Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра информационных систем и информационного менеджмента

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Методические указания
к практическим занятиям

В двух частях

Часть 1

Составители:
Д. И. ЛЕВКОВСКИЙ
Р. И. МАКАРОВ

Владимир 2012

УДК 004.62:510.8
ББК 32.988-5
М34

Рецензент
Доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной техники
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
И. Р. Дубов

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М34 **Математические** методы теории систем : метод. указания к практ. работам. В 2 ч. Ч. 1 / Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых ; сост.: Д. И. Левковский, Р. И. Макаров. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2012. – 68 с.

Знакомят магистрантов с основами теории систем, математическим аппаратом формализации процессов в сложных системах, какими являются современные информационные системы. Слушатели изучают методы системного анализа, основы оценки сложных систем, модели основных функций управления, математические методы, применяемые при исследовании систем. Практические занятия охватывают темы, изучаемые во втором учебном семестре. Позволяют закрепить изучаемые теоретические вопросы постановок задач системного анализа, построения моделей систем и оценок их параметров.

Предназначены для специализированной подготовки магистров по направлению 230200 – Информационные системы по программе 230218 – Анализ и синтез информационных систем.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Табл. 12. Ил. 6. Библиогр.: 9 назв.

УДК 004.62:510.8
ББК 32.988-5

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание содержит задачи курса "Математические методы теории систем. Часть 1" с целью сориентировать магистрантов на подготовку по темам: «Типовые постановки задач системного анализа: распределение ресурсов, управление запасами, организация обслуживания оборудования», «Типовые постановки задач системного анализа: планирование работ над проектами, анализ риска и безопасности использования новых технологий», «Проверка адекватности моделей, анализ неопределенности, чувствительности, реалистичности и работоспособности», «Агрегирование, виды агрегатов: структуры, операторы, статистики, случайный процесс», «Методы экспертных оценок: парное сравнение, множественные сравнения, последовательное сравнение», «Оценка сложных систем в условиях определенности. Методы решения задач векторной оптимизации», «Оценка сложных систем в условиях риска на основе функции полезности», «Оценка сложных систем в условиях неопределенности». С этой же целью в издании приведен рекомендательный библиографический список по всему курсу.

Готовясь к практическим занятиям, магистрант должен прочесть рекомендованную литературу и конспект лекций, самостоятельно проверить, как он усвоил вопросы той темы, по которой будет решать задачи.

Решение задач необходимо сопровождать соответствующими формулами, подробными расчетами, пояснением сущности исследуемых показателей и краткими выводами.

В соответствии с учебной программой магистрантам необходимо иметь навык в решении определенных задач согласно требованиям.

Методические указания значительно упростят процесс изучения материала, так как в издании систематизированы темы разделов, основные формулы по темам, которыми необходимо пользоваться. Для повышения эффективности самостоятельной работы представлены примеры решения распространенных задач для самостоятельного решения. В конце каждой темы приведены контрольные вопросы.

Перед выполнением контрольной работы или решением задач на практических занятиях требуется внимательное изучение настоящих методических указаний.

1. Типовые постановки задач системного анализа: распределение ресурсов, управление запасами, организация обслуживания оборудования

1.1. Задача распределения ресурсов [1]

Всякую задачу распределения можно сформулировать как оптимизационную, при решении которой требуется:

а) либо максимизировать экономический результат при заданных ресурсах;

б) либо минимизировать используемые ресурсы при фиксированном экономическом результате.

Общая математическая модель задачи распределения ресурсов с числом переменных n и ограничений m имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\sum a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ m; \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

где c_j – коэффициенты целевой функции,
a_{ij} – норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы j-й продукции,
b_i – объем имеющегося i-го ресурса,
x_j – неизвестная переменная, определяющая величину (объем) выпуска j-й продукции.

В модели (1.1) – (1.2) неизвестные переменные выступают в первой степени, характеризуя линейную зависимость.

Поэтому эту модель называют задачей линейного программирования. Для решения задач линейного программирования разработан специальный метод, называемый симплекс-методом.

Процесс построения математической модели оптимизационных задач распределения ресурсов должен ответить на следующие вопросы:

• Для определения каких величин строят модель?

• Какие ограничения следует наложить на структуру множества допустимых решений?

• Для достижения какой цели выбираются значения допустимых переменных, соответствующие оптимальному решению задач?

Рассмотрим конкретный пример и на его основе сделаем обобщающие выводы о принципах построения модели и методике ее исследования.

Пример

Словесная постановка задачи. Фирма изготовляет два вида изделий: F и H.

Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два типа сырья – A и B. Максимально возможные суточные запасы (ресурсы) этих продуктов составляют 6 и 8 т соответственно. Расходы A и B на одну тонну соответствующей продукции приведены в табл. 1:

Таблица 1

Вид сырья	Расход сырья (т) на тонну продукции		Ресурс сырья
	Изделие H	Изделие F	
A	1	2	6
B	2	1	8

Из анализа рынка сбыта стало известно следующее:

• суточный спрос на изделие F не превышает спроса на изделие H более чем на одну тонну;

• спрос на изделие H никогда не превышает две тонны в сутки.

• оптовые цены одной тонны продукции равны: 3 тыс. руб. для изделия H, 2 тыс. руб. для изделия F.

Какое количество изделий каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Математическая формулировка задачи сводится к определению объемов производства каждого из видов продукции, максимизирующих доход от реализации при ограничениях на спрос и расход сырья.

Построение модели начинается с идентификации переменных с последующим формированием цели и ограничений в виде математических функций.

Задача нахождения оптимальных объемов производства формализуется с помощью следующих переменных и функций.

Неизвестные переменные: x_1 – суточный объем производства изделий H, x_2 – суточный объем производства изделий F.

Целевая функция

Целевая функция читается так: определить значения переменных x_1, x_2, максимизирующие величину общего дохода $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$.

Ограничения

Ограничения расхода сырья: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$

Ограничения на величину спроса продукции: $\begin{cases} x_2 - x_1 \le 1, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

Кроме того, объемы производства продукции x_1 и x_2 не могут принимать отрицательные значения: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

В результате получим следующую математическую модель. Определить объемы производства x_1, x_2, при которых достигается максимальное значение целевой функции $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$, при ограничениях $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 - x_1 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$ $\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Данная модель – это задача линейного программирования с двумя неизвестными переменными и четырьмя ограничениями общего вида.

1.2. Задача управления запасами [1]

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования организации необходимы запасы. В задаче управления запасами требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов.

Спрос можно удовлетворить:

- путем однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени;
- посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода.

Эти два случая соответствуют *избыточному* запасу (по отношению к единице времени) и *недостаточному* запасу (по отношению к полному периоду времени).

При *избыточном* запасе требуются более высокие удельные (отнесенные к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше.

При *недостаточном* запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают.

Для этих случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

Обобщенная модель управления запасами

Модель управления запасами должна дать ответ на два вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать?
2. Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос выражается через **размер заказа**, определяющего оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять всякий раз, когда происходит размещение заказа. В зависимости от рассматриваемой ситуации размер заказа может меняться во времени.

Ответ на второй вопрос зависит от типа системы управления запасами. Если система предусматривает **периодический контроль** состояния запаса через равные промежутки времени (еженедельно или ежемесячно), момент поступления нового заказа обычно совпадает с началом каждого интервала времени. Если же в системе предусмотрен **непрерывный контроль** состояния запаса, **точка заказа** определяется *уровнем запаса*, при котором необходимо размещать новый заказ.

Таким образом, решение обобщенной задачи управления запасами определяется следующим образом:

1. *В случае периодического контроля состояния запаса* следует обеспечивать поставку нового количества ресурсов в объеме размера заказа через равные промежутки времени.

2. *В случае непрерывного контроля состояния запаса* необходимо размещать новый заказ в размере *объема запаса*, когда его уровень достигает *точки заказа*.

Размер и точка заказа обычно определяются из условий минимизации суммарных затрат системы управления запасами, которые можно выразить в виде функции этих двух переменных.

Суммарные затраты системы управления запасами выражаются в виде функции их основных компонент:

Суммарные затраты системы управления запасами	=	Затраты на приобретение	+	Затраты на оформление заказа	+	Затраты на хранение заказа	+	Потери от дефицита

Затраты на приобретение становятся важным фактором, когда цена единицы продукции зависит от размера заказа, что обычно выражается в виде *оптовых скидок*, когда цена единицы продукции убывает с возрастанием размера заказа.

Затраты на оформление заказа представляют постоянные расходы, связанные с его размещением. При удовлетворении спроса в течение заданного периода времени путем размещения более мелких заказов (более часто) затраты возрастают по сравнению со случаем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов (и, следовательно, реже).

Затраты на хранение запаса представляют расходы на содержание запаса на складе (затраты на переработку, амортизационные расходы, эксплуатационные расходы) и обычно возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции.

Оптимальный уровень запаса соответствует минимуму суммарных затрат.

Модель управления запасами не обязательно включает все четыре вида затрат, так как некоторые из них могут быть незначительными, а учет всех видов затрат усложняет функцию суммарных затрат.

Типы моделей управления запасами

Разнообразие моделей этого класса определяется характером спроса, который может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (задаваемым плотностью вероятности).

Детерминированный спрос может быть **статическим**, в том смысле, что интенсивность потребления остается неизменной во времени, или **динамическим**, когда спрос известен достоверно, но изменяется от времени.

Вероятностный спрос может быть **стационарным**, когда функция плотности вероятности спроса неизменна во времени, и **нестационарным**, когда функция плотности вероятности спроса изменяется во времени.

В реальных условиях характер спроса может быть описан посредством вероятностных нестационарных распределений.

Хотя характер спроса является одним из основных факторов при построении модели управления запасами, имеются другие факторы, влияющие на выбор типа модели.

1. *Запаздывания поставок или сроки выполнения заказов*. После размещения заказа он может быть поставлен немедленно или потребуется некоторое время на его выполнение. Интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой называется запаздыванием поставки или сроком выполнения заказа. Эта величина может быть детерминированной или случайной.

2. *Пополнение запаса*. Хотя система управления запасами может функционировать при запаздывании поставок, процесс пополнения запаса осуществляется мгновенно или равномерно во времени. Мгновенное пополнение запаса может происходить при условии, когда заказы поступают от внешнего источника. Равномерное пополнение будет тогда, когда запасаемая продукция производится самой организацией. В общем случае система функционирует при положительном запаздывании поставки и равномерном пополнении запаса.

3. *Период времени* определяет интервал, в течение которого осуществляется регулирование уровня запаса. В зависимости от отрезка времени, на котором можно надежно прогнозировать, рассматриваемый период принимается конечным или бесконечным.

4. *Число пунктов накопления запасов*. В систему управления запасами входит несколько пунктов хранения запаса. В некоторых слу-

чаях эти пункты организованы таким образом, что один выступает в качестве поставщика для другого. Эта схема иногда реализуется на различных уровнях, так что пункт-потребитель одного уровня может стать пунктом-поставщиком на другом уровне. В таком случае говорят о системе управления запасами с разветвленной структурой.

5. *Число видов продукции*. В системе управления запасами может фигурировать более одного вида продукции. Этот фактор учитывается при условии наличия некоторой зависимости между различными видами продукции. Так, для различных изделий используется одно и то же складское помещение или же их производство осуществляется при ограничениях на общие производственные фонды.

Чрезвычайно трудно построить обобщенную модель управления запасами, которая учитывала бы все разновидности условий, наблюдаемых в реальных системах. Рассмотрим модели, соответствующие некоторым системам управления запасами.

Детерминированные модели

Однопродуктовая статическая модель

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Такую модель можно применять в следующих ситуациях:

1. Использование осветительных ламп в здании.
2. Использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмы.
3. Использование некоторых промышленных изделий, таких как гайки и болты.
4. Потребление основных продуктов питания (например, хлеба и молока).

На рис. 1 показано изменение уровня запаса во времени.

Предполагается, что интенсивность спроса (в единицу времени) равна b . Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером y (предполагается, что запаздывание поставки является заданной константой). Уровень запаса достигает нуля спустя y/b единиц времени после получения заказа размером y. С одной стороны, чем меньше размер заказа y, тем чаще нужно размещать заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже. Такая ситуация представлена на рис. 2.

Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то величина y выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат. Это лежит в основе построения соответствующей модели управления запасами.

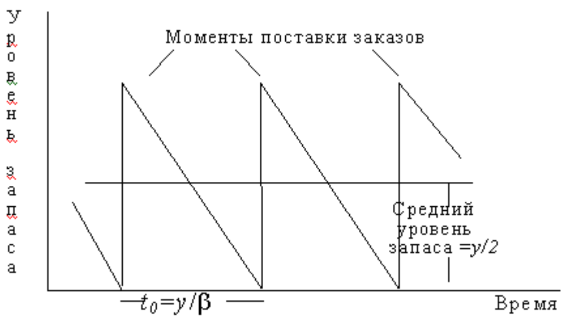

Рис. 1. Зависимость изменения уровня запаса от времени

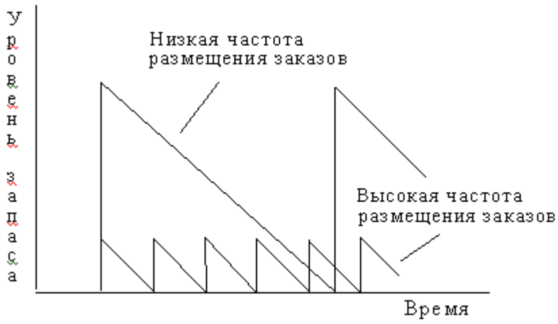

Рис. 2. Различные частоты размещения заказов

Пусть K – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении, h – затраты на хранение единицы заказа в единицу времени. Следовательно, суммарные затраты в единицу времени можно представить в виде

$$C(y) = \underbrace{\frac{K}{y/\beta}}_{\text{Затраты на оформление заказа в ед. времени}} + \underbrace{h\left(\frac{y}{2}\right)}_{\text{Затраты на хранение запасов в ед. времени}}$$

Продолжительность цикла движения заказа составляет $t_0 = y/\beta$; средний уровень запаса равен $y/2$.

