Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра начального образования

# ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Методические рекомендации к изучению
дисциплины «Математика»

Составитель
Н. Ф. БУЛАТОВА

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2013

УДК 510.3 (07)
ББК 22.126я7
Т34

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
*Ю. А. Алхутов*

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры инженерно-технологических дисциплин
Российского университета кооперации (Владимирский филиал)
*И. И. Цыганок*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Т34 **Теоретико-множественный** подход к построению множества целых неотрицательных чисел : метод. рекомендации к изучению дисциплины «Математика» / Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; сост. Н. Ф. Булатова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 32 с.

Содержат теоретический материал, решения всех типовых задач школьного курса математики и задания для самостоятельной работы.

Написаны в соответствии с программой по математике для студентов факультета дошкольного и начального образования.

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 24. Библиогр.: 3 назв.

УДК 510.3 (07)
ББК 22.126я7

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятия натурального числа и нуля – одни из основных понятий математики. Причиной, которая привела человека к созданию натуральных чисел, является необходимость сравнивать конечные множества, а также измерять величины. В своем развитии понятие натурального числа прошло ряд этапов, прежде чем числа стали самостоятельными объектами и появилась возможность изучать их как математические объекты.

Уже в начальной школе дети знакомятся с натуральным числом как с количественной характеристикой конечного множества; производя счет, они оперируют порядковыми натуральными числами, при измерении величин натуральное число выступает в роли значения величины при выбранной единице измерения, много внимания уделяется и ещё одной роли натурального числа – числа как компонента вычислений. Поэтому важнейшая задача учителя – овладение различными теориями построения множества натуральных чисел: аксиоматическая теория, натуральное число как результат измерения величин и теоретико-множественное построение.

В настоящих методических рекомендациях рассматривается теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел: формулируются основные понятия теории, свойства этих понятий, раскрывается связь с курсом математики начальной школы, даются модели к решению всех типовых простых задач и их теоретическая основа, формулируется алгоритм решения таких задач. Большое число задач позволяет установить связь между операциями над множествами и действиями над натуральными числами, что поможет детям избегать ошибок в выборе действия при решении текстовых задач.

# § 1. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО И НУЛЬ КАК ОБЩЕЕ СВОЙСТВО КЛАССА КОНЕЧНЫХ РАВНОМОЩНЫХ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

## 1.1. Определение натурального числа и нуля

В основу теоретико-множественного подхода к понятию целого неотрицательного числа положены понятия конечного множества и взаимно однозначного соответствия. Напомним, что соответствие между элементами двух множеств A и B называется взаимно однозначным тогда и только тогда, когда каждый элемент из множества A имеет единственный образ в множестве B, и у каждого элемента из множества B существует единственный прообраз в множестве A.

Множества A и B, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, будем называть *равномощными*.

Известно, что отношение P «множество A равномощно множеству B» рефлексивно, симметрично и транзитивно, и поэтому является отношением типа эквивалентности, а любое отношение типа эквивалентности, заданное на множестве, разбивает это множество на классы эквивалентности. Если это отношение задано на множестве M, элементы которого – конечные множества произвольной природы элементов, тогда в один класс эквивалентности попадают, например, множество рук человека, множество согласных в слове «рыба», множество катетов прямоугольного треугольника.

Что объединяет эти множества? Перечисленные множества – равномощные, поэтому попали в один класс эквивалентности.

Возьмем множество сторон квадрата, которое не принадлежит этому классу эквивалентности. Можно указать множества, которые ему равномощны, и они образуют другой класс эквивалентности. Будут существовать и другие классы эквивалентности, на которые разбивается множество M.

Множества каждого класса обладают общим свойством: они – равномощные. Это свойство множеств называют *натуральным числом*.

Определение 1. *Натуральным числом называется общее свойство класса конечных равномощных множеств.*

Определение 2. *Нулем называется общее свойство класса пустых множеств.*

В определении натурального числа и нуля проявляется *абстракция отождествления*.

Сначала множество M разбивают на классы эквивалентности отношением «быть равномощными», затем отождествляют все множества одного класса, а результат этого отождествления представляют как абстракцию – некоторое натуральное число или нуль. Такой способ определения понятия называется *определением через абстракцию отождествления*.

Пример. Дано число 5. Его отождествляют с классом равномощных множеств, представителем которого может быть, например множество пальцев на руке человека. Если множество обозначить A, тогда 5 = m(A). Читают: 5 – число элементов множества A. В этом классе эквивалентности существуют еще множества, число элементов которых равно 5. Натуральное число здесь выступает как количественная характеристика множества.

Натуральным числам приписывают известные символы, которые образуют ряд (множество) натуральных чисел N: 1, 2, 3, …, n, … Если из этого множества выбрать числа от 1 до 15, то получим множество, которое будем называть отрезком натурального ряда и обозначать $N_{15}$, $N_{15} = \{x \mid x \in N \text{ и } x \leq 15\}$ .

Отрезком натурального ряда $N_a$ называют множество натуральных чисел, не превосходящих a. К р а т к а я з а п и с ь : $N_a = \{x \mid x \in N$ и $x \leq a\}$ .

Для определения числа элементов множества мы, как правило, используем счет элементов множества.

Счетом элементов множества A называется установление взаимно однозначного соответствия между элементами множества A и отрезком натурального ряда $N_a$ .

Если $A \sim N_a$, тогда $m(A) = m(N_a)$, значит, $m(A) = a$. Число элементов в множестве A равно последнему числу в отрезке натурального ряда или последнему числу, названному при счете.

## 1.2. Отношение «равно», «меньше», «меньше на число»

Возьмем множества A и B, пусть $a = m(A)$, $b = m(B)$, где $a, b \in N_0$.

Если $A \sim B$, то эти множества принадлежат одному классу эквивалентности, поэтому им соответствует одно и то же натуральное число, т.е. $a = b$ .

Справедливо и обратное. Если $a = b$, то эти натуральные числа определяют один и тот же класс конечных равномощных множеств, значит, множества A и B равномощны. Из сказанного можно получить определение равных натуральных чисел.

Определение 3. *Два целых неотрицательных числа a и b равны тогда и только тогда, когда равномощны множества, число элементов которых числа a и b* .

К р а т к а я з а п и с ь : $a = b \iff A \sim B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Отношение «равно» на множестве целых неотрицательных чисел – рефлексивно, симметрично и транзитивно. Доказательство свойств смотрите в [3] .

Если множества A и B не равномощные, тогда одно из множеств будет равномощно подмножеству другого множества, т.е. или $A \sim B_1 \subset B$, или $B \sim A_1 \subset A$ .

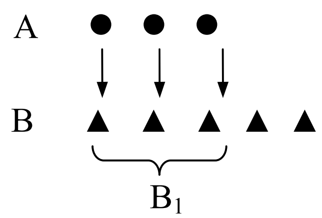


Рис. 1

Пусть $A \sim B_1 \subset B$ (рис. 1). Видим, что в множестве B элементов столько, сколько в множестве A, да еще несколько, так как $a = m(A)$, $b = m(B)$, то говорят, что $a < b$ . Справедливо и обратное. Если $a < b$, то $A \sim B_1 \subset B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Определение 4. *Натуральное число a меньше натурального числа b тогда и только тогда, когда множество, число элементов которого равно a, равномощно собственному подмножеству другого множества, число элементов которого равно b.*

К р а т к а я з а п и с ь : $a < b \iff A \sim B_1 \subset B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Если $B \sim A_1 \subset A$, тогда получим, что $b < a$ , где $b = m(B)$, $a = m(A)$.

