

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра физики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СПЕЦИАЛЬНЫЕ
РАЗДЕЛЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ»



Владимир 2012

УДК 532.5.011
ББК 22.253.31/32
М54

Составители: А. О. Кучерик, А. А. Антипов, Н. Н. Бухаров, Д. Н. Бухаров.

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
Владимирского государственного университета имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Л. В. Фуров

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Специальные разделы вычислительной физики» / Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых ; А. О. Кучерик [и др.]. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2012. – 35 с.

Рассмотрены основы разделов современной математики как теория гидродинамики (идеальные и реальные жидкости, уравнение непрерывности и т. д.). Знание методов и подходов гидродинамики необходимо при компьютерном моделировании систем различной природы (физической, экономической, экологической и т. д.). К лабораторным работам приведена краткая теория, что упрощает их выполнение.

Предназначены для проведения практических и лабораторных занятий студентов-бакалавров специальности 010501 «Прикладная математика и информатика».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 6. Табл. 11. Библиогр.: 11 назв.

УДК 532.5.011
ББК 22.253.31/32

Порядок выполнения лабораторной работы

Выполнение лабораторной работы требует от студента соответствующей подготовки, кроме рассмотренной теоретической части также следует изучать литературу, которую рекомендует преподаватель на лекции.

Отчет по лабораторной работе должен включать:

- номер и название работы;
- цель работы;
- теоретическую часть;
- текст программы, таблицы, расчетные формулы, графики и т.д.;
- вывод.

При работе в лаборатории следует быть внимательным и выполнять правила по технике безопасности (инструкция по технике безопасности находится в лаборатории).

По окончании работы студент должен составить краткое заключение (вывод), в котором необходимо указать, в какой программной среде была реализована лабораторная работа, а также проанализировать результаты выполненной работы.

Краткие теоретические сведения

1. Гидродинамика. Общие сведения

Гидродинамика занимается изучением движения жидкостей и газов. Далее будем для краткости упоминать только жидкость, но имея в виду, что все сказанное также справедливо и для газов. Явления, рассматриваемые в рамках гидродинамики, – макроскопические и поэтому жидкость и газ представляют собой как сплошную среду. Это означает, что всякий малый элемент объема жидкости считается настолько большим, что содержит очень большое число молекул, т.е. объем достаточно малый по сравнению с объемом тела, но существенно больший по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

Таким образом, говоря о некоторой точке жидкости, следует иметь в виду не отдельную молекулу, а целый объем, содержащий множество молекул.

В гидродинамике, прежде всего, осуществляется переход от реальной среды, состоящей из большого числа отдельных атомов или молекул, к абстрактной сплошной среде, для которой можно записать уравнения движения.

Математически описать движущуюся жидкость можно с помощью функций, задающих распределение скорости жидкости $\vec{v}(x, y, z, t)$, и каких-либо двух ее термодинамических величин, например, давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. Таким образом, с помощью заданных пяти величин: трех компонент скорости \vec{v} , давления p и плотности ρ , можно полностью определить состояние движущейся жидкости.

Часто течения жидкостей и газов и их плотность считают постоянными вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения, т. е. при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. Такое движение является движением несжимаемой жидкости. В этом случае общие уравнения гидродинамики существенно упрощаются.

В гидродинамике рассматриваются идеальные и реальные жидкости. Идеальная жидкость – это жидкость где отсутствуют вязкость и теплопроводность. Реальная жидкость – это жидкость с вязкостью (внутренним трением) и теплопроводностью. Как принято, законы движения жидкости вытекают из законов сохранения [11]. Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с уравнения, выражающего закон сохранения массы.

1.1. Уравнение непрерывности

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S , масса жидкости которого равна

$$m = \int_V \rho dV,$$

где ρ – плотность жидкости.

Изменение массы этого объема есть

$$\frac{\partial}{\partial t} m = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV,$$

а вытекающий из объема поток жидкости –

$$\oint_S \rho V_n dS.$$

Если за положительное направление принять направление движения из рассматриваемого объема, то условие сохранения массы можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho V_n dS.$$

Правая часть равенства преобразуется по теореме Остроградского – Гаусса – интеграл по поверхности преобразуем в интеграл по объему [7]:

$$\oint_S \rho V_n dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV.$$

Тогда

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0.$$

Поскольку равенство должно быть справедливо для любого объема, то подынтегральное выражение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.1)$$

которое называют **уравнением непрерывности (неразрывности)**. Раскрыв $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$, предыдущее выражение можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \operatorname{grad}(\rho) = 0.$$

Для несжимаемой жидкости плотность есть величина постоянная

$$\rho = \text{const}$$

и уравнение (1.1) упрощается

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (1.2)$$

Важно отметить, что уравнение неразрывности справедливо и для идеальной, и для реальной жидкости.

1.2. Уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера)

Выведем уравнение движения для идеальной жидкости. Напомним, что идеальной жидкостью является идеализированная жидкость без вязкости и теплопроводности.

Выделим в жидкости некоторый объем V . Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна

$$\oint_S (-p) dS,$$

где S – поверхность, ограничивающая данный объем.

Преобразуя предыдущую формулу в интеграл по объему, имеем

$$\oint_S p dS = - \int_V \text{grad}(p) dV.$$

На единицу объема действует сила $-\text{grad}(p)$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для движения элемента объема жидкости, приравняв силу $-\text{grad}(p)$ к произведению массы ρ единицы объема жидкости на ее ускорение dv/dt :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}(p). \quad (1.3)$$

Производная d/dt определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Производную следует выразить через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Для этого заметим, что изменение dv скорости данной частицы жидкости в течение времени dt складывается из двух частей: изменения скорости в данной точке пространства в течение времени dt и разности скоростей (в один и тот же момент времени) в двух точках, разделенных расстоянием dr , пройденным рассматриваемой частицей жидкости в течение времени dt . Первая из этих частей равна

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt,$$

где теперь производная dv/dt берется при постоянных x, y, z , т. е. в данной точке пространства. Вторая часть изменения скорости равна

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = (d\vec{r} \nabla) \vec{v}.$$

Таким образом,

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r}\nabla)\vec{v}.$$

Далее разделим все на dt , учитывая что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}.$$

Подставив полученное соотношение в (2.1), находим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p). \quad (1.4)$$

В итоге мы получили уравнение движения жидкости. Оно называется **уравнением Эйлера** и является одним из основных уравнений гидродинамики.

