Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(ВлГУ)

Галас В.П.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ для студентов
направления 220400 - *Управление в технических системах*

(Электронный ресурс)

Владимир 2012

УДК 681.32

Идентификация и диагностика систем управления. Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов направления 220400 - Управление в технических системах (Электронный ресурс)/ Сост.: В.П. Галас, 2012. 70 с.

Приведены описания 4-х лабораторных работ для студентов направления 220400, в которых производится точечный прогноз моделей линейной и нелинейной регрессии, выполняется анализ качества и прогнозирование временных рядов, осуществляется их графическое представление.

Предназначены для бакалавров и магистров направления 220400 - Управление в технических системах.

Ил. 29. Табл. 15. Библиогр.: 5 назв.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Анализ качества, интервальное оценивание и точечный прогноз модели множественной линейной регрессии

Рассматриваемые вопросы:

- Матричная алгебра в идентификации модели множественной линейной регрессии.
- Анализ качества модели множественной линейной регрессии.
- Интервальное оценивание параметров уравнения множественной линейной регрессии.
- Точечный прогноз при значениях соответствующих факторов.

Цель:

1. Научиться строить модель множественной линейной регрессии, описывающей техническую систему.

2. Уметь производить анализ качества модели множественной линейной регрессии.

Форма отчетности.

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Замечание. Ячейка, содержащая формулу, будет отмечена серым цветом.

Задача 1.1.

Известны факторы, влияющие на выходной параметр системы управления техническим объектом, результаты наблюдений за которыми приведены в таблице (рис. 4.1). Определите зависимость величины выходного параметра от значений входных величин, используя модель множественной линейной регрессии, то есть, необходимо:

1) произвести идентификацию модели;

2) рассчитать общую, факторную и остаточную дисперсии;

3) вычислить коэффициент детерминации;

4) вычислить среднюю ошибку аппроксимации;

5) вычислить стандартную ошибку регрессии;

6) вычислить стандартные ошибки параметров регрессии;

7) проверить общее качество модели при уровне значимости, равном 0,05;

8) проверить значимость каждого параметра;

9) по результатам анализа качества модели (в случае некачества) произвести ее усовершенствование;

10) произвести интервальное оценивание параметров регрессионной модели;

11) осуществить точечный прогноз (только в случае качественной модели, если модель оказалась некачественной, то прогноз осуществить по усовершенствованной модели) при значениях соответствующих факторов: $x_1 = 11$, $x_2 = 103$, $x_3 = 8{,}5$;

12) в случае двухфакторной регрессионной модели, изобразить ее графически (построить поверхность).

Представим результаты наблюдений за исследуемым показателем и факторами в одни и те же моменты времени в виде таблицы (рис. 1.1)

Выходной параметр	20	30	21	25	23	18	22	24	29	27
Входной параметр 1	10	12	7	11	14	5	8	6	9	13
Входной параметр 2	100	120	90	94	91	80	93	95	103	101
Входной параметр 3	12	8	7,5	7,9	13	7	7,7	6	5	8,3

Рис. 1.1

Алгоритм решения задачи

Построим трехфакторную регрессионную модель вида $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \varepsilon$:

№ п/п	Выходной параметр (Y)	Входной параметр (x1)	Входной параметр (X2)	Входной параметр (X3)
1	20	10	100	12,00
2	30	12	120	8,00
3	21	7	90	7,50
4	25	11	94	7,90
5	23	14	91	13,00
6	18	5	80	7,00
7	22	8	93	7,70
8	24	6	95	6,00
9	29	9	103	5,00
10	27	13	101	8,30

рис. 1.2

1.1. Для удобства расчетов представим таблицу исходных данных следующим образом (рис. 1.2).

2. Произведем идентификацию данной модели, то есть найдем оценки параметров модели a_0, a_1, a_2, a_3, используя функции матричной алгебры в MS Excel.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Математические

2.1. Представим модель в матричной форме

$$Y = Xa + e.$$

2.2. Составим матрицы Y, X, a по таблице исходных данных (рис. 4.3).

$$\mathbf{Y}= \begin{pmatrix} 20\\30\\21\\25\\23\\18\\22\\24\\29\\27 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 12\\ 1 & 12 & 120 & 8\\ 1 & 7 & 90 & 7{,}5\\ 1 & 11 & 94 & 7{,}9\\ 1 & 14 & 91 & 13\\ 1 & 5 & 80 & 7\\ 1 & 8 & 93 & 7{,}7\\ 1 & 6 & 95 & 6\\ 1 & 9 & 103 & 5\\ 1 & 13 & 101 & 8{,}3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}= \begin{pmatrix} a_0\\a_1\\a_2\\a_3 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.2

2.3. Вектор-столбец a оценок параметров модели найдем по формуле

$$a = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y.$$

2.3.1. Проверим выполнимость предпосылки множественного регрессионного анализа: $\det\left(X^T X\right) \neq 0$.

2.3.2. Находим матрицу X^T транспонированную к матрице X.

$$\mathbf{X}^T= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 10 & 12 & 7 & 11 & 14 & 5 & 8 & 6 & 9 & 13\\ 100 & 120 & 90 & 94 & 91 & 80 & 93 & 95 & 103 & 101\\ 12 & 8 & 7{,}5 & 7{,}9 & 13 & 7 & 7{,}7 & 6 & 5 & 8{,}3 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Находим матрицу $\left(X^T X\right)$.

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})= \begin{pmatrix} 10 & 95 & 967 & 82{,}4\\ 95 & 985 & 9332 & 822{,}9\\ 967 & 9332 & 94501 & 7960\\ 82{,}4 & 822{,}9 & 7960 & 733{,}8 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbf{X}^T\mathbf{X})= 16340586$$

Видим, что $\det\left(X^T X\right) \neq 0$, следовательно, вектор-столбец a оценок параметров модели существует, поэтому…

2.3.3. Находим матрицу $\left(X^T X\right)^{-1}$.

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 15,4 & 0,382 & -0,1572 & -0,4526 \\ 0,382 & 0,0333 & -0,0051 & -0,0251 \\ -0,1572 & -0,0051 & 0,0018 & 0,004 \\ -0,4526 & -0,0251 & 0,004 & 0,0371 \end{pmatrix}$$

2.3.4. Находим матрицу $(X^T X)^{-1} X^T$.

$$(X^T X)^{-1} X^T = \begin{pmatrix} -1,9294 & -2,4987 & 0,5329 & 1,2514 & 0,5609 & 1,567 & 0,3529 & 0,0438 & 0,3851 & 0,7341 \\ -0,0944 & -0,0293 & -0,0306 & 0,0722 & 0,0594 & -0,0337 & -0,0176 & -0,0517 & 0,0326 & 0,0931 \\ 0,0183 & 0,0279 & -0,0022 & -0,0138 & -0,0141 & -0,0119 & -0,0011 & 0,0058 & 0,0009 & -0,0099 \\ 0,1402 & 0,0211 & 0,0085 & -0,061 & 0,0413 & 0,0003 & 0,0028 & -0,0022 & -0,0827 & -0,0684 \end{pmatrix}$$

2.3.5. Находим матрицу $a = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

$$a = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 9,8367 \\ 0,9861 \\ 0,1498 \\ -1,1882 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_0 &= 9,8367 \\ a_1 &= 0,9861 \\ a_2 &= 0,1498 \\ a_3 &= -1,1882 \end{aligned}$$

Замечание. Для выделения нужного числа из матрицы, используем функцию ИНДЕКС в MS Excel.

Замечание. Найденные значения параметров модели a_0, a_1, a_2, a_3 – есть оценки данных параметров, которые обозначаются с крышкой.

Вывод. Трехфакторное уравнение регрессии имеет вид

$$y = 9,83673 + 0,98607x_1 + 0,14981x_2 - 1,1882x_3.$$

3. Для нахождения общей, факторной и остаточной дисперсии дополним таблицу исходных данных еще четырьмя столбцами: у-оценка, общей, факторной и остаточной суммами квадратов (рис. 1.4).

№ п/п	Выходной параметр (Y)	Входной параметр (x1)	Входной параметр (X2)	Входной параметр (X3)	у-оценка	Общая сумма квадратов	Факторная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов
1	20	10	100	12,00	20,42	15,21	12,113	0,1761
2	30	12	120	8,00	30,141	37,21	38,949	0,0199
3	21	7	90	7.50	21,31	8,41	6,7061	0,0963
4	25	11	94	7,90	25,379	1,21	2,1863	0,1433

5	23	14	91	13,00	21,827	0,81	4,2955	1,3749
6	18	5	80	7,00	18,434	34,81	29,874	0,1886
7	22	8	93	7.70	22,508	3,61	1,937	0,2583
8	24	6	95	6,00	22,856	0,01	1,0905	1,3094
9	29	9	103	5,00	28,201	26,01	18,495	0,639
10	27	13	101	8,30	27,924	9,61	16,194	0,854
						136.9	131.34	5.0599

Рис. 1.3

3.1. Находим среднее значение y, используя функцию СРЗНАЧ.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

у-среднее = 23,9

3.2. В столбец «y-оценка» вставляем формулу и автоматически заполняем столбцы (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«фиксированная ячейка оценки параметра a_0»+«фиксированная ячейка оценки параметра a_1»* x_1+«фиксированная ячейка оценки параметра a_2»* x_2+«фиксированная ячейка оценки параметра a_3»* x_3

3.3. В столбец «общая сумма квадратов» вставляем формулу и автоматически заполняем столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(у – «у-среднее»;2)

3.4. В столбец «факторная сумма квадратов» вставляем формулу и автоматически заполняем столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(«у-оценка» - «у-среднее»;2)

3.5. В столбец «остаточная сумма квадратов» вставляем формулу и автоматически заполняем столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(у – «у-оценка»;2)

3.6. Суммированием по трем столбцам находим соответственно общую, факторную и остаточную суммы квадратов. Используем функцию СУММ.

3.7. Определяем число степеней свободы общей, факторной и остаточной сумм квадратов соответственно.

Число степеней свободы общей суммы квадратов:

$$n-1=10-1=9.$$

Число степеней свободы факторной суммы квадратов:

$$k=3.$$

Число степеней свободы остаточной суммы квадратов:

$$n-k-1=10-3-1=6.$$

3.7. Дисперсии находим делением соответствующих сумм квадратов на соответствующие им числа степеней свободы:

общая дисперсия = 15,21
факторная дисперсия = 43,95
остаточная дисперсия = 0,843

4. Вычисляем коэффициент детерминации по формуле:

=1 – «остаточная сумма квадратов»/«общая сумма квадратов»

коэффициент детерминации = 0,963

5. Для нахождения средней ошибки аппроксимации припишем еще один столбец к расчетной таблице: «аппроксимация» (рис. 1.5).

№ п/п	Выходной параметр (Y)	Входной параметр (x1)	Входной параметр (X2)	Входной параметр (X3)	y-оценка	Общая сумма квадратов	Факторная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов	Аппроксимация
1	20	10	100	12,00	20,42	15,21	12,113	0,1761	0,021
2	30	12	120	8,00	30,141	37,21	38,949	0,0199	0,0047
3	21	7	90	7.50	21,31	8,41	6,7061	0,0963	0,0148
4	25	11	94	7,90	25,379	1,21	2,1863	0,1433	0,0151
5	23	14	91	13,00	21,827	0,81	4,2955	1,3749	0,051
6	18	5	80	7,00	18,434	34,81	29,874	0,1886	0,0241
7	22	8	93	7.70	22,508	3,61	1,937	0,2583	0,0231
8	24	6	95	6,00	22,856	0,01	1,0905	1,3094	0,0477

9	29	9	103	5,00	28,201	26,01	18,495	0,639	0,0276
10	27	13	101	8,30	27,924	9,61	16,194	0,854	0,0342
						136.9	131.34	5.0599	0,2633

Рис. 1.4

5.1. В столбец «аппроксимация» вставляем формулу Excel:

=ABS((y – «y-оценка»)/y)

5.2. Суммируем все значения столбца «аппроксимация», используя функцию СУММ.

5.3. Вычисляем среднюю ошибку аппроксимации по формуле:

=1/n*«сумма модулей столбца аппроксимация»*100%

(числовой формат ячейки при этом должен быть Процентный)

средняя ошибка аппроксимации = 2,63%

6. Вычисляем стандартную ошибку регрессии по формуле:

=КОРЕНЬ(1/(n-k-1)*«остаточная сумма квадратов»)

стандартная ошибка регрессии = 0,918

7. Вычислим стандартные ошибки параметров регрессии по формуле:

=КОРЕНЬ(1/(n-k-1)*«остаточная сумма квадратов»*ИНДЕКС(«диапазон матрицы $\left(X^T X\right)^{-1}$»;i+1;i+1))

i - номер коэффициента регрессии.

стандартная ошибка a_0 = 3,604
стандартная ошибка a_1 = 0,168
стандартная ошибка a_2 = 0,039
стандартная ошибка a_3 = 0,177

8. Проверим общее качество модели.

8.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : D_{фактор} = D_{остат}$,

$H_1 : D_{фактор} \neq D_{остат}$.