Вывод. Если два множества неравномощные, то число элементов первого множества меньше числа элементов второго, или число элементов второго множества меньше числа элементов первого.

$A \sim B_1 \subset B$ можно прочитать еще так: в множестве B столько элементов, сколько в множестве A, да еще несколько (например, c) . Тогда можно сказать, что число a меньше b на число c .

Определение 5. *Число a меньше b на число c, тогда и только тогда, когда в множестве B элементов столько, сколько в множестве A, да еще c элементов, если a = m(A), b = m(B).*

Можно еще отметить, что в этом случае множество B разбито на два подмножества, в одном элементов столько, сколько в множестве A, а в другом c элементов.

Можно дать еще одно такое определение: «меньше на число c».

Определение 6. *Число a меньше числа b на число c тогда и только тогда, когда множество B можно разбить на два непересекающихся подмножества, где число элементов одного равно числу a, а число элементов другого подмножества равно c.*

Очевидно, если число a меньше b на число c, тогда число b больше a на число c. Справедливо и обратное.

П р и м е ч а н и е. Отношение «меньше» антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное. Доказательство свойств найдете в [3].

**З а д а н и е 1.** Доказать: 1) $3 < 5$ , 2) $0 < 5$ , 3) $6 = 6$, 4) 5 меньше 9 на 4 , 5) 6 больше 4 на 2.

1. Пусть $3 = m(A)$, A – множество квадратов. $5 = m(B)$, B – множество треугольников. Можно поставить в соответствие каждому квадрату треугольник (рис.2), тогда в множестве B выделяется подмножество $B_1$, равномощное множеству A, получили $A \sim B_1 \subset B$, тогда, по определению 4, $3 < 5$.

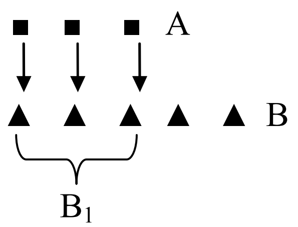

Рис. 2

2. Пусть 0 =  m(Ø), 5 = m(A), где A – множество любых элементов. Из теории множеств известно, что все пустые множества равномощные и пустые множества являются подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \sim \varnothing \subset A \Rightarrow m(\varnothing) < m(A)$ или $0 < 5$ .

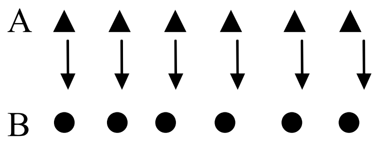


Рис. 3

3. Пусть 6 = m(A) и A – множество треугольников, 6 = m(B) и B – множество кругов (рис. 3). Можно поставить в соответствие каждому квадрату только один круг и каждому кругу можно поставить в соответствие только один треугольник. Получим A~B, т.е. m(A) = m(B) или 6 = 6 (по определению 3).

4.  Пусть 5 = m(A) , где A – множество точек, 9 = m(B) , где B – множество кругов.

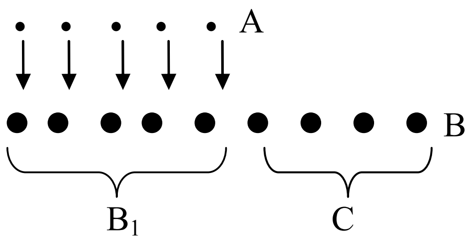


Рис. 4

Изобразим A и B. Очевидно, что можно в множестве B выделить подмножество $B_1$ равномощное множеству A,  $B_1 \sim A$ (рис. 4).

Множество B содержит столько элементов, сколько множество A, да еще несколько элементов, которые образуют множество C. Используем счет для нахождения числа элементов множества C.  $C \sim N_4$ , значит, m(C) = 4. По определению 5 получаем, что 5 меньше 9 на 4.

5. Пусть 6 = m(A), 4 = m(B). Нужно доказать, что 6 больше 4 на 2 или 4 меньше 6 на 2 (см. решение 4).

## § 2. ДЕЙСТВИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

### 2.1. Сложение

2.1.1. Мы можем изобразить объединение двух конечных множеств. Число элементов объединения двух конечных множеств можно найти, используя счет, т.е. установление взаимно однозначного соответствия между объединением множеств и отрезком натурального ряда.

Кроме того в теории множеств доказано, что число элементов объединения двух непересекающихся множеств равно сумме числа элементов первого и второго множеств.

К р а т к а я  з а п и с ь : m(A U B) = m(A) + m(B) (1), если A ∩ B = = Ø.

2.1.2. Пусть m(A) = a, m(B) = b и a, b $N_o$; сделав замену в равенстве (1), получим предложение a + b = m(A U B), из которого получается определение суммы чисел a и b.

Определение 7. *Суммой любых целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов объединения непересекающихся множеств A и B, таких, что a = m(A), b = m(B).*

К р а т к а я  з а п и с ь : a + b = m(A U B), где m(A) = a, m(B) = b, A ∩ B = Ø .

Из определения суммы чисел a и b мы видим связь сложения двух целых неотрицательных чисел с объединением двух непересекающихся множеств. Связь объединения множеств со сложением чисел раскроем при решении текстовых задач.

**З а д а н и е  2.**

Найдите значение суммы 5 и 3.

Докажите, что 5 + 0 = 5.

Решение. 1. Воспользуемся определением суммы: 5 + 3 = m(AUB) (1), где A∩B = Ø,  5 = m(A), 3 = m(B).

2.  Изобразим AUB (рис. 5), C = AUB.

3. Найдем число элементов (AUB) счетом, AUB~$N_8$ => m(AUB) = 8(2) .

4. Используя (1) и (2), получим 5 + 3 = 8.

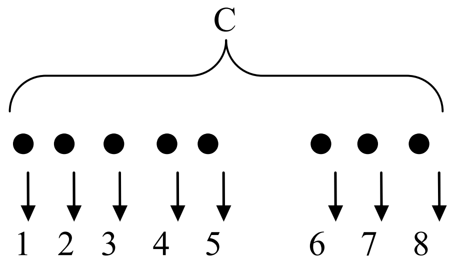


Рис. 5

П р и м е ч а н и е. Обратите внимание на алгоритм решения: запись определения, построение модели, счет, вывод. Его можно использовать в дальнейшем и для нахождения значений разности, произведения, частного.

Пусть $5 = m(A)$, $0 = m(\varnothing)$.

По определению суммы, $5 + 0 = m(A \cup \varnothing)$, но $A \cup \varnothing = A$, значит, $5 + 0 = m(A)$, или $5 + 0 = 5$.

2.1.3. В школе дети учатся решать задачи на сложение двух типов:

1) на конкретный смысл сложения;

2) на увеличение на число (в прямой и косвенной форме).

Поставим перед собой такие цели:

1) научиться раскрывать теоретико-множественный смысл решения задачи, чтобы обосновать выбор действия, которым нужно решать задачу;

2) научиться строить модели к задаче и отвечать на вопрос задачи, не выполняя действия над числами.

На подготовительном этапе можно предложить такой алгоритм решения:

- работа с условием, выбор множеств;
- построение модели к решению. Модель считается построенной, если обосновано построение искомого множества;
- ответ на вопрос задачи;
- обоснование выбора действия.
- математическая модель построения задачи.

**З а д а н и е 3.** Обосновать выбор действия и ответить на вопрос.

<u>Задача 1.</u> На первой полке 6 книг, на второй – 4 книги. Сколько книг на двух полках вместе?

1. Работа с условием. Выбор множеств.