Если жидкость находится в поле тяжести, то на каждую единицу ее объема действует еще сила pg , где g есть ускорение силы тяжести. Эта сила должна быть прибавлена к правой стороне уравнения (1.3), так что (1.4) примет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g}. \quad (1.5)$$

Отсутствие теплообмена между отдельными участками идеальной жидкости (а также, конечно, и между жидкостью и соприкасающимися с ней окружающими телами) означает, что движение происходит адиабатически, причем адиабатически в каждом из участков жидкости. Таким образом, движение идеальной жидкости следует рассматривать как адиабатическое. При адиабатическом движении энтропия каждого участка жидкости остается постоянной при перемещении последнего в пространстве. Если это явление имеет место и в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках объема жидкости, то она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. Следовательно, записать уравнение адиабатичности можно в виде $s = \text{const}$. Такое движение называют изэнтропическим. Изэнтропичностью движения воспользуемся для того, чтобы представить уравнение движения (1.4) в несколько ином виде. Для этого запишем известное термодинамическое соотношение

$$dw = T ds + V dp,$$

где w – тепловая функция единицы массы жидкости, $V = 1/\rho$ – удельный объем, а T – температура. Поскольку $s = \text{const}$, имеем

$$dw = Vdp = \frac{1}{\rho} dp$$

и поэтому

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w.$$

Уравнение (1.4) можно, следовательно, записать в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\text{grad}(w). \quad (1.6)$$

Полезно рассмотреть еще одно уравнение Эйлера, в котором содержится только скорость. Воспользовавшись известной формулой векторного анализа

$$\frac{1}{2} \text{grad}(v^2) = [\vec{v} \text{rot}(\vec{v})] + (\vec{v} \nabla) \vec{v},$$

можно записать (1.6) в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \text{rot}(\vec{v})] = -\text{grad}(w + \frac{v^2}{2}). \quad (1.7)$$

Применив к обеим сторонам этого уравнения операцию rot , получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}[\vec{v} \text{rot}(\vec{v})],$$

содержащее только скорость.

К уравнениям движения следует добавить граничные условия, которые выполняются на ограничивающих жидкость стенках. Для идеальной жидкости это условие должно выражать собой просто тот факт, что жидкость не может проникнуть за твердую поверхность. Это значит, что на неподвижных стенках обращается в нуль нормальная к поверхности стенки компонента скорости жидкости:

$$v_n = 0$$

(в общем же случае компонента скорости движущейся поверхности v_n должна быть равна соответствующей компоненте скорости поверхности). На границе между двумя несмешивающимися жидкостями должны выполняться условия равенства давлений и равенства нормальных к поверхности раздела компонент скорости обеих жидкостей (причем каждая из этих скоростей равна скорости нормального перемещения самой поверхности раздела).

1.3. Уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье – Стокса)

Реальная жидкость – это жидкость с вязкостью (внутренним трением) и теплопроводностью. Начнем с рассмотрения уравнений движения для изотермической жидкости и для начала еще раз напомним, что уравнение непрерывности справедливо и для реальной жидкости, так как его вывод основывался только на законе сохранения вещества.

Для того чтобы получить уравнения, описывающие движение вязкой жидкости, необходимо ввести дополнительные члены в уравнение движения идеальной жидкости. Что касается уравнения непрерывности, то, как следует из самого его вывода, оно относится в равной мере к движению всякой жидкости, в том числе и вязкой. Уравнение же Эйлера должно быть изменено.

Воспользуемся уравнением Эйлера, записанным в форме закона для переноса импульса. Импульс единицы объема жидкости есть ρv . Отметим, что в дальнейшем иногда производную по времени будем обозначать как ∂_t : $\partial_t(\rho v_i) = \rho \partial_t v_i + \partial_t \rho v_i$. Уравнение непрерывности перепишем в виде

$$\partial_t \rho - \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0,$$

а уравнение Эйлера примет вид

$$\partial_t v_i = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Попытаемся дописать в него слагаемые, отвечающие за перенос импульса в результате действия вязких сил

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) + \rho \delta_{ik} + \text{поток импульса из-за вязкости} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k + \rho \delta_{ik} - \sigma'_{ik}), \end{aligned}$$

где величина $\sigma_{ik} = \rho \delta_{ik} - \sigma'_{ik}$ называется тензором напряжений, а σ'_{ik} – тензором вязких напряжений. Тензор вязких напряжений σ'_{ik} должен характеризовать неоднородности поля скорости, которые можно описать производными поля скорости

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_k}, \dots$$

Требуется угадать форму зависимости тензора вязких напряжений от производных. На данном этапе следует сделать самое важное ограничение на пути получения уравнения движения. Оно состоит в том, что учитываются только линейные комбинации первых производных поля скорости.

Кажется естественным, что однородное поле скорости не приводит к появлению вязких напряжений.

Нужно, однако, учесть, что есть специальный случай, когда поле скорости неоднородно, а вязкие напряжения возникать не должны. Это случай твердотельного вращения жидкости. Существуют только две линейные комбинации первых производных, удовлетворяющие этому требованию:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \text{ и } \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}.$$

(Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

Запишем общий вид тензора второго ранга, удовлетворяющего поставленным условиям,

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}.$$

Принята несколько иная форма записи

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \xi \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (1.8)$$

удобная тем, что сумма диагональных членов в скобке равна нулю.

В выражении присутствуют два коэффициента: η – сдвиговая вязкость и ξ – объемная (вторая) вязкость.

Таким образом, уравнение движения приобретает вид

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right). \quad (1.9)$$

Коэффициенты вязкости зависят от температуры и давления и не являются постоянными вдоль жидкости. Однако во многих случаях можно считать эту зависимость слабой и вынося коэффициенты вязкости за операторы дифференцирования, прийти к виду

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div} \vec{v}, \quad (1.10)$$

который и принято называть **уравнением Навье – Стокса**. Важным частным случаем является случай несжимаемой жидкости. Тогда уравнения движения (1.8), (1.10) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где $\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

Для решения конкретной задачи уравнения должны быть дополнены граничными условиями (например, условие прилипания на твердой границе или условие отсутствия касательных напряжений на свободной границе). Основные проблемы решения уравнений Навье – Стокса связаны с нелинейным членом. Известно небольшое число задач, в которых этот член обращается в нуль и задачи приводят к точным решениям – задача о течении Куэтта, течении Пуазейля, течение между вращающимися цилиндрами и др.

1.4. Режимы движения жидкости

Поток жидкости в трубке может характеризоваться двумя режимами: **ламинарным** (параллельно струйным) и **турбулентным** (беспорядочным).

Опыты Рейнольдса, а также исследования других ученых показали, что основным критерием для определения режима движения жидкости служит безразмерный параметр Re (число Рейнольдса):

$$Re = vd/\nu, \quad (1.12)$$

где ν – кинематическая вязкость.

