

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра теории и методики технологического образования

КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Учебно-методическая разработка

Составитель
М. В. КУНИНА



Владимир 2013

УДК 514.18
ББК 22.151.3
К91

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
зав. кафедрой технико-технологических дисциплин
Владимирского государственного университета
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
Л. Н. Шарыгин

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кривые поверхности : учеб.-метод. разработка / Владим.
К91 гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; сост. М. В. Кунина. –
Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 28 с.

Рассматривается раздел курса начертательной геометрии “Кривые поверхности”. Теоретический материал изложен в доступной форме и снабжен иллюстрациями для лучшего восприятия и усвоения студентами. Целью работы является развитие пространственного воображения технического мышления обучающихся.

Предназначена для бакалавров по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование» по профилю «Технология».

Рекомендована для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 23. Библиогр.: 5 назв.

УДК 514.18
ББК 22.151.3

1. ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхность можно представить как общую часть двух смежных областей пространства. Схема образования поверхностей показана на рис. 1.



Рис. 1

Кинематическая поверхность – это геометрическое место линий, движущихся в пространстве по некоторому закону.

Образующая – линия, производящая поверхность в каждой ее точке.

Направляющая – линия, по которой движется образующая.

Каркас – это упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

Определитель поверхности – необходимая и достаточная совокупность геометрических фигур и связей между ними для образования поверхности. В число условий, входящих в состав определителя, должны быть включены:

- перечень геометрических фигур, участвующих в образовании поверхности;

- алгоритмическая часть, указывающая на взаимосвязь между этими фигурами.

В общем случае определитель поверхности будет иметь следующую структурную форму:

$$\Phi(\Gamma); [A],$$

где (Γ) – геометрическая часть, $[A]$ – алгоритмическая часть.

Чтобы найти определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа ее образования. Так как поверхность может быть образована различными путями, очевидно, одна и та же поверхность может иметь различные определители, например, поверхность прямого кругового цилиндра с кинематической точки зрения можно представить:

а) как след, оставляемый в пространстве прямой \bar{g} при ее вращении вокруг оси i (рис. 2, а); при этом определитель цилиндрической поверхности вращения будет иметь вид:

$$\Phi(\bar{g}, i); [\bar{g}_j = R_i(\bar{g})];$$

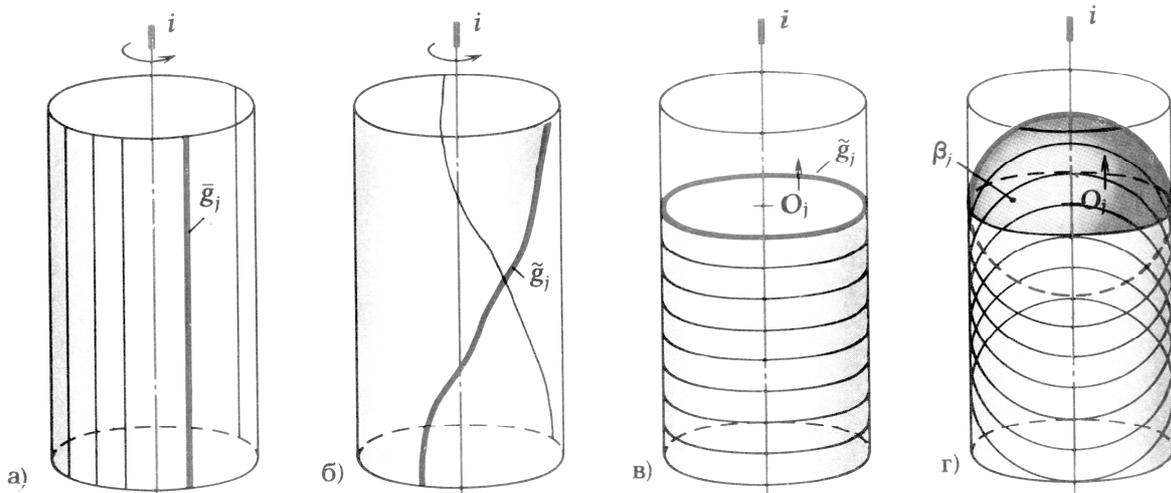


Рис. 2

б) как след от вращения кривой \tilde{g} , принадлежащей поверхности прямого кругового цилиндра, вокруг оси i (рис. 2, б); в этом случае определитель поверхности можно записать

$$\Phi(\tilde{g}, i); [\tilde{g}_j = R_i(\tilde{g})]^1;$$

¹ R_i – преобразование (рассматривается как вращение вокруг оси i), переводящее любые точки A и B в такие точки A_1 и B_1 , что $|AB| = |A_1 B_1|$.

в) как результат поступательного перемещения окружности, при этом центр окружности O перемещается вдоль оси i , а её плоскость α всё время остаётся перпендикулярной к этой оси (рис. 2, в); в этом случае определитель поверхности можно записать

$$\Phi(\tilde{g}, i); [\tilde{g}_j = T_i(g) \wedge (O \in i) \wedge (\tilde{g} \subset \alpha \perp i)]^2;$$

г) как огибающую всех положений сферической поверхности β , центр O которой перемещается по оси i (рис. 2, з); определитель в этом случае примет вид

$$\Phi(\beta; i); [\beta_j = T_i(\beta) \wedge (O \in i)].$$

Из множества определителей поверхности обычно выбирают наиболее простой. В рассматриваемом случае таким определителем будет

$$\Phi(\bar{g}, i); [\bar{g}_j = R_i(\bar{g})].$$

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

На рис. 3 приведена примерная классификационная схема.

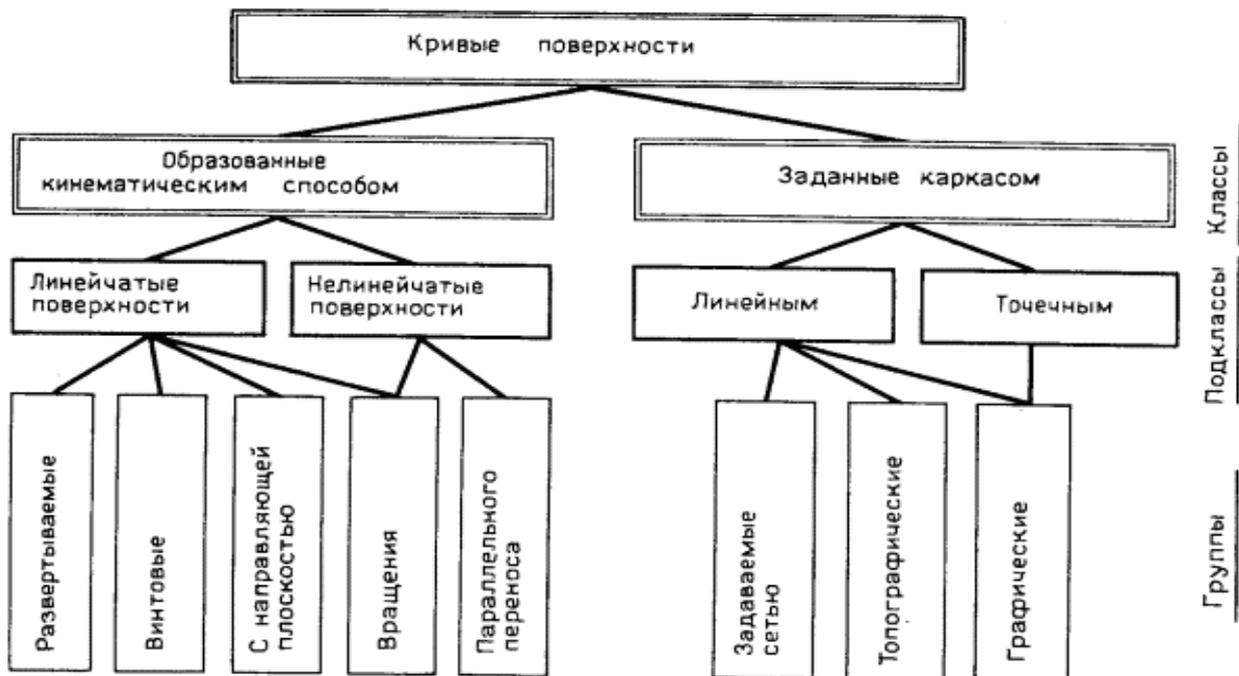


Рис. 3

² T_i – преобразование (рассматривается как параллельное перемещение), переводящее точки A и B в такие точки A_I и B_I , что $|AB| = |A_I B_I|$.

