

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра теоретической и прикладной механики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

Составитель
А.А. РЯЗАНОВ

Владимир 2010

УДК 621.01

ББК 34.41

М 54

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент
Владимирского государственного университета
А.М. Бурлакова

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Методические указания и задания к курсовой работе по
М 54 дисциплине «Прикладная механика» / Владим. гос. ун-т; сост. :
А.А. Рязанов. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 46 с.

Содержат пять заданий по основным разделам дисциплины «Соппротивление материалов»: растяжение (сжатие), кручение, изгиб, сложное напряженное состояние (расчет бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением). Каждое задание снабжено подробно рассмотренным примером. Так как методические указания предназначены для студентов немашиностроительных специальностей, то изложение материала максимально упрощено.

Помогут освоить основы расчетов на прочность элементов конструкций. Будут полезны для студентов как очной, так и заочной форм обучения, а также для студентов, обучающихся с применением дистанционных технологий.

Предназначены для студентов специальностей 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств», 200503 «Стандартизация и сертификация», 200501 «Метрология и метрологическое обеспечение», 140211 «Электроснабжение».

Ил. 11. Табл. 5. Библиогр.: 5 назв.

УДК 621.01

ББК 34.41

Методические указания содержат задания для курсовых, расчетно-графических и контрольных работ по дисциплинам «Прикладная механика», «Техническая механика».

Объем работ и шифр заданий назначаются преподавателем. Шифр заданий двухзначный. Первая цифра шифра – номер условия (данные задачи), которые приводятся в соответствующей таблице, последняя – номер рисунка.

Требования к оформлению работ

Работа должна быть оформлена на одной стороне листа писчей бумаги стандартного размера А4. Каждое задание должно содержать условие задачи, искомые величины и решение. Необходимые рисунки располагаются непосредственно по тексту и должны быть оформлены как в соответствующих разобранных примерах. Рисунки допускается выполнять без соблюдения масштаба, однако пропорции должны быть выдержаны.

Работа может быть оформлена на компьютере или от руки, рисунки – на компьютере или начерчены вручную по линейке карандашом или ручкой. В любом случае работа должна быть оформлена четко, аккуратно, разборчиво. Не допускается искажение общепринятых символов и обозначений.

Работа должна иметь титульный лист и быть подшита (скоросшивателем, степлером и т.д.). Скрепки и пакетики не допускаются.

При невыполнении требований к оформлению работа не принимается.

Задание 1. Построение эпюр при растяжении (сжатии)

Стальной двухступенчатый брус, длины ступеней которого указаны на рис. 1, нагружен силами F_1 , F_2 , F_3 (положение точек приложения сил задано размерами). Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса, а также эпюру перемещений поперечных сечений бруса. Определить перемещение Δl свободного конца бруса, приняв $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Числовые значения сил F_1 , F_2 , F_3 , а также площади поперечных сечений ступеней A_1 и A_2 для своего варианта взять из табл. 1.

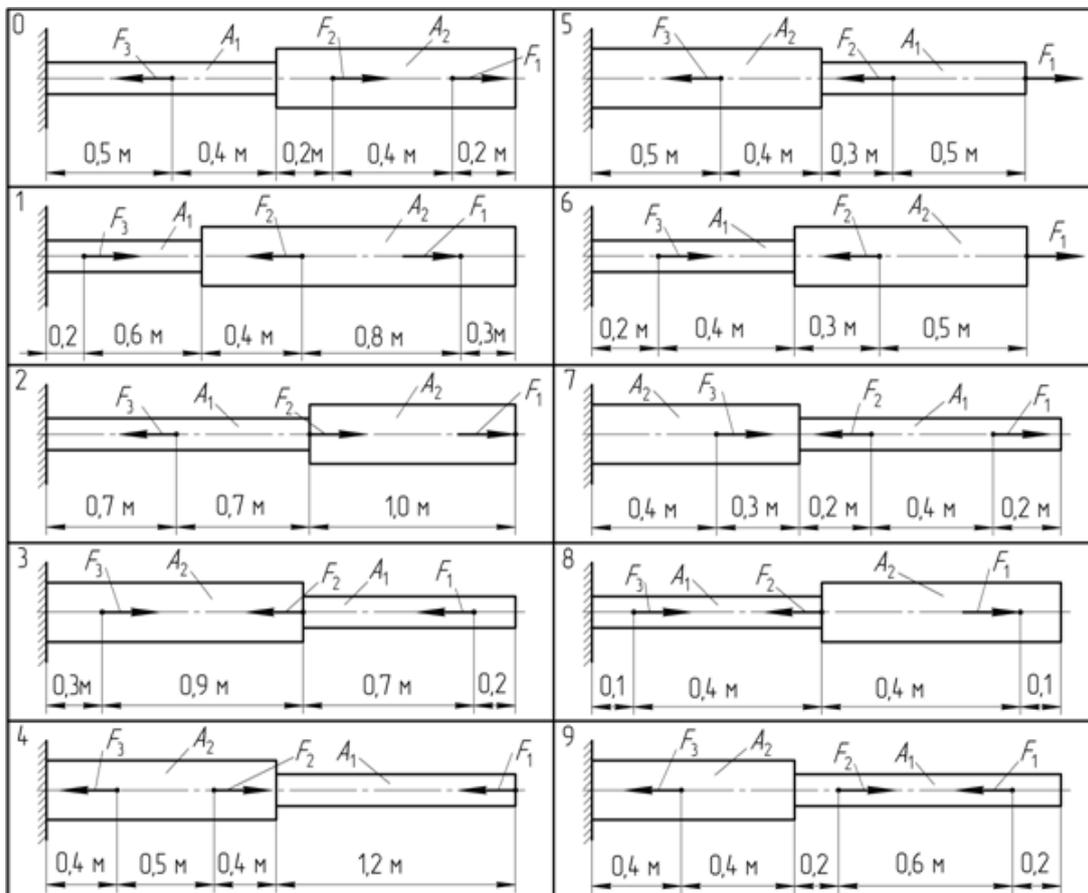


Рис. 1

Пример выполнения задания 1

Исходные данные: величины действующих сил $F_1=10$ кН, $F_2=15$ кН, $F_3=8$ кН, площади поперечных сечений бруса $A_1=1$ см²,

$A_2=1,5 \text{ см}^2$, модуль упругости материала бруса $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
 Размеры и схема приложения нагрузки приведены на рис. 2.

Таблица 1

Вариант	F_1	F_2	F_3	A_1	A_2
	кН			см ²	
0	25	15	17	1,4	1,8
1	36	10	15	1,2	2,9
2	27	8	16	1,3	3,1
3	24	11	27	1,5	4,0
4	17	9	14	1,4	1,9
5	14	21	12	1,0	2,2
6	29	17	15	1,1	2,8
7	16	18	17	1,6	3,1
8	26	27	12	2,3	2,2
9	22	30	19	1,7	3,2

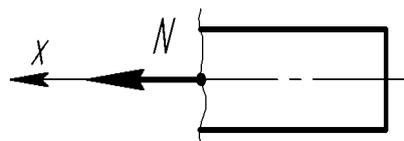
Решение:

1. Разобьём брус на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены действующие внешние силы, а также места изменения размеров поперечного сечения бруса. В рассматриваемом примере характерных участков 5 (I – V) см. рис. 2.

2. С помощью метода сечений определим продольную силу N на каждом участке.

Участок I

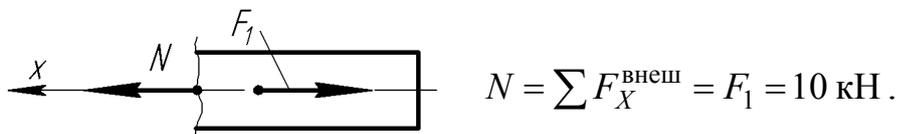
Рассекаем брус на две части, так чтобы сечение находилось в пределах первого участка, и рассмотрим равновесие одной из этих частей. (Можно рассмотреть равновесие как левой, так и правой частей бруса. В данном случае проще рассмотреть равновесие правой части).



$$N = \sum F_X^{\text{внеш}} = 0.$$

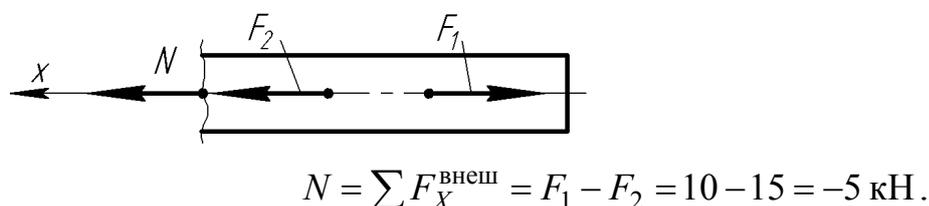
Участок II

Так же рассекаем брус на две части сечением, находящимся в пределах второго участка, и рассмотрим равновесие правой части бруса.



