Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра алгебры и теории чисел

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 050100 «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ», ПРОФИЛИ «МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА», «ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА»

Составители:
Н. Ю. КУРАНОВА
Ю. Ю. ЕВСЕЕВА
О. А. СОЛОВЬЕВА

Владимир 2013

УДК 512
ББК 22.14
М54

Рецензент
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и теории чисел
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. Г. Журавлев

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М54 **Методические** рекомендации к практическим занятиям по теме «Линейные операторы» для студентов бакалавриата по направлению 050100 «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», «Физика и математика» / Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; сост.: Н. Ю. Куранова, Ю. Ю. Евсеева, О. А. Соловьева. – Владимир : ВлГУ, 2013. – 33 с.

Рассмотрена одна из центральных тем курса высшей алгебры – теория линейных операторов: ее основные теоретические вопросы, приведены примеры задач, а также задачи для самостоятельной работы студентов. Разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Алгебра». Могут быть использованы на лекциях, практических занятиях и для индивидуальной работы в процессе самоподготовки.

Предназначены для студентов бакалавриата по направлению 050100 «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», «Физика и математика».

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 512
ББК 22.14

ВВЕДЕНИЕ

Цель методических рекомендаций − изучение студентами одного из центральных разделов высшей алгебры – теории линейных пространств, теории линейных операторов; решение задач классической и современной алгебры; формирование у студентов элементов математической культуры, которые способны обеспечить понимание смысла и значения разделов математики, изучаемых в школе.

Задачи данных рекомендаций − научить студентов проявлять творческий подход и самостоятельность в овладении математическими дисциплинами; оперировать с классическими понятиями алгебры, такими как линейное пространство, линейное преобразование, базис системы векторов, линейная зависимость и т. д.

Изложенная тема изучается в курсе дисциплины «Алгебра», которая относится к вариативной части профессионального цикла. Изучение проводится на 1 – 2-м курсах бакалавриата. Знания и умения, полученные в результате изучения дисциплины, могут быть использованы в дипломном проектировании, а также в дисциплинах, связанных с информатикой.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования: ОК-1, 4, 6; ОПК-3, 4; ПК-5, 6, 11, 13.

Выпускник должен обладать следующими *общекультурными компетенциями (ОК):*

− культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);

− способностью использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);

− умением логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК-6).

Выпускник должен овладеть также профессиональными компетенциями (ПК):

− основами речевой профессиональной культуры (ОПК-3);

− способностью нести ответственность за результаты своей профессиональной деятельности (ОПК-4);

в области педагогической деятельности:

− способностью использовать возможности образовательной среды для формирования универсальных видов учебной деятельности и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса (ПК-5);

− готовностью к взаимодействию с учениками, родителями, коллегами, социальными партнерами (ПК-6);

− умением использовать систематизированные теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11);

− способностью использовать в учебно-воспитательной деятельности основные методы научного исследования (ПК-13).

Методические рекомендации содержат как теоретический, так и практический материал для более глубокого изучения дисциплины «Алгебра».

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть V – линейное пространство, т.е. множество, элементы которого мы назовем векторами, с двумя операциями: сложением векторов и умножением вектора на число из поля P ($P = \mathbf{R}$ или $P = \mathbf{C}$). Эти операции обладают определенными «естественными» свойствами. Пусть также φ – отображение V в V, т.е. правило, описывающее, как по вектору $\boldsymbol{x} \in V$ находить вектор $\boldsymbol{y} \in V$. При этом вектор $\boldsymbol{y}$ называется *образом* вектора $\boldsymbol{x}$ и обозначается $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$.

Отображение $\varphi\colon V \to V$ называется *линейным оператором*, если оно обладает следующими свойствами.

1. $\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$, т.е. образ суммы двух векторов совпадает с суммой образов этих векторов.

2. $\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ – образ вектора, умноженного на число, совпадает с произведением образа этого вектора на то же число.

Отсюда вытекает, что если φ – линейный оператор в V, то

$$\varphi(\alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{y}) = \alpha_1\varphi(\boldsymbol{x}) + \alpha_2\varphi(\boldsymbol{y}),$$

т.е. образ линейной комбинации векторов равен линейной комбинации образов этих векторов с теми же коэффициентами.

Примеры

1. Рассмотрим произвольное линейное пространство V и в нем два оператора.

$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in V$. φ_1 называется нулевым оператором.

$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in V$. φ_2 называется тождественным оператором и обозначается *id*.

Линейность этих операторов проверяется без труда. (Проверьте!)

2. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbf{R}^2$, т.е. множество всех векторов плоскости, и отображение φ – поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{6}$. Это отображение является линейным оператором (см. рисунок). Проверяем свойства:

$\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}_2)$,

$\varphi(\lambda\boldsymbol{x}_1) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}_1)$.

3. Пусть $V = \mathbf{R}^3$ – множество всех векторов трехмерного пространства. Отображение φ – ортогональное проектирование на плоскость OXY.

