Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра начального образования

МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ВЕЛИЧИН

Методические рекомендации к изучению курса по выбору «Теоретические основы начального курса математики»

Составитель
Н. Ф. БУЛАТОВА

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2012

УДК 510.3 (07)
ББК 22.126я7
М73

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного университета имени Александра
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю.А. Алхутов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
инженерно-технологических дисциплин Российского университета
кооперации (Владимирский филиал)
И.И. Цыганок

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М73 **Множество** натуральных чисел, являющихся значениями величин : метод. рекомендации к изучению курса по выбору «Теоретические основы начального курса математики» / Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых ; сост. Н.Ф. Булатова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2012 – 32 с.

Составлены для организации самостоятельной работы студентов I курса очной и заочной форм обучения факультета дошкольного и начального образования при изучении курса по выбору «Теоретические основы начального курса математики».

Включают теоретические сведения, необходимые для построения множества натуральных чисел, являющихся значениями величин; решения всех типовых задач школьного курса математики и задания для самостоятельной работы.

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 28. Библиогр.: 3 назв.

УДК 510.3 (07)
ББК 22.126я7

Предисловие

Курс по выбору «Теоретические основы начального курса математики» относится к вариативной части профессионального цикла дисциплин профильной подготовки для направления 050708 – педагогическое образование.

В структуру курса входят два модуля: «Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел» и «Построение множества натуральных чисел, являющихся значениями величин».

Цель его изучения – сформировать знания о различных подходах к построению множества целых неотрицательных чисел, теоретических основах этих построений, обеспечить достаточную подготовку студентов для изучения соответствующих разделов дисциплины «Методика преподавания математики».

При освоении курса по выбору у студентов формируются профессиональные компетенции: владение культурой мышления, способность к постановке цели и выбору путей её достижения, к обобщению, анализу и восприятию информации, логическому построению устной и письменной речи, осознанию социальной значимости своей будущей профессии.

Данные методические рекомендации должны помочь студентам при организации самостоятельной работы, в них формулируются основные понятия теории, свойства этих понятий, раскрывается связь понятий со школьным курсом математики, даются модели к решению всех типов простых задач и их теоретическое обоснование, формируется алгоритм решения этих задач, содержатся сведения об операциях и отношениях на множестве отрезков. Большое число задач позволяет установить связь между операциями над величинами и операциями на множестве натуральных чисел.

Работа заканчивается заданиями для самостоятельного решения.

1. ОТНОШЕНИЯ И ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ОТРЕЗКОВ

Для изучения этого раздела программы студенты должны знать названия величин, единицы измерения величин. Величину будем рассматривать как свойство объектов или явлений. Например, длина это свойство таких объектов как отрезок, говоря о массе в нашем представлении возникают объекты, которые можно положить на весы, объем ассоциируется с водой, налитой в бидон, в ведро.

При построении модели к задаче будем изображать объект, обладающий указанной величиной, отрезком, что способствует наглядности и удобству изображения.

При работе с отрезками нам придется их сравнивать и выполнять четыре операции: сложение и вычитание отрезков, умножение отрезка на натуральное число и деление отрезка на натуральное число.

1.1. <u>Сравнивать два отрезка</u> можно наложением:

а) если при наложении друг на друга отрезки a и b совпадут, то такие отрезки называются равными. Обозначение: a = b;

б) если при наложении друг на друга один отрезок составляет часть другого отрезка, то первый отрезок меньше второго.

Например, при наложении a составляет часть отрезка b, значит, отрезок a меньше отрезка b. Обозначение: a < b. Если a меньше b, то отрезок b больше отрезка a.

В жизни вместо «отрезок a меньше (больше) отрезка b» мы чаще говорим, что отрезок a короче (длиннее) отрезка b.

1.2. Рассмотрим операции на множестве отрезков. Сформулируем определения результатов таких операций и познакомимся с построением этих отрезков.

Определение 1. *Суммой двух отрезков a и b называется третий отрезок c, который равен объединению отрезков a и b, если эти отрезки не имеют общих внутренних точек, но имеют общий конец.*

Для построения суммы отрезков a и b нужно выбрать прямую p и точку A∈p, затем на прямой p от точки A последовательно отложить отрезки a и b (рис. 1).

Получим отрезок AC, который равен сумме отрезков a и b, т.е. AC = a + b.

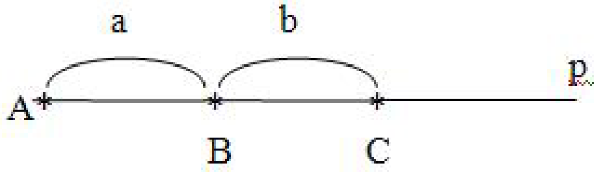

Рис. 1

Определение 2. *Разностью двух отрезков a и b называется такой третий отрезок c, который при сложении со вторым отрезком b дает первый отрезок a.*

$$a - b = c, \text{ если } c + b = a.$$

Разность отрезков a и b можно построить, если первый отрезок длиннее второго.

Из этого определения следует, что для построения отрезка a – b нужно:

1) изобразить отрезок a,
2) отложить отрезок b на отрезке a от любого его конца. Разностью отрезков a и b будет отрезок, дополняющий отрезок b до отрезка a (рис. 2).

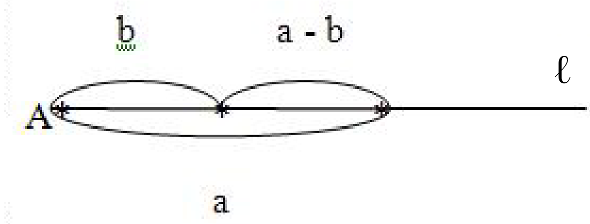

Рис. 2

Если на прямой последовательно отложить три раза отрезок a, получим отрезок a + a + a, который можно обозначить 3·a. Этот отрезок называют произведением натурального числа 3 и отрезка a.

Определение 3. *Произведением отрезка a и натурального числа k называется отрезок a · k, который равен сумме k отрезков, равных отрезку a.*

О б о з н а ч е н и е: $a \cdot k = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{k \text{ раз}}$, причем $a \cdot k = k \cdot a$.

Чтобы построить отрезок, равный произведению отрезка a и натурального числа, нужно построить отрезок, равный сумме k отрезков a.

Определение 4. *Частным отрезка a и натурального числа k называется отрезок b, который при умножении на число k дает отрезок a.*

О б о з н а ч е н и е: $a : k = b$, если $b \cdot k = a$, или $(a : k) \cdot k = a$.

Для построения такого отрезка будем использовать теорему Фалеса: если на одной стороне угла m_1 отложить равные отрезки и через концы отрезков провести параллельные прямые, то эти прямые на второй стороне угла m_2 будут отсекать равные между собой отрезки.

З а д а н и е 1. Разделить отрезок а на 5 равных частей (рис. 3).

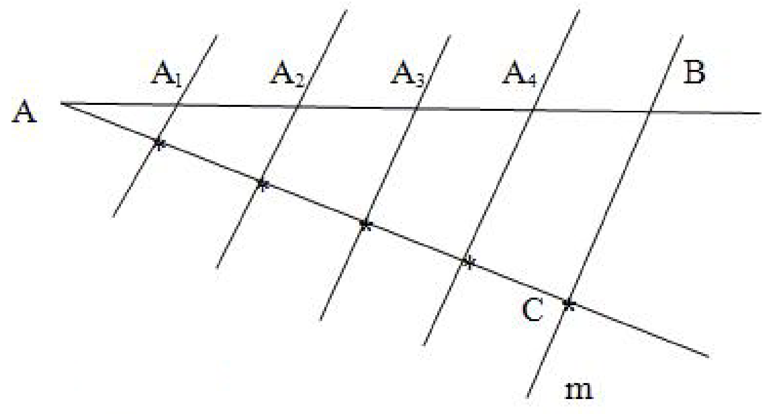

Рис. 3

Р е ш е н и е. 1. На прямой l от точки А отложить отрезок а = АВ.

2. Провести луч р с началом в точке А и отложить на этом луче от точки А 5 равных отрезков.

3. Через конец последнего отрезка на луче точку С и второй конец отрезка а точку В провести прямую m.

4. Провести прямые, параллельные прямой m, через концы равных отрезков, отложенных на луче р.