Участок III

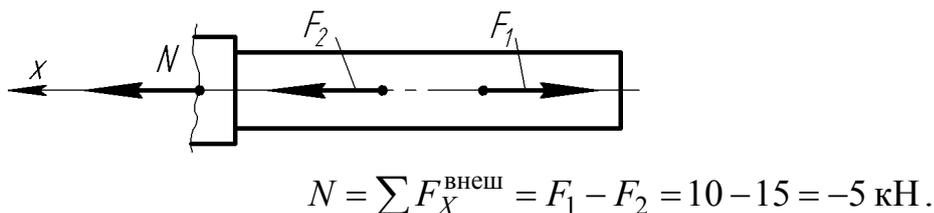
Рассекаем брус на две части сечением, находящимся в пределах третьего участка, и рассмотрим равновесие правой части бруса.



Правило знаков для продольной силы при растяжении (сжатии): если внешняя сила направлена от сечения, то она записывается со знаком «+», если внешняя сила направлена к сечению, то со знаком «-». При этом «+» соответствует растяжению, а «-» – сжатию.

Участок IV

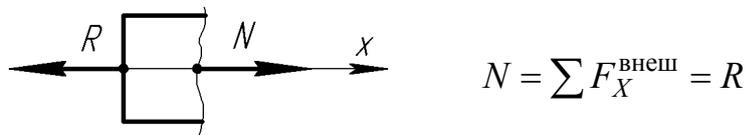
Рассекаем брус на две части сечением, находящимся в пределах четвертого участка, и рассмотрим равновесие правой части бруса.



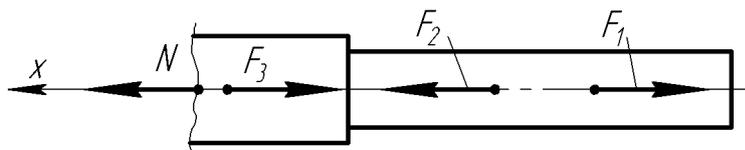
Участок V

Рассекаем брус на две части сечением, находящимся в пределах пятого участка. Может показаться, что в данном случае проще рассмотреть равновесие левой части бруса, но в этом случае необходимо приложить реакцию связи (жесткой заделки), которая

неизвестна (см. рисунок). Для того чтобы найти реакцию заделки, следует предварительно решить задачу теоретической механики (задачу статики).



Поэтому, как и на предыдущих участках, рассмотрим равновесие правой части бруса.



$$N = \sum F_X^{\text{внеш}} = F_1 - F_2 + F_3 = 10 - 15 + 8 = 3 \text{ кН}.$$

Очевидно, что реакция заделки равна величине нормальной силы на пятом участке, то есть $R=3$ кН.

Результаты проведенных расчетов для наглядности представим в графическом виде. Для этого построим эпюру продольной силы (см. рис. 2). Напоминаем, что эпюры принято штриховать в направлении поперечного сечения бруса, подчеркивая, что продольная сила, указанная на эпюре, соответствует данному поперечному сечению.

3. Построим эпюру нормальных напряжений.

Величина нормальных напряжений при растяжении (сжатии) бруса определяется по формуле

$$\sigma = N/A,$$

где A – площадь поперечного сечения бруса. При подстановке числовых значений в формулу необходимо соблюдать размерности, то есть в системе «СИ» сила измеряется в ньютонах (Н), а площадь в квадратных метрах (м^2). При этом напряжения получаются в паскалях (Па). Однако паскаль – это величина очень маленькая. Удобнее ответ записать в мегапаскалях (МПа) ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$). Поэтому в данном случае можно подставлять величину силы в ньютонах, а площадь поперечного сечения в квадратных миллиметрах. При этом величину напряжения получаем в мегапаскалях.

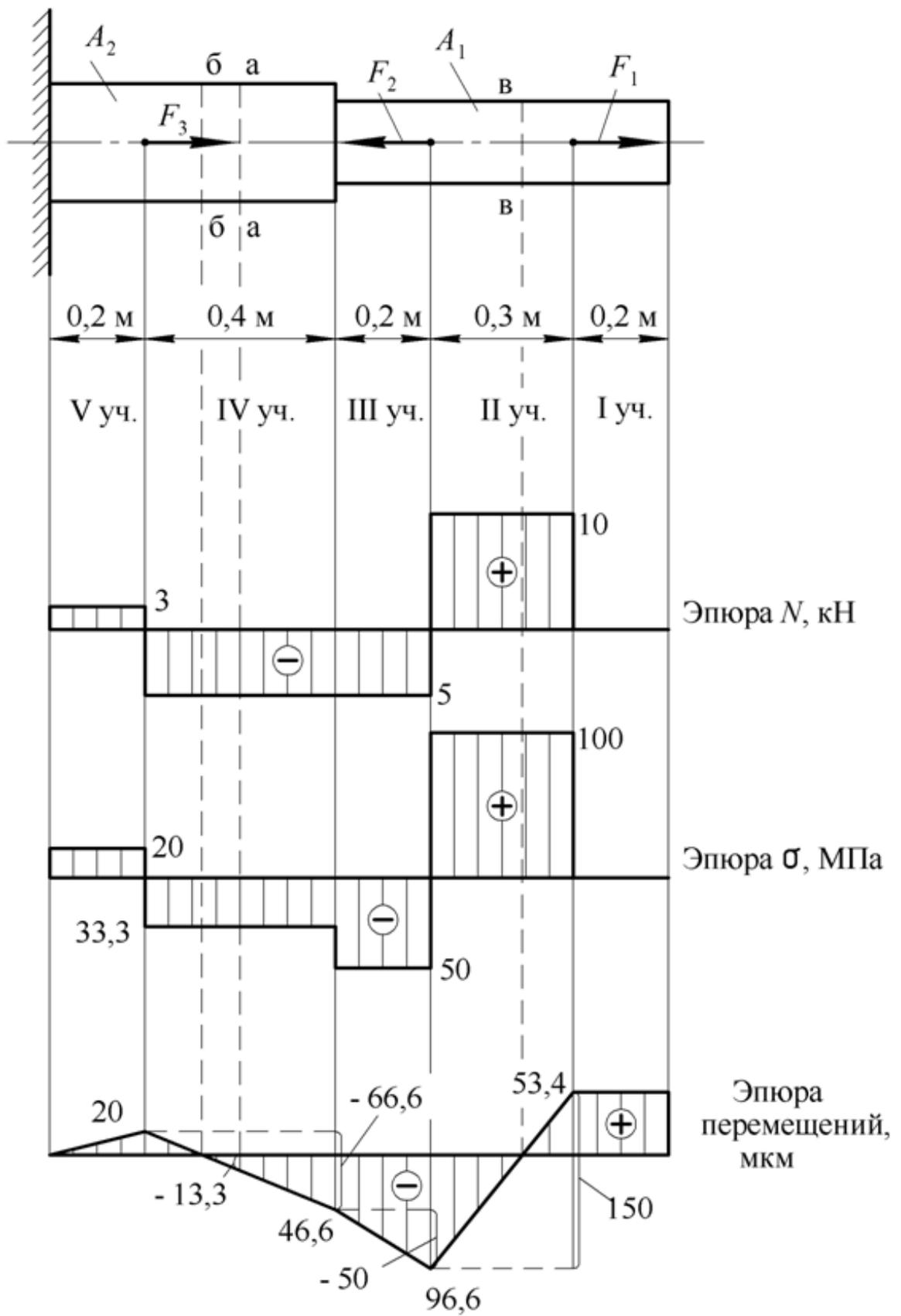


Рис. 2

Результаты расчетов получаются следующие, МПа:

$$\text{I – участок} \quad \sigma = 0,$$

$$\text{II – участок} \quad \sigma = \frac{10\,000}{100} = 100,$$

$$\text{III – участок} \quad \sigma = \frac{-5\,000}{100} = -50,$$

$$\text{IV – участок} \quad \sigma = \frac{-5\,000}{150} = -33,3,$$

$$\text{V – участок} \quad \sigma = \frac{3\,000}{150} = 20 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис. 2. Из данной эпюры видно, что второй и пятый участки бруса растянуты (знак +), третий и четвертый участки бруса сжаты (знак –), первый участок не нагружен. Наиболее нагружен второй участок, так как на нем самые большие по величине напряжения.

4. Построим эпюру перемещений сечений бруса под нагрузкой.

Для построения данной эпюры предварительно определим удлинение (укорочение) каждого участка бруса под нагрузкой. Удлинение участка бруса можно определить по формуле

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l,$$

где l – первоначальная длина соответствующего участка. При расчетах не забываем о размерностях. E и σ имеют одну размерность и находятся в числителе и знаменателе дроби, поэтому данные величины могут быть подставлены как в паскалях – система «СИ», так и в мегапаскалях, что конечно удобнее. Длину участка (l) подставляем в миллиметрах, при этом ответ также получаем в миллиметрах.

$$\text{I – участок} \quad \Delta l = 0,$$

$$\text{II – участок} \quad \Delta l = \frac{100}{2 \cdot 10^5} 300 = 0,15 \text{ мм} = 150 \text{ мкм},$$

$$\text{III – участок} \quad \Delta l = \frac{-50}{2 \cdot 10^5} 200 = -0,05 \text{ мм} = -50 \text{ мкм},$$

$$\text{IV – участок} \quad \Delta l = \frac{-33,3}{2 \cdot 10^5} 400 = -0,0666 \text{ мм} = -66,6 \text{ мкм},$$

$$\text{V – участок} \quad \Delta l = \frac{20}{2 \cdot 10^5} 200 = 0,02 \text{ мм} = 20 \text{ мкм}.$$

Знак «–» показывает, что соответствующий участок бруса стал короче.