Оптимальное значение y получается в результате минимизации $C(y)$ по y. Таким образом, в предположении, что y – непрерывная переменная, имеем

$$\frac{dC(y)}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0, \tag{1.3}$$

откуда оптимальное выражение заказа определяется выражением:

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}. \tag{1.4}$$

Можно доказать, что y^* составляет минимум $C(y)$, показав, что вторая производная в точке y^* строго положительна.

Выражение (1.4) называют **формулой экономичного размера заказа Уилсона.**

Оптимальная стратегия модели предусматривает заказ y^* единиц продукции через каждые $t_0 = y^*/b$ единиц времени.

Оптимальные затраты: $C(y^*) = \sqrt{2K\beta h}$ (получены путем непосредственной подстановки).

Для реальных ситуаций существует (положительный) **срок выполнения** заказа (временное запаздывание) L от момента размещения заказа до его действительной поставки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять **точку возобновления заказа**.

На рис. 3 показан случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на L единиц времени ожидаемую поставку. В практических целях эту информацию можно преобразовать, определив **точку возобновления заказа** через **уровень запаса**, соответствующий моменту возобновлению.

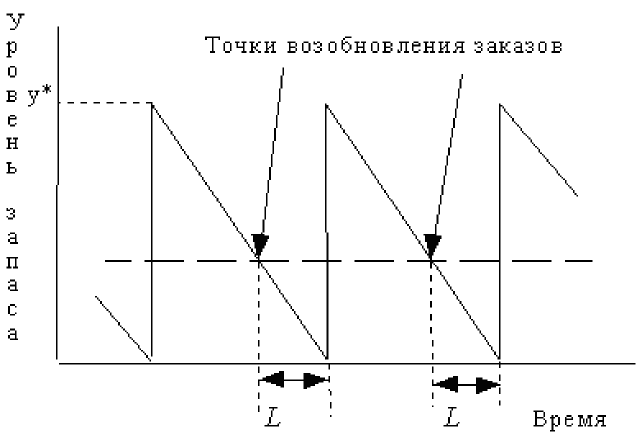

Рис. 1.3. Точка возобновления заказа опережает ожидаемую поставку

На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. По этой причине такую модель называют **моделью непрерывного контроля состояния заказа**. Следует заметить, что срок выполнения заказа L можно принять меньше продолжительности цикла t_0^*.

Пример. Ежедневный спрос на товар b составляет 100 ед. Затраты на размещение каждого запаса K постоянны и равны 100 дол. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса h составляют 0,02 дол. Определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12 дням.

Решение: Из формулы Уилсона получаем

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0{,}02}} = 1000 \text{ ед.}$$

Оптимальная продолжительность цикла составляет

$$t_0^* = y^* / \beta = 1000 / 100 = 10 \text{ дн.}$$

Так как срок выполнения заказа равен 12 дням и продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа происходит, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса на 12 – 10 = 2 дн. Таким образом, заказ размером y^* = 1000 размещается, когда уровень запаса достигает 2·100=200 ед.

Можно считать, что эффективный срок выполнения заказа равен $L - t_0^*$ при $L > t_0^*$, при этом величина ($L - t_0^*$) меньше t_0^* и равен L в противном, здесь L – заданный срок выполнения заказа.

Для рассматриваемого примера определить точку заказа в следующих случаях:

а) срок выполнения заказа L = 15 дн. (Ответ. 500 ед.); б) L = 23 дн. (Ответ. 300 ед.); в) L = 8 дн. (Ответ. 800 ед.); г) L = 10 дн. (Ответ. 0 ед.)

1.3. Задачи [2, 3]

1. Существуют две фирмы по изготовлению пластиковых окон. Фирма А может за месяц изготовить 1000 кв. м стекла X с трехкамерным профилем и 600 кв. м стекла $У$ с пятикамерным профилем. Фирма Б за тот же период времени изготовит 700 кв. м стекла X и 1500 кв. м стекла $У$. Продажная стоимость профиля X составляет 300 руб. за кв. м, стоимость профиля $У$ составляет 500 руб. за кв. м. Стекла X и $У$ изготавливают из одного и того же сырья. Для изготовления 1 кв. м стекла X требуется 5 кв. м сырья, для стекла $У$ – 8 кв. м сырья. Количество сырья у фирмы А равно 5000 кв. м, у фирмы Б – 8000 кв. м. Определить максимальное значение прибыли фирм А и Б при условии постоянного устойчивого спроса на пластиковые окна.

2. Требуется определить план (рациональную программу) выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3 и P_4, для изготовления которых необходимы ресурсы трёх типов:

Тип ресурса	Вид продукции				Располагаемый ресурс b_i
	P_1	P_2	P_3	P_4	
1 2 3	1,5 9,0 6,0	3,0 7,5 9,0	4,5 6,0 12,0	6,0 4,5 18,0	60 165 150
Граница выпуска: нижняя / верхняя	1/8	0/–	2/–	3/3	– –
Прибыль (д. е. за ед. продукции)	100	110	120	130	–
Программа (кол-во ед. продукции)	x_1	x_2	x_3	x_4	–

Задаются конкретные значения a_{ij} и b_i (см. таблицу) с учётом программы выпуска продукции x_i и возможной прибыли от реализации продукции (в денежных единицах – д. е.). Таким образом, для того чтобы выпустить единицу продукции P_2, требуется 3,0 единицы первого типа ресурса, 7,5 – второго и 9,0 – третьего. Искомая рациональная программа в количестве единиц продукции (штук) обозначается $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ соответственно.

Задачи 3 – 13:

Тип ресурса	Вид продукции		Располагаемый ресурс b_i	Граница (min/max)	Прибыль
	P_1	P_2		P_1 P_2	P_1 P_2

3.

1 2 3	1,5 4,5 9,0	6,0 6,0 3,0	21,0 27,0 40,5	1 / – 0 / –	4,5 8,2

Продолжение

Тип ресурса	Вид продукции		Располагаемый ресурс b_i	Граница (min/max) P_1 P_2	Прибыль P_1 P_2
	P_1	P_2			

4.

1 2 3	12,0 1,2 6,0	13,0 3,0 2,5	90,0 18,0 30,0	1 / – 0 / –	6,0 4,6

5.

1 2 3	2,0 8,0 30,0	6,0 4,0 26,0	37,0 40,0 180,0	0 / 0,7 0 / 2,3	23,5 14,0

6.

1 2 3	38,0 9,0 16,5	55,0 20,0 13,5	450,0 140,0 180,0	0 / - 1 / 3,4	7,0 16,0

7.

1 2 3	39,0 27,0 6,0	12,0 26,0 20,0	240,0 210,0 120,0	1 / - 0 / -	5,5 6,5

8.

1 2 3	30,0 21,0 2,0	50,0 15,0 0,5	375,0 120,0 10,0	1,3 / - 0 / -	16,2 8,8

9.

1 2 3	15,0 2,0 32,0	5,0 4,5 35,0	50,0 17,5 160,0	0 / - 0,8 / -	11,2 4,9

10.

1 2 3	3,5 8,0 24,0	3,0 20,0 10,0	18,5 90,0 100,0	0 / - 0 / -	4,2 3,8

Окончание

	Тип ресурса	Вид продукции		Располагаемый ресурс b_i	Граница (min/max) P_1 P_2	Прибыль P_1 P_2
		P_1	P_2			
11.						
	1	4,0	21,4	94,0		
	2	5,5	9,6	48,0	0,7 / 3,4	6,6
	3	3,6	2,2	24,0	0 / -	4,3
12.						
	1	12,5	25,0	137,0		
	2	3,5	4,7	35,0	0 / -	9,3
	3	3,0	9,0	45,0	0 / 4	4,6
13.						
	1	12,0	27,6	180,0		
	2	7,5	10,0	75,0	0,9 / 3,2	0,7
	3	22,0	10,0	160,0	0 / -	0,2

1.4. Контрольные вопросы

1. В чем смысл задачи управления запасами?
2. Какими методами решается задача управления запасами?
3. Объясните, в чем заключается задача распределения ресурсов.
4. Назовите методы решения задачи распределения ресурсов.
5. Какие бывают модели управления запасами?
6. Классифицируйте описание спроса.

2. Типовые постановки задач системного анализа: планирование работ над проектами, анализ риска и безопасности использования новых технологий*

2.1. Задача анализа риска и безопасности использования новых технологий

Анализ информационных рисков позволяет эффективно управлять информационной безопасностью предприятия. Для этого в начале работ по анализу рисков необходимо определить, что именно подлежит защите на предприятии, воздействию каких угроз это подвержено, и выработать рекомендации по практике защиты. Анализ рисков производится исходя из непосредственных целей и задач по защите конкретного вида информации конфиденциального характера.

* Компьюлинк. Технологии анализа рисков. 06.03.2003. URL: http://www.cio-world.ru/business/e-safety/24117 (дата обращения: 10.03.2012).

Одна из важнейших задач в рамках защиты информации – обеспечение ее целостности и доступности. Часто забывается, что нарушение целостности может произойти не только вследствие преднамеренных действий, но и по ряду других причин: сбоев оборудования, ведущих к потере или искажению информации; физических воздействий, в том числе в результате стихийных бедствий; ошибок в программном обеспечении (в том числе недокументированных возможностей). Поэтому под термином “атака” будем понимать не только человеческие воздействия на информационные ресурсы, но и воздействия окружающей среды, в которой функционирует система обработки информации предприятия.

Анализ риска можно проводить по сценарию, изображенному на рис. 3.

На *первом и втором этапах* определяются сведения, составляющие для предприятия коммерческую тайну, которые предстоит защищать.

Рис. 3. Этапы анализа риска. Каждый из шести этапов анализа риска должен быть конкретизирован

Такие сведения хранятся в определенных местах и на конкретных носителях, передаются по каналам связи и обрабатываются в соответствии с определенным регламентом. При этом определяющим фактором в технологии обращения с информацией является архитектура корпоративно-информационных систем (КИС), которая во многом определяет защищенность информационных ресурсов предприятия.

В связи с этим необходимо еще раз подчеркнуть, что степень информационной безопасности определяется не только (а может быть и не столько) средствами и способами защиты, но и особенностями построения КИС. И когда говорят о КИС в защищенном исполнении, речь идет, прежде всего, о выборе такой архитектуры (топологии) системы обработки информации, такого расположения средств обработки конфиденциальной информации, выбора способов ее хранения и передачи, которые существенно уменьшат число возможных точек доступа к информации.

Третий этап анализа риска – построение схем каналов доступа, утечки или воздействия на информационные ресурсы основных узлов КИС. Каждый канал доступа характеризуется множеством точек, с которых можно “снять” информацию. Именно они и представляют уязвимости и требуют применения средств недопущения нежелательных воздействий на информацию.

Анализ способов защиты всех возможных точек атак соответствует целям защиты и его результатом должна быть характеристика возможных «брешей в обороне», в том числе и за счет неблагоприятного стечения обстоятельств (*4-й этап*).

На *пятом этапе*, исходя из известных на данный момент способов и средств преодоления оборонительных рубежей, определяются вероятности реализации угроз по каждой из возможных точек атак.

На *заключительном этапе* производится оценка ущерба организации в случае реализации каждой из атак, который вместе с оценками уязвимости позволяет получить ранжированный список угроз информационным ресурсам.

Результаты работы представляются в виде, удобном для их восприятия и выработки решений по коррекции существующей системы защиты информации. При этом каждый информационный ресурс может быть подвержен воздействию нескольких потенциальных угроз. Принципиальное же значение имеет суммарная вероятность доступа к информационным ресурсам, которая складывается из элементарных вероятностей доступа к отдельным точкам прохождения информации.

Величина информационного риска по каждому ресурсу определяется как произведение вероятности нападения на ресурс, вероятности реализации угрозы и ущерба от информационного вторжения. В этом произведении могут использоваться различные способы взвешивания составляющих.

Объединение рисков по всем ресурсам дает общую величину риска при принятой архитектуре КИС и внедренной в нее системы защиты информации.

Варьируя варианты построения системы защиты информации и архитектуры КИС, возможно представить различные значения риска за счет изменения вероятности реализации угроз. Здесь важным шагом является выбор одного из вариантов в соответствии с выбранным критерием принятия решения. Таким критерием может быть допустимая величина риска или отношение затрат на обеспечение информационной безопасности к остаточному риску.

При построении систем обеспечения информационной безопасности также нужно определить стратегию управления рисками на предприятии.

На сегодня известно несколько подходов к управлению рисками. Один из наиболее распространенных – уменьшение риска путем использования комплексной системы контрмер, включающей программно-технические и организационные меры защиты. Близким является подход, связанный с уклонением от риска. От некоторых классов рисков можно уклониться: например, вынесение Web-сервера организации за пределы локальной сети позволяет избежать риска несанкционированного доступа в локальную сеть со стороны Web-клиентов.

В некоторых случаях допустимо принятие риска. Здесь важно определиться со следующей дилеммой: что для предприятия выгоднее – бороться с рисками или же с их последствиями. В этом случае приходится решать оптимизационную задачу.

После того как определена стратегия управления рисками, производится окончательная оценка мероприятий по обеспечению информационной безопасности с подготовкой экспертного заключения о защищенности информационных ресурсов. В экспертное заключение включают все материалы анализа рисков и рекомендации по их снижению.

Пример оценки рисков по двум факторам

В матрице или таблице можно наглядно отразить связь факторов негативного воздействия (показателей ресурсов) и вероятностей реализации угрозы с учетом показателей уязвимостей.

На **первом** шаге оценивается негативное воздействие (показатель ресурса) по заранее определенной шкале, например от 1 до 5, для каждого ресурса, которому угрожает опасность. (Колонка *B* в табл. 2).

На **втором** шаге по заранее заданной шкале, например от 1 до 5, оценивается вероятность реализации каждой угрозы.

На **третьем** шаге вычисляется показатель риска. В простейшем случае это делается путем умножения (*B* *C*). Однако необходимо помнить, что операция умножения определена для количественных шкал. Для ранговых (качественных) шкал измерения, каковыми являются показатель негативного воздействия и вероятность реализации угрозы, к примеру, совсем не обязательно показатель риска, соответствующий случаю $B = 1$; $C = 3$, будет эквивалентен случаю $B = 3$; $C = 1$. Соответственно должна быть разработана методика оценивания показателей рисков применительно к конкретной организации.