5. Эти прямые будут отсекать на отрезке а пять равных отрезков.

Получили $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4B$, поэтому $AB = AA_1 \cdot 5$, следовательно, $AA_1 = AB : 5$ или $AA_1 = a : 5$.

Вывод: разделили отрезок а на 5 равных частей.

1.3. Пусть отрезок a короче отрезка b (рис. 4), тогда отрезок b можно разбить на два отрезка a_1 и с, причем отрезок a_1 равен отрезку а.

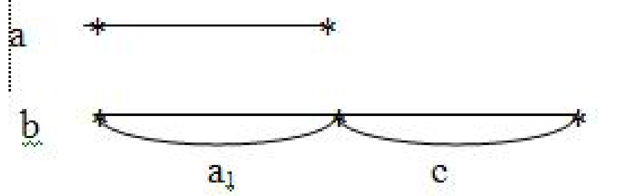

Рис. 4

В этом случае говорят, что отрезок а короче отрезка b на отрезок c или отрезок b длиннее отрезка а на отрезок с.

Определение 5. *Отрезок a короче b на отрезок c, если отрезок b можно разбить на два отрезка, один из них равен отрезку a, другой – отрезок c.*

1.4. Возьмем два отрезка a и b (рис. 5). Отрезок b разбит на три отрезка a_1, равных отрезку a, тогда говорят, что отрезок b больше отрезка a в 3 раза или отрезок a меньше отрезка b в 3 раза.

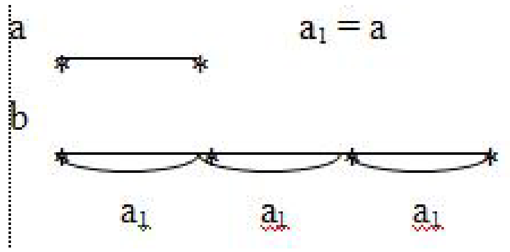

Рис. 5

Определение 6. *Отрезок a меньше отрезка b в n раз, если отрезок b можно разбить на n отрезков a_1, равных отрезку a.*

Можно записать: $b = na_1$, где $a_1 = a$.

2. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН. ОТНОШЕНИЯ РАВНО, МЕНЬШЕ, МЕНЬШЕ НА ЧИСЛО, НА МНОЖЕСТВЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Возьмем отрезок a и будем измерять его единичным отрезком e. Получим, что отрезок e укладывается на отрезке a 6 раз. Это записывается так $a = e + e + \ldots + e$, или $a = 6e$. Число 6 ставится в соответствие отрезку a при единице измерения, говорят, что число 6 равно мере отрезка a при единичном отрезке e.

З а п и с ы в а ю т: $6 = m(a)$.

Аналогично, если e укладывается на отрезке a 16 раз, то $a = 16e$ и $16 = m_e(a)$. Научитесь читать эти предложения.

Определение 7. *Натуральное число n показывает, сколько раз отрезок e, принятый за единицу измерения, укладывается на отрезке a. Обозначение: $a = ne$, или $n = m_e(a)$, $n \in N$.*

Аналогично раскрывается смысл натурального числа при измерении величин. Например, при измерении массы объекта a единицей измерения e = 1 кг получили число 5.

З а п и с ы в а ю т: $a = 5$ кг. Число 5 показывает, что в объекте a 1 кг «укладывается» 5 раз.

Определение 8. *Натуральное число n как результат измерения величин показывает, сколько раз объект e, принятый за единицу измерения, «укладывается» в измеряемом объекте a.*

О б о з н а ч е н и е: $a = ne$, или $n = m_e(a)$, где $n \in N$.

Любому объекту будет соответствовать единственное натуральное число.

Справедливо и обратное, любому натуральному числу n при выбранной единице измерения e соответствует бесконечное множество равных объектов a_i, таких, что $n = m_e(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

2.2. Известно, что на множестве натуральных чисел определены отношения «равно», «меньше». Выясним, какой смысл они имеют в этой теории.

Возьмем два натуральных числа n и k, тогда существуют отрезки a и b, такие, что $n = m_e(a)$ и $k = m_e(b)$. По определению 7, отрезок a будет складываться из n отрезков, равных e, отрезок b из k отрезков, равных e, т.е. $a = ne$ и $b = ke$. Если $n = k$, тогда $a = ne = ke = b$, т.е. $a = b$.

Справедливо и обратное, если $a = b$, то $m_e(a) = m_e(b)$, т.е. $n = k$.

Определение 9. *Натуральные числа n и k равны тогда и только тогда, когда равны отрезки a и b, мерами которых будут эти числа.*

К р а т к а я з а п и с ь: $n = k \Leftrightarrow a = b$, если $n = m_e(a)$ и $k = m_e(b)$.

2.3. Пусть $a = ne$, $b = ke$ и $n < k$.

Т.к. $n < k$, то отрезок a состоит из меньшего числа единичных отрезков e, чем отрезок b. Значит, при наложении отрезок a составит только часть отрезка b, поэтому $a < b$. Справедливо и обратное, если $a < b$, то $m_e(a) < m_e(b)$, т.е. $n < k$.

Определение 10. *Натуральное число n меньше натурального числа k тогда и только тогда, когда отрезок a, мера которого равна n , меньше отрезка b, мера которого равна k.*

К р а т к а я з а п и с ь: $n < k \Leftrightarrow a < b$, если $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$.

2.4. Используя определение 10, можно раскрыть смысл отношения «число n меньше k на число p» (рис. 6).

Пусть $n < k$, тогда $a < b$, если $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$.

Изобразим отрезки a и b, т.к. $a < b$, то отрезок b складывается из a_1 ($a_1 = a$) и отрезка c. Если $m_e(c) = p$, то говорят, что число n меньше числа k на число p.

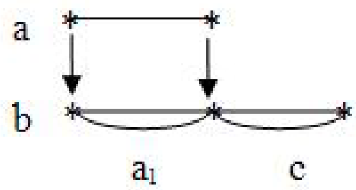

Рис. 6

Определение 11. *Натуральное число n меньше натурального числа k на число p, где $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$, тогда и только тогда, когда отрезок b можно разбить на два отрезка: один равен отрезку a, другой отрезок c, мера которого равна числу p.*

Возможно и такое определение отношения «меньше на число».

Определение 12. *Натуральное число n меньше числа k на натуральное число p, где $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$,тогда и только тогда, когда мера отрезка b такая же как мера отрезка a да еще число p.*

З а д а н и е 2. Докажите, что 1) $5 = 5$; 2) $4 < 7$; 3) 5 меньше 8 на 3.

Р е ш е н и е. 1. Воспользуемся определением 9. Выберем единичный отрезок e и два отрезка a и b такие, что $5 = m_e(a)$ (1) и $5 = m_e(b)$ (2). Из (1) и (2) следует, что $a = 5e$ и $b = 5e$ (рис. 7).

Изобразим отрезки a и b.

Очевидно, что при наложении отрезки совпадут, значит $a = b \Rightarrow m_e(a) = m_e(b)$, т.е $5 = 5$.

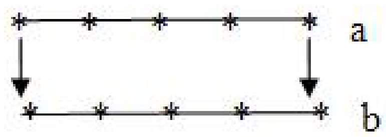

Рис. 7

2. Изобразим отрезки a и b такие, что $4 = m_e(a)$, $7 = m_e(b)$ (рис. 8). Сравним отрезки a и b, т.к. при наложении отрезок a составит часть отрезка b. $a < b$, отсюда $m_e(a) < m_e(b)$, т. е. $4 < 7$.

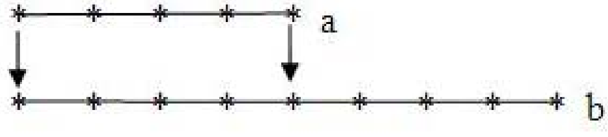

Рис. 8

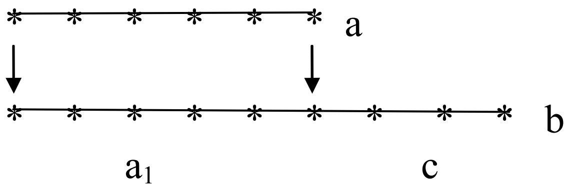

Рис. 9

3: а) изобразим отрезки a и b такие, что $5 = m_e(a)$, $8 = m_e(b)$ (рис. 9); б) построим отрезок a_1, $a_1 = a$, a_1 часть отрезка b; в) существует отрезок c, который в сумме с a_1 дает отрезок b. Получили, что мера отрезка b такая же как мера отрезка a да еще мера отрезка c, значит, число 5 меньше числа 8 на число, равное $m_e(c)$.