Все кривые поверхности разделены на два класса: первый класс является основным – это поверхности, образуемые *кинематическим* способом, второй класс – поверхности, задаваемые *каркасом*. Первый класс в зависимости от вида образующей делится на два подкласса – линейчатые и нелинейчатые поверхности. Второй класс также делится на два подкласса поверхностей, задаваемых точечным и линейным каркасом. Подклассы включают группы или виды поверхностей.

Далее будут рассмотрены формообразование и свойства следующих видов поверхностей:

- 1) линейчатых развёртываемых поверхностей;
- 2) поверхности вращения;
- 3) винтовых поверхностей;
- 4) каркасных поверхностей.

3. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линейчатые развертываемые поверхности

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой линии (образующей), имеющей постоянное направление по некоторой кривой линии (направляющей) (рис. 4, а).

Цилиндрическая поверхность определена, если заданы направляющая (по форме и положению) и образующая (по положению). Для построения чертежа цилиндрической поверхности удобно выбирать в качестве направляющей линию пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью проекций или другой плоскостью, ей параллельной.

Цилиндрическая поверхность может быть замкнутой (рис. 4, б). Тело, ограниченное цилиндрической замкнутой поверхностью и

двумя параллельными плоскостями, называется *цилиндром*. Цилиндр называется *круговым*, если в его основании лежит круг.

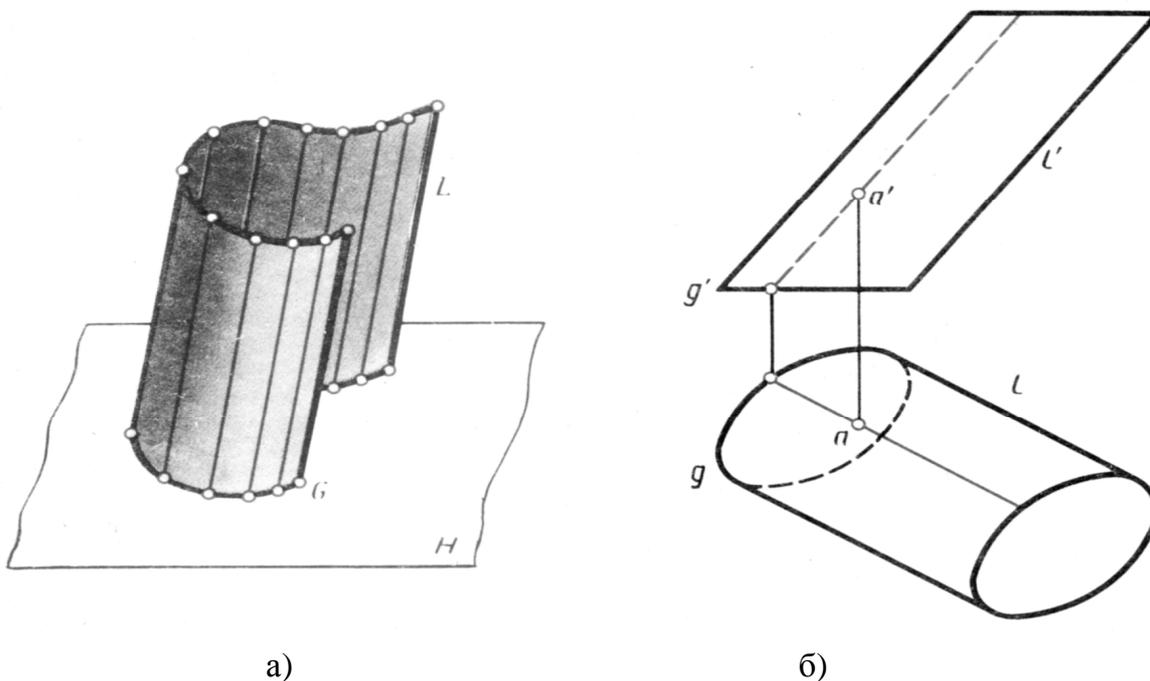


Рис. 4

Проекция точки на цилиндрической поверхности может быть задана при помощи проведенной через эту точку проекции образующей (см. рис. 4, б).

Коническая поверхность (рис. 5, а) образуется движением прямой линии L (образующей), проходящей через некоторую точку S (вершину) по некоторой кривой линии G (направляющей). Коническая поверхность имеет две полости. Коническая поверхность определена на чертеже, если заданы направляющая (по форме и положению) и вершина.

Коническая поверхность, как и цилиндрическая, может быть замкнутой (рис. 5, б). Тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, называется *конусом*. Конус может быть *круговым*, если в его основании лежит круг.

Проекции точки на чертеже конической поверхности могут быть построены на проекциях образующей, проходящей через эту точку (см. рис. 5, б).

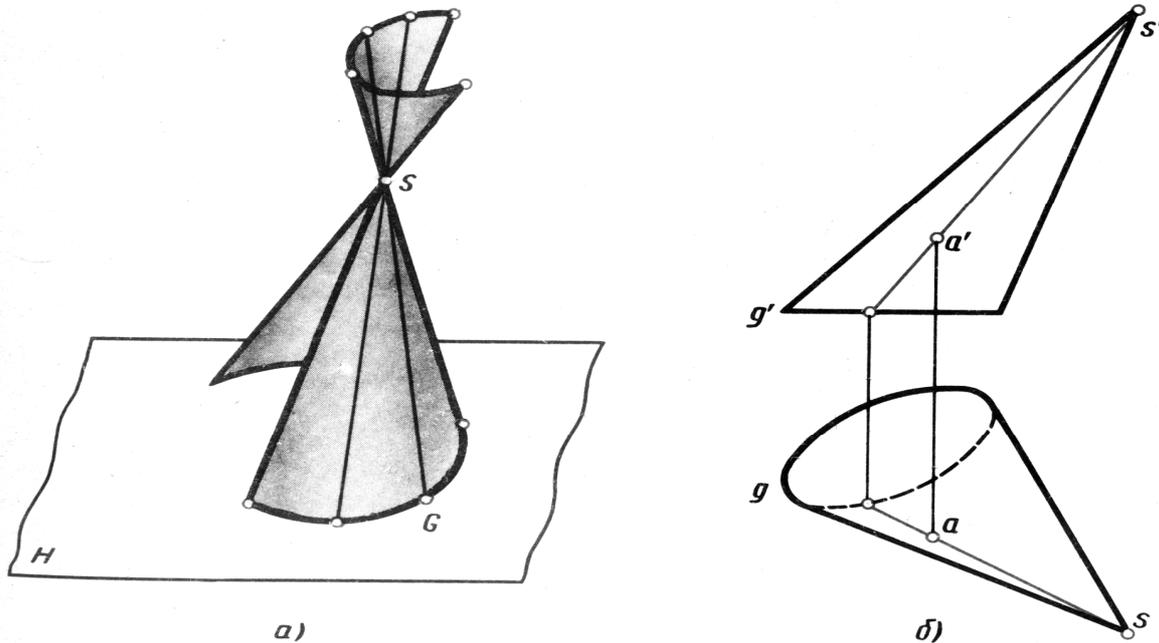


Рис. 5

Торс (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой, называемой *ребром возврата* (рис. 6). Ребро возврата является направляющей торса. Торс состоит из двух полостей, разделенных ребром возврата.

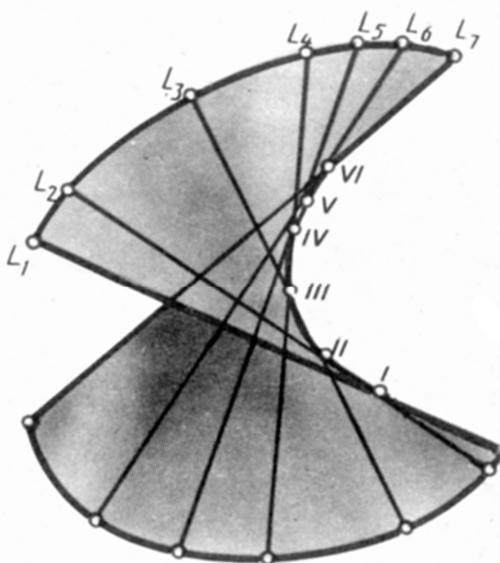


Рис. 6

Если ребро возврата вырождается в точку, поверхность торса превращается в коническую. В случае, если ребро возврата вырождается в бесконечную удаленную точку, торсовая поверхность превращается в цилиндрическую.

