отрезке интерполяционным многочленом Лагранжа? Проверьте правильность полученного результата, сравнив значения приближаемой функции и интерполяционного многочлена в некоторой промежуточной точке. Обоснуйте полученный результат.

1. $y(x) = \ln x$, $[2; 7]$.
2. $y(x) = \lg x$, $[12; 17]$.
3. $y(x) = \ln x + x^2$, $[1; 7]$.
4. $y(x) = \lg x + x^2$, $[12; 16]$.
5. $y(x) = e^x + x$, $[-1; 3]$.
6. $y(x) = e^x$, $[-1; 5]$.
7. $y(x) = e^{x+1} + x$, $[-2; 3]$.
8. $y(x) = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
9. $y(x) = \sin x$, $[0; \pi]$.
10. $y(x) = \operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Лабораторная работа № 7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЯ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Очень часто возникает необходимость выразить в виде функциональной зависимости связь между величинами, которые заданы в виде набора точек с координатами (x, y).

Предположим, например, что в результате некоторого эксперимента получены следующие точки: $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_N; y_N)$.

Необходимо найти приближающую функцию вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

при которой

$$\sum_{k=1}^{N} (P(x_k) - y_k)^2$$

принимает наименьшее значение. Для того чтобы найти коэффициенты приближающего многочлена $P(x)$, необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_{00} a_0 + \ \dots + c_{0n} a_n = b_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n0} a_0 + \ \dots + c_{nn} a_n = b_n, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^{N} x_k^{m+l}, \qquad b_l = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k^l,$$

где a_l – неизвестные, n – степень приближающего многочлена.

Решить данную систему линейных уравнений можно как методом Жордана – Гаусса, так и методом Холецкого. Таким образом, *алгоритм нахождения приближающего многочлена по методу наименьших квадратов* имеет вид:

1. Ввод данных: количество точек N, сами точки и значения исходной функции в этих точках – x_0, x_1, …, x_N, y_0, y_1, …, y_N, степень приближающего многочлена n.
2. Вычисление коэффициентов c_{lm}, b_l, где $0 \le l, m \le n$.
3. Решение системы линейных уравнений вида (7) методом Жордана – Гаусса или Холецкого.
4. Вывод результата: a_l, где $0 \le l \le n$.

Приближающая функция может иметь вид не только многочлена степени n. В зависимости от характера точечного графика приближаемой функции f наиболее используются следующие функции:

1. $y = ax + b$ (многочлен первой степени);
2. $y = ax^m$;
3. $y = ae^{mx}$;
4. $y = \frac{1}{ax+b}$;
5. $y = a \ln x + b$;

6. $y = a\frac{1}{x} + b$;

7. $y = \frac{x}{ax+b}$.

Здесь a, b, m − параметры. Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

1. *Линейная функция*

Для того чтобы найти коэффициенты a и b линейной функции $F = ax + b$, достаточно решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_x b = M_{xy}, \\ M_x a + Nb = M_y, \end{cases}$$

где

$$M_{x^2} = \sum_{k=1}^{N} x_k^2, \qquad M_x = \sum_{k=1}^{N} x_k, \qquad M_{xy} = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{N} y_k.$$

2. *Степенная функция*

Для нахождения коэффициентов c и m приближающей функции $F = cx^m$ достаточно прологарифмировать исходные значения x и y и по новым данным найти приближенную функцию в виде линейной $ax + b$. Возврат от параметров a и b к c и m осуществляется по формулам $m = a$, $c = e^b$.

3. *Показательная функция*

Логарифмируя исходные значения x и y, находим коэффициенты c и m приближающей функции $F = ce^{mx}$. По полученным значениям $\ln x$ и $\ln y$ находим приближающую функцию в виде $ax + b$. Параметры c и m находим, применяя формулы $m = a$, $c = e^b$.

4. *Дробно-линейная функция*

Вычислить коэффициенты a и b приближающей функции $F = \frac{1}{ax + b}$ можно, если заменить исходные значения y обратными числами и по новым данным найти коэффициенты a и b линейной функции $ax + b$.

