Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(ВлГУ)

Галас В.П.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям со студентами
направления 220400 - *Управление в технических системах*

(Электронный ресурс)

Владимир 2012

УДК 681.32

Идентификация и диагностика систем управления. Методические указания к практическим занятиям со студентами направления 220400 - Управление в технических системах (Электронный ресурс)/ Сост.: В.П. Галас, 2012. 76 с.

Приведены задания и методический материал к пяти практическим занятиям со студентами направления 220400, в которых исследуется устойчивость, управляемость, наблюдаемость, производится получение передаточных функций систем, выполняется аппроксимация функций и расчет параметров уравнения линейной множественной регрессии, осуществляется построение и анализ качества модели регрессии.

Предназначены для бакалавров и магистров направления 220400 - Управление в технических системах

Ил. 2. Табл. 33. Библиогр.: 11 назв.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Тема: Устойчивость, управляемость, наблюдаемость, получение передаточных функций систем

Теоретическая часть

Линейные преобразования

Рассмотрим линейную систему, которая описывается векторным уравнением состояния:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \tag{1.1}$$

где $\vec{x}(t)$ - n-мерный вектор состояния, $\vec{u}(t)$ - вектор входных сигналов или возмущающих воздействий, независимые компоненты которого в общем случае являются функциями времени; **A, B** — матрицы коэффициентов системы.

Из переменных состояния различными способами можно построить вектор состояния. Для этого можно использовать линейное преобразование уравнения (1.1). Тогда преобразованный вектор состояния $\vec{x}^*(t)$ является линейной комбинацией из n компонент вектора $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}^*(t) = \psi^{-1}\vec{x}(t) \tag{1.2}$$

где ψ — матрица преобразования, а $\vec{x}^*(t)$ - преобразованный вектор состояния.
Преобразование (1.2) приводит к новому уравнению состояния

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = A^*\vec{x}^*(t) + B^*\vec{u}(t) \tag{1.3}$$

в котором

$$A^* = \psi^{-1}A\psi, \tag{1.4}$$

$$B^* = \psi^{-1}B. \tag{1.5}$$

Эти преобразования возможны только в том случае, когда существует обратная матрица ψ^{-1}. Следует отметить, что ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как новая переменная состояния, если она является линейной комбинацией одной или нескольких других переменных состояния. Собственные значения матрицы A в исходном уравнении совпадают с собственными значениями матрицы A* в преобразованном уравнении (1.2).

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

собственные числа которой найдем из уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

$$\lambda_i = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2.$$

Преобразуем исходную систему с помощью матрицы $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Обратная матрица имеет вид $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Тогда преобразованная система соответственно имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = A^* \vec{x}^*(t), \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A*

$$\det(A^* - \lambda^* E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda^* & 4 \\ \frac{1}{2} & 4-\lambda^* \end{vmatrix} = (3-\lambda^*)(4-\lambda^*) - 2 = \lambda^{*2} - 7\lambda^* + 10, .$$

$$\lambda_i^* = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \lambda_i \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2,$$

Видим, что они равны собственным значениям матрицы А.

Каноническое преобразование

Среди различных линейных преобразований уравнения (1.1) особую роль играет каноническое преобразование, когда в качестве матрицы преобразования применяется матрица собственных векторов V. Она получается из решения однородного линейного уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \\ &\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Решение этой однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = v_{11}e^{\lambda_1 t} + v_{12}e^{\lambda_2 t} + \ldots + v_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ &x_2(t) = v_{21}e^{\lambda_1 t} + v_{22}e^{\lambda_2 t} + \ldots + v_{2n}e^{\lambda_n t}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &x_n(t) = v_{n1}e^{\lambda_1 t} + v_{n2}e^{\lambda_2 t} + \ldots + v_{nn}e^{\lambda_n t}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} &\vec{x}(t) = \vec{v}^{\,1}e^{\lambda_1 t} + \vec{v}^{\,2}e^{\lambda_2 t} + \ldots + \vec{v}^{\,n}e^{\lambda_n t} = V\{e^{\lambda t}\}, \\ &\textit{где } \{e^{\lambda t}\} = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}, \\ &V = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{1n} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n^1 & \ldots & v_n^n \end{pmatrix} = \{\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}, \ldots, \vec{v}^{\,n}\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Чтобы выполнить каноническое преобразование, необходимо тем или иным способом найти собственные векторы для матрицы А.

1. Прямое определение собственных векторов.

Продифференцируем решение (1.9) линейного уравнения по времени:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lambda_1 \vec{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \vec{v}^2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \lambda_n \vec{v}^n e^{\lambda_n t}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, подстановка решения (1.9) в однородное уравнение (1.8) дает:

$$\dot{\vec{x}}(t) = AV\{e^{\lambda t}\} = A\{\vec{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \vec{v}^2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \vec{v}^n e^{\lambda_n t}\}. \quad (1.12)$$

Сравнивая выражения (1.11), (1.12), получаем, что должны выполняться равенства:

$$\lambda_i \vec{v}^i e^{\lambda_i t} = A\vec{v}^i e^{\lambda_i t} \quad (1.13)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что если все собственные значения различны, то должны выполняться равенства:

$$(A - \lambda_i E)\vec{v}^i = 0, \; i = 1,2,\ldots,n. \quad (1.14)$$

Таким образом, собственные векторы $\vec{v}^i$ могут быть определены из уравнения (1.13). Каждый собственный вектор может быть определен с точностью до некоторой постоянной. Поэтому обычно для каждого собственного вектора полагают, что первая или последняя его компонента равна единице, а остальные компоненты находят из оставшихся (n-1) уравнений.

Пример. Пусть матрица А многомерной системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для определения собственных векторов сначала вычислим собственные значения матрицы А:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 5.$$

Далее используем уравнение (1.14) для первого собственного вектора и собственного числа λ_1=-1:

$$\lambda_i E\vec{v}^1 = A\vec{v}^1 \Rightarrow -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -v_1^1 \\ -v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 + 2v_2^1 \\ 4v_1^1 + 3v_2^1 \end{pmatrix}$$

Отсюда находим:

$$-2v_1^1 = 2v_2^1,$$
$$-4v_1^1 = 4v_2^1, \quad \Rightarrow v_1^1 = -v_2^1.$$

Теперь выбираем произвольно одну из компонент первого собственного вектора, например, полагая $v_1^1 = 1$. Тогда получим:

$$\vec{v}^1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Точно также найдем второй собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_1=5:

$$\lambda_i E\vec{v}^1 = A\vec{v}^1 \Rightarrow 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5v_1^2 \\ 5v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^2 + 2v_2^2 \\ 4v_1^2 + 3v_2^2 \end{pmatrix}$$

Отсюда находим:

$$4v_1^2 = 2v_2^2,$$
$$-4v_1^2 = -2v_2^2, \quad \Rightarrow 2v_1^2 = v_2^2.$$

Вновь произвольно выбираем одну из компонент второго собственного вектора. Например, положим $v_1^2 = 1$. Тогда получим:

$$\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, сформируем матрицу собственных векторов, которая и является матрицей канонического преобразования исходной линейной системы управления:

$$V=\{\vec{v}^1,\vec{v}^2\}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Алгоритм определения собственных векторов, основанный на методе Крылова. Этот алгоритм имеет перед только что рассмотренным способом преимущество в скорости. Кроме того, метод применим как в случае различных, так и одинаковых собственных чисел.

Первый шаг метода также заключается в определении собственных значений матрицы А.

Второй шаг. Определяем коэффициенты $\boldsymbol{c_i}$ следующего полинома:

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n-c_{n-1}\lambda^{n-1}-...-c_0). \tag{1.15}$$

Третий шаг. Определяем произвольно вспомогательный n-мерный вектор $\vec{d}_1$, например, так, что

$$\vec{d}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ ...\end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Четвертый шаг. Определяем еще ***n-1*** векторов $\vec{d}_i$ по формулам:

$$\vec{d}_2=A\vec{d}_1,\quad \vec{d}_3=A\vec{d}_2,....,\ \vec{d}_n=A\vec{d}_{n-1},\ . \tag{1.17}$$

Пятый шаг. Определяем элементы собственного вектора $\vec{v}^i$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\vec{v}^i=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\vec{d}_{n-k+1},\\ &p_{i1}=1,\\ &p_{i,j}=\lambda_i p_{i,j-1}-c_{n-j+1},\qquad j-2,3,....,n;\\ &\lambda_i p_{in}-c_0=0.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Последнее равенство здесь используется только как дополнительный способ проверки вычислений.

Если матрица А имеет вид (коагулированная матрица):

$$\begin{pmatrix}0 & \multicolumn{3}{c}{} \\ 0 & & E & \\ 0 & & & \\ & & & \\ \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\alpha_1\ \ ...\ \ ..\ \ \alpha_n}}\end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

то очень быстрый алгоритм вычисления собственных векторов и матрицы канонического преобразования строится с помощью матрицы Вандермонда:

$$V=\begin{pmatrix}1 & 1 & ... & ... & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & ... & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & ... & \lambda_n^2\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & ... & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Нетрудно заметить, что обратная матрица V^{-1} существует только тогда, когда все собственные числа различны.

Пример. Рассмотрим применение метода Крылова на предыдущем примере. Пусть матрица А имеет вид: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Собственные значения матрицы А:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\;\;\lambda_2=5.$$

Определяем коэффициенты c_i:

$$\lambda^2-4\lambda-5=(-1)^2(\lambda^2-4\lambda-5)=(-1)^2(\lambda^2-c_1\lambda-c_0)\Rightarrow c_0=5,\;\;c_1=4.$$

Определяем вспомогательный вектор $\vec{d}_1$ размерности n=2:

$$\vec{d}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Определяем ***n-1 =1*** векторов $\vec{d}_i$ по формулам:

$$\vec{d}_2=A\vec{d}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix},\;\;\vec{d}_3=A\vec{d}_2,\ldots.,\;\vec{d}_n=A\vec{d}_{n-1},$$

Теперь находим коэффициенты p_i:

$$\begin{aligned}&p_{11}=1,\\ &p_{12}=(-1)p_{11}-c_1=-1-4=-5,\\ &p_{21}=1,\\ &p_{22}=(5)p_{21}-c_1=5-4=1,\end{aligned}$$

Находим собственные векторы:

$$\vec{v}^1=p_{11}\vec{d}_2+p_{12}\vec{d}_1=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix},$$

$$\vec{v}^2=p_{21}\vec{d}_2+p_{22}\vec{d}_1=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Если теперь нормализовать собственные векторы так, чтобы первая компонента равнялась единице (а это можно делать, так как собственные векторы в любом случае определяются с точностью до произвольной постоянной), то получим тот же результат, который мы уже получили в предыдущем примере:

$$\vec{v}^1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad\vec{v}^2=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Каноническое преобразование – процедура диагонализации

Определим следующую диагональную матрицу, элементами которой являются собственные числа матрицы А линейной системы:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}=diag\{\lambda_1,\lambda_n,\ldots,\lambda_n\}.. \tag{1.21}$$

Произведение матрицы канонического преобразования V на диагональную матрицу Λ будет равно:

$$V\Lambda=\{\lambda_1\vec{v}^1,\lambda_n\vec{v}^2,\ldots,\lambda_n\vec{v}^n\}.. \tag{1.22}$$

Учитывая формулу (1.13) $\lambda_i \vec{v}^i e^{\lambda_i t} = A\vec{v}^i e^{\lambda_i t}$, получаем на основании (1.22):

$$V\Lambda = A\{\vec{v}^1, \vec{v}^2, ..., \vec{v}^n\} = AV \qquad (1.23)$$

Умножим последнее равенство слева на обратную матрицу V^{-1}. Получаем:

$$V^{-1}V\Lambda = V^{-1}AV \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV \qquad (1.24)$$

Мы видим, что умножение матрицы A на матрицу канонического преобразования и обратную к ней матрицу приводит к диагонализации матрицы A при условии, что все собственные значения матрицы A различны.

Используем матрицу V в качестве матрицы преобразования линейной системы управления (ее уравнений), получим с учетом формулы (1.24):

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda\vec{x}^* + B^*\vec{u}, \quad B^* = V^{-1}B. \qquad (1.25)$$

В скалярной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1^* = \lambda_1 x_1^* + b_{11}^* u_1 + b_{12}^* u_2 + ... + b_{1m}^* u_m, \\ &\dot{x}_2^* = \lambda_2 x_2^* + b_{21}^* u_1 + b_{22}^* u_2 + ... + b_{2m}^* u_m, \\ &...., \\ &\dot{x}_n^* = \lambda_n x_n^* + b_{n1}^* u_1 + b_{n2}^* u_2 + ... + b_{nm}^* u_m. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Таким образом, каноническое преобразование линейной системы приводит к системе уравнений состояния, в которой каждая производная по времени от канонической переменной зависит только от соответствующей канонической переменной состояния и входных сигналов.

Пример. Рассмотрим пример диагонализации уравнения

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Каноническое преобразование выполняется следующим образом:

$$\Lambda = V^{-1}AV.$$

В предыдущих примерах мы уже получили для такой матрицы A собственные значения $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$, собственные векторы и матрицу преобразования V:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь обратную матрицу V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим диагональную матрицу Λ:

$$\Lambda = V^{-1}AV = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что диагональная матрица действительно представляет собой матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы A:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Критерий управляемости Гильберта</u>. Система, заданная каноническими уравнениями:

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda\vec{x}^* + B^*\vec{u} \qquad (1.27)$$

управляема, если ни одна из строк матрицы B не является нулевой*. Для управляемости в каждой строке системы (1.27) должен быть хотя бы один не равный нулю элемент. *Отсюда следует, что если матрица B содержит хотя бы одну нулевую строку, то система неуправляема*!

Критерий управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}. Рассмотрим линейную систему $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}$. м введем следующие обозначения.

$$M = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]; \qquad (1.38)$$

$$\vec{w}_i = \int_{t_1}^{t_0} \gamma_i(t_0 - \tau)\vec{u}(\tau)d\tau, \quad i = 0,1,...,n-1;. \qquad (1.39)$$

$$W = \begin{bmatrix} \vec{w}_0 \\ \vec{w}_1 \\ ... \\ \vec{w}_{n-1} \end{bmatrix};. \qquad (1.40)$$

где M – «матрица» размерности $n\times(n\times m)$, wi – вектор размерности m, W – «вектор» размерности $(n\times m)$.

Теперь уравнение (1.37) представим в виде:

$$\vec{x}(t_0) = MW. \qquad (1.41)$$

Теперь можно сформулировать критерий управляемости на основе разложения матричной экспоненты:

Линейная система управляема, если ранг матрицы M в уравнении (1.41) равен n.

Если система управления имеет только один вход, то матрица B представляет собой вектор-столбец. В этом случае только что сформулированный критерий означает, что для управляемости должна существовать обратная матрица M^{-1}.

что системы

Пример. Оценим управляемость уже рассмотренной ранее системы на основе разложения матричной экспоненты.

Пусть система задана матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу M:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad M = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы M линейно зависимы, следовательно, ранг матрицы M меньше n=2. Поэтому система неуправляема.

Управляемость по выходу. Напомним, что для линейных систем уравнения выхода имеет вид:

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t),$$

где $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$ - q –мерный вектор выходных сигналов, C – матрица размерности $q\times n$, $q<n$.