Поверхности вращения

Поверхностью вращения называют поверхность, получающуюся от вращения некоторой образующей линии вокруг неподвижной прямой – оси поверхности. На чертежах ось изображают штрих-пунктирной линией. Образующая линия может в общем случае иметь как криволинейные, так и прямолинейные участки. Поверхность вращения на чертеже можно задать образующей и положением оси. На рис. 7 изображена поверхность вращения, которая образована вращением образующей $ABCD$ (ее фронтальная проекция $A''D''C''D''$) вокруг оси OO_1 , перпендикулярной плоскости π_1 .

При вращении каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси. Соответственно линия пересечения поверхности вращения любой плоскостью, перпендикулярной оси, является окружностью. Такие окружности называют *параллелями*. На виде сверху (см. рис. 7) показаны проекции окружностей, описываемых точками A , B , C и D , проходящие через проекции A' , B' , C' и D' . Наибольшую параллель из двух соседних с нею параллелей по обе стороны от нее называют *экватором*, аналогично наименьшую – *горлом*.

Плоскость, проходящую через ось поверхности вращения, называют *меридиональной*, линию ее пересечения с поверхностью вращения – *меридианом*. Если ось поверхности параллельна плоскости проекций, то меридиан, лежащий в плоскости, параллельной этой плоскости проекций, называют *главным меридианом*. На эту плоскость проекций главный меридиан проецируется без искажений. Так, если ось поверхности вращения парал-

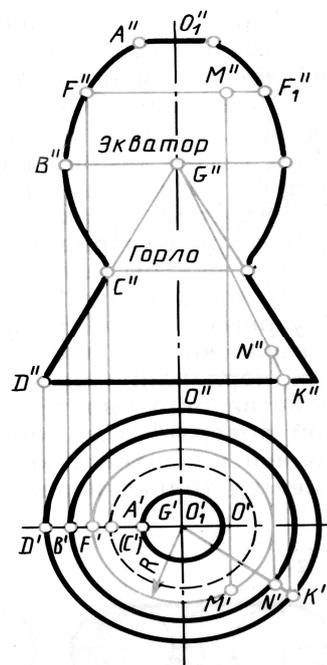


Рис. 7

лельна плоскости π_2 , то главный меридиан проецируется на плоскость π_2 без искажений. Наиболее удобным для выполнения изображений поверхностей вращения являются случаи, когда их оси перпендикулярны плоскости π_1 , плоскости π_2 или плоскости π_3 .

Для цилиндра и конуса вращения меридианами являются прямые линии. Они параллельны оси и равноудалены от нее для цилиндра или пересекают ось в одной и той же ее точке под одним и тем же углом к оси для конуса. Цилиндр и конус вращения – поверхности, бесконечные в направлении их образующих, поэтому на изображениях их ограничивают какими-либо линиями, например линиями пересечения этих поверхностей с плоскостями проекций или какими-либо из параллелей. Из стереометрии известно, что прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус ограничены поверхностью вращения и плоскостями, перпендикулярными оси поверхности. Меридиан такого цилиндра – прямоугольник, конуса – треугольник.

Такая поверхность вращения, как сфера является ограниченной и может быть изображена на чертеже полностью. Экватор и меридианы сферы – равные между собой окружности. При ортогональном проецировании на все три плоскости проекций сфера проецируется в круги.

Тор. При вращении окружности (или ее дуги) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр, получается поверхность, называемая *тором*. На рис. 8, *а* приведен открытый тор или круговое кольцо, на рис. 8, *б* закрытый тор, на видах *в* и *г* самопересекающийся тор. Тор вида *г* называется также лимоновидным. На рис. 8 они изображены в положении, когда ось тора перпендикулярна плоскости проекций π_1 .

В открытый и закрытый торы могут быть вписаны сферы. Тор можно рассматривать как поверхность, огибающую одинаковые сферы, центры которых находятся на окружности.

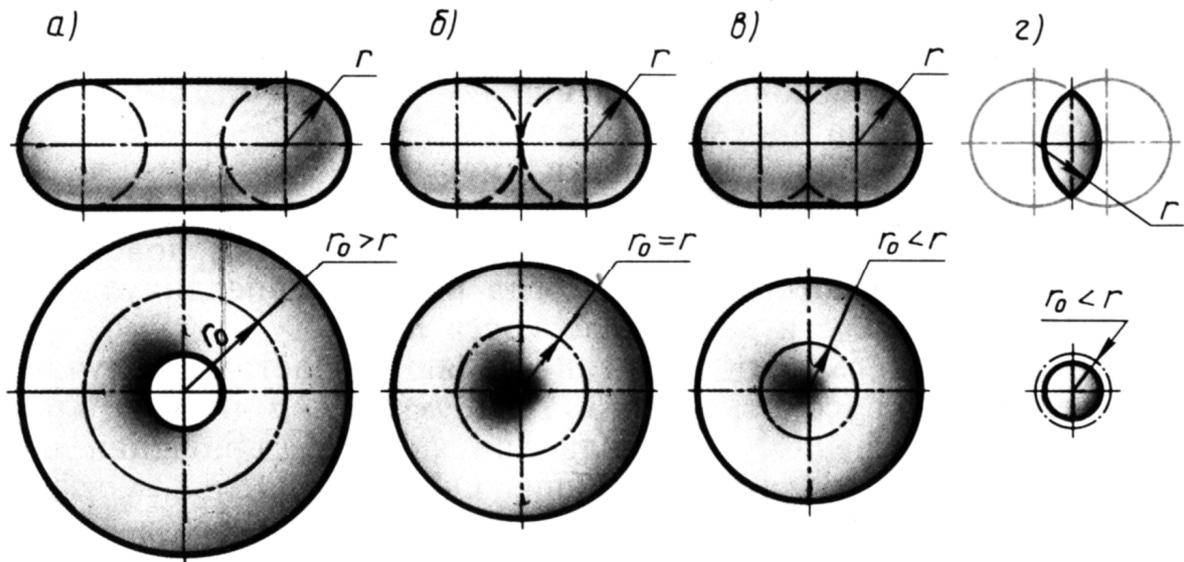


Рис. 8

Точки на поверхности вращения. Положение точки на поверхности вращения определяют с помощью окружности, проходящей через эту точку на поверхности вращения. В случае линейчатых поверхностей для этой цели возможно применение и прямолинейных образующих.

Применение параллели и прямолинейной образующей для построения проекций точек, принадлежащих данной поверхности вращения, показано на рис. 7. Если дана проекция M'' , то проводят фронтальную проекцию $F''F_1''$ параллели, а затем радиусом $R = O_1'F'$ проводят окружность – горизонтальную проекцию параллели, и на ней находят проекцию M' . Если бы была задана горизонтальная проекция M' , то следовало бы провести радиусом $R = O'M'$ окружность, по точке F' построить F'' и провести $F''F_1''$ – фронтальную проекцию параллели и на ней в проекционной связи отметить точку M'' . Если дана проекция N'' на линейчатом (коническом) участке поверхности вращения, то проводят фронтальную проекцию $D''G''$ очерковой образующей и через проекцию N'' фронтальную про-

екцию $G''K''$ образующей на поверхности конуса. Затем на горизонтальной проекции $G'K'$ образующей по проекциям K'' и G'' построить фронтальную проекцию $G''K''$ и на ней в проекционной связи отметить проекцию N'' .

На рис. 9 показано построение проекций точки K , принадлежащей поверхности тора. Стрелками указано построение горизонтальной проекции K' по заданной фронтальной проекции K'' . Если задана горизонтальная проекция, то построение выполняют в обратном порядке.

На рис. 10 показано построение по заданной фронтальной проекции M'' точки на поверхности сферы ее горизонтальной проекции M' и профильной M''' проекции. Проекция M' построена с помощью окружности – параллели, проходящей через проекцию M'' . Ее радиус – $O'1'$. Проекция M''' построена с помощью окружности, плоскость которой параллельна профильной плоскости проекций, проходящей через проекцию M'' . Ее радиус – $O'''2'''$.