8.2. Строим статистику:

F =«факторная дисперсия»/«остаточная дисперсия»

F = 52,11

8.3. Находим квантиль распределения Фишера – Снедекора с $k = 3$ и $n - k - 1 = 10 - 3 - 1 = 6$ степенями свободы при уровне значимости, равном 0,05. Используем функцию FРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

=FРАСПОБР(«уровень значимости»;k;n-k-1)

F-квантиль = 4,757

8.4. Делаем вывод о принятии гипотезы:

=ЕСЛИ(F>=«F-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, уравнение парной линейной регрессии значимо в целом.";"принимается.")

Гипотеза H_0: $D_{фактор} = D_{остат}$	отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, уравнение парной линейной регрессии значимо в целом.

9. Проверим статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии.

9.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : a_1 = 0$,

$H_1 : a_1 \neq 0$.

9.2. Строим статистику:

t_1 =ABS(«параметр регрессии a_1»/ «стандартная ошибка a_1»)

t_1 = 5,887

9.3. Находим квантиль распределения Стьюдента с $n-k-1=10-3-1=6$ степенями свободы при уровне значимости, равном 0,05. Используем функцию СТЬЮДРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

=СТЬЮДРАСПОБР(«уровень значимости»;n-k-1)

t-квантиль = 2,447

9.4. Делаем вывод о принятии гипотезы:

=ЕСЛИ(t_1>=«t-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения множественной линейной регрессии a_1 статистически значим, то есть 1-й фактор оказывает существенное влияние на модель.";"принимается, это означает, что фактор x_1 не связан линейно с зависимой переменной у и его можно исключить из набора факторов.")

Гипотеза H_0: $a_1 = 0$ отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения множественной линейной регрессии а1 статистически значим, то есть 1-й фактор оказывает существенное влияние на модель.

9.5. По аналогии с предыдущим, проверяем статистическую значимость коэффициента уравнения регрессии a_2.

9.6. Проверяем гипотезы:

$$H_0 : a_2 = 0,$$
$$H_1 : a_2 \neq 0.$$

9.7. Строим статистику: (см.п.**9.2)**

t_2 = 3,86

9.8. Делаем вывод о принятии гипотезы: (см.п**.9.4)**

Гипотеза H_0: $a_2 = 0$ отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения множественной линейной регрессии а2 статистически значим, то есть 2-й фактор оказывает существенное влияние на модель.

9.9. Проверяем статистическую значимость коэффициента уравнения регрессии a_3.

9.10. Проверяем гипотезы:

$$H_0 : a_3 = 0,$$
$$H_1 : a_3 \neq 0.$$

9.11. Строим статистику: (см.п.**9.2)**

$t_3 = 6{,}715$

9.12. Делаем вывод о принятии гипотезы: (см.п.**9.4)**

Гипотеза H_0: $a_3 = 0$ отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения множественной линейной регрессии а3 статистически значим, то есть 3-й фактор оказывает существенное влияние на модель.

Анализ качества, построенной регрессионной модели позволяет сделать следующие выводы:

– модель качественна в целом при уровне значимости 0,05;

– все факторы, включенные в модель, существенны при уровне значимости 0,05;

– средняя ошибка аппроксимации не превышает 5 %, что говорит об адекватности построенной модели, то есть о высоком качестве;

– коэффициент детерминации близок к единице, что говорит о тесной линейной связи всех факторов с зависимой переменной y;

– прогноз, получаемый по данной модели, будет высокой точности, то есть ошибка осуществления неверного прогноза будет мала.

10. Произведем интервальное оценивание параметров трёхфакторной регрессионной модели.

Доверительный интервал для параметра регрессионной модели a_i есть интервал вида:

$$\hat{a}_i - t_{\frac{\alpha}{2},n-k-1}\hat{\sigma}_{\hat{a}_i} \le a_i \le \hat{a}_i + t_{\frac{\alpha}{2},n-k-1}\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}.$$

=«оценка i-го параметра уравнения регрессии» - «t-квантиль»* «стандартная ошибка i-го параметра»

1,0187	$<=a_0<=$	18,655
0,5762	$<=a_1<=$	1,3959
0,0548	$<=a_2<=$	0,2448
-1,6212	$<=a_3<=$	-0,7552

11. Осуществим точечный прогноз по построенной модели, подставив значения факторов в уравнение регрессии и определив значение зависимой переменной y:

(см. задание) $x_1 = 11$ $x_2 = 103$ $x_3 = 8{,}5$

$$y = 9{,}83673 + 0{,}98607x_1 + 0{,}14981x_2 - 1{,}1882x_3$$

y-прогнозное = 26,014

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для чего необходима выполнимость условия $\det\left(X^T X\right) \ne 0$?

2. Что означает построить доверительный интервал для параметра регрессионной модели?

3. Для чего в анализе качества модели применяется F–критерий и t–критерий?

4. С помощью какой функции MS Excel вычисляется квантиль распределения Фишера – Снедекора?

5. Если один из факторов эконометрической модели статистически незначим, можно ли его исключить из модели? Если оставить или удалить один незначимый фактор, то к чему это приведет?

6. Как осуществить точечный прогноз по уравнению множественной линейной регрессии?

7. Можно ли делать прогноз по некачественной эконометрической модели?

8. Какая основная цель построения трёхфакторной регрессионной модели?

9. Что вычисляет функция MS Excel – ABS?

10. Как записать гипотезу об общей значимости модели множественной линейной регрессии?

Варианты индивидуальных заданий

Таблица результатов наблюдений за исследуемым показателем и факторами в одни и те же моменты времени составляется на основе данных, выбираемых из таблиц вариантов «Варианты 1» и «Варианты 2», соответственно для 1-й и 2-й групп студентов. Номер варианта совпадает с номером в списке группы.

Рекомендуемый библиографический список

1. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
2. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
5. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
6. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Идентификация, прогноз и графическое представление в нелинейных регрессионных моделях

Рассматриваемые вопросы:

- Построение нелинейной регрессионной модели.
- Идентификация модели.
- Точечный прогноз.
- Графическое представление модели.

Цель:

1. Научиться строить нелинейные регрессионные модели.
2. Уметь по построенным моделям осуществлять точечный прогноз и графически реализовывать построенные модели.

Форма отчетности

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Замечание. Ячейка, содержащая формулу, будет отмечена серым цветом.

Задача 2.1.

Данные зависимости выходного параметра y системы управления объектом от входных параметров x_1 и x_2, приведены в таблице (рис. 2.1)

Выходной параметр (y)	218,1	78,68	88,13	299,4	78,9	82,01	71,33
Входной параметр (x_1)	36,49	18,55	14	83,93	15,52	8,92	10,78
Входной параметр (x_2)	0,6	1	1 ,8	2,1	1 ,6	1	0,7

Рис. 2.5

Необходимо:

1) методом наименьших квадратов получить систему нормальных уравнений для двухфакторной нелинейной регрессионной модели вида $y = a_0 + a_1\sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2} + \varepsilon$;

2) определить коэффициенты системы нормальных уравнений, используя исходные данные;

3) решить систему нормальных уравнений с помощью надстройки MS Excel Поиск решения…;

4) записать полученное уравнение нелинейной регрессии;

5) осуществить точечный прогноз при средних значениях обоих факторов;

6) дать графическую интерпретацию построенной регрессионной модели.

Алгоритм решения задачи

1. Применим метод наименьших квадратов для составления системы нормальных уравнений.

1.1. Составим общую ошибку

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_0 + a_1\sqrt{x_{i1}} + a_2\sqrt{x_{i2}}\right) - y_i\right)^2.$$

1.2. Используя необходимое условие экстремума функции многих переменных, составим систему алгебраических уравнений для нахождения параметров модели:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{x_{i1}} + a_2\sqrt{x_{i2}} - y_i\right) = 0, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{x_{i1}} + a_2\sqrt{x_{i2}} - y_i\right)\cdot\sqrt{x_{i1}} = 0, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{x_{i1}} + a_2\sqrt{x_{i2}} - y_i\right)\cdot\sqrt{x_{i2}} = 0. \end{cases}$$

1.3. После преобразований, получаем систему нормальных уравнений для исходной двухфакторной нелинейной регрессионной модели:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i1}} + a_2 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i2}} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i1}} + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i1} x_{i2}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{x_{i1}}, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i2}} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i1} x_{i2}} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{x_{i2}}. \end{cases}$$

2. Определим коэффициенты системы нормальных уравнений:

2.1. Представим таблицу исходных данных для удобства расчетов следующим образом (рис. 2.2) и дополним ее еще пятью расчетными столбцами: Корень из x_1, Корень из x_2, Корень из $x_1 \cdot x_2$, y ·(корень из x_1), y ·(корень из x_2).

2.2. В верхнюю ячейку столбца 4 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=КОРЕНЬ(«верхняя ячейка столбца x_1»)

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Математические

2.3. В верхнюю ячейку столбца 5 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=КОРЕНЬ(«верхняя ячейка столбца x_2 »)

2.4. В верхнюю ячейку столбца 6 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=КОРЕНЬ(«верхняя ячейка столбца x_1»*«верхняя ячейка столбца x_2 »)

№ пп	Выходной параметр (y)	Входной параметр (x_1)	Входной параметр (x_2)	Корень из x_1	Корень из x_2	Корень из x_1* x_2	y·(корень из x_1)	y·(корень из x_2)
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	218,12	36,49	0,6	6,04	0,77	4,68	1317,60	168,96
2	78,68	18,55	1	4,31	1,00	4,31	338,87	78,68
3	88,13	14	1,8	3,74	1,34	5,02	329,75	118,24
4	299,4	83,9 3	2,1	9,16	1,45	13,28	2742,90	433,87
5	78,9	15,52	1,6	3,94	1,26	4,98	310,83	99,80
6	82,01	8,9 2	1	2,99	1,00	2,99	244,93	82,01

7	71,33	10,78	0,7	3,28	0,84	2.75	234,20	59,68

Рис. 2.6

2.5. В верхнюю ячейку столбца 7 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца y »*«верхняя ячейка столбца «корень из x_1»»

2.6. В верхнюю ячейку столбца 8 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца y »*«верхняя ячейка столбца «корень из x_2 »»

2.7. Просуммируем значения всех столбцов с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными (рис. 2.3).

2.8. Записываем систему нормальных уравнений с найденными коэффициентами:

$$\begin{cases} 7a_0 + 33{,}46a_1 + 7{,}67a_2 = 916{,}57, \\ 33{,}46a_0 + 188{,}19a_1 + 38a_2 = 5519{,}09, \\ 7{,}67a_0 + 38a_1 + 8{,}8a_2 = 1041{,}24. \end{cases}$$

№ пп	Выходной параметр (y)	Входной параметр (x_1)	Входной параметр (x_2)	Корень из x_1	Корень из x_2	Корень из x_1* x_2	y·(корень из x_1)	y·(корень из x_2)
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	218,12	36,49	0,6	6,04	0,77	4,68	1317,60	168,96
2	78,68	18,55	1	4,31	1,00	4,31	338,87	78,68
3	88,13	14	1,8	3,74	1,34	5,02	329,75	118,24
4	299,4	83,9 3	2,1	9,16	1,45	13,28	2742,90	433,87
5	78,9	15,52	1,6	3,94	1,26	4,98	310,83	99,80
6	82,01	8,9 2	1	2,99	1,00	2,99	244,93	82,01
7	71,33	10,78	0,7	3,28	0,84	2.75	234,20	59,68
Сум	916,57	188,19	8,80	33,46	7,67	38,00	5519,09	1041,24

Рис. 2.7

3. Решаем систему нормальных уравнений с помощью надстройки Поиск решения....

3.1. Составим исходную табличную модель для решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью надстройки Поиск решения.... (рис. 2.4).

Переменные		
a_0	a_1	a_2
0	1	2

Матрица коэффициентов исходной системы				Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	33,46	7,67		48,8	=	916,57
33,46	188,19	38		264,19	=	5519,09
7,67	38	8,8		55,6	=	1041,24

Рис. 2.8

3.2. В блок «Переменные» в первую строку записываем переменные системы алгебраических уравнений.

3.3. В блок «Переменные» во вторую строку записываем произвольные числовые значения (удобнее поставить в качестве числовых значений номера переменных) – в дальнейшем, после выполнения команды Поиск решения..., в этих ячейках получим исходные решения системы.

3.4. В блок «Матрица коэффициентов исходной системы» записываем соответствующую матрицу коэффициентов при переменных a_0, a_1, a_2.

3.5. В блок «Значения левых частей уравнений» в верхнюю ячейку вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(«фиксированный диапазон строки значений переменных a_0, a_1, a_2»;«диапазон первой строки матрицы коэффициентов исходной системы»)

3.6. Автоматически заполняем весь столбец «Значения левых частей уравнений».

3.7. В блок «Свободные члены исходной системы» в столбец записываем значения правой части исходной системы.

3.8. Вызываем надстройку Поиск решения… и заполняем форму:

Вызов Поиск решения...: MS Excel – Сервис – Поиск решения…

Установить целевую ячейку – ничего не ставить;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – диапазон строки значений переменных;

Ограничения – диапазон «Значения левых частей уравнений» = диапазон «Свободные члены исходной системы»;

нажать Выполнить.

3.8.1. Заполнить форму Результаты поиска решений:

поставить опцию Сохранить найденное решение;

нажать ОК.