A – множество книг на первой полке, $m(A) = 6$,

B – множество книг на второй полке, $m(B) = 4$,

C – множество книг на двух полках, $m(C) = ?$

2. Модель к задаче (рис. 6).

Изобразим множество С, С – объединение множеств А и В, так как любая книга из множества С принадлежит множеству А или множеству В, С = = А U В.

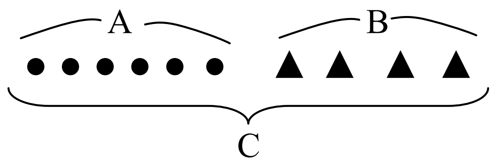


Рис. 6

3. Нужно найти m(С), где С = А U В и А ∩ В = Ø, значит, задачу нужно решать сложением.

4. Используя счет, найдем m(С):

$$C \sim N_{10} \Rightarrow m(C) = m(N_{10}),\ m(C) = 10.$$

Ответ: на двух полках 10 книг.

В ы в о д: 1. Доказали, что задачу нужно решать сложением.
2. Ответили на вопрос задачи.

П р и м е ч а н и е. Обосновать выбор действия можно иначе. С = А U В и А∩В = Ø, тогда m(С) = m(А U В) или m(С) = m(А) + m(В), делаем замену и получаем m(С) = 6 + 4. Чтобы найти, сколько книг на двух полках, нужно сложить число книг на первой и второй полках. Доказали, что задачу нужно решать сложением.

<u>Задача 2.</u> На первой полке 6 книг, на второй – на 3 книги больше. Сколько книг на второй полке?

1. Работа с условием. Выбор множеств.

А – множество книг на первой полке, m(А) = 6,
В – множество книг, m(В) = 3,
С – множество книг на второй полке, m(С) = ?

2. Изобразим множество С. По условию известно, что на второй полке на 3 книги больше, чем на первой. По определению отношения «больше на число» получаем, что на второй полке книг столько, сколько на первой ($C_1 \sim A$) да еще 3 книги (множество В).

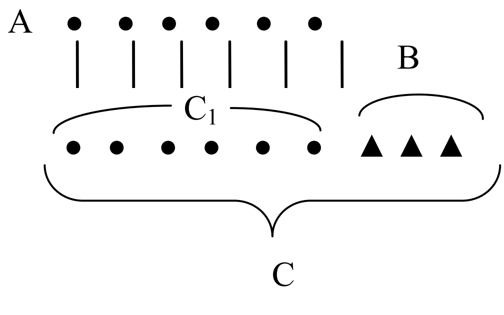


Рис. 7

Шаги построения модели (рис. 7):

1) А, m(А) = 6.
2) $C_1 \sim A$.
3) В, m(В) = 3.

4) C, $C = C_1 \cup B$.
3. Нужно найти m(C), если $C = C_1 \cup B$, $C_1 \cap B = \varnothing$, значит, задачу решаем сложением.
4. $C \sim N_9 \Rightarrow m(C) = m(N_9)$, $\Rightarrow m(C) = 9$. На второй полке 9 книг.

П р и м е ч а н и е. С равно объединению двух непересекающихся множеств, значит, $m(C) = m(C_1) + m(B)$. Сделаем замену: $m(C_1) = m(A) = 6$, так как $C_1 \sim A$ $m(C) = 6 + 3$. Чтобы узнать число книг на второй полке, нужно сложить число книг на первой полке и число, которое показывает, на сколько больше книг на второй полке.

<u>Задача 3.</u> На первой полке 5 книг, это на 4 книги меньше, чем на второй полке. Сколько книг на второй полке?

При построении модели рассуждаем так: на первой полке книг на 4 меньше, чем на второй, значит, на второй полке на 4 книги больше, чем на первой, то есть на второй книг столько, сколько на первой да еще 4 книги. Модель такая же, как к задаче 1.

Говорят, что в этих задачах действие задано в косвенной форме: есть слова «на 4 книги меньше», а задачу решают сложением.

<u>Задача 4.</u> С первой полки взяли 6 книг, а со второй – на 4 книги больше. Сколько книг взяли с двух полок вместе?

Задача составная, нужно сформулировать две простые и решить каждую (см. образцы выше).

### 2.2. Вычитание

2.2.1. Из теории множеств известно, что разность множеств А и В, если В – подмножество А, называется дополнением множества В до множества А.

Мы можем изобразить дополнение одного множества до другого, число элементов дополнения можно найти счетом. Кроме того, в теории множеств доказано, что число элементов дополнения множества В до множества А равно разности числа элементов множества А и множества В.

Краткая запись: m($B_A$) = m(A) – m(B) (1), если B $\subset$ A.

2.2.2. Пусть a = m(A), b = m(B), где a, b $\in$ $N_o$.

Сделав замену в равенстве (1), получим предложение a – b = = m($\overline{B}_A$), из которого можно сформулировать определение разности чисел a и b.

Определение 8. *Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов дополнения множества B до множества A, если a = m(A), b = m(B) и B $\subset$ A.*

Краткая запись: a – b = m($B_A$), где m(A) = a, m(B) = b, B$\subset$A .

**Задание 4.** Найдите значение разности: а) 8 и 5, б) 5 и 0. Докажите, что 7 – 5 = 2.

При этом: а) см. задачу на нахождение суммы чисел (с. 9);
б) используйте A \ Ø = A, m(A \ Ø) = m(A), A \ Ø = $Ø_A$.
Решение.
1) По определению разности 7 – 5 = m($\overline{B}_A$) (1), где 7 = m(A), 5 = m(B) и B $\subset$ A. Известно, что разность равна 2. Значит, нужно доказать, что m($\overline{B}_A$) = 2.
2) Изобразим множества A и B (рис. 8), где B $\subset$ A.

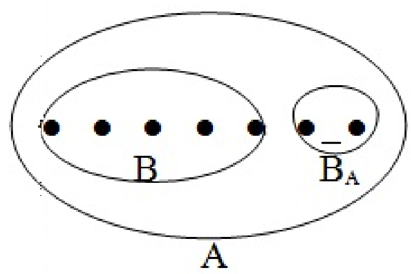


Рис. 8

Элементы из множества A, не вошедшие в множество B, образуют третье множество – дополнение множества B до A, т.е. $\overline{B}_A$. Используя счет предметов, получим $B_A$~$N_2$, т.е. m($B_A$) = 2 (2).
Из (1) и (2) следует, что 7 – 5 = 2 – верное равенство.

Из определения разности чисел a и b мы видим связь вычитания чисел с разностью множеств, из которых второе будет подмножеством первого, т.е. с дополнением второго множества до первого.

Справедливо и обратное. Связь дополнения множеств со сложением чисел раскроем при решении текстовых задач.

В школе дети учатся решать задачи на вычитание четырех типов:

- на нахождение остатка;
- на нахождение неизвестного слагаемого по сумме и известному слагаемому;
- на разностное сравнение;
- на уменьшение на число (в прямой и косвенной форме).

**З а д а н и е 5.** Обосновать выбор действия и ответить на вопрос.

Задача 1. Катя сорвала 12 ромашек, три ромашки она отдала Маше. Сколько ромашек осталось у Кати?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, которые сорвала Катя, m(A) = 12;
B – множество ромашек, которые Катя отдала, m(B) = 3;
C – множество ромашек, которые остались у Кати, m(C) = ?

2. Изобразим множество C (построим модель к задаче) на рис. 9.