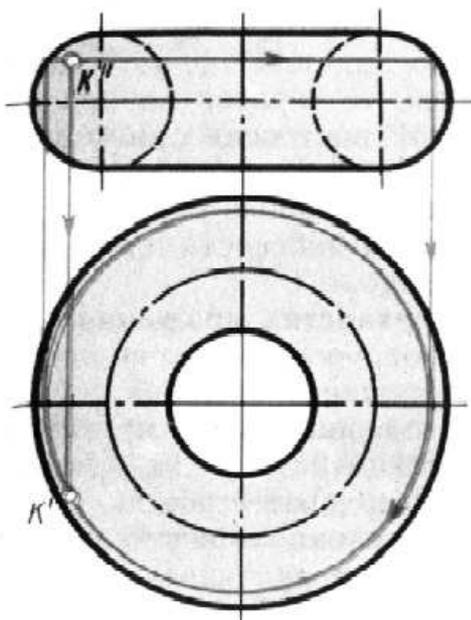


Рис. 9

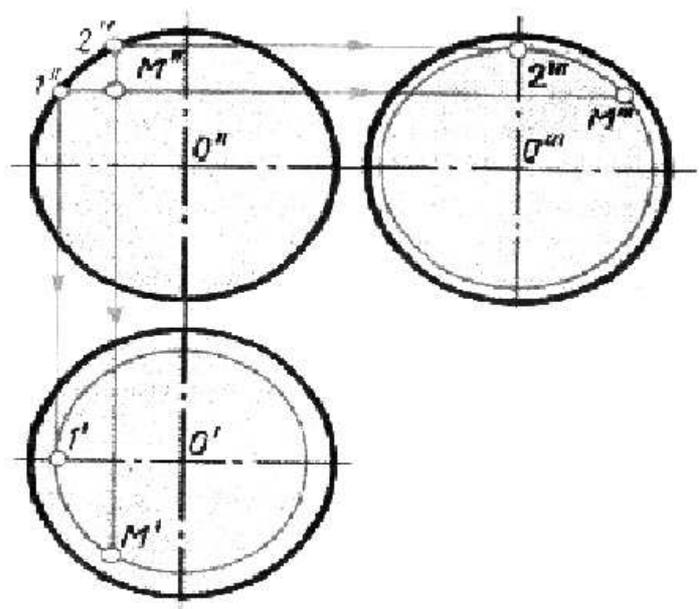


Рис. 10

Винтовые поверхности

Винтовые поверхности используются в технике, например для формообразования крепежных изделий: винтов, болтов, шпилек, шурупов и сопрягаемых с ними деталей.

Винтовая поверхность образуется при движении прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых – винтовая линия, другая – ось винтовой линии, которую образующая пересекает под постоянным углом. Если угол между образующей и осью равен 90° , то это *прямая* винтовая поверхность, если не равен, то ее называют *косой* винтовой поверхностью.

Рассмотрим подробно прямую винтовую поверхность. Это *винтовой коноид*, или *прямой геликоид* (рис. 11). Перемещаясь в направлении, как указано стрелкой на горизонтальной проекции, отрезок AB движется вдоль оси вверх и образует правую винтовую поверхность. Проекции $A_5'' B_5''$, $A_6'' B_6''$, $A_7'' B_7''$, $A_8'' B_8''$ и $A_9'' B_9''$ условно показаны двумя линиями (они “удаляются” от наблюдателя).

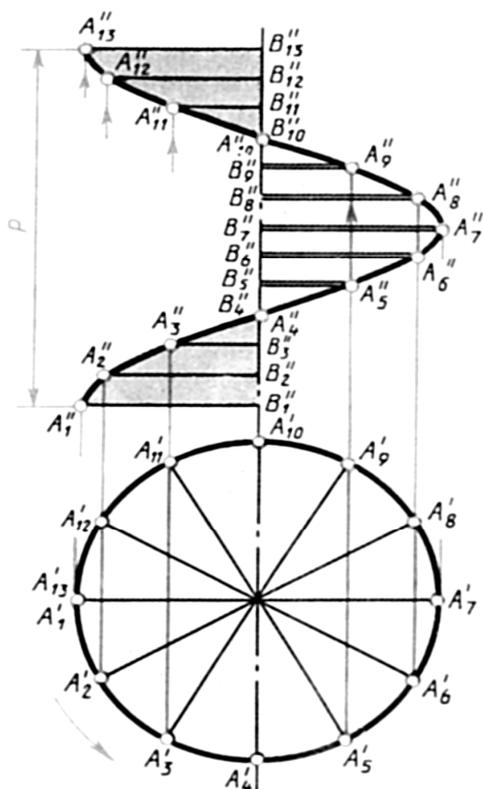


Рис. 11

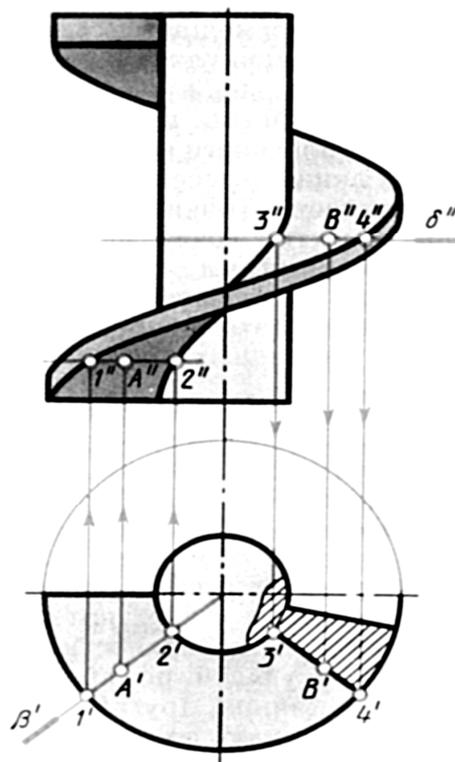


Рис. 12

В сечении прямой винтовой поверхности (рис. 12) плоскостями, перпендикулярными оси или проходящими через ось, получаются отрезки прямолинейной образующей. Используя их, можно построить точки на винтовой поверхности. Так, на рис. 12 по горизонтальной проекции A' точки A построена ее фронтальная проекция A'' на фронтальной проекции образующей $1''2''$ в секущей плоскости $\beta(\beta')$. По фронтальной проекции B'' точки B построена ее горизонтальная проекция B' на горизонтальной проекции образующей $3'4'$ в секущей плоскости $\delta(\delta')$.

Прямую винтовую поверхность используют в специальных винтах для преобразования вращательного движения в поступательное в точных винтовых передачах или винтовых передачах с большими осевыми усилиями, например в прессах.

Каркасные поверхности

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, задают сетью линий, заполняющих поверхность и являющихся линейным каркасом поверхности.

Поверхности, заданные графически семейством линий, называются *каркасными*. Примером каркасной поверхности может служить земная поверхность, заданная дискретным каркасом линий уровня – горизонталями и называемая *топографической поверхностью*. Поверхности такого вида называют также *графическими*, так как их можно задать только чертежом. Для задания формы поверхности ее каркас обычно выражают двумя ортогонально расположенными семействами линий, которые образуют на поверхности сеть (рис. 13). На рис. 13 представлена каркасная поверхность электронной плотности в кристалле.