Число Рейнольдса, при котором ламинарный режим переходит в турбулентный, называют **критическим**. По исследованиям О. Рейнольдса, $Re_{кр} = 2320$. Когда $Re < 2320$, движение жидкости проис-

ходит при ламинарном режиме, если $Re > 2320$ – при турбулентном. Скорость, соответствующую критическому числу Рейнольдса, называют критической

$$v_{кр} = 2320 \nu/d. \quad (1.13)$$

При безнапорном движении жидкости число Рейнольдса определяют по формуле

$$Re = 4\nu R/\nu, \quad (1.14)$$

где R – гидравлический радиус.

1.5. Турбулентность и хаос

Турбулентные течения представляют собой системы, характеризующиеся наличием хаотически распределенных и хаотически ведущих себя структур самого различного масштаба. Турбулентность – это воплощение хаоса, а хаос долгое время ассоциировался с системами, имеющими огромное число степеней свободы, и развитая турбулентность считалась лишенной какого-либо порядка. Однако, начиная с конца 60-х годов прошлого века, намечается значительный прогресс в понимании природы турбулентности, связанный с осознанием природы и структуры хаоса.

Во-первых, была установлена возможность хаотического поведения в нелинейных системах с малым числом степеней свободы. Впервые хаотическое поведение в простых гамильтоновых системах обнаружил А. Пуанкаре около ста лет назад, но только после работы Э. Лоренца (1963 г.), в которой исследовалось хаотическое поведение диссипативной системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, было оценено значение этого факта и началось активное исследование хаотического поведения динамических систем. Это произошло не сразу, а только после ключевой работы Д. Рюэля и Ф. Такенса (1971 г.), в которой было сформулировано понятие странного аттрактора и указана его роль в формировании нерегулярного поведения системы [11].

Рассмотрим систему Лоренца, которая стала одной из наиболее известных динамических систем, иллюстрирующих переход к хаосу и возникновение странных аттракторов. Система Лоренца используется в качестве упрощенной модели конвективных турбулентных движений жидкости в нагреваемом сосуде тороидальной формы.

В данной модели более теплые участки жидкости за счет теплового расширения становятся более легкими. Архимедова сила вытесняет их вверх, а на их место приходят холодные массы.

Путем сильных упрощений исходных уравнений было предложено использовать только три обыкновенных дифференциальных уравнения. Однако столь простая система вела себя сложным образом, и Лоренц впервые получил в своей модели странный аттрактор. Оказалось, что к системе Лоренца успешно сводятся многие системы.

Обычно систему Лоренца записывают в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sigma(y - x),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y + rx - xz,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -bz + xy,$$

$$x \sim V, \quad y \sim T, \quad z \sim T_2 - \frac{T_B - T_H}{2},$$

где $\sigma = 10$ – число Прандтля, b – параметр, r – относительное число Рейнольдса.

Данная система моделирует реальные конвективные движения только при небольших надкритичностях. Несмотря на это, поведение системы оказалось интересным само по себе, и многочисленные численные исследования ее свойств проводились в очень широком диапазоне параметра относительного числа Рейнольдса r . Решение системы в виде странного аттрактора появляется только при некоторых сочетаниях параметров. Как видно, аттрактором в этом случае является фокус. Перестройка типа фазового портрета происходит в области промежуточных r . Критическое сочетание параметров, при которых фазовый портрет системы качественно меняется, называется в теории динамических систем точкой бифуркации. Физический смысл бифуркации в модели Лоренца согласно современным представлениям описывает переход ламинарного движения жидкости к турбулентному.

Лабораторные работы

Лабораторная работа № 1

Часть I. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА

Краткая теория

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в горизонтальном слое толщиной d . Нижняя граница неподвижна, а верхняя движется с постоянной горизонтальной скоростью v_0 , направленной вдоль оси x . Ось z направлена вертикально вверх (рис. 1).

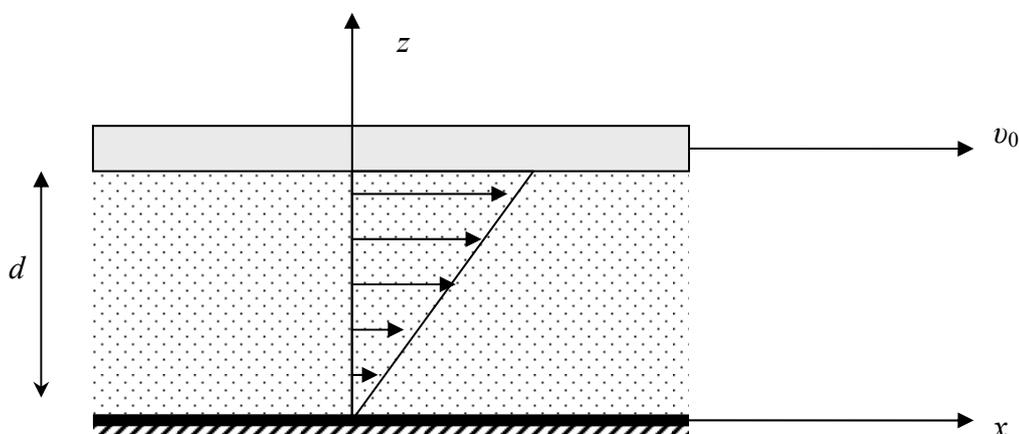


Рис. 1. Геометрия расчетной области и поле скоростей течения Куэтта

Ищем стационарное решение, то есть производная по времени равна нулю. Считается, что задача плоская, то есть нет зависимости от координаты y и нет соответствующей компоненты скорости ($v_y = 0$).

Более того, течение горизонтально ($v_z = 0$) и отсутствует горизонтальный градиент давления. Из уравнения непрерывности следует, что оставшаяся компонента скорости не может зависеть от координаты x :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, $v_x = f(z)$, и нелинейный член исчезает

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0.$$

В результате уравнение Навье – Стокса преобразуется:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad v_x = az + b.$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий:

$$\begin{aligned} v_x &= 0 && \text{при} && z = 0, \\ v_x &= v_0 && \text{при} && z = d, \end{aligned}$$

в результате

$$v_x = v_0 \frac{z}{d}. \quad (1)$$

При этом отлична от нуля только одна компонента тензора вязких напряжений

$$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{v_0}{d} \eta,$$

с которой просто связана сила, действующая на площадку поверхности площадью S ,

$$F = \frac{v_0 \eta S}{d}. \quad (2)$$

Задание к работе

Построить поле скоростей при различных скоростях v_0 верхней плоскости и различных геометриях канала d . (табл. 1), а также построить на одном рисунке графики профилей скорости для заданной геометрии канала d , но при различных скоростях v_0 верхней плоскости (табл. 2).