Найдем меру c измерением, получим $c = 3e$, или $m_e(c) = 3$.

Доказали, что 5 меньше 8 на число 3.

3. СЛОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ МЕРАМИ ВЕЛИЧИН

3.1. Мы знаем, как построить сумму двух отрезков. Меру отрезка $a + b$ можно найти практически измерением, т.е. узнать, сколько раз единичный отрезок укладывается на измеряемом отрезке.

Кроме того меру отрезка $a + b$ можно узнать, зная меры отрезков a и b.

В нашем курсе доказана теорема 1[3].

Т е о р е м а 1. Мера отрезка, который равен сумме отрезков a и b, равна сумме мер отрезков a и b при одной единице измерения.

К р а т к а я з а п и с ь: $m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$ (1)

3.2. Пусть $m_e(a) = n$, $m_e(b) = k$, где $n, k \in N$, тогда сделав замену в равенстве (1), мы получим предложение

$$\mathbf{n + k = m_e(a + b),\ где\ n = m_e(a),\ k = m_e(b).}$$

Получили определение суммы двух натуральных чисел.

Определение 13. *Сумма двух натуральных чисел n и k равна мере отрезка, который равен сумме двух отрезков, меры которых равны соответственно числам n и k.*

З а д а н и е 3. Найти значение суммы 5 и 3.

Р е ш е н и е. 1. По определению суммы двух чисел получим 5 + + 3 = $m_e(a + b)$(1),
где 5 = $m_e(a)$, 3 = $m_e(b)$.

2. Построим отрезок a + b (рис. 10). Шаги построения:

а) на прямой последовательно отложим a = 5e и b = 3e;

б) получим a + b;

в) измеряем a + b. Получаем a + b = = 8e, или $m_e(a + b)$ = 8 (2).

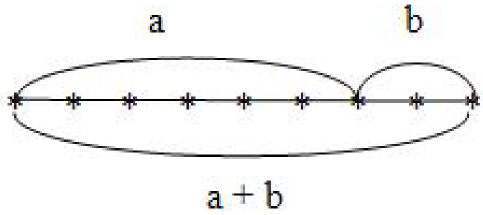

Рис. 10

Из (1) и (2) получим 5 + 3 = 8.

3.3. Из определения 13 следует связь между сложением натуральных чисел со сложением отрезков. Сложение отрезков связано со сложением величин. Значит, сложение натуральных чисел связано со сложением величин.

Применим указанную теорию к решению задач школьного курса.

З а д а н и е 4. Построить модель к задаче, обосновать выбор действия и ответить на вопрос задачи.

<u>Задача 1</u>. Из пакета сначала взяли 5 кг яблок, а затем еще 3 кг. Сколько килограммов яблок взяли из пакета?

Р е ш е н и е. 1. Работа с условием. Величина – масса, единица измерения e =1 кг.

Пусть отрезок a изображает 5 кг яблок, a = 5e,
отрезок b изображает 3 кг яблок, b = 3e,
отрезок c изображает массу яблок, которую взяли в первый и во второй раз вместе, c = ?

2. Изобразим отрезок c (рис. 11). Отрезок c изображает 5 кг (отрезок a) да еще 3 кг (отрезок b), значит, отрезок c равен сумме отрезков a и b.

а) a = 5e;

б) b = 3e;

в) c = a + в.

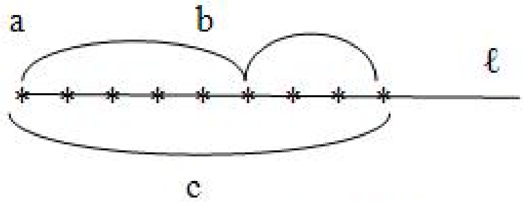

Рис. 11

3. Нужно найти $m_e(c)$, если $c = a + b$.

Задачу решаем сложением, а именно $m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$, или $m_e(c) = 5 + 3$.

4. Найдем $m_e(c)$ измерением, $c = 8e$.

Ответ: взяли 8 кг яблок.

<u>Задача 2.</u> Площадь моего участка 5 соток, а площадь участка соседа на 3 сотки больше. Какова площадь участка соседа?

Р е ш е н и е. 1. Величина – площадь, единица измерения e = 1 сотка;

a – изображает площадь моего участка, $a = 5e$,

b – изображает 3 сотки , $b = 3e$,

c – площадь участка соседа, $m_e(c)$ = ?

2. Изобразим отрезок c.

По условию известно, что площадь участка соседа на 3 сотки больше площади моего. Это означает, что площадь участка соседа такая же как площадь моего (отрезок c_1, $c_1 = a$) да еще 3 сотки (отрезок b). Построение (рис. 12):

а) a, $a = 5e$;

б) $c_1 = a$, $c_1 \in \ell$;

в) b, $b = 3e$ $b \in \ell$;

г) существует c, $c = c_1 + b$.

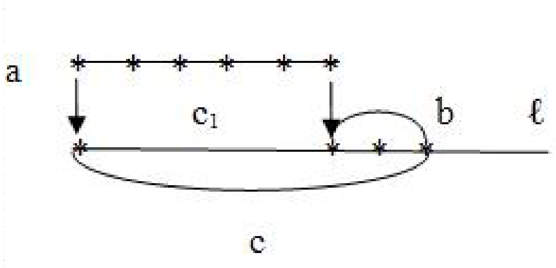

Рис. 12

3. Нужно найти $m_e(c)$, если $c = c_1 + b$.

Задачу решаем сложением чисел, а именно $m_e(c) = m_e(c + b) = m_e(c_1) + m_e(b)$, $m_e(c_1) = m_e(a)$ $m_e(c) = 5 + 3$.

4. Найдем измерением $m_e(c)$, $c = 8e$.

Ответ: площадь участка 8 соток.

Мы рассмотрели два типа задач:

1) на конкретный смысл сложения;
2) на увеличение на число b в прямой форме.

<u>Задача 3.</u> Я израсходовал 10 руб., это на 3 руб. меньше, чем у меня осталось. Сколько денег у меня осталось?

Внимательно читайте условие: 10 руб. это меньше на 3 руб., чем у меня осталось, значит, у меня осталось на 3 руб. больше, чем я израсходовал.

Изменив немного формулировку условия, мы получили задачу того же типа, как и задача 2.

П р и м е ч а н и е. Сравните модели к задачам 1 и 2. Прочувствуйте, почему они различные: во второй задаче четко видны два объекта, обладающие площадью, первый (отрезок a) – мой участок, второй (отрезок c) – участок соседа.

4. ВЫЧИТАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ВЕЛИЧИН

4.1. Мы знаем определение разности двух отрезков и можем построить отрезок a – b. Меру отрезка a – b можно найти практически (измерением). Кроме того меру отрезка a – b можно найти, зная меры отрезков a и b.

В нашем курсе доказана соответствующая теорема 2 [3].

Т е о р е м а 2. Мера отрезка, который равен разности отрезков a и b, равна разности мер отрезка a и отрезка b при одной и той же единице измерения.

$$\mathbf{m_e(a - b) = m_e(a) - m_e(b).} \qquad (2)$$

4.2. Пусть $m_e(a) = n$, $m_e(b) = k$, где n, k∈N, тогда, сделав замену в равенстве (2), получим $n - k = m_e(a - b)$.

Получили определение разности двух натуральных чисел.

Определение 14. *Разность двух натуральных чисел n и k равна мере отрезка, который равен разности двух отрезков, если мера первого отрезка равна числу n, а мера второго отрезка числу k,*

или $\mathbf{n - k = m_e(a - b)}$, **где** $\mathbf{n = m_e(a), k = m_e(b).}$

З а д а н и е 5. Найти разность чисел 9 и 3.

Р е ш е н и е. 1. По определению: 9 – 3 = $= m_e(a - b)$ (1), если $9 = m_e(a)$, $3 = m_e(b)$.