На **четвертом** шаге угрозы ранжируются по значениям их фактора риска.

В рассматриваемом примере для наименьшего негативного воздействия и наименьшей возможности реализации угрозы выбран показатель 1.

Таблица 2

Дескриптор угрозы	*B* Показатель негативного воздействия (ресурса)	*C* Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	5	2	10	2
Угроза *B*	2	4	8	3
Угроза *C*	3	5	15	1
Угроза *D*	1	3	3	5
Угроза *E*	4	1	4	4
Угроза *F*	2	4	8	3

Данная процедура позволяет сравнивать и ранжировать угрозы с различными негативными воздействиями и вероятностями реализации. В определенных случаях дополнительно могут приниматься во внимание стоимостные показатели.

Разделение рисков на приемлемые и неприемлемые

Другой способ оценивания рисков состоит в разделении их только на приемлемые и неприемлемые. Подход основывается на том, что количественные показатели рисков используются только для того, чтобы их упорядочить и определить, какие действия необходимы в первую очередь. Но этого можно достичь и с меньшими затратами.

Матрица, используемая в данном подходе, содержит не числа, а только символы Д (риск допустим) и Н (риск недопустим).

Вопрос о том, как провести границу между приемлемыми и неприемлемыми рисками остается на усмотрение аналитика, подготавливающего данную таблицу и руководящих специалистов в области информационной безопасности.

2.2. Задачи

1. Разработать предложенный план проекта и подсчитать его полную стоимость и размер отвлеченных средств:

1. Создать систему дистанционного обучения в вузе.
2. Создать систему управленческого учета на предприятии.
3. Создать систему менеджмента качества на производственном предприятии.
4. Создать систему массового обслуживания (клиент-серверной архитектуры).
5. Создать систему экологического менеджмента производственного предприятия.

2. Заполнить таблицу по предложенной выше методике.

Вариант 1

Дескриптор угрозы	***B*** Показатель негативного воздействия (ресурса)	***C*** Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	1	8		
Угроза *B*	2	6		
Угроза *C*	9	9		
Угроза *D*	6	4		
Угроза *E*	4	1		
Угроза *F*	7	2		
Угроза *G*	3	3		
Угроза *H*	5	7		
Угроза *I*	7	5		

Вариант 2

Дескриптор угрозы	*B* Показатель негативного воздействия (ресурса)	*C* Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	9	8		
Угроза *B*	7	3		
Угроза *C*	8	5		
Угроза *D*	6	7		
Угроза *E*	2	9		
Угроза *F*	4	2		
Угроза *G*	3	1		
Угроза *H*	5	4		
Угроза *I*	1	6		

Вариант 3

Дескриптор угрозы	*B* Показатель негативного воздействия (ресурса)	*C* Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	7	4		
Угроза *B*	4	9		
Угроза *C*	8	6		
Угроза *D*	5	8		
Угроза *E*	6	7		
Угроза *F*	1	3		
Угроза *G*	3	1		
Угроза *H*	2	5		
Угроза *I*	9	2		

Вариант 4

Дескриптор угрозы	*B* Показатель негативного воздействия (ресурса)	*C* Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	3	7		
Угроза *B*	2	6		
Угроза *C*	6	1		
Угроза *D*	9	8		
Угроза *E*	7	9		
Угроза *F*	5	3		
Угроза *G*	4	5		
Угроза *H*	1	2		
Угроза *I*	8	4		

Вариант 5

Дескриптор угрозы	*B* Показатель негативного воздействия (ресурса)	*C* Возможность реализации угрозы (субъективная оценка)	Показатель риска	Ранг риска
Угроза *A*	9	1		
Угроза *B*	1	6		
Угроза *C*	8	8		
Угроза *D*	7	4		
Угроза *E*	6	9		
Угроза *F*	5	5		
Угроза *G*	2	3		
Угроза *H*	3	7		
Угроза *I*	4	2		

2.4. Контрольные вопросы

1. Перечислите уровни рисков.
2. Перечислите уровни уязвимостей.
3. Что такое табличные методы оценки рисков?
4. Расскажите про этапы анализа рисков.

3. Проверка адекватности моделей, анализ неопределенности и чувствительности*

Любая математическая модель не является точной, всегда существует вероятность возникновения ошибки при проведении расчетов. Могут возникнуть ошибки при округлении, использовании неточных или противоречивых данных и т. п. Для того чтобы оценить, насколько хорошо или плохо модель представляет реальный процесс, используют критерии оценки. В данном разделе рассматриваются проверки на адекватность регрессионных моделей.

3.1. Средняя ошибка аппроксимации (адекватность модели)

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y-\hat{y}}{y}\right| 100\ \%, \qquad (3.1)$$

где y – реальные данные, $\hat{y}$ – данные, рассчитанные по модели.

Экономические методы : практикум / А. Г. Барлиани, С. А. Вдовин, А. Ю. Гридасов. URL: http://www.ssga.ru/metodich/barliani/index.html (дата обращения: 10.03.2012).

Допустимый уровень этого критерия – от 5 до 10 %. Если значение критерия выше, то модель не следует применять при расчетах.

3.2. Коэффициент эластичности

$$\overline{Э} = \hat{y}' \frac{\overline{x}}{\overline{y}}, \tag{3.2}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – средние величины (для линейной модели); $\hat{y}'$ – производная функции модели.

Заметим, что в случае линейной модели производная равна константе при факторной переменной. Данный критерий (3.2) показывает, на сколько процентов в среднем по всей совокупности измерений изменится результат y от своей средней величины при изменении фактора x на 1 % от своего среднего значения, т. е. чувствительность модели.

3.3. Неопределенность модели

Среднее ожидаемое значение рассчитывают по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}, \tag{3.3}$$

где $\overline{x}$ – среднее ожидаемое значение; x_i – ожидаемое значение для каждого случая; n_i – число случаев наблюдения (частота).

Среднее ожидаемое значение представляет собой обобщенную количественную характеристику.

Также необходимо определить меру колеблемости возможного результата. Колеблемость представляет собой степень отклонения ожидаемого значения от среднего. Для ее оценки на практике обычно применяют два близкосвязанных критерия – дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Оценка дисперсии есть средневзвешенное значение квадратов отклонений действительных результатов от средних ожидаемых:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{\sum n_i}. \tag{3.4}$$

Среднее квадратичное отклонение S есть корень из указанной величины.

Среднее квадратичное отклонение – именованная величина; указывается в тех же единицах, в каких измеряется варьирующий признак. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение являются мерами абсолютной колеблемости.

Коэффициент детерминации показывает, какая доля дисперсии результативного признака объясняется влиянием независимых переменных.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - f_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}, \tag{3.5}$$

где y_i – выборочные данные, а f_i – соответствующие им значения модели.

Приведем пример вычисления доверительного интервала с уровнем значимости 0,05

Ввод выборки значений измеряемой величины X имеет нормальный закон распределения вероятностей:
$X0 := 2.55; X1 := 2.32; X2 := 2,39; X3 := 2,15; X4 := 2,54; X5 := 2,44; X6 := 2,25;$
$X7 := 2,28.$

Размерность выборки N: = 8.
Задание уровня значимости α:=0,05.
Степень доверия 1 – α = 0,95.
Вычисление среднего значения выборки измеряемой величины
$X\_av := \frac{1}{N}(X0 + X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7), \quad X\_av = 2,365.$
Оценка значения среднеквадратичного отклонения
$S\_X := \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sqrt{(X0 - X\_av)^2 + (X1 - X\_av)^2 + \ldots + (X7 - X\_av)^2},$
$S\_X = 0,141.$
Определение доверительного интервала
Коэффициент Стьюдента $t(\alpha, N) = 2,365.$
Абсолютная случайная погрешность $\Delta X\_sl := t(\alpha, N)\frac{S\_X}{\sqrt{N}},$
$\Delta X\_sl = 0,118.$
Верхняя граница доверительного интервала $XU\_sl := X\_av + \Delta X\_sl,$
$XU\_sl = 2,483.$

Нижняя граница доверительного интервала $XL\_sl := X\_av - \Delta X\_sl$,
$XL\_sl = 2{,}247$.

Учет приборных погрешностей

Приборная погрешность $\Delta X\_pr := 0{,}1$.

Абсолютная погрешность $\Delta X := \sqrt{(\Delta X\_sl)^2 + (\Delta X\_pr)^2}$, $\Delta X = 0{,}191$.

Относительная погрешность $\delta X := \dfrac{\Delta X}{X\_av}$, $\delta X = 0{,}081$.

Верхняя граница доверительного интервала $XU := X\_av + \Delta X$,
$XU = 2{,}556$.

Нижняя граница доверительного интервала $XL := X\_av - \Delta X$,
$XU = 2{,}176$.

Для анализа результатов моделирования, как правило, используют коэффициент вариации. Он представляет собой отношение среднего квадратичного отклонения к средней арифметической и показывает степень отклонения полученных значений от реальных:

$$\upsilon = \frac{\pm S}{\bar{x}} 100\ \%. \tag{3.6}$$

Коэффициент может изменяться от 0 до 100 %. Чем больше коэффициент, тем сильнее колеблемость. Принята следующая качественная оценка различных значений коэффициента вариации: до 10 % – слабая колеблемость, 10 – 25 % – умеренная, свыше 25 % – высокая. Предпочтение отдается тем моделям, по которым значение коэффициента является более низким.

Несмотря на несложность выполнения математических расчетов, для использования данного метода необходимо большое количество информации и данных за длительный период времени, что является его основным недостатком.

Кроме того, описанные выше характеристики можно применять к нормальному закону распределения вероятностей. Он, действительно, широко используется, так как его важнейшие свойства (симметричность распределения относительно средней, ничтожная вероятность больших отклонений случайной величины от центра ее распределения, правило трех сигм) позволяют существенно упростить анализ. Однако не всегда результаты моделирования подчиняются нормальному закону, поэтому используют дополнительные параметры, такие, например, как коэффициент асимметрии (скоса), эксцесс (вершинность) и т. д.

3.4. Задачи

1. Некоторый процесс представлен регрессионными моделями:

а) $\hat{y} = a + b\frac{1}{x}$; б) $\hat{y} = a + bx$; в) $\hat{y} = a + x^b$; г) $\hat{y} = a + b^x$.

Рассчитать в общем виде коэффициент эластичности для каждой модели, если известно среднее значение фактора x.

2. На территориях нашего региона была собрана статистика по двум факторам. Фактор 1 – расходы на покупку продовольственных товаров, фактор 2 – среднедневная заработная плата одного работающего.

Территория	1	2	3	4	5	6	7
Фактор 1	68,8	61,2	59,9	56,7	55	54,3	49,3
Фактор 2	45,1	59	57,2	61,8	58,8	47,2	55,2

Проверить, что данный процесс описывается уравнением $\hat{y} = 76{,}88 - 0{,}35x$. Оценить значения факторов (1) и (2) для этой модели. Можно ли данную модель использовать для прогнозирования?

3. Для заданного ряда определить его доверительный интервал с уровнем значимости 0,05.

Вариант	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	1003,4	1000,0	1000,67	1005,2	1004,2	1003,7	1001,6	1006,9
2	0,432	0,5632	0,843	0,245	0,4647	0,9634	1,34	0,754
3	67	54	58	60	65	55	62	63
4	68,8	61,2	59,9	56,7	55	54,3	49,3	64,8
5	15,59	13,91	14,06	8,16	11,18	12,69	15,84	5,24
6	9,74	9,34	6,37	10,38	10,78	8,17	14,21	14,34
7	13,06	14,02	7,75	12,79	27,17	6,46	25,56	19,92
8	45,1	59	57,2	61,8	58,8	47,2	55,2	50,3

3.5. Контрольные вопросы

1. Какими методами можно определить адекватность модели?
2. Дать определение анализу чувствительности модели.
3. Что такое работоспособная модель?
4. Каковы критерии реалистичности модели?
5. Что такое неопределенность модели и чем она выражается?
6. Что такое коэффициент эластичности и в чем его физический смысл?

4. Агрегирование, виды агрегатов: структуры, операторы, статистики, конфигураторы, случайный процесс *

Агрегированием называется процесс, обратный декомпозиции, который предусматривает установление отношений на заданном множестве элементов. При агрегировании элементы объединяются в единое целое.

Важнейшее свойство агрегированных систем – эмерджентность, т. е. возникновение в результате объединения новых качественных свойств, которыми не обладал ни один из исходных элементов. Например, автомобиль может приобрести качество самостоятельного передвижения лишь после полной сборки всех его узлов.

В зависимости от целей агрегирования возможны различные варианты решения задач агрегирования. Для системного анализа широко применимы следующие агрегаты:

- агрегаты-конфигураторы;
- агрегаты-операторы;
- агрегаты-структуры.

4.1. Агрегаты-конфигураторы

В ряде случаев для моделирования сложных явлений требуется разностороннее агрегированное описание системы с различных точек зрения. Агрегатом-конфигуратором называется некоторая агрегатная модель, которая включает в себя минимальную совокупность качественно различных языков, достаточную для моделирования системы.

* Методические материалы к самостоятельной работе. URL: http://k1232.narod.ru/ (дата обращения: 23.03.2012).

Например, для формирования модели прибора конфигуратор включает три представления:

- блок-схему;
- принципиальную схему;
- монтажную схему.

Примером агрегата-конфигуратора для задания любой точки n-мерного пространства является совокупность ее координат. Обратим внимание на эквивалентность разных систем координат (разных конфигураторов) и на предпочтительность ортогональных систем, дающих независимое описание на каждом "языке" конфигуратора.

Еще один пример агрегата-конфигуратора для описания поверхности любого трехмерного тела на "плоскостных" языках – совокупность трех ортогональных проекций, принятая в техническом черчении и начертательной геометрии. Обратим внимание на невозможность уменьшения числа проекций и на избыточность большего числа "точек зрения".

