Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т.Н.КОМОВА, Е.В.ОРЛИК

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

Практикум

Владимир 2012

УДК 512.64

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры ”Алгебра и геометрия”
Владимирского государственного университета
Антонов С.Н.

Элементы линейной алгебры: практикум / Т.Н.Комова, Е.В.Орлик; Владим.гос.ун-т. – Владимир. – 2012. 54 с.

Практикум предназначен для студентов 1 курса ВлГУ факультета ФХЭ, изучающих в рамках курса математики раздел «Линейная алгебра». В этот практикум включены операции над матрицами, вычисление определителей и основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. В разделе приводится множество примеров решения типовых задач, а для закрепления материала студентам предлагается в конце каждой темы выполнить варианты заданий.

Настоящий практикум может быть использован студентами других технических специальностей.

Предисловие.

Настоящий практикум составлен на основе программы математической подготовки для студентов первого курса ВлГУ факультета ФХЭ очной формы обучения квалификации бакалавр. Пособие может быть полезным для студентов других технических специальностей, изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Представленный материал охватывает раздел «Элементы линейной алгебры» изучаемый студентами в первом семестре. Содержание пособия разбито на четыре темы: матрицы, определители, ранг матрицы и системы линейных алгебраических уравнений. В начале каждой темы дается краткое содержание теоретического материала, сопровождаемое типичными примерами с подробным их решением. Теоретический материал пособия ни в коем случае не заменяет лекционный материал, поэтому приводимые в нем теоремы даны без доказательств. Такая форма подачи материала выбрана для акцентирования внимания студента, в первую очередь, на освоении практических навыков решения задач. В конце каждой темы предложен набор задач для самостоятельной проверки студентом усвоенного материала, которые снабжены ответами, приводимыми в конце настоящего практикума. Завершает пособие набор индивидуальных заданий к типовым расчетам по рассмотренным темам.

Учебный план для квалификации бакалавр предусматривает значительный объем внеаудиторных часов для самостоятельной работы, поэтому предлагаемый практикум может быть использовано студентами как дополнение к лекционному курсу и практическим занятиям при изучении данного раздела.

Задания к типовым расчетам могут быть также использованы преподавателями на практических занятиях, при проведении промежуточного контроля знаний студентов, для зачетных занятий в конце семестра, а также при составлении экзаменационных билетов.

.

Тема 1. Матрицы.

1.1. Основные понятия.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

В математике данная таблица, чтобы показать, что это матрица, заключается или в круглые скобки или в двойные прямые:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 3 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \|6\|.$$

Первая матрица имеет размер 2×3, т.е. 2 строки и 3 столбца, остальные соответственно 3×3, 3×1 и 1×1.

Для краткости матрицу обозначают одной заглавной (прописной) буквой. Например, A или B. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы* и обозначаются строчными буквами. Элементы матрицы снабжены двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент матрицы, который расположен на пересечении 2-ой строки и 3-го столбца. Для первой матрицы в примере $a_{23} = 11$, для второй - $a_{23} = 8$.

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В математике, часто для сложных, громоздких выражений принято вводить сокращенные обозначения. Для матриц *сокращенная форма записи*:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \| a_{ij} \|.$$

Если требуется, то указывают на размер матрицы: $m \times n$, или пределы изменений индексов: $i = 1,2,3,\dots,m$; $j = 1,2,3,\dots,n$.

Виды матриц.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов $m \neq n$, называется *прямоугольной.* Матрица размером $n \times n$ называется *квадратной матрицей* порядка **n.**

В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвертая матрица – её порядок 1. Примеры прямоугольных матриц - это первая и третья матрицы.

1.2. Виды квадратных матриц.

1). Квадратная матрица называется *диагональной*, если $a_{ij} = 0$ для любых $i \neq j$**.** Элементы матрицы, находящиеся на ее *диагонали*, то есть, у которых номер строки равен номеру столбца ($i = j$), называются *диагональными элементами*.

Примеры диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2). *Скалярной матрицей* называется диагональная матрица с одинаковыми диагональными элементами.

Пример скалярной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3). Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице $a_{ii} = 1$, называется *единичной матрицей* и обозначается буквой E. Единичную матрицу иногда обозначают с индексом, указывающим порядок матрицы.

Пример единичной матрицы 3-го порядка:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4). Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже ее диагонали, равны нулю, называется *треугольной матрицей*.

Пример треугольной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

5). Квадратная матрица A называется *симметричной* относительно диагонали, если для любых i и j выполняется равенство $a_{ij} = a_{ji}$.
Пример симметричной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 7 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

6). Матрица размера $1\times n$ называется *матрицей - строкой*. Матрица размером $m\times 1$ называется *матрицей - столбцом*. Для матрицы - строки и матрицы - столбца используется общее название *матрица - вектор*. Примером *матрицы - строки* является матрица $A = (1\ \ 5\ \ 2)$. Примером *матрицы - столбца* служит третья матрица в начальном примере.

7). Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто **0**.
Примеры нулевой матрицы:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Линейные операции с матрицами.

1. Равенство матриц (*операция сравнения*).

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются *равными*, если они одинакового размера, т.е. имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$.

Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, то $A = B$, если

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{12} = b_{12}, \quad a_{13} = b_{13}, \quad a_{21} = b_{21}, \quad a_{22} = b_{22}, \quad a_{23} = b_{23}.$$

Замечание. Для матриц не существует сравнений больше (меньше).

2. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размером $m\times n$ на число λ называется матрица $C = \lambda\cdot A$ того же размера $m\times n$, каждый элемент которой $c_{ij} = \lambda\cdot a_{ij}$.

Пример. Найти матрицу $C = 5\cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. $C = 5\cdot A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, необходимо умножить на это число каждый элемент матрицы.

Следствие операции умножения матрицы на число.

Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы

Пример: $\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Для скалярной матрицы это будет

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\cdot E.$$

Замечание 2. Результат произведения матрицы на ноль - есть *нулевая матрица* $\mathbf{0}$.

Замечание 3. Матрицу, равную произведению $(-1)\cdot A$ мы будем называть *противоположной* матрице A и обозначать $-A$.