Результат выполнения команды Поиск решения… будет следующий (рис. 2.5).

Переменные		
a_0	a_1	a_2
-17,337	42,687	-50,896

Матрица коэффициентов исходной системы			Значения левых частей уравнений		Свободные члены исходной системы
7	33,46	7,67	916,57	=	916,57
33,46	188,19	38	5519,09	=	5519,09
7,67	38	8,8	1041,24	=	1041,24

Рис. 2.9

3.9. Изменить формат ячеек с полученным решением (строка значений переменных) так, чтобы было три знака после запятой.

4. Записываем уравнение двухфакторной нелинейной регрессии.

Уравнение нелинейной регрессии:

$$y = -17{,}337145247768 + 42{,}6868016051168\sqrt{x_1} -$$
$$-50{,}8957451072794\sqrt{x_2}.$$

5. Осуществим точечный прогноз при средних значениях обоих факторов.

5.1. Вычислим средние значения факторов x_1 и x_2 с помощью функции MS Excel СРЗНАЧ

=СРЗНАЧ(«диапазон значений столбца x_1»)

=СРЗНАЧ(«диапазон значений столбца x_2 »)

среднее значение фактора x_1 =	26,88
среднее значение фактора x_2 =	1,26

5.2. Подставив найденные средние значения факторов x_1 и x_2 в уравнение нелинейной регрессии, получим точечный прогноз (y-прогнозное)

у-прогнозное = 146,9

6. Построим поверхность двухфакторной нелинейной регрессии.

6.1. Составим вспомогательную таблицу модельных значений при всех исходных значениях факторов (рис. 5.6).

x_2 \ x_1	36,49	18,55	14,00	83,93	15,52	8,92	10,78
0,6	201	127	103	334	111	71	83
1,0	190	116	91	323	100	59	72
1,8	172	98	74	305	83	42	55
2,1	167	93	69	300	77	36	49
1,6	176	102	78	309	86	46	58
1,0	190	116	91	323	100	59	72
0,7	198	124	100	331	108	68	80

Рис. 2.10

6.2. В верхнюю левую ячейку введем формулу и автоматически заполним всю таблицу (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=-17,337145247768+42,6868016051168*КОРЕНЬ(«левая ячейка строки значений фактора x_1»)-50,8957451072794*(«верхняя ячейка столбца значений фактора x_2 »)

6.3. С помощью Мастера диаграмм строим поверхность двухфакторной нелинейной регрессии, предварительно выделив вспомогательную таблицу (рис. 2.7).

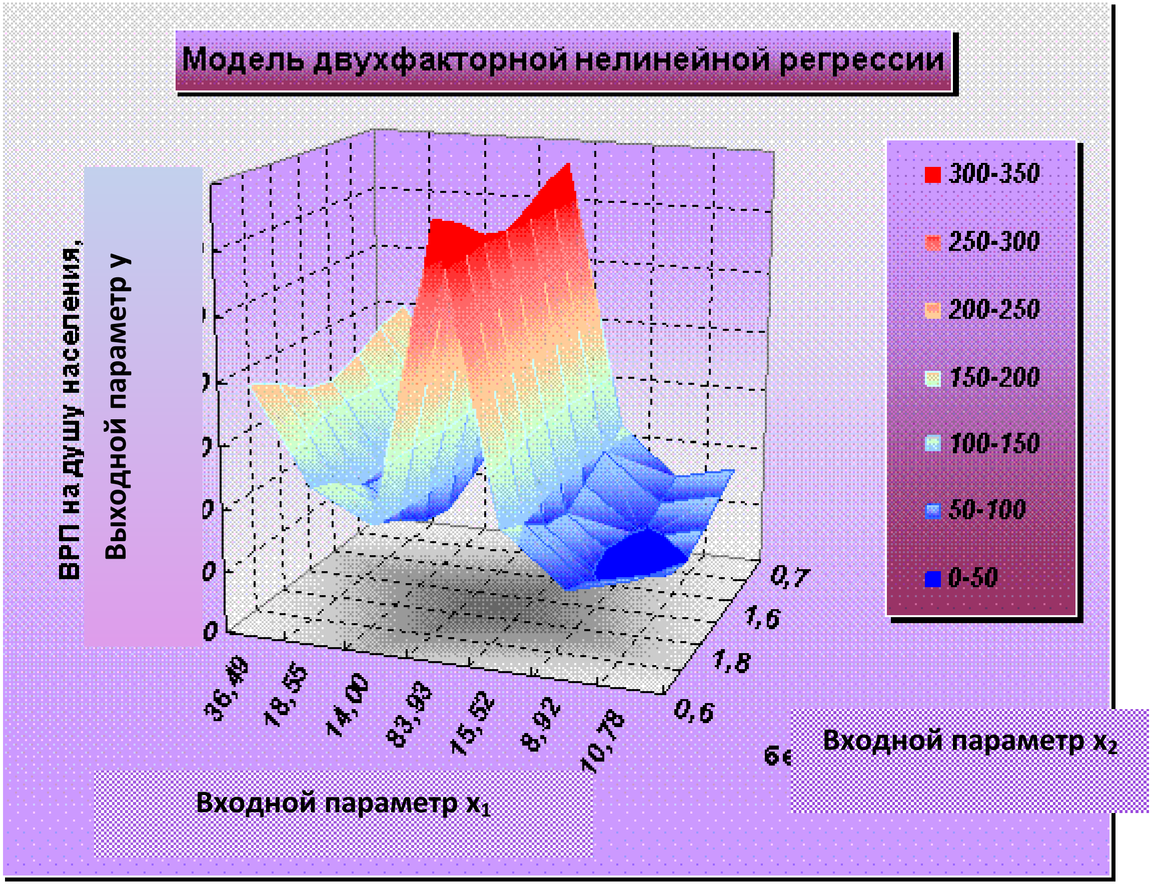

Рис. 2.11

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какими приемами можно свести модель нелинейной регрессии (нелинейной по объясняющим переменным, но линейной по параметрам и нелинейной внутренне линейной по параметрам) к модели линейной регрессии?

2. Можно ли графически представить трехфакторную нелинейную регрессионную модель? Как это сделать?

3. Сколько будет содержать алгебраических уравнений система нормальных уравнений для трехфакторной нелинейной регрессионной модели, относящейся к классу линейных моделей?

4. Как строится вспомогательная таблица для построения поверхности с помощью Мастера диаграмм?

5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции многих переменных.

6. Можно ли применять метод наименьших квадратов к нелинейной регрессионной модели, не сводя ее к линейной?

7. Приведите примеры нелинейных регрессионных моделей внутренне линейных по параметрам. Какие линеаризирующие преобразования к ним необходимо применять?

8. Что такое поверхность (плоскость) регрессии?

Варианты индивидуальных заданий

Данные зависимости выходного параметра y системы управления объектом от входных параметров x_1 и x_2, выбираются из таблиц вариантов «Варианты 1» и «Варианты 2», соответственно для 1-й и 2-й групп студентов. Номер варианта совпадает с номером в списке группы.

Вид двухфакторной нелинейной регрессионной модели выбирается по номеру варианта (также соответствующему номеру из списка в группе) из ниже приведенного списка:

1. $y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 \sqrt{x_2} + \varepsilon$;

2. $y = a_0 + \dfrac{a_1}{x_1} + a_2 \sqrt{x_2} + \varepsilon$;

3. $y = a_0 + a_1 \ln x_1 + \dfrac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon$;

4. $y = a_0 + a_1 e^{x_1} + a_2 \ln x_2 + \varepsilon$;

5. $y = a_0 + \dfrac{a_1}{\ln x_1} + a_2 \ln x_2 + \varepsilon$;

6. $y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot \dfrac{1}{x_2^{a_2}} \cdot \varepsilon$;

7. $y = \dfrac{a_0}{\left(\sqrt{x_1}\right)^{a_1}} \cdot x_2^{a_2} \cdot \varepsilon$;

8. $y = a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \varepsilon$;

9. $$y = \frac{1}{a_0 + a_1\sqrt{x_1} + a_2 \ln x_2 + \varepsilon};$$

10. $$y = \frac{4}{a_0 + a_1\sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2} + \varepsilon};$$

11. $$y = \frac{1}{a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \varepsilon};$$

12. $$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1^2} + a_2 x_2^2 + \varepsilon;$$

13. $$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2 + \varepsilon};$$

14. $$y = \frac{1}{a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 x_2^2 + \varepsilon};$$

15. $$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon;$$

16. $$y = a_0 + a_1 \ln x_1 + \frac{a_2}{x_2^2} + \varepsilon;$$

17. $$y = a_0 + \frac{a_1}{\ln x_1} + \frac{a_2}{x_2^2} + \varepsilon;$$

18. $$y = a_0 + a_1 x_1^3 + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon;$$

19. $$y = a_0 + \frac{a_1}{\ln x_1} + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon;$$

20. $y = a_0 + \dfrac{a_1}{\ln x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \varepsilon$;

21. $y = a_0 + \dfrac{a_1}{\sqrt{x_1}} + \dfrac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon$;

22. $y = a_0 + \dfrac{a_1}{\ln x_1} + \dfrac{a_2}{\ln x_2} + \varepsilon$;

23. $y = a_0 + a_1 e^{x_1} + a_2 \sqrt{x_2} + \varepsilon$;

24. $y = a_0 + a_1 e^{x_1} + \dfrac{a_2}{\sqrt{x_2}} + \varepsilon$;

25. $y = a_0 + a_1 e^{x_1} + \dfrac{a_2}{\ln x_2} + \varepsilon$;

26. $y = a_0 + a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \varepsilon$;

27. $y = a_0 \cdot x_1^{a_1/2} \cdot x_2^{a_2/3} \cdot \varepsilon$.

Рекомендуемый библиографический список

1. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
2. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.

5. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
6. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

Регрессионные модели с фиктивными объясняющими переменными

Рассматриваемые вопросы:

- Построение регрессионной модели с фиктивными объясняющими переменными.
- Идентификация модели.
- Мультиколлинеарность факторов.
- Автокорреляция случайной составляющей.

Цель:

1. Научиться строить модель с фиктивными объясняющими переменными, описывающую техническую систему и производить ее идентификацию.
2. Научиться проверять регрессионные модели на наличие: мультиколлинеарности факторов и автокорреляции случайной составляющей.

Форма отчетности.

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Замечание. Ячейка, содержащая формулу, будет отмечена серым цветом.

Задача 3.1.

Имеются данные зависимости выходного параметра измерительного прибора от его типа, класса точности и входной величины (рис. 3.1).

№ пп	Тип прибора	Класс точности	Входной параметр x	Выходной параметр y
1	2	3	5	4
1	Интегрирующий	1	6,1	9,12
2	Компенсационный	2	6,3	8,09
3	Интегрирующий	3	5	7,48
4	Интегрирующий	3	4,9	8,47
5	Компенсационный	1	5,4	10,87
6	Компенсационный	2	6,2	10,74
7	Интегрирующий	1	6,7	10,08
8	Компенсационный	3	4,3	6,82
9	Компенсационный	3	4,2	6,97
10	Интегрирующий	2	7,5	12,51
11	Интегрирующий	3	6,3	9,67
12	Интегрирующий	2	5,2	8,98
13	Компенсационный	2	9,1	12,63
14	Компенсационный	1	18,6	30,27
15	Интегрирующий	1	14,3	21,23

Рис. 3.12

Необходимо:

1) определить фиктивные переменные и вид модели с переменной структурой;

2) произвести идентификацию модели;

3) рассчитать общую, факторную и остаточную дисперсии;

4) вычислить коэффициент детерминации;

5) вычислить стандартную ошибку регрессии;

6) вычислить стандартные ошибки параметров регрессии;

7) проверить общее качество модели при уровне значимости, равном 0,05;

8) проверить существенность влияния фактора «тип прибора» на величину выходного параметра;

9) проверить модель на наличие мультиколлинеарности факторов;

10) проверить модель на наличие автокорреляции случайной составляющей.

Алгоритм решения задачи

1. Определим фиктивные переменные и вид модели с переменной структурой.

1.1. В качестве фиктивных переменных будем использовать булевы переменные.

1.2. Качественный фактор «тип прибора» имеет $k = 2$ градации (интегрирующий и компенсационный), следовательно, вводим $k - 1 = 2 - 1 = 1$ фиктивную переменную z_{i1}, принимающую значение нуль, если данный признак отсутствует, и единицу, если он присутствует.

$$z_{i1} = \begin{cases} 1, & \text{если тип прибора компенсационный;} \\ 0, & \text{если тип прибора интегрирующий.} \end{cases}$$

1.3. Качественный фактор «класс точности» имеет $k = 3$ градации (1,2,3), следовательно, вводим $k - 1 = 3 - 1 = 2$ фиктивные переменные z_{i2}, z_{i3}.

$$z_{i2} = \begin{cases} 1, & \text{если прибор 1} - \text{го класса точности;} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

$$z_{i3} = \begin{cases} 1, & \text{если прибор 2} - \text{го класса точности;} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

1.4. Записываем регрессионную модель с учетом качественного признака и без его учета.