4.2. Агрегаты-операторы

На практике достаточно часты ситуации, когда необходимость агрегации возникает по причине чрезмерной многочисленности данных, существенно затрудняющей их обзор и анализ. В таком случае применимы агрегаты-операторы. Агрегатом-оператором называется агрегат, в рамках которого из частей или элементов формируются объединения для уменьшения размерности.

Простейший способ агрегирования состоит в установлении отношения эквивалентности между агрегируемыми элементами, т.е. образования классов. С практической точки зрения одной из важнейших является проблема определения, к какому классу относится данный конкретный элемент. Агрегирование в классы – эффективная, но далеко не тривиальная процедура. Если представить класс как результат действия агрегата-оператора, то такой оператор имеет вид "ЕСЛИ <условия на агрегируемые признаки>, ТО <имя класса>.

Наглядный пример агрегирования данных дает статистический анализ. Среди различных агрегатов, называемых в этом случае статистиками, т. е. функциями выборочных значений, особое место занимают достаточные статистики, т. е. такие агрегаты, которые извлекают всю полезную информацию об интересующем нас параметре из совокупности наблюдений. Однако при агрегировании потери информации обычно неизбежны. Важны оптимальные статистики, которые позволяют свести неизбежные в этих условиях потери к минимуму в некотором заданном смысле. Наглядный пример статистического агрегирования представляет собой факторный анализ, в котором несколько переменных сводятся в один фактор.

4.3. Агрегаты-структуры

Важнейшей формой агрегирования при синтезе систем является образование структур. При синтезе разработчик системы навязывает структуру проектируемой системе, исходя из целей, составных элементов и связей. В качестве типов структур, называемых агрегатами-структурами, применимы сети, матрицы, деревья и др.

При проектировании системы важно задать ее структуры во всех существенных отношениях. Совокупность всех существенных отношений определяется конфигуратором системы, и отсюда вытекает, что проект любой системы должен содержать разработку стольких структур, сколько языков включено в ее конфигуратор.

Например, проект организационной системы должен содержать структуры:

- распределения власти;
- распределения ответственности;
- распределения информации.

Эти структуры могут достаточно сильно отличаться топологически.

В современных системных исследованиях широкое внимание уделяется семантическим сетям, называемым также логико-лингвистическими моделями. Они находят большое применение в ситуационном управлении, системах искусственного интеллекта. Указанные модели отображают структуру человеческих знаний, выражаемых на естественном языке, причем это отображение может быть осуществлено средствами ЭВМ.

Для представления систем с различными циклическими операциями эффективно применение сетей Петри. Это один из инструментов моделирования дискретных процессов. В настоящее время используются их различные модификации, включая временные сети Петри, цветные сети Петри, Е-сети и т. д. Математическая модель описываемого сетью Петри процесса достаточно наглядна, легко алгоритмизируема для моделирования на ЭВМ, не требует большого дополнительного объема знаний от исследователя.

4.4. Агрегат-случайный процесс

Если процесс функционирования реальной сложной системы по своему существу носит характер случайного процесса, для агрегата как математической модели системы используются основные понятия теории случайных процессов. Случайный процесс, протекающий в любой физической системе, представляет собой случайные переходы системы из состояния в состояние. Состояние системы может быть охарактеризовано с помощью численных переменных: в простейшем случае – одной, в более сложных – несколькими.

4.5. Задачи

1. Составить блок-схему:

1) поступления в университет;
2) подготовки к лабораторным занятиям;
3) похода в магазин за покупками;
4) подготовки в экспедицию;
5) разработки программного обеспечения;
6) подготовки технической документации;
7) установки операционной системы на ПК;
8) получения зарплаты в кассе организации;
9) разработки процессной модели производства;
10) защиты выпускной квалификационной работы.

2. Описать составленную схему операторами Если…То, Пока…Цикл и т. д.

4.6. Контрольные вопросы

1. Что понимается под агрегированием и эмерджентностью?
2. Каковы варианты задач агрегирования при исследовании систем управления?
3. Каково назначение агрегатов-конфигураторов при исследовании систем управления?

4. Каково назначение агрегатов-операторов при исследовании систем управления?

5. Каково назначение агрегатов-структур при исследовании систем управления?

5. Методы экспертных оценок: парное сравнение, множественные сравнения, последовательное сравнение *

Группа методов экспертных оценок наиболее часто используется в практике оценивания сложных систем на качественном уровне. Термин «эксперт» происходит от латинского слова *expertus* – опытный. При использовании экспертных оценок обычно предполагается, что мнение группы экспертов надежнее, чем мнение отдельного эксперта.

Экспертные оценки несут в себе как узкосубъективные черты, присущие каждому эксперту, так и коллективно-субъективые, присущие коллегии экспертов. И если первые устраняются в процессе обработки индивидуальных экспертных оценок, то вторые неустранимы, какие бы способы обработки не применялись.

Этапы экспертизы следующие: формирование цели, разработка процедуры экспертизы, формирование группы экспертов, опрос, анализ и обработка информации.

При формулировке цели экспертизы разработчик должен выработать четкое представление о том, кем и для каких целей будут использованы результаты.

При обработке материалов коллективной экспертной оценки используются методы теории ранговой корреляции. Для количественной оценки степени согласованности мнений экспертов применяется коэффициент конкордации W, который позволяет оценить, насколько согласованы между собой ряды предпочтительности, построенные каждым экспертом. Его значение находится в пределах $0 < W < 1$, где $W = 0$ означает полную противоположность, а $W = 1$ – полное совпадение ранжировок. Практически достоверность считается хорошей, если $W = 0{,}7 – 0{,}8$.

---

* Шоробура, Н. Н. Разработка моделей и программных средств для многокритериальной оптимизации сложных объектов в компьютерных информационных системах. URL: http://www.masters.donntu.edu.ua/2004/kita/shorobura/diss/index.htm (дата обращения: 10.03.2012).

Для наглядности представления о степени согласованности мнений двух экспертов A и B служит коэффициент парной ранговой корреляции p, он принимает значения $-1 < p < +1$. Значение $p = +1$ соответствует полному совпадению оценок в рангах двух экспертов (полная согласованность мнений двух экспертов), а значение $p = -1$ – двум взаимно противоположным ранжировкам важности свойств (мнение одного эксперта противоположно мнению другого).

Тип используемых процедур экспертизы зависит от задачи оценивания.

К наиболее употребительным процедурам экспертных измерений относятся:

- ранжирование;
- парное сравнение;
- множественные сравнения;
- непосредственная оценка;
- метод Черчмена – Акоффа (последовательное сравнение).

Целесообразность применения того или иного метода во многом определяется характером анализируемой информации.

5.1. Ранжирование

Метод представляет собой процедуру упорядочения объектов, выполняемую экспертом. Пусть среди объектов нет эквивалентных. В этом случае между ними существует отношение строгого порядка. В результате сравнения всех объектов по отношению строгого порядка составляется упорядоченная последовательность $a_1 > a_2 > ... > a_N$, где объект с первым номером является наиболее предпочтительным из всех, со вторым номером менее предпочтителен, чем первый объект, но предпочтительнее всех остальных и т. д. Полученная система объектов образует полный строгий порядок. Для этого отношения доказано существование числовой системы, элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением неравенства «больше» (>).

В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательности в виде натуральных чисел, т. е. используется числовая последовательность. Применение строгих численных отношений «больше» (>), «меньше» (<) или «равно» (=) не всегда позволяет установить порядок между объектами. Поэтому на-ряду с ними используются отношения для определения большей или меньшей степени какого-то качественного признака (отношения частичного порядка, например полезности), отношения типа «более предпочтительно» (>), «менее предпочтительно» (<), «равноценно» (=) или «безразлично» (~).

Для отношения нестрогого линейного порядка доказано существование числовой системы с отношениями неравенства и равенства между числами, описывающими свойства объектов. Наиболее предпочтительному объекту присваивается ранг, равный единице, второму по предпочтительности – ранг, равный двум, и т. д. Для эквивалентных объектов назначаются одинаковые ранги, равные среднеарифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют связанными рангами.

Связанные ранги могут оказаться дробными числами. Предпочтительнее использовать связанные ранги, так как сумма рангов N объектов равна сумме натуральных чисел от единицы до N. При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму. Данное обстоятельство существенно упрощает обработку результатов ранжирования при групповой экспертной оценке.

При групповом ранжировании каждый S-*й* эксперт присваивает каждому j-му объекту ранг r_{js}. В результате проведения экспертизы получается матрица рангов $\| r_{js} \|$ размерности N_k, где k – число экспертов; N – число объектов; $S = 1, k$; $j = 1, N$. Результаты группового экспертного ранжирования удобно представить в виде таблицы.

Достоинство ранжирования как метода экспертного измерения – простота осуществления процедур, не требующая трудоемкого обучения экспертов. Недостатком ранжирования является практическая невозможность упорядочения большого числа объектов. Как показывает опыт, при числе объектов, большем 10 – 15, эксперты затрудняются в построении ранжирования. Психология утверждает, что память человека позволяет оперировать в среднем не более чем 7 ± 2 объектами одновременно. Поэтому при ранжировании большого числа объектов эксперты могут допускать существенные ошибки.

5.2. Парное сравнение

Этот метод представляет собой процедуру установления предпочтения объектов при сравнении всех возможных пар. При сравнении пары объектов возможно либо отношение строгого порядка, либо отношение эквивалентности. Отсюда следует, что парное сравнение так же, как и ранжирование, есть измерение по порядковой шкале.

В результате сравнения пары объектов a_i, a_j эксперт упорядочивает ее, высказывая мнение что либо $a_i > a_j$, либо $a_i < a_j$, либо $a_i \sim a_j$.

В практике парного сравнения используются следующие числовые представления:

• 1, если $a_i > a_j$; (5.1)

• 0, если $a_i < a_j$;

или • 2, если $a_i > a_j$;

• 1, если $a_i \sim a_j$; (5.2)

• 0, если $a_i < a_j$;

где $i, j = 1... N$.

Результаты сравнения всех пар объектов удобно представлять в виде матрицы. Пусть, например, имеются пять объектов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и проведено парное сравнение этих объектов по предпочтительности. Используя числовое представление (5.1), составим матрицу измерения результатов парных сравнений (табл. 3).

В табл. 3 по диагонали всегда будут расположены единицы, поскольку объект эквивалентен себе. Представление (5.2) характерно для отображения результатов спортивных состязаний. За выигрыш дают два очка, за ничью – одно и за проигрыш – ноль очков (футбол, хоккей и т. п.). Предпочтительность одного объекта перед другим трактуется в данном случае как выигрыш одного участника турнира у другого. Таблица результатов измерения при использовании числового представления не отличается от таблиц результатов спортивных турниров за исключением элементов диагонали (обычно в турнирных таблицах элементы диагонали заштрихованы). В качестве примера в табл. 4 приведены результаты измерения пяти объектов с использованием представления (5.2), соответствующие табл. 3.

Таблица 3

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	1	1	1	1	1

Таблица 4

	1	2	3	4	5
1	1	2	2	2	0
2	0	1	2	2	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	2	2	2	2	1

Вместо представления (5.2) часто используют эквивалентное ему представление

- +1, если $a_i > a_j$;
- 0, если $a_i \sim a_j$; (5.3)
- –1, если $a_i < a_j$;

где $i, j = 1...N$, которое получается из (5.2) заменой 2 на +1, 1 на 0 и 0 на 1.

Если сравнение пар объектов производится отдельно по различным показателям или сравнение осуществляет группа экспертов, то по каждому показателю или эксперту составляют свою таблицу результатов парных сравнений. Сравнение во всех возможных парах не дает полного упорядочения объектов, поэтому возникает задача ранжирования объектов по результатам их парного сравнения.

Однако, как показывает опыт, эксперт далеко не всегда последователен в своих предпочтениях. В результате использования метода парных сравнений эксперт может указать, что объект a_1, предпочтительнее a_2, a_2 предпочтительнее a_3 и в то же время a_3 предпочтительнее a_1.

В случае разбиения объекта на классы эксперт может к одному классу отнести пары a_1 и a_2, a_2 и a_3, но в то же время объекты a_1 и a_3 отнести к различным классам. Такая непоследовательность эксперта объясняется различными причинами: сложностью задачи, неочевидностью предпочтительности объектов или разбиения их на классы (в противном случае, когда все очевидно, проведение экспертизы необязательно), недостаточной компетентностью эксперта, недостаточно четкой постановкой задачи, многокритериальностью рассматриваемых объектов и т. д.

Непоследовательность эксперта приводит к тому, что в результате парных сравнений при определении сравнительной предпочтительности объектов мы не получаем ранжирования и даже отношений частичного порядка, не выполнено свойство транзитивности.

Если целью экспертизы при определении сравнительной предпочтительности объектов является получение ранжирования или частичного упорядочения, необходима их дополнительная идентификация. В этих случаях имеет смысл в качестве результирующего отношения выбирать отношение заданного типа, ближайшее к полученному в эксперименте.

5.3. Множественные сравнения

Данный вид сравнений отличается от парных тем, что экспертам последовательно предъявляются не пары, а тройки, четверки,..., n-ки объектов. Эксперт их упорядочивает по важности или разбивает на классы в зависимости от целей экспертизы. Множественные сравнения занимают промежуточное положение между парными сравнениями и ранжированием. С одной стороны, они позволяют использовать больший, чем при парных сравнениях, объем информации для определения экспертного суждения в результате одновременного соотнесения объекта не с одним, а с большим числом объектов. С другой стороны, при ранжировании объектов их может оказаться слишком много, что затрудняет работу эксперта и сказывается на качестве результатов экспертизы. В этом случае множественные сравнения позволяют уменьшить до разумных пределов объем поступающей к эксперту информации.

5.4. Непосредственная оценка

Метод заключается в присваивании объектам числовых значений на шкале интервалов. Эксперту необходимо поставить в соответствие каждому объекту точку на определенном отрезке числовой оси. При этом необходимо, чтобы эквивалентным объектам приписывались одинаковые числа. На рис. 4 в качестве примера приведено такое представление для пяти объектов на отрезок числовой оси [0,1].