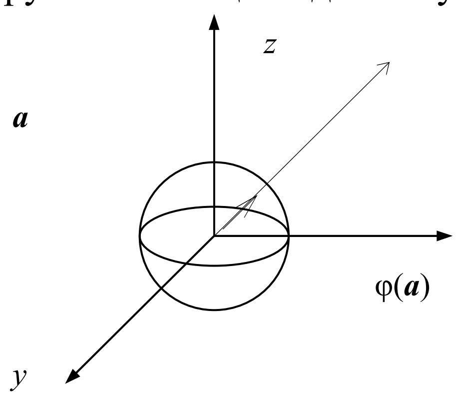
Для проверки линейности этого оператора воспользуемся известными свойствами проектирования.

$\varphi\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_{OXY}\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_{OXY}\,\boldsymbol{a} + \text{пр}_{OXY}\,\boldsymbol{b} = \varphi\,(\boldsymbol{a}) + \varphi\,(\boldsymbol{b})$;

$\varphi\,(\lambda\boldsymbol{a}) = \text{пр}_{OXY}\,(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{пр}_{OXY}\,\boldsymbol{a} = \lambda\varphi\,(\boldsymbol{a})$.

φ – оператор проектирования на плоскость – линейный оператор (проектор).

4. Не все отображения являются линейными. В том же векторном пространстве $V = \mathbf{R}^3$ рассмотрим единичную сферу, задаваемую в декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и отображение φ, переводящее вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\varphi(\boldsymbol{a})$, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$ и имеющий единичную длину.



Отображение φ не является линейным оператором, т.к. $\varphi\,(\lambda\boldsymbol{a}) = \varphi\,(\boldsymbol{a}) \neq$ $\neq \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$ при $\lambda \neq 1$.

5. Рассмотрим $V = P_{\text{n}}\,[x]$, т.е. линейное пространство всех многочленов степени не выше n:

$P_n\,[x] = \{p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0,$ $a_i \in P\}$,

и φ – отображение дифференцирования:

$\varphi\,(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) = na_nx^{n-1} + \ldots + a_1$.

Мы знаем свойства производной:

$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$ и $(\lambda p(x))' = \lambda p'(x)$;

следовательно, отображение дифференцирования является линейным оператором, который обозначается $\varphi = d$.

6. Пусть $V = M_n$ – линейное пространство квадратных матриц порядка n, A – фиксированная матрица, φ – отображение $M_n \to M_n$, действующее следующим образом: для произвольной матрицы $B \in M_n$ образ $\varphi\,(B) = A{\cdot}B$.

Проверим линейность этого отображения, используя известные свойства умножения матриц:

$\varphi\,(B + C) = A(B + C) = AB + AC = \varphi\,(B) + \varphi\,(C)$;

$\varphi\,(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda\varphi\,(B)$.

Если $n = 2$, а матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то для любой матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\varphi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Задания

Пусть $x = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие операторы (преобразования):

1.

$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3)$,

$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2)$,

$Cx = (x_3^4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3)$.

2.

$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2)$,

$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 0, \quad x_2^4 + 2x_3)$,

$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2x_3)$.

3.

$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,

$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,

$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3)$.

4.

$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,

$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 1, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4)$,

$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.

5.

$Ax = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6)$,

$Bx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$,

$Cx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$.

6.

$$Ax = \left(2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3\right),$$

$$Bx = \left(2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3\right),$$

$$Cx = \left(2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5\right).$$

7.

$$Ax = \left(x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right),$$

$$Bx = \left(x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6\right),$$

$$Cx = \left(x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3\right).$$

Задания

Пусть $x = \{x_1, \quad x_2, \quad x_3\}$, $Ax = \{x_2 - x_3, \quad x_1, \quad x_1 + x_3\}$, $Bx = \{x_2, \quad 2x_3, \quad x_1\}$. Найти:

1. ABx.	2. A^2x.	3. $\left(A^2 - B\right)x$.
4. B^4x.	5. B^2x.	6. $\left(2A + 3B^2\right)x$.
7. $\left(A^2 + B^2\right)x$.	8. $\left(B^2 + A\right)x$.	9. BAx.
10. $B(2A - B)x$.	11. $A(2B - A)x$.	12. $2(AB + 2A)x$.

§ 2. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ДАННОМ БАЗИСЕ

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – некоторый базис линейного пространства V, т.е. линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства V; φ – линейный оператор. Образы базисных векторов $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$, как и все векторы пространства V, линейно выражаются через базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n^1\boldsymbol{e}_n;$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_1^2\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n^2\boldsymbol{e}_n;$$

$$\ldots$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_n) = a_1^n\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n^n\boldsymbol{e}_n.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного оператора в данном базисе. В столбцах этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов в рассматриваемом базисе.

Примеры

1. Пусть $V = \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис.

Рассмотрим нулевой и тождественный операторы. В первом случае $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ $\forall\, \boldsymbol{x}$ и, следовательно,

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3;$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3;$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица нулевого оператора.}$$

Если $\varphi = id$, то $id(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ $\forall\, \boldsymbol{x}$ и, следовательно,

$$id(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3;$$

$$id(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3;$$

$$id(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3.$$

Следовательно, матрицей оператора id будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Заметим, что матрицами нулевого и тождественного операторов в любом базисе будут нулевая и единичная матрицы соответственно.