Пусть переменная x_1 – входной параметр, тогда регрессионная модель для выходного параметра *y* будет иметь вид

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \varepsilon;$$

регрессионная модель для заработной платы с переменной структурой:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + \varepsilon.$$

2. Произведем идентификацию модели (найдем оценки параметров регрессионной модели).

2.1. Представим таблицу исходных данных для удобства расчетов следующим образом (рис. 3.2).

№ пп	Выходной параметр (y)	Входной параметр (x_1)	Тип прибора (z_1)	Первый класс точности (z_2)	Второй класс точности (z_3)
1	2	3	4	5	6
1	9,12	6,1	0	1	0
2	8,09	6,3	1	0	1
3	7,48	5	0	0	0
4	8,47	4,9	0	0	0
5	10,87	5,4	1	1	0
6	10,74	6,2	1	0	1
7	10,08	6.7	0	1	0
8	6,82	4,3	1	0	0
9	6,97	4,2	1	0	0
10	12,51	7,5	0	0	1
11	9,67	6,3	0	0	0
12	8,98	5,2	0	0	1
13	12,63	9,1	1	0	1
14	30,27	18,6	1	1	0
15	21,23	14,3	0	1	0

Рис. 3.13

2.2. Представим регрессионную модель с переменной структурой в матричной форме

$$Y = Xa + e.$$

2.2.1. Составим матрицы Y, X, a по таблице исходных данных (рис. 3.3).

Y=

9,12
8,09
7,48
8,47
10,87
10,74
10,08
6,82
6,97
12,51
9,67
8,98
12,63
30,27
21,23

X=

1	6,1	0	1	0
1	6,3	1	0	1
1	5	0	0	0
1	4,9	0	0	0
1	5,4	1	1	0
1	6,2	1	0	1
1	6,7	0	1	0
1	4,3	1	0	0
1	4,2	1	0	0
1	7,5	0	0	1
1	6,3	0	0	0
1	5,2	0	0	1
1	9,1	1	0	1
1	18,6	1	1	0
1	14,3	0	1	0

a=

a_0
a_1
c_1
c_2
c_3

Рис. 3.14

2.3. Вектор-столбец a оценок параметров модели найдем по формуле

$$\boldsymbol{a} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y.$$

2.3.1. Сначала проверим выполнимость предпосылки множественного регрессионного анализа: $\det\left(X^T X\right) \neq 0$.

2.3.2. Находим матрицу X^T, транспонированную к матрице X (рис. 3.4).

$\mathbf{X}^T$=

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6,1	6,3	5	4,9	5,4	6,2	6,7	4,3	4,2	7,5	6,3	5,2	9,1	18,6	14,3
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0

Рис. 3.15

2.3.2. Находим матрицу $\left(X^T X\right)$ и вычисляем ее определитель (рис. 3.5).

$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$=

15	110,1	7	5	5
110,1	1030,8	54,1	51,1	34,3
7	54,1	7	2	3
5	51,1	2	5	0
5	34,3	3	0	5

$\det(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$= 66765,4

Рис. 3.16

Видим, что $\det\left(X^T X\right) \neq 0$, следовательно, вектор-столбец оценок параметров модели существует.

2.3.3. Находим матрицу $\left(X^T X\right)^{-1}$ (рис. 6.6).

$(X^TX)^{-1}=$	0,3861	-0,0309	-0,0836	-0,0369	-0,1239
	-0,0309	0,0067	-0,006	-0,0356	-0,0117
	-0,0836	-0,006	0,2831	0,0316	-0,0451
	-0,0369	-0,0356	0,0316	0,5879	0,262
	-0,1239	-0,0117	-0,0451	0,262	0,4316

Рис. **Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует.**.17

2.3.4. Находим матрицу $\left(X^T X\right)^{-1} X^T$ (рис. 6.7).

$(X^TX)^{-1}X^T=$	0,161	-0,02	0,232	0,235	0,099	-0,01	0,142	0,17	0,173	0,03	0,191	0,101	-0,1	-0,31	-0,09
	-0,03	-0,01	0,003	0,002	-0,04	-0,01	-0,02	-0,01	-0,01	0,008	0,012	-0,01	0,013	0,053	0,03
	-0,09	0,117	-0,11	-0,11	0,199	0,117	-0,09	0,174	0,174	-0,17	-0,12	-0,16	0,1	0,12	-0,14
	0,334	0,033	-0,21	-0,21	0,391	0,036	0,313	-0,16	-0,15	-0,04	-0,26	0,04	-0,07	-0,08	0,042
	0,066	0,189	-0,18	-0,18	0,03	0,19	0,059	-0,22	-0,22	0,22	-0,2	0,247	0,156	-0,13	-0,03

Рис. **Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует.**.18

2.3.5. Находим матрицу $a = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$ (рис. 6.8).

$a=(X^TX)^{-1}X^TY=$	0,3055	$a_0=$	0,3055
	1,5017	$a_1=$	1,5017
	0,3951	$c_1=$	0,3951
	0,5029	$c_2=$	0,5029
	-0,2543	$c_3=$	-0,2543

Рис. **Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует.**.19

Замечание. Для выделения нужного числа из матрицы, используем функцию ИНДЕКС в MS Excel.

Замечание. Найденные значения параметров модели a_0, a_1, a_2, a_3 есть оценки данных параметров, которые обозначаем с крышкой.

Вывод. Четырехфакторное уравнение регрессии с переменной структурой имеет вид

$$y = 0{,}30546 + 1{,}50172x_1 + 0{,}39514x_2 + 0{,}50293x_3 - 0{,}2543x_4.$$

3. Для нахождения общей, факторной и остаточной дисперсии дополним таблицу исходных данных еще четырьмя столбцами: у-оценка, общей, факторной и остаточной суммами квадратов (рис. 3.9).

№ пп	Выходной параметр (у)	Входной параметр (x_1)	Тип прибора (z_1)	Первый класс точности (z_2)	Второй класс точности (z_3)	у-оценка	Общая сумма квадратов	Факторная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,12	6,1	0	1	0	9,9689	6,1273	2,6454	0,7206
2	8,09	6,3	1	0	1	9,9071	12,287	2,8502	3,3018
3	7,48	5	0	0	0	7,814	16,936	14,298	0,1110
4	8,47	4,9	0	0	0	7,6639	9,7677	15,456	0,6498
5	10,87	5,4	1	1	0	9,3128	0,5261	5,2099	2,4249
6	10,74	6,2	1	0	1	9,7569	0,7316	3,3798	0,9664
7	10,08	6,7	0	1	0	10,87	2,2962	0,5263	0,6239
8	6,82	4,3	1	0	0	7,158	22,804	19,69	0,1142
9	6,97	4,2	1	0	0	7,0078	21,394	21,045	0,0014
10	12,51	7,5	0	0	1	11,314	0,8366	0,0791	1,4304
11	9,67	6,3	0	0	0	9,7663	3,7069	3,3454	0,0093
12	8,98	5,2	0	0	1	7,8601	6,84	13,952	1,2543
13	12,63	9,1	1	0	1	14.112	1.0705	6.3331	2.196
14	30,27	18,6	1	1	0	29,135	348,74	307,66	1,2871
15	21,23	14,3	0	1	0	22,283	92,827	114,23	1,1087
							546.89	530.69	16.201

Рис. 3.20

3.1. Находим среднее значение y, используя функцию СРЗНАЧ.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

у-среднее = 11,6

3.2. В столбец «у-оценка» вставляем формулу:

=«фиксированная ячейка оценки параметра a_0»+«фиксированная ячейка оценки параметра a_1»*x1+«фиксированная ячейка оценки параметра c_1»*z1+«фиксированная ячейка оценки параметра c_2»*z2+«фиксированная ячейка оценки параметра c_3»*z3

3.3. В столбец «общая сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(у – «у-среднее»;2)

3.4. В столбец «факторная сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(«y-оценка» - «y-среднее»;2)

3.5. В столбец «остаточная сумма квадратов» вставляем формулу:

=СТЕПЕНЬ(y – «y-оценка»;2)

3.6. Суммированием по трем столбцам (8, 9, 10) находим общую, факторную и остаточную суммы квадратов соответственно. Используем функцию СУММ.

3.7. Определяем число степеней свободы общей, факторной и остаточной сумм квадратов соответственно.

Число степеней свободы общей суммы квадратов:

$$n-1=15-1=14.$$

Число степеней свободы факторной суммы квадратов:

$$k=4.$$

Число степеней свободы остаточной суммы квадратов:

$$n-k-1=15-4-1=10.$$

3.7. Дисперсии находим делением соответствующих сумм квадратов на соответствующие им числа степеней свободы.

общая дисперсия =	39,06
факторная дисперсия =	132,7
остаточная дисперсия =	1,62

4. Вычисляем коэффициент детерминации по формуле:

=1 – «остаточная сумма квадратов»/«общая сумма квадратов»

коэффициент детерминации = 0,97

5. Вычисляем стандартную ошибку регрессии по формуле:

=КОРЕНЬ(1/(n-k-1)*«остаточная сумма квадратов»)

стандартная ошибка регрессии = 1,273

6. Вычислим стандартные ошибки параметров регрессии по формуле:

=КОРЕНЬ(1/(n-k-1)*«остаточная сумма квадратов»*ИНДЕКС(«диапазон матрицы $\left(X^T X\right)^{-1}$ »; i+1; i+1))

i - номер коэффициента регрессии.

стандартная ошибка a_0 =	0,791
стандартная ошибка a_1 =	0,104
стандартная ошибка c_1 =	0,677
стандартная ошибка c_2 =	0,976
стандартная ошибка c_3 =	0,836

7. Проверим общее качество модели.

7.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : D_{\text{фактор}} = D_{\text{остат}}$,

$H_1 : D_{\text{фактор}} \neq D_{\text{остат}}$.

7.2. Строим статистику:

F =«факторная дисперсия»/«остаточная дисперсия»

F = 81,89

7.3. Находим квантиль распределения Фишера-Снедекора с $k = 4$ и $n - k - 1 = 15 - 4 - 1 = 10$ степенями свободы при уровне значимости, равном 0,05. Используем функцию FРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

=FРАСПОБР(«уровень значимости»;k;n-k-1)

F-квантиль = 3,478

7.4. Делаем вывод о принятии гипотезы (рис. 3.10):

=ЕСЛИ(F>=«F-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, уравнение множественной линейной регрессии значимо в целом.";"принимается, следовательно, уравнение множественной линейной регрессии не значимо в целом.")

Гипотеза H_0: $D_{факторн} = D_{остат}$	отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, уравнение множественной линейной регрессии значимо в целом.

Рис. 3.21

8. Проверим существенность влияния фактора «тип прибора» на выходной параметр.

8.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : c_1 = 0$,
$H_1 : c_1 \neq 0$.

8.2. Строим статистику:

t_1 =ABS(«параметр регрессии c_1»/«стандартная ошибка c_1»)

t_1 = 0,583

8.3. Находим квантиль распределения Стьюдента с $n-k-1=15-4-1=10$ степенями свободы при уровне значимости равном 0,05. Используем функцию СТЬЮДРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

=СТЬЮДРАСПОБР(«уровень значимости»;n-k-1)

t-квантиль = 2,228

8.4. Делаем вывод о принятии гипотезы (рис. 3.11):

=ЕСЛИ(t_1>«t-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, коэффициент уравнения множественной линейной регрессии a_1 статистически значим, то есть фактор (пол) оказывает существенное влияние на модель";"принимается, это означает, что фактор z1 не значим, не связан линейно с зависимой переменной y и его можно исключить из набора факторов. Его влияние на выходной параметр несущественно.")

Гипотеза H_0: $c_1 = 0$ принимается, это означает, что фактор z1 не значим, не связан линейно с зависимой переменной y и его можно исключить из набора факторов. Его влияние на зар выходнои параметр несущественно.

Рис. 3.22

9. Проверим модель на наличие мультиколлинеарности факторов.

9.1. Составим корреляционную матрицу факторов x_1, z_1, z_2, z_3 вида:

$$R = \begin{pmatrix} r(x_1, x_1) & r(x_1, z_1) & r(x_1, z_2) & r(x_1, z_3) \\ r(z_1, x_1) & r(z_1, z_1) & r(z_1, z_2) & r(z_1, z_3) \\ r(z_2, x_1) & r(z_2, z_1) & r(z_2, z_2) & r(z_2, z_3) \\ r(z_3, x_1) & r(z_3, z_1) & r(z_3, z_2) & r(z_3, z_3) \end{pmatrix}$$

9.2. Вызываем надстройку Анализ данных…, выбираем Инструменты анализа (Корреляция) и заполняем форму.

Вызов Анализ данных...: MS Excel – Сервис – Анализ данных…

Если в меню Сервис нет команды Анализ данных…, значит, надстройка не подключена. Подключение выполняется в окне Надстройки установкой флажка перед опцией Пакет анализа, вызвать которое можно командой MS Excel – Сервис (Данные) – Надстройки.

Входной интервал: выделяем диапазон значений переменных x_1, z_1, z_2, z_3 вместе с номерами столбцов;

Группирование: по столбцам;

Метка в первой строке – поставить;

Выходной интервал: указать ячейку в свободной области листа рабочей книги, куда будет размещен массив данных (данная ячейка является крайней левой верхней ячейкой получаемого массива);

нажать ОК.