2. Построим отрезок a – b (рис. 13):

а) ℓ, A;

б) AB = a, a = 9e;

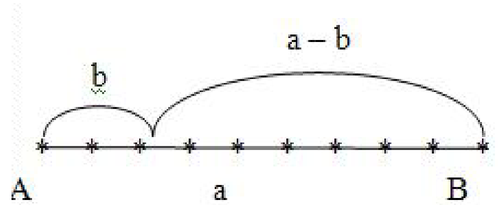

Рис. 13

в) b, b = 3e, b – часть a;

г) существует (a – b).

3. Найдем измерением $m_e(a - b)$;

$a – b = 6e$ или $m_e(a – b) = 6$ (2).

Из (1) и (2) 9 – 3 = 6.

4.3. Из определения 14 видна связь вычитания натуральных чисел с вычитанием отрезков. Каждый отрезок является носителем величины, поэтому вычитание отрезков связано с вычитанием величин. Значит, вычитание натуральных чисел связано с вычитанием величин. Справедливо и обратное.

Если в текстовой задаче речь идет о вычитании величин, то ее нужно решать вычитанием, а в моделях задачи строить разность отрезков.

Известно, что существуют четыре типа задач на вычитание.

Применим теорию к решению задач школьного курса.

З а д а н и е 6. Обосновать, что задачи нужно решать вычитанием и ответить на вопрос.

Задача 1. В ведре 12 л воды. Из них 4 л воды израсходовали. Сколько литров воды осталось в ведре?

Р е ш е н и е. 1. Величина – объем, единица измерения e = 1л.
Отрезок a изображает объем воды в ведре, a = 12e,
b изображает объем воды, которую израсходовали, b = 4e,
c изображает объем воды, которая осталась в ведре, $m_e(c) = ?$

2. Изобразим отрезок c (рис. 14):

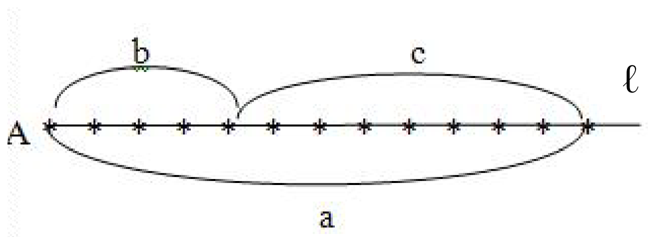

Рис. 14

а) ℓ, A ϵ ℓ;

б) a, a = 12e;

в) b, b = 4e, b часть a;

г) существует c, c = a – b.

3. Нужно найти $m_e(c)$, где c, $c = a – b$.

Задачу будем решать вычитанием, а именно, $m_e(c) = m_e(a – b)$, $m_e(c) = m_e(a) – m_e(b)$, или $m_e(c) = 12 – 4$.

4. Найдем измерение $m_e(c)$. c = 8e, $m_e(c) = 8$, значит, в ведре осталось 8 л воды.

Задача 2. В бидон и ведро налили 12 л воды. Сколько литров воды в ведре, если в бидон налили 3 л воды?

Р е ш е н и е. 1. Величина – объем, единица измерения е = 1 л, отрезок.
Пусть a изображает объем воды в ведре и бидоне вместе, a = 12e,
b изображает объем воды в бидоне, b = 3e,
c изображает объем воды в ведре, $m_e(c)$ =?

2. Изобразим отрезок c (рис. 15). По условию отрезок a изображает объем воды в бидоне (отрезок b) да еще объем воды в ведре (отрезок c), т. е. a = b + c, отсюда c = a – b.

Шаги построения:
а) ℓ, A ϵ ℓ;
б) a, a = 12e;
в) b, b = 3e, b часть a;
г) существует c, c = a – b.

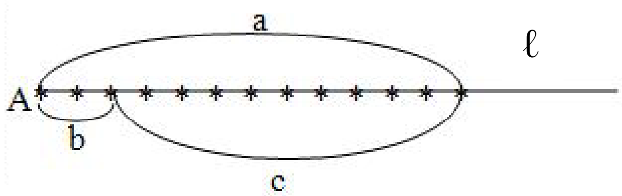

Рис. 15

3. Нужно найти $m_e(c)$, если c = a – b.
Задачу решаем вычитанием, а именно, $m_e(c) = m_e(a – b)$, $m_e(c) = m_e(a) – m_e(b)$, или $m_e(c) = 12 – 3$.

4. Найдем измерением $m_e(c)$, c = 9e.

Ответ: объем воды в ведре равен 9 л.

Задача 3. Турист в первый день прошел 8 км, а во второй день – 11. На сколько километров турист прошел меньше в первый день, чем во второй?

Р е ш е н и е. 1. Величина – расстояние, единица измерения е = = 1 км. Пусть a изображает расстояние, которое прошел турист в первый день, $m_e(a) = 8$,

b изображает расстояние, которое прошел турист во второй день, $m_e(b) = 11$,

c изображает расстояние, которое показывает, на сколько километров меньше прошел турист в первый день, чем во второй, c = ?

2. Изобразим отрезок c (рис. 16).

По условию турист в первый день прошел на c км меньше, чем во второй, или во второй день он прошел на c км больше, чем в первый.

По определению «больше на» на множестве отрезков, во второй день турист прошел такое же расстояние, как в первый день (b_1, $b_1 = a$) да еще c км.

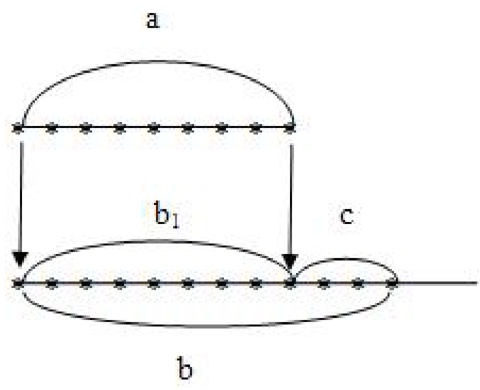

Рис. 16

Шаги построения:

а) a, a = 8e;

б) b, b = 11e (на другой прямой);

в) b_1 , $b_1 = a$, b_1 часть b.

Вывод: существует отрезок, который показывает, на сколько отрезок b длиннее a, т.е. отрезок c.

3. Нужно найти $m_e(c)$, где $c = b – b_1$ и $b_1 = a$.

Задачу решаем вычитанием, а именно $m_e(c) = m(b – b_1)$, $m_e(c) = m(b) – m(b_1)$, т.к. $m(b_1) = m_e(a)$, то $m_e(c) = 11 – 8$.

4. Измерением найдем, что c = 3e.

Ответ: во второй день турист прошел на 3 км больше, чем в первый, значит, в первый день турист прошел на 3 км меньше, чем во второй.

<u>Задача 4.</u> Турист в первый день был в пути 7 ч, это на 3 ч больше, чем во второй. Сколько часов был в пути турист во второй день?

Р е ш е н и е. 1. Величина – время, единица измерения e = 1 ч.

Пусть отрезок a изображает время туриста в первый день, a = 7e, отрезок b изображает время туриста во второй день, b = ?, c изображает 3 ч., c = 3e.

2. Изобразим отрезок b (рис. 17).

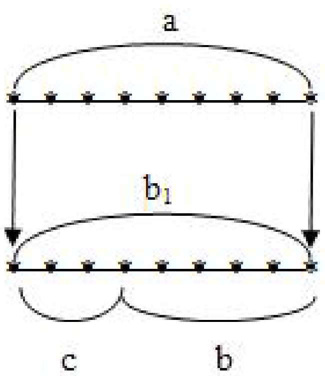

Рис. 17

По условию, в первый день турист был в пути 7 ч, это больше, чем во второй на 3 ч., значит, во второй день турист был в пути на 3 ч меньше. Последнее означает, что во второй день турист был в пути столько же часов, сколько в первый (b_1 , $b_1 = a$), но без трех часов.

Шаги построения:

а) a, a = 7e;

б) b_1 , $b_1 = a$;

в) c, c = 3e, c часть b_1 .

Вывод: существует b, $b = b_1 - c$.

3. Нужно найти $m_e(b)$, если $b = b_1 - c$, задачу решаем вычитанием, а именно $m_e(b) = m_e(b_1 - c)$, $m_e(b) = m_e(b_1) - m_e(c)$, т. к. $m_e(b_1) = m_e(a)$, $m_e(b) = 7 - 3$.