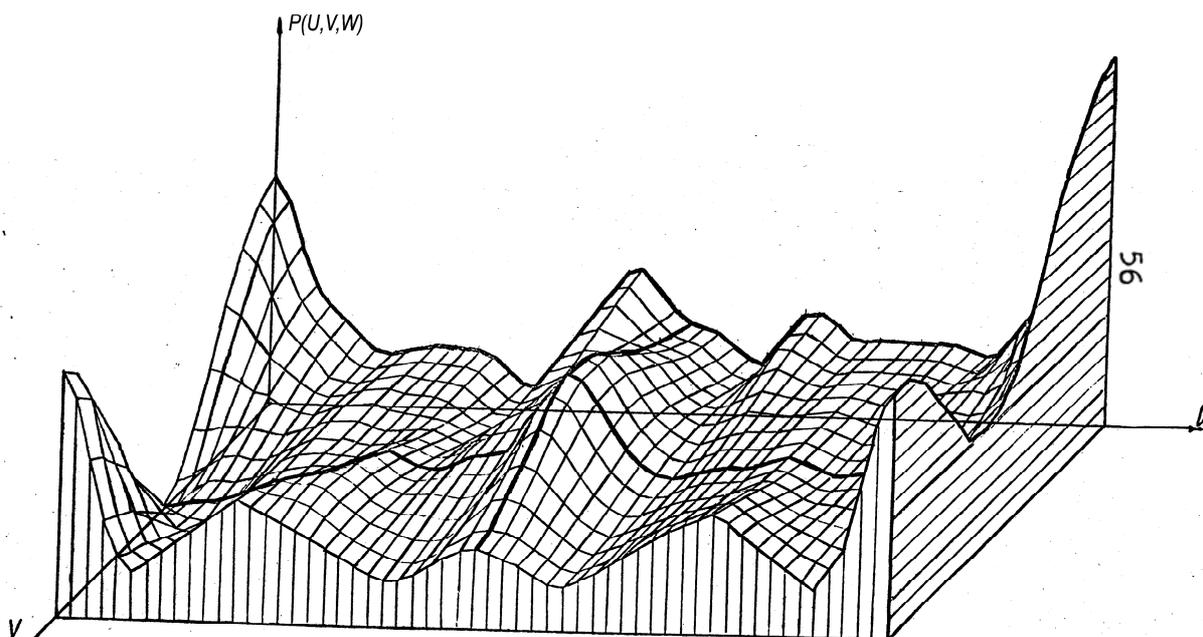


Рис. 13

4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

При пересечении любого тела с плоскостью получается некоторого вида плоская фигура, называемая *сечением*. Под сечением понимают ту часть секущей плоскости, которая находится внутри рассеченного тела и ограничена линией сечения.

Плоскости, с помощью которых получается сечение, называются *секущими*. В пересечении кривой поверхности плоскостью в общем случае получается плоская кривая линия (окружность, эллипс и т. п.). При пересечении линейчатых поверхностей плоскостями могут получаться, в частности, и прямые линии, если секущая плоскость направлена вдоль образующих (цилиндра, конуса и др.).

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности с плоскостью является способ *вспомогательных секущих плоскостей*. Вспомогательная плоскость пересекает секущую плоскость по прямой, а заданную поверхность по некоторой кривой или прямой линии. Точки пересечения этих линий и будут искомыми точками, принадлежащими поверхности и секущей плоскости.

Построение проекций линии сечения поверхности плоскостью значительно упрощается, если секущая плоскость проецирующая. В этом случае одна из проекций линии сечения уже имеется на чертеже: она совпадает с проекцией плоскости. Остается лишь найти другие проекции этой линии. Соответствующий пример в случае пересечения фронтально-проецирующей плоскостью конуса с вершиной G приведен на рис. 14. Построение линии пересечения плоскости с конической поверхностью обычно выполняют в следующем порядке. Основание конуса делят на равномерное число частей, обычно 12, проводят горизонтальные проекции $G'1', G'2', \dots, G'12'$ образующих и строят их фронтальные проекции. На фронтальной проекции отмечают фронтальные проекции точек пересечения построенных образующих на видимой поверхности конуса с секущей плоскостью: $C'', D'', F'', I'',$ а также крайних точек A'' и B'' .

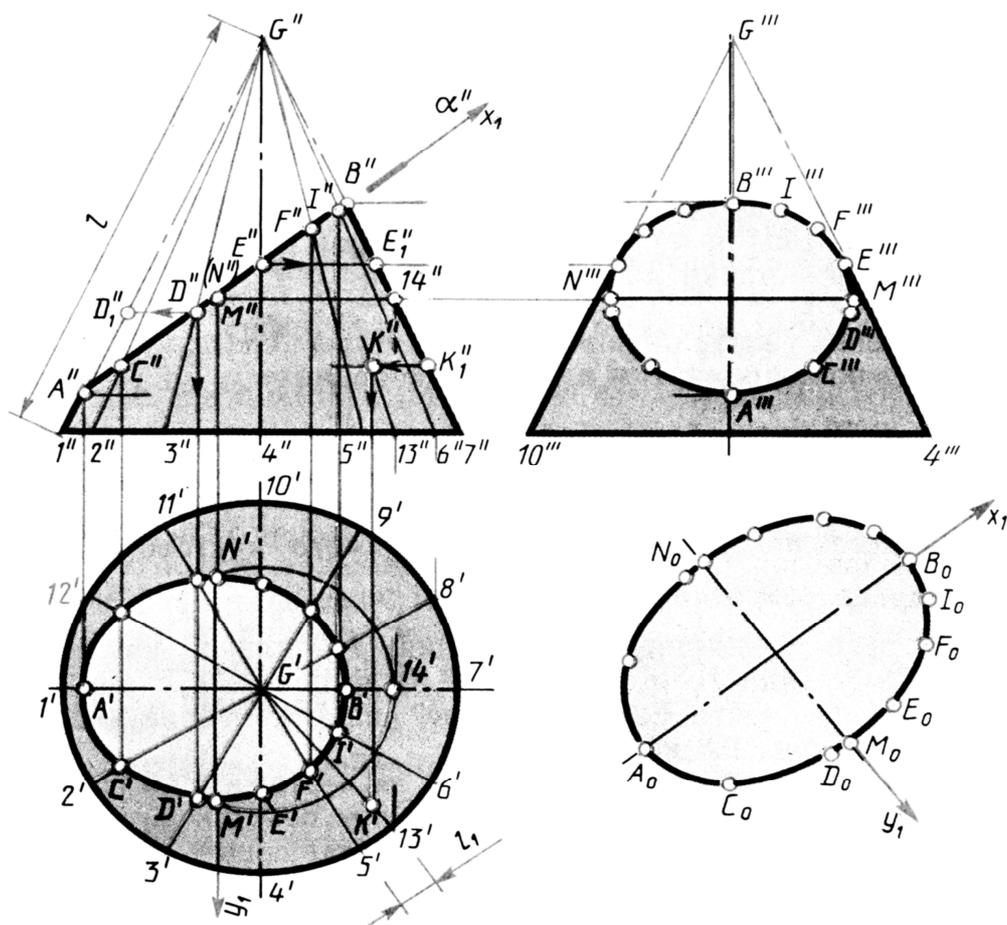


Рис. 14

Горизонтальные проекции строят в проекционной связи на соответствующих проекциях образующих: точки A' , C' , D' , F' , I' , B' на проекциях образующих $G' 1'$, $G' 2'$, $G' 3'$, $G' 4'$, $G' 5'$, $G' 6'$, $G' 7'$, а также симметричные им точки на проекциях образующих $G' 12'$, $G' 11'$, $G' 9'$, $G' 8'$. Горизонтальную проекцию E' точки E на образующей $G' 4'$ и симметричной точки на образующей $G' 10'$ строят с помощью окружности радиусом $E'' E_1''$, проведенной на поверхности конуса.

Для построения *точки пересечения прямой линии (AB на рис. 15) с кривой поверхностью* ρ выполняют следующие построения:

- заключают прямую линию во вспомогательную плоскость, например плоскость γ ;
- строят линию пересечения (CD) вспомогательной плоскости с заданной кривой поверхностью;
- определяют точку пересечения (K) прямой (AB) с построенной линией пересечения (CD).

С замкнутой кривой поверхностью прямая пересекается в двух и более точках. Если прямая пересекает поверхность в одной точке, то она обычно является касательной к поверхности.

Вспомогательную плоскость, проводимую через прямую при построении точек пересечения прямой с кривой поверхностью, стремятся выбрать так, чтобы она пересекала кривую поверхность по линии, простейшей для построения на чертеже. Желательно, чтобы это были прямые или окружности. Рассмотрим пример.

Для построения точек пересечения прямой AB общего положения с поверхностью наклонного кругового цилиндра выберем вспомогательную плоскость, параллельную оси цилиндра. Эта плоскость пересекает цилиндр по прямым – образующим, параллельным оси.