Построить распределение сил, действующих на площадку S при заданной вязкости, начальной скорости и геометрии канала (табл. 3), а также построить на одном рисунке графики профилей распределения сил, действующих на площадку S для жидкостей, имеющих различные вязкости (табл. 4).

Таблица 1

Номер варианта	v_0 (м/с)	d (м)
1	0,3	0,05
2	0,5	0,1
3	0,7	0,25
4	0,8	0,2
5	0,9	0,15

Таблица 2

Номер варианта	d (м)	v_0 (м/с)			
		0,1	0,15	0,19	-0,08
1	0,05	0,1	0,15	0,19	-0,08
2	0,1	-0,2	0,11	-0,1	0,15
3	0,25	0,3	-0,2	-0,1	0,14
4	0,2	0,13	-0,35	0,18	0,24
5	0,15	0,23	-0,17	0,19	0,12

Таблица 3

Номер варианта	d (м)	v_0 (м/с)	S (м ²)	η
1	0,05	0,01	0,2	Глицерин
2	0,1	0,1	0,15	Вода
3	0,25	0,15	0,14	Бензин
4	0,2	0,13	0,11	Керосин
5	0,15	0,03	0,19	Ртуть

Таблица 4

Номер варианта	d (м)	v_0 (м/с)	S (м ²)	η
1	0,05	0,01	0,2	Глицерин, вода
2	0,1	0,1	0,15	Вода, бензин
3	0,25	0,15	0,14	Бензин, керосин
4	0,2	0,13	0,11	Керосин, вода
5	0,15	0,03	0,19	Ртуть, глицерин

Контрольные вопросы и задания

1. Каким образом скорость течения Куэтта зависит от геометрии канала? Что происходит при увеличении расстояния между плоскостями?
2. Найти среднюю скорость течения жидкости для течения Куэтта.

Часть II. ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ

Краткая теория

Рассмотрим течение жидкости в слое с твердыми границами (или трубе) под действием приложенной к краям разности давления.

Имеем плоский горизонтальный слой толщиной $2d$ и длиной L , на концах которого заданы давления P_1 и P_2 соответственно (рис. 2).

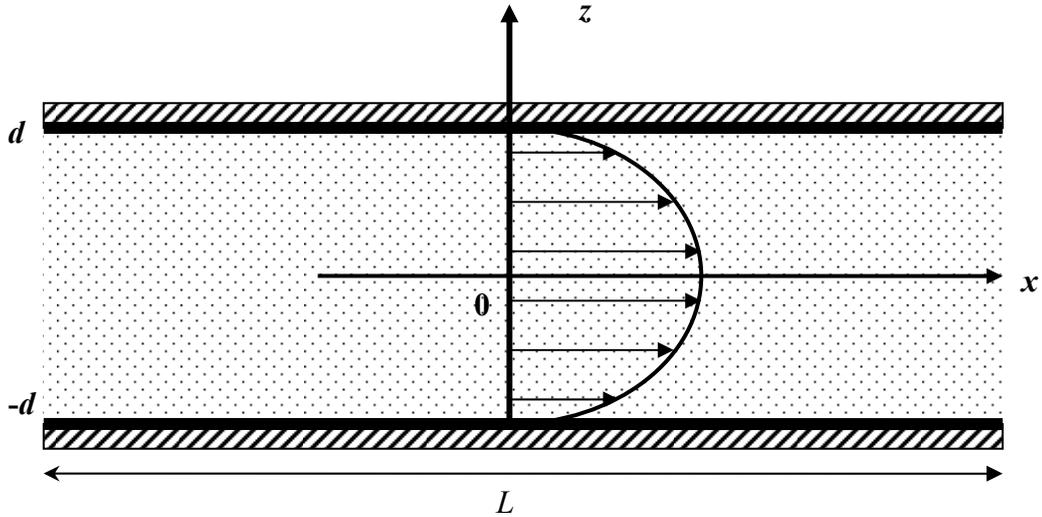


Рис. 2. Геометрия расчетной области и поле скоростей течения Пуазейля

Как и в предыдущей задаче, найдем стационарное решение ($\partial_t = 0$) только для компоненты скорости v_x ($v_y = v_z = 0$) и по тем же причинам $\partial_x = \partial_y = 0$. В этом случае снова исчезает нелинейный член, так как возникающий градиент скорости направлен перпендикулярно самой скорости. Тогда уравнение Навье – Стокса принимает вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0,$$

а его решение с учетом граничных условий ($v_x = 0$ и $z = \pm d$) есть

$$v_x = \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} (z^2 - d^2).$$

Для цилиндрической трубы радиуса R задача решается аналогично. В этом случае оператор Лапласа нужно записать в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{P_1 - P_2}{L\eta}$$

и его решение примет вид

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4L\eta} r^2 + C \ln r + B.$$

Постоянная интегрирования $C = 0$, так как при $r = 0$ значение скорости должно быть конечно. Определив вторую константу из условия прилипания на стенке трубы, получим

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2).$$

Важной характеристикой является расход жидкости, протекающей через трубу. Имеем

$$Q = 2\pi \int_0^R \rho r v dr = \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{8\eta L} R^4.$$

Задание к работе

Построить поле скоростей для жидкости при заданных геометрии трубы и давлении (табл. 5). Рассчитать расход жидкости.

Построить на одном рисунке профиль скорости для различных жидкостей при заданных геометрии и давлении. Рассчитать расходы жидкостей (табл. 6).

Таблица 5

Номер варианта	P_1 (атм)	P_2 (атм)	η	R (м)	L (м)
1	2	1	Глицерин	0,1	1
2	1,7	1,2	Вода	0,05	0,6
3	1,3	1	Бензин	0,15	0,7
4	1,6	1,06	Вода	0,06	0,3
5	1,44	1,21	Ртуть	0,08	0,5

Таблица 6

Номер варианта	P_1 (атм)	P_2 (атм)	η	R (м)	L (м)
1	2,1	1,3	Глицерин, вода	0,11	1
2	1,8	1,2	Вода, ртуть	0,09	0,6
3	1,95	1	Бензин, вода	0,14	0,7
4	1,76	1,06	Вода, керосин	0,16	0,3
5	1,48	1,1	Ртуть, глицерин	0,18	0,5

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна максимальная скорость течения Пуазейля?
2. Определить распределение скорости течения жидкости по трубе с кольцевым сечением (внутренний R_1 и внешний R_2 радиусы).
3. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси. Определить распределение скорости течения жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Часть III. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Краткая теория

Рассмотрим движение жидкости, заключенной между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 ; радиусы цилиндров пусть будут R_1 и R_2 , причем $R_2 > R_1$. Выберем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z по оси цилиндров. Из симметрии очевидно, что

$$v_z = v_r = 0, v_\varphi = v(r); \quad p = p(r).$$

Уравнение Навье – Стокса в цилиндрических координатах дает в рассматриваемом случае два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \rho \frac{v^2}{r}, \\ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Второе из этих уравнений имеет решения типа r^n ; подстановка решения в таком виде дает $n = \pm 1$, так что

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Постоянные a и b находятся из предельных условий, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра: $v = R_1\Omega_1$ при $r = R_1$, $v = R_2\Omega_1$ при $r = R_2$.