3. Сложение матриц.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера, т.е. состоящих из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$C = A + B$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим элементы матрицы $C = A + B$, складывая элементы исходных матриц, стоящие на одинаковых местах:

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 + (-1) = 1;$ $c_{12} = (-3) + 4 = 1;$ $c_{13} = 1 + 0 = 1;$ $c_{14} = 1 + (-1) = 0;$
$c_{21} = 0 + 2 = 2;$ $c_{22} = 4 + (-2) = 2;$ $c_{23} = (-2) + 5 = 3;$ $c_{24} = 8 + 7 = 15.$

Следовательно, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

4. Разность матриц.

Разностью матриц B и A одного размера называется матрица C, равная сумме матрицы B и матрицы, противоположной матрице A. $C = B - A = B + (-A)$, где $c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$.

Пример. Найти $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $2 \cdot A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Свойства линейных операций.

1. $A + O = A$.
2. $A + (-A) = O$.
3. $A + B = B + A$.
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
6. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

1.4. Нелинейные операции с матрицами.

1. Произведение матриц.

Для операции умножения требуется, чтобы размеры матриц сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых *число столбцов первой матрицы* совпадает *с числом строк второй матрицы* (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы $A = (a_{is})$ размера $m \times k$ на матрицу $B = (b_{sj})$ размера $k \times n$ называется новая матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots + a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

$$i = 1,2,\ldots,m; \qquad s = 1,2,\ldots,k; \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

Здесь использовано сокращенное обозначение суммы, принятое в математике.

Замечание 1. Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. *возвести в квадрат*.

Замечание 2. Произведение матриц складывается из совокупности простейших операций: умножения *матрицы – строки* на *матрицу – столбец,* в результате которого получается матрица первого порядка (т.е. один элемент):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, например, чтобы вычислить в матрице C элемент c_{13}, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце, нужно в матрице A взять 1-ую строку и умножить ее на 3-й столбец матрицы B. Другие элементы матрицы - произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

Пример 1. Найти произведение матриц A и B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим элементы матрицы C.

$$c_{11} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = 11 \qquad c_{12} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 1$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 1 \quad c_{21} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 = -1$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 3 \quad c_{23} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1 = 5 \quad c_{32} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = -3$$

$$c_{33} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = -6$$

Ответ: $C = A\cdot B = \begin{pmatrix}11 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -3 & -6\end{pmatrix}$**.**

Пример 2. Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Найти произведение нельзя, т.к. ширина первой матрицы (число столбцов) равна 2-м, а высота второй (число строк) равна 1.

*Свойства операции произведения матриц***.**

1. $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$.
2. $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.
3. $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A(\alpha B)$.
4. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

Особое свойства операции умножения.

В перечисленных свойствах умножения матриц отсутствует свойство коммутативности (перестановки) $A\cdot B=B\cdot A$. Проверим это свойство на примере произведения двух матриц.

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A\cdot B \neq B\cdot A$, т.к. полученные матрицы имеют разный размер.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\quad B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

В данном примере матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$ имеют одинаковый размер, но они не равны друг другу.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение. $A\cdot B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не существует.

Таким образом, эти простые примеры показывают, что матрицы, вообще говоря, не перестановочны друг с другом, т.е. в общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$. Поэтому при умножении матриц нужно внимательно следить за порядком множителей.

Пример 4. Легко также проверить, что при умножении квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка вновь получим матрицу A, причём

$$A\cdot E = E\cdot A = A.$$

Пример 5. Можно отметить следующий любопытный факт. Как известно произведение двух отличных от нуля чисел не равно 0. Для матриц это может не иметь места, т.е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

$$\text{Если} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ \text{то}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B удовлетворяющие условию $A{\cdot}B = B{\cdot}A$ носят название *перестановочных*. Необходимым условием существования перестановочной матрицы - квадратность матрицы.

2. Возведение матрицы в целочисленную степень.

Целой положительной степенью A^m $(m > 1)$ квадратной матрицы называют произведение m матриц A.

$$A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ раз}}$$

По определению полагают, что $A^0 = E,\ A^1 = A$**.** Используя определение возведения матрицы в степень, нетрудно показать, что

$$A^m\cdot A^k = A^{m+k} \qquad\qquad \left(A^m\right)^k = A^{mk}$$

Замечание. Операция возведения в степень определена только для квадратных матриц.

3. Транспонирование матрицы.

Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец матрицы B является строкой матрицы A с тем же номером).

Итак, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad то \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *операцией транспонирования***.** Таким образом, транспонирование - это перемена ролями строк и столбцов матрицы.

Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T. Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Пример. Найти матрицу транспонированную данной.

$$1.\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 2.\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Свойства операции транспонирования матрицы***.**

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
4. $(A\,B)^T = B^T A^T$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения.

1). $2\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -7 & 1\end{pmatrix}$;

2). $3\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}^T+7\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

3). $5\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -7 & 8\end{pmatrix}-8\cdot\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}^T$;

4). $7\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}^T-8\cdot\begin{pmatrix}4 & 9\\ 1 & 7\end{pmatrix}^T$;

5). $3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

6). $4\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 7 & -4\end{pmatrix}^T+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}^T$;

7). $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -7 & 1\end{pmatrix}$;

8). $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$;

9). $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$;

10). $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

11). $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

12). $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$;

13). $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

14). $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 8 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 7 & -4\end{pmatrix}$;

15). $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^3$; **16).** $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}^5$; **17).** $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}^n$; **18).** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$;

19). $\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -7 & 8 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$; **20).** $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$; **21).** $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$;

22). $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$; **23).** $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -7\\ 1 & -9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 1 & 8 & 3\end{pmatrix}$.

24). Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?

25). Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?

26). Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную?

27). Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?

28). Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?

Тема 2. Определители.

2.1. Понятие определителя матрицы.

Каждой квадратной матрице A порядка n с действительными элементами можно однозначно поставить в соответствие действительное число, которое называется *определителем* (детерминантом) матрицы A. Для обозначения определителя используются следующие выражения: $detA$, $|A|$ или Δ. Сформулируем определения определителей для матрицы 1-го, 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы A первого порядка, или определителем первого порядка, называется число, равное значению элемента a_{11}.

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$$

Определителем матрицы A второго порядка, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

При вычислении определителя матрицы 2-го порядка из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) $a_{11}a_{22}$ вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали $a_{21}a_{12}$.

Пример. Вычислить определитель второго порядка.

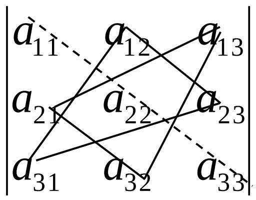
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-5) = 8 + 15 = 23.$$

Определителем матрицы A третьего порядка, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

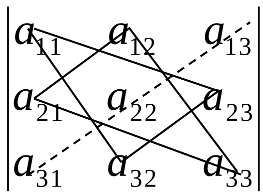
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Данное выражение громоздко и неудобно для запоминания. При вычислении определителя 3-го порядка удобно использовать некоторые правила.