4. Измерением найдем $m_e(b)$. Получим $= 4e$.

Ответ: время в пути во второй день 4 ч.

5. УМНОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

5.1. Мы знаем, как построить отрезок, равный произведению натурального числа n и отрезка a, т. е. отрезок na.

Меру построенного отрезка na можем найти практически, т. е. измерением.

В нашем курсе мы доказываем теорему 3 о нахождении меры такого отрезка.

Теорема 3. Мера отрезка, который равен произведению натурального числа n и отрезка a, равна произведению числа n и меры отрезка a при одной единице измерения:

$$\mathbf{m_e(na) = n \cdot m_e(a).} \tag{3}$$

5.2. Связь умножения натуральных чисел с умножением натурального числа и отрезка.

Пусть в равенстве (3) $m_e(a) = k$, $k \in N$, тогда получим определение произведения чисел n и k, $n \cdot k = m_e(n \cdot a)$.

Определение 15. *Произведение натуральных чисел n и k равно мере отрезка, равного произведению первого числа n и отрезка a, если второе натуральное число k равно мере отрезка a при одной и той же единице измерения.*

Краткая запись: $n \cdot k = m_e (n \cdot k)$, где $k = m_e(a)$.

Из этого определения следует, что умножение натуральных чисел связано с умножением натурального числа и отрезка, т. к. умножение натурального числа и отрезка связано с умножением натурального числа и величины, значит, умножение натуральных чисел связано с умножением натурального числа и величины. Справедливо и обратное.

З а д а н и е 7. Найти произведения 3 и 4.

Р е ш е н и е. 1. По определению, $3 \cdot 4 = m_e(3 \cdot a)$ (1), где $4 = m_e(a)$. Выбираем единичный отрезок e.

2. Построим отрезок $3 \cdot a$ (рис. 18):

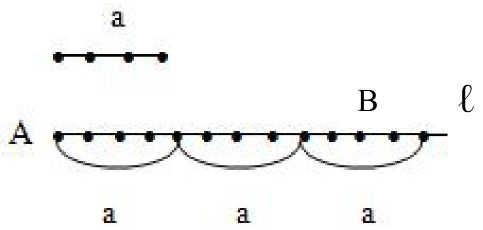

Рис. 18

а) построим a = 4e;

б) на прямой ℓ от точки A нужно отложить 3 отрезка a;

в) получим отрезок AB, AB = 3a.

3. Найдем $m_e(3 \cdot a)$ измерением, 3a = = 12e, или $m_e(3 \cdot a) = 12$ (2).

Из (1) и (2) следует, что $3 \cdot 4 = 12$.

З а д а н и е 8. Доказать, что задачи нужно решать умножением и ответить на вопрос.

<u>Задача 1</u>. Сколько килограммов муки потребуется, чтобы ее расфасовать в 6 пакетов по 2 кг в каждый пакет?

Р е ш е н и е. 1. Величина – масса, единица измерения e = 1 кг. Пусть a изображает массу муки в каждом пакете, a = 2e,

b изображает массу муки в 6 пакетах, b = ?,

6 – число пакетов.

2. Изобразим отрезок b (рис. 19):

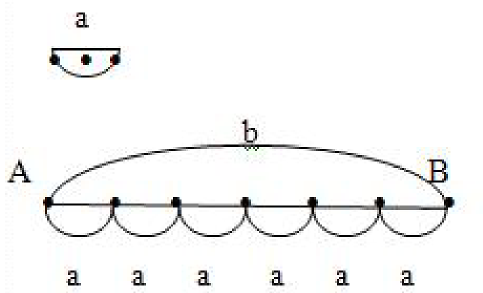

Рис. 19

а) изобразим отрезок a, a = 2e;

б) отрезок b будет складываться из 6 отрезков a,

$b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{6 \text{ раз}}$, т. е. b = 6a.

Изобразим b.

3. Нужно найти $m_e(b)$, если b = 6a. Задачу будем решать умножением, а именно, $m_e(b) = m_e(6a)$, т. е. $m_e(b) = 6m_e(a)$, или $m_e(b) = 6 \cdot 2$.

4. Чтобы ответить на вопрос, найдем меру отрезка b измерением, b = 12e, или $m_e(b) = 12$.

Ответ: потребуется 12 кг муки.

<u>З а д а ч а 2.</u> Сестре 4 года, а брату в 2 раза больше. Сколько лет брату?

Р е ш е н и е. 1. Величина – возраст, единица измерения е = 1 год.
Пусть отрезок a изображает возраст сестры, $a = 4e$,

отрезок b изображает возраст брата, $b = ?$,

число 2 показывает, во сколько раз возраст брата больше возраста сестры.

2. Изобразим отрезок b (рис. 20).

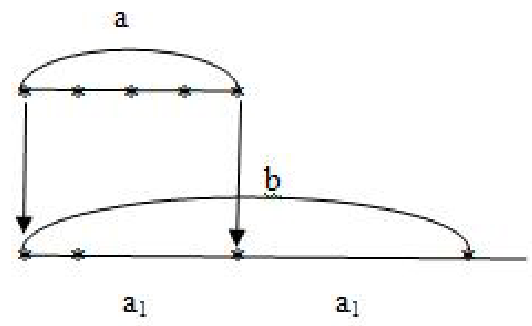

Рис. 20

По условию брат старше сестры в 2 раза, поэтому отрезок b длиннее отрезка a в 2 раза.

По определению отношения «больше в несколько раз» на множестве отрезков, отрезок b можно разбить на 2 отрезка, равных отрезку a, т.е. $b = 2a_1$, $a_1 = a$.

Отсюда вытекает построение:

а) a, $a = 4e$;

б) a_1 , $a_1 = a$;

в) $2a_1$, $2a_1 = b$.

3. Нужно найти $m_e(b)$, $b = 2a_1$, задачу решаем умножением, а именно, $m_e(b) = m_e(2a_1)$ (по Т3), $m_e(b) = 2m_e(a_1)$, т.к. $m_e(a_1) = m_e(a)$, тогда $m_e(b) = 2 \cdot 4$.

4. Измерением найдем $m_e(b)$, $b = 8e$.

Ответ: брату 8 лет.

6. ДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

6.1. Нам известно, как построить отрезок, который равен частному отрезка a и натурального числа k, т.е. отрезок $a : k$.

Меру отрезка $a : k$ можно найти практически, т.е. измерением.

Пусть $a : k = b$, по определению частного отрезка и натурального числа, получаем $a = kb$.

Меру отрезка a можно выразить, зная теорему 3.

Получим $m_e(a) = km_e(b)$, отсюда $m_e(b) = m_e(a) : k$, или $m_e(a : k) =$
$= m_e(a) : k$.

Доказали, что мера отрезка, который равен частному отрезка а и натурального числа, равна частному меры отрезка а и натурального числа при одной единице измерения (**теорема 4**).

$$\mathbf{m_e(a : k) = m_e(a) : k.} \qquad (4)$$

6.2. Рассмотрим равенство (4). Пусть $m_e(a) = n$, где $n \in N$. Получим $n : k = m_e(a : k)$, что дает возможность определить частное двух натуральных чисел.

Определение 16. *Частное двух натуральных чисел n и k равно мере отрезка, который равен частному отрезка а и второго числа k , если первое число n равно мере отрезка а при той же единице измерения,*

или $\mathbf{n : k = m_e(a : k)}$**, если** $\mathbf{n = m_e(a)}$**.**

З а д а н и е 9. Найти частное 8 и 4.

Р е ш е н и е. 1. По определению частного $8 : 4 = m_e(a : 4)$ (1), если $m_e(a) = 8$. Выберем единичный отрезок е.

2. Построим отрезок а : 4 (рис. 21).

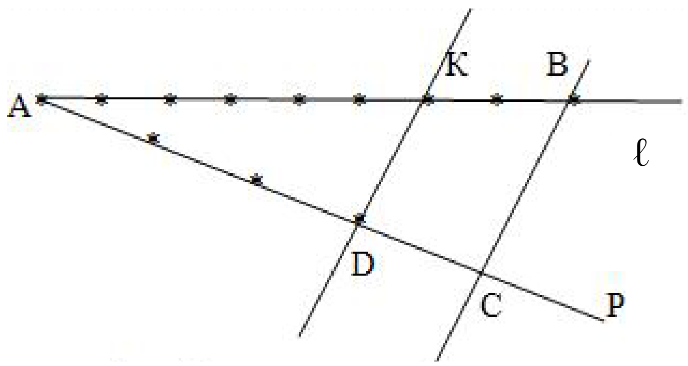

Рис. 21

Шаги построения:
а) ℓ, А;
б) а, а = 8е, а = АВ;
в) луч р, откладываем на луче четыре равных отрезка;
г) прямая ВС, DK||ВС. ВК = = а : 4.