В результате получаем распределение скоростей в виде

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Распределение давления получается в данном случае согласно (3) простым интегрированием.

Производная тензора напряжений равна

$$\sigma'_{r\varphi} |_{r=R_1} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) |_{r=R_1} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Момент этой силы получается умножением на R_1 , а полный момент M_1 , действующий на единицу длины цилиндра, – умножением еще на $2\pi R_1$. Таким образом, находим

$$M_1 = -4\pi\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Момент сил, действующих на внешний цилиндр, $M_2 = -M_1$. При $\Omega_2 = 0$ и малом зазоре между цилиндрами ($\delta \equiv R_2 - R_1 \ll R_2$) предыдущая формула принимает вид

$$M_2 = \eta R S u / \delta,$$

где $S = 2\pi R$ – площадь поверхности единицы длины цилиндра, а $u = \Omega_1 R$ – ее окружная скорость.

Задание к работе

Построить поле скоростей при заданных угловых скоростях и радиусах цилиндра. Рассчитать момент M_1 для различных жидкостей. Построить графики зависимостей моментов от радиуса цилиндра (табл. 7).

Таблица 7

Номер варианта	Ω_1 (об/с)	Ω_2 (об/с)	R_1 (м)	R_2 (м)	Жидкость
1	1	2	0,07	0,1	Вода, керосин
	-3	4			
2	2	0,7	0,1	0,2	Глицерин, ртуть
	1	-0,6			
3	1,4	0,7	0,02	0,05	Бензин, керосин
	1,8	-1,6			
4	1,9	1	0,03	0,08	Вода, ртуть
	-1,7	0,9			
5	1,5	2	0,08	0,09	Глицерин, бензин
	-0,4	0,7			

Контрольные вопросы и задания

1. Рассчитать распределение скоростей, когда $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$.
2. Рассчитать распределение скоростей, когда внешний цилиндр отсутствует ($\Omega_2 = 0, R_2 = \infty$).

Лабораторная работа № 2

ТЕЧЕНИЕ В ДИФFUЗОРЕ И КОНFUЗОРЕ

Краткая теория

Требуется определить стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под углом. На рис. 3 изображен поперечный разрез обеих плоскостей; истечение происходит вдоль линии пересечения плоскостей. В начале координат находится источник жидкости мощностью Q . Такое устройство называется плоским диффузором. Если $Q < 0$, то источник становится стоком, а устройство называется конфузором.

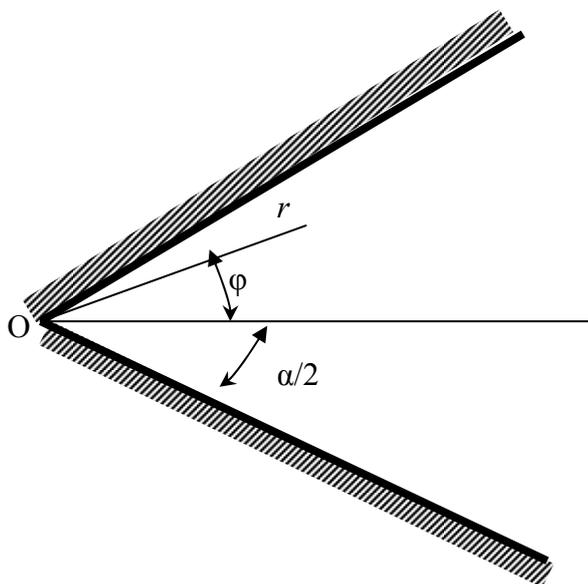


Рис. 3. Геометрия диффузора/конфузора

Выбираем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z вдоль линии пересечения плоскостей (точка O на рис. 3) и угол φ отсчиты-

ваемым указанным на рис. 3 образом. Движение однородно вдоль оси z , и естественно предположить, что оно будет чисто радиальным, т. е. $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v(r, \varphi)$.

Уравнения Навье – Стокса в криволинейных координатах [5] дают

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right); \\ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из последнего уравнения видно, что rv есть функция только от φ . Введя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6v} rv,$$

получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12v^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

откуда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12v^2}{r^2} u(\varphi) + f(r).$$

Подставляя это выражение в (4), получаем уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6v^2} r^3 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от φ и от r , являются каждая в отдельности постоянной величиной, которую обозначим как $2C_1$. Таким образом:

$$f'(r) = 12v^2 C_1 \frac{1}{r^3}, \text{ откуда}$$

$$f(r) = -\frac{6v^2 C_1}{r^2} + \text{const},$$

и окончательно получаем для давления

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6v^2}{r^2}(2u - C_1) + \text{const}.$$

Для $u(\varphi)$ имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на u' и первого интегрирования дает

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1u - 2C_2 = 0.$$

Получаем

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1u + C_2}} + C_3, \quad (5)$$

и определяем искомую зависимость скорости от φ ; функция $u(\varphi)$ может быть выражена посредством эллиптических функций. Три постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий на стенках диффузора/конфузора:

$$u\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

и из условия, что через любое сечение $r = \text{const}$ проходит (в 1 с) одинаковое количество жидкости Q :

$$Q = \rho \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v r d\varphi = 6vr \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} u d\varphi. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала конфузорное движение ($Q < 0$). Для исследования решения (5 – 6) сделаем подтверждающееся в дальнейшем предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (т. е. $u(\varphi) = u(-\varphi)$), причем функция $u(\varphi)$ везде отрицательна (скорость направлена везде к вершине угла) и монотонно меняется от значения 0 при $\varphi = \pm\alpha/2$ до значения $-u_0$ ($-u_0 > 0$) при $\varphi = 0$, так что u_0 есть максимум $|u|$. Тогда при $u = -u_0$ должно быть $du/d\varphi = 0$, откуда заключаем, что $u = -u_0$ есть корень кубического многочлена, стоящего под корнем в подынтегральном выражении (6), так что можно написать

$$-u^3 - u^2 + C_1u + C_2 = (u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q],$$

где q – новая постоянная. Таким образом, имеем

$$2\varphi = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2 - (1-u_0)u + q]}},$$

причем постоянные u_0 и q определяются из условий:

$$\alpha = \int_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2 - (1-u_0)u + q]}}, \quad (7)$$

$$\frac{\text{Re}}{6} = \int_{u_0}^0 \frac{udu}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2 - (1-u_0)u + q]}},$$

где $\text{Re} = |Q|/\nu\rho$ – число Рейнольдса; постоянная q должна быть положительной, в противном случае данные интегралы были бы комплексными.