Результатом работы этой надстройки будет корреляционная матрица следующего вида

	3	4	5	6
3	1			
4	0,0943	1		
5	0,5286	-0,0945	1	
6	-0,0881	0,189	-0,5	1

9.3. Дополним полученную матрицу элементами (рис. 3.12), отобразив симметрично, относительно главной диагонали, заполненные ячейки с коэффициентами корреляции. Полученная матрица и является корреляционной матрицей факторов x_1, z_1, z_2, z_3.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}09435 & 0{,}5286 & -0{,}0881 \\ 0{,}09435 & 1 & -0{,}09449 & 0{,}18898 \\ 0{,}5286 & -0{,}09449 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}0881 & 0{,}18898 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.23

9.4. Вычислим определитель корреляционной матрицы, используя функцию МОПРЕД.

$R =$ 0,482

Вывод. Мультиколлинеарность факторов наблюдается, но очень слабая.

Замечание. О наличие мультиколлинеарности факторов, можно судить по тому, что коэффициент детерминации $(R^2 = 0{,}97)$ достаточно высок, а некоторые коэффициенты регрессии не значимы (z_1).

10. Проверим модель на наличие автокорреляции случайной составляющей.

10.1. Дополним расчетную таблицу еще тремя столбцами: «Отклонение», «Квадрат отклонения», «Квадрат разности отклонений» (рис. 3.13).

10.2. В верхнюю ячейку столбца 11 введем формулу и автоматически заполним столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=«верхняя ячейка столбца 2» - «верхняя ячейка столбца 7»

10.3. В верхнюю ячейку столбца 12 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(«верхняя ячейка столбца 11»;2)

10.4. Во вторую сверху ячейку столбца 13 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения):

=СТЕПЕНЬ(«вторая сверху ячейка столбца 11» - «верхняя ячейка столбца 11»;2)

10.5. Просуммируем значения столбцов 12, 13 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом с соответствующими данными.

№ пп	Выходной параметр (y)	Входной параметр (x_1)	Тип прибора (z_1)	Первый класс точности (z_2)	Второй класс точности (z_3)	y-оценка	Общая сумма квадратов	Факторная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов	Отклонение	Квадрат отклонения	Квадрат разности отклонений
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	9,12	6,1	0	1	0	9,9689	6,1273	2,6454	0,7206	-0,85	0,721	
2	8,09	6,3	1	0	1	9,9071	12,287	2,8502	3,3018	-1,82	3,302	0,937
3	7,48	5	0	0	0	7,814	16,936	14,298	0,1110	-0,33	0,112	2,199
4	8,47	4,9	0	0	0	7,6639	9,7677	15,456	0,6498	0,806	0,65	1,3
5	10,87	5,4	1	1	0	9,3128	0,5261	5,2099	2,4249	1,557	2,425	0,564
6	10,74	6,2	1	0	1	9,7569	0,7316	3,3798	0,9664	0,983	0,966	0,33
7	10,08	6,7	0	1	0	10,87	2,2962	0,5263	0,6239	-0.79	0,624	3.143
8	6,82	4,3	1	0	0	7,158	22,804	19,69	0,1142	-0,34	0,114	0,204
9	6,97	4,2	1	0	0	7,0078	21,394	21,045	0,0014	-0,04	0,001	0,09
10	12,51	7,5	0	0	1	11,314	0,8366	0,0791	1,4304	1,196	1,43	1,522
11	9,67	6,3	0	0	0	9,7663	3,7069	3,3454	0,0093	-0,1	0,009	1,67
12	8,98	5,2	0	0	1	7,8601	6,84	13,952	1,2543	1,12	1,254	1,479
13	12,63	9,1	1	0	1	14.112	1.0705	6.3331	2.196	-1,48	2,196	6,77
14	30,27	18,6	1	1	0	29,135	348,74	307,66	1,2871	1,135	1,287	6,846
15	21,23	14,3	0	1	0	22,283	92,827	114,23	1,1087	-1,05	1.109	4.785
							546,9	530,7	16,2		16,2	31,84

Рис. 3.24

10.6. Проверяем гипотезы:

$$H_0 : r(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) = 0,$$
$$H_1 : r(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) < 0,$$
$$H_2 : r(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) > 0.$$

10.7. Составим критериальную статистику Дарбина – Уотсона по формуле

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}.$$

=«сумма столбца 13»/«сумма столбца 12»

DW= 1,965

10.8. Определяем пороговые значения для критерия Дарбина-Уотсона по статистическим таблицам при $n = 15$ и $k = 4$:

Значения критерия Дарбина-Уотсона

В таблице приведены значения критерия Дарбина-Уотсона для уровня значимости 5% (m - число независимых переменных уравнения регрессии).

Число наблюдений (n)	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,47
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

$d_1 =$ 0,685
$d_2 =$ 1,977

10.9. Делаем вывод о принятии гипотезы (рис. 3.14):

=ЕСЛИ(DW<d_1;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_2, следовательно, случайная составляющая положительно автокоррелированна";ЕСЛИ(DW<d_2;"не принимается, не отклоняется, зона неопределенности (критерий не применим)";ЕСЛИ(DW<4-d_2;"принимается, то есть автокорреляция случайной составляющей отсутствует";ЕСЛИ(DW<4-d_1;"не принимается, не отклоняется, зона неопределенности (критерий не применим)";"отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1, следовательно, случайные составляющие отрицательно автокоррелированны"))))

Гипотеза $H_0 : r(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) = 0$ | не принимается, не отклоняется, зона неопределенности (критерий не применим).

Рис. 3.25

Вывод. О наличии или отсутствии автокорреляции случайной составляющей по критерию Дарбина – Уотсона сказать нельзя. Необходимо применять другие критерии.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что подразумевается под фиктивной переменной применительно к регрессионной модели с переменной структурой? Что понимается под переменной структурой в регрессионных моделях?

2.Фиктивная переменная является объясняющей переменной или объясненной?

3. Перечислите все надстройки MS Excel, которые применяются для обработки данных статистическими методами.

4. Какой фактор описывает фиктивная переменная, если исходить из критерия его физической природы?

5. При составлении матрицы коэффициентов в матричной форме регрессионной модели с переменной структурой записывается столбец из единиц. Какую переменную он характеризует?

6. К каким последствиям приведет мультиколлинеарность факторов? Какие существуют способы ее устранения?

7. Каким образом построена корреляционная матрица факторов? Где ее можно использовать при анализе эконометрической модели?

8. При проверке какой гипотезы, применительно к технической модели, используется критерий Дарбина – Уотсона?

9. Что означает зона неопределенности при применении критерия Дарбина – Уотсона?

10. Что такое автокорреляция случайной составляющей?

Варианты индивидуальных заданий

Индивидуальное задание создаем себе самостоятельно.

1. Составляем таблицу исходных данных.

Данные зависимости параметра *У* от параметра *Х*, выбираются из таблиц вариантов «Варианты 1» и «Варианты 2», соответственно для 1-й и 2-й групп студентов. Номер варианта совпадает с номером в списке группы. В качестве параметра *Х* - данные из столбца «Входной параметр X_2», качестве параметра *У* - «Выходной параметр *У*».

Количество качественных факторов, влияющих на объясненную переменную $У$, должно быть не менее двух.

2. Задания берутся из условия разобранного примера данной лабораторной работы (при этом необходимо исходить из тематики Рассмотренной задачи).

Рекомендуемый библиографический список

1. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
2. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
5. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
6. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Анализ качества и прогнозирование модели временных рядов

Рассматриваемые вопросы:

- Построение модели временных рядов.
- выделение тенденции (тренда) и сезонных колебаний.
- Анализ качества модели временных рядов.
- Прогнозирование.

Цель:

1. Научиться строить модели временных рядов.
2. Научиться по созданным моделям осуществлять точечный прогноз и графически реализовывать построенную модель.

Форма отчетности.

Представить преподавателю подробное решение задачи с выводами в виде файла в формате doc. Оформление должно быть аналогично разобранному примеру. Письменно ответить на контрольные вопросы после решения задачи. Вариант работы составляется на основе данных из прилагаемых к занятию таблиц.

Задача 4.1.

Даны результаты измерения фактора риска сбоя системы управления за три года поквартально (рис. 4.1).

Год	2010				2011				2012			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Фактор риска	16,8	16,2	14,7	15,8	15,8	15,4	16,3	15,8	17,9	18,5	21,2	19,3

Рис. 4.26

Необходимо:

1) произвести сглаживание ряда (устранить циклические колебания из временного ряда);

2) определить вид модели временного ряда (аддитивная или мультипликативная);

3) выделить и устранить сезонные колебания из временного ряда;

4) определить вид функции тренда;

5) оценить параметры тренда и устранить его из временного ряда;

6) произвести анализ качества построенной модели временного ряда;

7) осуществить прогноз фактора риска на первый квартал 2013 года;

8) дать графическую интерпретацию построенной модели временного ряда.

Алгоритм решения задачи

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних
1	2	3	4	5
2010	I	1	16,8	
	II	2	16,2	15,9
	III	3	14,7	15,567
	IV	4	15,8	15,433
2011	I	5	15,8	15,667
	II	6	15,4	15,833
	III	7	16,3	15,833
	IV	8	15,8	16,667
2012	I	9	17,9	17,4
	II	10	18,5	19,2
	III	11	21,2	19,667
	IV	12	19,3	

Рис.4.2

1. Производим сглаживание временного ряда.

1.1. Представим таблицу исходных данных для удобства расчетов следующим образом и дополним ее столбцом «Ряд скользящих средних» (рис. 4.2).

1.2. В качестве скользящей средней выберем простое среднее арифметическое по трем последовательным уровням временного ряда. Введем формулу во вторую ячейку столбца 5 и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=СРЗНАЧ(«диапазон ячеек по трем уровням ряда»)

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Математические

Замечание. В нашем случае это первые три ячейки столбца 4. Полученный ряд скользящих средних представляет временной ряд с удаленной циклической составляющей.

2. Определяем вид модели временного ряда (аддитивная или мультипликативная).

2.1. Дополним расчетную таблицу столбцом «Циклическая составляющая» (рис. 4.3).

2.2. Во вторую ячейку столбца 6 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения), выделяя, тем самым циклическую составляющую.

=«вторая ячейка столбца 4» - «вторая ячейка столбца 5»

Вывод. Так как циклическая составляющая имеет периодический характер изменения своего значения, то выбираем аддитивную модель временного ряда.

3. Выделим и устраним сезонные колебания из временного ряда.

Замечание. В нашей задаче сезонность будем рассматривать годовую и понимать как годовую специфику изменения фактора риска..

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних	Циклическая составляющая
1	2	3	4	5	6
2010	I	1	16,8		
	II	2	16,2	15,9	0,3
	III	3	14,7	15,567	-0,867
	IV	4	15,8	15,433	0,3667
2011	I	5	15,8	15,667	0,1333
	II	6	15,4	15,833	-0,433
	III	7	16,3	15,833	0,4667
	IV	8	15,8	16,667	-0,867
2012	I	9	17,9	17,4	0,5
	II	10	18,5	19,2	0,7
	III	11	21,2	19,667	1,5333
	IV	12	19,3		

Рис. 4.27

3.1. Дополним расчетную таблицу столбцом «Абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)» (рис. 4.4).

3.2. Вычисляем абсолютное отклонение по каждому году, усредняя циклическую составляющую, то есть получаем оценку сезонной составляющей по соответствующему году. Для этого желательно объединить ячейки в столбце 7 по годам и ввести формулы. При больших расчетных таблицах можно использовать автоматическое заполнение всего столбца (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения)

=СРЗНАЧ(«диапазон ячеек по уровням циклической составляющей за 2010 год»)

=СРЗНАЧ(«диапазон ячеек по уровням циклической составляющей за 2011 год»)

=СРЗНАЧ(«диапазон ячеек по уровням циклической составляющей за 2012 год»)

3.3. Проверим выполнимость требований к сезонным составляющим для аддитивной модели: сумма всех сезонных компонент должна быть равна нулю. Просуммируем значения столбца 7 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом.

=СУММ(«диапазон ячеек столбца 7»)

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних	Циклическая составляющая	Абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Исправленное абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Ряд с удаленной сезонной компонентой (y)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1994	I	1	16,8			-0,06667	-0,134259	16,934
	II	2	16,2	15,9	0,3			16,334
	III	3	14,7	15,567	-0,867			14,834
	IV	4	15,8	15,433	0,3667			15,934
1995	I	5	15,8	15,667	0,1333	-0,175	-0,242593	16,043
	II	6	15,4	15,833	-0,433			15,643
	III	7	16,3	15,833	0,4667			16,543
	IV	8	15,8	16,667	-0,867			16,043
1996	I	9	17,9	17,4	0,5	0,444444	0,3768519	17,523
	II	10	18,5	19,2	-0,7			18,123
	III	11	21,2	19,667	1,5333			20,823

	IV	12	19,3					18,923
Сумма						0,202778	0	

Рис. 4.28

Вывод. Так как требование к сезонным составляющим не выполняется, то рассматривать будем исправленное абсолютное отклонение по каждому году.

3.4. Для этого дополним расчетную таблицу еще одним столбцом «Исправленное абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)» (рис. 4.4) и введем соответствующие формулы с последующим вычислением сумм значений столбцов (для проверки).