3. Найдем измерением меру ВК, ВК = 2е или а : 4 = = 2е, т.е. $m_e(a : 4) = 2$ (2).

Из (1) и (2) получаем 8 : 4 = 2.

Вывод: из определения частного следует, что деление натуральных чисел связано с делением отрезка на натуральное число, а т.к. деление отрезка на натуральное число связано с делением величины на натуральное число, то деление натуральных чисел связано с делением величины на натуральное число. Справедливо и обратное.

Если в текстовой задаче величину нужно разделить на натуральное число, то задачу нужно решать делением, а при построении модели отрезок делить на натуральное число.

З а д а н и е 10. Доказать, что задачи нужно решать делением и ответить на вопрос задачи.

Задача 1. 12 л молока разлить по 3 л в каждую банку. Сколько банок потребуется?

Р е ш е н и е. 1. Величина – объем, единица измерения е = 1 л.

Пусть a изображает объем всего молока, a = 12e,

b изображает объем молока в одной банке, b = 3e,

x, x∈N – число банок, x = ?

2. Изобразим модель к задаче (рис. 22).

Шаги построения:

а) a, a = 12e;

б) b, b = 3e.

Если отрезок b отложить на отрезок a, то это будет означать, что 3 л молока перелили в банку;

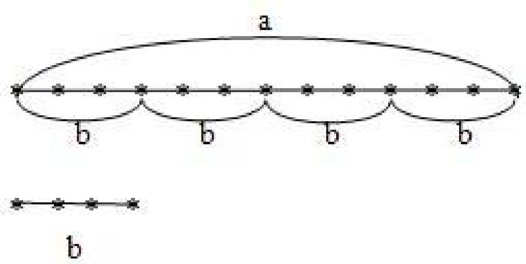

Рис. 22

в) изобразим процесс переливания следующим образом: на отрезке a будем последовательно откладывать отрезок b столько раз, сколько это возможно.

Число откладываний будет показывать, сколько раз из 12 л можно взять по 3 л, а т.к. 3 л молока переливают в банку, то число банок будет равно числу откладываний отрезка b на отрезке a.

Модель получена.

Получили, что отрезок a складывается из x отрезков b, т.е. $a = x \cdot b$ (1), где x∈N.

3. Выразить x из равенства (1) нельзя, поэтому выразим меру отрезка a, $m_e(a) = m_e(xb)$, $m_e(a) = xm_e(b)$, или $12 = x \cdot 3$, отсюда $x = 12 : 3$. Доказали, что задачу нужно решать делением.

4. Число x можно найти счетом: x = 4.

Ответ: потребуется 4 банки.

Задача 2. 12 м ткани нужно разрезать на 3 равные части. Сколько метров ткани будет в каждом куске?

Р е ш е н и е. 1. Величина – длина, единица измерения $e = 1$ м. Пусть a изображает длину всей ткани, $a = 12e$,

b изображает длину куска ткани, $b =$?

3 – показывает, на сколько равных частей (кусков) разрезали всю ткань.

2. Изобразим модель к задаче (рис. 23):

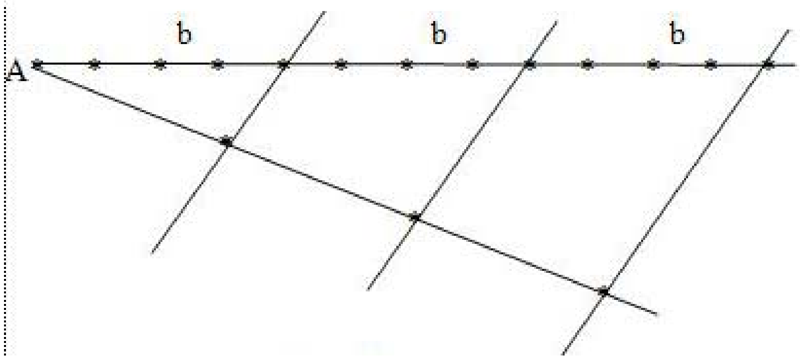

Рис. 23

12 м ткани нужно разрезать на 3 равные части, длину каждой изображает b. Графически это означает, что отрезок a нужно разделить на 3, получим $a : 3 = b$ (см. построение частного отрезка и натурального числа).

3. Нужно найти $m_e(b)$, где $b = a : 3$. Задачу решаем делением, а именно $m_e(b) = m_e(a : 3)$ по Т4, $m_e(b) = m_e(a) : 3$, или $m_e(b) = 12 : 3$.

4. Измерением находим $b = 4e$.

Ответ: длина каждого куска ткани 4 м.

<u>Задача 3.</u> Брату 12 лет, а сестре 4 года. Во сколько раз сестра моложе брата?

Р е ш е н и е. 1. Величина – возраст, единица измерения $e = 1$ год. Пусть a изображает возраст брата, $a = 12e$,

b возраст сестры, $b = 4e$,

число $x \in N$ показывает, во сколько раз сестра моложе брата.

2. Модель к задаче (рис. 24).

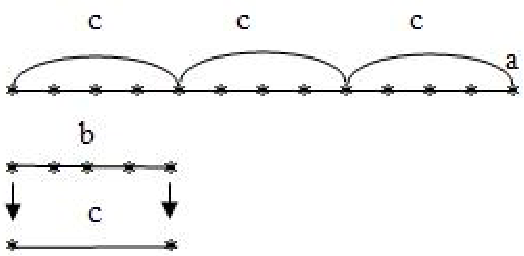

Рис. 24

По условию сестра моложе брата в x раз, значит, брат старше сестры в x раз.

Если возраст брата в x раз больше возраста сестры, значит, отрезок a в x раз больше отрезка b. По определению отношения «отрезок a больше отрезка b в x раз» имеем, что отрезок a можно разбить на x отрезков c, равных отрезку b.

Шаги построения:

а) a, a = 12e;

б) b, b = 4e;

в) c, c = b.

г) на отрезке a будем откладывать отрезок c столько раз, сколько это возможно, т.е. x раз. Получим a = x · c (1), где c = b.

Из равенства (1) нельзя выразить x.

3. Выразим меру отрезка a: $m_e(a) = m_e(xc)$ по Т3, $m_e(a) = x\ m_e(c)$, отсюда $x = m_e(a) : m_e(c)$, т.к. $m_e(c) = m_e(b)$, тогда x = 12 : 4. Доказали, что задачу нужно решать делением.

4. Число x можно найти счетом, x = 3.

Ответ: сестра моложе брата в 3 раза.

Задача 4. Масса яблок 8 кг, а груш в 2 раза меньше. Определить массу груш в килограммах.

Р е ш е н и е. 1. Величина – масса, e = 1 кг.
Пусть a изображает массу яблок, a = 8e,

b – массу груш, b = ?

2 – показывает, во сколько раз масса груш меньше массы яблок.

2. Модель к задаче (рис. 25).

Масса груш в 2 раза меньше массы яблок, тогда масса яблок в 2 раза больше. Отсюда следует, что отрезок a в 2 раза больше отрезка b. По определению «больше в 2 раза» на множестве отрезков, отрезок a (масса яблок) можно разбить на 2 отрезка c, равных отрезку b (масса груш).

Построение:

а) a, a = 8e;

б) разделим отрезок a на число 2.

Получим отрезок c, c = a : 2.

в) b, b = c.

3. c = a : 2, $m_e(c) = m_e(a : 2)$ по Т4,

$m_e(c) = m_e(a): 2$ и $m_e(c) = m_e(b)$.

Получим $m_e(b) = 8 : 2$.

Массу груш нужно находить делением.

4. Меру b можно найти измерением, b = 4e.

Ответ: масса груш равна 4 кг.