5. *Логарифмическая функция*

Для перехода к линейной функции $ax + b$ от приближающей функции $F = m\ln x + c$ достаточно в качестве аргумента линейной функции выбрать логарифмы исходных значений x и обозначить через a коэффициент m, а через b – коэффициент c.

6. *Гипербола*

Приближающая функция $F = \frac{a}{x} + b$ сводится к линейной приближающей функции $ax + b$ с помощью замены исходных значений x

величинами, обратными к ним. По новым данным вычисляем коэффициенты a и b, которые подставляем в функцию $F = \frac{a}{x} + b$.

7. *Дробно-рациональная функция*

Если у приближающей функции $F = \frac{x}{mx + c}$ исходные значения переменных x и y заменить обратными числами и по новым данным найти приближающую функцию вида $ax + b$, то коэффициенты m и c исходной функции будут, соответственно, равны b и a.

Задания

I. Напишите программу для статистической обработки результатов наблюдения (нахождение приближающей функции в виде многочлена, гиперболы, линейной, показательной, логарифмической, дробно-рациональной, степенной, дробной функций).

II.Найдите приближающие функции различных видов для функции, заданной таблично.

1.

x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,87	6,7	7,53
y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,3	2,89	3,29	3,87

2.

x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,6
y	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04

3.

x	1	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06

4.

x	1,2	1,57	1,94	3,31	2,68	3,05	3,42	3,79
y	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21

5.

x	1,1	1,74	2,38	3,02	3,66	4,3	4,94	5,18
y	1,73	2,98	3,53	3,89	4,01	4,25	4,32	4,38

6.

x	1,74	2,32	2,9	3,48	4,06	4,64	5,22	5,8
y	0,66	0,45	0,36	0,33	0,3	0,29	0,28	0,27

7.

x	1,92	2,84	3,76	4,68	5,6	6,52	7,44	8,36
y	1,48	2,69	4,07	5,67	7,42	9,35	11,66	13,54

8.

x	1,28	1,76	2,24	2,72	3,2	3,68	4,16	4,64
y	2,1	2,62	3,21	3,98	4,98	6,06	7,47	9,25

9.

x	-4,84	-4,3	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,6	-1,06
y	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81

10.

x	0,68	1,13	1,58	2,03	2,48	2,93	3,38	3,83
y	-2,16	-1,69	-1,36	-1,12	-0,95	-0,75	-0,65	-0,52

Лабораторная работа № 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Задача: необходимо вычислить значение интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

если дан отрезок $[a;b]$ и функция $f(x)$.

Рассмотрим три метода приближенного вычисления определенных интегралов.

I. *Метод трапеций*

Формула метода трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)\right),$$

где m – количество разбиений отрезка $[a;b]$; $h=\frac{b-a}{m}$.

Алгоритм решения задачи методом трапеций:

1. Ввод данных: границы отрезка $[a,b]$, число разбиений m. Будем рассматривать тот случай, когда функция $f(x)$ задана аналитически. Тогда для ее вычисления в программе создадим функцию.

2. Открываем цикл по i от 1 до $m-1$. За каждое прохождение цикла считаем $x = a + hi$, где $h = \frac{b-a}{m}$, находим $f(x)$ и прибавляем к S (начальное значение $S = 0$).

3. Считаем значения функции на концах отрезка и прибавляем их полусумму к S, а затем умножаем S на h.

4. Вывод результата S.

Вычисления по методу трапеций с заранее заданной точностью ε продолжаются до тех пор, пока выполнено условие

$$\frac{\left|I_{2m}^{\text{тр}} - I_{m}^{\text{тр}}\right|}{3} > \varepsilon,$$

где $I_m^{\text{тр}}$ – интеграл, вычисленный по методу трапеций с разбиением отрезка $[a, b]$ на m частей.