При построении эпюры перемещений следует различать понятия «удлинение» и «перемещение». Построение эпюры следует начинать с сечения, которое не переместится (останется на месте). В рассматриваемом примере это сечение бруса жестко связанное со стеной. Поэтому данному сечению на эпюре перемещений соответствует нуль. Пятый участок под нагрузкой стал длиннее на 20 мкм. Если левая граница участка не перемещается, то сечение, соответствующее правой границе участка, должно переместиться вправо на 20 мкм. Условимся перемещение сечений вправо на эпюре изображать со знаком «+». Сечение, находящееся посередине пятого участка, тоже переместится вправо, однако не на 20 мкм, а на 10 мкм (левая и правая половинки пятого участка бруса станут длиннее на 10 мкм каждая). Следовательно, на эпюре данному сечению будет соответствовать перемещение +10 мкм. Сечение, расположенное от стены на расстоянии $\frac{1}{4}$ длины пятого участка, переместится также вправо, но на 5 мкм. Сечение, расположенное от стены на расстоянии $\frac{3}{4}$ длины пятого участка, переместится вправо на 15 мкм. Таким образом, мы приходим к выводу, что эпюра перемещений между границами участков изображается прямой линией.

Пятый участок бруса под нагрузкой стал длиннее на 20 мкм, а четвертый – короче на 66,6 мкм. Следовательно, вместе пятый и четвертый участки стали короче на 46,6 мкм ($20 - 66,6 = -46,6$ мкм). Поэтому, сечение бруса, соответствующее границе четвертого и третьего участков, переместится влево на 46,6 мкм. На эпюре данное перемещение откладываем в отрицательном направлении. Между границами четвертого участка эпюру показываем в виде прямой линии.

Пятый, четвертый и третий участки под нагрузкой в совокупности стали короче на 96,6 мкм ($20 - 66,6 - 50 = -96,6$ мкм). На эпюре данное перемещение сечения, соответствующего границе третьего и второго участков, откладываем в отрицательном направлении.

Рассуждая аналогично, найдем, что сечение на границе второго и первого участков переместится вправо на 53,4 мкм.

На первом участке эпюра перемещений изображается горизонтальной прямой линией, так как первый участок не деформирован и все его сечения получают одинаковые перемещения, равные перемещению сечения на границе второго и первого участков.

Эпюра перемещений представлена на рис. 2. Из рисунка видно, что данную эпюру можно построить, откладывая с учетом знака соответствующие удлинения (укорочения) участков, но не от нуля, а от уровня, достигнутого за счет деформации предыдущих участков.

По эпюре перемещений можно определить перемещения любого сечения бруса под нагрузкой. Например, свободный конец бруса в рассмотренном примере переместится вправо на 53,4 мкм. Сечение а – а, расположенное посередине четвертого участка, переместится влево на 13,3 мкм (определяем из соответствующей пропорции). Сечения б – б и в – в в результате деформации бруса останутся на месте.

Задание 2. Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении

Для стального вала постоянного поперечного сечения (расчетная схема вала представлена на рис. 3):

- 1) определить значения моментов M_1, M_2, M_3, M_4 ;
- 2) построить эпюру крутящего момента;
- 3) определить диаметр вала из расчётов на прочность и жёсткость.

В расчетах принять $[\tau_k] = 30$ МПа; $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Данные для своего варианта взять из табл. 2.

Окончательно принимаемое значение диаметра вала должно быть округлено до ближайшего большего чётного или кратного пяти числа.

Таблица 2

Вариант	P_1	P_3	P_4	ω , рад/с	Вариант	P_1	P_3	P_4	ω , рад/с
	кВт					кВт			
0	35	20	15	20	5	75	40	15	20
1	150	100	50	45	6	90	60	25	30
2	40	25	20	25	7	65	35	20	25
3	110	60	30	35	8	140	110	60	45
4	40	15	25	30	9	120	80	40	35

Пример выполнения задания 2

Исходные данные: расчетная схема вала (рис. 4), величины мощностей, передаваемых крутящими моментами $P_1=20$ кВт, $P_3=8$ кВт, $P_4=24$ кВт, угловая скорость вращения вала $\omega = 40 \text{ с}^{-1}$, допустимый относительный угол закручивания вала $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м, материал вала – сталь, допустимые касательные напряжения при кручении $[\tau_k] = 30$ МПа, модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение:

1. Крутящий момент, мощность и угловая скорость вращения вала связаны соотношением $P = M \cdot \omega$.

Соответственно $M_1 = P_1 / \omega = 20000 / 40 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$,

$$M_3 = P_3 / \omega = 8000 / 40 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = P_4 / \omega = 32000 / 40 = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В расчетах не забываем подставлять величины в системе «СИ», то есть киловатты переводим в ватты.

Уравновешивающий крутящий момент M_2 можно найти двумя способами.

1-й способ: рассмотрим динамическое равновесие вала и запишем уравнение равновесия (см. рис. 4)

$$\sum M = 0; \quad M_1 + M_3 - M_2 + M_4 = 0,$$

откуда имеем $M_2 = M_1 + M_3 + M_4 = 500 + 200 + 800 = 1500 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

2-й способ: предположим, что моменты M_1, M_3, M_4 являются моментами сопротивления (направлены противоположно вращению вала), а момент M_2 – движущий момент (момент двигателя). Очевидно, что мощность двигателя должна быть равна суммарной мощности нагрузки $P_2 = P_1 + P_3 + P_4 = 20 + 8 + 32 = 60$ кВт.

Соответственно $M_2 = P_2 / \omega = 60000 / 40 = 1500$ Н·м

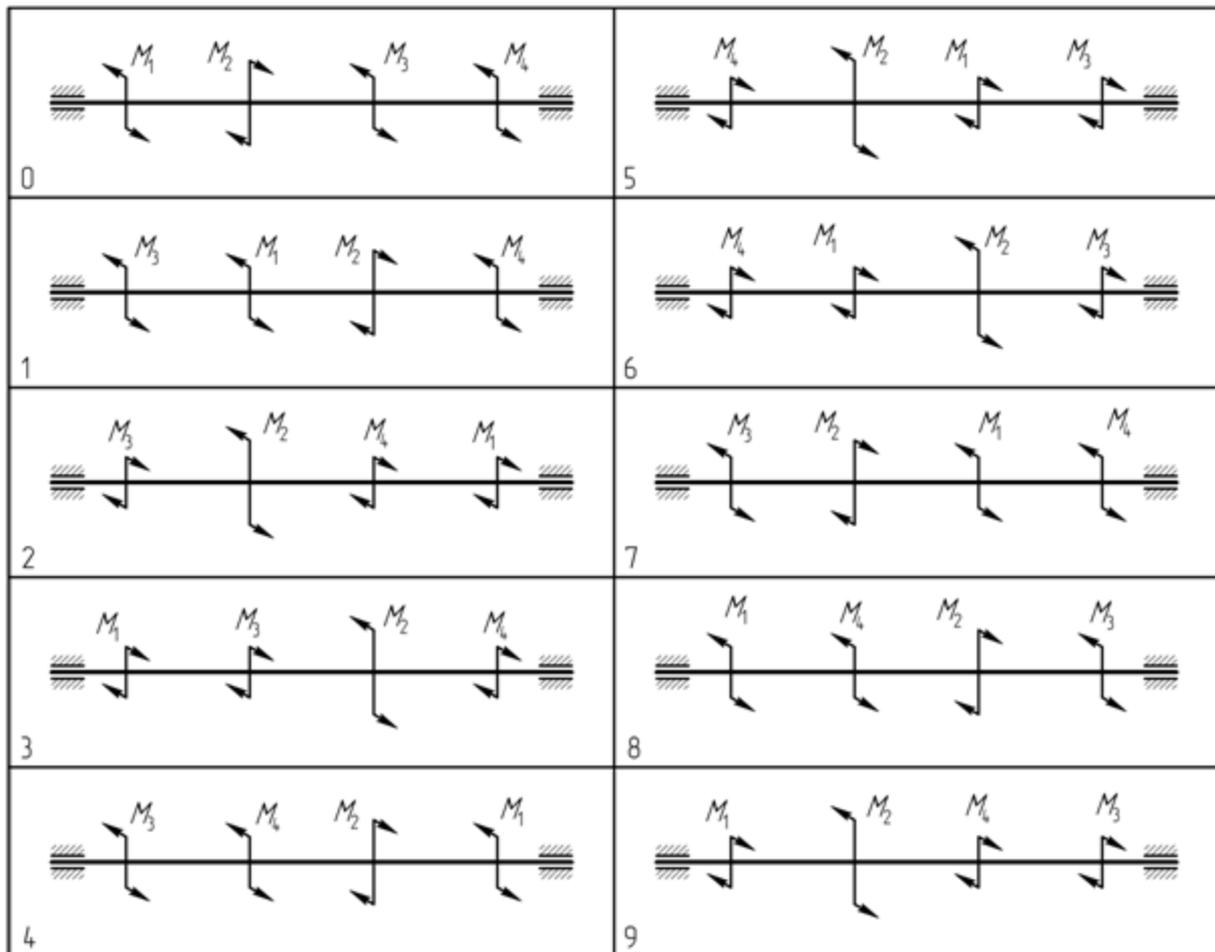


Рис. 3

2. Построим эпюру крутящего момента. Разобьём брус на участки (см. рис. 4). Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние крутящие моменты. С помощью метода сечений найдем величину внутреннего крутящего момента M_x на каждом участке.