Правило треугольников (или правило Саррюса).



со знаком плюс «+»

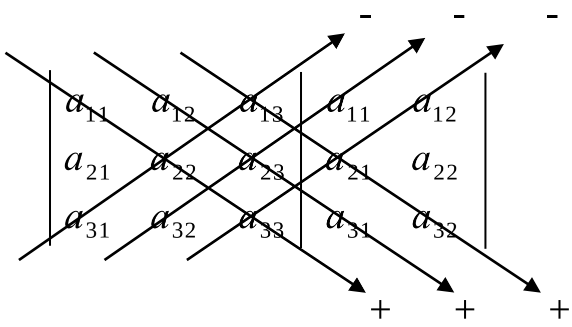


со знаком минус «-»

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Другое правило использует таблицу элементов матрицы, дополненную справа 1-м и 2-м столбцом. Сначала перемножаются элементы, указанные стрелочками, направленными вниз. Они берутся со знаком «плюс». Затем перемножаются элементы, указанные стрелочками, направленными вверх. Они берутся со знаком «минус». В сумме получим значение определителя:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$



Пример. Вычислить определитель матрицы *A*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-1)\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1=$$

$$=2-1+2-1+4-1=5.$$

Ответ: $\Delta_3 = |A| = 5$

Для того, чтобы дать правило вычисления определителя порядка выше 3-го необходимо ввести новые дополнительные понятия: *минор* и *алгебраическое дополнение* элемента матрицы.

2.2. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента матицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n – го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$ – го порядка, полученный из матрицы A путем вычеркивания i – ой строки и j – го столбца.

Замечание. Каждая матрица n – го порядка имеет n^2 миноров $(n - 1)$ – го порядка (по числу элементов матрицы). Так матрица 3 – го порядка имеет 9 миноров.

Пример. Вычислить минор M_{13} элемента a_{13} матрицы A 3-го порядка.
Решение. Вычеркнем первую строку и третий столбец в матрице A.
Оставшие элементы образуют матрицу второго порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен минору M_{13} элемента a_{13}.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n – го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, \text{если} (i+j) - \text{четно} \\ -M_{ij}, \text{если} (i+j) - \text{нечетно} \end{cases}$$

Пример. Найти алгебраические дополнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим сначала миноры элементов данной матрицы:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

А теперь вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3 \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=3 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=1 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-2 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=1 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=3$$

2.3. Теорема Лапласа.

Определитель квадратной матрицы A равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Для i – ой строки это запишется так:

$$\Delta=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}\ .$$

Для j – го столбца это запишется так:

$$\Delta=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+...+a_{mj}\cdot A_{mj}=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\cdot A_{ij}\ .$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка для матрицы их предыдущего примера по формуле Лапласа.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Решение. Для элементов первой строки, используя, ранее вычисленные алгебраические дополнения, получим:

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1=1+3+1=5.$$

Для элементов третьего столбца получим:

$$\det A=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 3=1-2+6=5.$$

Очевидно, что получен одинаковый результат.

Аналогично можно ввести понятия определителей четвёртого, пятого и т.д. порядков, понижая их порядок разложением по элементам i -ой строки (j – го столбца).

Итак, в отличие от матрицы, которая представляют собой таблицу чисел, *определитель это число, которое определённым образом ставится в соответствие матрице*. Запишем еще одно определение для матрицы, у которой определитель равен нулю.

Если определитель матрицы равен нулю, то такая матрица называется *вырожденной*, или особенной; в противном случае – *невырожденной*, или неособенной.

2.4. Свойства определителей.

Запишем свойства определителя, которые в дальнейшем будем использовать на практике. Не нарушая строгости, примеры даны для матрицы 3-го порядка.

Свойство 1.

Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних *0* (нулей), то ее определитель равен нулю.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 2.

Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det A.$$

Следствие. При вычислении определителя общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3.

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

$$det\, A^T = detA.$$

Свойство 4.

При перестановке двух строк (двух столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Пример. В матрице A вторая и третья строки равны.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0 .$$

Свойство 6.

Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Пример. В матрице A второй и третий столбцы пропорциональны друг другу.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 7.

Если все элементы какой–либо строки или столбца определителя представлены в виде суммы 2-х слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы 2-х определителей по формуле:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} + a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a''_{33} \end{vmatrix} .$$

Свойство 8.

Если к какой–либо строке (столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины.

Пример. Возьмем матрицу А и прибавим к элементам третьего столбца элементы второго столбца, умноженные на λ. Тогда, учитывая 6 и 7 свойства, получим:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 + \det A.$$

Свойство 9.

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Замечание. Из 9 - го свойства следует, что если даже

$$A\cdot B \neq B\cdot A, \text{ то } |AB| = |BA|.$$

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно для определителей высоких порядков.

Пример. Вычислить следующий определитель.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойства определителя, преобразуем его к треугольному виду.

1 шаг. Вынесем за знак определителя коэффициент кратности 2 у первой строки и коэффициент кратности 2 у четвертой строки. Поменяем местами первую и вторую строки, что приведет к смене знака.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2 шаг. Необходимо обнулить элементы первого столбца: a_{21}, a_{31} и a_{41}.

Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 2.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 4.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 13 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки первую, умноженную на 3.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 13 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 13 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 0 \end{vmatrix}.$$

3 шаг. Необходимо обнулить элементы 2-го столбца: $a_{32} = -9$ и $a_{42} = -4$.

Для этого вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 9.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 13 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую, умноженную на 4.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{vmatrix}.$$

4 шаг. Умножим 4-ю строку на 3 и сложим с третьей.

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 27 \cdot (-4) = -144.$$

Окончательный ответ: $detA = -144$.

Замечание. Применяя теорему Лапласа можно показать, что определитель треугольного вида равен произведению его диагональных элеменов.

2.5. Обратная матрица.

Введя понятие определителя, мы можем ввести еще один вид матрицы – *обратной*. Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Аналогичное понятие можно ввести и для квадратных матриц.

> Матрица B называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении матрицы A на обратную как справа, так и слева получается единичная матрица E.
>
> $$B \cdot A = A \cdot B = E$$
>
> Для обратной матрицы принято следующее обозначение: A^{-1}.