Определение. Система является управляемой по выходу, если из любого состояния с выходом $\vec{y}(t_0)$ она может быть переведена в любое другое желаемое состояние с выходом $\vec{x}(t_1)$ за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в результате приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\vec{u}(t), \ t \in (t_0, t_1)$.

Критерий управляемости по выходу аналогичен критерию управляемости по состоянию. Система управляема по выходу, если ранг матрицы

$$M^* = [CAB, CA^2B, ..., CA^{n-1}B] \qquad (1.42)$$

равен q, то есть размерности вектора выходного сигнала.

Критерий наблюдаемости Гильберта может быть применен после приведения уравнений линейной системы управления к каноническому виду, то есть после применения процедуры диагонализации. Подход аналогичен исследованию управляемости линейной системы.

Рассмотрим линейную систему, канонические уравнения которой имеют вид:

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda\vec{x}^* + B^*\vec{u}, \quad \vec{y} = C^*\vec{x}^*(t), \quad C^* = CV, \tag{7.1}$$

(V - матрица собственных векторов).

<u>Критерий наблюдаемости Гильберта:</u> система, заданная каноническими уравнениями *наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы С* не является нулевым, то есть на выходной сигнал влияют все компоненты вектора преобразованных переменных состояния* $\vec{x}^*$.

Если матрица С содержит хотя бы один нулевой столбец, то система ненаблюдаема.*

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad \vec{y} = C\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (1,1).$$

Собственные значения матрицы А равны $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$, матрица преобразования V:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки наблюдаемости находим матрицу С*:

$$C^* = CV = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (0,3).$$

Так как первый столбец матрицы С* нулевой, то система ненаблюдаема.

Критерий наблюдаемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}***.*** Этот критерий наблюдаемости подобен критерию управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты. Рассмотрим систему с уравнениями состояния и выходов обычного вида:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad \vec{y} = C\vec{x}(t). \tag{7.7}$$

С помощью выражения для матричной экспоненты $e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t)A^i$, представим выходной сигнал в виде:

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t-t_0)CA^i\vec{x}(t_0). \tag{7.10}$$

Определим следующий вектор (строку) $\vec{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t_0), \gamma_1 t - t_0), ..., \gamma_{n-1}(t-t_0)\}$. Кроме того, введем обозначение:

$L = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, ..., (A^T)^{n-1} C^T)$ - матрица размера *n×(q×n)*.

С учетом этих обозначений уравнение (7.10) можно представить в виде:

$$\vec{y}(t) = \vec{\Gamma}L^T\vec{x}(t_0). \tag{7.11}$$

Необходимо заметить, что вектор $\vec{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t_0), \gamma_1 t - t_0), ..., \gamma_{n-1}(t-t_0)\}$ будет иметь различные значения в различные моменты времени t при одинаковом t_0. Для однозначного определения состояния системы в некоторый момент времени t_0 необходимо, чтобы матрица L имела ранг n. ***Итак, линейная система наблюдаема, если ранг матрицы L в уравнении (7.11) равен n.***

Пример. Рассмотрим систему с двумя переменными состояния, одним измеряемым выходным сигналом, и такую, что матрица L имеет два линейно зависимых столбца:

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & 3l_1 \\ l_2 & 3l_2 \end{pmatrix}$$

В этом случае уравнение вида (7.11) имеет вид:

$$y(t) = (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 x_1 + & l_2 x_2 \\ 3l_1 x_1 + & 3l_2 x_2 \end{pmatrix} = \gamma_0 (l_1 x_1 + l_2 x_2) + 3\gamma_1 (l_1 x_1 + l_2 x_2)$$

.

Так как матрица L не зависит от времени, то состояния x_1, x_2 определить однозначно нельзя, система ненаблюдаема.

Получение скалярных передаточных функций на основе непрерывных моделей в пространстве состояний.

Уравнения $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t)$ линейной системы в пространстве состояний после применения к ним преобразования Лапласа имеют вид:

$$\begin{aligned} s\vec{x}(s) &= A\vec{x}(s) + Bu(s), \\ y(s) &= C\vec{x}(s). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Здесь s – параметр преобразования Лапласа $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$, $\vec{x}(s)$ - трансформанта Лапласа вектора состояний $\vec{x}(t)$, $u(s)$ - трансформанта Лапласа входного сигнала $u(t)$, $y(s)$ - трансформанта Лапласа скалярного выходного сигнала $y(t)$.

Из первого уравнения (8.16) следует, что

$$\begin{aligned} &(sE - A)\vec{x}(s) = Bu(s), \Rightarrow \vec{x}(s) = (sE - A)^{-1} Bu(s) \\ &y(s) = C(sE - A)^{-1} Bu(s) = . \end{aligned} \tag{8.17}$$

Таким образом, для передаточной функции имеет место формула:

$$\begin{aligned} &(sE - A)\vec{x}(s) = Bu(s), \Rightarrow \vec{x}(s) = (sE - A)^{-1} Bu(s) \\ &G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sE - A)^{-1} B. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Пример. Получить передаточную функцию, используя преобразование Лапласа линейной системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y = x_1(t) \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

В пространстве трансформант Лапласа эти уравнения имеют вид:

$$s \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(s),$$

$$y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix},$$

Отсюда для передаточной функции имеем следующее выражение:

$$s\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 9\end{pmatrix}u(s),\Rightarrow\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 9\end{pmatrix}u(s),$$

$$y(s)=\Big(\;\; 0\Big)\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix},\ \Rightarrow$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\Big(\;\; 0\Big)\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{s(s+3)+2}\Big(\;\; 0\Big)\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{s(s+3)+2}\Big(\;\; 0\Big)\begin{pmatrix}9\\ 9s\end{pmatrix}=\frac{9}{s^2+3s+2}.$$

Получение скалярных передаточных функций на основе дискретных моделей в пространстве состояний

Пусть в пространстве состояний задана дискретная модель системы с уравнениями вида:

$$\begin{aligned}&\vec{w}(k+1)=\psi\vec{w}(k)+\Omega u(k),\\ &y(k)=D\vec{w}(k),\end{aligned}\tag{8.6}$$

где $\vec{w}$ - вектор состояний системы, u - скалярный входной сигнал (управление), y - скалярный выходной сигнал.

Рассмотрим уравнения, по которым может быть получена дискретная передаточная функция, соответствующая системе (8.6), которая предполагается известной. Итак, будем искать передаточную функцию, соответствующую системе (8.6) в виде:

$$G(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}.+..+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-n}}\tag{8.7}$$

(z^{-1} – оператор сдвига, который удовлетворяет условию $z^{-i}y_k=y_{k-i}$). Заметим, что для систем вида (8.7) должно выполняться условие $m\le n$, поэтому будем рассматривать крайний случай $m=n$.

Тогда для дискретной модели соотношение (8.7) эквивалентно равенству:

$$y(k)+a_1y(k-1)+...+a_ny(k-n)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+..+b_nu(k-n)\tag{8.8}$$

Для наблюдаемой системы (8.6) справедливо утверждение о том, что её преобразование к коагулированной форме может быть выполнено с помощью матрицы преобразования T, которая имеет вид:

$$T=\begin{pmatrix}D\\ D\psi\\ ...\\ D\psi^{n-1}\end{pmatrix}.\tag{8.9}$$

Преобразованная модель (8.6) в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned}&\vec{w}^*(k+1)=\psi^*\vec{w}^*(k)+\Omega^*u(k),\\ &y(k)=D^*\vec{w}^*(k),\end{aligned}\tag{8.10}$$

где $\vec{w}^*,\ \psi^*,\ \Omega^*,\ D^*$ - переменные состояния и матрицы, полученные в результате преобразований $\vec{w},\ \psi,\ \Omega,\ D$ в уравнениях (8.6) соответственно. Эти величины определяются формулами:

$$\psi^* = T\psi T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

$$\vec{w}^* = T\vec{w} \tag{8.12}$$

$$\Omega^* = T\Omega \tag{8.13}$$

$$D^* = DT^{-1} \tag{8.14}$$

Коэффициенты $b_1, b_2,...,b_n$ находятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^* \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \Omega_n^* \end{pmatrix} = \alpha\Omega^* \tag{8.15}$$

Пример. Рассмотрим систему, которая задана следующей моделью в пространстве состояний:

$$\vec{w}(k+1) = \psi\vec{w}(k) + \Omega u(k), \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; D = (2,\ 1), \quad y(k) = D\vec{w}(k).$$

Найдем матрицу T: $T = \begin{pmatrix} D \\ D\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Найдем также обратную матрицу T^{-1}: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Теперь можно найти матрицу $\psi^* = T\psi T^{-1}$:

$$\psi^* = T\psi T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 40 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица Ω^* равна: $\Omega^* = T\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. Матрица D^* равна:

$$D^* = DT^{-1} = (2 \quad 1)\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}(8 \quad 0) = (1 \quad 0).$$

Нетрудно увидеть, что матрица $\psi^* = T\psi T^{-1}$ имеет коагулированную форму. Из выражения для этой матрицы находим, что $a_1 = -4, \;\; a_2 = -5$. Аналогичным образом находим коэффициенты b_1, b_2: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \Omega^* = T\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_1^* \\ \Omega_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отсюда находим $G(z) = \dfrac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 4z^{-1} - 5z^{-2}} = \dfrac{y(z)}{u(z)}$.

Задание

Задана система со скалярным входным и выходным сигналами (в соответствии с вариантом задания).

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований φ (по варианту задания), найти собственные значения матрицы А и преобразованной матрицы А*.
2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.
3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования
4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.
5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.
6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.
7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.
8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени

приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k+\Delta t)-x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1)-x(k)}{1}$ полагая, что $t_k = 0,1,2,...;\ k = 0,1,2,...;\ \Delta t = 1$.

Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

Варианты задания

	Система сигналов	Матрица преобразований φ
1	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = (2\ \ 1).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = (2\ \ 1).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = (-2\ \ 2).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = (1\ \ 2).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = (2\ \ 1).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
6	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = (2\ \ 1).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = (-2\ \ 2).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
8	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = (1/2\ \ -2).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),\ \ y(t) = C\vec{x}(t),\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = (-2\ \ 3).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}3&21\\1/3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ C=(2\ \ 5).$	$\varphi=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$
11	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}6&4\\4&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ C=(3\ \ 1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}12&4\\2&4\end{pmatrix}$
12	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}6&7\\3&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ C=(1\ \ 2).$	$\varphi=\begin{pmatrix}2&8\\3&4\end{pmatrix}$
13	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}6&6\\3&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix},\ C=(2\ \ 1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}3&8\\3&3\end{pmatrix}$
14	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}6&21\\1/3&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ C=(-2\ \ 1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}2&4\\3&3\end{pmatrix}$
15	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}5&6\\3&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ C=(-2\ \ 5).$	$\varphi=\begin{pmatrix}8&4\\5&6\end{pmatrix}$
16	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}8&5\\4&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\ C=(1\ \ -2).$	$\varphi=\begin{pmatrix}9&-2\\-3&4\end{pmatrix}$
17	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}6&1\\-2&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ C=(2\ \ -5).$	$\varphi=\begin{pmatrix}3&8\\-3&-3\end{pmatrix}$
18	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}4&7\\-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ C=(5\ \ 1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}2&4\\-3&3\end{pmatrix}$
19	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}5&7\\-6&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C=(-2\ \ -1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}8&4\\1&6\end{pmatrix}$
20	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}4&3\\12&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ C=(1/2\ \ -10).$	$\varphi=\begin{pmatrix}5&-1\\4&4\end{pmatrix}$
21	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}8&8\\1/2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C=(-2\ \ 3).$	$\varphi=\begin{pmatrix}5&-9\\3&2\end{pmatrix}$
22	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}4&21\\1/3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ C=(2\ \ -5).$	$\varphi=\begin{pmatrix}4&2\\-1&5\end{pmatrix}$
23	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}7&1\\4&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix},\ C=(-3\ \ 1).$	$\varphi=\begin{pmatrix}9&11\\3&7\end{pmatrix}$
24	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}12&2\\13&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix},\ C=(11\ \ -5).$	$\varphi=\begin{pmatrix}10&5\\6&7\end{pmatrix}$
25	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}19&3\\11&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ C=(5\ \ 8).$	$\varphi=\begin{pmatrix}7&11\\3&5\end{pmatrix}$
26	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}17&11\\1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix},\ C=(-3\ \ -4).$	$\varphi=\begin{pmatrix}20&11\\10&7\end{pmatrix}$
27	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix},\ C=(3\ \ 12).$	$\varphi=\begin{pmatrix}15&4\\5&3\end{pmatrix}$
28	$\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C\vec{x}(t),\quad A=\begin{pmatrix}7&1\\8&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix},\ C=(2).$	$\varphi=\begin{pmatrix}4&1\\-2&2\end{pmatrix}$

29	$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C = (5 \quad -8).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$
30	$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = (7 \quad 1).$	$\varphi = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Требования к отчету о выполнении задания

Отчет представляется в виде файла текстового документа и включает:

1. Титульный лист с указанием министерства, наименования ВУЗа, номера и темы практического занятия, фамилии и группы студента и года в нижней части страницы.
2. Основные сведения из теории выполняемых расчетов, таблица с исходными данными для расчета в соответствии с вариантом задания.
3. Порядок и ход выполнения расчета, с приведением основных формул, таблиц, распечаток листов Excel или экрана ввода команд MATLAB, в случае если эти пакеты использовались в ходе расчетов.
4. Результаты выполнения задания в виде формул, таблиц коэффициентов или графиков.
5. Выводы, включающие оценку полученных результатов.

Список литературы

1. А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев и др. Идентификация и диагностика систем. – М.: ИЦ «Академия», 2009.
2. Интеллектуальные системы автоматического управления. / Под ред. И.М. Макарова, В.М. Лохина – М.: Физматлит, 2001.
3. К.А. Алексеев. Моделирование и идентификация элементов и систем автоматического управления. – Пенза, 2002.
4. Дочф Ричард, Вишоп Роберт. Современные системы управления. – М.: Юнимедиастайп, 2002.
5. Г.Г. Сазонов. Численные методы в инженерных расчетах. – М.: МГОУ, 2005

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Тема: Расчет параметров уравнения линейной множественной регрессии

ЗАДАНИЕ

1. По статистическим данным (сайт: cars.auto.ru) стоимости автомобилей (фактор y) в зависимости от года выпуска (фактор x_1) и пробега (фактор x_2), в соответствии с заданным вариантом (таблица 1) выполнить следующие расчеты:

а) Найти уравнение линейной множественной регрессии в стандартизированной ($t_y=\beta_1 t_{x1}+\beta_2 t_{x2}$) и естественной форме ($y=a+b_1x_1+b_2x_2$).

б) Найти коэффициенты множественной и частной корреляции, множественной детерминации; дать их характеристику.

в) Рассчитать общий и частные F-критерии Фишера; оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации; оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после фактора x_2 и целесообразность включения фактора x_2 после фактора x_1.

Таблица 1 - Варианты задания по поиску статистических данных (номер варианта соответствует порядковому номеру в списке группы).