2. $V = \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^2$. Оператор φ – поворот на угол $\frac{\pi}{6}$:

$$\varphi\,(\boldsymbol{i}) = (\cos\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{i} + (\sin\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{j};$$

$$\varphi\,(\boldsymbol{j}) = (-\sin\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{i} + (\cos\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{j}.$$

Следовательно, матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно получить матрицу поворота на любой угол α:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. $V = \mathbf{R}^3$, φ – оператор проектирования на плоскость OXY. Найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = = \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Так как $\varphi\,(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(\boldsymbol{k}) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В столбцах матрицы A стоят образы базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в координатной форме.

4. $V = P_3\,[x]$ – линейное пространство многочленов степени не выше 3, $\varphi = d$ – оператор дифференцирования; $1, x, x^2, x^3$ – стандартный базис пространства V.

Напомним, что любой многочлен $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в рассматриваемом базисе может быть записан в координатной форме как четырехмерный вектор $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $d(1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d(x) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d(x^2) = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d(x^3) = \ = 3x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица оператора d имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $V = \mathbf{R}^3$, φ_A – оператор умножения на матрицу A. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^3$; вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Действие оператора φ_A описывается следующим образом:

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\varphi\,(\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(\boldsymbol{j}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица оператора φ_A совпадает с исходной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Этот пример показывает, что любая матрица является матрицей некоторого оператора, а именно, оператора умножения на эту матрицу.

Каждый линейный оператор φ однозначно определяется своей матрицей. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi\,(\boldsymbol{e}_1) & \varphi\,(\boldsymbol{e}_2) & \ldots & \varphi\,(\boldsymbol{e}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} -$$

матрица оператора φ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Столбцы матрицы представляют собой координатную запись образов базисных векторов. Если известны векторы $\varphi\,(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi\,(\boldsymbol{e}_n)$, то известно, куда отображается любой вектор $\boldsymbol{x}$. Действительно, пусть

$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ – разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$;

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = \varphi\,(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\varphi\,(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) =$$

$$= x_1\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_1^2 \\ \cdots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_1^n \\ \cdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

То есть каждый оператор является оператором умножения на свою матрицу A.

Так, рассмотренный нами в примере 4 оператор дифференцирования d имеет в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если многочлен $p(x) \in P_3[x]$ имеет вид $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то координатная запись этого многочлена в базисе $1, x, x^2, x^3$ такова:

$$p(x) = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix};$$

$d(p(x)) = p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Координатная запись многочлена $p'(x) = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Этот вектор получается из вектора $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$, как и утверждает теория, умножением на матрицу A:

$$\begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$$x' = x + y$$
$$y' = y + z$$
$$z' = z + x$$

Решение

$$x' = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$$
$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z$$
$$z' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Определение: *Если вектор $\bar{x}$ переводится в вектор $\bar{y}$ линейным преобразованием с матрицей A, а вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$ линейным преобразованием с матрицей B, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$ (оно называется произведением составляющих преобразований)*

$$C = B \cdot A.$$

Пример. Задано линейное преобразование A, переводящее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ и линейное преобразование B, переводящее вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

$$C = B \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Т.е. $\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$.

Примечание: если $|A| = 0$, то преобразование вырожденное, т.е., например, плоскость преобразуется не в целую плоскость, а в прямую.

Задания. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора:

1) проектирования на ось Ox;

2) проектирования на плоскость $z = 0$;

3) проектирования на ось Oz;

4) зеркального отражения относительно плоскости Oyz;

5)проектирования на ось Oy;

6) зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$;

7) зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$;

8) проектирования на плоскость $y - z = 0$;

9) проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}x$;

10) проектирования на плоскость Oyz;

11) зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$;

12) зеркального отражения относительно плоскости Oxy;

13) проектирования на плоскость $x - y = 0$;

14) проектирования на плоскость $y + z = 0$;

15) зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.

§ 3. МАТРИЦА ОПЕРАТОРА В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ

Определение. *Матрицы, задающие одно и то же линейное* преобразование в разных базах, подобны между собой. При этом матрица линейного преобразования φ в базе $e^{/}$ получается трансформированием матрицы этого преобразования в базе e матрицей перехода от базы $e^{/}$ к базе e.

Пусть матрица A задает линейное преобразование φ в базе e. Тогда любая матрица B, подобная матрице А,

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q,$$

также задает преобразование φ в некоторой базе, а именно, в базе, получающейся при помощи матрицы перехода Q^{-1} от базы e к базе $e^{/}$.

Другими словами, матрица T называется матрицей перехода от одной базы к другой, если

$$\begin{pmatrix} e_1^1 \\ . \\ e_n^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} \dots q_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_{n1} \dots q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ . \\ e_n \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$e^{/} = \mathrm{T} \cdot e, \quad \text{где } T - \text{матрица перехода.}$$

Возьмём в пространстве E^n два различных базиса e_1, e_2, … e_n и E_1, E_2, … E_n.