=«первая ячейка столбца 7» - СРЗНАЧ(«диапазон ячеек столбца 7»)

=«вторая ячейка столбца 7» - СРЗНАЧ(«диапазон ячеек столбца 7»)

=«третья ячейка столбца 7» - СРЗНАЧ(«диапазон ячеек столбца 7»)

Таким образом, в столбце 8 получили оценки сезонных составляющих с учетом требований к ним.

3.5. Дополним расчетную таблицу столбцом «Ряд с удаленной сезонной компонентой (У)» (рис. 4.4). Удалять сезонную составляющую будем, вычитая из уровней исходного временного ряда соответствующую оценку сезонной составляющей.

3.6. Будем заполнять столбец 9 по годам. Введем в первую ячейку столбца 9 за 2010 год формулу и автоматически заполним ячейки этого столбца по 2010 году, используя при этом абсолютный адрес на ячейку с сезонной составляющей.

=«первая ячейка столбца 4 за 1994 год» - «первая ячейка столбца 8 с абсолютным адресом»

3.7. Введем в первую ячейку столбца 9 за 2011 год формулу и автоматически заполним ячейки этого столбца по 2011 году, при этом, используя абсолютный адрес на ячейку с сезонной составляющей.
=«первая ячейка столбца 4 за 2011 год» - «вторая ячейка столбца 8 с абсолютным адресом»

3.8. Введем в первую ячейку столбца 9 за 2012 год формулу и автоматически заполним ячейки этого столбца по 2012 году, используя при этом абсолютный адрес на ячейку с сезонной составляющей.

=«первая ячейка столбца 4 за 2012 год» - «третья ячейка столбца 8 с абсолютным адресом»

4. Определим вид функции тренда.

4.1. Дополним расчетную таблицу столбцами: «Конечные разности первого порядка», «Конечные разности второго порядка» и «Темпы прироста» (рис. 4.5).

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних	Циклическая составляющая	Абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Исправленное абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Ряд с удаленной сезонной компонентой (y)	Конечные разности первого порядка	Конечные разности второго порядка	Темпы прироста
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2012	I	1	16,8			-0,067	-0,134259	16,34			
	II	2	16,2	15,9	0,3			16,334	-0,6		-0,035
	III	3	14,7	15,567	-0,867			14,834	-1,5	-0,9	-0,092
	IV	4	15,8	15,433	0,3667			15,334	1,1	2,6	0,0742
2011	I	5	15,8	15,667	0,1333	-0,175	-0,242593	16,043	0,1083	-0,992	0,0068
	II	6	15,4	15,833	-0,433			15,43	-0,4	-0,508	-0,025
	III	7	16,3	15,833	0,4667			16,543	0,9	1,3	0,0575
	IV	8	15,8	16,667	-0.867			16,043	-0,5	-1,4	-0,03
2010	I	9	17,9	17,4	0,5	0,4444	0,376852	17,23	1,4806	1,9806	0,0923
	II	10	18,5	19,2	-0,7			18,123	0,6	-0,881	0,0342
	III	11	21,2	19,667	1,5333			20,823	2,7	2,1	0,149
	IV	12	19,3					18,923	-1,9	-4,6	-0,091
СуммА						0,2028	0				

Рис. 4.29

4.2. Для вычисления конечных разностей первого порядка введем формулу во вторую ячейку столбца 10 и автоматически заполним остальные ячейки этого столбца.

Замечание. Ввод формулы осуществляется во вторую ячейку, так как конечные разности первого порядка определяются по формуле

$$\Delta_t^1 = y_t - y_{t-1}.$$

=«первая ячейка столбца 9» - «вторая ячейка столбца 9»

4.3. Для вычисления конечных разностей второго порядка введем формулу в третью ячейку столбца 11 и автоматически заполним остальные ячейки этого столбца.

Замечание. Ввод формулы осуществляется в третью ячейку, так как конечные разности второго порядка определяются по формуле

$$\Delta_t^2 = \Delta_t^1 - \Delta_{t-1}^1.$$

=«вторая ячейка столбца 10» - «третья ячейка столбца 10»

4.4. Для вычисления темпов прироста введем формулу во вторую ячейку столбца 12 и автоматически заполним остальные ячейки этого столбца.

Замечание. Ввод формулы осуществляется во вторую ячейку, так как темпы прироста определяются по формуле

$$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}.$$

=(«первая ячейка столбца 9» - «вторая ячейка столбца 9»)/«первая ячейка столбца 9»

Вывод. Сравнивая столбцы 10 – 12 можно сказать, что темпы прироста наиболее постоянны, следовательно, тенденцию лучше выражать показательной регрессией

$$f(t) = a_0 a_1^t.$$

5. Оценим параметры тренда и устраним последний из временного ряда.

5.1. Произведем линеаризацию уравнения тренда, переписав предварительно его в виде

$$\ln y = \ln a_0 + x \ln a_1.$$

5.2. Произведем следующую замену:

$$\ln y = y^*,\ \ln a_0 = a_0^*,\ \ln a_1 = a_1^*.$$

5.3. Получили уравнение парной линейной регрессии, параметры которой нужно оценить:

$$y^* = a_0^* + a_1^* x.$$

5.4. Составим соответствующую систему нормальных уравнений для модели парной линейной регрессии, из которой найдем оценки параметров:

$$\begin{cases} a_0^* n + a_1^* \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^*, \\ a_0^* \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1^* \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^* x_i. \end{cases},$$

$$a_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^* z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}, \quad z_i = x_i - \overline{x}, \quad a_0^* = \overline{y}^* - a_1^* \overline{x}.$$

5.5. Используя равенства пункта 5.2, получаем оценку параметров исходного уравнения тренда:

$$a_1 = e^{a_1^*}, \quad a_0 = e^{a_0^*}.$$

5.6. Дополним расчетную таблицу еще тремя столбцами: «y^*», «Оценка тренда» и «Ряд остатков» (рис. 4,6).

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних	Циклическая составляющая	Абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Исправленное абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Ряд с удаленной сезонной компонентой (y)	Конечные разности первого порядка	Конечные разности второго порядка	Темпы прироста	y*	Оценка тренда	Ряд остатков
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
2012	I	1	16,8			-0,067	-0,134	16,34				2,829	15,256	1,544
	II	2	16,2	15,9	0,3			16,334	-0,6		-0,035	2,793	15,543	0,657
	III	3	14,7	15,56	-0,86			14,834	-1,5	-0,9	-0,092	2,697	15,836	-1,136
	IV	4	15,8	15,43	0,366			15,334	1,1	2,6	0,074	2,768	16,134	-0,334
2011	I	5	15,8	15,66	0,133	-0,175	-0,242	16,043	0,10	-0,99	0,006	2,775	16,439	-0,639
	II	6	15,4	15,83	-0,43			15,43	-0,4	-0,50	-0,025	2,750	16,748	-1,348
	III	7	16,3	15,83	0,466			16,543	0,9	1,3	0,057	2,806	17,064	-0,764
	IV	8	15,8	16,66	-0.86			16,043	-0,5	-1,4	-0,03	2,775	17,386	-1,586
2010	I	9	17,9	17,4	0,5	0,444	0,376	17,23	1,48	1,980	0,092	2,864	17,713	0,187
	II	10	18,5	19,2	-0,7			18,123	0,6	-0,88	0,034	2,897	18,047	0,453
	III	11	21,2	19,66	1,533			20,823	2,7	2,1	0,149	2,036	18,387	2,813
	IV	12	19,3					18,923	-1,9	-4,6	-0,091	2,940	18,734	0,566
Сумма						0,2028	0	203,7						

Рис. 4.30

5.7. В верхнюю ячейку столбца 13 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=LN(«верхняя ячейка столбца 9»)

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Математические

5.8. С помощью функции СУММ произведем суммирование значений столбца 9, а результат суммирования запишем под столбцом.

5.9. Вычислим средние значения y^* и x с помощью функции MS Excel СРЗНАЧ

=СРЗНАЧ(«диапазон значений столбца y^*»)

=СРЗНАЧ(«диапазон значений столбца 3»)

среднее значение y* =	2,828
среднее значение x =	6,50

5.10. Вычисляем оценки параметров a_1^*, a_0^*.

=СУММПРОИЗВ(«диапазон столбца 13»;«диапазон столбца 3» - «среднее значение x с абсолютным адресом»)/СУММПРОИЗВ((«диапазон столбца 3» - «среднее значение x с абсолютным адресом»);(«диапазон столбца 3» - «среднее значение x с абсолютным адресом»))

=«среднее значение y^*» - ((«оценка параметра a_1^*»)*(«среднее значение x»))

оценка параметра a_1* =	0,019
оценка параметра a_0* =	2,706

5.10. Вычисляем оценки параметров a_1, a_0, используя функцию EXP

=EXP(«оценка параметра a_1^*»)

=EXP(«оценка параметра a_0^*»)

оценка параметра a_1 =	1,019
оценка параметра a_0 =	14,97

5.11. Записываем уравнение тенденции

$$f(t) = 14{,}97 \cdot 1{,}019^t.$$

5.12. В верхнюю ячейку столбца 14 вставляем формулу для вычисления значения тренда и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=«оценка параметра a_0 с абсолютным адресом»*«оценка параметра a_1 с абсолютным адресом»^«верхняя ячейка столбца 3»

5.13. Получим ряд остатков, удаляя значения тренда из исходного временного ряда. Для этого в верхнюю ячейку столбца 15 введем формулу и автоматически заполним весь столбец (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=«верхняя ячейка столбца 3» - «верхняя ячейка столбца 14»

Вывод. Теперь, получив ряд остатков временного ряда, можно произвести анализ качества построенной модели временного ряда, а в отношении исходного временного ряда можно сказать, что он стал стационарным и представляет теперь ряд остатков временного ряда.

6. Произведем анализ качества построенной модели временного ряда.

6.1.1. Проверяем условие случайности возникновения отдельных отклонений от тренда. Дополним расчетную таблицу столбцом «Повторные точки» (рис. 4.7).

Годы	Кварталы	№ квартала	Фактор риска	Ряд скользящих средних	Циклическая составляющая	Абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Исправленное абсолютное отклонение в сезоне (оценки сезонных колебаний)	Ряд с удаленной сезонной компонентой (у)	Конечные разности первого порядка	Конечные разности второго порядка	Темпы прироста	у*	Оценка тренда	Ряд остатков	Повторные точки
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
2012	I	1	16,8			-0,067	-0,134	16,34				2,829	15,256	1,544	
	II	2	16,2	15,9	0,3			16,334	-0,6		-0,035	2,793	15,543	0,657	0
	III	3	14,7	15,56	-0,86			14,834	-1,5	-0,9	-0,092	2,697	15,836	-1,136	1
	IV	4	15,8	15,43	0,366			15,334	1,1	2,6	0,074	2,768	16,134	-0,334	1
2011	I	5	15,8	15,66	0,133	-0,175	-0,242	16,043	0,10	-0,99	0,006	2,775	16,439	-0,639	0
	II	6	15,4	15,83	-0,43			15,43	-0,4	-0,50	-0,025	2,750	16,748	-1,348	1
	III IV	7	16,3	15,83	0,466			16,543	0,9	1,3	0,057	2,806	17,064	-0,764	1
		8	15,8	16,66	-0.86			16,043	-0,5	-1,4	-0,03	2,775	17,386	-1,586	1
2010	I	9	17,9	17,4	0,5	0,444	0,376	17,23	1,48	1,980	0,092	2,864	17,713	0,187	0
	II	10	18,5	19,2	-0,7			18,123	0,6	-0,88	0,034	2,897	18,047	0,453	0
	III	11	21,2	19,66	1,533			20,823	2,7	2,1	0,149	2,036	18,387	2,813	1
	IV	12	19,3					18,923	-1,9	-4,6	-0,091	2,940	18,734	0,566	
Сумма						0,2028	0	203,7							

Рис. 4.31

6.1.2. Определяем, какие уровни ряда остатков являются повторными точками. Во вторую сверху ячейку столбца 16 вводим формулу, определяющую соответствие уровня ряда остатков повторной точке, то есть если уровень ряда остатков есть повторная точка, то его будем обозначать единицей, в противном случае – нулем. Затем автоматически заполним весь столбец до предпоследней ячейки (протягиванием ячейки с формулой на область заполнения).

=ЕСЛИ(ИЛИ(И(«первая ячейка столбца 15» <= «вторая ячейка столбца 15»;«третья ячейка столбца 15» <= «вторая ячейка столбца 15»); И(«первая ячейка столбца 15» >= «вторая ячейка столбца 15»;«третья ячейка столбца 15» >= «вторая ячейка столбца 15»));1;0)

6.1.3. Определим количество повторных точек в ряде остатков. Просуммируем значения столбца 16 с помощью функции СУММ, а результат суммирования запишем под столбцом (рис. 7.7).

6.1.4. Определяем критическое значение p для критерия случайности отклонений от тренда по формуле

=ЦЕЛОЕ(2/3*(СЧЁТ(«диапазон ряда остатков») - 2) - НОРМСТОБР(0,05) * КОРЕНЬ((16*СЧЁТ(«диапазон ряда остатков») - 29) / 90))

критическое значение p= 8

Вывод. Так как $6 < 8$, то ряд остатков нельзя считать случайным, то есть он содержит детерминированную составляющую. В таком случае либо необходимо строить новую модель, либо пренебречь этим условием и проверить остальные условия, характеризующие качество построенной модели.