Поскольку за начало отсчета выбрана нулевая точка, то в данном примере измерение производится в шкале отношений. Эксперт соединяет каждый объект линией с точкой числовой оси и получает следующие числовые представления объектов (см. рис. 4):

$$\Phi(a_1) = 0{,}28;\ \Phi(a_2) = \Phi(a_5) = 0{,}75;\ \Phi(a_3) = 0{,}2;\ \Phi(a_4) = 0{,}5.$$

Измерения в шкале интервалов могут быть достаточно точными при полной информированности экспертов о свойствах объектов. Эти условия на практике встречаются редко, поэтому для измерения применяют балльную оценку. При этом вместо непрерывного отрезка числовой оси рассматривают участки, которым приписываются баллы.

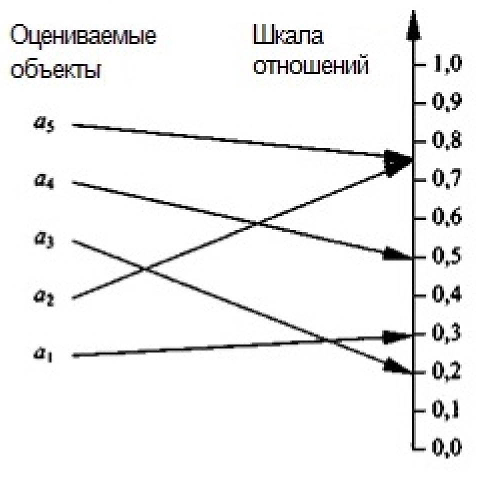

Рис. 4. Пример сравнения пяти объектов по шкале

Эксперт, приписывая объекту балл, тем самым измеряет его с точностью до определенного отрезка числовой оси. Применяются 5-, 10- и 100-балльные шкалы.

5.5. Метод Черчмена – Акоффа (последовательное сравнение)

Метод относится к числу наиболее популярных при оценке альтернатив. В нем предполагается последовательная корректировка оценок, указанных экспертами. Основные предположения, на которых основан метод, состоят в следующем:

- каждой альтернативе a_i ($i = 1, N$) ставится в соответствие действительное неотрицательное число Ф (a_r);
- если альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j, то Ф (a_i) > Ф (a_j), если же альтернативы a_i и a_j равноценны, то Ф (a_i) = Ф (a_j);
- если Ф (a_i) и Ф (a_j) оценки альтернатив a_i и a_j, то Ф (a_i) + Ф (a_j) соответствует совместной реализации альтернатив a_i и a_j.

Наиболее сильным является последнее предположение об аддитивности оценок альтернатив.

Согласно методу Черчмена – Акоффа альтернативы a_1, a_2, …, a_N ранжируются по предпочтительности. Пусть для удобства изложения альтернатива a_1 наиболее предпочтительна, за ней следует a_2 и т. д. Эксперт указывает предварительные численные оценки Ф (a_i) для каждой из альтернатив. Иногда наиболее предпочтительной альтернативе приписывается оценка 1, остальные оценки располагаются между 0 и 1 в соответствии с их предпочтительностью. Затем эксперт производит сравнение альтернативы a_1 и суммы альтернатив a_2, …, a_N.

Если альтернатива a_1 оказывается менее предпочтительной, то для уточнения оценок она сравнивается по предпочтению с суммой альтернатив a_2, a_3, ..., a_N и т. д. После того как альтернатива a_1 оказывается предпочтительнее суммы альтернатив a_2, ..., a_k ($k > 2$), она исключается из рассмотрения, а вместо оценки альтернативы a_1 рассматривается и корректируется оценка альтернативы a_2. Процесс продолжается до тех пор, пока откорректированными не окажутся оценки всех альтернатив.

При достаточно большом N применение метода становится слишком трудоемким. В этом случае целесообразно разбить альтернативы на группы, а одну из альтернатив, например максимальную, включить во все группы. Это позволяет получить численные оценки всех альтернатив с помощью оценивания внутри каждой группы.

Метод Черчмена – Акоффа является одним из самых эффективных. Его можно успешно использовать при измерениях в шкале отношений. В этом случае определяется наиболее предпочтительная альтернатива a_1. Ей присваивается максимальная оценка. Для всех остальных альтернатив эксперт указывает, во сколько раз они менее предпочтительны, чем a_1. Для корректировки численных оценок альтернатив можно использовать как стандартную процедуру метода Черчмена – Акоффа, так и попарное сравнение предпочтительности альтернатив. Если численные оценки альтернатив не совпадают с представлением эксперта об их предпочтительности, производится корректировка.

5.6. Задачи

Проранжировать описанными выше методами следующие альтернативы по степени предпочтения (не менее пяти вариантов альтернатив).

1. Экзамены по сдаваемым предметам.
2. Просмотр различных фильмов.
3. Бытовая техника известных производителей.
4. Компьютерные игры.
5. Погода в различные времена года.
6. Отдых на различных курортах.
7. Компьютеры/ноутбуки различных производителей.
8. Различные музыкальные исполнители.
9. Компьютерные антивирусы.
10. Продукты питания.

5.7. Контрольные вопросы

1. Назвать основные методы экспертных оценок.
2. В чем заключается сущность метода ранжирования?
3. Что такое метод попарного сравнения и в чем его отличие от метода ранжирования?
4. Метод множественного сравнения.
5. Что такое непосредственная оценка?
6. В чем заключается метод последовательного сравнения и какие его основные отличительные особенности?

6. Оценка сложных систем в условиях определенности. Методы решения задач векторной оптимизации *

Задача многокритериального математического программирования (векторной оптимизации) имеет вид:

$\max\{f1(x)= F1\}$,
$\max\{f2(x)= F2\}$, при $x \in X$,
...
$\max\{fk(x)=Fk\}$,

где X – множество допустимых значений переменных x; k – число целевых функций (критериев); Fi – значение i-го критерия (целевой функции); max – означает, что данный критерий нужно максимизировать.

Многокритериальная задача отличается от однокритериальной задачи оптимизации наличием нескольких целевых функций вместо одной.

При наличии в многокритериальной задаче критериев с разной размерностью используют нормализацию критериев. Способы нормализации представлены в табл. 5.

Таблица 5

Нормализация	Математическое выражение
Сведение к безразмерным величинам	$f(x\|y)/\rho(f(x\|y))$
Приведение к одной размерности $\rho[\varphi]$	$\dfrac{f(x\|y)}{\alpha(y)}$ $\rho[f(x\|y)] = \rho[\alpha(y)]\,\rho[\varphi]$
Смена ингридиента	$-f(x\|y)\quad 1/f(x\|y)$
Естественная нормализация $\lambda_i(x\|y)$	$\dfrac{f(x\|y) - \min\limits_{x\in X}\big(f(x\|y)\big)}{\max\limits_{x\in X}\big(f(x\|y)\big) - \min\limits_{x\in X}\big(f(x\|y)\big)}$
Нормализация сравнения	$f(x\|y)/\max\limits_{x\in X}(f(x\|y))$
Нормализация Савиджа	$\max\limits_{x\in X}(f(x\|y)) - f(x\|y)$
Нормализация осреднения	$f(x\|y)/\sum\limits_{y\in Y} f(x\|y)$

---

* Системный анализ в управлении : учеб. пособие / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин ; под ред. А. А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2002. 368 с. ISBN 5-279-02435-Х.

В данной таблице *y* – элемент пространства *G*, *G* – пространство элементов произвольной природы, называемых целевыми термами (в конкретных интерпретациях это совокупность, перечень или нумерация качественных свойств) элементов $x \in X$.

Сверткой компонент многоцелевого показателя $f \in F$ называется отображение $g \in \{F \to R1\}$, которое преобразует совокупность компонент многоцелевого показателя *f*, соответствующих целевым термам $y \in Y$, в скалярный целевой показатель $g(f(x|y) = g[\{f(x|y)\}y \in Y] \in R1$. Основные виды сверток – линейные, минимизационные, максимизационные, произведения и функции Кобба – Дугласа следующего вида:

$$\begin{cases} g(f(x)) = \sum\limits_{y \in Y} \alpha(y) f(x \mid y), \\ g(f(x)) = \min\limits_{y \in Y} [\alpha(y) f(x \mid y) + \beta(y)], \\ g(f(x)) = \max\limits_{y \in Y} [\alpha(y) f(x \mid y) + \beta(y)], \\ g(f(x)) = \prod\limits_{y \in Y} \alpha(y) f(x \mid y), \\ g(f(x)) = \prod\limits_{y \in Y} [\alpha(y) f(x \mid y)]^{\beta(y)}. \end{cases}$$

Проблемы получения и обоснования выбора сверток составляют основное направление теории полезности. К настоящему времени сформулированы основные принципы выбора, приведенные в табл. 6.

Таблица 6

Принцип выбора	Условие оптимальности
Доминантности R^{dom}	$f(x^o)\|y) \geq f(x\|y) \forall x \in X$
Частичной доминантности	$\exists Y_I \subseteq Y: f(x^o\|y) \geq f(x\|y) \forall x \in X \quad y \in Y_I$
Парето $\bar{R}^{dom}$	$\exists x \in X: \{f(x\|y) \geq f(x^o\|y) \forall y \in Y\} \cap$ $\cap \{\exists y^o \in Y: f(x^o\|y) > f(x^o\|y^o)\}$
Слейтера	$\exists x \in X: \{f(x\|y) \geq f(x^o\|y) \forall y \in Y\}$
Собственно эффективности Джерри	$\exists x \in X: \{f(x\|y) \geq f(x^o\|y) \forall y \in Y\}$ $\exists M > 0: \frac{f(x\|y) - f(x^o\|y)}{f(x^o\|y) - f(x\|y')} \leq M$ $\forall y \in Y, \forall x \in \{x \in X: f(x\|y) > f(x^o\|y)\}$ $\forall y' \in \{y \in Y: f(x\|y) < f(x^o\|y)\}$
Несобственно эффективности Джерри	$\exists x \in X: \{f(x\|y) \geq f(x^o\|y) \forall y \in Y\}$ $\forall M > 0 \; \exists x \in \{x \in X: f(x\|y) > f(x^o\|y'')\}$ $\frac{f(x\|y'') - f(x^o\|y'')}{f(x^o\|y') - f(x\|y')} < M$ $\forall y' \in \{y \in Y: f(x\|y') < f(x^o\|y')\}$

Окончание табл. 6

Принцип выбора	Условие оптимальности
Равенства	$f(x^o\|y') = f(x^o\|y'')\forall y, y'' \in Y$
Суммарной эффективности	$\sum_{y\in Y} f(x^o\|y) \geq \sum_{y\in Y} f(x\|y)\ \forall x \in X$
Нэша	$\prod_{y\in Y} f(x^o\|y) \geq \prod_{y\in Y} f(x\|y)\ \forall x \in X$
Компромисса	$\exists\alpha(y) \in A: \sum_{y\in Y} \alpha(y) f(x^o\|y) = \max_{y\in Y} \alpha(y) f(x\|y)$
Доминирующего результата	$\max_{y\in Y} f(x^o\|y) \geq \max_{y\in Y} f(x\|y)\ \forall x \in X$
Гарантированного результата	$\min_{y\in Y} f(x^o\|y) \geq \min_{y\in Y} f(x\|y)\ \forall x \in X$
Наименьшего уклонения	$\|f(x^o - f^*)\| \leq \|f(x - f^*)\|\forall x \in X$ $f^* = \{f^*(y)\}_{y\in Y}$ $f^*(y) = \max_{x\in X} f(x\|y)\ \forall y \in Y$
Ламбда-критерия	$x^o \in X_{\lambda^o}: \lambda^o = \max \lambda\|X_\lambda \neq \lambda$ $X_\lambda = \{x \in X: \lambda_j(x\|\lambda) \geq \lambda \forall y \in Y$
альфа-критерия Гурвица $R_\lambda^\alpha(f)$	$x_o \in X: \left[\alpha \min_{y\in Y} \lambda_j(x^o\|y) + \max_{y\in Y} \lambda_j(x^o\|y)\right] \geq$ $\geq [\alpha \min_{y\in Y} \lambda_j(x\|y) + (1-\alpha) \max_{y\in Y} \lambda_j(x\|y)]\forall$ $\forall x \in X$
Максимума функции неопределенности	$x_o \in X: H[f(x^o)] \geq H[f(x)]\forall x \in X$

В задачах выбора решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации, первым шагом следует считать выделение области компромиссов (или решений, оптимальных по Парето). Вектор называется оптимальным по Парето решением, если не существует *xϵX* такого, что выполняются неравенства $f(x\,|\,y) \geq f(x^0\,|\,y) \forall y \in Y$ и $f(x\,|\,y) \neq f(x^0\,|\,y)$.

Областью компромиссов *Гx* называется подмножество допустимого множества решений *X*, обладающего тем свойством, что все принадлежащие ему решения не могут быть улучшены одновременно по всем локальным критериям – компонентам вектора эффективности. Следовательно, для любых двух решений, принадлежащих области *Гx(x′, x″ є Гx),* обязательно имеет место противоречие хотя бы с одним из локальных критериев. Это приводит к необходимости проводить выбор решения в *Гx* на основе некоторой схемы компромисса, что и послужило причиной для названия этого подмножества областью компромиссов. Оптимальное решение, выбираемое на основе многокритериального подхода независимо от избираемого принципа оптимальности, всегда должно принадлежать области компромиссов. Иначе оно может быть улучшено и, следовательно, не является оптимальным. Таким образом, область компромиссов есть область потенциально оптимальных компромиссов. Отсюда следует, что при выборе решения по векторному критерию эффективности можно ограничить поиск оптимального решения областью компромиссов *Гx*, которая, как правило, значительно уже всей области возможных решений *X*.