Таким образом, *алгоритм вычисления определенного интеграла с заранее заданной точностью по методу трапеций* имеет вид:

1. Ввод данных.
2. Считаем $I_m^{\text{тр}}$ по алгоритму, описанному выше.
3. Считаем $I_{2m}^{\text{тр}}$ по тому же алгоритму.
4. Находим модуль их разности и делим его на 3.
5. Сравниваем полученный результат с точностью ε. Если полученная величина больше ε, то увеличиваем число разбиений в два раза и повторяем алгоритм сначала.
6. Вывод результата: $I_{2m}^{\text{тр}}$.

II. *Метод Симпсона*

Формула метода Симпсона следующая:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx h \cdot \left(\frac{1}{6} f(x_0) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_1) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_2) + \frac{1}{6} f(x_m)\right).$$

Алгоритм решения задачи методом Симпсона:

1. Ввод данных: границы отрезка $[a, b]$, число разбиений m; создаем в программе функцию $f(x)$.

2. В цикле по i от 1 до $2m-1$ считаем следующие величины: $x = x + \frac{h}{2}$, где $h = \frac{b-a}{m}$ и изначально $x = a$; если i – четное, то $S = S + \frac{f(x)}{3}$, если i – нечетное, то $S = S + \frac{2f(x)}{3}$, причем начальное значение $S = 0$.

3. Прибавляем к полученной сумме значение выражения $\frac{1}{6}\big(f(a)+f(b)\big)$ и все, что получилось, умножаем на h.

4. Выводим результат − значение переменной S.

Вычисления по методу Симпсона с заранее заданной точностью ε продолжается до тех пор, пока выполнено условие

$$\frac{\left|I_{2m}^{\text{сим}}-I_{m}^{\text{сим}}\right|}{15}>\varepsilon,$$

где $I_{m}^{\text{сим}}$ – интеграл, вычисленный по методу Симпсона с разбиением отрезка $[a,b]$ на m частей.

Таким образом, *алгоритм вычисления определенного интеграла с заранее заданной точностью по методу Симпсона* имеет вид:

1. Ввод данных.
2. Считаем $I_{m}^{\text{сим}}$ по алгоритму, описанному выше.
3. Считаем $I_{2m}^{\text{сим}}$ по тому же алгоритму.
4. Находим модуль их разности и делим его на 15.
5. Сравниваем полученный результат с точностью ε. Если полученная величина больше ε, то увеличиваем число разбиений в два раза и повторяем алгоритм сначала.
6. Вывод результата: $I_{2m}^{\text{сим}}$.

III. *Метод серединных прямоугольников*

Формула метода серединных прямоугольников принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx h\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right),$$

Алгоритм решения задачи по методу серединных прямоугольников:

1. Ввод данных: границы отрезка $[a,b]$, число разбиений m; создаем в программе функцию $f(x)$.
2. В цикле от 0 до $m-1$ считаем следующие величины: $x=x+$ $+h$, где $h=\frac{b-a}{m}$ и изначально $x=a-\frac{h}{2}$, $S=S+h\cdot f(x)$. Здесь начальное значение $S=0$.
3. Выводим результат − значение переменной S.

Вычисления по методу серединных прямоугольников с заранее заданной точностью ε продолжаются до тех пор, пока выполнено условие

$$\frac{\left|I_{2m}^{\text{пр}}-I_{m}^{\text{пр}}\right|}{3}>\varepsilon,$$

где $I_m^{\text{пр}}$ – интеграл, вычисленный по методу серединных прямоугольников с разбиением отрезка $[a, b]$ на m частей.

Таким образом, *алгоритм вычисления определенного интеграла с заранее заданной точностью по методу серединных прямоугольников* имеет вид:

1. Ввод данных.
2. Считаем $I_m^{\text{пр}}$ по алгоритму, описанному выше.
3. Считаем $I_{2m}^{\text{пр}}$ по тому же алгоритму.
4. Находим модуль их разности и делим его на 3.
5. Сравниваем полученный результат с точностью ε. Если полученная величина больше ε, то увеличиваем число разбиений в два раза и повторяем алгоритм сначала.
6. Вывод результата: $I_{2m}^{\text{пр}}$.