Замечание. Из определения следует, что обратную матрицу имеет только квадратная матрица. Однако не для каждой квадратной матрицы существует обратная.

> **Теорема** (необходимое и достаточное условия существование обратной матрицы).
>
> Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

<u>*Свойства обратной матрицы*</u>

1. $(A^{-1})^{-1} = A$. 3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. 4. $det(A^{-1}) = 1/detA$.

> *Присоединенной матрицей* $\tilde{A}$ называется такая матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A^T, транспонированной к A.

$$\tilde{a}_{ij} = A_{ij}^T = A_{ji}$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы.

1. Вычисляем определитель исходной матрицы A. Если $detA = 0$, то матрица вырожденная и обратная матрица не существует. Если

$detA \neq 0$, то матрица невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$**.**

$$\tilde{a}_{ij} = A_{ij}^T = A_{ji} \ (i = 1,2,\ldots,n; \ \ j = 1,2,\ldots,n)$$

3. Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \tilde{A}/\Delta$$

4. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Пример. Найти матрицу, обратную к данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 шаг. $\Delta_A = |A| = 5$. Обратная матрица существует.

2 шаг. Находим алгебраические дополнения матрицы A и составляем из них присоединенную матрицу.

Замечание: алгебраические дополнения для этой матрицы были вычислены в примере п. 2.2.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3 шаг. Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

4 шаг. Проверяем правильность вычисления

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Вычислить определители 2-го порядка.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определители 3-го порядка.

6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 9. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 9 & 81 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Используя теорему Лапласа вычислить определители 4-го порядка.

16. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; 17. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 18. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 20. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; 21. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

Задание 4. Вычислить обратные матрицы для матриц, приведенных ниже:

22. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; 23. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 24. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$; 25. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

.

Тема 3. Ранг матрицы.

3.1. Основные понятия.

Понятие ранга матрицы имеет важное значение для решения и исследования ряда математических и прикладных задач.

Рассмотрим матрицу A размера 4×5:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

Из элементов этой матрицы можно построить различные квадратные подматрицы по следующему правилу. Пусть в матрице A размера $m\times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов, где $k \le min(m;n)$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную подматрицу порядка k.

Пример 1: Возьмем 2,3,4 строки и 1,3 и 5 столбцы. Получим подматрицу 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

Пример 2: Возьмем 3 и 4 столбцы и 1,2 строки. Получим подматрицу 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Определители данных подматриц носят название *миноров матрицы*, в отличие от ранее рассмотренного нами понятия *минора элемента матрицы*.

Минорами k-го порядка прямоугольной матрицы размера $m\times n$ называются определители квадратных подматриц k-го порядка, где $k \le min(m;n)$, которые получаются путем выбора каких-либо k строк и k столбцов из матрицы A.

Теперь можно дать определение ранга матрицы.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля миноров этой матрицы, а сам такой минор называется *базисным*.

Ранг матрицы A обозначается: $rangA$ или $r(A)$**.** Ясно, что в матрице может быть несколько базисных миноров, имеющих один и тот же порядок.

Свойства ранга матрицы.

а) Ранг матрицы A_{mxn} не превосходит меньшего его размера, т.е.

$$r(A) \le min(m;n).$$

б) $r(A) = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. матрица A является нулевой $A = O$.

$$r(A) = 0 \ <=> A = 0.$$

в) Для квадратной матрицы n – го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

3.2. Методы вычисление ранга матрицы.

Пример 1. Вычислить ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если $\Delta_A \ne 0$, тогда $r(A) = 3,$ если $\Delta_A = 0$, тогда $r(A) < 3$.

Найдем Δ_A разложением по первой строке:

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 15 = 0.$$

Следовательно, $r(A) < 3$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, $r(A) > 0$. Значит, $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$. Если найдется минор 2-го порядка, не равный нулю, то $r(A) = 2$.

Вычислим минор из элементов, стоящих на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \ne 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Перебирать все миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Проще всего находить ранг матрицы и ее базисный минор при помощи элементарных преобразований.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Чтобы вычислить ранг матрицы необходимо с помощью элементарных преобразований привести ее к *ступенчатому виду*.

Матрица A называется *ступенчатой*, если все ее элементы ниже диагональных a_{ii}, равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$, если $i > j$. $i = 1,2,\dots,r;$ $r \le n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r – го порядка, не равный нулю: $a_{11}\, a_{22} \dots a_{rr} \neq 0$.

Пример 2. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(A) \le 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы слишком много времени. Поэтому, используя элементарные преобразования, приведем матрицу A к ступенчатому виду.

Поменяем местами первую и вторую строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке удвоенную первую, к третьей строке первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы первого столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера 2×6, т.е. $r(A) \le 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \ne 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

Задание. Вычислить ранги, представленных матриц.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.   2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.   3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 4. Системы линейных алгебраических уравнений.

4.1. Основные понятия.

Линейным алгебраическим уравнением называется уравнение вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные. Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad .... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} - произвольные числа, называемые *коэффициентами при неизвестных* $x_1, x_2, ..., x_n$ ($i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$), а b_j называются *свободными членами* уравнений.

Пример системы двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Решением системы (1) называется такая совокупность n значений неизвестных ($x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ ...,\ x_n = \lambda_n$), при подстановке которых в систему (1), каждое уравнение этой системы обращается в верное равенство (тождество).

Виды систем уравнений.

Система уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. В противном случае система уравнений называется *неоднородной*.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если они имеют одно и то же множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Система совместная и определенная, т.к. имеет единственное решение

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

Пример 2. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Система несовместная, так как не существует решения данной системы.

Пример 3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Система совместная и неопределенная, так как имеет бесконечное множество решений.

Запись системы уравнений в матричном виде

Рассмотрим линейную систему (1) и введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ - матрица системы,}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения:

$$AX = B \tag{2}$$

4.2. Методы решения неоднородных квадратных систем линейных уравнений (системы n линейных уравнений с n неизвестными).

Формула Крамера

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Назовем *главным определителем* такой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

а определителем Δ_j - определитель, полученный из (4) заменой столбца коэффициентов при x_j на столбец свободных членов. Например для x_1 имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) Если $\Delta \neq 0$, система (3) имеет единственное решение, определяемое по *формулам Крамера*: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.
2) Если $\Delta = \Delta_j = 0$, система имеет бесконечно много решений.
3) Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_j \neq 0$, система не имеет решений.