Методы многокритериальной оптимизации

6.1. Принцип справедливого компромисса

Пусть все локальные критерии, образующие вектор эффективности, имеют одинаковую важность. *Справедливым* будем считать такой компромисс, при котором относительный уровень снижения качества по одному или нескольким критериям не превосходит относительного уровня повышения качества по остальным критериям (меньше или равен). Этому принципу можно дать следующую математическую интерпретацию. Пусть в области компромиссов *Гx* даны два решения x' и x'', качество которых оценивается критериями $F1(x)$ и $F2(x)$. Решение x' превосходит решение x'' по критерию $F1$, но уступает по критерию $F2$. Необходимо сравнить эти решения и выбрать наилучшие на основе принципа справедливого компромисса. Для сравнения решений введем меру относительного снижения качества решения по каждому из критериев – цену уступки x:

$$x_1 = \frac{\Delta F_1(x',x'')}{\max x',x''F_1(x)}; \quad x_2 = \frac{\Delta F_2(x',x'')}{\max x',x''F_2(x)}, \qquad (6.1)$$

где ΔF_1 и ΔF_2 – абсолютные снижения уровня критериев при переходе от решения x' к решению x'' (для критерия $F1$) и при обратном переходе (для критерия $F2$). Если относительное снижение критерия $F1$

больше, чем критерия $F2$, то следует отдать предпочтение решению x'. Это следует из сравнения цены уступки по каждому критерию.

Алгоритм решения задачи векторной оптимизации, основанный на принципе справедливого компромисса, включает следующие шаги.

Шаг 0. Выбираем x' и x'' є Dx.

Шаг 1. Вычисляем по формулам (6.1) $x1$ и $x2$.

Шаг 2. Если $x1 > x2$, то выбираем x', если $x1 < x2$, то выбираем x''.

Шаг 3. Если не существует вектора $x \in X$ предпочтительнее $x1$ или $x2$, то решение останавливается, иначе выбираем новый вектор $x3$и переходим к шагу 1.

Модель определения области компромиссов, а также модель справедливого компромисса инвариантны к масштабу измерения критериев. Идея справедливого компромисса может быть оправдана в случае нормализованного пространства критериев, когда все локальные критерии имеют единый масштаб измерения. Большинство принципов нормализации основывается на введении идеального решения, т. е. решения, обладающего идеальным вектором эффективности Fu. Это идеальное решение можно априорно предположить исходя из информации об объекте, а можно решить задачу оптимизации для каждого локального критерия и соответствующее этим решениям значение вектора эффективности принять за идеальный вектор эффективности Fu. Тогда выбор оптимального решения становится равнозначным наилучшему приближению к этому идеальному вектору $Fu = (Fu , \dots , Fun)$

В этом случае вместо действительного значения критериев рассматриваются или их отклонение от идеального значения

$$dF_j = F_{uj} - F_j \tag{6.2}$$

или их безразмерное относительное значение

$$\bar{F}_j = {}^{F_j}\!\big/_{F_u}\,. \tag{6.3}$$

При решении данной задачи используются оба способа нормализации. Таким образом, успешное решение проблемы нормализации во многом зависит от того, насколько точно и объективно удается определить идеальное качество решения. После нормализации критериев эффективности задача выбора решения приобретает ясный математический смысл. В теоретико-множественном отношении она становится задачей упорядочивания ограниченных векторных множеств, а с точки зрения теории приближений – задачей приближения в метрическом конечномерном пространстве. Это дает возможность проводить обоснованный выбор принципов оптимальности и выявлять их логический смысл.

6.2. Принцип слабой оптимальности по Парето

Вектор $x^1 \in X$ называется слабо оптимальным по Парето решением (оптимальным по Слейтеру), если не существует вектора $x^1 \in X$ такого, что $f(x \mid y) \geq f(x^1 \mid y) \forall y \in Y$.

Пусть x_{0i} (i =1, m) есть оптимальные решения для обычных скалярных оптимизационных задач, каждая из которых максимизирует компоненту $F_i(x)$ вектора $F(x)$:

$$\max_{x \in X} F_j(x), j = \overline{1, m}. \tag{6.4}$$

Если они являются максимальными решениями для каждой i, то считаем, что $F_j(x_{0j}) > F_i(x_j)$ $(i = 1, m)$, где x_{0j} – оптимальное решение задачи (6.4).

Положим, что S_{0j} изображает множество решений, каждое из которых соответствует компоненту F_j, и

$$S_{0j} = \{x | F_j(x) \leftarrow F_j(x_{0j}) + a_j\}, \tag{6.5}$$

где a_j представляет допустимое количество ограничений соответствующей области по отношению к F_j. Тогда оптимальное достаточное решение это такое решение, при котором минимальный компонент (наихудший компонент) максимизируется на множестве, удовлетворяющем достаточному условию $x \in X$ и $x \in S_0 1 n\, S_0 2 n \ldots, S_0 m$. Оно может быть сформулировано как

$$max\ z \tag{6.6}$$

x, z при

$$F_j(x) \geq z; \tag{6.7}$$

$$F_i(x) \geq F_j(x_{oj}) - a_j,\ i = 1, m; \tag{6.8}$$

$$x \in X. \tag{6.9}$$

Здесь задача (6.6) – (6.9) неразрешима, если a_j не настолько велико, что пересечение $\{S_{0j}\}$ непусто. Величины a_j должны быть определены на основе значений $F_j(x_{0j})$ или анализа точности. Можно доказать, что оптимальное решение задачи (6.6) – (6.9) есть оптимальное решение по Парето.

Алгоритм решения задачи имеет следующие шаги.

Шаг 1. Полагаем $l = 1$ и решаем задачу

$$\begin{gathered} max\ z \\ x,\ z \text{ при} \\ F_j(x) >= z; \\ F_i(x) >= F_j(x_{0j}) - a_j,\ i = 1, m;\ x \in X. \end{gathered} \tag{6.10}$$

Вызываем исходное решение x_1 и оцениваем целевую функцию $F(x_1)$.

Шаг 2. Когда x_1 задано, раскладываем $F(x_l)$ на удовлетворительные и неудовлетворительные компоненты. Обозначим их соответственно через S_l и $\overline{S}_1$. Если S_l, тогда эта задача считается неразрешимой, а если $S_l \neq ø$, то x_1 – оптимальное, отвечающее требованиям решение. Если $\bar{S} \neq ø$ и $S_1 \neq ø$, то для $j \in S_l$ определяется $a_{lj} > 0$, допустимое по отношению к $F_j(x_l)$ [$a_{lj} = 0$ означает, что j-я целевая функция $f_j(x)$ не может принимать значение, отличное от $f_j\ (x_l)$].

Шаг 3. Решаем задачу

$$\begin{gathered} max\ z \\ x,\ z \qquad \text{при условии} \\ F_j(x) \in z,\ j \in \overline{S}\ ;\ F_i(x) >= F_j(x_{0j}) - a_j,\ j \in S_l;\ x \in X. \end{gathered}$$

Вызываем исходное решение $x_1 + 1$. Если $x_1 + 1 = x_l$, то задача будет неразрешимой; если $x_1 + l <> x_1$, то полагаем $l = l + 1$ и возвращаемся к шагу 2. При этом алгоритм заканчивается.

6.3. Принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению

В основу данного подхода положена идея приближения по всем критериям.

Пусть дана задача многокритериального программирования

$$\begin{gathered} \max\{f1(x) = F1\}, \\ \max\{f2(x) = F2\}, \\ \vdots \\ \max\{fk(x)=Fk\},\ x \in X \end{gathered} \tag{6.11}$$

и заданы граничные условия

$$\alpha_{\alpha 1}x_1 + \alpha_{\alpha 2}x_2 + \dots + \alpha_{\alpha n}x_n = b_\alpha(\alpha = 1, r); \quad (6.12)$$

$$\alpha_{r+\beta,1}x_1 + \alpha_{r+\beta,2}x_2 + \dots + \alpha_{r+\beta,n}x_n = b_{r+\beta}; (\beta = \overline{1, m-r}); \quad (6.13)$$

$$x_1 >= 0, x_2 >= 0, \dots, x_n >= 0. \quad (6.14)$$

Среди решений системы (6.11) – (6.14) требуется отыскать такое значение вектора $x^*(x^*_1, \dots, x^*_n)$, при котором локальные критерии примут по возможности максимальное (минимальное) значение одновременно.

Рассмотрим каждую отдельную функцию $f_i(x)$ и допустим, что для каждого фиксированного i ($i = 1, m$) решена задача максимизации. Пусть соответствующие оптимальные планы характеризуются векторами

$$x_{oi}(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}), i = 1, m. \quad (6.15)$$

На этих оптимальных планах определим значения критериев соответственно

$$F_{oi} = (F_i(x_{o1}), F_i(x_{o2}), \dots, F_i(x_{on})). \quad (6.16)$$

Естественно, что векторы (6.15), определяющие векторы точки в пространстве переменных ($x_1, x_2, \dots, x_n$) є Ω, будут разными: некоторые из них могут совпадать друг с другом.

Рассмотрим вектор $F(x)$ с компонентами $F(x)|F_{oi}$ из (6.15) и составим квадрат евклидовой нормы

$$R(x) = \left\| F(x) - F^\circ \right\|^2 \quad (6.17)$$

вектора $F(x) - F_o$, определенного для всех x є Ω .

Заметим, что F_o будет представлять собой единичный вектор в пространстве вектора $F(x)$. Назовем его идеальным значением вектора $F(x)$. Поставленная задача теперь сформулируется так: дана система целевых функций (6.11) и даны условия задачи (6.12) – (6.14). Требуется определить точку x є Ω , в которой функция $R(x)$ достигает минимума.

Таким образом, отыскание векторно-оптимального плана x є Ω в данной задаче сведено к оптимизации выражения (6.17) на решениях системы линейных неравенств (6.12) – (6.14). Поскольку выражение

(6.17) представляет собой квадратичную функцию переменных $x_1, \ldots, x_n$, то задача отыскания векторно-оптимального плана свелась к задаче выпуклого программирования.

Задана выпуклая функция $R(x)$, определенная на множестве $x \in \Omega$. Требуется отыскать точку $x \in \Omega$, обеспечивающую выполнение условия $R(x^*) = \min R(x), x \in \Omega$.

Таким образом, алгоритм решения задачи (6.11) – (6.14) состоит из двух основных этапов:

этап 1: $\max F_i(x), i=1, m$;

этап 2: $\min R(x)$.

6.4. Метод квазиоптимизации локальных критериев (метод последовательных уступок)

В данном случае осуществляется поиск не единственного оптимума, а некоторой области решений, близких к оптимальному, – квазиоптимального множества. При этом уровень допустимого отклонения от точного оптимума определяется с учетом точности постановки задачи (например, в зависимости от точности вычисления величины критериев), а также некоторых практических соображений (например, требований точности решения задачи).

Вначале производится качественный анализ относительной важности критериев; на основании такого анализа критерии располагаются и нумеруются в порядке убывания важности, так что главным считается критерий $F1$, менее важен $F2$, затем следуют остальные локальные критерии $F3$, $F4$, ..., Fm. Максимизируется первый по важности критерий $F1$ и определяется его наибольшее значение $M1$. Затем назначается допустимое снижение (уступка) $d1 >= 0$ критерия $F1$. Определим новую допустимую область $X(1)$ как подобласть X вида

$$X(1) = Xn\{x|F1(x) >=M1 - d1\}. \qquad (6.18)$$

Такой подход позволяет сузить первоначальную допустимую область X, когда переходим к следующему по важности критерию.

После этого находим наибольшее значение $M2$ второго критерия $F2$ на множестве $X(1)$, т. е. при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем М1 – $d1$. Снова назначается значение уступки $d2 > = 0$, но уже по второму критерию, которое вместе с первым используется при нахождении условного максимума третьего критерия, и т. д. Наконец, максимизируется последний по важности критерий Fm при условии, что значение каждого критерия Fr из m – 1 предыдущих должно быть не меньше соответствующей величины $Mr - dr$; получаемые стратегии считаются оптимальными:

$$X(i) = X(i-1)n\{x|Fi(x) >= Mi - di\}.$$

Таким образом, оптимальной считается стратегия, являющаяся решением последней задачи из последовательности задач:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{найти } M1 = \sup F1(x),\ x \in X; \\ &2)\ \text{найти } M2 = \sup F2(x),\ x \in X; \\ &\dots \\ &m)\ \text{найти } Mm = \sup Fm(x),\ x \in X. \end{aligned} \qquad (6.19)$$

Если критерий Fm на множестве стратегий, удовлетворяющих ограничениям задачи (m) из (6.19), не достигает своего наибольшего значения Mm, то решением многокритериальной задачи считают максимизирующую последовательность $\{xk\}$ из последовательности множеств $Xm - 1 \subset Xm - 2 \subset \ ... \subset X1 \subset X$.

Значения уступок di ($i=1,m$) последовательно назначаются при изучении взаимосвязи частных критериев.

Вначале решается вопрос о назначении допустимого снижения $d1$ первого критерия от наибольшего значения $M1$. Задают несколько величин уступок $d11$, $d21$, $d31$ ... и путем решения задачи (6.19) определяют соответствующие максимальные значения $M2(d11)$, $M2(d21)$, $M2(d31)$,... второго критерия. Далее рассматривают пару критериев $F2$ и $F3$. Вновь назначают пробные значения уступок $d12$, $d22$ ... и отыскивают наибольшие значения $M3(d12)$, $M3(d22)$. Полученные данные анализируют, назначают $d2$, переходят к следующей паре критериев $F2$ и $F3$ и т. д. Наконец, в результате анализа взаимного влияния критериев $Fm - 1$ и Fm выбирают значение последней уступки $dm - 1$ и отыскивают оптимальные стратегии, решая задачу (m) из (6.19) (обычно ограничиваются нахождением одной такой стратегии).

Для решения многокритериальной задачи нужно так ранжировать критерии, чтобы потом удобнее было выбирать значения уступок.

Удобным является случай, когда в результате предварительного анализа многокритериальной задачи выясняется, что можно допустить уступки лишь в пределах «инженерной» точности (5 – 10 % от наибольшей величины критерия).

6.5. Метод свертывания векторного критерия в скалярный критерий

Одним из распространенных методов решения многокритериальных задач является метод сведения многокритериальной задачи к однокритериальной путем свертывания векторного критерия в скалярный. При этом каждый критерий умножается на соответствующий ему весовой коэффициент (коэффициент важности).

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(x), \quad \alpha_i \geq 0. \tag{6.20}$$

При этом возникают трудности с *правильным* подбором весовых коэффициентов a_i. Существуют различные способы выбора коэффициентов a_i. Один из них – назначение a_i в зависимости от относительной важности критериев. Должно выполняться условие нормировки $\sum a_i = 1$.