Задания

I. Напишите программу для вычисления определенных интегралов методами серединных прямоугольников, трапеций и Симпсона с заранее заданной точностью.

II. Используя написанную ранее программу, вычислите определенный интеграл различными методами, сравните полученные результаты и обоснуйте их.

1. $\displaystyle\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2+0,5}}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x+0,5)}{2x+\cos(x^2+1)}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6} \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_{0,6}^{2,4} \frac{1+0,5x^2}{1+\sqrt{0,8x^2+1,4}}\,dx.$
6. $\displaystyle\int_{1,2}^{2,64} \frac{(1+1,2x^2)}{0,8+\sqrt{x^2+1,3}}\,dx.$
7. $\displaystyle\int_{0,6}^{1,4} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2+1}\,dx.$
8. $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos x^2\,dx.$
9. $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x\,dx.$
10. $\displaystyle\int_{1,4}^{3} x^2 \lg x\,dx.$

Лабораторная работа № 9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$.

Основная задача, связанная с этим уравнением, известна как *задача Коши:* найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Рассмотрим четыре метода приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

I. *Метод Эйлера*

В основе метода ломанных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод даёт одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \text{ где } k = 0, 1, \dots .$$

Итак, для того чтобы найти решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при выполнении условия $y(x_0) = y_0$ с помощью метода ломанных Эйлера на ЭВМ, надо воспользоваться следующим *алгоритмом*:

1. Ввод данных: x_0, y_0, a, b, n (число разбиений отрезка $[a, b]$).
2. Вычисление шага h метода: $h = \frac{b-a}{n}$.
3. Открытие цикла по i от 1 до n.

Тело цикла:

а) вычисляем x_i: $x_i = x_{i-1} + h$;

б) находим y_i: $y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$.

Для вычисления значений $f(x, y)$ в программе необходимо создать соответствующую функцию.

4. Вывод результата: набор точек (x, y).

II. *Исправленный метод Эйлера*

В исправленном методе Эйлера находят средний тангенс угла наклона касательной для двух точек: (x_m, y_m) и $(x_m + h,\ y_m + hy'_m)$, где $y'_m = f(x_m, y_m)$.

Таким образом, *алгоритм решения дифференциального уравнения* $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при выполнении условия $y(x_0) = y_0$ исправленным методом Эйлера имеет вид:

1. Ввод данных: x_0, y_0, a, b, n (число разбиений отрезка $[a, b]$).
2. Вычисление шага h метода: $h = \frac{b - a}{n}$.
3. Открытие цикла по i от 1 до n.

Тело цикла:

а) вычисляем x_i: $x_i = x_{i-1} + h$;

б) находим y_i:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}h\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f\big(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})\big)\right].$$

Для вычисления значений $f(x, y)$ в программе необходимо создать соответствующую функцию.

4. Вывод результата: набор точек (x, y).

III. *Модифицированный метод Эйлера*

В модифицированном методе Эйлера переход от точки (x_m, y_m) к точке (x_{m+1}, y_{m+1}) осуществляется по направлению касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $\frac{x_m + x_{m+1}}{2}$.

Алгоритм работы по модифицированному методу Эйлера имеет вид:

1. Ввод данных: x_0, y_0, a, b, n (число разбиений отрезка $[a, b]$).
2. Вычисление шага h метода: $h = \frac{b - a}{n}$.
3. Открытие цикла по i от 1 до n.

Тело цикла:

а) вычисляем x_i: $x_i = x_{i-1} + h$;

б) находим y_i: $y_i = y_{i-1} + h \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}f(x_{i-1}, y_{i-1})\right)$.

Для вычисления значений $f(x, y)$ в программе необходимо создать соответствующую функцию.

4. Вывод результата: набор точек (x, y).

IV. *Метод прогноза и коррекции*

Идея этого метода состоит в следующем: чтобы попасть в точку B кривой будем двигаться не по касательной к ней в точку A, а по касательной в какой-то промежуточной точке (x, y), при этом, по теореме Лагранжа, её направление совпадает с направлением секущей AB.