Участок I

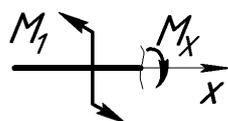
Рассекаем брус на две части так, чтобы сечение находилось в пределах первого участка, и рассмотрим равновесие левой части.



$$M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}}) = 0.$$

Участок II

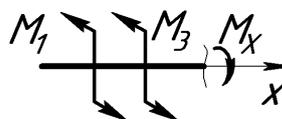
Рассекаем брус на две части так, чтобы сечение находилось в пределах второго участка, и рассмотрим равновесие левой части. **Правило знаков при кручении: если смотреть со стороны сечения, то внешние моменты, направленные по часовой стрелке, считаются положительными, а против часовой стрелки – отрицательными.**



$$M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}}) = M_1 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок III

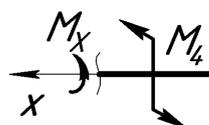
Рассекаем брус на две части так, чтобы сечение находилось в пределах третьего участка, и рассмотрим равновесие левой части.



$$M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}}) = M_1 + M_3 = 700 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок IV

Рассекаем брус на две части так, чтобы сечение находилось в пределах четвертого участка, и рассмотрим равновесие правой части.



$$M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}}) = -M_4 = -800 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок V

Если провести сечение в пределах пятого участка и рассмотреть равновесие правой части, то нетрудно убедиться, что расчетная схема будет аналогична первому участку. Соответственно $M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}}) = 0.$

Эпюра крутящего момента (M_X), построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 4.

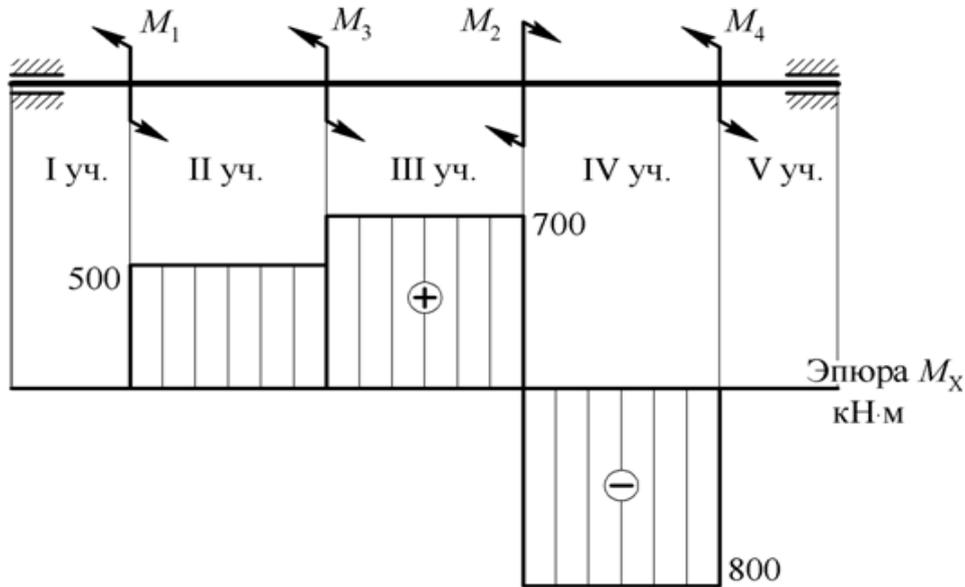


Рис. 4

3. Определим диаметр вала из расчётов на прочность и жёсткость.

а) Расчет на жесткость:

условие жесткости записывается в виде
$$\varphi_{0 \max} = \frac{|M_X|_{\max}}{G \cdot J_\rho} \leq [\varphi_0],$$

где J_ρ – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

Учитывая, что для вала круглого поперечного сечения $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$

получим

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 |M_X|_{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 800}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,02}} = 47,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 47,5 \text{ мм};$$

б) расчет на прочность:

условие прочности записывается в виде
$$\tau_{\max} = \frac{|M_X|_{\max}}{W_\rho} \leq [\tau_k],$$

где W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.

Для вала круглого поперечного сечения $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$. Таким образом,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 |M_X|_{\max}}{\pi \cdot [\tau_K]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 800}{3,14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 51,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 51,4 \text{ мм}.$$

Величину $|M_X|_{\max}$ берем с построенной эпюры крутящего момента. Знак момента не учитываем, так как направление момента не влияет на прочность и на угол закручивания вала.

Из полученных двух диаметров вала выбираем больший. В этом случае выполняется и условие прочности, и условие жесткости. Величину диаметра вала округляем до ближайшего большего целого или кратного пяти числа. Окончательно принимаем диаметр вала $d = 52$ мм (можно принять $d = 55$ мм).

Задание 3. Расчет консольной балки на прочность

Для стальной балки, жёстко закреплённой одним концом и нагруженной, как показано на рис. 5, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Из условия прочности рассчитать размеры поперечного сечения балки. Рассмотреть два варианта: а) поперечное сечение в виде прямоугольника, высота прямоугольника вдвое больше его ширины ($h=2b$); б) поперечное сечение в виде двутавра. Сравнить данные варианты по расходу материала. В расчетах принять $[\sigma] = 160$ МПа. Данные для своего варианта взять из табл. 3.

Таблица 3

Вариант	F	M	q	Вариант	F	M	q
	кН	кН·м	кН/м		кН	кН·м	кН/м
0	20	10	10	5	80	10	30
1	30	20	20	6	80	20	40
2	40	10	20	7	90	20	40
3	50	10	20	8	90	20	50
4	60	10	20	9	90	30	60