6.2. Проверим равенство математического ожидания уровней ряда остатков нулю.

6.2.1. Вычисляем среднее значение ряда остатков.

=СРЗНАЧ(«диапазон ряда остатков»)

среднее ряда остатков= 0,034

6.2.2. Вычисляем стандартную ошибку отклонения от тренда.

=КОРЕНЬ(1/(СЧЁТ(«диапазон ряда остатков») - 1) * СУММПРОИЗВ(«диапазон ряда остатков» - «среднее значение ряда остатков»;«диапазон ряда остатков» - «среднее значение ряда остатков»))

ошибка отклонения= 1,279

6.2.3. Проверяем гипотезы:

$H_0 : \bar{\varepsilon}_t = 0,$

$H_1 : \bar{\varepsilon}_t \neq 0.$

6.2.4. Строим статистику:

$t_{наблюдаемое}$ =ABS(«среднее значение ряда остатков»)/«ошибка отклонения»*КОРЕНЬ(СЧЕТ(«диапазон ряда остатков»))

$t_{наблюдаемое}$ = 0,093

6.2.5. Находим квантиль распределения Стьюдента с $(T-1)$ степенью свободы при уровне значимости, равном 0,05, где T – объем выборки. Используем функцию СТЬЮДРАСПОБР.

Вызов функции: MS Excel – Вставка – Функция… – Статистические

=СТЬЮДРАСПОБР(«уровень значимости»;СЧЕТ(«диапазон ряда остатков»)-1)

t-квантиль = 2,201

6.2.6. Делаем вывод о принятии гипотезы (рис. 4.8):

=ЕСЛИ($t_{наблюдаемое}$>=«t-квантиль»;"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, математическое ожидание случайной составляющей не равно нулю";"принимается, то есть математическое ожидание случайной составляющей равно нулю.")

Гипотеза H_0: $a_1 = 0$ принимается, то есть математическое ожидание случайной составляющей равно нулю.

Рис. 4.32

6.3. Проверим нормальность распределения уровней ряда остатков по RS-критерию.

6.3.1. Проверяем гипотезы:

$H_0 : \varepsilon_t \sim N,$

$H_1 : \varepsilon_t \nsim N.$

6.3.2. Строим статистику:

$RS_{наблюдаемое}$ =(МАКС(«диапазон ряда остатков») - МИН(«диапазон ряда остатков»))/«ошибка отклонения»

$RS_{наблюдаемое}$ = 3,438

6.3.3. Определяем критические границы RS-критерия (см. приложение 6 [3]):

$RS_{гр1}$= 2,67
$RS_{гр2}$= 3,69

6.3.4. Делаем вывод о принятии гипотезы:

=ЕСЛИ(ИЛИ($RS_{гр1}$<=$RS_{наблюдаемое}$;$RS_{наблюдаемое}$<=$RS_{гр2}$);" принимается, то есть ряд остатков нормален.";"отвергается и принимается альтернативная гипотеза, следовательно, ряд остатков временного ряда не является нормальным.")

Гипотеза H_0: a_1 = 0 принимается, то есть ряд остатков нормален.

Вывод. Допуская неслучайность уровней ряда остатков, можно считать, что построенная модель временного ряда качественная, то есть она адекватно описывает исходные данные.

7. Осуществим точечный прогноз объема товарооборота на первый квартал 2013 года по построенной модели, подставив номер квартала в уравнение тренда и определив значение зависимой переменной $f(t)$.

= «оценка параметра a_0 »*«оценка параметра a_1»^13

точечный прогноз = 19,09

Вывод. Фактор риска на первый квартал 2013 года составит 19,09.

8. Дадим графическую интерпретацию построенной модели временного ряда, изобразив на одной плоскости оценку тренда, исходный временной ряд и ряд, очищенный от влияния цикличности и сезонности (рис. 4.9).

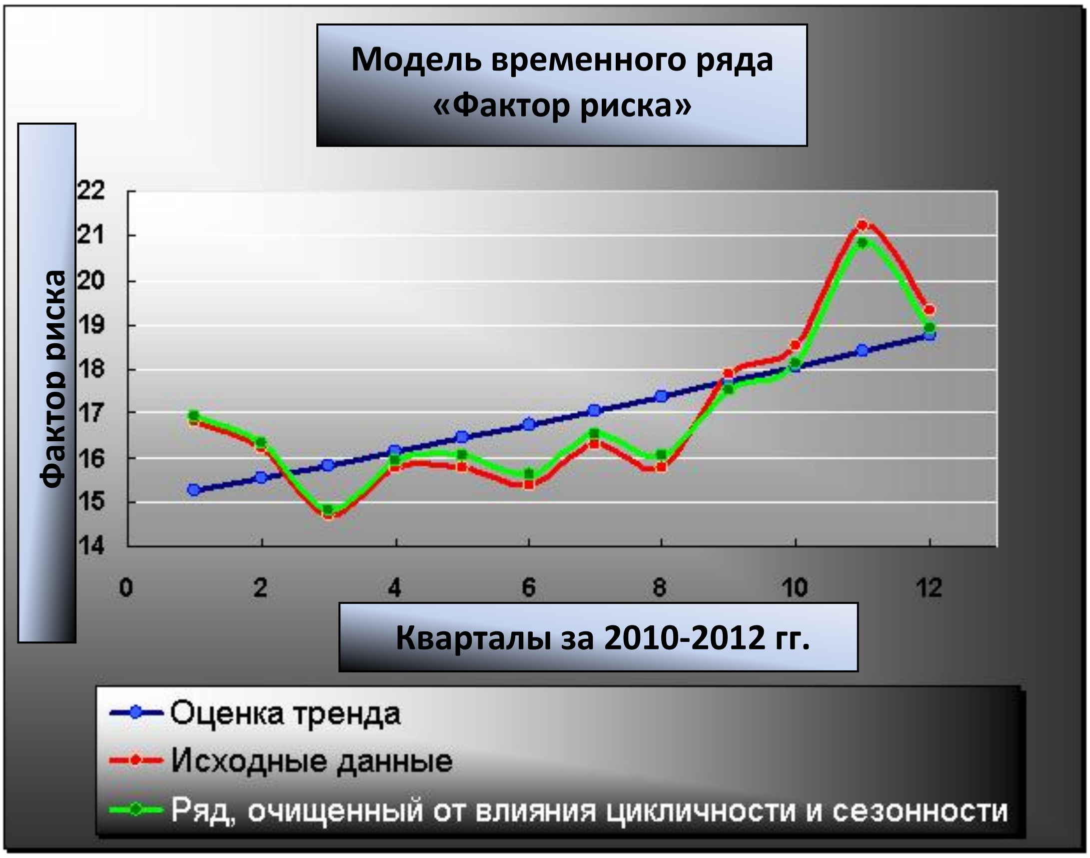

Рис. 4.9

Контрольные вопросы и упражнения

1. Под процедурой сглаживания временного ряда понимается … ?

2. В чем разница между аддитивной и мультипликативной видами моделей временных рядов? По какому критерию происходит их выбор?

3. Что такое «скользящее среднее»? Каких видов оно бывает? Для решения какой задачи применительно к эконометрической модели применяется?

4. Приведите примеры из техники, объясняющие сущность циклической составляющей в модели временных рядов.

5. Для чего применяются простые и сезонные разностные операторы? Что они собой представляют?

6. Что означает свести временной ряд к стационарному?

7. Как называется составляющая временного ряда, которая характеризует долговременные изменения показателя во времени?

8. Что является задачей RS-критерия?

9. В чем специфика модели временного ряда перед однофакторной регрессионной моделью по фактору «время»?

10. Можно ли использовать модель временных рядов для прогнозирования технического показателя? Ответ аргументируйте примером.

Варианты индивидуальных заданий

Индивидуальное задание создаем себе самостоятельно.

1. Составляем таблицу исходных данных.

Данные зависимости фактора риска от времени, выбираются как ряд последовательно возрастающих случайных чисел в диапазоне 15-30.

Количество качественных факторов, выбирается аналогично при меру.

2. Задания берутся из условия разобранного примера данной лабораторной работы (при этом необходимо исходить из тематики Рассмотренной задачи).

Рекомендуемый библиографический список

1. Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учебн. заведений / А.А. Алексеев, Ю.А. Кораблев, М.Ю. Шестопалов.- М.: Издательский центр «Академия», 2009 - 352 с.
2. Иванов, А. Н. Эконометрика [Текст] : сборник лекций / А. Н. Иванов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 198 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Минько, А. А. Статистический анализ в MS Excel [Текст] / А. А. Минько. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. : ил. – Парал. тит. англ.
5. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров; под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 544 с., ил.
6. StatSoft, Inc. Электронный учебник по промышленной статистике. – Москва: StatSoft, 2001. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

ГРУППЫ 1 (ВАРИАНТЫ 1.1 – 1.24)

Вариант	1				2				3				4			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,6	12	6	0,6	1,8	13	6	1,1	0,8	7	8	1,5	0,6	13	5	3,8
2	0,9	17	6	1,3	2,4	15	8	2	1,6	10	10	1,7	0,8	16	6	4
3	3,6	22	11	2,1	2,9	19	13	2,1	3,3	20	11	2,8	0,9	25	9	4,1
4	4,5	35	13	6	3,7	23	25	2,9	4	24	19	5,2	2,9	29	11	5,6
5	7	40	28	6,4	4	26	29	3,3	4	24	25	6,7	4,3	35	17	6,3
6	9	44	30	6,4	4,2	31	30	3,8	4,7	34	27	6,9	5,2	35	19	6,9
7	9,5	44	45	6,9	6,7	31	30	6	5,7	35	33	7,5	6,8	40	20	7,9
8	9,8	45	48	8,2	7,1	35	46	7,3	5,8	39	42	7,8	8,4	42	28	8
9					8,7	39	47	8	6,5	42	44	8	8,4	42	38	8,5
10									9,2	45	48	9,5	8,7	49	41	9
11													9,7	49	46	9,6
12																
13																
14																
15																

Вариант	5				6				7				8			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у
1	2,2	9	5	1,4	0,8	6	6	2,5	0,6	7	6	1,7	1,1	5	5	1
2	2,5	9	16	1,9	0,9	16	9	2,6	0,8	7	8	1,8	1,1	6	6	1,4
3	3,1	11	19	3,1	2	18	14	2,6	1,4	9	15	2,3	1,5	7	12	2,3
4	3,3	17	19	4	2,2	18	15	3,2	1,7	9	15	3,1	2	9	13	2,9
5	3,5	24	22	4,2	3,5	24	15	4,5	2,5	12	15	3,2	3,1	10	17	3,5
6	4,5	26	28	4,9	3,9	25	21	5	3,8	12	16	5,5	4,4	12	20	4
7	4,5	27	28	5	6,8	28	28	5,4	4,6	14	21	7,1	4,7	15	21	4,5
8	4,6	28	30	5,2	7,9	28	30	5,9	4,7	16	24	7,4	4,8	17	29	4,6
9	5,2	32	37	6	8,2	31	31	6,2	5,9	25	24	7,8	4,9	19	35	4,7
10	8,4	44	39	6,7	8,5	32	38	6,8	6,2	25	28	7,8	7,5	25	39	5,5
11	9,7	45	44	8,8	8,8	35	43	8,2	6,2	28	36	8,6	7,9	27	40	7,5
12	9,9	48	48	9,1	9,4	42	44	8,2	7,4	32	39	8,9	8,1	28	41	8,3
13					10	48	48	9,6	8	34	42	9,8	8,2	30	43	8,3
14									9,5	35	50	9,8	9,3	31	43	9,1
15													9,9	33	44	9,9

Вариант	9				10				11				12			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр у
1	1,9	7	9	2,2	0,8	7	7	1,9	1,2	5	6	0,8	0,8	7	6	2,6
2	3,8	9	11	3,3	2	9	23	2,3	1,9	22	9	2,9	0,8	7	8	6,2
3	4,5	9	17	6	2,1	15	28	3,8	2,3	26	12	3,6	1	11	14	6,4
4	6,4	30	17	6,4	3,4	16	32	3,9	3	27	15	4,1	3,6	27	14	6,8
5	6,9	33	19	6,7	7,1	23	38	4,8	5,7	30	22	4,5	4,2	31	16	7
6	8,7	36	21	7,6	8	29	39	5,8	7,6	33	25	4,9	4,9	34	18	7,4

7	9	40	29	9,3	9,1	36	47	7,4	8,2	35	30	5,3	5,4	36	18	7,7
8	9,6	43	36	9,4	9,3	43	47	8,4	8,3	37	35	6,4	6,7	39	29	8,3
9					9,7	47	48	8,6	8,9	42	37	8,9	6,7	40	36	9,1
10									9	45	45	9,9	7,9	41	38	9,3
11													9,3	43	48	9,6
12																
13																
14																
15																