Пример. Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}.$$

Решение. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$.

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы

Запишем систему уравнений в матричном виде (2):

$$AX = B.$$

Пусть матрица A – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}. Умножив обе части равенства слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Учитывая, что $A^{-1}A = E,\ EX = X$, получим следующее матричное уравнение:

$$X = A^{-1}B. \qquad (5)$$

Итак, решением матричного уравнения (5) является произведение матрицы, обратной к A, на столбец свободных членов B системы (3).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 4 \end{cases}$$

с помощью обратной матрицы.

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Δ_A = -51 ≠ 0, следовательно, система имеет единственное решение. Найдем матрицу A^{-1}.

Алгебраические дополнения элементов матрицы A равны:

$$\begin{matrix} A_{11} = -11 & A_{21} = -25 & A_{31} = 2 \\ A_{12} = 9 & A_{22} = -12 & A_{32} = 3 \\ A_{13} = -13 & A_{23} = -11 & A_{33} = 7 \end{matrix}$$

Тогда $A^{-1} = -\dfrac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Следовательно,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод последовательных исключений неизвестных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система линейных алгебраических уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого, или треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последнего, находятся все остальные неизвестные.

Напомню, что к *элементарным преобразованиям* матрицы относятся:

- перестановка строк или столбцов;
- умножение строки (столбца) на число;
- сложение строк (столбцов).

На практике в методе Гаусса удобнее работать не с системой уравнений, а с ее расширенной матрицей.

> *Расширенной матрицей* системы уравнений A_p, называется матрица, полученная путем присоединения к матрице системы A столбца свободных членов B.

Метод Гаусса включает «*прямой ход*» метода Гаусса и «*обратный ход*» метода Гаусса. Продемонстрируем этот метод на примере системе 3-х уравнений с 3-я неизвестными.

Пример. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу для данной системы уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

<u>*Прямой ход метода Гаусса.*</u>

Целью прямого метода Гаусса является приведение, путем элементарных преобразований, расширенной матрицы к ступенчатому виду, когда все элементы ниже диагональных элементов матрицы системы A будут равны нулю.

1 шаг. Обнулить все элементы в 1-м столбце, кроме первого.

Так в данном случае, чтобы обнулить элемент 2-й строки 1-го столбца, надо 2-ую строку сложить с 1-ой, предварительно умноженной на -2. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Замечание. Удобно коэффициенты преобразования записывать справа от матрицы.

Чтобы обнулить элемент 3-й строки 1-го столбца, надо 3-ую строку сложить с 1-ой, предварительно умноженной на -1. Получим.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

2 шаг. Обнулить все элементы во втором столбце, кроме первого и второго.

Чтобы обнулить элемент третьей строки второго столбца, надо к третьей строке, умноженной на 3, прибавить вторую строку, умноженную на -2.

Получим.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ (3) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Обратный ход метода Гаусса.</u>

Полученная расширенная матрица является матрица следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Выражая x_3 из третьего уравнения и подставляя его значение во второе уравнение, найдем $x_2 = 2$. Подставив значения $x_3 = 1$ и $x_2 = 2$ в первое уравнение, найдем $x_1 = 4$.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Замечание. На практике можно делать любые элементарные преобразования, отличные от описанных выше, но соблюдая главную цель прямого и обратного ходов метода Гаусса.

4.3. Однородные системы уравнений.

Однородная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Матричный вид однородной системы:

$$A\,X = 0.$$

Однородная система всегда совместна, поскольку любая однородная линейная система имеет, по крайней мере, одно решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ ...,\ x_n = 0.$$

Данное решение называется *тривиальным*. Если однородная система имеет единственное решение, то это единственное решение - нулевое, и система называется *тривиально совместной*. Если же однородная система имеет более одного решения, то среди них есть и ненулевые и в этом случае система называется *нетривиально совместной*.

Теорема. Для того, чтобы однородная система была нетривиально совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы системы был меньше числа неизвестных n. $r < n$.

Замечание. Для квадратной матрицы (при $m = n$) для нетривиальной совместности системы необходимо и достаточно, чтобы *определитель* матрицы системы был равен нулю $detA = 0$.

Изучение решения однородных линейных систем проведем на конкретном примере.

Дана система уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Найти общее решение данной системы.

Нахождение решения начинается с определения *ранга матрицы* системы. Применив к матрице системы алгоритм Гауссова исключения, приведем матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}3&4&3&2\\5&7&4&3\\4&5&5&3\\5&6&7&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&4&3&2\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\\0&2&-6&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&4&3&2\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Путем элементарных преобразований мы получили матрицу, ранг которой равен $r = 2$. Ранг матрицы равен числу линейно независимых уравнений. Полученная матрица соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+3x_3+2x_4=0\\ \quad\ -x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$$

Это система 2-х уравнений с $n = 4$ неизвестными. Если число неизвестных больше числа уравнений, тогда все неизвестные делятся на две группы. Первая группа – *базисные* неизвестные. Число их равно рангу матрицы. В данном случае $r = 2$. Оставшиеся неизвестные - *свободные* неизвестные. Число их в данном случае $n – r = 2$**.**

*Замечание***.** Не все неизвестные могут быть приняты за базисные решения. Необходимо, чтобы базисный минор, соответствующий этим неизвестным, был отличен от нуля.

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix}3&4\\0&-1\end{vmatrix}$.= -3 $\neq$ 0. Тогда неизвестные x_1 и x_2 будут называться *базисными*, а остальные x_3 и x_4 - *свободными*. Перенося свободные неизвестные вправо от равенства, исходная система линейных уравнений преобразуется в укороченную систему, которая имеет вид:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=-3x_3-2x_4\\ \qquad\quad x_2=\ 3x_3+\ x_4\end{cases}.$$

Задавая свободным переменным x_3, и x_4 произвольные значения, например c_1 и c_2, мы, решая данную систему найдем значения для базисных переменных x_1, x_2. Положим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$. Решая укороченную систему получим:

$$x_1=-5c_1-2c_2;$$

$$x_2=\ 3c_1+\ c_2.$$

Тогда общее решение системы зависит от двух параметров $X(c_1,c_2)$ и может быть записано в виде:

$$X(c_1,c_2)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5c_1-2c_2 \\ 3c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Доказано, что среди бесконечного множества решений однородной системы можно выделить ровно n - r линейно независимых решений. В нашем случае n - r $= – 2$.