Алгоритм работы метода прогноза и коррекции состоит из следующих шагов:

1. Ввод данных: x_0, y_0, a, b, n (число разбиений отрезка $[a, b]$).
2. Вычисление шага h метода: $h = \frac{b-a}{n}$.
3. Нахождение точки (x_1, y_1) с помощью любого из ранее изложенных методов.
4. В цикле по k от 1 до $n - 1$:

а) прогнозируем примерное значение y_{k+1}. Для этого двигаемся из точки (x_{k-1}, y_{k-1}) в направлении касательной в точке (x_k, y_k) на два шага. Формула прогноза.

$$y_{k+1}^{\text{пр}} = y_{k-1}^{\text{кор}} + 2hf\left(x_k, y_k^{\text{кор}}\right);$$

б) вычисляем x_k: $x_k = x_{k-1} + h$.

в) находим прогнозируемую производную $f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}}\right)$.

г) корректируем значение y_{k+1}. Для этого двигаемся из точки $f\left(x_k, y_k^{\text{кор}}\right)$ на один шаг в направлении, являющимся средним между направлениями касательных в точках $f\left(x_k, y_k^{\text{кор}}\right)$ и $f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}}\right)$:

$$y_{k+1}^{\text{кор}} = y_k^{\text{кор}} + h \cdot \frac{f\left(x_k, y_k^{\text{кор}}\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}}\right)}{2}.$$

Это формула коррекции.

5. Вывод результата: набор точек (x, y).

Задания

I. Напишите программу для решения дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера, исправленным методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера, методом прогноза и коррекции.

II. Используя написанную ранее программу, решите дифференциальное уравнение с заданным начальным условием на отрезке. Сравните полученные результаты и обоснуйте их.

1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1{,}8) = 2{,}6$, $x \in [1{,}8; 2{,}8]$.
2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$, $y_0(1{,}6) = 4{,}6$, $x \in [1{,}6; 2{,}6]$.
3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0{,}6) = 0{,}8$, $x \in [0{,}6; 1{,}6]$.

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0{,}5) = 0{,}6$, $x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$, $y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $x \in [1{,}7; 2{,}7]$.

6. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1{,}8) = 2{,}6$, $x \in [1{,}8; 2{,}8]$.

7. $y' = x + \sin\frac{y}{3}$, $y_0(1{,}6) = 4{,}6$, $x \in [1{,}6; 2{,}6]$.

8. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0{,}6) = 0{,}8$, $x \in [0{,}6; 1{,}6]$.

9. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0{,}5) = 0{,}6$, $x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

10. $y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$, $y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $x \in [1{,}7; 2{,}7]$.

Лабораторная работа № 10. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Задача: решим уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$, где u_{xx}, u_{yy} – вторые производные функции $u(x, y)$ по x и y соответственно, если на границе некоторой области R $u(x, y) = f(x, y)$.

Будем считать, что R – это прямоугольник шириной A и высотой B. Разделим ширину прямоугольника A на n интервалов, а высоту B на m частей так, чтобы длины интервалов разбиения по вертикали и горизонтали совпадали. Внутри области получаются при этом $(n – 1)(m – 1)$ пересечений (узлов) сетки. Если для каждой внутренней точки записать разностное уравнение, то получится система $(n – 1)(m – 1)$ линейных уравнений с $(n – 1)(m – 1)$ неизвестными. Запишем некоторые уравнения этой системы:

$$
\begin{aligned}
&4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} = f_{1,0} + f_{0,1},\\
&-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{2,2} = f_{2,0},\\
&-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{3,2} = f_{3,0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-u_{1,1} + 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{1,3} = f_{0,2},\\
&-u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{2,3} = 0,\\
&-u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{3,3} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-u_{n-2,1} - u_{n-3,2} + 4u_{n-2,2} - u_{n-1,2} - u_{n-2,3} = 0,\\
&-u_{n-1,1} - u_{n-2,2} + 4u_{n-1,2} - u_{n-1,3} = f_{n,2}.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Здесь $u_{i,j} = u(ih, jk)$, $f_{i,j} = f(ih, jk)$.