Для этого можно изобразить:

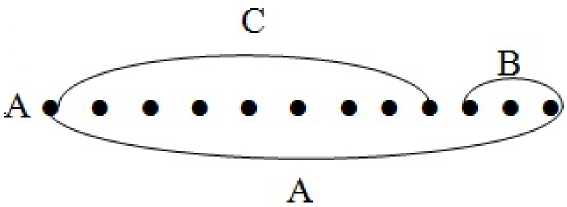


Рис. 9

1) A, m(A) = 12 (элементы A – точки);
2) B, m(B) = 3 и $B \subset A$;
3) элементы из A, которые не принадлежат множеству B, образуют множество C. По определению, C = = A\ B и так как $B \subset A$, то $C = \overline{B}_{A}$.

3. Нужно найти m(C), где множество C равно дополнению множества B до множества A, значит, задачу нужно решать вычитанием. Обоснование можно провести иначе.

Для нахождения m(C), используем теорему о числе элементов дополнения к подмножеству, получим m(C) = m(A) – m(B), сделаем замену m(C) = 12 – 3. В этом случае мы не только доказали, что задачу решаем вычитанием, но и составили выражение, значение которого нужно найти.

4. Чтобы ответить на вопрос задачи, найдем m(C) счетом.

Получим $C \sim N_9 \Rightarrow m(C) = m(N_9)$, m(C) = 9, т.е. у Кати осталось 9 ромашек.

Вывод. 1. Доказали, что задачу нужно решать вычитанием.

2. Ответили на вопрос задачи.

Задача 2. В букете 12 ромашек и васильков. Сколько ромашек в букете, если в нем 7 васильков?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество цветков в букете, m(A) = 12;

B – множество васильков в букете, m(B) = 7;

C – множество ромашек в букете, m(C) = ?

2. Модель к задаче (рис. 10).

Можно изобразить:

1) A, m(A) = 12;

2) B, m(B) = 7, $B \subset A$;

3) Существует C, C = A\ B, и так как $B \subset A$, то $C = \overline{B}_A$ .

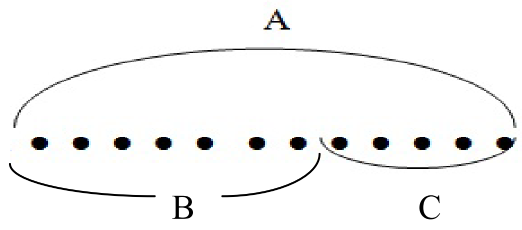

Рис. 10

3. См. объяснение в задаче 1 и дополнить решение,
4. См. объяснение в задаче 2 и дополнить решение.

Задача 3. В букете 10 ромашек и 6 васильков. На сколько васильков меньше, чем ромашек?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, m(A) = 10,

B – множество васильков, m(B) = 6,

C – множество цветов, где m(C) показывает, насколько число васильков меньше числа ромашек. Найти m(C).

2. Изобразим множество C (построим модель к задаче) на рис. 11.

Изобразим:

1) A, m(A) = 10;

2) B, m(B) = 6.

Число ромашек больше числа васильков на какое-то число x. По определению «больше на число x», ромашек столько, сколько васильков да еще x штук. Поэтому множество A будет разбито на два подмножества D и C, где D~B и m(C) = x.

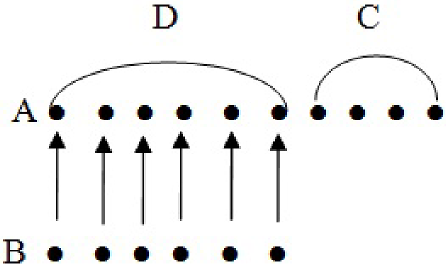

Рис. 11

3. Нужно найти m(C), C = A\ D и $D \subset A$, значит, $C = \overline{D}_A$. Задачу нужно решать вычитанием, а именно, т.к. $m(C) = m(\overline{D}_A)$ и $m(\overline{D}_A) =$ $= m(A) – m(D)$ и m(D) = m(B), тогда получаем, что m(C) = 10 – 6.

4. Чтобы ответить на вопрос задачи, найдем m (C). C ~ ($N_4$), m(C) = = 4. Васильков на 4 меньше, чем ромашек.

Задача 4. В букете 12 ромашек, а васильков на 5 меньше, чем ромашек. Сколько васильков в букете?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, m(A) = 12,

B – множество васильков, m(B) = ?

C – множество цветков, m(C) = 5.

5 – показывает, на сколько число васильков меньше числа ромашек.

2. Изобразим множество B. По условию число васильков на 5 меньше, чем число ромашек, или число ромашек на 5 больше, чем число васильков. Воспользуемся определением отношения «больше на число 5», получаем, что множество ромашек (множество с большим числом элементов) можно разбить на два непересекающихся подмножества D и C, таких, что D равномощно множеству васильков, а число элементов второго C равно 5. Это означает, что ромашек столько, сколько васильков, да еще 5 (рис. 12).

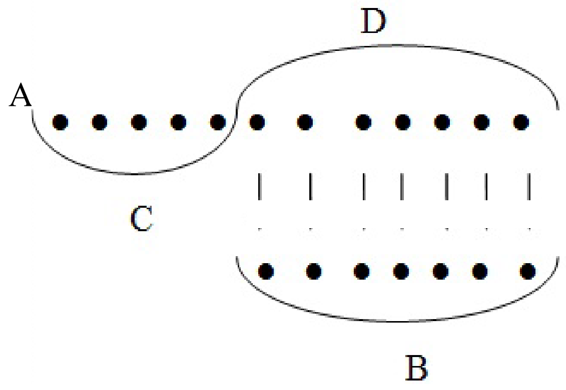

Рис. 12

Шаги построения:

1) A, m(A) = 12;

2) C, m(C) = 5, $C \subset A$;

3) существует D, $D \subset A$ $D = \overline{C_A}$;

4) B~D.

3. Нужно найти m(B),

т. к. B~D, то m(B) = m(D) (1), $D = \overline{C_A}$,

значит, m(D) = m($\overline{C_A}$),

m(D) = m(A) – m(C), т.е. m(D) = = 12 – 5 (2)

Из (1) и (2) m(B) = 12 – 5. Доказали, что число васильков нужно находить вычитанием.

4. B~$N_7$ => m(B) = 7. Число васильков равно 7.

Рассмотрите еще один способ решения этой задачи. Сравните и выберите наиболее простой с вашей точки зрения.

Начнем со второго шага (построение модели).

По условию число васильков на 5 меньше, чем число ромашек. Воспользуемся определением отношения «меньше на число», получаем, что васильков столько, сколько ромашек (множество D), но без 5 цветков (множество C). Из этого следует такое построение (рис. 13):

1) $A$, $m(A) = 12$;
2) $D \sim A$;
3) $C$, $m(C) = 5, C \subset D$;
4) существует $B$, $B \subset D$ элементы которого васильки.

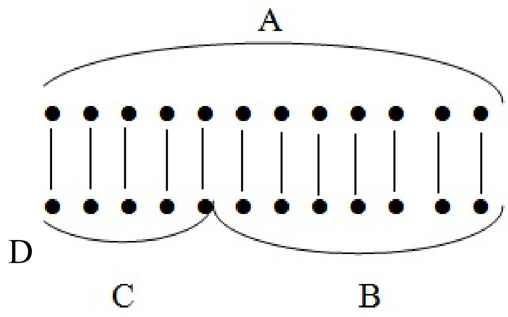

Рис. 13

Найдем $m(B)$. $B \sim N_7 \Rightarrow m(B) = 7$. Число васильков равно 7. Можно найти иначе. $B = D \setminus C$, т.к. $C \subset D$, тогда $B = \overline{C}_D$, задачу будем решать вычитанием, а именно $m(B) = m(D) - m(C) = 12 - 5$, т.к. $D \sim A$, то $m(D) = m(A)$.