Совокупность n - r линейно независимых решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений*. Любое решение системы линейно выражается через фундаментальную систему.

Положим последовательно значения свободных переменных равными $\{x_3 = 1;\ x_4 = 0\}$ *и* $\{x_3 = 0;\ x_4 = 1\}$, отсюда получим, так называемые *фундаментальные решения* e_1, e_2.

$$e_1=X(1,0)=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2=X(0,1)=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя полученные выражения для фундаментальных решений, общее решение однородной системы линейных уравнений можно записать в виде:

$$X(c_1,c_2) = c_1\, e_1 + c_2\, e_2.$$

Записанное выражение называется *общим решением однородной системы* X_{00}.

ИТОГ.

Исследовать однородную систему — значит установить, является ли она нетривиально совместной, и если является, то необходимо выделить *базисные переменные* $x_1, x_2, ..., x_r$, которые выражаются через оставшиеся переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, называемые *свободными переменными*. После этого найти фундаментальную систему решений и записать выражение для общего решения системы через полученную фундаментальную систему.

Перейдем теперь к решению прямоугольных неоднородных систем линейных уравнений, когда число уравнений не равно числу неизвестных.

4.4. Неоднородные системы уравнений.

Рассмотрим *систему m линейных алгебраических уравнений* относительно n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Или в матричном виде.

$AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

В отличие от однородной системы, эта система совместна не всегда. Справедливо следующее утверждение *(теорема Кронекера-Капелли)*.

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$RgA = RgA_p.$$

Пример 1. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_p} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$\mathrm{Rg}A = 2. \qquad \mathrm{Rg}\,A_p = 3.$

Система несовместна.

Пример 2. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_p} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

$\mathrm{Rg}A = 2$ $\mathrm{Rg}\,A_p = 2.$

Система совместна, т.к $RgA = RgA_p$. Несложно получить ее решение:

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 1/2.$$

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

Теорема 1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. $r = n$, то система имеет единственное решение.

Теорема 2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. $r < n$, то система неопределенная и имеет бесконечно множество решений.

Изучение решения неоднородных линейных систем проведем также на конкретном примере.

Дана система уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Найти общее решение данной системы.

Нахождение решения начинается с определения ранга матрицы системы. Применив к расширенной матрице системы алгоритм *Гауссова исключения*, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Путем элементарных преобразований мы получили матрицу, ранг которой равен 2. Мы видим, что из четырех строк матрицы только две являются линейно независимые, что и соответствует величине ранга матрицы. Отсюда мы имеем два базисных решения и два неосновных – свободных переменных.

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Тогда неизвестные x_1 и x_2 будут называться *базисными***,** а остальные x_3 и x_4 – *свободными*. Оставляя в левой части переменные x_1 и x_2, остальные *неосновные* переменные x_3 и x_4 переносим в правые части уравнения.

Исходная система линейных уравнений преобразуется в *укороченную систему*, которая имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 + \qquad\quad x_4 \\ \quad\; + 5x_2 = 10 + 2x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Задавая свободным переменным x_3 и x_4 произвольные значения мы решая данную систему найдем значения для базисных переменных x_1, x_2. Положим $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, тогда решая укороченную систему получим.

$$x_1 = 4/5\ c_1 + 1/5\ c_2 + 1,$$
$$x_2 = 2/5\ c_1 + 3/5\ c_2 + 2$$

В итоге общее решение системы можно записать в виде

$$X(c_1,c_2) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Положив свободные переменные равными нулю, $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, и вычислив соответствующие значения базисных переменных, получим частное решение исследуемой системы, которое называется *базисным*: $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, ..., $x_r = x_{r0}$.

Решение системы (1), в которой все $(n - r)$ не основных переменных равны нулю $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, называется *базисным решением*.

В нашем случае базисное решение равно

$$X(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Замечание. Для однородной системы базисное решение является – нулевым – *тривиальное решение*.

Давайте проанализируем полученное общее решение неоднородной системы. Для этого преобразуем полученное решение к виду:

$$X(c_1,c_2) = \begin{pmatrix} 1+0{,}8c_1+0{,}2c_2 \\ 2+0{,}4c_1+0{,}6c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\, e_1 + c_2\, e_2$$

Мы получили важный результат, который можно сформулировать следующим образом:

Общее решение неоднородной системы уравнений $X_{он}$ равно сумме общего решения однородной системы уравнений $X_{оо}$ и частного решения неоднородной системы уравнений $X_{чн}$.

$$X_{он} = X_{оо} + X_{чн}$$

В нашем случае в качестве частного решения системы уравнений взято базисное решение.

Окончательный результат исследования системы уравнений можно привести в виде схемы.

Система m линейных уравнений с n неизвестными

rang(A) = m	*rang(A) < m*
уравнения системы независимые	уравнения системы зависимые. исходная система заменяется на укороченную.

rang(A) = rang(A$_p$)	*rang(A) ≠ rang(A$_p$)*
система совместная	система несовместная

rang(A) = n	*rang(A) < n*
система определенная (единственное решение)	система неопределенная (бесконечное множество решений)

4.5. Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить следующие системы уравнений методом Крамера и методом обратной матицы:

1. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=5 \\ 4x_1+3x_2-x_3=8 \\ 8x_1+5x_2+4x_3=9 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1+11x_2+5x_3=2 \\ x_1+5x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-3 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3=20 \\ x_1+3x_2-x_3=3 \\ 8x_1+5x_2-2x_3=10 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=-3 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ x_1+5x_2+3x_3=-5 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 3x_1+3x_2-2x_3=8 \\ x_1+x_2+3x_3=-1 \\ 3x_1+8x_2+9x_3=2 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=-15 \\ x_1+3x_2-3x_3=-17 \\ 3x_1-2x_2+x_3=-2 \end{cases}$;

Задание 2. Решить следующие системы уравнений методом Гаусса:

7. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=2 \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=19 \\ 2x_1-2x_2+x_4=5 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=1 \end{cases}$; 10. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=-23 \\ 3x_1-x_2-5x_3+5x_4=-25 \\ 2x_1+3x_2-9x_3+2x_4=-40 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-9x_4=-3 \end{cases}$.

Задание 3. Решить следующие однородные системы уравнений методом Гаусса:

11. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+12x_3-19x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=0 \\ x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0 \\ -2x_1+2x_2+x_3+9x_4=0 \\ -x_1+3x_2-5x_3+5x_4=0 \end{cases}$.