Полученную систему удобнее всего решать итерационным методом Гаусса – Зейделя, используя формулу

$$u_{i,j} = (u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j})/4,$$

где в правой части равенства используются последние вычисленные u, а также граничные условия: $u_{i,0} = f_{i,0}$, $u_{0,j} = f_{0,j}$, $u_{i,n} = f_{i,n}$, $u_{n,j} = f_{n,j}$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Алгоритм решения эллиптических уравнений имеет вид:

1. Ввод данных: n, m – количество разбиений по осям X и Y; граничные условия – значения функции на границе области, т.е. $un_{i,0}$, $un_{0,j}$, $un_{i,m}$, $un_{n,j}$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$; точность ε, до которой осуществляется приближение.

2. Выбираем первое приближение. Так же как и в рассмотренном ранее методе простой итерации для систем линейных уравнений, в качестве первого приближения можно взять любой вектор. Для определенности возьмем ноль-вектор, т.е. $un_{i,j} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

3. Сохраняем старое приближение us:=un.

4. Вычисляем следующее приближение un по формуле

$$un_{i,j} = (un_{i,j-1} + un_{i,j+1} + un_{i-1,j} + un_{i+1,j})/4$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

5. Выясняем, достигнута ли точность. Для этого сравниваем расстояние между старым и новым приближением с точностью. Если для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ $|un_{i,j} - us_{i,j}| \geq \varepsilon$, то переход к п. 3.
6. Вывод результата $un_{i,j}$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Задания

I. Напишите программу для решения дифференциального уравнения Лапласа.

II. Используя написанную ранее программу, решите дифференциальное уравнение Лапласа с заданными начальными условиями и шагом 1. Уточнение решения производить до сотых долей.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Г), $\quad u(x,y)|_{\Gamma} = |x| + |y|$.
2. $(|x| + 2)(|y| + 2) = 12$ (Г), $\quad u(x,y)|_{\Gamma} = 2|x| + |y|$.
3. $\left.\begin{array}{r} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2; 2] \end{array}\right\}$ (Г), $\quad u(x,y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|$.

4. $x^2 + y^2 = 16$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| + 2|y|$.

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

6. $\left.\begin{array}{r} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4; 4] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| + |y|$.

7. $(|x| + 2)(|y| + 2) = 12$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Г), $u(x,y)|_Г = 2|x| + |y|$.

9. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

10. $\left.\begin{array}{r} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2; 2] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x,y)|_Г = |x| + |y|$.

Лабораторная работа № 11. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим параболическое уравнение (уравнение теплопередачи, или уравнение диффузии):

$$u_{xx} = u_t,$$

где $0 \le x \le l$, $t \ge 0$. Граничными условиями для данного уравнения являются

$$u(0,t) = T_0,\ u(l,t) = T_l, \tag{9}$$

начальным условием –

$$u(x,0) = f(x). \tag{10}$$

Для записи уравнения в разностной форме представим себе сетку, охватывающую область $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ с интервалом разбиения h в направлении x и интервалом разбиения k в направлении t. В этом случае граничные и начальные условия (9), (10) примут вид

$$u_{0,j} = T_0,\ u_{n,j} = T_l, \qquad \text{где} \quad j = 1, 2, \ldots;$$

$$u_{i,0} = f(ih), \qquad \text{где} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

а само дифференциальное уравнение (8) запишется в виде

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}, \tag{11}$$

где $\lambda = k/h^2$, индекс i изменяется от 1 до $n - 1$, j – от 1 до бесконечности.

Решение дифференциального уравнения (8) будет сходиться к решению разностного уравнения (11), если $\lambda < 0{,}5$.