Рассуждение проведём для случая $\boldsymbol{n} = 3$. Очевидно, что один и тот же вектор $\boldsymbol{x}$ относительно различных базисов имеет различные координаты.

Действительно, ограничиваясь случаем $\boldsymbol{n} = 3$, можем написать:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{x}_2 \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{x}_3 \mathbf{e}_3 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1' \mathbf{E}_1 + \boldsymbol{x}_2' \mathbf{E}_2 + \boldsymbol{x}_3' \mathbf{E}_3 . \tag{2}$$

Любой вектор второго базиса можем разложить по первому базису, т.е.

$$\begin{aligned} E_1 &= \tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{21}\mathbf{e}_2 + \tau_{31}\mathbf{e}_3 ; \\ E_2 &= \tau_{12}\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2 + \tau_{32}\mathbf{e}_3 ; \\ E_1 &= \tau_{13}\mathbf{e}_1 + \tau_{23}\mathbf{e}_2 + \tau_{33}\mathbf{e}_3 . \end{aligned} \tag{3}$$

Подставим (3) в (2):

$$\mathbf{x} = x_1'(\tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{21}\mathbf{e}_2 + \tau_{31}\mathbf{e}_3) + x_2'(\tau_{12}\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2 + \tau_{32}\mathbf{e}_3) + x_3'(\tau_{13}\mathbf{e}_1 + \tau_{23}\mathbf{e}_2 + \tau_{33}\mathbf{e}_3) =$$
$$= (\tau_{11}x_1' + \tau_{12}x_2' + \tau_{13}x_3')\mathbf{e}_1 + (\tau_{21}x_1' + \tau_{22}x_2' + \tau_{23}x_3')\mathbf{e}_2 + (\tau_{31}x_1' + \tau_{32}x_2' + \tau_{33}x_3')\mathbf{e}_3. \qquad (4)$$

В силу единственности разложения по данному базису мы должны приравнять коэффициенты при векторах e_1, e_2, e_3 в правых частях формул (1) и (4). Тогда получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_{11}x_1' + \tau_{12}x_2' + \tau_{13}x_3'; \\ x_2 &= \tau_{21}x_1' + \tau_{22}x_2' + \tau_{23}x_3'; \\ x_3 &= \tau_{31}x_1' + \tau_{32}x_2' + \tau_{33}x_3'. \end{aligned} \qquad (5)$$

Введём в рассмотрение матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \; X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}; \; T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

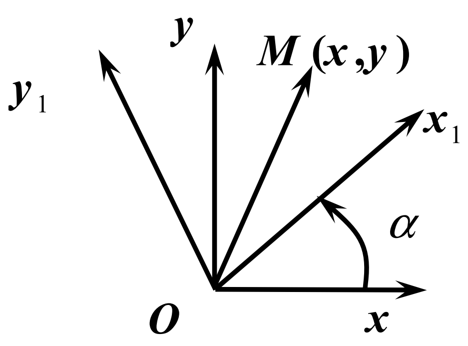
Тогда соотношения (5) можно записать в матричном виде $X = T \cdot X'$.

Матрица T называется *матрицей преобразования координат* при переходе от старого базиса к новому, т.е. от *базиса* $e_1, e_2, \dots e_n$ к базису $E_1, E_2, \dots E_n$. Причём столбцами матрицы преобразования координат являются координаты вектора нового базиса $E_1, E_2, \dots E_n$ относительно старого базиса $e_1, e_2, \dots e_n$.

Если преобразование координат состоит в повороте координатных осей, то матрица T называется матрицей поворота.

Пример. При повороте координатных осей xOy на угол α мы имели (см. рисунок).

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y &= x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{aligned}\right\}.$$



Здесь

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} - \textit{матрица}$$

поворота.

Пусть в пространстве E определён линейный оператор A, т.е.

$$y = A \cdot x \qquad (6)$$

или $\boldsymbol{Y} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{X}$, где $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1 \quad \boldsymbol{y}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{y}_n)^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_n)^{\boldsymbol{T}}$ − (7) матрицы-столбцы, составленные из координат векторов **x** и **y** относительно данного базиса e_1, e_2, … e_n, A − матрица линейного оператора A.