Задание 4. Решить следующие неоднородные системы уравнений методом Гаусса:

13. $\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3+x_4=2 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+3x_4=4 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} 5x_1+7x_2+x_3-3x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-6x_4=2 \\ 11x_1+15x_2-x_3+3x_4=-1 \end{cases}$.

Контрольные задания.

Задание 1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=5 \\ 4x_1-x_2+10x_3=11 \\ 5x_1+3x_2-5x_3=9 \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=11 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=-12 \\ 2x_1-x_2+5x_3=8 \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=8 \\ x_1+2x_2-3x_3=3 \\ 5x_1+x_2-6x_3=15 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2-3x_3=-3 \\ -x_1-2x_2+3x_3=6 \end{cases}$; **5.** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1+2x_2-x_3=2 \\ x_1+4x_2-3x_3=-2 \end{cases}$; **6.** $\begin{cases} 4x_1+4x_2-5x_3=-9 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=2 \\ x_1-x_2+10x_3=15 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=8 \\ x_1+x_2-2x_3=-4 \\ 3x_1-x_2-x_3=4 \end{cases}$; **8.** $\begin{cases} 7x_1-2x_2+4x_3=11 \\ 2x_1+2x_2-x_3=1 \\ 3x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$; **9.** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1-x_2-x_3=4 \\ x_2-x_3=-6 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3=1 \\ -3x_1+2x_2+5x_3=-20 \\ -4x_1-2x_2+x_3=-18 \end{cases}$; **11.** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-2x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$; **12.** $\begin{cases} 5x_1+x_2-4x_3=-2 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=4 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=3 \\ 2x_1+2x_2-x_3=8 \\ -x_2+4x_3=-9 \end{cases}$; **14.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=2 \\ 4x_1-x_2=19 \end{cases}$; **15.** $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3=20 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-13 \\ x_1+x_2+x_3=-8 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=8 \\ 4x_1+x_2+5x_3=7 \\ -x_1+10x_2+2x_3=9 \end{cases}$; **17.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=10 \\ 4x_1-x_2+x_3=13 \end{cases}$; **18.** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1+x_3=0 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=3 \\ -x_1+2x_2-x_3=1 \end{cases}$; **20.** $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-9 \\ -x_1-3x_2+6x_3=13 \\ 2x_1+5x_2-x_3=-4 \end{cases}$; **21.** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1 \\ -4x_1+5x_2+6x_3=13 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$; **23.** $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1 \\ x_1-2x_2-x_3=-2 \end{cases}$; **24.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+2x_3=-2 \end{cases}$;

25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 13 \end{cases}$; **26.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; **27.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 33 \end{cases}$;

28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$; **29.** $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -24 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -11 \end{cases}$; **30.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$.

Задание 2. Решить систему уравнений методом Крамера.

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -11 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 - 15x_4 = 15 \\ 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -7 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 12x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 11x_4 = 6 \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 1 \\ 11x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 1 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 = -4 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_2 - x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 - 15x_4 = 10 \\ 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$;

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -6 \\ -10x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$;

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -12 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$;

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = -9 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$;

18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 13 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 8x_1 - 7x_2 + 10x_3 - 18x_4 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 11 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 2 \end{cases}$;

20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$;

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$;

23. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$;

24. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$;

25. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$; **26.** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$; **28.** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 18 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -7 \\ 7x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 25 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$; **30.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -21 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 18 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$.

Задание 3. Найти общее решение однородной системы уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; **5.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; **6.** $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; **8.** $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$; **9.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; **11.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; **12.** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 16x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; **14.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$; **15.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0 \\ -x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$; **17.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+3x_2+5x_3=0 \end{cases}$; **18.** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2+6x_3=0 \\ x_1+8x_3=0 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} -3x_1-x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ -x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$; **20.** $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ -x_1-3x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+x_3=0 \end{cases}$; **21.** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ -4x_1+5x_2+2x_3=0 \\ x_1-5x_2+7x_3=0 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=0 \end{cases}$; **23.** $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$; **24.** $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$;

25. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-5x_3=0 \\ x_1+2x_2-7x_3=0 \end{cases}$; **26.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$; **27.** $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=0 \\ 5x_1-8x_2-3x_3=0 \\ 7x_1-2x_2+5x_3=0 \end{cases}$;

28. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 5x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-7x_3=0 \end{cases}$; **29.** $\begin{cases} 2x_1-5x_2-3x_3=0 \\ x_1-2x_2+2x_3=0 \\ x_1-3x_2-5x_3=0 \end{cases}$; **30.** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+5x_2-x_3=0 \end{cases}$.

Задание 4. Найти общее решение неоднородной системы уравнений.

1. $\begin{cases} 5x_1-4x_2-2x_3-9x_4=5 \\ x_1-x_2+x_3-4x_4=2 \\ 3x_1-2x_2-4x_3-x_4=1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1-5x_2-x_3-2x_4=3 \\ -x_1+3x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+2x_3-2x_4=-4 \\ -4x_1-5x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3-3x_4=-3 \end{cases}$; **4.** $\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3+11x_4=7 \\ x_1-x_2+x_3+13x_4=-1 \\ 3x_1-2x_2-3x_3-2x_4=8 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=3 \\ x_1+3x_2-5x_3+x_4=5 \\ x_1-x_2+3x_3-3x_4=1 \end{cases}$; **6.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+4x_4=1 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=-3 \\ 3x_1+2x_2-x_3+5x_4=-2 \end{cases}$;

$$\mathbf{7.}\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-1\\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=3\\ 4x_1+7x_2-5x_3-x_4=1\end{cases};\qquad \mathbf{8.}\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-2x_4=3\\ -x_1-x_2+3x_3+3x_4=-1\\ 3x_1+2x_2-4x_3-5x_4=4\end{cases};$$

$$\mathbf{9.}\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3+3x_4=-1\\ x_1-x_2+3x_3+2x_4=-6\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=5\end{cases};\qquad \mathbf{10.}\begin{cases} 5x_1+9x_2-4x_3-x_4=-2\\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=-5\\ 3x_1+5x_2+2x_3-3x_4=8\end{cases};$$

$$\mathbf{11.}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+4x_4=-6\\ 2x_1+5x_2-x_3+3x_4=-5\\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=1\end{cases};\qquad \mathbf{12.}\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=1\\ x_1+2x_2-6x_3+2x_4=-3\\ 3x_1+5x_2-5x_3+7x_4=-2\end{cases};$$