Наиболее трудными будут задачи, в которых действие задано в косвенной форме.

Задача 5. В букете 12 ромашек, их на 5 больше, чем васильков. Сколько васильков в букете?

Сформулируйте условие иначе.

По условию число ромашек на 5 больше, чем число васильков, поэтому васильков на 5 меньше, чем ромашек. Задачу с несколько измененным условием мы решаем, как предыдущую.

### 2.3. Умножение

2.3.1. Из школьного курса математики известно такое определение произведения двух чисел. Из него следует, что произведением целых неотрицательных чисел $a$ и $b$ называется целое неотрицательное число $a \cdot b$, такое, что

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}$, если $b > 1$;
2) $a \cdot b = a$, если $b = 1$;
3) $a \cdot b = 0$, если $b = 0$.

Из теории множеств известно, что
$A_b = m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b) = m(A_1) + m(A_2) + ... + m(A_b)$ (1), если множества попарно не пересекаются.

Если $A_1 \sim A_2 \sim ... \sim A_b$, тогда будут равны число элементов в этих множествах, и в правой части равенства (1) будет сумма b равных слагаемых, которую можно заменить произведением числа элементов любого множества на число таких множеств. Получим $m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b) = m(A_1) \cdot b$ .

Если $m(A_1) = a$, тогда получим, что $a \cdot b = m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b)$. Из этого равенства можно сформулировать определение произведения.

Определение 9. *Произведением целых неотрицательных чисел a и b (b > 1) называется число элементов объединения в равномощных попарно непересекающихся множеств, каждое из которых содержит a элементов.*

К р а т к а я  з а п и с ь : $a \cdot b = m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b)$, если множества $A_1, A_2, ..A_b$ – равномощные, попарно непересекающиеся и число элементов каждого множества равно числу a и $b > 1$.

Из этого определения произведения следует, что умножение натуральных чисел a и b связано с объединением равномощных попарно непересекающихся множеств, если первое число a равно числу элементов каждого множества, а второе число b равно числу таких множеств. Справедлива и обратная связь, которую мы раскроем при решении текстовых задач.

П р и м е ч а н и е. В объединении должно быть два и более множеств, поэтому $b > 1$.

Из теории множеств также известно, что $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$. Если $m(A) = a$, $m(B) = b$, где $a, b \in N_0$, тогда $a \cdot b = m(A \cdot B)$.

Можно сформулировать еще одно определение произведения целых неотрицательных чисел.

Определение 10. *Произведением двух целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов декартова произведения множеств A и B, таких, что m(A) = a, и m(B) = b.*

К р а т к а я  з а п и с ь : $a \cdot b = m(A \times B)$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Связь умножения целых неотрицательных чисел с декартовым умножением множеств в школе не рассматривается.

**З а д а н и е  6.** Найти значение произведения: 1) 4 и 3; 2) 0 и 4; 3) 1 и 4, используя связь с объединением множеств.

Решение.

1. По определению $4 \cdot 3 = m(A_1 U A_2 U A_3)$ (1), если $A_1$, $A_2$, $A_3$ – множества равномощные, попарно непересекающиеся и число элементов каждого равно 4, $m(A_1) = 4$.

Множества равномощные, поэтому наглядно их можно изобразить, как на рис. 14.

Изобразим 1. $A_1$, $m(A_1) = 4$.

2. $A_2 \sim A_1$ и $A_3 \sim A_2$.

3. $B = A_1 U A_2 U A_3$.

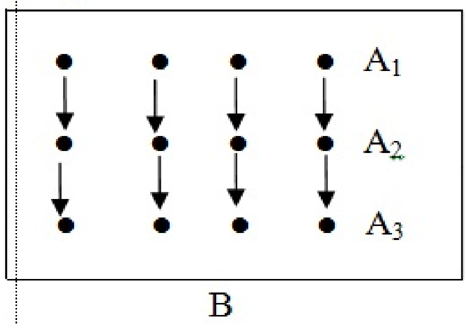


Рис. 14

Найдем $m(A_1 U A_2 U A_3)$ счетом,

$A_1 U A_2 U A_3 \sim N_{12} \Rightarrow m(A_1 U A_2 U A_3) = 12$ (1).

Из (1) и (2) следует, что $4 \cdot 3 = 12$.

2. По определению, $0 \cdot 4 = m(A_1 U A_2 U A_3 U A_4)$ (1), где $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$ $m(A_1) = 0$ (2).

Из (2) следует, что все множества $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ пустые. Объединение пустых множеств – множество пустое, т. е. $A_1 U A_2 U A_3 U A_4 = \varnothing$ (3).

Из (1) и (3) $0 \cdot 4 = m(\varnothing)$ или $0 \cdot 4 = 0$.

3. По определению $1 \cdot 4 = m(A_1 U A_2 U A_3 U A_4)$ (1), если $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$, множества попарно не пересекаются и число элементов каждого равно 1.

В этом случае множества можно изобразить таким образом (рис. 15):

$B = A_1 U A_2 U A_3 U A_4$.

Найдем $m(A_1 U A_2 U A_3 U A_4)$ счетом.

$A_1 U A_2 U A_3 U A_4 \sim N_4 \Rightarrow m(A_1 U A_2 U A_3 U A_4) = 4$ (2)

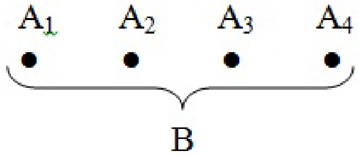


Рис. 15

Из (1) и (2) следует, что $1 \cdot 4 = 4$.

2.3.2. Рассмотрим решение типовых задач из учебников для начальных классов:

1) на конкретный смысл умножения;

2) на увеличение в несколько раз (в прямой и косвенной форме).

Прежде чем приступить к решению текстовых задач, раскроем теоретико-множественный смысл отношений «больше в несколько раз» и «меньше в несколько раз».

Пусть a, b$\in$N и a < b. Выберем множества A и B такие, что m(A) = a, m(B) = b. По определению отношения «меньше», a < b означает существование в множестве B одного подмножества, равномощного множеству A.

Если же нам удается выделить, например 3 подмножества, равномощных множеству A, и в множестве B не останется других элементов, то говорят число a в 3 раза меньше числа b, или число b в 3 раза больше числа a.

Если в множестве B можно выделить c подмножеств, равномощных множеству A и попарно непересекающихся, то в этом случае говорят, что в множестве A элементов меньше, чем в множестве B в c раз, или в множестве B элементов больше, чем в множестве A в c раз. Но т. к. m(A) = a, m(B) = b, то число a меньше числа b в c раз, или число b больше числа a в b раз.

Определение 11. *Натуральное число a меньше натурального числа b в c раз, если множество B, число элементов которого равно b, можно разбить на c попарно непересекающихся подмножеств, равномощных множеству A, число элементов которого равно a.*

**З а д а н и е 7.** Во сколько раз число 3 меньше 9?

Пусть 3 = m(A), 9 = m(B) (рис. 16).

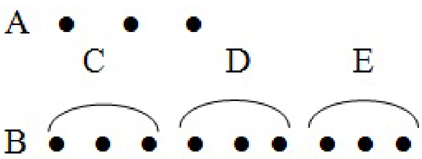


Рис. 16

Разобьем множество B на подмножества, равномощные множеству A.

1. 3 < 6 , значит, существует C ~ A, C $\subset$ B.