6.6. Пример

Программа набирается и решается в среде MATHCAD

Дано:
optF(X)={max f1(X)=37.5x1+30x2
min f2(X)=50x1+25x2}
x1+x2<1000
5x1+3x2>=3500
x1,x2>=0

Решение по 1 критерию
max f1=37500 при X={x1=1000; x2=0}
min f1=26250

Решение по 2 критерию
min f2=31250 при X={x1=250; x2=750}
max f1=50000
P(opt)=maxP
P-(37.5x1+30x2-26250)/(37500-26250)<=0
P-(50x1+25x2-50000)/(31250-50000)<=0
x1+x2<1000
5x1+3x2>=3500
x1,x2>=0

В результате решения получаем:
P(opt)=0.67; X={x1=500; x2=500}.
В формализованном виде задача выглядит так:
P(opt)=max min Pk(X)={(Fk(X)-Fo)/(Fk-Fo), k=1,K}
AX<>B, X>=0.

Эта задача преобразуется:
P(opt)=maxP
P-(Fk(X)-Fo)/(Fk-Fo)<=0; k=1,K
AX<>B, X>=0.

6.7. Задачи

Решить в среде MATHCAD следующую оптимизационную задачу

1. $f_1(X)=43x_1+12x_2 \to \max$
$f_2(X)=10x_1-5x_2 \to \min$
$x_1+x_2>50$
$x_1-x_2>0$
$x_1,x_2>0$

2. $f_1(X)=90x_1+54x_2 \to \max$
$f_2(X)=25x_1+34x_2 \to \min$
$x_1+x_2>25$
$x_1-x_2<12$
$x_1,x_2>0$

3. $f_1(X)=554x_1+643x_2 \to \max$
$f_2(X)=765x_1-432x_2 \to \min$
$x_1+x_2>280$
$x_1-x_2>125$
$x_1,x_2>0$

4. $f_1(X)=34x_1+87x_2 \to \max$
$f_2(X)=16x_1-32x_2 \to \min$
$x_1+x_2>23$
$x_1-x_2<5$
$x_1,x_2>0$

5. $f_1(X)=32x_1+6x_2 \to \max$
$f_2(X)=56x_1-52x_2 \to \min$
$x_1+x_2>20$
$x_1-x_2<12$
$x_1,x_2>0$

6. $f_1(X)=423x_1+764x_2 \to \max$
$f_2(X)=542x_1-232x_2 \to \min$
$x_1+x_2>324$
$x_1-x_2<127$
$x_1,x_2>0$

7. $f_1(X)=322x_1+46x_2 \to \max$
$f_2(X)=132x_1-543x_2 \to \min$
$x_1+x_2>234$
$x_1-x_2<167$
$x_1,x_2>0$

6.8. Контрольные вопросы

1. В чем суть оптимизации по принципу Парето?
2. Что такое скалярный критерий и каким образом в него можно свернуть векторный критерий?
3. Что такое метод последовательных уступок?
4. В чем состоит принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению?
5. Что такое принцип слабой оптимальности по Парето?
6. Принцип справедливого компромисса. Что это?

7. Оценка сложных систем в условиях риска на основе функции полезности *

7.1. Общие сведения

Операции, выполняемые в условиях риска, называются вероятностными. Однозначность соответствия между системами и исходами в вероятностных операциях нарушается. Это означает, что каждой системе (альтернативе) a ставится в соответствие не один, а множество исходов $\{y_k\}$ с известными условными вероятностями появления $p(y_k / a_i)$. Например, из-за ограниченной надежности сетевого оборудования время передачи сообщения может меняться случайным образом по известному закону. Очевидно, оценивать системы в операциях данного типа так, как в детерминированных операциях, нельзя.

Эффективность систем в вероятностных операциях находится через математическое ожидание функции полезности на множестве исходов $K(a) = M_a[F(y)]$. При исходах y_k $\{ k \sim 1, ..., m \}$ с дискретными значениями показателей, каждый из которых появляется с условной вероятностью $p(y_k/a_i)$ и имеет полезность $F(y_k)$, выражение для определения математического ожидания функции полезности записывается в виде

$$K(a_i) = \sum_{k=1}^{m} p(y_k / a_i) F(y_k),\ i = 1,..,n. \qquad (7.1)$$

* Мертенс, П. Интегрированная обработка информации. Операционные системы в промышленности : учебник / пер. с нем. М. А. Костровой. М. : Финансы и статистика, 2007. 424 с. ISBN 978-5-279-02928-0.

Из выражения (7.1) как частный случай может быть получена оценка эффективности систем для детерминированных операций, если принять, что исход, соответствующий системе, наступает с вероятностью, равной единице, а вероятности остальных исходов равны нулю. Условия оценки систем в случае, когда показатели исхода вероятностной операции являются дискретными величинами, удобно задавать таблично (табл. 7).

При исходах с непрерывными значениями показателей математическое ожидание функции полезности определяется как

$$K(a_i) = \int_R f(y / a_i) F(y) dy,$$

где $f(y/a_i)$ – плотность вероятностей исходов; R – допустимая область векторного пространства исходов.

Таблица 7

a_i	y_k	$p(y_k/a_i)$	$F(y_k)$	$K(a_i)$
a_1	y_1 y_2 ... y_l	$p(y_1/a_1)$ $p(y_2/a_1)$ ... $p(y_l/a_1)$	$F(y_1)$ $F(y_2)$ ... $F(y_l)$	...
a_2 ...	y_1 y_2 ... y_l ...	$p(y_1/a_2)$ $p(y_2/a_2)$ ... $p(y_l/a_2)$ ...	$F(y_1)$ $F(y_2)$ ... $F(y_l)$ ...	...
a_m	y_1 y_2 ... y_l	$p(y_1/a_m)$ $p(y_2/a_m)$ ... $p(y_l/a_m)$	$F(y_1)$ $F(y_2)$ ... $F(y_l)$	...

Для оценки эффективности систем в вероятностной операции необходимо:

- определить исходы операции по каждой системе;
- построить функцию полезности на множестве исходов операции;
- найти распределение вероятностей на множестве исходов операции;
- рассчитать математическое ожидание функции полезности на множестве исходов операции для каждой системы.

Критерий оптимальности для вероятностных операций имеет вид

$$K(a_i) = \max_{a_i} M_{a_i}[F(y)], \ (i = 1, ..., m).$$

В соответствии с этим критерием оптимальной системой в условиях риска считается система с максимальным значением математического ожидания функции полезности на множестве исходов операции.

Оценка систем в условиях вероятностной операции – это оценка «в среднем», поэтому ей присущи все недостатки такого подхода, главный из которых заключается в том, что не исключен случай выбора неоптимальной системы для конкретной реализации операции. Однако если операция будет многократно повторяться, то оптимальная в среднем система приведет к наибольшему успеху.

Сведение задачи оценки систем к вероятностной постановке применимо для операций, имеющих массовый характер, для которых имеется возможность определить объективные показатели исходов, вероятностные характеристики по параметрам обстановки и законы распределения вероятностей на множестве исходов операции.

Рассмотрим пример оценки эффективности систем в вероятностных операциях по приведенному критерию.

Пример 1. Оценка вариантов конфигурации гетерогенной локальной вычислительной сети общего пользования. Исследуемая операция – обмен сообщениями между пользователями, система – варианты размещения сетевого оборудования, показатель исхода операции – число переданных сообщений n_k (дискретная величина). Числовые данные для оценки приведены в табл. 8.

Таблица 8

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$	$K(a_i)$
Вариант 1	60 40 20	0,3 0,5 0,2	0,8 0,5 0,1	0,51
Вариант 2	60 40 20	0,25 0,60 0,15	0,8 0,5 0,1	0,515

Расчет показателей и оценка эффективности по критерию превосходства показывают, что в качестве оптимальной системы должен быть признан вариант 2 конфигурации сети:

$$K(a_1) = 0{,}3\cdot0{,}8 + 0{,}5\cdot0{,}5 + 0{,}2\cdot0{,}1 = 0{,}51;$$
$$K(a_2) = 0{,}25\cdot0{,}8 + 0{,}6\cdot0{,}5 + 0{,}15\cdot0{,}1 = 0{,}515;$$
$$K_{\text{опт}} = \max K(a_i) = K(a_2\,) = 0{,}515.$$

Кроме оптимизации «в среднем» в вероятностных операциях используются и другие критерии оценки систем:

- максимум вероятности случайного события;
- максимум степени вероятностной гарантии достижения результата не ниже требуемого уровня;
- минимум среднего квадрата уклонения результата от требуемого;
- минимум дисперсии результата;
- максимум вероятностно-гарантированного результата;
- минимум среднего (байесовского) риска (минимум средних потерь).

Рассмотрение этих критериев составляет один из разделов теории принятия решений.

7.2. Задачи

Для представленных ниже вариантов рассчитать показатели и оценку эффективности по критерию превосходства/

1

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$
Вариант 1	85 65 45	0,5 0,25 0,25	0,3 0,7 0,2
Вариант 2	85 65 45	0,65 0,25 0,1	0,2 0,45 0,6
Вариант 3	85 65 45	0,4 0,35 0,25	0,15 0,65 0,2

2

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$
Вариант 1	120 80 60	0,7 0,1 0,2	0,6 0,6 0,3
Вариант 2	120 80 60	0,5 0,3 0,2	0,4 0,45 0,4
Вариант 3	120 80 60	0,8 0,05 0,15	0,35 0,5 0,3

3

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$
Вариант 1	60 50 40	0,4 0,1 0,5	0,15 0,65 0,2
Вариант 2	60 50 40	0,2 0,3 0,5	0,6 0,6 0,3
Вариант 3	60 50 40	0,6 0,15 0,25	0,2 0,45 0,6

4

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$
Вариант 1	60 50 40	0,4 0,1 0,5	0,4 0,45 0,4
Вариант 2	60 50 40	0,65 0,25 0,1	0,6 0,6 0,3
Вариант 3	60 50 40	0,8 0,05 0,15	0,2 0,45 0,6

5

a_i	n_k	$p(n_k/a_i)$	$F(n_k)$
Вариант 1	85 65 45	0,65 0,25 0,1	0,3 0,7 0,2
Вариант 2	85 65 45	0,4 0,1 0,5	0,2 0,45 0,6
Вариант 3	85 65 45	0,5 0,25 0,25	0,15 0,65 0,2

7.3. Контрольные вопросы

1. Для каких целей проводится оценка сложных систем? Каковы основные этапы оценивания сложных систем?
2. Приведите вид критерия оптимальности.

3.Что такое функция полезности?

4. Как осуществляется оценка сложных систем в условиях риска на основе функции полезности?

5. Каким образом определяется математическое ожидание при исходах с непрерывными значениями показателей?

8. Оценка сложных систем в условиях неопределенности *

8.1. Общие сведения

Специфические черты организационно-технических систем часто не позволяют свести операции, проводимые этими системами, к детерминированным или вероятностным. К таким чертам относятся:

1. Наличие в управляемой системе в качестве элементов (подсистем) целенаправленных индивидуумов и наличие в системе управления лица принимающего решения (ЛПР), осуществляющих управление на основе субъективных моделей, что и приводит к большому разнообразию поведения системы в целом.

2. Алгоритм управления часто строит сама система управления, преследуя помимо предъявляемых старшей системой целей собственные цели, не всегда совпадающие с внешними.

3. На этапе оценки ситуации в ряде случаев исходят не из фактической ситуации, а из той модели, которой пользуется ЛПР при управлении объектом.

4. В процессе принятия решения большую роль играют логические рассуждения ЛПР, не поддающиеся формализации классическими методами математики.

5. При выборе управляющего воздействия ЛПР может оперировать нечеткими понятиями, отношениями и высказываниями.

6. В большом классе задач управления организационно-техническими системами отсутствуют объективные критерии оценивания достижения целевого и текущего состояний объекта управления, а также статистика, достаточная для построения соответствующих вероятностных распределений (законов распределения исходов операций) для конкретного принятого решения.

---

* Мертенс, П. Интегрированная обработка информации. Операционные системы в промышленности : учебник / пер. с нем. М. А. Костровой. М. : Финансы и статистика, 2007. 424 с. ISBN 978-5-279-02928-0.

Таким образом, несводимость операций, проводимых сложными организационно-техническими системами к детерминированным или вероятностным, не позволяет использовать для их оценки детерминистские и вероятностные критерии.

Таблица 9

a_i	n_j				$K(a_i)$
	n_1	n_2	...	n_k	
a_1	k_{11}	k_{12}	...	k_{1k}	...
a_2	k_{21}	k_{22}	...	k_{1k}	
…	...	...	...	...	
a_m	k_{m1}	k_{m2}	...	k_{mk}	

Условия оценки эффективности систем для неопределенных операций можно представить в виде табл. 9, в которой обозначены:

a_i – вектор управляемых параметров, определяющий свойства системы (i = 1, ..., m); n_j – вектор неуправляемых параметров, определяющий состояние обстановки (j – 1, .., k); k_{ij} – значение эффективности системы a_i для состояния обстановки n_j; $K(a_i)$ – эффективность системы a_i.

Каждая строка таблицы содержит значения эффективности одной системы для всех состояний обстановки n_j, а каждый столбец – значения эффективности для всех систем a_i при одном и том же состоянии обстановки. В случае задания состояний обстановки одним параметром матрица эффективности может быть представлена диаграммой (рис. 5).

В неопределенной операции могут быть известны множество состояний обстановки и эффективность систем для каждой из них, но нет данных, с какой вероятностью может появиться то или иное состояние.

Рис. 5. Диаграмма эффективности систем a_i для условий n_j

В зависимости от характера неопределенности операции могут делиться на игровые и статистически неопределенные. В игровых операциях неопределенность вносит своими сознательными действиями противник. Для исследования игровых операций используется теория игр. Условия статистически неопределенных операций зависят от объективной действительности, называемой природой. Природа рассматривается как незаинтересованная, безразличная к операции сторона (она пассивна по отношению к лицу, принимающему решение). Такие операции могут исследоваться с применением теории статистических решений.