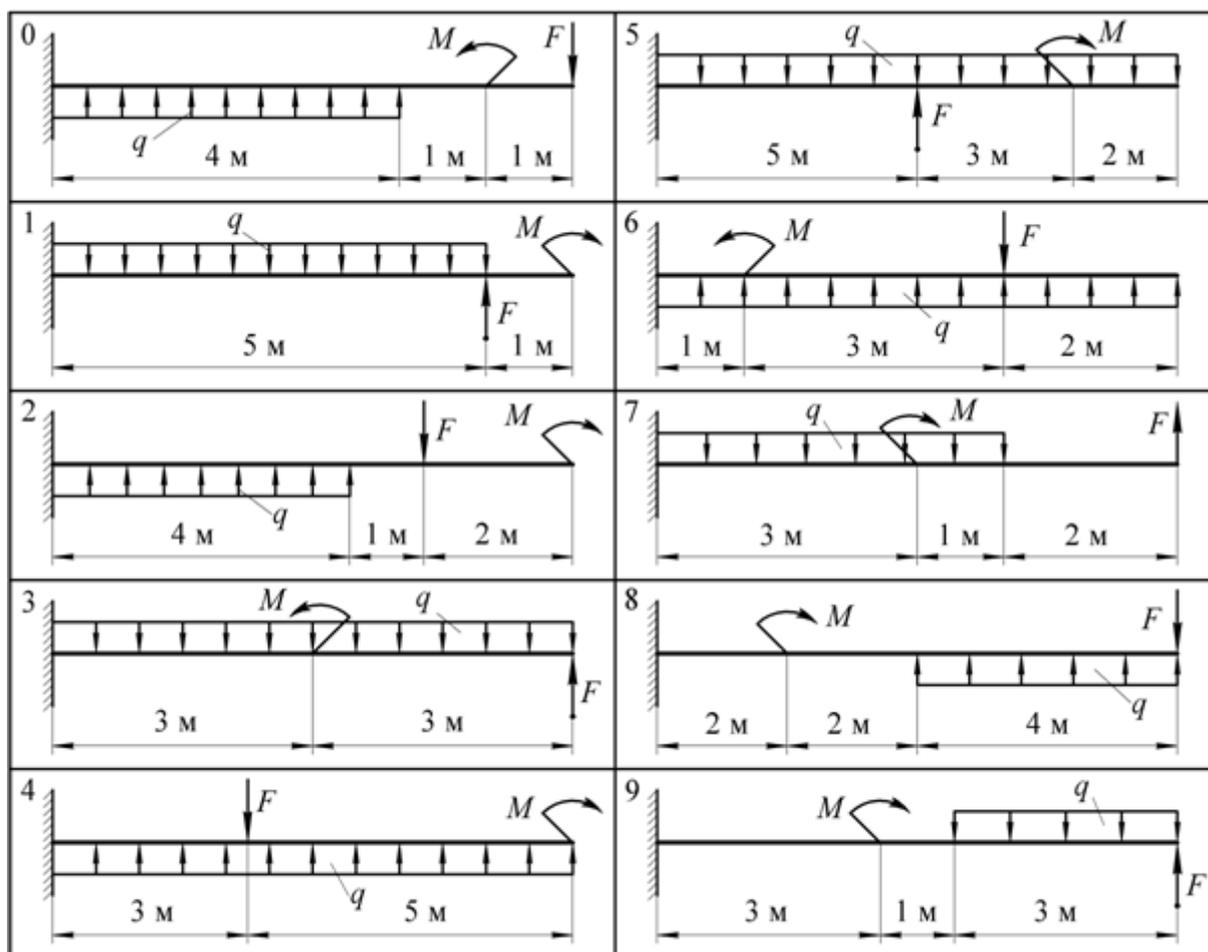


Рис. 5

Пример выполнения задания 3

Исходные данные: расчетная схема балки (рис. 6), численное значение приложенной нагрузки $F = 8$ кН, $M = 17$ кН·м, $q = 3$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа.

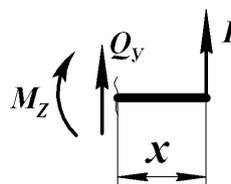
Решение:

1. Построим эпюры. Разобьём балку на участки (см. рис. 6). Границами участков являются сечения, в которых приложена внешняя нагрузка. С помощью метода сечений найдем величину поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z на каждом участке.

Участок I

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах первого участка, на расстоянии x от правого края балки (особенность данной задачи в том, что необходимо указывать, в

каком месте балки проведено сечение). Очевидно, должно выполняться условие $0 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}$. Иначе сечение окажется за пределами первого участка. Рассмотрим равновесие правой части балки.



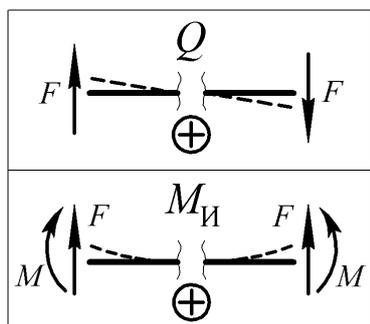
$$Q_Y = \sum F_Y^{\text{ВНЕШ}} = -F = -8 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{ВНЕШ}}) = F \cdot x.$$

Правило знаков для построения эпюр при изгибе:

а) для поперечной силы:

внешние силы, поворачивающие рассматриваемую часть балки относительно сечения по часовой стрелке, считаются положительными, против часовой стрелки – отрицательными.



б) для изгибающего момента:

внешняя нагрузка (силы или моменты) считается положительной, если она пытается загнуть свободный конец балки вверх относительно сечения (балка изгибается выпуклостью вниз), если внешняя нагрузка пытается загнуть свободный конец балки вниз относительно сечения (балка изгибается выпуклостью вверх), то внешняя нагрузка считается отрицательной.

Правило знаков понять и запомнить удобнее с помощью рисунка. На рисунке показан только вариант, когда внешняя нагрузка считается положительной. Если внешняя нагрузка противоположна направлению на рисунке – она считается отрицательной. Если в задаче рассматривается, например, левая относительно сечения часть балки, то и в правиле знаков надо рассматривать левую часть балки.

При соблюдении правила знаков эпюра изгибающего момента получается построенной на сжатых волокнах.

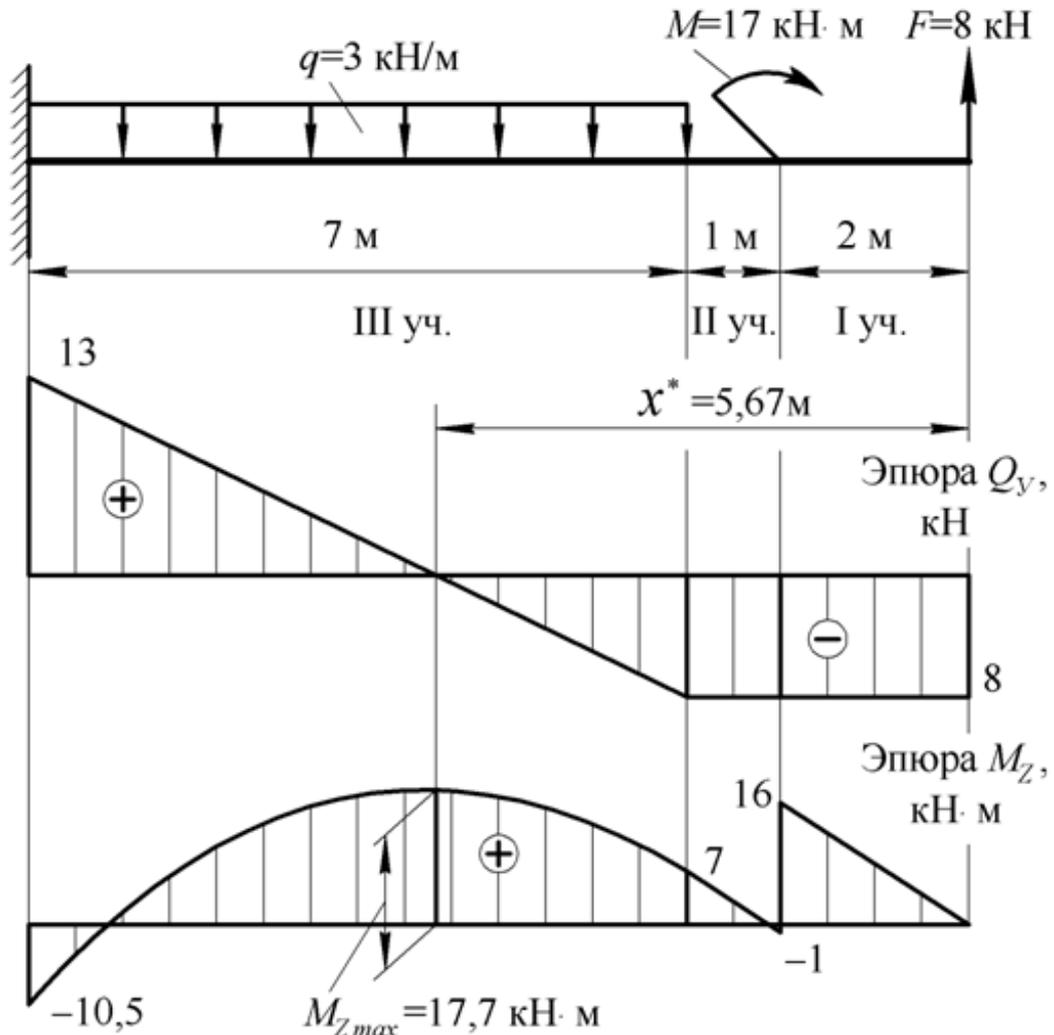


Рис. 6

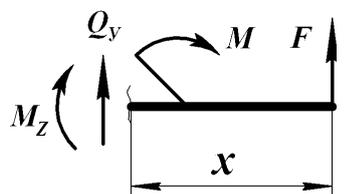
Величина Q_y на первом участке постоянна. Отложив -8 кН , построим эпюру Q_y на первом участке (см. рис. 6). Величина изгибающего момента M_z на первом участке переменна. Так как x в выражении для M_z стоит в первой степени, то зависимость линейная. Линейную зависимость легко построить по двум точкам. Найдем величину M_z на границах первого участка.

При $x = 0 \text{ м}$ $M_z = 0$, при $x = 2 \text{ м}$ $M_z = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на первом участке (см. рис. 6).

Участок II

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах второго участка, на расстоянии x от правого края балки. Очевидно, должно выполняться условие $2\text{ м} \leq x \leq 3\text{ м}$. Иначе сечение окажется за пределами второго участка. Рассмотрим равновесие правой части балки.



$$Q_Y = \sum F_Y^{\text{внеш}} = -F = -8 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = F \cdot x - M.$$

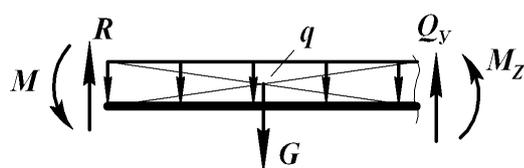
Величина Q_Y на втором участке также постоянна. Поэтому эпюра Q_Y на втором участке строится как продолжение эпюры первого участка (см. рис. 6). Величина изгибающего момента M_Z на втором участке переменна. Зависимость линейная. Для построения эпюры найдем величину M_Z на границах второго участка.