Эти два уравнения имеют, как можно показать, решения для u_0 и q при любых Re и $\alpha < \pi$. Другими словами, сходящееся (конфузорное) симметрическое течение возможно при любом угле раствора $\alpha < \pi$ и любом числе Рейнольдса.

Таким образом, имеем окончательную расчетную формулу

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \left[(x_i \text{tg}(\frac{\alpha}{2}))^2 - (y_j)^2 \right], \quad \text{где } i = 0 \dots n, j = 0 \dots m - \text{количество точек по горизонтали и вертикали соответственно.}$$

Пусть теперь $Q > 0$, т. е. мы имеем дело с диффузорным течением (рис. 4). Предположим, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и что $u(\varphi)$ (теперь $u > 0$) монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm\alpha/2$ до $u = u_0 > 0$ при $\varphi = 0$. Вместо (7) запишем:

$$\alpha = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)[u^2 + (1+u_0)u + q]}},$$

$$\frac{\text{Re}}{6} = \int_0^u \frac{udu}{\sqrt{(u-u_0)[u^2 + (1+u_0)u + q]}}.$$

Таким образом имеем окончательную расчетную формулу

$$v(x, y) = \frac{-\Delta p}{4\eta L} \left[(x_i \text{tg}(\frac{\alpha}{2}))^2 - (y_j)^2 \right], \quad \text{где } i = 0 \dots n, j = 0 \dots m - \text{количество точек по горизонтали и вертикали соответственно.}$$

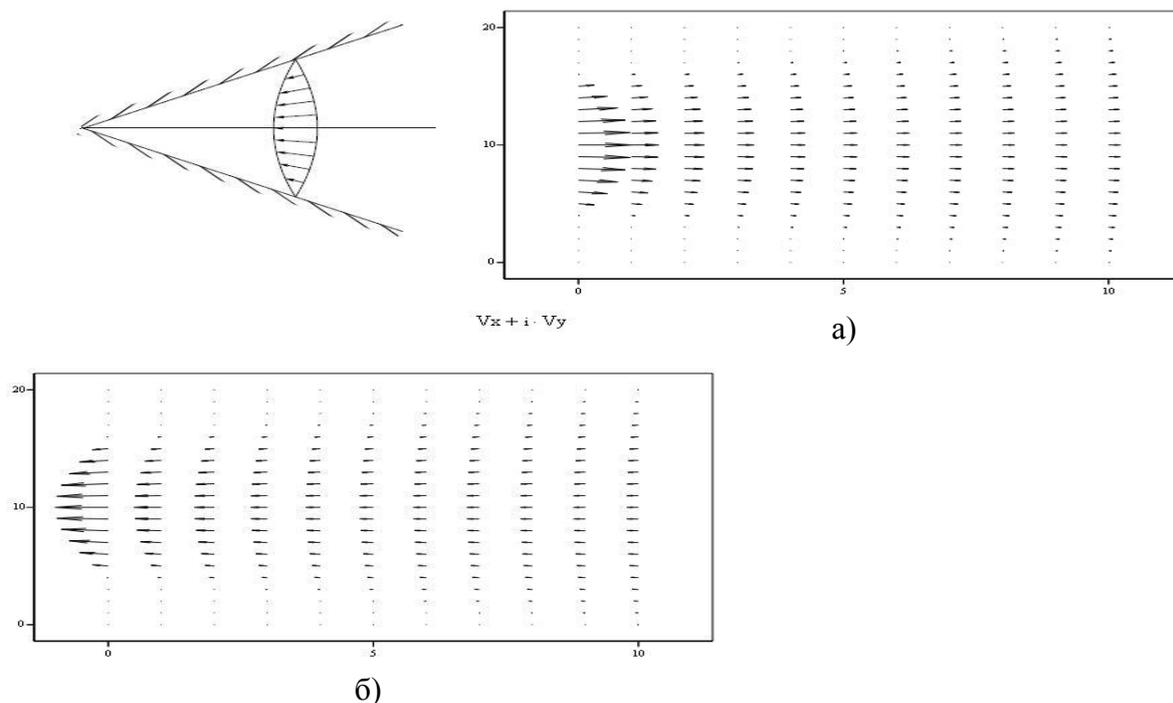


Рис. 4. Поле течения в диффузоре (а) и конфузоре (б)

Задание к работе

Построить поле скоростей для диффузора и конфузора (табл. 8).

Таблица 8

Номер варианта	α (рад)	Δp (атм)	L (м)	Жидкость
1	$\pi/2$	10	25	Вода
2	$\pi/3$	5	25	Глицерин
3	$\pi/4$	25	25	Бензин
4	$\pi/6$	30	25	Керосин
5	$\pi/5$	20	25	Ртуть

Контрольные вопросы и задания

1. Где в диффузоре скорость течения жидкости принимает свое максимальное значение?
2. Где в конфузоре скорость течения жидкости принимает свое минимальное значение?
3. При каких углах раствора плоскостей, образующих диффузор, возможно моделирование соответствующего течения?

Лабораторная работа № 3

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРАНДТЛЯ

Краткая теория

При турбулентном режиме скорость движения в каждой точке потока постоянно изменяется по величине и направлению, колеблясь около некоторого среднего значения (пульсации скорости), называемого осредненной местной скоростью.

Осредненные скорости в данных точках практически постоянны и направлены вдоль оси потока. Поэтому при турбулентном режиме движение жидкости условно можно рассматривать как параллельно-струйное. В дальнейшем изложении осредненную скорость будем называть местной скоростью в данной точке.

Распределение скоростей по живому сечению потока в трубопроводе при турбулентном режиме движения (по опытам) показано схематически на рис. 5. Теоретических решений распределения скоростей по сечению потока и определения потерь напора для турбулентного режима нет.