2. В множестве B осталось 6 элементов, три из них образуют D, D~A.

3. Осталось еще 3 элемента, они образуют множество E. Больше элементов в множестве B не осталось.

4. Пусть X – множество всех подмножеств, на которые разбили множество B, X = {C, D, E}. Найдем счетом число элементов в множестве X. $X \sim N_3 \Rightarrow m(X) = 3$. Множество B разбили на 3 подмножества, равномощных множеству A, попарно не пересекающихся. По определению число 3 меньше 9 в 3 раза, или число 9 больше числа 3 в 3 раза.

**З а д а н и е 8.** Обосновать, что задачи нужно решать умножением, и ответить на вопрос.

<u>Задача 1.</u> На каждую из четырех полок нужно добавить по 2 книги. Сколько потребуется книг?

1. Работа с условием.

$A_i$ – множество книг, которые нужно добавить на каждую полку i, $m(A_i) = 2$, i = 1, 2, 3, 4;

B – множество книг, которые потребуются, m(B) = ?

2. Модель к задаче (рис. 17).

Множество B будет равно объединению множеств книг, которые нужно добавить на каждую полку. Множества книг, которые нужно добавить на каждую полку, равномощные, наглядно их можно изобразить так:

1) $A_1$, $m(A_1) = 2$;

2) $A_2 \sim A_1$ , $A_3 \sim A_2$ , $A_4 \sim A_3$;

3) существует B, $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

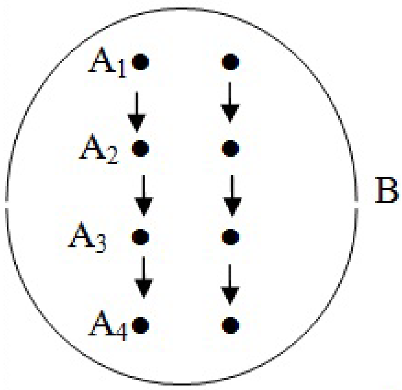

Рис. 17

3. Нужно найти B, $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$,

$m(B) = m(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$,

так как $A_1$, $A_2$ , $A_3$, $A_4$ равномощные и попарно не пересекающиеся, тогда число элементов объединения равно произведению числа элементов любого из этих множеств и числа таких множеств. Получим $m(B) = m(A_1) \cdot 4$ или $m(B) = 2 \cdot 4$.

Доказали, что задачу нужно решать умножением.

4. Находим счетом число элементов множества B. $B \sim N_8 \Rightarrow m(B) = 8$.

Ответ: потребуется 8 книг.

<u>Задача 2.</u> На одну полку поставили 6 книг, а на другую в 2 раза больше. Сколько книг поставили на вторую полку?

1. Пусть A – множество книг, которые поставили на первую полку, m(A) = 6. B – множество книг, которые поставили на вторую полку, m(B) = ?

Число 2 показывает, во сколько раз больше поставили книг на вторую полку.

2. Изобразим B. По условию на вторую полку поставили в 2 раза больше, чем на первую, т. е. m(B) в 2 раза больше, чем m(A). По определению «больше в 2 раза», множество книг на второй можно разбить на два подмножества, равномощных множеству A, или множество B должно состоять из двух подмножеств, равномощных множеству A (рис. 18).

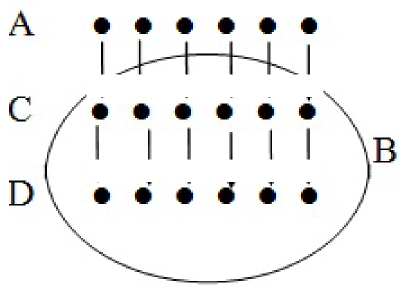

Рис. 18

Изобразим: 1) A, m(A) = 6;
2) C~A, D~C;
3) B = CUD, C~D.

3. Нужно найти m(B), где B равно объединению двух равномощных и попарно непересекающихся множеств, значит, действие умножение, и m(B) = m(C) · 2, т.к. C~A, то m(C) = m(A) и m(B) = 6 · 2. Доказали, что задачу нужно решать умножением.

4. Ответьте на вопрос задачи.

У к а з а н и е. Прочувствуйте разницу в моделях к задаче 1 и задаче 2.

Задача 3. На первой полке 6 книг, это в 3 раза меньше, чем на второй полке. Сколько книг на второй полке?

У к а з а н и е. Внимательно читайте условие. Слова «меньше в 3 раза» относятся к числу книг на первой полке, значит, на второй полке книг в 3 раза больше. Теперь нетрудно разобрать задачу с измененными словами в условии. Задача 3. На первой полке 6 книг, а на второй их в 3 раза больше. Сколько книг на второй полке?

### 2.4. Деление

2.4.1. Вспомним определение частного двух чисел.

Частным чисел a и b называется число (a : b), которое при умножении на b дает число a .

Раскроем теоретико-множественный смысл частного.

Для этого рассмотрим две задачи.

<u>Задача 1.</u> Дано множество А, m(А) = а. Разобьем множество А на равномощные непересекающиеся подмножества, в каждом из которых b элементов. Найдем число подмножеств.

Пусть число таких подмножеств x, тогда $A = A_1 U A_2 U \ldots U A_x$ и $m(A_x) = b$, где $x = 1, 2, \ldots, b$. Тогда $m(A_1 U A_2 U_{\ldots} U A_x) = m(A_x) \cdot x$ или $a = b \cdot x$ (1). Из этого следует, что $x = a : b$. Получили, что частное а и b равно числу подмножеств, на которые разбили множества, А, m(А) равно первому числу а, число b равно числу элементов каждого подмножества.

<u>Задача 2.</u> Дано множество А, m(А) = а. Разобьем множество А на b подмножеств равномощных и попарно непересекающихся. Найдем число элементов в каждом подмножестве.

Из условия $A = A_1 U A_2 U \ldots U A_b$, тогда $m(A) = m(A_1 U A_2 U \ldots U A_b) =$
$= m(A_b) \cdot b$.

Обозначим $m(A_b) = x$, получим $a = x \cdot b$ (2). => $x = a : b$. Получили, что частное а и b равно числу элементов каждого подмножества, на которые разбили множество А, m(А) = а, в – число таких подмножеств.

Сравним предложения (1) и (2). В обоих случаях по произведению а и известному множителю b нужно найти второй множитель х, который называется частным а и b.

Определение 12. *Частное натуральных чисел а и b равно числу <u>подмножеств,</u> на которые разбили множество А, m(А) = а, b – число элементов в каждом подмножестве и подмножества непересекающиеся.*

Определение 13. *Частное натуральных чисел а и b равно <u>числу элементов каждого равномощного подмножества,</u> на которые разбили множество А, m(А) = а и b число таких непересекающихся подмножеств.*

2.4.2. Различают два типа деления в зависимости от смысла второго числа b:
- если b равно числу элементов в каждом подмножестве, то это деление по содержанию;
- если b равно числу подмножеств, то это деление на равные части.

**З а д а н и е 9.** Найти значение частного 10 и 2, используя: 1) деление по содержанию; 2) деление на равные части.

1. По определению частного при делении по содержанию, получаем:
10 : 2 = x (1), где x – число равномощных непересекающихся подмножеств,
10 = m(A), 2 – число элементов в каждом подмножестве.