Выберем в том же пространстве E^n другой базис $E_1, E_2, \ldots E_n$. Относительно нового базиса матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ будет иной. Обозначим через $\boldsymbol{T}$ матрицу преобразования координат, а через $\boldsymbol{X}'$ и $\boldsymbol{Y}'$ − одностолбцовые матрицы, составленные из координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ относительно нового базиса, т.е.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X}', \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Y}'. \tag{9}$$

Подставим (8) и (9) в (7), тогда получим

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Y}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X}'. \tag{10}$$

Умножая левую и правую части равенства (10) слева на $\boldsymbol{T}^{-1}$, получим:

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X}'. \tag{11}$$

Если к тому же $\boldsymbol{T}$ − ортогональная матрица, т.е. осуществляет переход от одного ортонормированного базиса к другому, то

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X}'. \tag{12}$$

Итак, если в E^n перейти к новому базису, то матрица линейного оператора также изменится и в самом общем случае будет равна

$$\boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}.$$

Пример. Линейный оператор f пространства R^3 имеет в базисе

$\boldsymbol{e}_1 = (8, -6, 7)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-16, 7, -13)$, $\boldsymbol{e}_3 = (9, -3, 7)$

матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B того же преобразования в базисе

$\boldsymbol{e}_1' = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{e}_2' = (3, -1, 2)$, $\boldsymbol{e}_3' = (2, 1, 2)$.

Решение. Находим матрицу перехода T от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$. Получаем

$$\mathrm{e}_1' = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3;$$

$$\mathrm{e}_2' = \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + 3\mathrm{e}_3;$$

$$\mathrm{e}_3' = -3\mathrm{e}_1 - 5\mathrm{e}_2 - 6\mathrm{e}_3.$$

Выпишем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица B находится по формуле $B = T^{-1}AT$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания. Найти матрицу линейного оператора в базисе $(e_1', \ e_2', \ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \ e_2, \ e_3)$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 4. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

С каждым оператором φ связаны два важных множества векторов из V. Первое, называемое *ядром* оператора (обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$), состоит из множества всех векторов, отображаемых в нулевой вектор $\mathbf{0}$:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\boldsymbol{x}: \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Второе, называемое *образом* оператора (обозначается $\operatorname{Im}\varphi$), состоит из множества всех образов векторов пространства V:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\boldsymbol{y}: \boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})\}.$$

Для любого линейного оператора φ ядро $\operatorname{Ker}\varphi \neq \varnothing$, т.к. обязательно содержит нулевой вектор: $\mathbf{0} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Действительно, возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{a} \in V$ и запишем: $\mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{a}$; $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\cdot\boldsymbol{a}) = 0\cdot\varphi(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$. Из равенства $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ следует, что и образ линейного оператора φ ($\operatorname{Im}\varphi$) также непуст: $\mathbf{0} \in \operatorname{Im}\varphi$.

Проверим, что ядро и образ являются линейными подпространствами V, т.е. подмножествами, замкнутыми относительно линейных операций в пространстве V.

Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$, т.е $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$; $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ – линейная комбинация рассматриваемых векторов.

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \text{ т.е. } \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

Если же $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}\varphi$, то $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{b})$, т.е. $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – образы каких-то векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Рассмотрим вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ – линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – и найдем его образ

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) + \beta\varphi(\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}.$$

Вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ является образом вектора $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и, следовательно, принадлежит образу оператора $\operatorname{Im}\varphi$.

Примеры

1) φ – нулевой оператор в $\mathbf{R}^3$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

2) $\varphi = id$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^3$.

3) Поворот на некоторый угол в $\mathbf{R}^2$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^2$.

4) φ – проекция в $\mathbf{R}^3$ на плоскость OXY.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{\lambda\boldsymbol{k}\}$ – ось OZ, $\operatorname{Im}\varphi = \langle\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\rangle$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, т.е. плоскость OXY.

5) φ – дифференцирование в $P_3[x]$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{\text{const.}\} = \langle 1\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi = \langle 1, x, x^2\rangle = P_2[x]$, т.е. множество многочленов степени не выше 2.

Найдем $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ для произвольного оператора φ, который в фиксированном базисе есть оператор умножения на матрицу A.

$\operatorname{Ker}\varphi$ – это такие векторы $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, для которых

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + & \dots & + a_1^n x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 x_1 + & \dots & + a_n^n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ядро оператора совпадает с $V(\hat{A})$ – множеством всех решений однородной системы

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + & \dots & + a_1^n x_n & = 0; \\ \quad\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 x_1 + & \dots & + a_n^n x_n & = 0. \end{cases}$$

Для определения размерности ядра мы можем воспользоваться формулой $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim V(\hat{A}) = n - r$, где n – размерность пространства V, а r – ранг матрицы A.

Если $V(\hat{A}) = \{\mathbf{0}\}$, то $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ и любой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ переходит под действием оператора φ в ненулевой вектор. В этом случае, если $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то $\varphi(\boldsymbol{x}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{x}_2)$. Действительно, рассмотрим вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Из сказанного выше следует, что $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, но $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2)$, т.е. $\varphi(\boldsymbol{x}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{x}_2)$.

Такие отображения φ, для которых образы различных векторов различны, называются *инъективными*.

Пример. Найти ядро и образ линейного оператора φ, заданного в некотором базисе пространства R^4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим ранг матрицы линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -14 & -2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} A = 2.$$

Значит, размерность образа линейного оператора Im φ равна 2, размерность ядра ker φ равна 4 – 2 = 2.

Базис образа можно, например, составить из векторов $\varphi\mathbf{e_1}$, $\varphi\mathbf{e_2}$, координаты которых записаны в первых двух столбцах матрицы A.