Алгоритм решения параболического уравнения имеет вид:

1. Ввод данных: l, T_0, T_l, n – число разбиений по оси x, k – шаг по оси t, w – максимальное значение t.
2. Вычисляем шаг h по оси x: $h = l / n$.
3. Задаем начальные и граничные условия (9), (10).
4. В цикле по j от 1 до $[w/k]$, в цикле по i от 1 до $(n – 1)$ вычисляем $u_{i,j}$ по формуле (11) и выводим на экран.

Задания

I. Напишите программу для решения дифференциального уравнения параболического типа.

II. Используя написанную ранее программу, решите дифференциальное уравнение параболического типа при заданных начальных условиях для $x \in [0; 0{,}6]$, $h = 0{,}1$, $t \in [0; 0{,}01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\sigma = \frac{1}{6}$.

1. $u(x, 0) = \cos 2x, u(0, t) = 1 - 6t, u(0{,}6, t) = 0{,}3624$.
2. $u(x, 0) = x(x + 1), u(0, t) = 0, u(0{,}6, t) = 2t + 0{,}96$.
3. $u(x, 0) = 1{,}2 + \lg(x + 0{,}4),\ u(0, t) = 0{,}8 + t, u(0{,}6, t) = 1{,}2$.
4. $u(x, 0) = \sin 2x, u(0, t) = 2t, u(0{,}6, t) = 0{,}932$.
5. $u(x, 0) = 3x(2 - x), u(0, t) = 0, u(0{,}6, t) = t + 2{,}52$.
6. $u(x, 0) = 1 - \lg(x + 0{,}4), u(0, t) = 1{,}4, u(0{,}6, t) = t + 1$.
7. $u(x, 0) = \sin(0{,}55x + 0{,}03), u(0, t) = t + 0{,}03, u(0{,}6, t) = 0{,}354$.
8. $u(x, 0) = 2x(1 - x) + 0{,}2, u(0, t) = 0{,}2, u(0{,}6, t) = t + 0{,}68$.
9. $u(x, 0) = \sin x + 0{,}08, u(0, t) = 0{,}08 + 2t, u(0{,}6, t) = 0{,}6446$.
10. $u(x, 0) = \cos(2x + 0{,}19), u(0, t) = 0{,}932, u(0{,}6, t) = 0{,}1798$.

Лабораторная работа № 12. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Типичным представителем гиперболических уравнений является волновое уравнение

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \text{ где } 0 \le x \le l,\ t > 0, \tag{12}$$

описывающее, в частности, поведение струны, натянутой между двумя точками $x = 0$ и $x = l$ оси X в момент времени t, отклоненной от положения равновесия.

Поскольку концы струны закреплены, то имеем

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t > 0.$$

Начальными условиями выступают начальное смещение

$$u(x, 0) = f(x), 0 \le x \le l$$

и начальная скорость

$$u_t(x, 0) = g(x), 0 < x < l.$$

Так же как и для эллиптических уравнений, здесь можно начертить сетку, но теперь она будет простираться бесконечно в направлении положительных значений t, т.е. мы можем искать решение для сколь угодно далекого момента времени. Примем в направлении x шаг сетки, равным h, в направлении t – равным k. Тогда интервал $(0, l)$ разделяется на $n = {}^{l}/_{h}$ малых интервалов h, а в направлении t может быть сколь угодно много интервалов k.

Обозначим $u_{i,j} = u(ih, jk)$, $\lambda = {}^{k}/_{h}$, тогда разностное уравнение запишется в виде

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \tag{13}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots$. С использованием введенных обозначений граничное и начальное условия можно записать в виде

$$u_{0,j} = u_{n,j} = 0 \text{ для } j = 1, 2, 3, \ldots , \tag{14}$$

$$u_{i,0} = f(ih) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n - 1, \tag{15}$$

$$u_{i,1} = kg(ih) + f(ih) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{16}$$

Решение разностного уравнения (13) при $h \to 0$ и $k \to 0$ сводится к решению уравнения (16), если $\lambda < 1$ или, что то же самое, $k < h$. Данное условие является достаточным для сходимости, но не является необходимым.