№ вар	Марка автомобиля	№ вар	Марка автомобиля	№ вар	Марка автомобиля	№ вар	Марка автомобиля
1	Audi A4	11	Chery Fora	21	Citroen C3	31	Ford Focus
2	Audi A6	12	Chery Tiggo	22	Citroen C4	32	Ford Fusion
3	Audi A8	13	Chevrolet Aveo	23	Daewoo Matiz	33	Ford Mondeo
4	BMW X	14	Chevrolet Captiva	24	Daewoo Nexia	34	Hyundai Accent
5	BMW м	15	Chevrolet Lacetti	25	Dodge Caliber	35	Hyundai Elantra
6	BMW 750	16	Chevrolet Lanos	26	Dodge Caravan	36	Hyundai Getz
7	Cadillac CTS	17	Chevrolet Niva	27	Ferrari 430	37	Hyundai Santa FE
8	Cadillac Escalade	18	Chevrolet Spark	28	Fiat Doblo	38	Kia Sorento
9	Cadillac SRX	19	Chevrolet Trailblazer	29	Fiat Punto	39	Kia Spectra
10	Chery Amulet	20	Citroen Berlingo	30	Ford Fiesta	40	Lexus GS

Факторные данные наблюдений: стоимость автомобиля (результативная переменная y, тыс. руб.), год выпуска (возраст автомобиля – фактор x_1, лет), пробег (фактор x_2, тыс. км) в количестве 12 строк брать за период не более и в диапазоне 10 лет по Владимирскому региону. В массив данных стараться включать разный возраст автомобилей.

Типовой пример

Имеются данные о стоимости, пробеге и возрасте автомобилей ВАЗ 2110 в Краснодарском крае (таблица 2):

Таблица 2

№	Возраст, лет	Пробег, тыс. км	Цена, тыс. руб.
1	5	50	167
2	5	70	175
3	8	110	146
4	8	120	143
5	10	175	120
6	4	62	220
7	5	87,5	150
8	5	84	172
9	7	77	170
10	4	83	190
11	4	65	210
12	8	120	143
13	6	88	167
14	7	89	150
15	4	83	195

Определить необходимые параметры в соответствии с приведенным выше заданием.

Решение:

1. Рассчитаем параметры уравнения линейной множественной регрессии в стандартизированной форме $t_y=\beta_1 t_{x1}+\beta_2 t_{x2}$ и естественной форме $y=a+b_1x_1+b_2x_2$ методом наименьших квадратов.
Составим расчетную таблицу.

Таблица 3

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	y^2	x_1^2	x_2^2
1	167	5	50	835	8350	250	27889	25	2500
2	175	5	70	875	12250	350	30625	25	4900
3	146	8	110	1168	16060	880	21316	64	12100
4	143	8	120	1144	17160	960	20449	64	14400
5	120	10	175	1200	21000	1750	14400	100	30625
6	220	4	62	880	13640	248	48400	16	3844

7	150	5	87,5	750	13125	437,5	22500	25	7656,25
8	172	5	84	860	14448	420	29584	25	7056
9	170	7	77	1190	13090	539	28900	49	5929
10	190	4	83	760	15770	332	36100	16	6889
11	210	4	65	840	13650	260	44100	16	4225
12	143	8	120	1144	17160	960	20449	64	14400
13	167	6	88	1002	14696	528	27889	36	7744
14	150	7	89	1050	13350	623	22500	49	7921
15	195	4	83	780	16185	332	38025	16	6889
Сумма	2518	90	1363,5	14478	219934	8869,5	433126	590	137078,3
Среднее	**167,87**	**6,00**	**90,90**	**965,20**	**14662,27**	**591,30**	**28875,07**	**39,33**	**9138,55**

Найдем средние квадратические отклонения переменных:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{28875{,}07 - 167{,}87^2} = 26{,}38;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\overline{x_1^2} - \overline{x_1}^2} = \sqrt{39{,}33 - 6{,}0^2} = 1{,}83;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - \overline{x_2}^2} = \sqrt{9138{,}55 - 90{,}9^2} = 29{,}59.$$

Найдем коэффициенты парной корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{\overline{y \cdot x_1} - \bar{y} \cdot \overline{x_1}}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{965{,}2 - 167{,}87 \cdot 6{,}0}{26{,}38 \cdot 1{,}83} = -0{,}87;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{y \cdot x_2} - \bar{y} \cdot \overline{x_2}}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{14662{,}27 - 167{,}87 \cdot 90{,}9}{26{,}38 \cdot 29{,}59} = -0{,}76;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{591{,}3 - 6{,}0 \cdot 90{,}9}{1{,}83 \cdot 29{,}59} = 0{,}85.$$

Стандартизированные β-коэффициенты определим по формулам (2.5):

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{-0{,}87 - (-0{,}76) \cdot 0{,}85}{1 - 0{,}85^2} = -0{,}8;$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{-0{,}76 - (-0{,}87) \cdot 0{,}85}{1 - 0{,}85^2} = -0{,}09.$$

Таким образом, уравнение регрессии в стандартизированной форме имеет вид: $t_y = -0{,}8 t_{x_1} - 0{,}09 t_{x_2}$.

Вывод: Сравнение модулей значений стандартизированных коэффициентов регрессии ($|\beta_1| = 0{,}8 > |\beta_2| = 0{,}09$) говорит о том, что на цену автомобиля возраст (фактор x_1) оказывает значительно большее влияние, нежели пробег (фактор x_2).

Рассчитаем естественные коэффициенты регрессии:

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = -0{,}8 \cdot \frac{26{,}38}{1{,}83} = -11{,}56;$$

$$b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = -0{,}09 \cdot \frac{26{,}38}{29{,}59} = -0{,}08;$$

$$a = \bar{y} - b_1 \overline{x_1} - b_2 \overline{x_2} = 167{,}87 - (-11{,}56) \cdot 6{,}0 - (-0{,}08) \cdot 90{,}9 = 244{,}09.$$

Получаем уравнение линейной множественной (двухфакторной) регрессии в естественной форме: $y = 244{,}09 - 11{,}56x_1 - 0{,}08x_2$.

Вывод: с увеличением возраста машины на 1 год ее цена уменьшается в среднем на 11,56 тыс. рублей, а с увеличением пробега на 1 тыс. км цена уменьшается в среднем на 0,08 тыс. рублей (80 рублей).

2. Найдем коэффициенты множественной и частной корреляции, а также множественной детерминации.

Коэффициент множественной корреляции находится по формуле:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2}} = \sqrt{-0{,}8 \cdot (-0{,}87) - 0{,}09 \cdot (-0{,}76)} = \sqrt{0{,}76} = 0{,}87.$$

$$R^2_{yx_1x_2} = \left(\sqrt{0{,}76}\right)^2 = 0{,}76$$ – коэффициент множественной детерминации.

Вывод: величина коэффициента множественной корреляции показывает, что связь между y, x1, x2 – высокая (при качественной интерпретации коэффициента корреляции используется шкала Чеддока):

R	Интерпретация
0.1 ÷ 0.3	Слабая
0.3 ÷ 0.5	Умеренная
0.5 ÷ 0.7	Заметная
0.7 ÷ 0.9	Высокая
0.9 ÷ 1.0	Весьма высокая

Кроме того 76% вариации цены на автомобиль объясняется вариацией возраста машины и пробега.

Коэффициенты частной корреляции определяются через парные коэффициенты корреляции по формулам:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_2})(1 - r^2_{x_1x_2})}} = \frac{-0{,}87 - (-0{,}76) \cdot 0{,}85}{\sqrt{(1 - (-0{,}76)^2)(1 - 0{,}85^2)}} = -0{,}65;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_1})(1 - r^2_{x_1x_2})}} = \frac{-0{,}76 - (-0{,}87) \cdot 0{,}85}{\sqrt{(1 - (-0{,}87)^2)(1 - 0{,}85^2)}} = -0{,}09;$$

$$r_{x_1x_2 \cdot y} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{yx_1} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_1})(1 - r^2_{yx_2})}} = \frac{0{,}85 - (-0{,}76) \cdot (-0{,}87)}{\sqrt{(1 - (-0{,}76)^2)(1 - (-0{,}87)^2)}} = 0{,}32.$$

Вывод: коэффициенты частной корреляции характеризуют тесноту связи между двумя переменными, исключив влияние третьей переменной. Значит, связь между ценой на ВАЗ 2110 и годом выпуска при исключении влияния величины пробега обратная и заметная; между ценой автомобиля и пробегом без учета возраста машины – обратная, но слабая; связь между факторами x_1 и x_2 – умеренная.

Сравним соответствующие коэффициенты парной и частной корреляции: $r_{yx_1} = -0{,}87$, $r_{yx_2} = -0{,}76$, $r_{x_1x_2} = 0{,}85$;
$r_{yx_1 \cdot x_2} = -0{,}65$, $r_{yx_2 \cdot x_1} = -0{,}09$, $r_{x_1x_2 \cdot y} = 0{,}32$.

Вывод:

1) при закреплении фактора x_2 на постоянном уровне влияние на y фактора x_1 оказалось несколько менее сильным (– 0,65 против – 0,87), но все равно остается заметным;
2) при закреплении фактора x_1 на постоянном уровне влияние на y фактора x_2 стало весьма слабым (– 0,09 против – 0,76);
3) межфакторная связь ($r_{x_1x_2} = 0{,}85$) говорит о высокой коллинеарности факторов, причем исключив влияние результативной переменной y эта связь становится умеренной.

3. Оценим значимость уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации с помощью F-критерия Фишера. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$F_{набл} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}76}{1-0{,}76} \cdot \frac{15-2-1}{2} = 19{,}27.$$

Табличное значение критерия при уровне значимости α = 0,05 и $k_1 = m = 2$, $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$:

m – количество факторов;
n – количество данных наблюдения фактора.
$F_{табл}$ = F(0,05; 2; 12) = 3,88.

Вывод: т.к. $F_{табл} < F_{набл}$, то с вероятностью 1 – α = 0,95 делаем заключение о статистической значимости уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации, которые сформировались под неслучайным воздействием факторов x_1 и x_2.

Оценим целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после фактора x_2 и целесообразность включения фактора x_2 после фактора x_1 с помощью частных F-критериев F_{x_1} и F_{x_2}.

$$F_{x_1\ набл} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{1} = \frac{0{,}76 - (-0{,}76)^2}{1-0{,}76} \cdot \frac{15-2-1}{1} = 9{,}00;$$

$$F_{x_2\ набл} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{1} = \frac{0{,}76 - (-0{,}87)^2}{1-0{,}76} \cdot \frac{15-2-1}{1} = 0{,}10.$$

Найдем табличные значения критерия на уровне значимости α = 0,05 и $k_1 = 1$, $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$: $F_{табл}$ = F(0,05; 1; 12) = 4,75.

Вывод: 1) Поскольку $F_{x_1\ набл} > F_{табл}$, то включение в модель фактора x_1 (возраста автомобиля) после фактора x_2 статистически оправдано и коэффициент b_1 при факторе x_1 статистически значим.

2) Поскольку $F_{x_2\ набл} < F_{табл}$, то нецелесообразно включать в модель фактор x_2 (пробег) после фактора x_1. Это означает, что парная регрессия зависимости цены ВАЗ 2110 от возраста машины является достаточно статистически значимой, надежной и что нет необходимости улучшать ее, включая дополнительный фактор x_2.

Требования к отчету о выполнении задания

Отчет представляется в виде файла текстового документа и включает:

6. Титульный лист с указанием министерства, наименования ВУЗа, номера и темы практического занятия, фамилии и группы студента и года в нижней части страницы.
7. Основные сведения из теории выполняемых расчетов, таблица с исходными данными для расчета в соответствии с вариантом задания.
8. Порядок и ход выполнения расчета, с приведением основных формул, таблиц, распечаток листов Excel или экрана ввода команд MATLAB, в случае если эти пакеты использовались в ходе расчетов.
9. Результаты выполнения задания в виде формул, таблиц коэффициентов или графиков.
10. Выводы, включающие оценку полученных результатов.

Рекомендуемый библиографический список

1. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
2. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
5. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
6. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Тема: Модель множественной регрессии

Теоретическая часть

1 Общий вид линейной модели множественной регрессии

Линейная модель множественной регрессии имеет вид:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \quad (3.1)$$

где y_p - расчётные значения исследуемой переменной, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - факторные переменные.

Каждый из коэффициентов уравнения $a_1, a_2 \ldots, a_m$ имеет следующую интерпретацию: он показывает, насколько изменится значение исследуемого признака при изменении соответствующего фактора на 1 при неизменных прочих факторных переменных.

Фактическое значение исследуемой переменной тогда представимо в виде:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + \varepsilon \quad (3.2)$$

Для адекватности модели необходимо, чтобы случайная величина ε, являющаяся разностью между фактическими и расчётными значениями, имела нормальный закон распределения с математическим ожиданием равным нулю и постоянной дисперсией σ^2.

Имея *n* наборов данных наблюдений мы можем записать *n* уравнений вида:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \ldots + a_m x_{mi} + \varepsilon_i, \quad (3.3)$$

где $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}$ - значения исследуемой и факторных переменных в *i*-м наблюдении, а ε_i – отклонение фактического значения y_i от расчётного значения y_{pi}, которое может быть рассчитано по значениям факторных переменных $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}$ в *i*-м наблюдении.

Полученную систему уравнений удобно исследовать в матричном виде:,

$$Y_в = X_в A + E \quad (3.4)$$

где $Y_в$ – вектор выборочных данных наблюдений исследуемой переменной (*n* элементов), $X_в$ – матрица выборочных данных наблюдений факторных переменных ($n \times (m+1)$ элементов), A – вектор параметров уравнения ($m+1$ элементов), а E – вектор случайных отклонений (*n* элементов):

$$Y_в = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X_в = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

2 *Оценка параметров модели с помощью метода наименьших квадратов. Отбор факторов*

При построении модели множественной регрессии возникает необходимость оценки (вычисления) коэффициентов линейной функции, которые в матричной форме записи обозначены вектором *А*. Формулу для вычисления параметров регрессионного уравнения методом наименьших квадратов (МНК) по данным наблюдений приведём без вывода:

$$A = (X_в^T X_в)^{-1} X_в^T Y_в. \qquad (3.6)$$

Нахождение параметров с помощью соотношения (3.6) возможно лишь тогда, когда между различными столбцами и различными строками матрицы исходных данных Х отсутствует строгая линейная зависимость (иначе не существует обратная матрица). Это условие не выполняется, если существует линейная или близкая к ней связь между результатами двух различных наблюдений, или же если такая связь существует между двумя различными факторными переменными. Линейная или близкая к ней связь между факторами называется ***мультиколлениарностью***.

Чтобы избавиться от мультиколлениарности, в модель включают один из линейно связанных между собой факторов, причём тот, который в большей степени связан с исследуемой переменной.