При $x = 2\text{ м}$ $M_Z = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}$, при $x = 3\text{ м}$ $M_Z = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на втором участке (см. рис. 6).

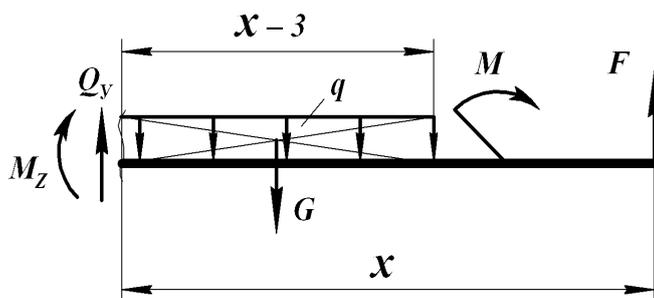
Участок III

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах третьего участка. Может показаться, что в данном случае удобнее рассмотреть равновесие левой части балки. Однако при этом



необходимо к действующим активным силам добавить реакции связей (реакции жесткой заделки R и M см. рисунок). Величины данных реакций неизвестны. Для их определения необходимо предварительно решить задачу теоретической механики (задачу статики). Чтобы этого не

делать, рассмотрим, как и на предыдущих участках, равновесие правой части балки. Сечение проведем на расстоянии x от правого края балки. Должно выполняться условие $3 \text{ м} \leq x \leq 10 \text{ м}$. На рассматриваемую часть балки действует распределенная нагрузка интенсивностью q . Заменяем ее сосредоточенной силой $G = q \cdot l$, где l – длина участка, на котором действует распределенная нагрузка.



Приложена сила G по середине участка. Величина l зависит от того, на каком расстоянии проведено сечение. Из рисунка видно, что $l = x - 3$, соответственно $G = q(x - 3)$. Таким образом, на третьем участке

$$Q_y = \sum F_y^{\text{внеш}} = G - F,$$

$$M_z = \sum m_z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = F \cdot x - M - G \frac{(x-3)}{2}$$

или

$$Q_y = q(x-3) - F,$$

$$M_z = F \cdot x - M - q \frac{(x-3)^2}{2}.$$

Величины Q_y и M_z переменны. Зависимость Q_y линейна. Для построения эпюры найдем величину Q_y на границах третьего участка.

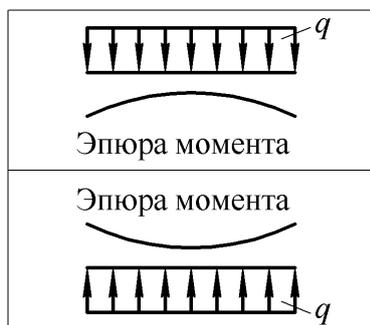
При $x = 3 \text{ м}$ $Q_y = 3(3 - 3) - 8 = -8 \text{ кН},$

при $x = 10 \text{ м}$ $Q_y = 3(10 - 3) - 8 = 13 \text{ кН}.$

Откладывая найденные значения поперечной силы на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру Q_y на третьем участке (см. рис. 6).

Эпюру M_z построить несколько сложнее – зависимость квадратичная. То есть графиком является парабола. Для ее

построения необходимо несколько точек. Например, можно просчитать величины M_Z через каждые 0,5 м ($x = 3$ м, $x = 3,5$ м и т.д. до $x = 10$ м). Однако точный вид параболы при построении эпюры неважен, поэтому рассмотрим приближенный способ построения эпюры.



Известно, что ветви параболы смотрят вверх, если коэффициент при x^2 положительный, и вниз, если коэффициент отрицательный. В нашем примере ветви параболы смотрят вниз. Следовательно,

параболу необходимо нарисовать выпуклостью вверх. К данному выводу можно прийти другим путем. Изгиб эпюры момента и направление распределенной нагрузки q связаны «правилом зонтика» (см. рисунок) (распределенная нагрузка – дождь, а эпюра момента – зонтик). Найдем величину M_Z на границах третьего участка.

$$\text{При } x = 3 \text{ м } M_Z = 8 \cdot 3 - 17 - 3 \frac{(3-3)^2}{2} = 7 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } x = 10 \text{ м } M_Z = 8 \cdot 10 - 17 - 3 \frac{(10-3)^2}{2} = -10,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, парабола проходит через две найденные точки и должна быть нарисована выпуклостью вверх. Однако ее можно нарисовать плавно убывающей от значения 7 кН·м до –10,5 кН·м, или сначала парабола возрастает до максимума и лишь затем убывает. Иными словами, необходимо определить, имеется ли на эпюре момента экстремум (минимум или максимум) или эпюра монотонно убывает (возрастает). Для этого надо вспомнить математический анализ – исследование функций на экстремум. Экстремум функции достигается в тех точках, где первая производная обращается в нуль.

То есть необходимо найти производную $\frac{dM_Z}{dx}$ и проверить, обращается ли она в нуль, при каком-либо x в пределах третьего участка $3 \text{ м} \leq x \leq 10 \text{ м}$. Задача упрощается, если вспомнить известные дифференциальные зависимости при изгибе

$$\frac{dQ_y}{dx} = q, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y.$$

Таким образом, максимум (или минимум) на эпюре момента будет в том сечении, где поперечная сила равна нулю. Если поперечная сила не равна нулю ни в одном из сечений рассматриваемого участка, то эпюра момента монотонно возрастает (или убывает). В рассматриваемой задаче максимум момента достигается при $x = x^*$ (см. рис. 6). Величину x^* можно найти из следующего условия: при $x = x^*$, $Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = q(x^* - 3) - F = 0$ или $x^* = \frac{F}{q} + 3 = 5,67 \text{ м}$. Величина максимального момента

$M_{Z \max} = F \cdot x^* - M - q \frac{(x^* - 3)^2}{2} = 17,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Построенную эпюру M_z на третьем участке смотри на рис. 6.

Из построенных эпюр можно найти неизвестные реакции жесткой заделки. Очевидно, $R = 13 \text{ кН}$ и направлена вверх, $M = 10,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и направлен против часовой стрелки.

В заключение отметим некоторые особенности построения эпюр внутренних силовых факторов при изгибе.

Эпюра Q_y (поперечной силы) на участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, меняется по линейному закону, возрастает, если $q > 0$ (направлена вверх) и убывает, если $q < 0$. На участках, где нет распределенной нагрузки, Q_y постоянна. В сечениях, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q_y имеется скачок на величину и в направлении данной силы.

Эпюра M_z (изгибающего момента) на участках, где $Q_y = 0$, имеет постоянное значение. На участках, где $Q_y \neq 0$ и $Q_y = \text{const}$, эпюра M_z меняется по линейному закону, возрастает, если $Q_y > 0$, и убывает, если $Q_y < 0$. На участках, где Q_y меняется по линейному закону, эпюра M_z имеет вид параболы. Причем, если на данном участке в каком-либо сечении $Q_y = 0$, то в этом сечении парабола имеет экстремум (минимум либо максимум). Если на данном участке ни в одном из сечений Q_y не равна нулю, то эпюра момента

монотонно возрастает, если $Q_y > 0$ (или убывает если $Q_y < 0$). В сечениях, где приложен сосредоточенный момент на эпюре M_Z , имеется скачок на величину и в направлении данного момента.

2. Определим необходимые размеры поперечного сечения балки из расчёта на прочность.

Условие прочности при изгибе балок из пластичных материалов записывается в виде $\sigma_{\max} = \frac{|M_Z|_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma], \Rightarrow W_Z \geq \frac{|M_Z|_{\max}}{[\sigma]}$.

а) *Поперечное сечение балки в виде прямоугольника ($h=2b$)*

Для прямоугольника $W_Z = \frac{b \cdot h^2}{6}$ или с учетом того, что $h=2b$, $W_Z = \frac{2}{3}b^3$.

Таким образом,

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot |M_Z|_{\max}}{2 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 17,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0550 \text{ м} = 55 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $h = 110$ мм, $b = 55$ мм.

б) *Поперечное сечение балки в виде двутавра*

Все параметры двутавров гостированы, поэтому необходимо просто подобрать сечение с требуемым моментом сопротивления.

$$W_Z \geq \frac{|M_Z|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{17,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,111 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 111 \text{ см}^3.$$

В соответствии с ГОСТ 8239–72 выбираем двутавр № 18, у которого $W_Z = 143 \text{ см}^3$ (см. приложение).

3. Сравним данные варианты по расходу материала.

При равной длине расход материала пропорционален площади поперечного сечения балки. В случае поперечного сечения в виде прямоугольника площадь равна $A = h \cdot b = 6050 \text{ мм}^2 = 60,5 \text{ см}^2$. Площадь поперечного сечения двутавра № 18 $A = 23,4 \text{ см}^2$, (см. названный ГОСТ). Таким образом, при использовании двутавра расход материала \approx в 2,59 раза ниже.