$\operatorname{Im} \varphi = < \varphi\mathbf{e_1},\ \varphi\mathbf{e_2} >$.

Для отыскания ядра решаем однородную систему уравнений

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0;$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0.$

Общее решение этой системы: (-4α -2β, -7α –β, 5α, 5β). Базис ядра составляют, например, векторы (-4, -7, 1, 0) и (-2, -1, 0, 1).

§ 5. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы в векторном пространстве V. *Суммой* этих линейных операторов называется оператор φ, действующий следующим образом:

$\boldsymbol{x} \to \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})$.

Оператор φ обозначается $\varphi_1 + \varphi_2$.

Проверим, что φ – линейный оператор, т.е. $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$. Согласно нашему определению

$\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \varphi_1(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) + \varphi_2(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_1(\boldsymbol{y}) + \alpha\varphi_2(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_2(\boldsymbol{y}) = \alpha(\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})) + \beta(\varphi_1(\boldsymbol{y}) + \varphi_2(\boldsymbol{y})) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$.

Мы воспользовались линейностью операторов φ_1 и φ_2.

В фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ каждый оператор описывается своей матрицей. Пусть A – матрица оператора φ_1, B – оператора φ_2 и C – оператора $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Столбцы этих матриц – образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в координатной записи

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_1(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_2(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_1(\boldsymbol{e}_i) + \varphi_2(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C = A + B$, т.е. $c_i^j = a_i^j + b_i^j$. Мы видим, что при сложении операторов их матрицы складываются.

Пусть φ – произвольный линейный оператор, λ – число из рассматриваемого поля P. *Произведением* оператора φ на число λ называется оператор ψ, обозначаемый $\lambda\varphi$ и действующий следующим образом: $\psi(\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$. Несложно проверить, что если φ – линейный оператор, то ψ – также линейный оператор. (Проверьте!)

Если A – матрица оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то B – матрица оператора ψ в этом же базисе имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\varphi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \lambda\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \lambda A.$$

Таким образом, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число.

Произведением операторов φ_1 и φ_2 называется оператор φ, действующий следующим образом:

$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x}))$.

Оператор φ обозначается $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и является композицией отображений φ_1 и φ_2.

Проверим линейность оператора φ:

$\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})) = (\text{линейность } \varphi_1) = \varphi_2(\alpha\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_1(\boldsymbol{y})) = (\text{линейность } \varphi_2) = \alpha\varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x})) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{y})) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$.

Пусть A – матрица оператора φ_1, B – матрица оператора φ_2, а C – матрица оператора $\varphi_1\varphi_2$ в фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Выясним, как связаны между собой эти матрицы. Воспользуемся матричной записью действия оператора.

Пусть $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогда $\varphi_1(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi_2(\boldsymbol{x}) = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi\,(\boldsymbol{x}) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Согласно определению произведения операторов

$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x})) = B\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi_1(\boldsymbol{x}) = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.е. $\varphi(\boldsymbol{x}) =$ $= B\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. С другой стороны, $\varphi(\boldsymbol{x}) = C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Итак, мы имеем равенство $C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = B\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, справедливое для любого вектора $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. То есть, с одной стороны, φ – оператор умножения на матрицу C, а с другой стороны, φ – оператор умножения на $B\cdot A$.

Мы знаем, что матрица линейного оператора определена однозначно, т.к. ее столбцами являются столбцы $\varphi\,(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi\,(\boldsymbol{e}_n)$. Следовательно, $C = B\cdot A$. Таким образом, матрица оператора $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ произведения линейных операторов φ_1 и φ_2 является произведением матриц этих операторов, взятых в обратном порядке.

Оператор ψ называется *обратным* к оператору φ, если $\psi\cdot\varphi = \varphi\cdot\psi =$ $= \mathrm{id}$, т.е. их произведение в любом порядке дает тождественный оператор.

Если φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц выполняется равенство $A_\varphi\cdot A_\psi = A_\psi\cdot A_\varphi = E$, т.е. $A_\psi = A_\varphi^{-1}$.

Если оператор φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц A и B в произвольном фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ выполняется условие $A\cdot B = B\cdot A = E$. (E – матрица оператора id.)

Следовательно, $B = A^{-1}$ и оператор ψ однозначно определяется по оператору φ (если он, конечно, существует) и обозначается φ^{-1}. Для существования же оператора φ^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A оператора φ в каком-либо базисе (а следовательно, и в любом) была бы обратима, что равносильно, как мы знаем, условиям $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$. В этом случае Im φ = V, Ker φ ={**0**} и отображение φ является изоморфизмом.

Пример. Линейный оператор f в базисе $\boldsymbol{a_1} = (2, 1)$, $\boldsymbol{a_2} = (1, 1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор g в базисе $\boldsymbol{b_1} = (5, 2)$, $\boldsymbol{b_2} = (1, 0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу линейного оператора $f + g$ в базисе $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$.

Решение

Найдем сначала матрицу A_b линейного оператора f в базисе $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$.