На практике чтобы избавиться от мультиколлениарности мы будем проверять *для каждой пары факторных переменных* выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \left| r_{x_i x_j} \right| < 0{,}8 \\ \left| r_{x_i x_j} \right| < \left| r_{y x_i} \right| \\ \left| r_{x_i x_j} \right| < \left| r_{y x_j} \right| \end{cases}. \qquad (3.7)$$

То есть коэффициент корреляции между двумя факторными переменными должен быть меньше 0,8 и, одновременно, меньше коэффициентов корреляции между исследуемой переменной и каждой из этих двух факторных переменных. *Если хотя бы одно из условий (3.7) не выполняется, то в модель включают только один из этих двух факторов, а именно, тот, у которого модуль коэффициента корреляции с Y больше.*

Пример. Исходная таблица данных наблюдений имеет вид:

Таблица 1

y	x1	x2	x3
2	5,0	20	4
3,5	10,0	20	8
5	15,0	20	14
12	20,0	20	21
22	25,0	20	23
40	30,0	25	30
42	35,0	50	32

Проверим наличие мультиколлениарности между факторными переменными, произведём отбор факторов и найдём параметры линейной модели множественной регрессии. Для нахождения коэффициентов парной корреляции вычисления будут достаточно громоздкими, поэтому эффективнее использовать средства табличного процессора Microsoft Excel.

Применив к данным из таблицы 1 обработку *Сервис/ Анализ данных/ Корреляция*, получим набор коэффициентов парной корреляции:

	y	*x1*	*x2*	*x3*
y	1			
x1	0,949	1		
x2	0,723	0,690	1	
x3	0,938	0,992	0,630	1

Проверим выполнение условий (3.7) для каждой пары факторных переменных.

Для *x1, x2*:

$|r(x1, x2)| = 0{,}690 \quad < \quad 0{,}8$ - выполняется,

$|r(x1, x2)| = 0{,}690 \quad < \quad |r(y, x1)| = 0{,}949$ - выполняется,

$|r(x1, x2)| = 0{,}690 \quad < \quad |r(y, x2)| = 0{,}723$ - выполняется.

Все три условия (3.7) выполняются, значит мультиколлениарность между факторными переменными *x1* и *x2* отсутствует, то есть они могут использоваться в модели одновременно.

Для *x1, x3*:

$|r(x1, x3)| = 0{,}992 \quad < \quad 0{,}8$ - не выполняется,

$|r(x1, x3)| = 0{,}992 \quad < \quad |r(y, x1)| = 0{,}949$ - не выполняется,

$|r(x1, x3)| = 0{,}992 \quad < \quad |r(y, x3)| = 0{,}938$ - не выполняется.

Ни одно из условий не выполняется, следовательно, факторы *x1* и *x3* мультиколлениарны, то есть не рекомендуется использовать их в модели одновременно.

Поскольку $|r(y, x1)| = 0{,}949 \quad > \quad |r(y, x3)| = 0{,}938$, то фактор *x1* теснее связан с исследуемой переменной у, чем фактор *x3*. Поэтому исключить из рассмотрения следует фактор *x3*.

Для *x2, x3*:

$|r(x2, x3)| = 0{,}630 \quad < \quad 0{,}8$ - выполняется,

$|r(x2, x3)| = 0{,}630 \quad < \quad |r(y, x2)| = 0{,}723$ - выполняется,

$|r(x2, x3)| = 0{,}630 \quad < \quad |r(y, x3)| = 0{,}938$ - выполняется.

Все три условия выполняются, значит мультиколлениарность между факторными переменными *x2* и *x3* отсутствует, и они могут использоваться в модели одновременно.

Можно резюмировать, что в модели можно оставить либо пару факторов *x1*, *x2*, либо пару *x3, x2*. То есть выбор необходимо сделать между факторами *x1* и *x3*. Как уже отмечалось выше, фактор *x1* имеет преимущество, поскольку теснее, чем *x3*, связан с *y*. Поэтому модель для объёма продаж *y* мы будем строить с учётом влияния факторов *x1* и *x2*:

$$y_p = a_0 + a_1 * x1 + a_2 * x2 \, .$$

Для вычисления параметров модели по данным наблюдений представим данные наблюдений и коэффициенты модели в матричной форме.

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix},\quad A=\begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}\quad e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Здесь Y — n-мерный вектор-столбец наблюдений зависимой переменной; X — матрица размерности n x (m +1), в которой i-я строка i = 1, 2,..., n представляет i-е наблюдение вектора значений независимых переменных X_1, X_2,...,Xm, единица соответствует переменной при свободном члене a_0; A — вектор-столбец размерности (m + 1) параметров уравнения множественной регрессии; e — вектор-столбец размерности n отклонений выборочных значений y_i зависимой переменной от значений y_i, получаемых по уравнению регрессии:

$y_i=a_0+a_1x_{i1}+ a_2x_{i2}+\ldots+a_mx_{im}$

В матричном виде соотношение примет вид:

$e=Y\text{-}XA$

Согласно методу наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T e = (Y - XA)^T (Y - XA) \to min$$

где $e^T = (e_1, e_2,..., e_n)$, т. е. надстрочный значок T означает транспонированную матрицу.

Можно показать, что предыдущее условие выполняется, если вектор-столбец коэффициентов A найти по формуле:

$$A=(X^TX)^{-1}X^TY$$

Здесь X^T — матрица, транспонированная к матрице X,

$(X^TX)^{-1}$ — матрица, обратная к (X^TX). Соотношение справедливо для уравнений регрессии с произвольным количеством m объясняющих переменных.

Для рассматриваемого примера выпишем вектор Y и матрицу X:

$$Y = \begin{matrix} 2 \\ 3{,}5 \\ 5 \\ 12 \\ 22 \\ 40 \\ 42 \end{matrix} \qquad X = \begin{matrix} 1 & 5 & 20 \\ 1 & 10 & 20 \\ 1 & 15 & 20 \\ 1 & 20 & 20 \\ 1 & 25 & 20 \\ 1 & 30 & 25 \\ 1 & 35 & 50 \end{matrix}$$

Выполним операции транспонирования матрицы, перемножения матриц и нахождения обратной матрицы воспользовавшись, например, функциями Excel (ТРАНСП, МУМНОЖ, МОБР) или командами MATLAB ((_)’, mtimes(_,_), inv(_)) запишем промежуточный результат вычислений, необходимых для нахождения вектора параметров модели A по формуле (3.6):

$$X^T = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 25 & 50 \end{matrix};$$

$$X^TX = \begin{matrix} 7 & 140 & 175 \\ 140 & 3500 & 4000 \\ 175 & 4000 & 5125 \end{matrix};$$

$$(X^TX)^{-1} = \begin{matrix} 1.0065 & -0.0091 & -0.0273 \\ -0.0091 & 0.0027 & -0.0018 \\ -0.0273 & -0.0018 & -0.0025 \end{matrix};$$

$$X^TY = \begin{matrix} 0.1265 \\ 3.58 \\ 3.99 \end{matrix}.$$

Продолжая операции с матрицами в соответствии с (3.6), получим искомый вектор параметров модели:

$$A = \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} = (X^TX)^{-1} X^TY = \begin{matrix} -14,04 \\ 1,36 \\ 0,20 \end{matrix}$$

То есть мы получили уравнение линейной регрессии следующего вида:

$$y = -14,04 + 1,36x_1 + 0,2x_2 \qquad (3.8)$$

Определим по (3.8) расчётные значения исследуемой переменной для набора значений факторов, полученных в наблюдениях (таблица 1), и составим ряд отклонений ε_i фактических значений факторных параметров от расчётных значений.

Таблица 2

y	2	3,5	5	12	22	40	42
y_p	-3,30	3,49	10,29	17,09	23,88	31,66	43,39
ε	5,30	0,01	-5,29	-5,09	-1,88	8,34	-1,39

Задание

Используя статистические данные наблюдений по варианту задания практического занятия №2

1. Создать исходную таблицу данных для 3-х факторных наблюдений (в качестве факторной переменной X_3 использовать вектор-столбец X_3=[5 6 7 8 9 10 9 8 7 6 5 4]).
2. Проверить наличие мультиколлениарности между факторными переменными.
3. В случае определения наличия мультиколлениарности между факторными переменными исключить один из мультиколлениарных факторов и составить модель множественной регрессии вида $Y\text{р}=a_0+a_1X_1+a_2X_2$, где Yр - расчётные значения исследуемой переменной, X_1 , X_2 - факторные переменные, a_1, a_2 – коэффициенты уравнения множественной регрессии;

4. В случае определения отсутствия мультиколлениарности между факторными переменными составить модель множественной регрессии вида $Y\text{р}=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3$.
5. Составить ряд отклонений ε_i фактических значений факторных параметров от расчётных значений.

Требования к отчету о выполнении задания

Отчет представляется в виде файла текстового документа и включает:

11. Титульный лист с указанием министерства, наименования ВУЗа, номера и темы практического занятия, фамилии и группы студента и года в нижней части страницы.
12. Основные сведения из теории выполняемых расчетов, таблица с исходными данными для расчета в соответствии с вариантом задания.
13. Порядок и ход выполнения расчета, с приведением основных формул, таблиц, распечаток листов Excel или экрана ввода команд MATLAB, в случае если эти пакеты использовались в ходе расчетов.
14. Результаты выполнения задания в виде формул, таблиц коэффициентов или графиков.
15. Выводы, включающие оценку полученных результатов.

Список литературы

6. А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев и др. Идентификация и диагностика систем. – М.: ИЦ «Академия», 2009.

7. Интеллектуальные системы автоматического управления. / Под ред. И.М. Макарова, В.М. Лохина – М.: Физматлит, 2001.
8. Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова Практикум по вычислительной математике– М.: Высшая школа,1990.
9. А.М. Половко, П.Н. Бутусов. MATLAB для студента – Спб.:БХВ-Петербург,2005. – 320 с.
10. Г.Г. Сазонов. Численные методы в инженерных расчетах. – М.: МГОУ, 2005

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Тема: Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов

Рассматриваемые вопросы:

- Изучение метода наименьших квадратов.
- Аппроксимация линейной, квадратичной, показательной функций.
- Средняя ошибка аппроксимации.

Цель:

1. Научиться аппроксимировать класс функций, линейных по параметрам.

2. Научиться подбирать вид модели, которая будет иметь наименьшую общую ошибку и наименьшую среднюю ошибку аппроксимации.

Форма отчетности.

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Замечание. Ячейка, содержащая формулу, будет отмечена серым цветом.

Задача 4.1.

Данные зависимости параметра x, % от параметра y, % приведены в таблице (рис. 4.1).

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7
Параметр x	0,5	1,2	2	3,1	4	5,2	5,9
Параметр y	4,25	4,32	4,4	4,51	4,6	4,72	4,79

Рис. 4.1

1. Методом наименьших квадратов по табличным данным найти аппроксимирующие (приближаемые) функции, то есть регрессии: линейную, квадратичную, показательную, гиперболическую.

2. В каждом случае найти общую ошибку и среднюю ошибку аппроксимации. Указать функцию лучшей аппроксимации.

3. Построить линии регрессии на одной плоскости вместе с исходными данными.

Таблицу (рис. 4.1) можно считать функцией, заданной таблично.

Алгоритм решения задачи

1. Определим систему нормальных уравнений для нахождения оценок параметров линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x .$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} .$$

1.1. В целях удобства расчетов представим таблицу исходных данных следующим образом (рис. 4.2), которую дополним еще двумя расчетными столбцами: x^2 и xy.

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр x	Параметр y	x^2	xy
	1	2	3	4	5
1	1	0,5	4,25	0,25	2,125
2	2	1,2	4,32	1,44	5,184

3	3	2	4,4	4	8,8
4	4	3,1	4,51	9,61	13,98
5	5	4	4,6	16	18,4
6	6	5,2	4,72	27,04	24,54
7	7	5,9	4,79	34,81	28,26

Рис. 4.2

1.2. В верхнюю ячейку столбца 4 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (путем протягивания ячейки с формулой на область заполнения).

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца х»;2)

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Математические

1.3. В верхнюю ячейку столбца 5 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (путем протягивания ячейки с формулой на область заполнения).

=«верхняя ячейка столбца х»*«верхняя ячейка столбца у»

1.4. Просуммируем значения столбцов: x, y, x^2, xy с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными (рис. 2.3).

Получаем систему нормальных уравнений для линейной регрессии:

$$\begin{cases} 7a_0 + 21{,}9a_1 = 31{,}59, \\ 21{,}9a_0 + 93{,}15a_1 = 101{,}295. \end{cases}$$

№ п/п	Номер экспе-римен-та	Пара-метр x	Пара-метр y	x^2	xy
	1	2	3	4	5
1	1	0,5	4,25	0,25	2,125
2	2	1,2	4,32	1,44	5,184
3	3	2	4,4	4	8,8
4	4	3,1	4,51	9,61	13,98
5	5	4	4,6	16	18,4
6	6	5,2	4,72	27,04	24,54
7	7	5,9	4,79	34,81	28,26
Сумма		21,9	31,59	03,15	101,3

Рис. 4.3

Замечание. Данную систему нормальных уравнений можно решать и методом Крамера, и матричным методом. Однако мы будем использовать для ее решения надстройку MS Excel Поиск решения….

Для использования надстройки, в первую очередь, необходимо проверить подключена ли она. Если да, то ее можно найти в области «Данные». В противном случае – подключить используя путь Файл/Параметры/Надстройки/Управление: Перейти/Поиск решения (Метка)/Ок. В области «Данные» появится графа Анализ (Поиск решения).

2. Решаем систему нормальных уравнений для линейной регрессии.

2.1. Составим исходную табличную модель для решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения... (рис. 4.4).

Переменные	
a_0	a_1
0	1

Матрица коэффициентов исходной системы			Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9		21,9	=	31,59
21,9	93,15		93,15	=	101,295

Рис. 4.4

2.2. В блок «Переменные» в первую строку записываем переменные системы алгебраических уравнений.

2.3. В блок «Переменные» во вторую строку записываем произвольные числовые значения (удобнее в качестве числовых значений поставить номера переменных), затем, после выполнения команды Поиск решения..., в этих ячейках получим исходные решения системы.

2.4. В блок «Матрица коэффициентов исходной системы» записываем соответствующую матрицу коэффициентов при переменных a_0, a_1.

2.5. В блок «Значения левых частей уравнений» в верхнюю ячейку вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(«фиксированный диапазон строки значений переменных a_0, a_1»;«диапазон первой строки матрицы коэффициентов исходной системы»)

2.6. Автоматически заполняем весь столбец «Значения левых частей уравнений».

2.7. В блок «Свободные члены исходной системы» в столбец записываем значения правой части исходной системы.

2.8. Вызываем Поиск решения и заполняем форму:

Вызов Поиск решения...: MS Excel 2007(2010)– Данные, (MS Excel 2003– Сервис) – Поиск решения… В появившемся окне:

Установить целевую ячейку – ничего не ставить;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – диапазон строки значений переменных;

Ограничения – диапазон «Значения левых частей уравнений» = диапазон «Свободные члены исходной системы»;

2.8.1. Заполнить форму Результаты поиска решений:

поставить опцию Сохранить найденное решение;

нажать ОК.

Результат выполнения команды Поиск решения… будет следующий (рис. 4.5)

Переменные	
a_0	a_1
4,200	0,100

Матрица коэффициентов исходной системы		Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9	31,59	=	31,59
21,9	93,15	101,295	=	101,295

Рис. 4.5

2.9. Изменить формат ячеек с полученным решением (строка значений переменных) так, чтобы было три знака после запятой.

3. Записываем уравнение линейной регрессии.