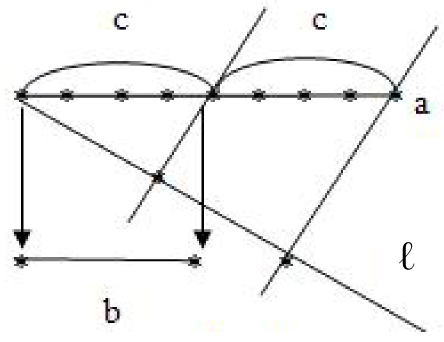

Рис. 25

7. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ДВУМЯ ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ

7.1. Мера отрезка при измерении новой единицей измерения, меньшей прежней.

Пусть $m_e(a) = 3$ (1). Измерим отрезок a новой единицей измерения e_1, $e_1 = e : 2$ (2). Из (1) $a = 3e$, из (2) $e = 2\,e_1$, тогда $a = 3 \cdot (2e_1) = 6e_1$. $a = (3 \cdot 2)e_1$, или $m_e(a) = 3 \cdot 2$.

Сделаем замену из (1) и (2) и получим $m_{e_1}(a) = m_2(a) \cdot m_{e_1}(e)$.

Т е о р е м а 5. Мера отрезка a при измерении его новой единицей измерения e_1, которая меньше прежней e, равна произведению меры того же отрезка a при прежней единице e и меры прежней единицы измерения e, если ее измерять новой e_1,

или $\mathbf{m_{e_1}(a) = m_e(a) \cdot m_{e_1}(e)}$**, если** $\mathbf{e_1 < e}$**.**

З а д а н и е 11. 6 ч измерить в минутах.

Р е ш е н и е. Величина – время, две единицы измерения e_1 = = 1 мин, e = 1 ч. Известно, что в 1 ч 60 мин., 1 ч = 60 мин, т.е. $e = 60\,e_1$.

Пусть a изображает 6 ч, $a = 6e$.

Найдем $m_{e_1}(a)$, по Т5 $m_{e_1}(a) = m_e(a) \cdot m_{e_1}(e)$, $m_{e_1}(a) = 6 \cdot 60$, a = = $(6 \cdot 60)\,e_1$, $a = 360\,e_1$, или $m_{e_1}(a) = 360$. Читается: мера 6 ч в минутах равна 360, или 6 ч равны 360 мин.

Ответ: 6 ч = 360 мин.

7.2. Произведение двух натуральных чисел как мера отрезка при новой единице измерения, меньшей прежней.

Доказано, что $m_{e_1}(a) = m_e(a) \cdot m_{e_1}(e)$, если $e_1 < e$.

Пусть $m_e(a) = n$, $m_{e_1}(e) = k$, тогда получим определение произведения двух чисел $n \cdot k = m_{e_1}(a)$.

Определение 17. *Произведение двух натуральных чисел n и k равно мере отрезка a при меньшей единице измерения e_1, если число n равно мере того же отрезка a при большей единице измерения e и число k равно мере большей единицы измерения e, если ее измерять меньшей e_1,*

или $\mathbf{n \cdot k = m_{e_1}(a)}$**, если** $\mathbf{n = m_e(a)}$ **и** $\mathbf{k = m_{e_1}(e)}$**.**

З а д а н и е 12. Найти значение произведения 5 и 3.

Р е ш е н и е. 1. По определению $5 \cdot 3 = m_{e_1}(a)$ (1), т.к. $5 = m_{e_1}(a)$ и $3 = m_{e_1}(e)$. Чтобы найти значение произведения, нужно построить отрезок а и измерить его отрезком e_1.

2. Построение (рис. 26):

а) выберем отрезок e_1 и построим е, т.к. $3 = m_{e_1}(e)$ или $e = 3e_1$.

б) $5 = m_e(a)$, или $a = 5e$. Построим отрезок а, т.е. на прямой отложить 5 раз отрезок е.

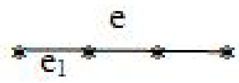

Рис. 26

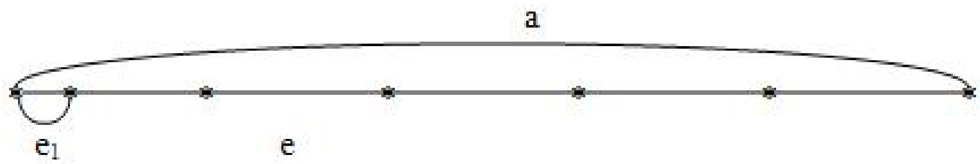

Рис. 27

Измерим а отрезком e_1, получим $a = 15e_1$, или $m_{e_1}(a) = 15$ (2).

Ответ: из (1) и (2) $5 \cdot 3 = 15$.

З а д а н и е 13. Назовите величины и единицы их измерения. Почему задачи нужно решать умножением?

Задача 1. Масса одной подушки 2 кг. Какова масса 5 подушек в килограммах?

Р е ш е н и е. Величина – масса, $e_1 = 1$кг, $e_2 =$ подушка.

По условию $e_2 = 2e_1$, отсюда $e_1 < e_2$

Если а изображает массу всех (пяти) подушек, то $m_{e_2}(a) = 5$.

Нужно найти $m_{e_1}(a)$, т.к. $e_1 < e_2$, то задачу нужно решать умножением, а именно, $m_{e_1}(a) = m_e(a) \cdot m_{e_1}(e)$, $m_{e_1}(a) = 5 \cdot 2$.

Задача 2. Стоимость одной ручки 3 руб. Выразить в рублях стоимость 6 ручек.

Р е ш е н и е. 1. Величина – стоимость, $e_1 = 1$руб., $e_2 =$ ручка.

По условию стоимость ручки (e_2) равна 3 руб.($3e_1$), т.е. $e_2 = 3e_1$. Отсюда $e_1 < e_2$.

2. Если отрезок а изображает стоимость всех ручек, тогда известно, что $m_{e_2}(a) = 6$.

3. Нужно найти $m_{e1}(a)$, т.к. $e_1 < e_2$, то задачу будем решать умножением, а именно,

$$m_{e_1}(a) = m_{e_2}(a) \cdot m_{e_1}(e_2), \text{ или } m_{e_1}(a) = 6 \cdot 3.$$

<u>Задача 3.</u> Брату 4 года, а сестре в 2 раза больше. Сколько лет сестре?

Р е ш е н и е. 1. Величина – возраст, $e_1 = 1$год, $e_2 =$ возраст брата.

2. Если отрезок а изображает возраст сестры, то его можно измерить e_2, $a = 2e_2$.

Еще известно, что $e_2 = 4e_1$, $e_1 < e_2$.

3. Нужно выразить $m_e(a)$, т.к. $e_1 < e_2$, то задачу будем решать умножением, а именно,

$$m_{e_1}(a) = m_{e_2}(a) \cdot m_{e_1}(e_2), \text{ или } m_{e_1}(a) = 2 \cdot 4.$$

7.3. Мера отрезка при измерении его новой единицей измерения, которая больше прежней.

Пусть $m_{e_1}(a) = 8$ (1). Измерим его новой единицей измерения $e_2 =$ $= 2e_1$ (2).

Из (1) $a = 8e_1$, из (2) $e_1 = e_2/2$. Получим $a = 8 \cdot (e_2/2) = (8 \cdot ½)\, e_2 = (8 : 2)\, e_2$, т.е. $m_{e_2}(a) = 8 : 2$. Сделав замену, получим $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$.

Т е о р е м а 6. Мера отрезка а при новой единице измерения e_2, которая больше прежней единицы измерения e_1, равна частному меры того же отрезка а и меры новой единицы измерения, если их измерить прежней единицей измерения,

$$\text{или} \quad \mathbf{m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2).}$$

З а д а н и е 14. 180 с выразить в минутах.

Р е ш е н и е. Величина – время, две единицы измерения: прежняя 1 с, $e_1 = 1$ с, новая 1 мин, $e_2 = 1$ мин.

Известно, что 1 мин = 60 с, т.е. $e_2 = 60e_1$ (1).

Пусть а изображает 180 с, $a = 180e_1$ (2).

Найдем $m_{e_2}(a)$, если из (1) $e_2 > e_1$, т.е. новая единица измерения больше прежней.

По Т6: $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$, или $m_{e_2}(a) = 180 : 60$, $m_{e_2}(a) = 3$, $a =$ $= 3e_2$, т.е. 180 с = 3 мин.

7.4. Частное двух натуральных чисел как мера отрезка при новой единице измерения, которая больше прежней.