Алгоритм решения гиперболического уравнения на компьютере имеет вид:

1. Ввод данных: n – число отрезков разбиения по оси X, k – шаг по времени, t – время.
2. Задаем начальное условие (15) в цикле по i от 1 до $n - 1$.
3. Задаем граничные условия (14) в цикле по j от 1 до $\left[{}^{t}/_{k}\right]$.
4. Вычисляем $u_{i,1}$ по формуле (16) в цикле по i от 1 до $n - 1$.
5. Вычисляем по формуле (13) и выводим на экран значения $u_{i,j}$ в циклах по j от 1 до $\left[{}^{t}/_{k}\right]$, по i от 1 до $n - 1$.

Задания

I. Напишите программу для решения уравнения колебания струны.

II. Используя написанную ранее программу, решите уравнение колебания струны при заданных начальных и краевых условиях для $x \in [0; 1]$, $h = 0{,}1$, $t \in [0; 0{,}5]$ с четырьмя десятичными знаками.

1. $f(x) = x(x+1)$; $\Phi(x) = \cos x$; $\varphi(t) = 0$; $\psi(t) = 2(t+1)$.
2. $f(x) = x\cos \pi x$; $\Phi(x) = x(2-x)$; $\varphi(t) = 2t$; $\psi(t) = -1$.
3. $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$; $\Phi(x) = x^2$; $\varphi(t) = 1 + 2t$; $\psi(t) = 0$.
4. $f(x) = (x+0{,}5)(x-1)$; $\Phi(x) = \sin(x+0{,}2)$; $\varphi(t) = t - 0{,}5$; $\psi(t) = 3t$.
5. $f(x) = 2x(x+1) + 0{,}3$; $\Phi(x) = 2\sin x$; $\varphi(t) = 0{,}3$; $\psi(t) = 4{,}3 + t$.
6. $f(x) = (x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$; $\Phi(x) = 1 + x^2$; $\varphi(t) = 0$; $\psi(t) = 1{,}2(t+1)$.
7. $f(x) = x\sin \pi x$; $\Phi(x) = (x+1)^2$; $\varphi(t) = 2t$; $\psi(t) = 0$.
8. $f(x) = 3x(1-x)$; $\Phi(x) = \cos(x+0{,}5)$; $\varphi(t) = 2t$; $\psi(t) = 0$.
9. $f(x) = x(2x-0{,}5)$; $\Phi(x) = \cos 2x$; $\varphi(t) = t^2$; $\psi(t) = 1{,}5$.
10. $f(x) = \sin \pi x\,(x+1)$; $\Phi(x) = x^2 + x$; $\varphi(t) = 0$; $\psi(t) = 0{,}5t$.

Библиографический список

1. *Исаков, В.Н.* Элементы численных методов / В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2003. – 192 с. – ISBN 5-7695-0795-0.

2. *Турчак, Л.И.* Основы численных методов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с. – ISBN 5-9221-0153-6.

3. *Вержбицкий, В.М.* Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с. – ISBN 5-06-003982-X.

4. *Он же.* Численные методы: линейная алгебра и нелинейные уравнения / В.М. Вержбицкий. – М.: Оникс 21 век, 2005. – 432 с. – ISBN 5-329-01110-8.

5. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 632 с. – ISBN 5-94774-175-X.

6. *Калиткин, Н.Н.* Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

7. *Заварыкин, В.М.* Численные методы: пособие для студентов физико-математ. специальностей пед. ин-тов / В.М. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. – М.: Просвещение, 1990. – 176 с. – ISBN 5-09-000599-0.

8. *Хемминг, Р.* Численные методы : для науч. работников и инженеров / Р. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 399 с.

9. *Волков, Е.А*. Численные методы / Е.А. Волков. – М.: Наука, 1982. – 253 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

В двух частях

Часть 1

Составители
ДАВЛЕТЯРОВА Елена Петровна
ЖУКОВА Алла Адольфовна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В. Жиков

Подписано в печать 21.06.12.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 2,56. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.