Уравнение линейной регрессии:

$$y = 4{,}20000000000008 + 0{,}0999999999999777x.$$

4. Определим систему нормальных уравнений для нахождения оценок параметров квадратичной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases}$$

4.1. В целях удобства расчетов представим таблицу исходных данных следующим образом (рис. 4.6), и дополним ее еще пятью расчетными столбцами: x^2, x^3, x^4, xy и x^2y.

№ п/п	Номер экс-пе-риме-нта	Пара-метр x	Пара-метр y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,5	4,25	0,25	0,125	0,063	2,125	1,063
2	2	1,2	4,32	1,44	1,728	2,074	5,184	6,221
3	3	2	4,4	4	8	16	8,8	17,6
4	4	3,1	4,51	9,61	29,79	92,35	13,98	43,34
5	5	4	4,6	16	64	256	18,4	73,6
6	6	5,2	4,72	27,04	140,6	731,2	24,54	127,6
7	7	5,9	4,79	34,81	205,4	1212	28,26	166,7

Рис. 4.6

4.2. В верхние ячейки столбцов 4, 5, 6 введем соответственно формулы и автоматически заполним столбцы (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца х»;2)

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца х»;3)

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца х»;4)

Вызов функции: MS Excel - Вставка - Функция… - Математические

4.3. В верхнюю ячейку столбца 7 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца х»*«верхняя ячейка столбца у»

4.4. В верхнюю ячейку столбца 8 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца 4»*«верхняя ячейка столбца у»

4.5. Просуммируем значения столбцов 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными (рис. 4.7).

№ п/п	Номер экс-пе-риме-нта	Пара-метр x	Пара-метр y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,5	4,25	0,25	0,125	0,063	2,125	1,063
2	2	1,2	4,32	1,44	1,728	2,074	5,184	6,221
3	3	2	4,4	4	8	16	8,8	17,6
4	4	3,1	4,51	9,61	29,79	92,35	13,98	43,34
5	5	4	4,6	16	64	256	18,4	73,6
6	6	5,2	4,72	27,04	140,6	731,2	24,54	127,6
7	7	5,9	4,79	34,81	205,4	1212	28,26	166,7
Сумма		21,9	31,59	93,15	449,6	2309	101,3	436,2

Рис. 4.7

Получаем систему нормальных уравнений для линейной регрессии:

$$\begin{cases} 7a_0 + 21{,}9a_1 + 93{,}15a_2 = 31{,}59, \\ 21{,}9a_0 + 93{,}15a_1 + 449{,}631a_2 = 101{,}295, \\ 93{,}15a_0 + 449{,}631a_1 + 2309{,}39a_2 = 436{,}193. \end{cases}$$

5. Решаем систему нормальных уравнений для квадратичной регрессии.

5.1. Составим исходную табличную модель для решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения... (рис. 4.8).

Переменные		
a_0	a_1	a_2
0	1	2

Матрица коэффициентов исходной системы			Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9	93,15	208,2	=	31,59
21,9	93,15	449,631	992,412	=	101,295
93,15	449,631	2309,39	5068,411	=	436,193

Рис. 4.8

5.2. В блок «Переменные» в первую строку записываем переменные системы алгебраических уравнений.

5.3. В блок «Переменные» во вторую строку записываем произвольные числовые значения (удобнее в качестве числовых значений поставить номера переменных), затем, после выполнения команды Поиск решения..., в этих ячейках получим исходные решения системы.

5.4. В блок «Матрица коэффициентов исходной системы» записываем соответствующую матрицу коэффициентов при переменных a_0, a_1, a_2.

5.5. В блок «Значения левых частей уравнений» в верхнюю ячейку вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(«фиксированный диапазон строки значений переменных a_0, a_1, a_2»;«диапазон первой строки матрицы коэффициентов исходной системы»)

5.6. Автоматически заполняем весь столбец «Значения левых частей уравнений».

5.7. В блок «Свободные члены исходной системы» в столбец записываем значения правой части исходной системы.

5.8. Вызываем Поиск решения и заполняем форму:

Установить целевую ячейку – ничего не ставить;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – диапазон строки значений переменных;

Ограничения – диапазон «Значения левых частей уравнений» = диапазон «Свободные члены исходной системы».

5.8.1. Заполнить форму Результаты поиска решений:

поставить опцию Сохранить найденное решение;

нажать ОК.

Результат выполнения команды Поиск решения… будет следующий (рис. 4.9).

Переменные		
a_0	a_1	a_2
4,200	0,100	0,000

Матрица коэффициентов исходной системы			Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9	93,15	31,59	=	31,59
21,9	93,15	449,631	101,295	=	101,295
93,15	449,631	2309,39	436,193	=	436,193

Рис. 4.9

5.9. Изменить формат ячеек с полученным решением (строка значений переменных) так, чтобы было три знака после запятой.

6. Записываем уравнение квадратичной регрессии.

Уравнение квадратичной регрессии:

$$y = 4{,}19998832974962 + 0{,}100011125811057x -$$
$$- 0{,}00000173873869144248x^2.$$

7. Определим систему нормальных уравнений для нахождения оценок параметров показательной регрессии:

$$y = a_0 e^{a_1 x};$$
$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x;$$
$$\ln y = \varphi;$$
$$\ln a_0 = b_0;$$
$$a_1 = b_1;$$

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i. \end{cases}$$

7.1. В целях удобства расчетов представим таблицу исходных данных (рис. 4.10), которую дополним ещё тремя расчетными столбцами: x^2, φ, φx .

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр x	Параметр y	x^2	φ	φx
	1	2	3	4	5	6
1	1	0,5	4,25	0,25	1,447	0,723
2	2	1,2	4,32	1,44	1,463	1,756
3	3	2	4,4	4	1,482	2,963
4	4	3,1	4,51	9,61	1,506	4,67
5	5	4	4,6	16	1,526	6,104
6	6	5,2	4,72	27,04	1,552	8,069
7	7	5,9	4,79	34,81	1,567	9,243

Рис. 4.10

7.2. В верхнюю ячейку столбца 4 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца х»;2)

7.3. В верхнюю ячейку столбца 5 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=LN(«верхняя ячейка столбца у»)

7.4. В верхнюю ячейку столбца 6 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца 5»*«верхняя ячейка столбца х»

7.5. Просуммируем значения столбцов 2, 4, 5, 6 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными (рис. 4.11).

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр x	Параметр y	x^2	φ	φx
	1	2	3	4	5	6
1	1	0,5	4,25	0,25	1,447	0,723
2	2	1,2	4,32	1,44	1,463	1,756
3	3	2	4,4	4	1,482	2,963
4	4	3,1	4,51	9,61	1,506	4,67
5	5	4	4,6	16	1,526	6,104
6	6	5,2	4,72	27,04	1,552	8,069
7	7	5,9	4,79	34,81	1,567	9,243
Сумма		21,9		93,15	10,54	33,53

Рис. 4.11

Получаем систему нормальных уравнений для линейной регрессии:

$$\begin{cases} 7b_0 + 21{,}9b_1 = 10{,}5425, \\ 21{,}9b_0 + 93{,}15b_1 = 33{,}5283. \end{cases}$$

8. Решаем систему нормальных уравнений для показательной регрессии.

8.1. Составим исходную табличную модель для решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения... (рис. 4.12).

Переменные	
b_0	b_1
0	1

Матрица коэффициентов исходной системы		Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9	21,9	=	10,5425
21,9	93,15	93,15	=	33,5283

Рис. 412

8.2. В блок «Переменные» в первую строку записываем переменные системы алгебраических уравнений.

8.3. В блок «Переменные» во вторую строку записываем произвольные числовые значения (удобнее в качестве числовых значений поставить номера переменных), в дальнейшем, после выполнения команды Поиск решения..., в этих ячейках получим исходные решения системы.

8.4. В блок «Матрица коэффициентов исходной системы» записываем соответствующую матрицу коэффициентов при переменных b_0, b_1.

8.5. В блок «Значения левых частей уравнений» в верхнюю ячейку вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(«фиксированный диапазон строки значений переменных b_0, b_1»;«диапазон первой строки матрицы коэффициентов исходной системы»)

8.6. Автоматически заполняем весь столбец «Значения левых частей уравнений».

8.7. В блок «Свободные члены исходной системы» в столбец записываем значения правой части исходной системы.

8.8. Вызываем Поиск решения и заполняем форму:

Установить целевую ячейку – ничего не ставить;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – диапазон строки значений переменных;

Ограничения – диапазон «Значения левых частей уравнений» = диапазон «Свободные члены исходной системы»;

нажать Выполнить.

8.8.1. Заполнить форму Результаты поиска решений:

поставить опцию Сохранить найденное решение;

нажать ОК.

Результат выполнения команды Поиск решения… будет следующий (рис. 4.13).

Переменные	
b_0	b_1
1,437	0,022

Матрица коэффициентов в исходной системы		Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	21,9	10,5425	=	10,5425
21,9	93,15	33,5283	=	33,5283

Рис. 4.13

8.9. Изменить формат ячеек с полученным решением (строка значений переменных) так, чтобы было три знака после запятой.

8.10. Возвращаясь к показательной функции, найдем параметры a_0, a_1 из условий, использовав функцию EXP:

$$a_0 = e^{b_0}, \; a_1 = b_1.$$

a_0 = 4,21 a_1 = 0,022

9. Записываем уравнение показательной регрессии.

Уравнение показательной регрессии:

$$y = 4{,}20727 \cdot e^{0{,}0221372486587452x}.$$

10. Определим систему нормальных уравнений для нахождения оценок параметров гиперболической регрессии:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x},$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i}. \end{cases}$$

10.1. Для удобства расчетов представим таблицу исходных данных следующим образом (рис. 4.14) и дополним ее еще тремя расчетными столбцами: $1/x$, $1/x^2$, y/x.

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр x	Параметр y	1/x	$1/x^2$	y/x
	1	2	3	4	5	6
1	1	0,5	4,25	2	4	8,5
2	2	1,2	4,32	0,833	0,694	3,6
3	3	2	4,4	0,5	0,25	2,2
4	4	3,1	4,51	0,323	0,104	1,455
5	5	4	4,6	0,25	0,063	1,15
6	6	5,2	4,72	0,192	0,037	0,908
7	7	5,9	4,79	0,169	0,029	0,812

Рис. 4.14

10.2. В верхнюю ячейку столбца 4 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=1/«верхняя ячейка столбца x»

10.3. В верхнюю ячейку столбца 5 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения): =1/(«верхняя ячейка столбца x»^2)

10.4. В верхнюю ячейку столбца 6 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения): =«верхняя ячейка столбца y»/«верхняя ячейка столбца x»

10.5. Просуммируем значения столбцов 3, 4, 5, 6 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными (рис. 4.15).

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр x	Параметр y	1/x	$1/x^2$	y/x
	1	2	3	4	5	6
1	1	0,5	4,25	2	4	8,5
2	2	1,2	4,32	0,833	0,694	3,6
3	3	2	4,4	0,5	0,25	2,2

4	4	3,1	4,51	0,323	0,104	1,455
5	5	4	4,6	0,25	0,063	1,15
6	6	5,2	4,72	0,192	0,037	0,908
7	7	5,9	4,79	0,169	0,029	0,812
Сумма			31,59	4,268	5,177	18,62

Рис. 4.15

Получаем систему нормальных уравнений для линейной регрессии:

$$\begin{cases} 7a_0 + 4{,}26771a_1 = 31{,}59, \\ 4{,}26771a_0 + 5{,}17671a_1 = 18{,}6244. \end{cases}$$

11. Решаем систему нормальных уравнений для гиперболической регрессии.

11.1. Составим исходную табличную модель для решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения... (рис. 4.16).

11.2. В блок «Переменные» в первую строку записываем переменные системы алгебраических уравнений.

11.3. В блок «Переменные» во вторую строку записываем произвольные числовые значения (удобнее в качестве числовых значений поставить номера переменных), в дальнейшем, после выполнения команды Поиск решения..., в этих ячейках получим исходные решения системы.

Переменные	
a_0	a_1
0	1

Матрица коэффициенто в исходной системы		Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	4,2677	4,26771	=	31,59
4,2677	5,1767	5,17671	=	18,6244

Рис. 4.16

11.4. В блок «Матрица коэффициентов исходной системы» записываем соответствующую матрицу коэффициентов при переменных a_0, a_1.

11.5. В блок «Значения левых частей уравнений» в верхнюю ячейку вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(«фиксированный диапазон строки значений переменных a_0, a_1»;«диапазон первой строки матрицы коэффициентов исходной системы»)

11.6. Автоматически заполняем весь столбец «Значения левых частей уравнений».

11.7. В блок «Свободные члены исходной системы» в столбец записываем значения правой части исходной системы.

11.8. Вызываем Поиск решения и заполняем форму:

Установить целевую ячейку – ничего не ставить;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – диапазон строки значений переменных;

Ограничения – диапазон «Значения левых частей уравнений» = диапазон «Свободные члены исходной системы»;

нажать Выполнить.

11.8.1. Заполнить форму Результаты поиска решений:

поставить опцию Сохранить найденное решение;

нажать ОК.

Результат выполнения команды Поиск решения… будет следующий (рис. 4.17).

11.9. Изменить формат ячеек с полученным решением (строка значений переменных) так, чтобы было три знака после запятой.

12. Записываем уравнение гиперболической регрессии.

Уравнение гиперболической регрессии:

$$y = 4{,}66325435473523 - 0{,}246685103520782/x .$$

Переменные	
a_0	a_1
4,663	-0,247

Матрица коэффициенто в исходной системы		Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	4,2677	31,59	=	31,59
4,2677	5,1767	18,6244	=	18,6244

Рис. 4.17

13. Для нахождения общей ошибки и средней ошибки аппроксимации построим вспомогательную таблицу (рис. 4.18).