$A_b = T^1 A_a T$, где T – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ к базису $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$. Так как

$\boldsymbol{b_1} = 3\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2}$,

$\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2}$, то

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & -1{,}5 \\ -6{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица суммы линейных операторов имеет вид

$$A_b + B_b = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

§ 6. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{A}$ − линейный оператор. Пусть $\boldsymbol{x} \in E_1$, где E_1 некоторое подпространство пространства E^n. Вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ может принадлежать подпространству E_1, а может и не принадлежать.

Определение 1. *Подпространство E_1 называется инвариантным по отношению к оператору **A**, если $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \in E_1$, $\forall \boldsymbol{x} \in E_1$.*

Определение 2*. Ненулевой вектор* ***x*** *называется собственным вектором линейного оператора* ***A****, если найдётся такое число* λ*, что будет выполняться равенство*

$$\boldsymbol{A\,x} = \lambda\,\boldsymbol{x}.$$

При этом число λ *называют собственным значением (собственным числом) оператора* ***A****, соответствующим вектору* ***x****. Множество всех собственных значений оператора* ***A*** *называется его спектром.*

Остановимся на отыскании собственных значений и собственных векторов линейного оператора ***A***.

Рассмотрение проведём для случая $n = 3$.

Итак, пусть в некотором базисе оператор ***A*** имеет матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$$

и пусть одностолбцовая матрица $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}^T$ соответствует вектору ***x***. Тогда в силу определения

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \lambda \boldsymbol{YX} = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{X} = 0. \qquad (1)$$

Итак, дело свелось к решению системы линейных однородных уравнений, записанной в матричном виде. Очевидно, что эта система имеет ненулевое решение, если $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 0$. Уравнение $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$ называется *характеристическим*, или вековым уравнением оператора ***A***; многочлен $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ называется соответственно *характеристическим многочленом оператора* ***A***. В координатной форме характеристическое уравнение выглядит так:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} - \lambda & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} - \lambda & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив его, найдём $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ − собственные значения линейного оператора. Можно показать, что собственные значения оператора ***A*** не зависят от выбора базиса, т.е. матрицы ***A*** и $\boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}$ имеют одинаковый набор собственных значений. Далее для суммы диагональных элементов матрицы ***A***, которую называют следом этой матрицы ***trA*** или следом оператора *A(trA)*, справедлива формула $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}+\boldsymbol{a}_{33}$. Кроме того, $\boldsymbol{detA}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

После того как найдены собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, остаётся подставить их по очереди в уравнение (1) и найти соответствующие собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$, $\boldsymbol{x}^{(3)}$.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные числа линейного оператора, матрица которого

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. В силу определения собственного вектора можем написать $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}-\lambda\boldsymbol{x}\cdot=0 \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\lambda\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$, где $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1\quad \boldsymbol{x}_2)^{\boldsymbol{T}}$ − матрица-столбец, соответствующая искомому вектору $\boldsymbol{x}$ линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

В матричной форме получим:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Система однородная, следовательно, она имеет бесчисленное множество решений, если определитель системы равен нулю, т.е. имеем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Решая его, получим такие собственные значения: $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=3$.

Найдём соответствующие собственные векторы.

1) $\lambda_1=-1$ подставим в (2), получим

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{x}_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1^{(1)}+\boldsymbol{x}_2^{(2)}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_1^{(1)}=-\boldsymbol{x}_2^{(1)}=\boldsymbol{t}^{(1)},$$

где $\boldsymbol{t}^{(1)}$ − некоторый параметр. Таким образом, имеем множество коллинеарных векторов, соответствующих первому собственному числу $\lambda_1=-1$:

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}^{(1)}\\ -\boldsymbol{t}^{(1)}\end{pmatrix}.$$

Этот вектор нетрудно пронормировать, тогда мы получим единичный собственный вектор, соответсвующий первому собственному числу $\lambda_1=-1$, т.е.

$$\boldsymbol{X}^{(10)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 3$ подставим в (2), получим

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{x}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ => $\boldsymbol{x}_1^{(2)} - \boldsymbol{x}_2^{(2)} = 0$ =>$\boldsymbol{x}_1^{(2)} = \boldsymbol{x}_2^{(2)} = \boldsymbol{t}^{(2)}$, т.е.

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}^{(2)} \\ \boldsymbol{t}^{(2)} \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{X}^{(20)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В заключение заметим, что множество всех векторов $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in E^n$, называется областью значений линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в E^n, а множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in E_1 \subset E^n$, таких, что $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} = 0$, называется *ядром линейного оператора*.

Пример 2. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, матрица линейного преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3\ ; \\ x_2' = \lambda x_2 = 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3; \\ x_3' = \lambda x_3 = 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3\,. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0;$

$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0;$

$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0;$

$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0;$

$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0;$

$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0;$

$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0;$

$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0.$

Собственные значения $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$.

1. Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases}(1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1 + 7x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases}7x_2 + x_3 = -1\\ x_2 + 3x_3 = -3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

Собственные векторы $\overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}) \cdot t$.

2. Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases}-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases}2x_2 + x_3 = -1\\ x_2 - 2x_3 = -3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Собственные векторы $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t$.

3. Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases}-5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases}-x_2 + x_3 = -1\\ x_2 - 5x_3 = -3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Собственные векторы $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t$.

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, матрица линейного преобразования

$$A = \begin{pmatrix}-3 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & -2 & -4\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0;$$

$-(3 + \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) + 2(4 - 2\lambda - 2) - 4(2 - 1 + \lambda) = 0;$

$-(3 + \lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2) + 2(2 - 2\lambda) - 4(1 + \lambda) = 0;$

$-(3 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) + 4 - 4\lambda - 4 - 4\lambda = 0;$

$-3\lambda^2 + 9\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda = 0;$

$-\lambda^3 + \lambda = 0$\$

$\lambda_1 = 0;\quad \lambda_2 = 1;\quad \lambda_3 = -1.$

Для $\lambda_1 = 0$ $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Собственные векторы $\overrightarrow{u_1} = (0 \cdot \overrightarrow{e_1} - 2 \cdot \overrightarrow{e_2} + 1 \cdot \overrightarrow{e_3})\, t$, где t – параметр.

Пример 4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора пространства R^3, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Собственными значениями будут корни этого многочлена. Следовательно, наш оператор имеет одно собственное значение $\lambda = 2$ (кратности 3).

Для нахождения соответствующих собственных векторов подставим $\lambda = 2$ в уравнение $A[\boldsymbol{x}] = \lambda[\boldsymbol{x}]$.

Получим систему уравнений:

$$-2x_1 + x_2 = 0;$$
$$-4x_1 + 2x_2 = 0;$$
$$-2x_1 + x_2 = 0.$$

Общее решение системы: $(\alpha, 2\alpha, \beta)$. Фундаментальная система решений: $\boldsymbol{x} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{y} = (0, 0, 1)$.

Найденные векторы ***x***, ***y*** являются базисом собственного подпространства данного линейного оператора, относящимся к числу λ.

Пример 5. Линейный оператор φ пространства R^3 задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Можно ли найти такой базис, в котором матрица этого линейного оператора имеет диагональный вид? Если да, то найти этот базис и соответствующую матрицу.

Решение. Находим характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Для $\lambda_1 = 1$ собственный вектор $\mathbf{e_1} = (1, 1, 1)$. Для $\lambda_2 = 2$ находим два линейно независимых собственных вектора:

$$\boldsymbol{e_2} = (1, 1, 0), \ \boldsymbol{e_3} = (1, 0, -3).$$

Векторы $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ линейно независимы. Так как $\varphi\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_1}$, $\varphi\boldsymbol{e_2} = 2\boldsymbol{e_2}$, $\varphi\boldsymbol{e_3} = 2\boldsymbol{e_3}$, то в базисе $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ матрица линейного оператора будет:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Для самостоятельного решения</u>. Аналогично найти $\overrightarrow{u_2}$ и $\overrightarrow{u_3}$ для λ_2 и λ_3.

Задания. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$ 5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – СПб. : Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.
2. Курош, А. Г. Лекции по высшей алгебре / А. Г. Курош. – СПб. : Лань, 2007. – 560 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.
3. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : МЦНМО, 2009. – 272 с. – ISBN 978-5-94057-453-8.
4. Куликов, Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. – М. : Наука, 2000. – 287 с. – ISBN 5-09-002697-1.
5. Боревич, З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. – М. : Наука, 1985. – 503 с.
6. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – СПб. : Лань, 2009. – 176 с. – ISBN 978-5-8114-0535-0.

Дополнительная литература

1. Дэвенпорт, Г. Высшая арифметика / Г. Дэвенпорт. – СПб. : Лань, 2010. – 176 с. – ISBN 978-5-397-01298-0.
2. Ленг, С. Алгебра / С. Ленг. – СПб. : Лань, 2012. – 572 с. – ISBN 978-5-458-32084-9.
3. Лидл, Р. Конечные поля / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. – М. : Мир, 2000. – 808 с. – ISBN 5-03-000065-8.

Дополнительная литература к практическим занятиям и самостоятельной работе

1. Куликов, Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Я. Куликов. – М. : Наука, 2000. – 287 с. – ISBN 5-09-002697-1.
2. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков, Г. Дэвенпорт. – СПб. : Лань, 2010. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-0707-1.
3. Кострикин, А. И. Сборник задач по алгебре / А. И. Кострикин. – М. : МЦНМО, 2009. – 272 с. – ISBN 978-5-94057-413-2.

Оглавление

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА ПО НАПРАВЛЕНИЮ
050100 «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»,
ПРОФИЛИ «МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
«ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА»

Составители:
КУРАНОВА Наталья Юрьевна
ЕВСЕЕВА Юлия Юрьевна
СОЛОВЬЕВА Ольга Алексеевна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В. Г. Журавлев

Подписано в печать 14.05.13.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,86. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.