Задание 4. Расчет двухопорной балки на прочность

Для заданной стальной двухопорной балки (рис. 7) определить реакции опор, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать из условия прочности размеры поперечного сечения. Рассмотреть два варианта: а) поперечное сечение в виде прямоугольника, высота прямоугольника вдвое больше его ширины ($h=2b$); б) поперечное сечение в виде круга диаметром d . Сравнить варианты по расходу материала. В расчетах принять $[\sigma] = 150$ МПа. Данные для своего варианта взять из табл. 4.

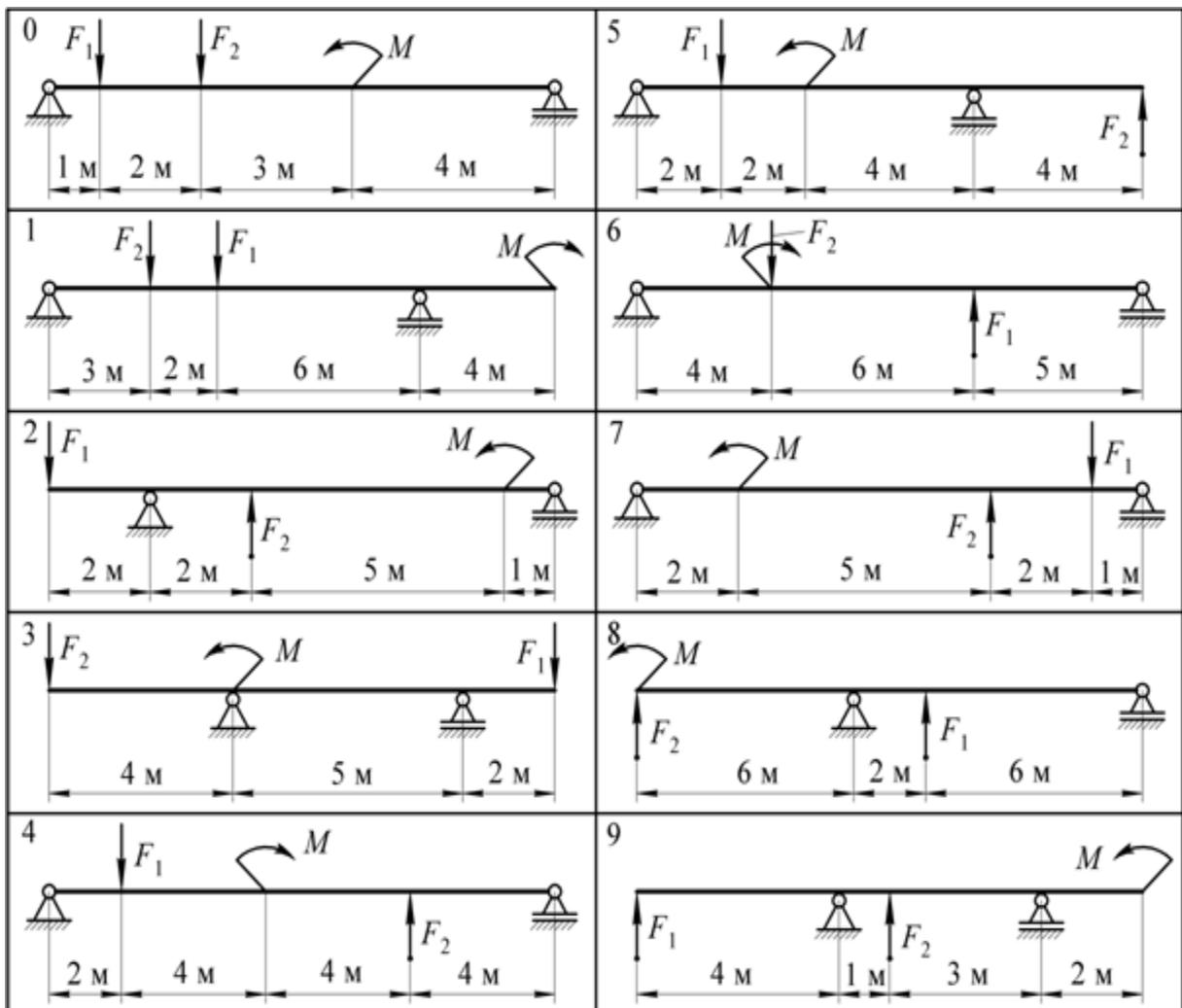


Рис. 7

Пример выполнения задания 4

Исходные данные: схема балки (см. рис. 8, а), численное значение приложенной нагрузки $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 16$ кН, $M = 12$ кН·м, $[\sigma] = 150$ МПа.

Таблица 4

Вариант	F_1	F_2	M	Вариант	F_1	F_2	M
	кН	кН	кН·м		кН	кН	кН·м
0	20	10	12	5	12	20	40
1	12	8	20	6	8	16	15
2	10	20	15	7	15	4	8
3	8	12	10	8	40	20	30
4	16	8	25	9	30	20	18

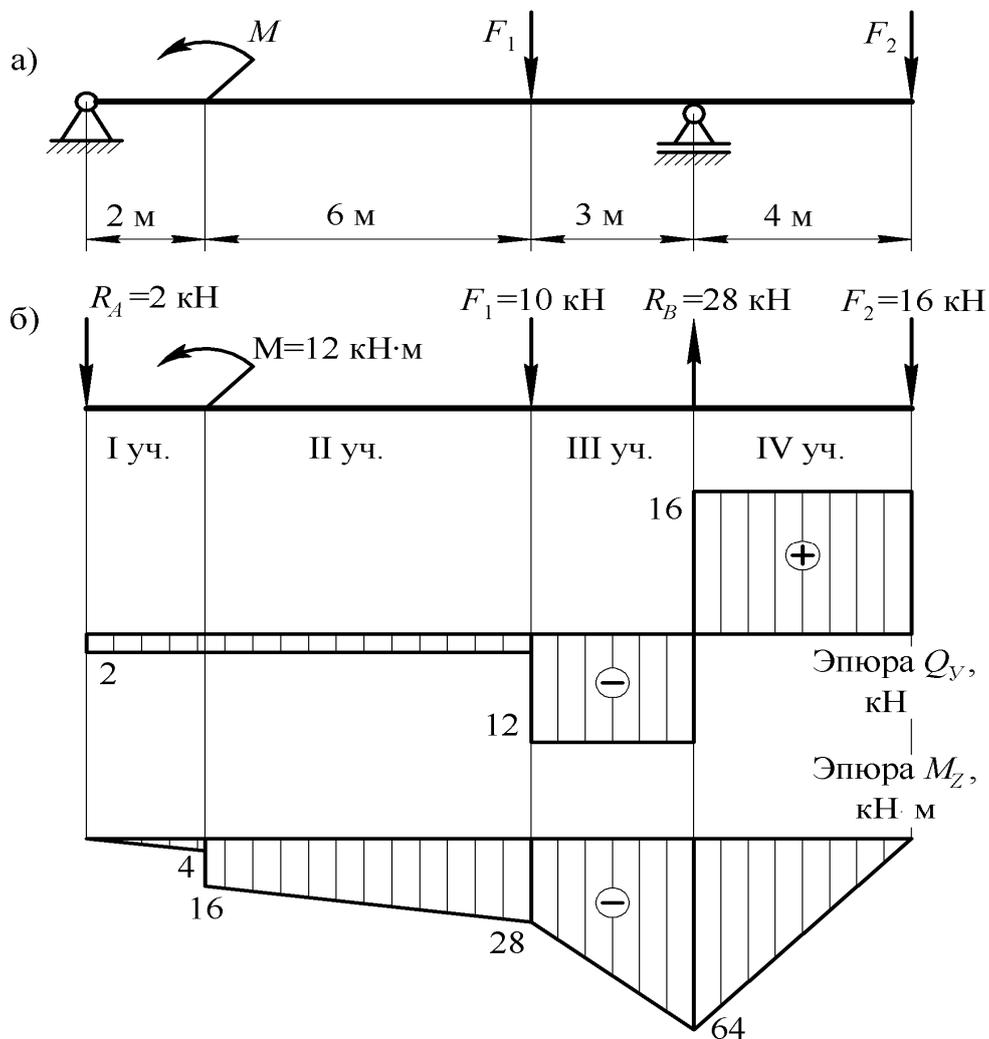
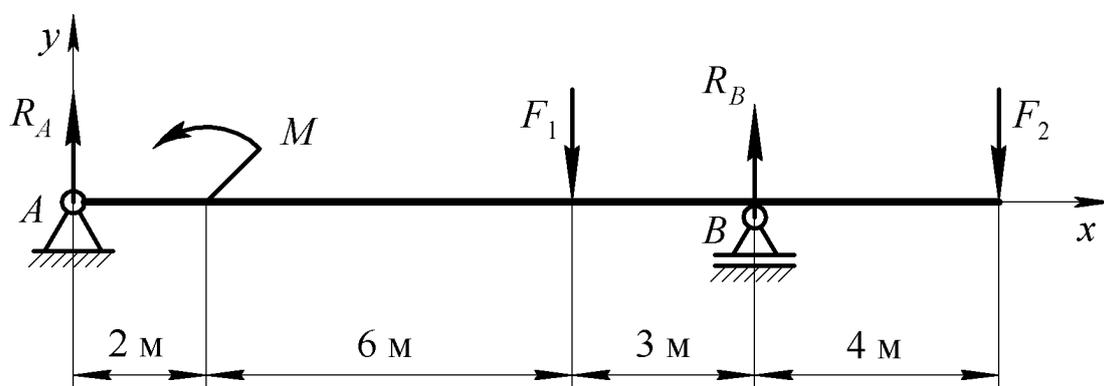


Рис. 8

Решение: В предыдущей задаче реакции жесткой заделки можно было не определять, так как при построении эпюр рассматривались правые части балки, а реакции заделки приложены к левой. В данной задаче реакция опоры A приложена к левой части балки, а реакция опоры B – к правой. При построении эпюр реакции опор необходимо знать независимо от того, какая часть балки рассматривается, левая или правая. Поэтому необходим «подготовительный этап» – определение реакций опор.