13.1. В верхнюю ячейку столбца 4 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=4,20000000000008+0,0999999999999777*«верхняя ячейка столбца x»

***Замечание.* Вместо значений оценок параметров вводим абсолютные ссылки на ячейки, содержащие значения этих оценок параметров.**

13.2. В верхнюю ячейку столбца 5 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=4,19998832974962+0,100011125811057*«верхняя ячейка столбца x» - 1,73873869144248E-06*(«верхняя ячейка столбца x»^2)

13.3. В верхнюю ячейку столбца 6 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=4,20727*EXP(0,0221372486587452*«верхняя ячейка столбца x»)

13.4. В верхнюю ячейку столбца 7 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=4,66325435473523-0,246685103520782/«верхняя ячейка столбца x»

13.5. В верхнюю ячейку столбца 8 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ((«верхняя ячейка столбца y»-«верхняя ячейка столбца 4»);2)

13.6. В верхнюю ячейку столбца 9 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ((«верхняя ячейка столбца у»-«верхняя ячейка столбца 5»);2)

№ п/п	Номер эксперимента	Параметр х	Параметр у	у-линейное	у-квадратмчное	у-показательное	у-гиперболическое
	1	2	3	4	5	6	7
1	1991	0,5	4,25	4,2500	4,2500	4,2541	4,1699
2	1992	1.2	4,32	4,3200	4,3200	4,3205	4,4577
3	1993	2	4,4	4,4000	4,4000	4,3977	4,5399
4	1994	3,1	4,51	4,5100	4,51 00	4,5061	4,5837
5	1995	4	4,6	4,6000	4,6000	4,5968	4,6016
6	1996	5,2	4,72	4,7200	4,7200	4,7206	4,6158
7	1997	5,9	4.79	4,7900	4,7900	4,7943	4,6214
Сумма				31.5900	31.5900	31.5901	31.5900

№ п/п	Квадрат отклонения у-линейного	Квадрат отклонения у-квадратичного	Квадрат отклонения у-показательного	Квадрат отклонения у- гиперболического	Аппроксимация у-линейного	Аппроксимация у-квадратичного	Аппроксимация у-показательного	Аппроксимация у- гипер-
	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,01	0,0000	0,0000	0,0010	0,02
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,02	0,0000	0,0000	0,0001	0,03
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,02	0,0000	0,0000	0,0005	0,03
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,01	0,0000	0,0000	0,0009	0,02
5	0л0000	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,0007	0,00
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,01	0,0000	0,0000	0,0001	0.02
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.03	0.0000	0.0000	0.0009	0.04
Сумма	0,0000	0,0000	0,0001	0,09	0,00%	0,00%	0,06%	2,24%

Рис. 4.18

13.7. В верхнюю ячейку столбца 10 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ((«верхняя ячейка столбца у»-«верхняя ячейка столбца 6»);2)

13.8. В верхнюю ячейку столбца 11 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ((«верхняя ячейка столбца y»-«верхняя ячейка столбца 7»);2)

13.9. В верхнюю ячейку столбца 12 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=ABS((«верхняя ячейка столбца y»-«верхняя ячейка столбца 4»)/«верхняя ячейка столбца y»)

13.10. В верхнюю ячейку столбца 13 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=ABS((«верхняя ячейка столбца y»-«верхняя ячейка столбца 5»)/«верхняя ячейка столбца y»)

13.11. В верхнюю ячейку столбца 14 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=ABS((«верхняя ячейка столбца y»-«верхняя ячейка столбца 6»)/«верхняя ячейка столбца y»)

13.12. В верхнюю ячейку столбца 15 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=ABS((«верхняя ячейка столбца y» - «верхняя ячейка столбца 7»)/«верхняя ячейка столбца y»)

13.13. Просуммируем значения столбцов 4 – 11 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными.

В ячейках под столбцами 12 – 15 введем формулы и придадим этим ячейкам формат Процентный:

=1/7*СУММ(«диапазон значений ячеек соответствующего столбца 12 – 15»)*100%

Замечание. Суммы значений столбцов 8 – 11 – это общие ошибки линейной, квадратичной, показательной, гиперболической регрессий соответственно. Суммы значений столбцов 12 – 15 – это средние ошибки аппроксимации линейной, квадратичной, показательной, гиперболической регрессий соответственно.

14. Укажем функцию наилучшей аппроксимации по общей ошибке и по средней ошибке аппроксимации, используя функции ЕСЛИ и МИН.

14.1. Для определения регрессии с минимальной общей ошибкой введем формулу:

=ЕСЛИ(«ячейка суммы столбца у-лиейное»=МИН(«диапазон ячеек сумм регрессий»);"у-линейное";ЕСЛИ(«ячейка суммы столбца у-квадратичное»=МИН(«диапазон ячеек сумм регрессий»);"у-квадратичное"; ЕСЛИ(«ячейка суммы столбца у-показательное»=МИН(«диапазон ячеек сумм регрессий»);"у-показательное";"у-гиперболическое")))

14.2. Для определения регрессии с минимальной средней ошибкой аппроксимации введем формулу:

=ЕСЛИ(«ячейка со значением средней ошибки аппроксимации у-линейное»=МИН(«диапазон ячеек со значениями всех средних ошибок аппроксимации»);"у-линейное";ЕСЛИ(«ячейка со значением средней ошибки аппроксимации у-квадратичное»=МИН(«диапазон ячеек со значениями всех средних ошибок аппроксимации»);"у-квадратичное"; ЕСЛИ(«ячейка со значением средней ошибки аппроксимации у-показательное»=МИН(«диапазон ячеек со значениями всех средних ошибок аппроксимации»);"у-показательное";"у-гиперболическое")))

Минимальная общая ошибка:	у-линейное
Минимальная средняя ошибка аппроксимации:	у-линейное

Вывод. Линейная функция – функция наилучшей аппроксимации.

15. Построим линии регрессии в одной плоскости вместе с исходными данными (рис. 4.19).

Замечание. Из-за того, что исходные данные выражают почти функциональную линейную зависимость, линии регрессий (кроме гиперболической) на данном промежутке исходных данных почти совпадают.

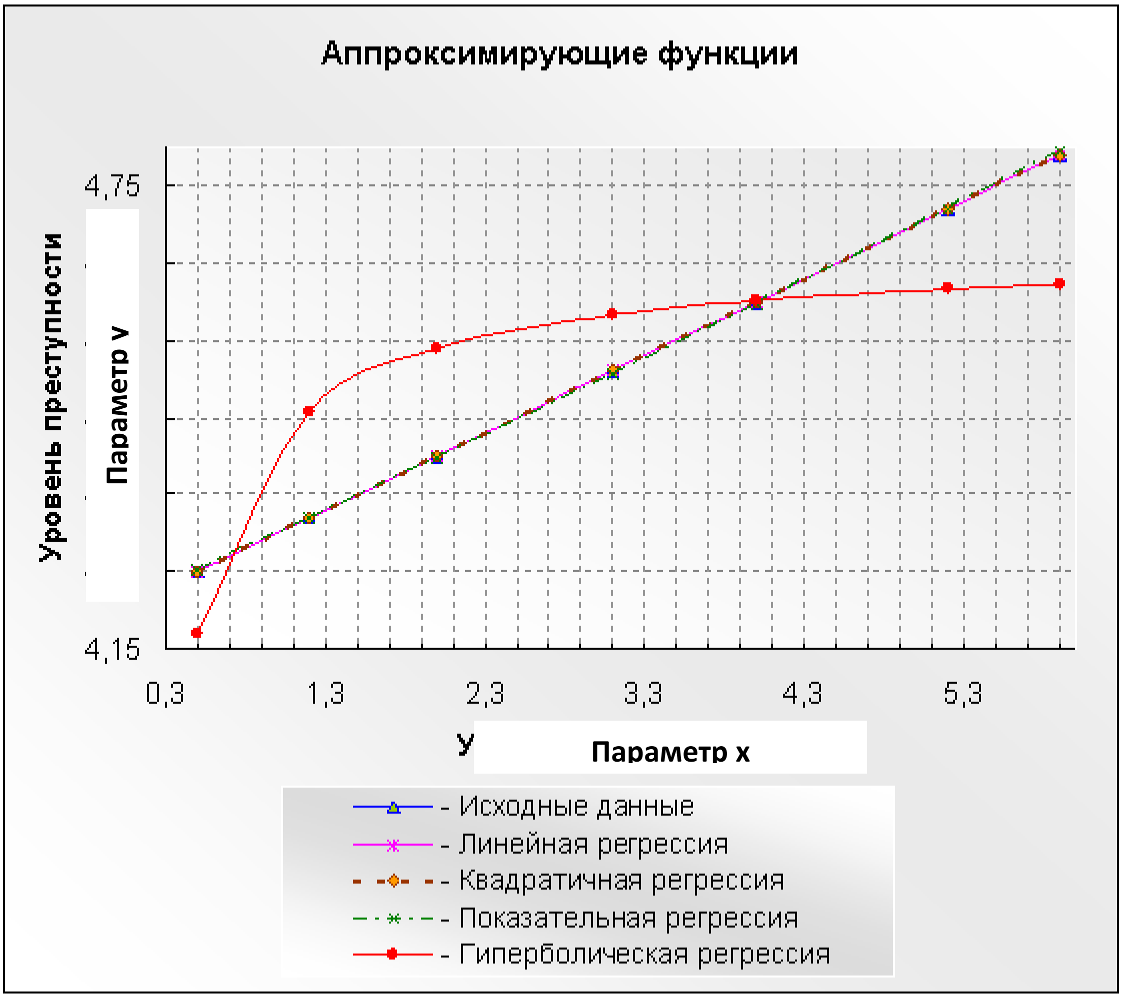

Рис. 4.19

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что означает аппроксимация функции?

2. С помощью каких показателей можно судить о лучшей аппроксимации функции?

3. Для чего применяют функцию MS Excel МИН?

4. Могут ли исходные данные лежать на линии регрессии? И какие варианты могут быть?

5. Опишите модель решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения...

6. Приведите пять примеров возможных аппроксимирующих функции, кроме тех, что рассмотрены в задаче.

7. Опишите синтаксис функции MS Excel ЕСЛИ.

8. Для чего применяется метод наименьших квадратов? В чем его суть?

9. Как вычисляется средняя ошибка аппроксимации? Что она характеризует?

Варианты индивидуальных заданий

Данные зависимости параметра X, % от параметра $У$, % выбираются из таблиц вариантов «Варианты 1» и «Варианты 2», соответственно для 1-й и 2-й групп студентов. Номер варианта совпадает с номером в списке группы. В качестве параметра *X* - данные из столбца «Входной параметр X_1», качестве параметра *У* - «Выходной параметр *У*».

Рекомендуемый библиографический список

7. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
8. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
9. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
10. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
11. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
12. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Тема: Построение и анализ качества модели парной линейной регрессии

Рассматриваемые вопросы:

- Анализ качества модели парной линейной регрессии.
- Точечный и интервальный прогнозы по модели парной линейной регрессии.
- Стандартная ошибка точечного прогноза.

Цель:

1. Научиться строить модель парной линейной регрессии, описывающей техническую систему и производить анализ ее качества.

2. Научиться осуществлять прогноз по построенной модели и определять стандартную ошибку точечного прогноза.

Форма отчетности.

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Замечание. Ячейка, содержащая формулу, будет отмечена серым цветом.

Задача 5.1.

Данные зависимости параметра x , от параметра y, приведены в таблице (рис. 5.1).
Исследовать зависимость выходного параметра y от входного x и дать рекомендации о целесообразности увеличения x для достижения оптимального роста y, то есть необходимо:

1) произвести идентификацию модели парной линейной регрессии;

2) рассчитать общую, факторную и остаточную дисперсии;

3) вычислить коэффициент детерминации;

4) вычислить среднюю ошибку аппроксимации;

5) вычислить стандартную ошибку регрессии;

6) вычислить стандартные ошибки параметров регрессии;

7) проверить гипотезу о наличии регрессионной зависимости при уровне значимости равном 0,05;

8) произвести интервальное оценивание параметров регрессионной модели;

9) осуществить точечный прогноз (только в случае качественной модели) при значении фактора, равного 120 % от среднего числа работников;

10) определить стандартную ошибку точечного прогноза;

11) осуществить интервальный прогноз, при значении фактора равного 120 % от среднего числа работников;

12) изобразить графически парную линейную регрессию и исходные данные.

Результаты наблюдений за исследуемым показателем (товарооборот) и фактором (число работников) в одни и те же временные интервалы (рис. 3.1).

Выходной параметр y	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,4	1,7	1,9
Входной параметр x	73	85	102	115	122	126	134	147

Рис. 5.20

Алгоритм решения задачи

1. Будем строить модель парной линейной регрессии вида $y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$
.

1.1. Представим таблицу исходных данных для удобства расчетов следующим образом (рис. 5.2).

2. Произведем идентификацию данной модели, то есть найдем оценки параметров модели a_0, a_1.

Оценки параметров модели парной линейной регрессии находятся по формулам

N° п/п	Выходной параметр у.	Входной параметр х
1	0,5	73
2	0,7	85
3	0,9	102
4	1,1	115
5	1.4	122
6	1.4	126
7	1.7	134
8	1,9	147

Рис. 5.21.

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}, \quad \hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}, \quad z_i = x_i - \bar{x}.$$

2.1. Вычислим средние значения x-среднее и y-среднее, используя функцию СРЗНАЧ;

Вызов функции: MS Excel - Вставка - Функция… - Статистические

Формула Excel:

=СРЗНАЧ(«диапазон данных, для которых находим среднее»)

у-среднее =	1,2
х-среднее =	113

2.2. Вычислим оценку параметра a_1, используя функции СУММПРОИЗВ, СТЕПЕНЬ.

Вызов функции: MS Excel - Вставка - Функция… - Математические

Формула Excel:

=СУММПРОИЗВ(«диапазон y»;(«диапазон x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»))/СУММПРОИЗВ((«диапазон x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»);(«диапазон x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»))

оценка параметра a_1 = 0,019

2.3. Вычислим оценку параметра a_0 по формуле:

=«y-среднее» – «значение оценки параметра a_1»*«x-среднее»

оценка параметра a_0 = -0,97

Вывод. Уравнение парной линейной регрессии имеет вид

$$y = -0{,}97 + 0{,}019x.$$

3. Вычислим y-оценку, добавив расчетный столбец к таблице исходных данных (рис. 5.3).

В верхнюю ячейку вводим формулу, а затем, используя автоматическое заполнение, заполняем столбец:

=«a_0-оценка»+«a_1-оценка»*«значение числа работников в первой ячейке»

N° п/п	Выходной параметр y.	Входной параметр x	y-оценка
1	0,5	73	0,43
2	0,7	85	0,661
3	0,9	102	0,988
4	1,1	115	1,238
5	1.4	122	1,373
6	1.4	126	1,45
7	1.7	134	1,604
8	1,9	147	1,854

Рис. 5.22

Замечание. Фиксация столбца или строки осуществляется приписыванием знака $ перед именем столбца или строки. Для фиксации ячейки необходимо зафиксировать одновременно и столбец, и строку (достаточно нажать F4, когда текстовый курсор находится в адресе ячейки). О фиксированной ячейке говорят, что она имеет абсолютный адрес, например: C41. Если ячейка имеет адрес без знака $, то говорят, что она имеет относительный адрес, например: C41.

Автоматическое заполнение означает выделение ячейки с формулой и протягиванием ее на диапазон заполнения. При этом ссылки на ячейки с абсолютным адресом изменяться не будут, а вот ссылки на ячейки с относительным адресом будут изменяться относительно перемещения первоначальной ячейки по диапазону заполнения.

4. Построим график линейной регрессии и исходные данные (рис. 5.4). Это следует сделать на этом этапе решения задачи, чтобы убедиться в отсутствии ошибок в идентификации модели (для модели парной линейной регрессии всегда должна быть изображена прямая с разбросанными вокруг нее точками (исходными данными)).

Замечание по оформлению. Тип диаграммы - Точечная - Точечная диаграмма, на которой значения соединены отрезками. После построения графиков убрать линии, соединяющие исходные данные. Маркеры сделать круглыми. Убрать линии сетки. Для более наглядного изображения изменить минимальные и максимальные значения на осях. Метки делений должны пересекать ось.

Вывод. Оценка параметра регрессии $a_1 = 0,019$ показывает, что увеличение входного параметра на единицу приводит к увеличению выходного параметра в среднем на 0,019. Если увеличение параметра x приводит к меньшему росту параметра y, то увеличение входного параметра не обосновано.