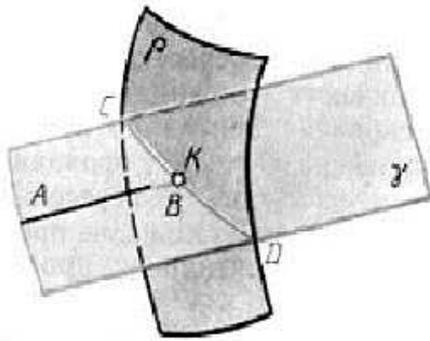


Рис. 15

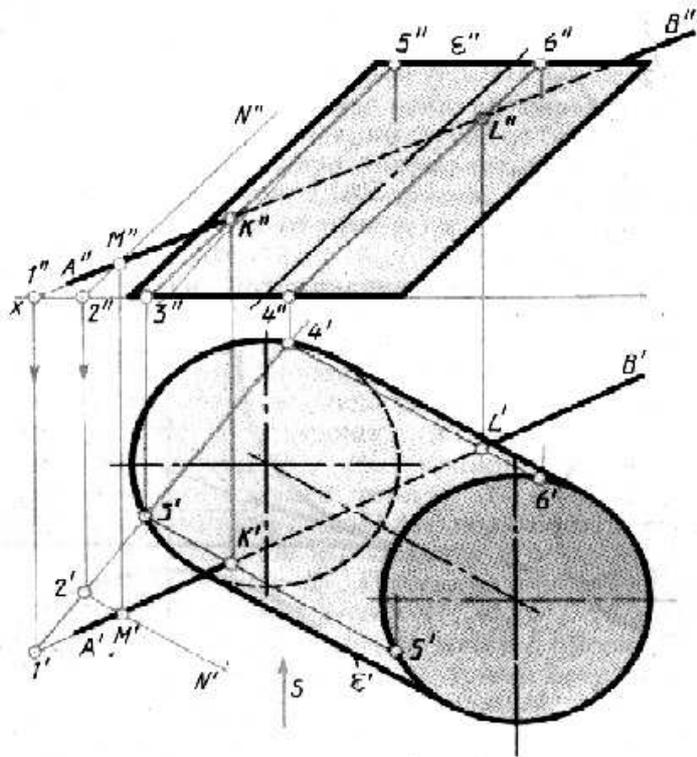


Рис. 16

В соответствии с общим планом решения задачи на рис. 16 выполнены построения в следующем порядке:

- прямая AB заключена во вспомогательную плоскость, параллельную оси цилиндра, для чего через проекции M'' , M' произвольной точки M на прямой AB проведены проекции $M''N''$, $M'N'$ прямой MN , параллельной оси цилиндра. Проекция пересекающихся прямых AB и MN задают на чертеже вспомогательную плоскость ;

- построены проекции $3''5''$, $3'5'$ и $4''6''$, $4'6'$ линий пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью цилиндра на его проекциях. Для этого построена горизонтальная проекция линии пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью основания цилиндра – плоскостью π_1 , проходящая через проекции $1'$ и $2'$, найдены точки с проекциями $3'$, $4'$ ее пересечения с окружностью основания цилиндра. Искомые проекции линий пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью цилиндра проходят через проекции $3''$, $3'$ и $4''$, $4'$ параллельно проекциям оси цилиндра – проекции $3''5''$, $3'5'$ и $4''6''$, $4'6'$;

- определены проекции K'' , K' и L'' , L' искомых точек K и L пересечения прямой AB с поверхностью цилиндра в пересечении проекций $3'' 5''$ и $4'' 6''$ с $A'' B''$ и $3' 5'$ и $4' 6'$ с $A' B'$;

- определена видимость для участков прямой AB с учетом того, что цилиндр непрозрачен. Зоны видимости на фронтальной проекции определены по положению горизонтальных проекций точек $3'$ и $4'$ цилиндра. При взгляде по стрелке S очевидно, что точки 3 , 5 и соответствующая $3 - 5$ видимы, а точки 4 , 6 и образующая $4 - 6$ невидимы. Соответственно на фронтальной проекции отрезок $A'' K''$ проекции прямой видим. Справа от точки K'' прямая до точки L'' проходит внутри цилиндра и справа от точки L'' закрывается цилиндром, т.е. невидима. На горизонтальной проекции образующие $3' 5'$ и $4' 6'$ видимы, невидимая часть прямой AB – отрезок $K' L'$.

5. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В общем случае линию пересечения двух кривых поверхностей между собой строят по точкам, которые находят с помощью вспомогательных секущих поверхностей.

Две криволинейные поверхности ρ_1 и ρ_2 (рис. 17) пересекаются третьей секущей вспомогательной поверхностью ρ_3 . Находят линии пересечения KL и MN вспомогательной поверхности с каждой из заданных. Точка A пересечения построенных линий пересечения KL и MN принадлежит линии пересечения заданных поверхностей.

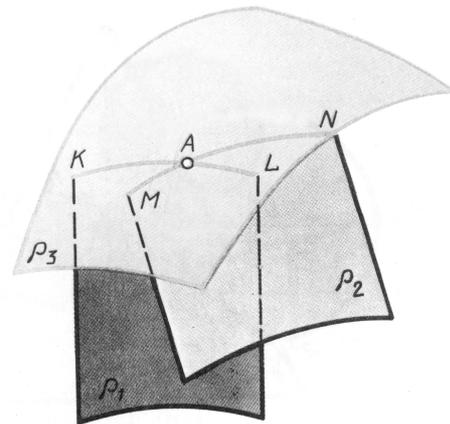


Рис. 17

Повторяя такие построения многократно, с помощью других вспомогательных поверхностей находят необходимое число общих точек двух поверхностей для проведения линии их пересечения.

Сформулируем *общее правило построения линии пересечения поверхностей*:

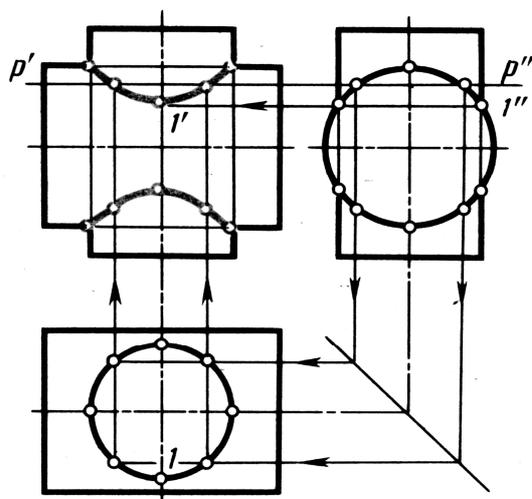
- выбирают вид вспомогательных поверхностей;
- строят линию пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями;
- находят точки пересечения построенных линий и соединяют их между собой.

При построении точек линии пересечения поверхностей вначале находят те точки, которые называют *характерными*, или *опорными*.

В качестве вспомогательных поверхностей выбирают такие, линии пересечения которых заданными поверхностями проецируются на чертеж в графически простые линии – прямые, окружности. В качестве вспомогательных поверхностей можно, например, использовать плоскости или сферы. Рассмотрим их применение .

Способ секущих плоскостей

Пример. Пусть необходимо построить линию пересечения двух цилиндров, боковые поверхности которых проецирующие (рис. 18). Заданные цилиндры разных диаметров. Линия их пересечения, состоящая из двух ветвей, на горизонтальной и профильной проекциях совпадает с проекциями поверхностей цилиндров. По этим проекциям



может быть легко построено любое количество точек, принадлежащих фронтальной проекции одной и другой ветвей линии.

Некоторые точки могут быть отмечены в месте пересечения очерковых образующих фронтальных проекций. Проекция 1' точки 1 найдена по профильной 1'' . Эти точки линии являются *характерными*.

Рис. 18

Все фронтальные проекции промежуточных точек могут быть построены по горизонтальным и профильным проекциям. Можно использовать и вспомогательную плоскость уровня P . Она пересекает цилиндр с горизонтальной осью по двум прямым линиям – образующим, а цилиндр с вертикальной осью – по окружности. Найденные точки соединены по лекалу.

Зависимость линии пересечения поверхностей вращения от соотношения между собой их размеров рассмотрена на примерах пересечения двух цилиндров и цилиндра с конусом.