Доказано, что $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$ если $e_2 > e_1$.

Пусть $m_{e_1}(a) = n$, $m_{e_1}(e_2) = k$, тогда получим определение частного двух чисел.

$n : k = m_{e_2}(a)$.

Определение 18. *Частное двух натуральных чисел n и k равно мере отрезка а при большей единице измерения e_2, если первое число равно мере того же отрезка а при меньшей единице измерения e_1 и второе число k равно мере большей единице измерения e_2, если ее измерять меньшей e_1,*

или **$n : k = m_{e_2}(a)$, если $e_2 > e_1$, $n = m_{e_1}(a)$, $k = m_{e_1}(e_2)$.**

З а д а н и е 15. Найти частное 12 и 4.

Р е ш е н и е. По определению $12 : 4 = m_{e_2}(a)$ (1), если $12 = m_{e_1}(a)$ (2), $4 = m_{e_1}(e_2)$ (3), $e_2 > e_1$.

Очевидно, чтобы найти частное, нужно построить отрезок а и измерить его отрезком e_2.

Из (2) следует, что $a = 12e_1$, т.е. можно построить а, выбрав отрезок e_1 (рис. 28).

Из (3) следует, что $e_2 = 4e_1$, т.е. зная e_1 можно построить e_2.

Получим такой план:

а) выбираем произвольно e_1;
б) изображаем e_2, $e_2 = 4e_1$;
в) изображаем отрезок а, $a = 12e_1$;
г) измеряем отрезок а единичным отрезком e_2, $a = 3e_2$, или $m_{e_2}(a) = 3$ (4).

Из (1) и (4) $12 : 4 = 3$.

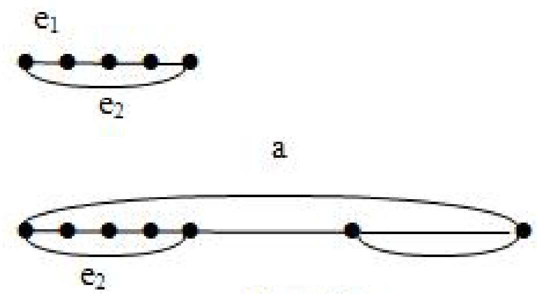

Рис. 28

З а д а н и е 16. Назовите величины, единицы измерения. Почему задачи нужно решать делением?

<u>Задача 1.</u> 12 кг муки нужно расфасовать в пакеты по 2 кг в каждый. Сколько потребуется пакетов?

Р е ш е н и е. Величина – масса, две единицы измерения: 1 кг и пакет.

Пусть а изображает массу всей муки, e_1 = 1 кг, e_2 = пакет. По условию $e_2 = 2e_1$ (1), $a = 12e_1$ (2). Нужно измерить отрезок а единичным измерением e_2. Сравним e_1 и e_2.

Из (2) $e_1 < e_2$ или $e_2 > e_1$. Задачу нужно решать делением.

По Т6 $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$, $m_{e_2}(a) = 12 : 2$.

Задача 2. Из 12 м ткани хотят сшить 6 одинаковых простыней. Сколько метров ткани пойдет на одну простыню?

Р е ш е н и е. Величина – длина, две единицы измерения: 1 м и простыня.

Пусть а изображает длину ткани, e_1 = 1м, e_2 = простыня.
Отрезок а измеряется в метрах $a = 12e_1$ (1) и отрезок с можно измерить «простыней», тогда $a = 6e_2$ (2).
Нужно измерить простыню в метрах, т.е. найти $m_{e_1}(e_2)$.

Из (1) и (2) следует $12e_1 = 6e_2$, или $e_2 = 2e_1$ (3), $e_2 > e_1$ (4).

Из (3) на одну простыню пойдет 2 м.
По Т6 $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$. Делаем замену $6 = 12 : m_{e_1}(e_2)$,
отсюда $m_{e_1}(e_2) = 12 : 6$.

Доказали, что задачу нужно решать делением.

Задача 3. Брату 8 лет, сестре 2 года. Во сколько раз брат старше сестры?

Р е ш е н и е. Величина – возраст, сестра моложе брата в несколько раз, значит, возраст брата можно измерить двумя единицами измерения: e_1 = возраст сестры, e_2 = 1год. Отрезок а будет изображать возраст брата.

По условию $a = 8e_2$ (1), $e_1 = 4e_2$ (2). Из (2) $e_1 > e_2$.
Измерим возраст брата (отрезок а) отрезком e_1, по Т6 $m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$, $m_{e_2}(a) = 8 : 4$.

Доказали, что задачу нужно решать делением.

Задача 4. Масса арбуза 10 кг, а масса дыни в 2 раза меньше. Найти массу дыни в килограммах.

Р е ш е н и е. Пусть отрезок а изображает массу арбуза, существуют две единицы измерения ее:
e_1 = 1кг, e_2 = дыня (т.к. масса арбуза в два раза больше массы дыни).

По условию: $a = 10e_1$ (1) и $a = 2e_2$ (2). Из (1) и (2) $10e_1 = 2e_2$, $e_2 = 5e_1$ (3), т.е. масса дыни равна 5кг.
Из (3) $e_2 > e_1$. Применим Т6 $m_{e2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$. Сделаем замену, $2 = 10 : m_{e_1}(e_2) \Rightarrow m_{e_1}(e_2) = 10 : 2$. Массу дыни в килограммах нужно находить делением.

8. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите значение выражений: 3 + 4, (3 + 2) + 4, 5 – 3, (8 – 3) – 2.

2. Найдите значение произведения $3 \cdot 4$ и значение частного 18 : 3 двумя способами.

3. Постройте отрезки $(a + 2b) : 4$, $((3b – 2a) \cdot 3) + b : 3$. Найдите меры построенных отрезков двумя способами.

4. Постройте модель к задаче и ответьте на вопрос:

а) определите расстояние, которое прошел пешеход за 4 ч, если каждый час он проходил по 4 км;

б) в первый день турист был в пути 4 ч, а во второй – в 3 раза больше. Сколько часов был турист в пути во второй день?

в) площадь одного участка 24 сотки, второго – в 3 раза меньше. Определить площадь второго участка;

г) брату 12 лет, а сестре на 3 года больше. Сколько лет сестре?

5. Приведите примеры двух простых задач, раскрывающих смысл:
а) сложения, б) вычитания, в) умножения, г) деления.
Решите их, не прибегая к действиям над числами.

6. Укажите две простые задачи, в условии которых дано отношение:

а) больше на,   б) меньше на,   в) больше в,   г) меньше в.

Решите их, обосновав выбор действия.

7. Укажите две задачи:

а) на разностное сравнение, б) на кратное сравнение.

Обоснуйте выбор действия.

8. Выделите две простые и обоснуйте выбор действия при решении каждой простой задачи:

а) в одном бидоне 6 л молока, а в другом – в 2 раза больше. Молоко из второго бидона разлили в банки по 4 л. Сколько банок потребуется?

б) в квартире три комнаты. Площадь одной 18 кв.м, это в 2 раза больше, чем площадь второй комнаты, а площадь третьей комнаты в 3 раза больше площади второй комнаты. Определить площадь третьей комнаты;

в) купили 6 пакетов муки по 4 кг в каждом и пакет с сахаром 3 кг. Во сколько раз масса муки больше массы сахара?;

г) из 12 м ткани можно сшить 3 одинаковых платья. Сколько метров ткани потребуется, чтобы сшить 5 таких платьев?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Стойлова, Л. П.* Математика / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2002. – 424 с. – ISBN 5-7695-0456-0.

2. *Стойлова, Л. П.* Основы начального курса математики / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1988. – 320 с. – ISBN 5-09-000482-X.

3. *Булатова, Н. Ф.* Целые неотрицательные числа / Н. Ф. Булатова, Н. И. Пушкарёва. – Владимир : ВГПУ, 2008. – 60 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ,
ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ВЕЛИЧИН

Методические рекомендации к изучению курса по выбору
«Теоретические основы начального курса математики»

Составитель
БУЛАТОВА Нина Федоровна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент И. И. Молодец

Редактор Е. В. Невская
Корректор В. С. Теверовский
Компьютерная верстка В. А. Вятков

Подписано в печать 28.11.12.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 1,86. Тираж 75 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87