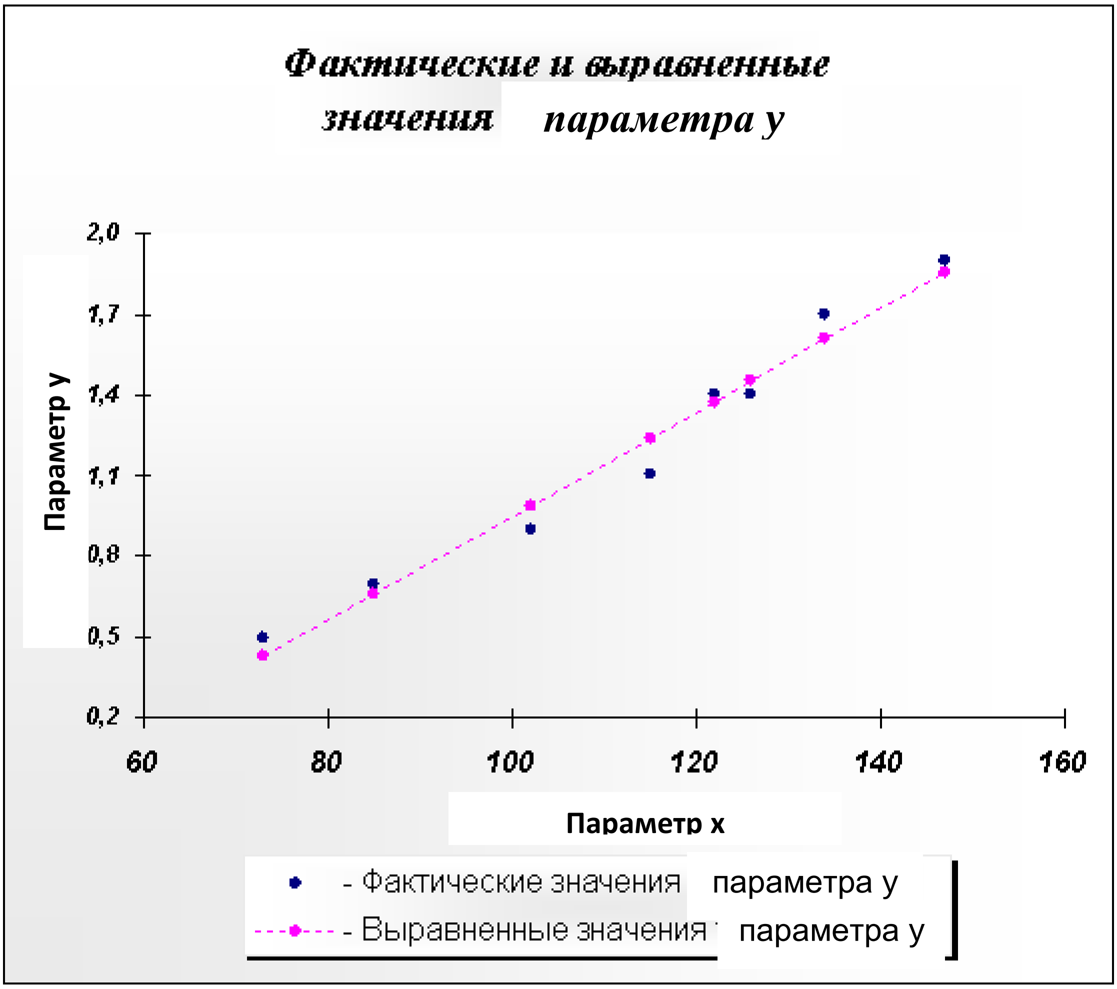

Рис. 5.23. Модель парной линейной регрессии

5. Для нахождения общей, факторной и остаточной дисперсии дополним расчетную таблицу еще тремя столбцами: общей, факторной и остаточной суммами квадратов (рис. 5.5).

N° п/п	Выход-ной па-раметр y.	Входной параметр x	y-оценка	Общая сумма квадра-	Фактор-ная сумма	Оста-точная сумма
1	0,5	73	0,4305	0,49	0,5922	0,0048
2	0,7	85	0,6613	0,25	0,2902	0,0015
3	0,9	102	0,9884	0,09	0,0448	0,0078
4	1,1	115	1,2385	0,01	0,0015	0,0192
5	1,4	122	1,3731	0,04	0,03	0,0007
6	1.4	126	1,4501	0,04	0,0625	0,0025
7	1,7	134	1,604	0,25	0,1632	0,0092
8	1,9	147	1,8541	0,49	0,4278	0,0021
Сумма				1,66	1,6121	0,0479

Рис. 5.24

5.1. В столбец «общая сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(y – «y-среднее»;2)

5.2. В столбец «факторная сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(«y-оценка» – «y-среднее»;2)

5.3. В столбец «остаточная сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(y – «y-оценка»;2)

5.4. Суммированием по трем столбцам находим соответственно общую, факторную и остаточную суммы квадратов. Используем функцию СУММ.

5.5. Определяем число степеней свободы соответственно общей, факторной и остаточной сумм квадратов.

Число степеней свободы общей суммы квадратов:

$n-1=8-1=7$.

Число степеней свободы факторной суммы квадратов:

$k=1$.

Число степеней свободы остаточной суммы квадратов:

$n-2=8-1=6$.

n – количество исходных данных, объем выборки (для нашей задачи $n=8$, так как имеем всего 8 пар результатов наблюдений за показателями);

k – число факторов (для нашей задачи $k=1$, так исследуем влияние только x на y).

5.6. Дисперсии находим делением соответствующих сумм квадратов на соответствующие им числа степеней свободы:

общая дисперсия =	0,237
факторная дисперсия =	1,612
остаточная дисперсия =	0,008

6. Вычисляем коэффициент детерминации по формуле:

=1 – «остаточная сумма квадратов»/«общая сумма квадратов»

коэффициент детерминации = 0,971

7. Для нахождения средней ошибки аппроксимации припишем еще один столбец к расчетной таблице: Аппроксимация (рис. 5.6).

N° п/п	Выход-ной па-раметр у.	Входной параметр х	у-оценка	Общая сумма квадра-	Фактор-ная сумма	Оста-точная сумма	Аппрок-симация
1	0,5	73	0,4305	0,49	0,5922	0,0048	0,139
2	0,7	85	0,6613	0,25	0,2902	0,0015	0,0552
3	0,9	102	0,9884	0,09	0,0448	0,0078	0,0982
4	1,1	115	1,2385	0,01	0,0015	0,0192	0,1259
5	1,4	122	1,3731	0,04	0,03	0,0007	0,0192
6	1.4	126	1,4501	0,04	0,0625	0,0025	0,0358
7	1,7	134	1,604	0,25	0,1632	0,0092	0,0565
8	1,9	147	1,8541	0,49	0,4278	0,0021	0,0242
Сумма				1,66	1,6121	0,0479	0,5539

Рис. 5.25

7.1. В столбец «аппроксимация» вставляем формулу Excel:

=ABS((y – «y-оценка»)/y)

7.2. Суммируем все значения столбца «аппроксимация», используя функцию СУММ.

7.3. Вычисляем среднюю ошибку аппроксимации по формуле:

=1/n*«сумма модулей столбца аппроксимация»*100%

(числовой формат ячейки при этом должен быть Процентный)

средняя ошибка аппроксимации = 6,92%

8. Вычисляем стандартную ошибку регрессии по формуле:

=КОРЕНЬ(1/(n-2)*«остаточная сумма квадратов»)

стандартная ошибка регрессии = 0,089

9. Вычислим стандартные ошибки параметров регрессии по формулам:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_0}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}},$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}.$$

9.1. Для стандартной ошибки параметра регрессии a_0:

=КОРЕНЬ(1/(n*(n-2))* «остаточная сумма квадратов»* СУММПРОИЗВ(«диапазон значений x»;«диапазон значений x»)/ СУММПРОИЗВ((«диапазон значений x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»);(«диапазон значений x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»)))

стандартная ошибка параметра регрессии a_0 = 0,156

9.2. Для стандартной ошибки параметра регрессии a_1 (коэффициента регрессии):

=КОРЕНЬ(1/(n-2)*«остаточная сумма квадратов»/ СУММПРОИЗВ((«диапазон значений x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»);(«диапазон значений x» – «x-среднее в фиксированной ячейке»)))

стандартная ошибка параметра регрессии a_1 = 0,001

10. Проверим гипотезу о наличии регрессионной зависимости, то есть проверим статистическую значимость параметра регрессии a_1 (коэффициента регрессии).

10.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : a_1 = 0,$

$H_1 : a_1 \neq 0.$

10.2. Строим статистику:

t = ABS(«параметр регрессии a_1»/«стандартная ошибка a_1»)

t = 14,21

10.3. Находим квантиль распределения Стьюдента с $n-2=8-2=6$ степенями свободы при уровне значимости, равном 0,05. Используем функцию СТЬЮДРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel - Вставка - Функция… - Статистические

=СТЬЮДРАСПОБР(«уровень значимости»;n-2)

t-квантиль = 2,447

10.4. Делаем вывод о принятии гипотезы:

=ЕСЛИ(t>=«t-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения парной линейной регрессии а1 статистически значим, то есть регрессионная зависимость существует.";"принимается, это означает, что фактор х не связан линейно с зависимой переменной у, то есть регрессионная зависимость отсутствует.")

Гипотеза H_0: $a_1 = 0$	отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения парной линейной регрессии а1 статистически значим, то есть регрессионная зависимость существует.

11. Произведем интервальное оценивание параметров парной линейной регрессионной модели.

11.1. Доверительный интервал для параметра регрессионной модели a_0 есть интервал вида

$$\hat{a}_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} < a_0 < \hat{a}_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}.$$

=«оценка параметра a_0 уравнения регрессии» – «t-квантиль» * «стандартная ошибка параметра уравнения регрессии a_0»

= «оценка параметра a_0 уравнения регрессии» + «t-квантиль» * «стандартная ошибка параметра уравнения регрессии a_0»

-1,36 <=a_0<= -0,59

11.2. Доверительный интервал для параметра регрессионной модели a_1 есть интервал вида

$$\hat{a}_1 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} < a_1 < \hat{a}_1 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}.$$

=«оценка параметра a_1 уравнения регрессии» – «t-квантиль» * «стандартная ошибка параметра уравнения регрессии a_1»

= «оценка параметра a_1 уравнения регрессии» + «t-квантиль» * «стандартная ошибка параметра уравнения регрессии a_1»

0,016 <=a_1<= 0,023

12. По показателям качества модели (коэффициент детерминации, средняя ошибка аппроксимации) заключаем, что модель качественная. Поэтому осуществим точечный прогноз по построенной модели, подставив значение фактора *x* в уравнение регрессии и определим значение зависимой переменной y (товарооборот).

12.1. Вычислим значение фактора, равное 120 % от среднего числа работников по формуле:

=«х-среднее»*120%

(числовой формат ячейки при этом должен быть Числовой)

значение фактора для прогноза = 135,6

Замечание. В случае, если фактор *x* не может быть дробным значением (например число транзисторов в электрической схеме), будем использовать число, округленное до целого, то есть значение фактора будет равным 136.

12.2. y-прогнозное вычисляем по формуле

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}(x)} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}.$$

=«оценка параметра a_0» + «оценка параметра a_1» * «округленное значение фактора»

у-прогнозное = 1,642

13. Вычислим стандартную ошибку точечного прогноза y-прогнозное по формуле:

=«стандартная ошибка регрессии»* КОРЕНЬ(1/n+СТЕПЕНЬ((«округленное значение фактора» – «х-сред-нее»);2)/СУММПРОИЗВ((«диапазон значений х» – «х-среднее в фиксированной ячейке»);(«диапазон значений х» – «х-среднее в фиксированной ячейке»)))

стандартная ошибка точечного прогноза = 0,044

14. Осуществим интервальный прогноз при значении фактора, равного 120 % от среднего числа фактора *x*.

14.1. Доверительный интервал для истинного точечного прогноза есть интервал вида

$$\hat{y}(x) - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{y}(x)} < \tilde{y}(x) < \hat{y}(x) + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}_{\hat{y}(x)}.$$

=«у-прогнозное» – «t-квантиль»*«стандартная ошибка точечного прогноза у-прогнозное»

=«у-прогнозное» + «t-квантиль»*«стандартная ошибка точечного прогноза у-прогнозное»

1,53397 <=истинное значение точечного прогноза<= 1,75097

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что означает точечный прогноз по уравнению регрессии?

2. Будет ли доверительный интервал, накрывающий истинное значение точечного прогноза, накрывать оценку точечного прогноза?

3. Получены интервальные оценки параметров парной линейной регрессионной модели. Будут ли они содержать оценки этих параметров?

4. Каково качество построенной модели, и по какому показателю его надо определять?

5. Равносильны ли гипотезы о статистической значимости коэффициента регрессии a_1 и о наличии регрессионной зависимости? Ответ обосновать.

6. Что позволяет определить функция СТЬЮДРАСПОБР ?

7. Для чего необходима функция СУММПРОИЗВ ?

8. Всегда ли графически изображается прямая для модели парной линейной регрессии?

Варианты индивидуальных заданий

Данные зависимости параметра x, % от параметра y, % выбираются из таблиц вариантов «Варианты 1» и «Варианты 2», соответственно для 1-й и 2-й групп студентов. Номер варианта совпадает с номером в списке группы. В качестве параметра *X* - данные из столбца «Входной параметр X_1», качестве параметра *У* - «Выходной параметр *У*».