Изменения проекции линии пересечения вертикального и горизонтального цилиндров в зависимости от изменения соотношений диаметров вертикального и горизонтального цилиндров наглядно видны на рис. 19, а – г. С приближением значения диаметра d_1 вертикального цилиндра к диаметру d_2 горизонтального цилиндра (рис. 19, б) линия пересечения все больше прогибается вниз (точка B опускается). При равенстве диаметров (рис. 19, в), т.е. касании цилиндров одной сферы на линии пересечения в точке B возникает перелом, а плавная линия пересечения превращается в две плоские эллиптические кривые, которые проецируются в две прямые и плоскости которых пересекаются между собой под прямым углом. При

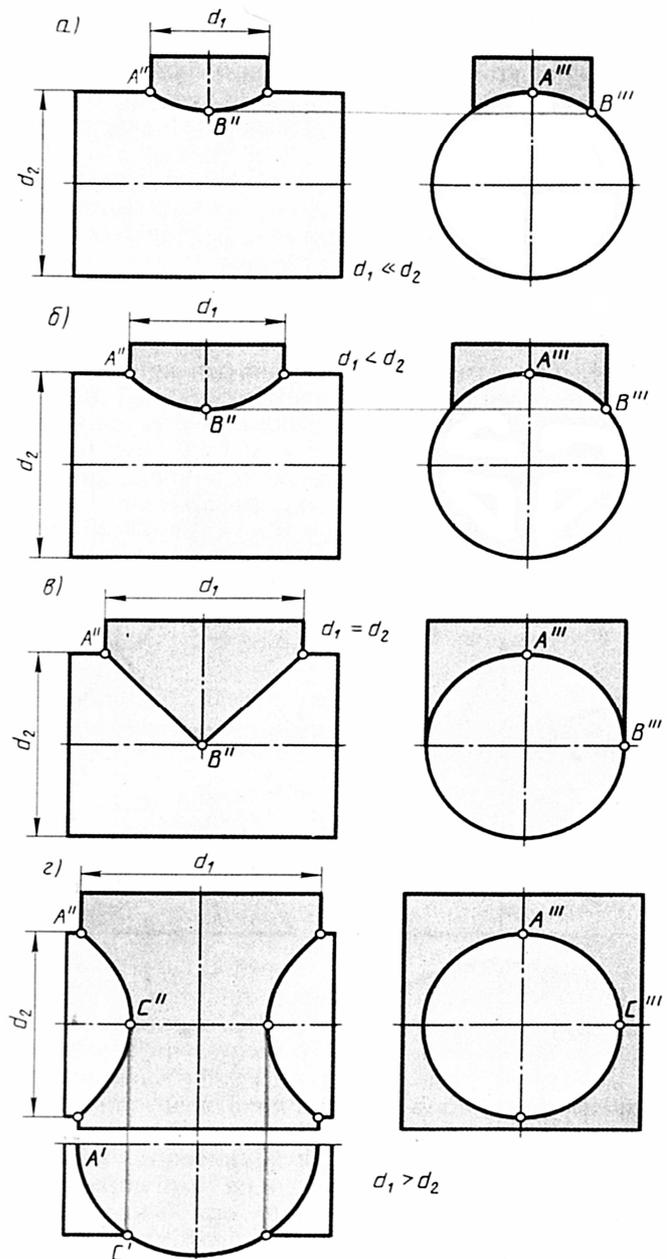


Рис. 19

дальнейшем увеличении (рис. 19, *з*) диаметра d_1 вертикального цилиндра ($d_1 > d_2$) общее направление линии их пересечения изменится. Такое изменение в данном случае равносильно повороту ранее приведенных изображений, например (рис. 19, *б*), на 90° .

Изменение проекции линии пересечения прямых круговых конуса и цилиндра в зависимости от угла при вершине конуса показано на рис. 20, *а – г*.

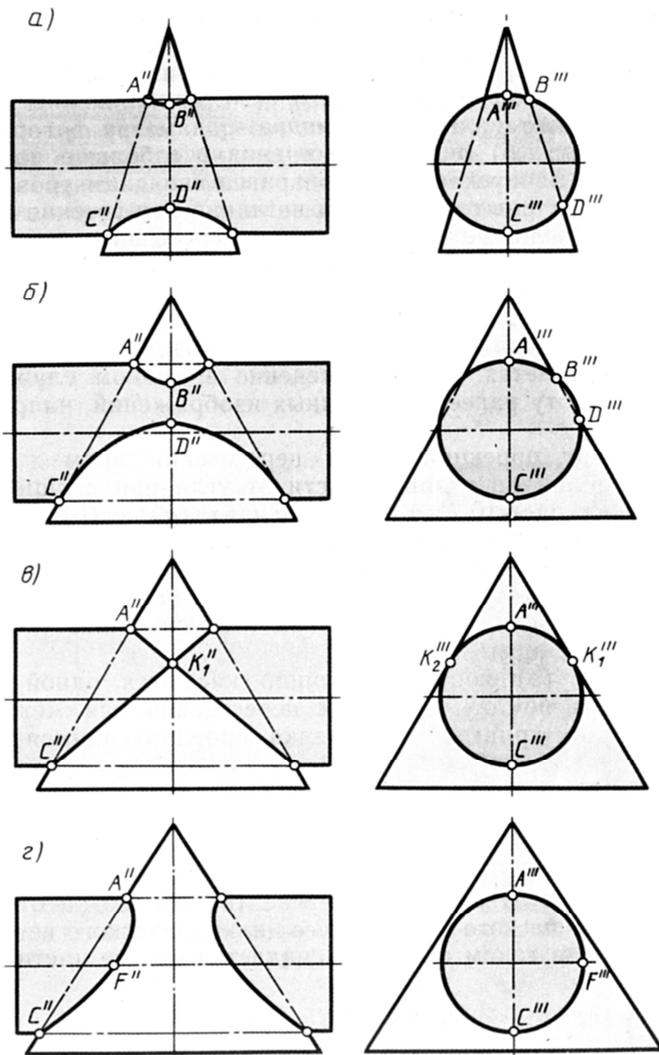


Рис. 20

На рис. 20, *г* линии их пересечения разделяют цилиндр на две части (цилиндр “врезается” в конус).

В случаях, данных на рис. 20, *а, б*, в цилиндре может быть обработано коническое отверстие, на рис. 20, *г* – в конусе может быть выполнено цилиндрическое отверстие, а на рис. 20, *в* обработка отверстий в цилиндре конического или в конусе цилиндрического от-

носа и цилиндра в зависимости от угла при вершине конуса показано на рис. 20, *а – г*. В случаях, изображенных на рис. 20, *а, б*, пересечение конуса с цилиндром происходит по линии 4-го порядка. Она проецируется на плоскость проекций, параллельную плоскости симметрии, в гиперболу и разделяет конус на две части, одна из которых прилегает к вершине, другая – к основанию (конус “врезается” в цилиндр).

В случае, приведенном на рис. 20, *в*, конус и цилиндр касаются одной сферы и пересекаются по двум плоским пересекающимся между собой эллиптическим кривым 2-го порядка, проецирующимся в отрезки прямых.

верстей невозможна, так как тело в таком случае распадается на две части.

Пример. Для построения *линии пересечения сферы с конусом вращения* удобно в качестве вспомогательных поверхностей использовать серию горизонтальных плоскостей, перпендикулярных оси конуса, которые пересекают сферу и конус по окружностям (рис. 21). На пересечении этих окружностей находят точки искомой линии пересечения.

Построение начинают обычно с отыскания проекций характерных точек. Проекции $1''$ высшей и $2''$ низшей точек являются точками пересечения фронтальных проекций очерков, так как центр сферы и ось конуса лежат в плоскости, параллельной плоскости π_2 .

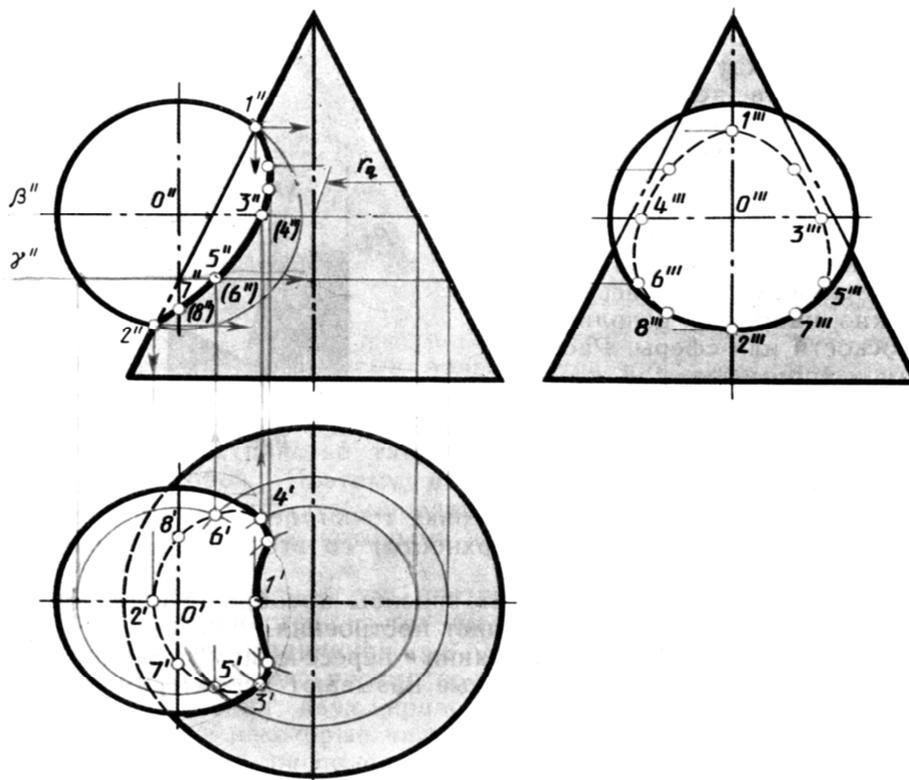


Рис. 21

Горизонтальные $1', 2'$ и профильные $1''', 2'''$ проекции находят в проекционной связи. Проекции $3'', 3', 3'''$ и $4'', 4', 4'''$ точек, лежащих на экваторе сферы, находят с помощью горизонтальной плоскости β (β''), проходящей через центр сферы O (O''). Она пересекает сферу по эква-