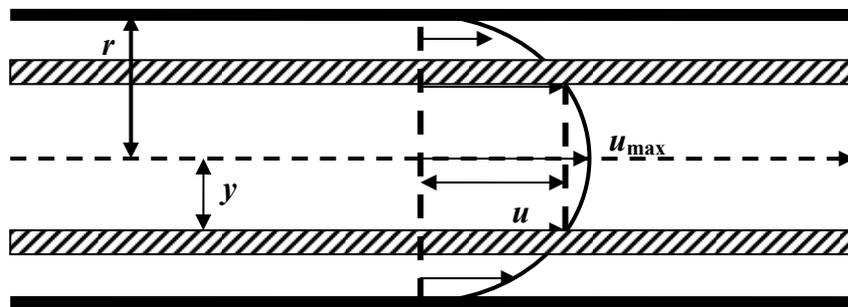


Рис. 5. Распределение скоростей по живому сечению в трубопроводе при турбулентном режиме движения жидкости

Немецкий ученый Прандтль создал полуэмпирическую теорию турбулентности, в основу которой положена условная схема разделения потока жидкости в трубе на турбулентное ядро в центре и тонкий ламинарный слой по периметру у стенки трубы с выступами шероховатости Δ (рис. 6). Полученное по этой полуэмпирической теории турбулентности распределение скоростей выражается зависимостью

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{r}{r - y}, \quad (8)$$

где u^* – так называемая динамическая скорость, или скорость касательного напряжения (измеряется в единицах скорости); χ – универсальная постоянная Прандтля, равная по опытам Никурадзе 0,4.

Динамическую скорость определяют по формуле

$$u^* = v\sqrt{\lambda/8}. \quad (9)$$

Приблизительно распределение скоростей при турбулентном режиме может быть выражено степенной формулой

$$u/u_{\max} = [(r - y)/r]^{0,84\sqrt{\lambda}}, \quad (10)$$

где $\lambda = 64/Re$ – коэффициент гидравлического трения,

$$u_{\max} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2.$$

Формула (10) проще и удобнее формулы (8).

Задание к работе

Построить поле скоростей для жидкости при заданных геометрии трубы и давлении, числе Рейнольдса (табл. 9). Используя табл. 10, построить на одном рисунке профиль скорости для различных жидкостей, свойства течения и геометрию канала взять из табл. 9.

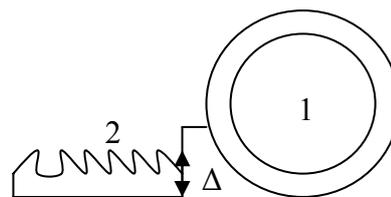


Рис. 6. Условная схема деления потока жидкости в трубе на турбулентное ядро (1) и ламинарный слой (2)

Таблица 9

Номер варианта	p_1 (атм)	p_2 (атм)	L (м)	y (м)	Re	η
1	2	1	0,7	0,2	100	Глицерин
2	1,7	1,4	0,6	0,1	200	Бензин
3	1,9	1,3	0,2	0,07	500	Ртуть
4	2	0,7	0,5	0,25	700	Вода
5	1	0,4	0,76	0,15	300	Керосин

Таблица 10

Номер варианта	η
1	Керосин, вода
2	Ртуть, глицерин
3	Бензин, глицерин
4	Ртуть, вода
5	Вода, глицерин

Контрольные вопросы и задания

1. Как зависит скорость жидкости в модели Прандтля от разности давлений на входной и выходной границах расчетной области?
2. В чем суть полуэмпирической модели Прандтля?

Лабораторная работа № 4

МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Краткая теория

Система Лоренца, записанная в безразмерных величинах, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sigma(y - x),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y + rx - xz,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -bz + xy,$$

$$x \sim V, \quad y \sim T, \quad z \sim T_2 - \frac{T_B - T_H}{2},$$

где $\sigma = 10$ – число Прандтля, b – параметр, r – относительное число Рейнольдса.

В вычислениях обычно используют число Прандтля $\sigma = 10$ и параметр $b = 8/3$, что соответствует результату Релея для критического значения $a = 1/\sqrt{2} (b = 4(1 + a)^{-1})$, $r = 24,7$ (рис. 7).

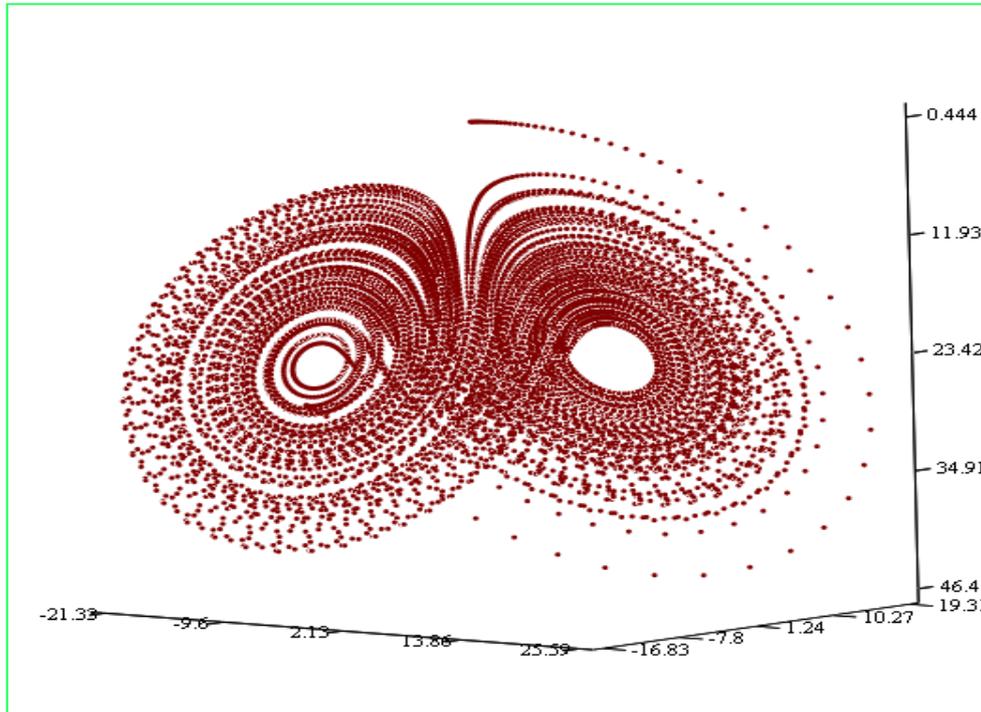


Рис. 7. Модель Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 24,7$

Поведение решения системы

Рассмотрим изменения в поведении решения системы Лоренца при различных значениях параметра r .