Если операция, проводимая системой, уникальна, то для разрешения неопределенности при оценке систем используются субъективные предпочтения ЛПР.

В зависимости от характера предпочтений ЛПР наиболее часто в неопределенных операциях используются критерии:

- среднего выигрыша;
- Лапласа;
- осторожного наблюдателя (Вальда);
- максимакса;
- пессимизма-оптимизма (Гурвица);
- минимального риска (Сэвиджа).

Рассмотрим эти критерии на примере.

Пример 1. Необходимо оценить один из трех разрабатываемых программных продуктов a_i для борьбы с одним из четырех типов программных воздействий k_j. Матрица эффективности представлена в табл. 10. Здесь a_i – 1-й программный продукт, $i = \{1, 2, 3\}$, k_j – оценка эффективности применения i-го программного продукта при j-м программном воздействии $\{j\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

8.2. Критерий среднего выигрыша

Таблица 10

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3

Данный критерий предполагает задание вероятностей состояний обстановки p_i. Эффективность систем оценивается как среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) оценок эффективности по всем состояниям обстановки:

$$K(a_i) = \sum_{j=1}^{t} p_j k_{ij},\ (i = 1,...,m).$$

Оптимальной системе будет соответствовать эффективность

$$K(a_i) = \max_i \sum_{j=1}^{t} p_j k_{ij},\ (i = 1,...,m).$$

Если в данном примере задаться вероятностями применения противником программных воздействий $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,1$ и $p_4 = 0,3$, то получим следующие оценки систем:

$K(a_1) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,21;$

$K(a_2) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,28;$

$K(a_3) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,25.$

Оптимальное решение – система a_2 .

Для применения критерия среднего выигрыша необходим, по существу, перевод операции из неопределенной в вероятностную, причем произвольным образом.

8.3. Критерий Лапласа

В основе критерия лежит предположение: поскольку о состояниях обстановки ничего не известно, то их можно считать равновероятными. Исходя из этого

$$K(a_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} k_{ij},\ i = 1,...,m;$$

$$K_{\text{опт}} = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} k_{ij}\right),\ i = 1,...,m.$$

8.4. Критерий осторожного наблюдателя (Вальда)

Это *максиминный критерий,* он гарантирует определенный выигрыш при наихудших условиях. Критерий основывается на том, что, если состояние обстановки неизвестно, нужно поступать самым осторожным образом, ориентируясь на минимальное значение эффективности каждой системы.

В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок систем по различным состояниям обстановки

$$K(a_i) = \min_j k_{ij},\ i = 1,...,\ m,\ j = 1,...,\ t.$$

Оптимальной считается система из строки с максимальным значением эффективности:

$$K_{\text{опт}} = \max_i(\min_j k_{ij}),\ i = 1,...,\ m,\ j = 1,...,\ t.$$

Максиминный критерий ориентирует на решение, не содержащее элементов риска: при любом из возможных состояний обстановки выбранная система покажет результат операции не хуже найденного максимина. Такая осторожность является в ряде случаев недостатком критерия. Другой недостаток – он не удовлетворяет требованию – добавление постоянного числа к каждому элементу столбца матрицы эффективности влияет на выбор системы.

8.5. Критерий максимакса

Этим критерием предписывается оценивать системы по максимальному значению эффективности и выбирать в качестве оптимального решения систему, обладающую эффективностью с наибольшим из максимумов:

$$K(a_i) = \max_j k_{ij},$$

$$K_{\text{опт}} = \max_i(\max_j k_{ij}).$$

Критерий максимакса – самый оптимистический критерий. Те, кто предпочитает им пользоваться, всегда надеются на лучшее состояние обстановки и, естественно, в большой степени рискуют.

8.6. Критерий пессимизма-оптимизма (Гурвица)

Это *критерий обобщенного максимина.* Согласно данному критерию при оценке и выборе систем неразумно проявлять как осторожность, так и азарт, а следует, учитывая самое высокое и самое низкое значения эффективности, занимать промежуточную позицию (взвешиваются наихудшие и наилучшие условия). Для этого вводится коэффициент оптимизма α ($0 \le \alpha \le 1$), характеризующий отношение к риску лица, принимающего решение. Эффективность систем находится как взвешенная с помощью коэффициента α сумма максимальной и минимальной оценок:

$$K(a_i) = \alpha \max_j k_{ij} + (1-\alpha)\min_j k_{ij}.$$

Условие оптимальности записывается в виде

$$K_{\text{опт}} = \max_i[\alpha \max_j k_{ij} + (1-\alpha)\min_j k_{ij}],\ 0 \le \alpha \le 1.$$

При $\alpha = 0$ критерий Гурвица сводится к критерию максимина, при $\alpha = 1$ – к критерию максимакса. Значение α может определяться методом экспертных оценок. Очевидно, что, чем опаснее оцениваемая ситуация, тем ближе величина α должна быть к единице, когда гарантируется наибольший из минимальных выигрышей или наименьший из максимальных рисков.

На практике пользуются значениями коэффициента α в пределах 0,3 – 0,7.

8.7. Критерий минимального риска (Сэвиджа)

Минимизирует потери эффективности при наихудших условиях. Для оценки систем на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце:

$$\Delta k_{ij} = \max_i k_{ij} - k_{ij}.$$

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$$K(a_i) = \max_j \Delta k_{ij};$$

$$K_{\text{опт}} = \min_i \ (\max_j \Delta k_{ij}).$$

Оценим эффективность систем из приведенного примера в соответствии с данным критерием. Матрице эффективности (см. табл. 10) будет соответствовать матрица потерь (табл. 11). Тогда

$K(a_1)$ = max (0,1; 0; 0,3; 0,2) = 0,3;

$K(a_2)$ = max (0; 0,2; 0,2; 0) = 0,2;

$K(a_3)$ = max (0,1; 0,1; 0; 0,1) = 0,1.

Оптимальное решение – система a_3. Критерий минимального риска отражает сожаление по поводу того, что выбранная система не оказалась наилучшей при определенном состоянии обстановки. Так, если произвести выбор системы a_1, а состояние обстановки в действительности n_3, то сожаление, что не выбрана наилучшая из систем (a_3), составит 0,3.

Таблица 11

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,1	0	0,3	0,2
a_2	0	0	0,2	0
a_3	0,1	0,1	0	0,1

О критерии Сэвиджа можно сказать, что он, как и критерий Вальда, относится к числу осторожных критериев. По сравнению с критерием Вальда в нем придается несколько большее значение выигрышу, чем проигрышу.

Таким образом, эффективность систем в неопределенных операциях может оцениваться по целому ряду критериев. На выбор того или иного критерия оказывает влияние ряд факторов:

• природа конкретной операции и ее цель (в одних операциях допустим риск, в других – нужен гарантированный результат);

• причины неопределенности (одно дело, когда неопределенность является случайным результатом действия объективных законов природы, и другое, когда она вызывается действиями разумного противника, стремящегося помешать в достижении цели);

• характер лица, принимающего решение (одни люди склонны к риску в надежде добиться большего успеха, другие предпочитают действовать всегда осторожно).

Выбор какого-то одного критерия приводит к принятию решения по оценке систем, которое может быть совершенно отличным от решений, диктуемых другими критериями. Это наглядно подтверждают результаты оценки эффективности систем применительно к *примеру 1* по рассмотренным критериям (табл. 12).

Таблица 12

a_i	k_j				$K(a_i)$ по критериям					
	k_1	k_2	k_3	k_4	среднего выигрыша	Лапласа	Вальда	макси-макса	Гурвица	Сэвиджа
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2	0,21	0,225	0,1	0,5	0,34	0,3
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4	0,28	0,275	0,2	0,4	0,32	0,2
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3	0,25	0,300	0,1	0,4	0,28	0,1

Тип критерия для выбора рационального варианта должен быть оговорен на этапе анализа систем, согласован с заказывающей организацией и в последующих задачах синтеза информационных и других сложных систем предполагается заданным. Процесс выбора вида критерия для учета неопределенности достаточно сложен. Устойчивость выбранного рационального варианта можно оценить на основе анализа по нескольким критериям. Если существует совпадение, то имеется большая уверенность в правильности выбора варианта.

Особенностью мажоритарной обработки является опасность выбора системы, не являющейся лучшей, на основе многоэтапного выбора при группировке альтернатив в коалиции.

Такая ситуация отражена на рис. 6, где 8 из 27 систем по разным критериям были оценены как худшие. Однако при группировке в коалиции и организации двухэтапной процедуры мажоритарной обработки в качестве лучшей была выбрана одна из худших систем.

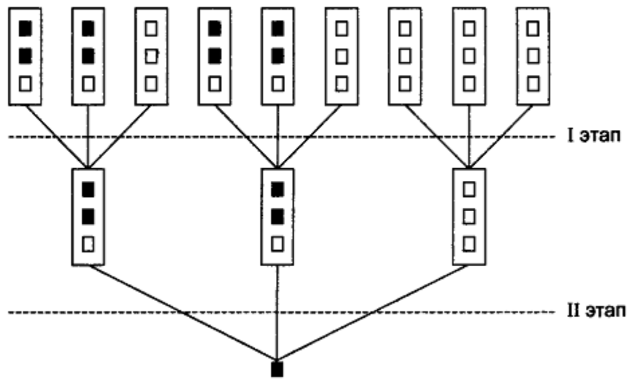

Рис. 6. К угрозе мажоритарного выбора
худшей системы на основе коалиций:
■ – худшая i-я система; □ – лучшая

В любом случае при выделении множества предпочтительных систем по разным критериям окончательный выбор системы должен осуществляться лицом, принимающим решение. При этом в операциях, которым в зависимости от характера соответствует либо пороговая, либо монотонная функция полезности, эффективность систем правомочно оценивать непосредственно по показателям исходов. Для детерминированных операций критерием эффективности будет служить сам показатель, для вероятностных – либо вероятность получения допустимого значения показателя (при пороговой функции полезности), либо математическое ожидание значения показателя (при линейной функции полезности).

Оценка эффективности систем на основе показателей исходов в других случаях может приводить к неправильному выбору, поэтому переход к оценке эффективности систем без введения функции полезности должен всегда сопровождаться обоснованием.

8.8. Задачи

В предложенном варианте задания выберите оптимальное решение по всем вышеперечисленным критериям. Составьте таблицу, подобную табл. 12, и приведите рисунок, подобный рис. 6.

Матрицы эффективности — Матрицы потерь

Вариант 1

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,6	0,1	0,15	0,15
a_2	0,4	0,1	0,05	0,45
a_3	0,2	0,3	0,4	0,1

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0	0,1	0	0
a_2	0,1	0	0	0,1
a_3	0,1	0,3	0,1	0

Вариант 2

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,35	0,2	0,15	0,3
a_2	0,55	0,05	0,15	0,25
a_3	0,35	0,3	0,2	0,15

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,1	0	0,1	0,2
a_2	0,1	0,1	0,1	0,1
a_3	0	0	0,1	0,2

Вариант 3

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,55	0,05	0,15	0,25
a_2	0,6	0,1	0,15	0,15
a_3	0,4	0,1	0,05	0,45

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0	0	0,1	0
a_2	0	0,1	0,1	0,1
a_3	0,1	0,1	0,2	0

Вариант 4

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,1	0,5	0,2	0,2
a_2	0,2	0,2	0,4	0,2
a_3	0,3	0,4	0,1	0,2

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0	0	0,1	0,2
a_2	0	0,1	0,1	0
a_3	0	0,2	0,1	0

Вариант 5

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0,2	0,2	0,4	0,2
a_2	0,35	0,3	0,2	0,15
a_3	0,6	0,1	0,15	0,15

a_i	k_j			
	k_1	k_2	k_3	k_4
a_1	0	0,2	0,1	0,2
a_2	0,1	0,1	0	0,1
a_3	0,2	0	0,2	0,1

8.9. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные критерии оценки сложных систем в условиях неопределенности.
2. Что такое критерий среднего выигрыша?
3. Что такое критерий Лапласа?
4. Что такое критерий осторожного наблюдателя?
5. Что такое критерий максимакса?
6. Что такое критерий пессимизма-оптимизма?
7. Что такое критерий минимального риска?

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ананишнов, В. В. Экономика природопользования / В. В. Ананишнов, О. В. Ананишнова. – URL: http://dvo.sut.ru/libr/eius/i190anae/met.htm (дата обращения: 10.03.2012).

2. Учебник по имитационному моделированию экономических процессов. – URL: http://glspro.narod.ru/teach/index.html (дата обращения: 10.03.2012).

3. Оспанов, С. С. Роль экономико-математических моделей в экономических исследованиях / С. С. Оспанов, А. К. Кудебаев. – URL: http://www.kazsu.kz/do/books/mat_model_new/04.htm (дата обращения: 10.03.2012).

4. Компьюлинк. Технологии анализа рисков. 06.03.2003. – URL: http://www.cio-world.ru/business/e-safety/24117/ (дата обращения: 10.03.2012).

5. Барлиани, А.Г. Экономико-математические методы : практикум / А. Г. Барлиани, С. А. Вдовин, А. Ю. Гридасов. – URL : http://www.ssga.ru/metodich/barliani/index.html (дата обращения: 10.03.2012).

6. Методические материалы к самостоятельной работе. – URL: http://k1232.narod.ru/ (дата обращения: 23.03.2012).

7. Шоробура, Н. Н. Разработка моделей и программных средств для многокритериальной оптимизации сложных объектов в компьютерных информационных системах / Н. Н. Шоробура. – URL: http://www.masters.donntu.edu.ua/2004/kita/shorobura/diss/index.htm (дата обращения: 10.03.2012).

8. Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении : учеб. пособие / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин ; под ред. А. А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 368 с. – ISBN 5-279-02435-X.

9. Мертенс, П. Интегрированная обработка информации. Операционные системы в промышленности : учебник / П. Мертенс ; пер. с нем. М. А. Костровой. – М. : Финансы и статистика, 2007. – 424 с. – ISBN 978-5-279-02928-0.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям

Часть 1

Составители:
ЛЕВКОВСКИЙ Дмитрий Иванович
МАКАРОВ Руслан Ильич

Подписано в печать 06.07.12.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 3,95. Тираж 60 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.