тору и конус по окружности радиусом ρ_q , в пересечении горизонтальных проекций которых и находят горизонтальные проекции 3', 4' точек искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции 3' и 4' этих точек являются границами видимости участков линии пересечения на этой проекции. Проекции промежуточных точек, например 5'', 5', 5''' и 6'', 6', 6''', находят с помощью вспомогательной горизонтальной плоскости γ (γ''). Их построение ясно из чертежа. Аналогично построены другие точки. Профильные проекции точек линии пересечения строят по их фронтальной и горизонтальной проекциям. Точки с проекциями 7'', 7', 7''' и 8'', 8', 8''' являются границами видимости участков профильной проекции линии пересечения. Ниже проекций 7''' и 8''' профильная проекция линии пересечения видима.

Способ секущих сфер с постоянным центром для построения линии пересечения двух поверхностей применяют при следующих условиях:

- 1) обе пересекающиеся поверхности – поверхности вращения;
- 2) оси поверхностей вращения пересекаются, точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;
- 3) плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна плоскости проекций. В случае, если это условие не соблюдается, то, чтобы его обеспечить, прибегают к способам преобразования чертежа.

Известно, что если ось поверхности вращения проходит через центр сферы и сфера пересекает эту поверхность, то линия пересечения сферы и поверхности вращения – окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения. При этом если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии. На рис. 22 показана фронтальная проекция пересечения сферой радиусом R поверхностей вращения – конуса, тора, цилиндра, сферы, оси которых проходят через центр сферы радиусом R и параллельны плоскости π_2 . Окружности, по которым пересекаются указанные поверхности вращения с поверхностью сферы, проецируются на плоскость в

виде отрезков прямых. Это свойство используют для построения линий взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер.

Пример. (рис. 23). Способ вспомогательных сфер с постоянным центром применен для построения линии пересечения кругового конуса с поверхностью, состоящей из тора и цилиндра. Тор и цилиндр имеют общую ось вращения, пересекающуюся с осью конуса в точке с проекцией O'' . Обе оси принадлежат плоскости, параллельной плоскости π_2 .

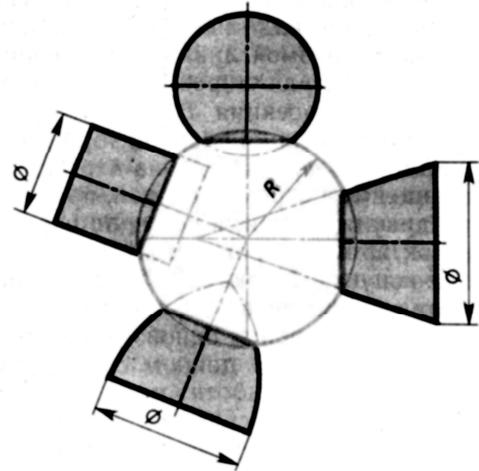


Рис. 22

Построение линий пересечения конуса с тором. Заметим, что линия пересечения конуса с тором в данном случае симметрична относительно фронтальной плоскости, проходящей через оси пересекающихся поверхностей. Фронтальные проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадают, поэтому в дальнейшем изложении будут указываться построения проекций только видимых точек линии пересечения.

Характерными точками искомой линии пересечения являются высшая с проекцией $1''$, низшая с проекцией E'' и ближайшая к оси тора с проекцией C'' . Проекция $1''$ определяется точкой пересечения фронтальных проекций тора и конуса. Проекция E'' построена с помощью сферы R_3 . Она пересекает тор по окружности, проецирующейся в отрезок прямой, прохо-

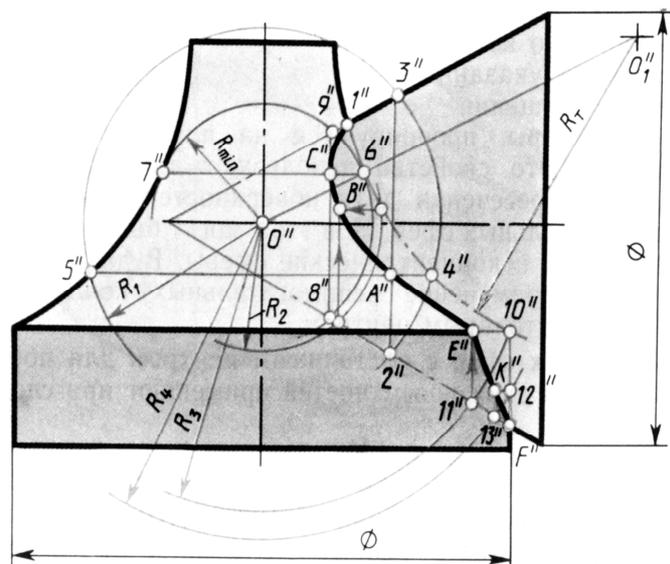


Рис. 23

дующей через проекцию 10" перпендикулярно оси, и конус по окружности, проецирующейся в отрезок прямой, проходящей через проекцию 11" перпендикулярно оси конуса. Проекция C'' построена с помощью вспомогательной сферы минимального радиуса R_{\min} . Его находят как радиус сферы, касательной к одной из поверхностей вращения и пересекающей другую. В данном случае радиус такой сферы определен проекцией 6", в которой проекция образующей окружности R_T тора пересекает линию $O'' O_1''$. Сфера радиусом R_{\min} касается тора по окружности с проекцией 6" 7" и пересекает конус по окружности с проекцией 8" 9".

Для построения проекции A'' произвольной точки линии пересечения конуса и тора пересечем их сферой R_1 с центром в точке с проекцией O'' . Эта сфера пересекает конус по окружности с проекцией в виде отрезка 2" 3", тор по окружности с проекцией в виде отрезка 4" 5". В пересечении этих проекций находим проекцию A'' . Аналогично строят проекции любых других точек линии пересечения, например проекцию B'' с помощью вспомогательной сферы радиусом R_2 .

Построение линии пересечения конуса с цилиндром. Характерными точками искомой линии пересечения являются высшая с проекцией E'' и низшая с проекцией F'' – точка пересечения фронтальных проекций очерков цилиндра и конуса. Проекция K'' произвольной точки этой линии построена с помощью сферы радиусом R_4 . Она пересекает цилиндр и конус по окружностям, проецирующимся в отрезки прямых, проходящих через проекции 12" и 13".

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников. – М. : Высш. шк., 1985. – 288 с.
2. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – М. : Наука, 2000. – 272 с. – ISBN 5-02-013740-5.
3. Кунина, М. В. Кривые поверхности / М. В. Кунина ; Владим. гос. пед. ун-т. – Владимир, 2000. – 28 с. – ISBN 5-87846-048-3.
4. Павлова, А. А. Начертательная геометрия / А. А. Павлова. – М. : Высш. шк., 1999. – 288 с. – ISBN 5-691-00386-0.
5. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1983. – 240 с.

Оглавление

1. Образование поверхностей	3
2. Классификация поверхностей	5
3. Обзор некоторых кривых поверхностей	6
4. Пересечение поверхностей плоскостью и прямой линией	15
5. Взаимное пересечение поверхностей	19
6. Библиографический список	27

КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Учебно-методическая разработка

Составитель

КУНИНА Мария Владимировна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор Г. А. Молева

Подписано в печать 26.09.13.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,63. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.