Модель к задаче:

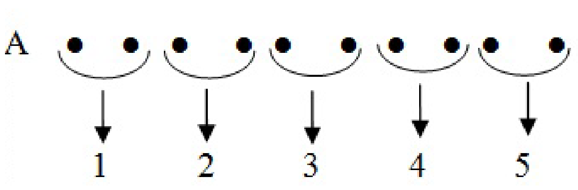

Рис. 19

1) изобразим A, m(A) = 10;
2) разобьем A на подмножество по 2 элемента в каждом. B – множество всех таких подмножеств, которые только выделены дугами (рис. 19).

Узнаем счетом число таких подмножеств. $B \sim N_5$ => m(B) = 5 => число равномощных подмножеств x = 5 (2). Из (1),(2) 10 : 2 = 5.
2. По определению частного при делении на равные части получаем
10 : 2 = $m(A_i)$ (1), где 10 = m(A), 2 – число равномощных подмножеств.
2. Модель к задаче.
1. Изобразим A, m(A) = 10.
2. Разобьем множество A на два подмножества $A_1$ и $A_2$ .Будем брать в

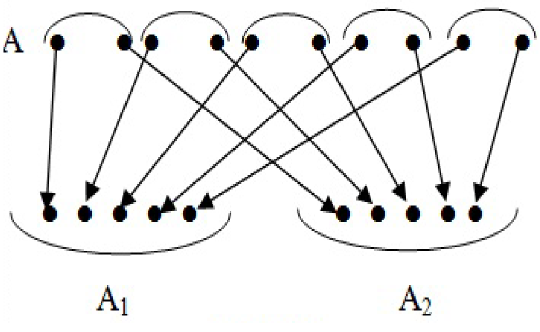

Рис. 20

множестве A два элемента и раскладывать по одному в каждое подмножество столько раз, сколько это возможно. Теперь A – пустое, а все его элементы находятся в $A_1$ и $A_2$. Так читается эта модель (рис. 20). Каждый раз добавляли в подмножество по одному элементу, значит, $A_1 \sim A_2$.

3. Найдем счетом число элементов в одном (любом) подмножестве. $A_1 \sim N_5 \Rightarrow m(A_1) = 5$ (2).
Из (1) и (2) $10 : 2 = 5$.
Из вышесказанного следует, что деление натуральных чисел связано с разбиением множества на равномощные попарно непересекающиеся подмножества.

Обратную связь раскроем при решении текстовых задач. Типовые задачи на деление:
1) на деление по содержанию;
2) на деление на равные части;
3) на кратное сравнение;
4) на уменьшение в несколько раз (в прямой и косвенной форме).

**З а д а н и е 10.** Доказать, что задачи нужно решать делением и ответить на вопрос.

<u>Задача 1.</u> 12 книг нужно расставить по 3 книги на каждую полку. Сколько полок потребуется?
1. Пусть A – множество всех книг, $m(A) = 12$;
   $A_i$ – множество книг на каждой полке, $m(A_i) = 3$, где $i = 1, 2, \ldots, x$;
   x – число полок, x = ?
2. Модель к задаче (рис. 21):

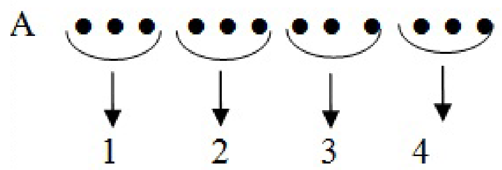

Рис. 21

12 книг (множество A) нужно разбить на подмножества, по 3 книги в каждом.
1) изобразим A, $m(A) = 12$;
2) будем брать из A по три книги столько раз, сколько это возможно и образовывать из них подмножества. Условно обозначено каждое подмножество дугой;
3) задачу будем решать делением натуральных чисел, т.к. множество A разбили по содержанию на четыре равномощных подмножества.

Пусть B – множество таких равномощных подмножеств;
4) счетом найдем число равномощных подмножеств.

$B \sim N_4 \Rightarrow m(B) = 4$. Число подмножеств равно 4, т.к. для книг каждого подмножества потребуется полка, значит, потребуется 4 полки.

П р и м е ч а н и е. Обосновать выбор действия можно иначе. Обозначим равномощные подмножества $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_x$, тогда $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x$, $m(A) = m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x) = m(A_i) \cdot x$. Получили $m(A) = m(A_i) \cdot x$, сделаем замену $12 = 3 \cdot x$, отсюда $x = 12 : 3$.

Задача 2. 12 книг нужно расставить на 3 полки поровну. Сколько книг будет на каждой полке?

1. Пусть A – множество всех книг, $m(A) = 12$;

3 – число полок;

$A_i$ – множество книг на каждой полке, если $i = 1,2,3$. Найти $m(A_i)$.

2. Модель к задаче. 12 книг (множество A) нужно расставить поровну на 3 полки, т. е. множество A нужно разбить на 3 равномощных подмножества. Речь идет о делении на равные части, задачу решаем делением. Чтобы ответить на вопрос задачи, изобразим модель (рис. 22):

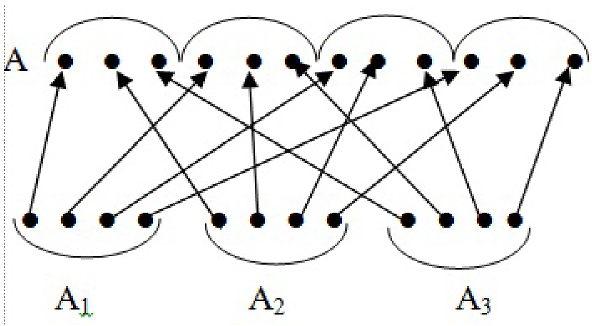

Рис. 22

1) A, $m(A) = 12$;

2) изобразим условно три подмножества дугами;

3) будем брать по 3 книги из множества A столько раз, сколько это возможно, и раскладывать по одной книге в каждое подмножество. Все книги из A переложили в подмножества, A – пустое. Задачу будем решать делением, т.к. множество A разбили на равномощные подмножества.

3. Счетом найдем число книг в любом подмножестве $A_1 \sim N_4 \Rightarrow m(A_1) = 4$, т.к. $A_2 \sim A_3 \sim A_1$, то на каждой полке по 4 книги.

Задача 3. На первой полке 18 книг, а на второй 6 книг. Во сколько раз на второй полке меньше книг, чем на первой?

1. Пусть A – множество книг на первой полке, $m(A) = 18$;

B – множество книг на второй полке, $m(B) = 6$;

x – натуральное число, которое показывает, во сколько раз книг на второй полке меньше, чем на первой, x = ?

2. Модель к задаче (рис. 23):

По условию на второй полке число книг в х раз меньше, чем на первой, иначе на первой полке число книг в х раз больше, чем число книг на второй полке.

По определению «18 больше 6 в х раз» получаем, что множество А(m(А) = 18) можно разбить на х равномощных попарно непересекающихся подмножеств по 6 книг в каждом.

Из этого следует построение:
1) А, m(А) = 18;
2) В, m(В) = 6;
3) разобьем А на непересекающиеся подмножества, равномощные множеству В.

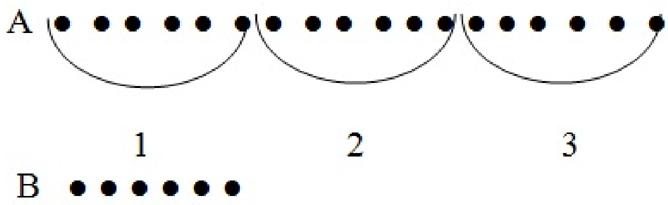

Рис. 23

Для этого в множестве А будем брать по 6 книг столько раз, сколько это возможно. Каждые 6 книг будут образовывать подмножество. Обозначим их дугами.