Вариант	13				14				15				16			
№ эксперимента	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр у**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр у**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр у**	**Параметр X_1**	**Параметр x_2**	**Параметр x_3**	**Параметр у**
1	1,3	6	7	1,5	0,6	9	7	1,4	1,9	6	8	1,3	2	5	11	1,1
2	3,1	7	7	1,7	1,1	11	7	3,2	2,2	8	10	2,3	2,1	6	13	1,9
3	3,2	14	9	2,7	1,4	20	11	3,5	3,8	15	12	2,6	2,4	15	14	2,7
4	4,3	23	11	5,6	2,8	23	17	4,8	4	15	13	3,5	2,9	17	15	3,2
5	5,6	30	12	6,6	3,9	28	27	6	5,1	21	14	3,8	4,3	23	16	4,3
6	6,2	35	16	7,1	5,5	30	28	6,5	5,6	24	21	4	5,1	24	23	4,7
7	6,3	37	17	7,5	5,7	31	29	6,7	5,8	25	22	4	6	28	24	4,8
8	6,8	39	32	7,7	6	34	29	7,6	6,6	25	22	4,3	6,2	31	29	5,8
9	7,8	42	33	7,9	6,3	37	37	8,7	6,8	26	26	6,7	6,3	32	31	6
10	8,1	47	35	8,3	6,4	39	43	9	7,2	32	27	7	7,1	36	39	6,3
11	8,7	48	37	8,9	8	40	44	9,6	7,5	37	34	7,2	7,1	42	40	7,7
12	9,9	49	46	9,9	8,1	45	48	9,8	8,5	41	34	8,6	7,4	42	43	8
13					9,8	48	49	9,8	8,8	45	42	9,1	7,6	45	46	8,1
14									9,9	47	44	9,9	7,7	46	47	8,7
15													8,6	47	48	9,1

Вариант	17				18				19				20			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,7	12	5	1,7	2,3	8	11	0,6	1,7	9	6	0,7	1	8	5	0,8
2	1,5	15	9	3	2,9	14	15	0,9	2,5	13	13	1	1,5	11	6	2,7
3	1,9	22	15	4,4	3,6	19	17	6	3,3	16	14	1,5	2,2	15	8	3,4
4	3,7	34	30	5,4	4,2	22	19	6,9	4,8	16	16	2,1	3,1	24	12	4,2
5	4	39	31	7,1	4,7	25	21	7,4	5	21	18	3,2	3,6	29	13	5,3
6	5,2	39	32	7,2	6,4	27	22	8	6,3	23	18	4,6	3,8	29	24	6,1
7	7	49	40	7,5	7	35	37	8,5	7,4	34	35	6	4,5	37	27	6,2
8	8,2	50	50	7,6	8,9	41	38	8,7	7,6	40	39	6,5	4,8	38	29	7,7
9					9,1	44	42	8,8	8	42	41	8,5	5,7	40	31	8,1
10									9,1	43	41	9,6	7,5	40	33	8,3
11													8	47	38	9,2
12																
13																
14																
15																

Вариант	21				22				23				24			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,9	5	11	1,8	0,8	6	8	0,5	1,7	7	6	2,1	0,5	5	11	2
2	1,5	7	12	2,2	3,5	13	9	0,7	1,8	9	10	2,8	2,6	14	13	2,1
3	3,4	8	15	2,7	3,9	19	23	0,7	3,1	12	13	3,7	3	17	14	2,8
4	4,4	9	16	2,9	4,3	21	24	1,4	4,2	19	14	4	4,5	18	18	3,2
5	4,6	10	17	3,2	4,7	26	28	2,1	4,7	21	18	4,4	5,6	19	19	4,1
6	4,6	11	21	3,3	4,8	28	32	2,1	5,9	23	18	5,5	6,4	23	20	5,7
7	6	13	21	6,3	5,1	30	37	3,7	6,4	26	23	6,4	6,4	24	28	5,9

8	6,3	17	23	6,5	5,3	31	38	4,7	7	31	23	6,8	7,1	26	30	6
9	7	23	23	7,1	6,3	32	38	5,3	7,2	32	24	6,9	7,3	31	32	6,1
10	7,6	42	28	8,2	6,7	34	42	6,5	7,6	35	25	7,8	7,5	32	33	6,2
11	8,4	50	35	8,8	7,1	40	47	6,5	7,8	39	31	7,9	7,6	38	34	6,9
12	9,2	50	41	9,3	7,3	41	49	7,5	8,8	45	31	8,2	7,7	42	41	8,5
13					7,4	42	49	8,1	9,1	47	39	9,1	8,1	42	43	8,6
14									9,2	47	39	9,1	8,9	44	49	9,6
15													9,7	46	50	9,8

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ДЛЯ ГРУППЫ 2

(ВАРИАНТЫ 2.1 – 2.24)

Вариант	1				2				3				4			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,6	17	10	1,7	1,3	12	11	1,8	0,6	10	17	2	1,2	8	9	1,5
2	1,6	19	10	2,8	2,4	27	25	4	1,1	14	17	2,3	2	9	11	2,4
3	2,7	20	16	3	3,8	36	29	4,5	3,2	26	19	2,6	2,3	11	14	4,5
4	3,2	28	18	3,7	4	37	34	5,6	4,5	28	20	4,5	4,2	26	16	5,4
5	4	28	24	4,2	5,7	37	38	6,7	4,8	34	26	5,1	5,3	28	19	6,1
6	5,2	34	26	5,9	5,8	38	40	7,7	5,1	41	37	6,3	5,5	29	20	6,3
7	8,7	44	27	8,5	7,4	41	41	8,6	6,3	42	42	7	5,8	38	20	6,7
8	9	50	44	9	8,5	44	43	9,2	7,2	45	44	8,5	6,6	39	27	7,3
9					9,9	48	45	9,3	8	47	46	9,4	8,3	41	43	7,5
10									8,8	48	50	9,9	9,2	42	44	8,1
11													9,9	48	47	8,5
12																
13																
14																
15																

Вариант	5				6				7				8			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,6	9	5	0,8	0,6	5	12	2,6	0,6	5	13	1,3	0,8	8	5	2,4
2	0,7	11	11	1,7	1,1	13	14	3,9	3,3	6	15	1,7	1,1	8	10	3,5
3	2,2	13	15	2	2,1	14	15	4,1	3,5	13	19	1,8	1,4	8	10	3,6
4	3,5	20	16	4	3,1	15	20	4,4	3,9	22	19	1,8	2	10	11	4
5	3,9	23	20	5,6	3,6	17	24	4,4	4,8	22	27	2,6	2,9	11	16	4,7
6	5,2	33	21	6,9	4,9	26	29	4,5	4,8	22	29	2,8	3,6	11	17	5
7	7,6	39	27	6,9	5,1	26	29	4,7	4,9	23	30	2,8	4,3	18	22	5,8
8	8,1	40	28	7,2	6,1	27	33	5,9	6	24	34	4,6	4,9	22	22	6,5
9	8,3	43	31	8,2	6,3	28	36	6,7	6,2	31	38	4,9	5,5	23	28	6,6
10	8,4	44	32	8,7	6,4	30	45	7,7	6,5	32	39	5,2	6,4	26	31	7,3
11	9,4	45	37	9	7,4	31	47	9	7,4	34	41	6,2	7,2	30	35	7,4
12	9,6	45	46	9,9	8,4	34	47	9,1	8,4	39	44	8	7,3	32	39	7,8
13					9,1	46	49	9,6	8,6	40	49	8,4	7,4	47	41	8,3
14									9,7	43	49	8,5	8,5	47	45	8,3
15													9,9	50	47	9,6

Вариант	9				10				11				12			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,3	16	13	2,9	0,9	7	5	2,7	2,4	10	10	1	2,6	7	7	1,2
2	4,7	23	16	3,2	2,4	10	11	2,9	2,7	10	12	1,9	3	9	23	1,9
3	4,7	39	17	3,9	3	26	16	3,7	3,3	13	21	2,6	4	10	24	3,1
4	4,8	42	23	6	3,8	26	24	4,6	4,1	28	26	4	4,6	11	29	3,2
5	5,9	43	31	6,6	4,4	28	25	5,5	4,5	31	35	5,8	5,6	18	31	3,4
6	7,5	44	40	7,8	7,5	29	30	7,3	7,3	31	40	6,9	5,6	19	32	5,8
7	8,3	46	43	8,2	7,9	41	30	7,6	8,3	34	42	7,7	6	24	35	6,6
8	9,9	48	45	9	8,1	42	32	8,6	9	35	45	9,5	6,4	40	37	7,1
9					8,2	45	40	9,9	9,6	48	47	9,8	6,7	44	37	7,4
10									9,9	48	50	9,9	7,3	45	41	7,8
11													8	46	46	8,9
12																
13																
14																
15																

Вариант	13				14				15				16			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,9	17	11	0,9	1,6	10	5	1,4	1,4	7	6	0,8	0,8	12	6	1,3
2	2,4	18	13	1	2,4	10	7	1,6	1,8	9	7	2,6	2,7	13	13	1,4
3	2,7	19	15	2	2,7	11	10	1,7	3,4	12	13	2,9	2,9	15	13	2,3
4	3,9	24	16	3,1	3,5	12	17	2	4,1	15	18	4,3	3,6	16	13	3,4
5	4,5	27	22	4,3	5,1	16	27	2	4,2	17	23	4,5	4,7	16	16	3,5
6	4,7	29	27	4,4	5,9	19	28	5,4	4,2	19	26	4,9	5	17	19	3,6
7	4,8	35	33	4,6	6	20	28	5,5	4,7	22	27	5,1	5,5	20	32	4,1
8	4,9	42	34	4,8	6,1	27	29	6,6	4,8	22	30	5,9	6,1	22	32	4,5
9	6,7	44	43	5,5	8,3	27	34	6,9	5	24	32	7,8	6,1	23	34	4,8
10	7,6	44	43	5,5	8,7	40	36	7,6	5,3	32	33	7,8	7,5	24	36	5,9
11	8,8	45	45	6,2	8,7	45	37	8,9	6,1	32	39	8	7,5	25	39	6,7
12	9,7	50	49	7,7	9,1	47	44	9,6	8,1	40	44	8,1	7,5	27	40	7,2
13					9,4	49	47	9,8	9,3	41	44	8,2	8,4	33	42	8
14									9,4	49	46	10	8,6	34	46	9,5
15													9	42	49	9,7

Вариант	17				18				19				20			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	1,4	11	8	0,6	1	13	10	1,8	0,8	19	12	0,8	0,6	11	7	1
2	1,5	22	16	0,8	3,1	16	22	4,2	1,4	22	17	1,1	2,2	11	10	1
3	7,1	27	18	1,8	4,4	16	35	4,2	1,8	27	19	3,3	2,8	15	13	1,1
4	8,4	32	21	2,1	4,7	18	38	6,2	5,8	29	25	4,1	2,9	16	21	1,2
5	9,1	33	31	5,5	5,8	29	42	6,5	6,2	32	26	5,3	3,8	16	23	1,6
6	9,3	34	32	7,1	8,2	30	44	7,7	6,5	36	41	6,5	4,2	17	24	2,3
7	9,6	35	36	7,3	9	32	45	7,8	6,7	42	46	6,9	6,3	21	32	5
8	9,7	46	43	8,7	9,2	32	46	8	7,6	43	47	7,7	6,3	28	33	5,3
9					9,2	35	49	8,4	8,1	43	48	8,1	6,5	29	35	7,2
10									8,3	47	50	9,6	8,8	35	38	7,9
11													8,9	46	47	8,7
12																
13																
14																
15																

Вариант	21				22				23				24			
№ эксперимента	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У	Параметр X_1	Параметр x_2	Параметр x_3	Параметр У
1	0,8	11	7	1,8	0,7	8	5	0,7	0,6	10	12	0,8	2,1	5	7	0,7
2	1,7	20	10	3,3	2	9	6	1,4	1,3	14	12	1,5	2,9	9	14	1,1
3	2,6	21	10	4,4	2,1	12	11	1,6	2,8	18	15	2,8	3,3	9	17	1,6
4	3,9	23	11	4,5	2,8	13	15	2,1	3	23	19	3	3,4	12	20	1,9
5	5,1	23	11	4,8	3,6	14	19	2,9	3,1	28	20	3,3	3,5	21	28	2,3
6	6,5	28	12	5,4	3,9	14	23	3,1	3,4	28	24	3,9	5,9	22	31	3,5
7	6,7	34	13	5,8	5,2	14	30	3,2	3,8	29	24	5,5	6,5	26	34	4
8	7,8	36	22	5,9	5,4	18	33	3,5	6,1	30	27	6,2	6,8	29	34	5,7
9	8	38	30	6	6,1	25	36	5,9	6,2	30	30	7,8	7,1	32	35	6,5
10	8,5	42	37	6,4	7,8	31	41	6,1	7,6	37	30	8,2	7,1	33	36	6,6
11	8,8	48	48	8	7,9	32	46	8	8,1	39	34	8,4	7,2	37	36	8,2
12	9,5	50	50	9,6	8,3	40	49	8,4	8,3	43	37	8,4	7,4	39	41	8,3
13					8,5	42	50	9,4	8,8	46	46	9,3	8,7	41	44	9,3
14									8,8	49	47	9,5	8,9	43	45	9,4
15													9,4	47	45	9,7

ОГЛАВЛЕНИЕ