$$\mathbf{13.}\begin{cases} -3x_1+5x_2-7x_3-5x_4=5\\ 2x_1-3x_2+5x_3+2x_4=-2\\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4=-3\end{cases};\qquad \mathbf{14.}\begin{cases} 5x_1-4x_2-2x_3-4x_4=7\\ x_1-x_2+3x_3+3x_4=-1\\ 4x_1-3x_2-5x_3-7x_4=8\end{cases};$$

$$\mathbf{15.}\begin{cases} x_1+6x_2-3x_3+3x_4=-1\\ 2x_1+11x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+5x_2+4x_3-2x_4=2\end{cases};\qquad \mathbf{16.}\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=1\\ x_1-x_2-3x_3-4x_4=-2\\ 3x_1-5x_2+x_3+2x_4=0\end{cases};$$

$$\mathbf{17.}\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3+x_4=-1\\ 7x_1-11x_2-4x_3+5x_4=1\\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=4\end{cases};\qquad \mathbf{18.}\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3+4x_4=1\\ x_1+3x_2-3x_3+x_4=-2\\ 3x_1+8x_2-x_3+5x_4=-1\end{cases};$$

$$\mathbf{19.}\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-1\\ x_1+x_2+10x_3+2x_4=6\\ 4x_1+5x_2+17x_3+7x_4=11\end{cases};\qquad \mathbf{20.}\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-2\\ x_1+2x_2-5x_3-3x_4=-3\end{cases};$$

$$\mathbf{21.}\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3-2x_4=4\\ x_1+3x_2+x_3+x_4=7\\ x_1+2x_2-2x_3-3x_4=-3\end{cases};\qquad \mathbf{22.}\begin{cases} 3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=-9\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-2\\ -x_1-2x_2+2x_3-x_4=7\end{cases};$$

$$\mathbf{23.}\begin{cases} 3x_1-8x_2-3x_3+3x_4=-5\\ x_1-3x_2+x_3-2x_4=3\\ 5x_1-14x_2-x_3-x_4=1\end{cases};\qquad \mathbf{24.}\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3-x_4=1\\ x_1-x_2-3x_3+x_4=-2\\ 4x_1-5x_2-4x_3+x_4=-3\end{cases};$$

25. $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 - 25x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$; **26.** $\begin{cases} 4x_1 - 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 6x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$; **28.** $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$; **30.** $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$.

Ответы к задачам для самостоятельной работы.

Тема 1. Матрицы.

1). $\begin{pmatrix} -3 & -16 \\ 31 & -11 \end{pmatrix}$; **2).** $\begin{pmatrix} 23 & 43 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$; **3).** $\begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 5 & 40 \end{pmatrix}$; 4**).** $\begin{pmatrix} -39 & 13 \\ -86 & -21 \end{pmatrix}$;

5). $\begin{pmatrix} 16 & -2 & -3 \\ 15 & -7 & -14 \end{pmatrix}$; **6).** $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 7 & 22 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$; 7**).** $\begin{pmatrix} 23 & 10 \\ 43 & 16 \end{pmatrix}$; **8).** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **9).** $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$;

10). $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \\ -14 & -9 & -8 \end{pmatrix}$; **11).** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; **12).** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$; **13).** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

14). $\begin{pmatrix} 43 & -30 \\ 151 & -90 \end{pmatrix}$; **15).** $\begin{pmatrix} -35 & -30 \\ 45 & 10 \end{pmatrix}$; **16).** $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; **17).** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при n – четном и $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при n – нечетном; **18).** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$;

19). $\begin{pmatrix} 21 \\ -50 \end{pmatrix}$; **20).** $\begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **21).** $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$; **22).** $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$**;** **23).** $\begin{pmatrix} 2 & -21 & -31 \\ 7 & 13 & -22 \\ -3 & -55 & -40 \end{pmatrix}$;

24). Только для квадратных матриц; **25).** Только для квадратных матриц; **26).** Да; **27).** Да; **28).** Да.

Тема 2. Определители.

1). 1; **2).** -1; **3).** -7; **4).** 0; **5).** 4ab; **6).** 5; **7).** 40; **8).** -3; **9).** -1; **10).** 4; **11).** -1; **12).** 6; **13).** 0; **14).** -8; **15).** 20; **16).** -144; **17).** -9; **18).** 18; **19).** 18; **20).** 4; **21).** 90;

22). $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; **23).** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; **24).** $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

25). $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; **26).** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 3. Ранг матрицы.

1). 2; **2).** 3; **3).** 3.

Тема 4. Системы уравнений.

1). $\{x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1\}$; **2).** $\{x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1\}$;
3). $\{x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 2\}$; **4).** $\{x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1\}$;
5). $\{x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1\}$; **6).** $\{x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3\}$;
7). $\{x_1 = -1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2;\ x_4 = 2\}$; **8).** $\{x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -3;\ x_4 = 1\}$;
9). $\{x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = -4;\ x_4 = 1\}$; **10).** $\{x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 5;\ x_4 = -1\}$;

11. $X = c_1\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; **12.** $X = c_1\begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

13. $X = c_1\begin{pmatrix} -15 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; **14.** $X = c_1\begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -33 \\ 24 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рекомендуемая литература.

1. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей: учебник для ВУЗов. / И.И. Баврин. – М.: Физматлит, 2003. – 327 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика: учебник для ВУЗов по инженерно-техническим специальностям. Т. 1. / Я.С.Бугров, С.М.Никольский. – М.: Дрофа, 2006. – 284 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: учебное пособие для ВУЗов. / Б.П.Демидович, В.А.Кудрявцев. – М.:Астрель АСТ, 2005, 654 с.
4. Дубровин Н.И. Задания к типовым расчетам по математике. / Н.И.Дубровин. - Владим. политехн. ин-т, Владимир, 1993, 64 с.
5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты: учебное пособие для втузов. / Л.А.Кузнецов. - М.: Высшая школа, 1983, 175с.
6. Лунгу К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учебное пособие. / К.Н.Лунгу, Е.В.Макаров, под ред. В.Д.Кулиева. – М.: Физматлит, 2005, 213 с.
7. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейн. алгебра, аналит. геометрия, дифференц. исчисление функциий одной переменной: учебник для ВТУзов. / О.В.Мантуров. – М.: Высшая школа, 1986, 480с.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч1. / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис пресс, 2005. – 280 с.

Оглавление.