4. Пусть С – множество всех подмножеств.

Найдем m(С) счетом. $C \sim N_3$ => m(С) = 3 – число подмножеств, равномощных и попарно непересекающихся, равно трем. Значит, 18 больше 6 в 3 раза, или на второй полке число книг в три раза меньше, чем число книг на первой полке.

П р и м е ч а н и е. Обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_x$ подмножества, на которые разбили множество А.

$A = A_1 U A_2 U \ldots U A_x$. $A_1 \sim A_2 \sim A_x \sim B$ (1)

$m(A) = m(A_1 U A_2 U A_x)$ с учетом условия (1), $m(A) = m(A_1) \cdot x$ и $m(A) = m(B) \cdot x$ => $x = m(A) : m(B)$. Задачу решаем делением.

<u>Задача 4.</u> На первой полке 6 книг, а на второй полке в 3 раза меньше. Сколько книг на второй полке?

1. Пусть А – множество книг на первой полке, m(А) = 6;

В – множество книг на второй полке, m(В) = ?

3 – натуральное число, которое показывает, во сколько раз число книг на второй полке меньше числа книг на первой полке.

2. Модель к задаче (рис. 24).

По условию число книг на второй полке меньше в 3 раза, чем на первой, т.е. на первой полке число книг в 3 раза больше, чем на второй.

По определению «больше в 3 раза» множество А можно разбить на три подмножества, равномощных множеству В. Из этого следуют шаги построения.

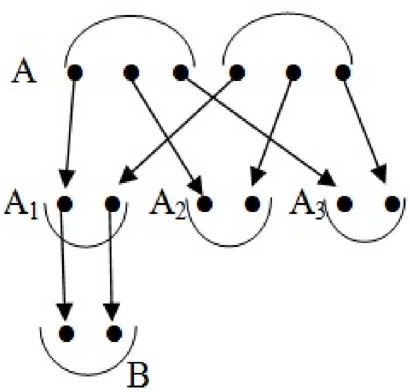


Рис. 24

1) А, m(А) = 6;

2) множество А разобьем на 3 равномощных подмножества (см. задачу на деление на 3 равные части; получим $A_1 \sim A_2 \sim A_3$;

3) В, $B \sim A_1$ .

3. Обоснование выбора действия. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, причем $A_1 \sim A_2 \sim A_3$ и они попарно не пересекаются. $m(A) = m(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = m(A_1) \cdot 3$. Сделаем замену, т.к. $A_1 \sim B$, то $18 = m(B) \cdot 3 \Rightarrow m(B) = 18 : 3$. Задачу решаем делением.

4. Используя счет, найдем m(В).

$B \sim N_2 \Rightarrow m(B) = 2$. Получили, что на второй полке 2 книги.

## § 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дайте теоретико-множественное толкование высказывания:
   1) 5 = 5; 2) 0 = 0; 3) 4 < 6; 4) 7 > 5; 5) 0 < 3.

2. Докажите существование и единственность суммы чисел 5 и 3.

3. Докажите существование и единственность разности чисел 5 и 2.

4. В букете 12 гвоздик, а ромашек на 4 больше. Сколько ромашек в букете?

5. Купили 9 блокнотов, а ручек на 5 штук меньше. Сколько ручек купили?

6. В букете 12 гвоздик и 8 ромашек. На сколько гвоздик больше, чем ромашек?

7. На одну полку поставили 5 книг, а на вторую в 3 раза больше. Сколько книг поставили на вторую полку?

8. Из автобуса на остановке вышло 12 человек, а вошло в 3 раза меньше. Сколько человек вошло в автобус ?

9. Обоснуйте выбор действий при решении составных задач:

а) в пакете было 10 яблок, а груш на 5 больше. Груши раздали трем детям поровну. Сколько груш получил каждый ребенок?

б) в пакете было 14 груш, 4 груши съели, а остальные раздали детям по 2 груши каждому. Сколько детей получили груши?

в) у Коли 12 марок, это на 4 меньше, чем у Вани, а у Миши в 4 раза меньше, чем у Вани. Сколько марок у Миши?

г) во дворе гуляло 4 мальчика, их на 8 меньше, чем девочек. Во сколько раз мальчиков меньше , чем девочек?

д) 8 гусей и 10 уток посадили в 3 корзины поровну. Сколько птиц в каждой корзине?

10. Используя теоретико-множественный подход к действиям над числами, найдите значения выражений:

$$6 + 4;\ 6 - 4;\ 5 \cdot 3;\ 8 : 4.$$

11. Не находя значения выражений, сравните их:

$$(5 + 2) + 3 \text{ и } 5 + (2 + 3);$$
$$(5 + 2) - 3 \text{ и } (5 - 3) + 2;$$
$$7 - (4 - 2) \text{ и } (7 - 4) + 2.$$

12. Используя теоретико-множественный подход к определению отношений над числами, докажите, что 1) $7 = 7$, $7 < 9$, $10 > 7$, $0 < 5$; 2) 6 меньше 8 на 2, 9 больше 5 на 4; 3) 5 меньше 15 в 3 раза; 12 больше 3 в 4 раза.

13. Докажите: если 1) a меньше b на число c, тогда $a + c = b$; 2) если a больше b на c, тогда $a - b = c$; 3) если a больше b в c раз, тогда $a = bc$; 4) если a меньше b в c раз, тогда $a \cdot c = b$.

14. Составить две задачи, решение которых записывается в виде равенства $8 + 2 = 10$. Ответ обосновать.

15. Составить 4 задачи, решение которых записывается в виде равенства $12 - 5 = 7$. Ответ обосновать.

16. Составить две задачи, решение которых записывается в виде равенства $8 \cdot 2 = 16$.

17. Составить четыре задачи, решение которых записывается в виде равенства $15 : 5 = 3$.

В следующих задачах выделить простые задачи. Обосновать выбор действия в каждой и ответить на вопрос.

18. На первую полку поставили 12 книг, на вторую в 2 раза меньше, чем на первую, а на третью на 4 книги больше, чем на вторую. Сколько книг поставили на третью полку?

19. В коробке было 12 карандашей, а ручек на 4 меньше. Ручки раздали четырем детям поровну. Сколько ручек получил каждый?

20. В пакете было 6 яблок, а груш в 2 раза больше. Груши разложили в вазы, по 3 груши в каждую. Сколько ваз потребовалось?

## Библиографический список

1. *Стойлова, Л. П.* Математика / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2002. – 424 с. – ISBN 5-7695-0456-0.

2. *Стойлова, Л. П.* Основы начального курса математики / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1988. – 320 с. – ISBN 5-09-000482-X.

3. *Булатова, Н. Ф.* Целые неотрицательные числа / Н. Ф. Булатова, Н. И. Пушкарёва. – Владимир : ВГПУ, 2008. – 60 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие ........................................................................3

§ 1. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО И НУЛЬ КАК ОБЩЕЕ СВОЙСТВО КЛАССА КОНЕЧНЫХ РАВНОМОЩНЫХ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ..................................................4

1.1. Определение натурального числа и нуля ............................4

1.2. Отношение «равно», «меньше», «меньше на число» .............6

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ....................................................8

2.1. Сложение ..................................................................8

2.2. Вычитание ..............................................................12

2.3. Умножение .............................................................17

2.4. Деление ..................................................................22

§ 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ...............28

Библиографический список ..........................................................30

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Методические рекомендации к изучению
дисциплины «Математика»

Составитель
БУЛАТОВА Нина Федоровна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент И. И. Молодец

Подписано в печать 27.05.13.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 1,86. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.