Рекомендуемый библиографический список

13. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
14. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
15. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
16. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
17. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
18. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

ГРУППЫ 1 (ВАРИАНТЫ 1.1 – 1.24)

Вариант	1				2				3				4			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,6	12	6	0,6	1,8	13	6	1,1	0,8	7	8	1,5	0,6	13	5	3,8
2	0,9	17	6	1,3	2,4	15	8	2	1,6	10	10	1,7	0,8	16	6	4
3	3,6	22	11	2,1	2,9	19	13	2,1	3,3	20	11	2,8	0,9	25	9	4,1
4	4,5	35	13	6	3,7	23	25	2,9	4	24	19	5,2	2,9	29	11	5,6
5	7	40	28	6,4	4	26	29	3,3	4	24	25	6,7	4,3	35	17	6,3
6	9	44	30	6,4	4,2	31	30	3,8	4,7	34	27	6,9	5,2	35	19	6,9
7	9,5	44	45	6,9	6,7	31	30	6	5,7	35	33	7,5	6,8	40	20	7,9
8	9,8	45	48	8,2	7,1	35	46	7,3	5,8	39	42	7,8	8,4	42	28	8
9					8,7	39	47	8	6,5	42	44	8	8,4	42	38	8,5
10									9,2	45	48	9,5	8,7	49	41	9
11													9,7	49	46	9,6
12																
13																
14																
15																

Вариант	5				6				7				8			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	2,2	9	5	1,4	0,8	6	6	2,5	0,6	7	6	1,7	1,1	5	5	1
2	2,5	9	16	1,9	0,9	16	9	2,6	0,8	7	8	1,8	1,1	6	6	1,4
3	3,1	11	19	3,1	2	18	14	2,6	1,4	9	15	2,3	1,5	7	12	2,3
4	3,3	17	19	4	2,2	18	15	3,2	1,7	9	15	3,1	2	9	13	2,9
5	3,5	24	22	4,2	3,5	24	15	4,5	2,5	12	15	3,2	3,1	10	17	3,5
6	4,5	26	28	4,9	3,9	25	21	5	3,8	12	16	5,5	4,4	12	20	4
7	4,5	27	28	5	6,8	28	28	5,4	4,6	14	21	7,1	4,7	15	21	4,5
8	4,6	28	30	5,2	7,9	28	30	5,9	4,7	16	24	7,4	4,8	17	29	4,6
9	5,2	32	37	6	8,2	31	31	6,2	5,9	25	24	7,8	4,9	19	35	4,7
10	8,4	44	39	6,7	8,5	32	38	6,8	6,2	25	28	7,8	7,5	25	39	5,5
11	9,7	45	44	8,8	8,8	35	43	8,2	6,2	28	36	8,6	7,9	27	40	7,5
12	9,9	48	48	9,1	9,4	42	44	8,2	7,4	32	39	8,9	8,1	28	41	8,3
13					10	48	48	9,6	8	34	42	9,8	8,2	30	43	8,3
14									9,5	35	50	9,8	9,3	31	43	9,1
15													9,9	33	44	9,9

Вариант	9				10				11				12			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,9	7	9	2,2	0,8	7	7	1,9	1,2	5	6	0,8	0,8	7	6	2,6
2	3,8	9	11	3,3	2	9	23	2,3	1,9	22	9	2,9	0,8	7	8	6,2
3	4,5	9	17	6	2,1	15	28	3,8	2,3	26	12	3,6	1	11	14	6,4
4	6,4	30	17	6,4	3,4	16	32	3,9	3	27	15	4,1	3,6	27	14	6,8
5	6,9	33	19	6,7	7,1	23	38	4,8	5,7	30	22	4,5	4,2	31	16	7
6	8,7	36	21	7,6	8	29	39	5,8	7,6	33	25	4,9	4,9	34	18	7,4

7	9	40	29	9,3	9,1	36	47	7,4	8,2	35	30	5,3	5,4	36	18	7,7
8	9,6	43	36	9,4	9,3	43	47	8,4	8,3	37	35	6,4	6,7	39	29	8,3
9					9,7	47	48	8,6	8,9	42	37	8,9	6,7	40	36	9,1
10									9	45	45	9,9	7,9	41	38	9,3
11													9,3	43	48	9,6
12																
13																
14																
15																

Вариант	13				14				15				16			
№ эксперимента	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр y**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр y**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр y**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр y**
1	1,3	6	7	1,5	0,6	9	7	1,4	1,9	6	8	1,3	2	5	11	1,1
2	3,1	7	7	1,7	1,1	11	7	3,2	2,2	8	10	2,3	2,1	6	13	1,9
3	3,2	14	9	2,7	1,4	20	11	3,5	3,8	15	12	2,6	2,4	15	14	2,7
4	4,3	23	11	5,6	2,8	23	17	4,8	4	15	13	3,5	2,9	17	15	3,2
5	5,6	30	12	6,6	3,9	28	27	6	5,1	21	14	3,8	4,3	23	16	4,3
6	6,2	35	16	7,1	5,5	30	28	6,5	5,6	24	21	4	5,1	24	23	4,7
7	6,3	37	17	7,5	5,7	31	29	6,7	5,8	25	22	4	6	28	24	4,8
8	6,8	39	32	7,7	6	34	29	7,6	6,6	25	22	4,3	6,2	31	29	5,8
9	7,8	42	33	7,9	6,3	37	37	8,7	6,8	26	26	6,7	6,3	32	31	6
10	8,1	47	35	8,3	6,4	39	43	9	7,2	32	27	7	7,1	36	39	6,3
11	8,7	48	37	8,9	8	40	44	9,6	7,5	37	34	7,2	7,1	42	40	7,7
12	9,9	49	46	9,9	8,1	45	48	9,8	8,5	41	34	8,6	7,4	42	43	8
13					9,8	48	49	9,8	8,8	45	42	9,1	7,6	45	46	8,1
14									9,9	47	44	9,9	7,7	46	47	8,7
15													8,6	47	48	9,1

Вариант	17				18				19				20			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,7	12	5	1,7	2,3	8	11	0,6	1,7	9	6	0,7	1	8	5	0,8
2	1,5	15	9	3	2,9	14	15	0,9	2,5	13	13	1	1,5	11	6	2,7
3	1,9	22	15	4,4	3,6	19	17	6	3,3	16	14	1,5	2,2	15	8	3,4
4	3,7	34	30	5,4	4,2	22	19	6,9	4,8	16	16	2,1	3,1	24	12	4,2
5	4	39	31	7,1	4,7	25	21	7,4	5	21	18	3,2	3,6	29	13	5,3
6	5,2	39	32	7,2	6,4	27	22	8	6,3	23	18	4,6	3,8	29	24	6,1
7	7	49	40	7,5	7	35	37	8,5	7,4	34	35	6	4,5	37	27	6,2
8	8,2	50	50	7,6	8,9	41	38	8,7	7,6	40	39	6,5	4,8	38	29	7,7
9					9,1	44	42	8,8	8	42	41	8,5	5,7	40	31	8,1
10									9,1	43	41	9,6	7,5	40	33	8,3
11													8	47	38	9,2
12																
13																
14																
15																

Вариант	21				22				23				24			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,9	5	11	1,8	0,8	6	8	0,5	1,7	7	6	2,1	0,5	5	11	2
2	1,5	7	12	2,2	3,5	13	9	0,7	1,8	9	10	2,8	2,6	14	13	2,1
3	3,4	8	15	2,7	3,9	19	23	0,7	3,1	12	13	3,7	3	17	14	2,8
4	4,4	9	16	2,9	4,3	21	24	1,4	4,2	19	14	4	4,5	18	18	3,2
5	4,6	10	17	3,2	4,7	26	28	2,1	4,7	21	18	4,4	5,6	19	19	4,1
6	4,6	11	21	3,3	4,8	28	32	2,1	5,9	23	18	5,5	6,4	23	20	5,7
7	6	13	21	6,3	5,1	30	37	3,7	6,4	26	23	6,4	6,4	24	28	5,9

8	6,3	17	23	6,5	5,3	31	38	4,7	7	31	23	6,8	7,1	26	30	6
9	7	23	23	7,1	6,3	32	38	5,3	7,2	32	24	6,9	7,3	31	32	6,1
10	7,6	42	28	8,2	6,7	34	42	6,5	7,6	35	25	7,8	7,5	32	33	6,2
11	8,4	50	35	8,8	7,1	40	47	6,5	7,8	39	31	7,9	7,6	38	34	6,9
12	9,2	50	41	9,3	7,3	41	49	7,5	8,8	45	31	8,2	7,7	42	41	8,5
13					7,4	42	49	8,1	9,1	47	39	9,1	8,1	42	43	8,6
14									9,2	47	39	9,1	8,9	44	49	9,6
15													9,7	46	50	9,8

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ДЛЯ ГРУППЫ 2

(ВАРИАНТЫ 2.1 – 2.24)

Вариант	1				2				3				4			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,6	17	10	1,7	1,3	12	11	1,8	0,6	10	17	2	1,2	8	9	1,5
2	1,6	19	10	2,8	2,4	27	25	4	1,1	14	17	2,3	2	9	11	2,4
3	2,7	20	16	3	3,8	36	29	4,5	3,2	26	19	2,6	2,3	11	14	4,5
4	3,2	28	18	3,7	4	37	34	5,6	4,5	28	20	4,5	4,2	26	16	5,4
5	4	28	24	4,2	5,7	37	38	6,7	4,8	34	26	5,1	5,3	28	19	6,1
6	5,2	34	26	5,9	5,8	38	40	7,7	5,1	41	37	6,3	5,5	29	20	6,3
7	8,7	44	27	8,5	7,4	41	41	8,6	6,3	42	42	7	5,8	38	20	6,7
8	9	50	44	9	8,5	44	43	9,2	7,2	45	44	8,5	6,6	39	27	7,3
9					9,9	48	45	9,3	8	47	46	9,4	8,3	41	43	7,5
10									8,8	48	50	9,9	9,2	42	44	8,1
11													9,9	48	47	8,5
12																
13																
14																
15																

Вариант	5				6				7				8			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,6	9	5	0,8	0,6	5	12	2,6	0,6	5	13	1,3	0,8	8	5	2,4
2	0,7	11	11	1,7	1,1	13	14	3,9	3,3	6	15	1,7	1,1	8	10	3,5
3	2,2	13	15	2	2,1	14	15	4,1	3,5	13	19	1,8	1,4	8	10	3,6
4	3,5	20	16	4	3,1	15	20	4,4	3,9	22	19	1,8	2	10	11	4
5	3,9	23	20	5,6	3,6	17	24	4,4	4,8	22	27	2,6	2,9	11	16	4,7
6	5,2	33	21	6,9	4,9	26	29	4,5	4,8	22	29	2,8	3,6	11	17	5
7	7,6	39	27	6,9	5,1	26	29	4,7	4,9	23	30	2,8	4,3	18	22	5,8
8	8,1	40	28	7,2	6,1	27	33	5,9	6	24	34	4,6	4,9	22	22	6,5
9	8,3	43	31	8,2	6,3	28	36	6,7	6,2	31	38	4,9	5,5	23	28	6,6
10	8,4	44	32	8,7	6,4	30	45	7,7	6,5	32	39	5,2	6,4	26	31	7,3
11	9,4	45	37	9	7,4	31	47	9	7,4	34	41	6,2	7,2	30	35	7,4
12	9,6	45	46	9,9	8,4	34	47	9,1	8,4	39	44	8	7,3	32	39	7,8
13					9,1	46	49	9,6	8,6	40	49	8,4	7,4	47	41	8,3
14									9,7	43	49	8,5	8,5	47	45	8,3
15													9,9	50	47	9,6

Вариант	9				10				11				12			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,3	16	13	2,9	0,9	7	5	2,7	2,4	10	10	1	2,6	7	7	1,2
2	4,7	23	16	3,2	2,4	10	11	2,9	2,7	10	12	1,9	3	9	23	1,9
3	4,7	39	17	3,9	3	26	16	3,7	3,3	13	21	2,6	4	10	24	3,1
4	4,8	42	23	6	3,8	26	24	4,6	4,1	28	26	4	4,6	11	29	3,2
5	5,9	43	31	6,6	4,4	28	25	5,5	4,5	31	35	5,8	5,6	18	31	3,4
6	7,5	44	40	7,8	7,5	29	30	7,3	7,3	31	40	6,9	5,6	19	32	5,8
7	8,3	46	43	8,2	7,9	41	30	7,6	8,3	34	42	7,7	6	24	35	6,6
8	9,9	48	45	9	8,1	42	32	8,6	9	35	45	9,5	6,4	40	37	7,1
9					8,2	45	40	9,9	9,6	48	47	9,8	6,7	44	37	7,4
10									9,9	48	50	9,9	7,3	45	41	7,8
11													8	46	46	8,9
12																
13																
14																
15																

Вариант	13				14				15				16			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,9	17	11	0,9	1,6	10	5	1,4	1,4	7	6	0,8	0,8	12	6	1,3
2	2,4	18	13	1	2,4	10	7	1,6	1,8	9	7	2,6	2,7	13	13	1,4
3	2,7	19	15	2	2,7	11	10	1,7	3,4	12	13	2,9	2,9	15	13	2,3
4	3,9	24	16	3,1	3,5	12	17	2	4,1	15	18	4,3	3,6	16	13	3,4
5	4,5	27	22	4,3	5,1	16	27	2	4,2	17	23	4,5	4,7	16	16	3,5
6	4,7	29	27	4,4	5,9	19	28	5,4	4,2	19	26	4,9	5	17	19	3,6
7	4,8	35	33	4,6	6	20	28	5,5	4,7	22	27	5,1	5,5	20	32	4,1
8	4,9	42	34	4,8	6,1	27	29	6,6	4,8	22	30	5,9	6,1	22	32	4,5
9	6,7	44	43	5,5	8,3	27	34	6,9	5	24	32	7,8	6,1	23	34	4,8
10	7,6	44	43	5,5	8,7	40	36	7,6	5,3	32	33	7,8	7,5	24	36	5,9
11	8,8	45	45	6,2	8,7	45	37	8,9	6,1	32	39	8	7,5	25	39	6,7
12	9,7	50	49	7,7	9,1	47	44	9,6	8,1	40	44	8,1	7,5	27	40	7,2
13					9,4	49	47	9,8	9,3	41	44	8,2	8,4	33	42	8
14									9,4	49	46	10	8,6	34	46	9,5
15													9	42	49	9,7

Вариант	17				18				19				20			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,4	11	8	0,6	1	13	10	1,8	0,8	19	12	0,8	0,6	11	7	1
2	1,5	22	16	0,8	3,1	16	22	4,2	1,4	22	17	1,1	2,2	11	10	1
3	7,1	27	18	1,8	4,4	16	35	4,2	1,8	27	19	3,3	2,8	15	13	1,1
4	8,4	32	21	2,1	4,7	18	38	6,2	5,8	29	25	4,1	2,9	16	21	1,2
5	9,1	33	31	5,5	5,8	29	42	6,5	6,2	32	26	5,3	3,8	16	23	1,6
6	9,3	34	32	7,1	8,2	30	44	7,7	6,5	36	41	6,5	4,2	17	24	2,3
7	9,6	35	36	7,3	9	32	45	7,8	6,7	42	46	6,9	6,3	21	32	5
8	9,7	46	43	8,7	9,2	32	46	8	7,6	43	47	7,7	6,3	28	33	5,3
9					9,2	35	49	8,4	8,1	43	48	8,1	6,5	29	35	7,2
10									8,3	47	50	9,6	8,8	35	38	7,9
11													8,9	46	47	8,7
12																
13																
14																
15																

Вариант	21				22				23				24			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,8	11	7	1,8	0,7	8	5	0,7	0,6	10	12	0,8	2,1	5	7	0,7
2	1,7	20	10	3,3	2	9	6	1,4	1,3	14	12	1,5	2,9	9	14	1,1
3	2,6	21	10	4,4	2,1	12	11	1,6	2,8	18	15	2,8	3,3	9	17	1,6
4	3,9	23	11	4,5	2,8	13	15	2,1	3	23	19	3	3,4	12	20	1,9
5	5,1	23	11	4,8	3,6	14	19	2,9	3,1	28	20	3,3	3,5	21	28	2,3
6	6,5	28	12	5,4	3,9	14	23	3,1	3,4	28	24	3,9	5,9	22	31	3,5
7	6,7	34	13	5,8	5,2	14	30	3,2	3,8	29	24	5,5	6,5	26	34	4
8	7,8	36	22	5,9	5,4	18	33	3,5	6,1	30	27	6,2	6,8	29	34	5,7
9	8	38	30	6	6,1	25	36	5,9	6,2	30	30	7,8	7,1	32	35	6,5
10	8,5	42	37	6,4	7,8	31	41	6,1	7,6	37	30	8,2	7,1	33	36	6,6
11	8,8	48	48	8	7,9	32	46	8	8,1	39	34	8,4	7,2	37	36	8,2
12	9,5	50	50	9,6	8,3	40	49	8,4	8,3	43	37	8,4	7,4	39	41	8,3
13					8,5	42	50	9,4	8,8	46	46	9,3	8,7	41	44	9,3
14									8,8	49	47	9,5	8,9	43	45	9,4
15													9,4	47	45	9,7

ОГЛАВЛЕНИЕ