Если $r < 1$, то аттрактором является начало координат, других устойчивых точек нет.

При $r \geq 1$ и $r < 13,927$ траектории спирально приближаются (это соответствует наличию затухающих колебаний) к двум точкам, положение которых определяется формулами:

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad y = x = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r-1.$$

Таким образом, в точке $r = 1$ имеет место нормальная бифуркация вилки и появляются два устойчивых решения, соответствующих стационарной валиковой конвекции [6] с противоположным направлением вращения конвективных валов.

Если $r \approx 13,927$, то траектория выходит из начала координат, и, совершив полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, она вернется обратно в начальную точку – возникают две петлеобразные траектории.

При $r > 13,927$ в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек. Кроме того, петли перерожда-

ются в неустойчивые предельные циклы, а также возникает семейство сложно устроенных траекторий, не являющееся аттрактором.

При $r \approx 24,06$ траектории теперь ведут не к устойчивым точкам, а асимптотически приближаются к неустойчивым предельным циклам [1] – возникает собственно аттрактор Лоренца. Однако обе устойчивые точки сохраняются вплоть до значений $r \approx 24,74$.

При $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 24,74$ имеет место субкритическая бифуркация Хопфа [11].

Следует отметить, что «чистый» странный аттрактор существует в небольшом интервале r $24,06 < r < 30,1$. Обратим внимание и на то, что на левом краю этого интервала существует гистерезис – при понижении числа Релея странный аттрактор существует до $r = 24,06$, а не до $r = 24,74$. Левее этой границы в интервале чисел Релея $r > 13,93$ существует область так называемого метастабильного хаоса.

В этой области малые возмущения стационарного решения монотонно затухают, но большие возмущения приводят к хаотическим режимам, которые в конечном итоге также затухают, но успевают при этом выписать в фазовом пространстве многочисленные хаотические петли, напоминающие поведение системы на странном аттракторе.

В своей знаменитой работе Лоренц численно исследовал поведение системы при $r = 28$.

При $r > 30,1$ диаграмма режимов представляет собой чередование областей с хаотическим и периодическим движениями.

Задание к работе

Для приведенных в табл. 11 значений управляющего параметра r построить аттрактор Лоренца в трехмерном пространстве (при $\sigma = 10$, $b = 8/3$) и проекции аттрактора Лоренца на плоскости.

Таблица 11

Номер варианта	r							
	1	4	10	14	20	25	28	31
2	5	12	13,92	19,5	24,7	29	33	50
3	9	11	17	21	24,06	26	32	48
4	7	10,7	15,37	19,88	25,42	27,89	34,5	51,3
5	10	11,45	13,78	17,95	25,73	26,75	33,75	49,65

Контрольные вопросы и задания

1. Система Лоренца имеет тривиальное решение $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, отвечающее отсутствию конвекции. Проверить это решение на устойчивость.

2. Исследовать на устойчивость решения

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad y = x = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r-1.$$

3. В каких пределах изменения параметра r существует «чистый» странный аттрактор?

4. Что представляют собой аттрактор, точка бифуркации?

Приложение

Абсолютная (динамическая) вязкость жидкостей при атмосферном давлении

$\eta, 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	0 °С	20 °С
Вода	1,80	1,01
Глицерин	12100	1480
Керосин	2,2	1,5
Ртуть	1,54	1,54
Бензин	0,73	0,52

Кинематическая вязкость некоторых распространенных жидкостей

Жидкость	Температура, °С	Кинематическая вязкость, сSt (сантиСтокс)*
Вода дистиллированная	20	1,0038
Глицерин 100 %	20,3	648
Керосин	20	2,71
Ртуть	21,1	0,118
Бензин	15,6	0,88
Нефть сырая 48° API	15,6	3,8

*1 сантиСтокс = $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

Плотность некоторых распространенных жидкостей

Жидкость	Температура, °С	Плотность, кг/м ³
Вода	20	1000
Глицерин 100 %	20,3	1260
Керосин	20	800
Ртуть	0	13550
Бензин	20	730

Рекомендательный библиографический список

1. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1984. – 272 с.
2. Борисенко, А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления : учеб. пособие / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – М. : Высш. шк., 1983. – 262 с.
3. Бударин, В. А. Метод расчета движения жидкости : монография / В. А. Бударин. – Одесса : Астропринт, 2006. – 138 с. – ISBN 5-66-318-519-8.
4. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости : монография / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
5. Ландау, Л. Д. Гидродинамика : учеб. пособие / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 736 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа : учеб. пособие / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1978. – 736 с.
7. Романовский, П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа : учеб. пособие / П. И. Романовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 240 с.
8. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика : монография пер. с англ. / П. Роуч. – М. : Мир, 1980. – 616 с.
9. Гидродинамика : метод. указания и задания к расчетно-графической и контрольной работе № 2 по дисциплине «Гидравлика» для студентов машиностроит. направления / Ульян. гос. техн. ун-т ; сост. К. Н. Мишина. – Ульяновск, 2008. – 42 с.
10. Трубецков, Д. И. Введение в синергетику : Хаос и структуры : учеб. пособие / Д. И. Трубецков. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 240 с. – ISBN 978-53970-237-57.
11. Фрик, П. Г. Турбулентность: модели и подходы : учеб. пособие / П. Г. Фрик. – Пермь : Изд-во ПГТУ, 1998. – 108 с. – ISBN 5-88151-193-X.

Оглавление

Порядок выполнения лабораторной работы	3
Краткие теоретические сведения	3
1. Гидродинамика. Общие сведения.....	3
1.1. Уравнение непрерывности	4
1.2. Уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера).....	6
1.3. Уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье – Стокса)	9
1.4. Режимы движения жидкости	11
1.5. Турбулентность и хаос	12
Лабораторные работы	14
Лабораторная работа № 1	14
Часть I. Течение Куэтта	14
Часть II. Течение Пуазейля	16
Часть III. Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами	19
Лабораторная работа № 2. Течение в диффузоре и конфузоре ...	21
Лабораторная работа № 3. Полуэмпирическая модель турбулентности Прандтля	26
Лабораторная работа № 4. Модель Лоренца	28
Приложение	32
Рекомендательный библиографический список	33

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ»

Составители:

КУЧЕРИК Алексей Олегович
АНТИПОВ Александр Анатольевич
БУХАРОВ Николай Николаевич
и др.

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор С. М. Аракелян

Редактор Е. А. Амирсейидова

Подписано в печать 19.09.12.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 2,09. Тираж 70 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.