1. Определим реакции опор. В качестве объекта равновесия рассмотрим всю балку (см. рисунок). Запишем уравнения равновесия.



$$\sum m_A(\bar{F}) = 0; \quad M - F_1 \cdot 8 + R_B \cdot 11 - F_2 \cdot 15 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{11}(F_1 \cdot 8 + F_2 \cdot 15 - M) = 28 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B(\bar{F}) = 0; \quad M - R_A \cdot 11 + F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{1}{11}(M + F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4) = -2 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - F_1 - F_2 = 0; \Rightarrow \quad -2 + 28 - 10 - 16 = 0;$
 $0 \equiv 0.$

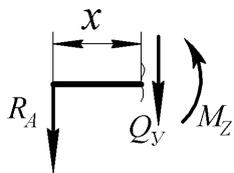
Реакции опор найдены верно.

2. Построим эпюры. Нарисуем расчетную схему балки (см. рис. 8, б). На расчетной схеме необходимо указать действующую нагрузку и найденные реакции связей (с указанием численных значений). Так как реакция R_A оказалась отрицательной, на расчетной схеме изменим ее направление на противоположное. **На расчетной схеме балки показываем истинные направления реакций. Величина**

реакции при этом всегда положительна. Разобьём балку на участки (см. рис. 8, б). Границами участков являются сечения, в которых приложена внешняя нагрузка. С помощью метода сечений найдем величину поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_Z на каждом участке.

Участок I

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах первого участка на расстоянии x от левого края балки $0 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}$. Рассмотрим равновесие левой части балки.



$$Q_y = \sum F_y^{\text{внеш}} = -R_A = -2 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = -R_A \cdot x.$$

Величина Q_y на первом участке постоянна. Отложив -2 кН , построим эпюру Q_y на первом участке (см. рис. 8). Величина изгибающего момента M_Z переменна. Зависимость линейная. Найдем величину M_Z на границах первого участка.

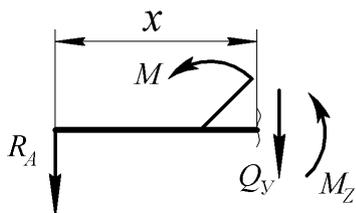
При $x = 0 \text{ м}$ $M_Z = 0$, при $x = 2 \text{ м}$ $M_Z = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на первом участке (см. рис. 8).

Участок II

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах второго участка на расстоянии x от левого края балки.

Очевидно, должно выполняться условие $2 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м}$. Иначе сечение окажется за пределами второго участка. Рассмотрим равновесие левой части балки.



$$Q_y = \sum F_y^{\text{внеш}} = -R_A = -2 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = -R_A \cdot x - M.$$

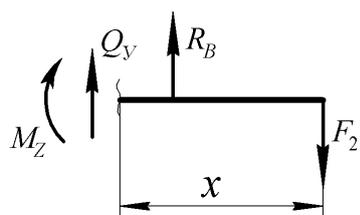
Величина Q_y на втором участке также постоянна. Поэтому эпюра Q_y на втором участке строится как продолжение эпюры первого участка (см. рис. 8). Величина изгибающего момента M_Z на втором участке переменна. Зависимость линейная. Для построения эпюры найдем величину M_Z на границах второго участка.

При $x = 2 \text{ м}$ $M_Z = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}$, при $x = 8 \text{ м}$ $M_Z = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на втором участке (см. рис. 8).

Участок III

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах третьего участка. В данном случае удобнее рассмотреть равновесие правой части балки. Сечение проведем на расстоянии x от правого края балки. Должно выполняться условие $4 \text{ м} \leq x \leq 7 \text{ м}$.



$$Q_y = \sum F_y^{\text{внеш}} = -R_B + F_2 = -12 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = R_B(x - 4) - F_2 \cdot x.$$

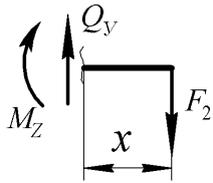
Эпюра Q_y на третьем участке постоянна и равна -12 кН (см. рис. 8). Величина изгибающего момента M_Z на третьем участке переменна. Зависимость линейная. Для построения эпюры найдем величину M_Z на границах третьего участка.

При $x = 4 \text{ м}$ $M_Z = -64 \text{ кН} \cdot \text{м}$, при $x = 7 \text{ м}$ $M_Z = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на третьем участке (см. рис. 8).

Участок IV

Рассекаем балку на две части так, чтобы сечение находилось в пределах четвертого участка. Рассмотрим равновесие правой части балки. Сечение проведем на расстоянии x от правого края балки $0 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$.



$$Q_Y = \sum F_Y^{\text{внеш}} = F_2 = 16 \text{ кН},$$

$$M_Z = \sum m_Z(\bar{F}^{\text{внеш}}) = -F_2 \cdot x.$$

Эпюра Q_Y на четвертом участке постоянна и равна + 16 кН (см. рис. 8). Величина изгибающего момента M_Z на четвертом участке переменна. Зависимость линейная. Для построения эпюры найдем величину M_Z на границах четвертого участка.

При $x = 0$ м $M_Z = 0$ кН·м, при $x = 4$ м $M_Z = -64$ кН·м.

Откладывая найденные значения момента на эпюре и соединяя полученные точки прямой линией, строим эпюру M_Z на четвертом участке (см. рис. 8).

3. Определим необходимые размеры поперечного сечения балки из расчёта на прочность.

Условие прочности при изгибе балок из пластичных материалов записывается в виде $\sigma_{\max} = \frac{|M_Z|_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma], \Rightarrow W_Z \geq \frac{|M_Z|_{\max}}{[\sigma]}$.

а) Поперечное сечение балки в виде прямоугольника ($h=2b$)

Для прямоугольника $W_Z = \frac{b \cdot h^2}{6}$ или с учетом того, что $h=2b$, $W_Z = \frac{2}{3}b^3$.

Таким образом,

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot |M_Z|_{\max}}{2 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 64 \cdot 10^3}{2 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,0862 \text{ м} = 86,2 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $h = 180$ мм, $b = 90$ мм.

б) Поперечное сечение балки в виде круга диаметром d

Для круга $W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$. Таким образом,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_Z|_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 64 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,1632 \text{ м} = 163,2 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $d = 165$ мм.

4. Сравним данные варианты по расходу материала.

При равной длине расход материала пропорционален площади поперечного сечения балки. В случае поперечного сечения в виде прямоугольника площадь равна $A = h \cdot b = 16200 \text{ мм}^2$. Площадь поперечного сечения круга $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 165^2}{4} = 21372 \text{ мм}^2$. Таким образом, при использовании сечения балки в виде прямоугольника расход материала $\approx 1,32$ раза ниже.

Задание 5. Расчет бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением

Для стального вала постоянного поперечного сечения с двумя зубчатыми колесами (рис. 9), передающего мощность P , кВт, при угловой скорости ω , рад/с (числовые значения этих величин для своего варианта взять из табл. 5):

1. Определить вертикальные и горизонтальные составляющие реакций опор (подшипников);
2. Построить эпюру крутящих моментов;
3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях;
4. Найти опасное сечение вала;
5. Определить из условия прочности необходимый диаметр вала.

В расчетах принять $F_{r1} = 0,4F_1$, $F_{r2} = 0,4F_2$, $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$. Расчет на прочность провести по гипотезе наибольших касательных напряжений (третья гипотеза прочности) и по гипотезе потенциальной энергии формоизменения (пятая гипотеза прочности). Сравнить полученные результаты.

Таблица 5

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P , кВт	40	30	53	25	12	28	20	10	16	35
ω , с ⁻¹	60	55	45	35	30	70	65	25	50	40
D_1 , мм	130	125	150	150	70	120	140	100	60	120
D_2 , мм	300	260	320	260	200	240	250	200	240	220
a , мм	80	60	70	80	80	80	100	90	120	100
b , мм	120	80	70	100	120	100	150	140	120	80
c , мм	60	60	70	80	80	70	100	90	80	100

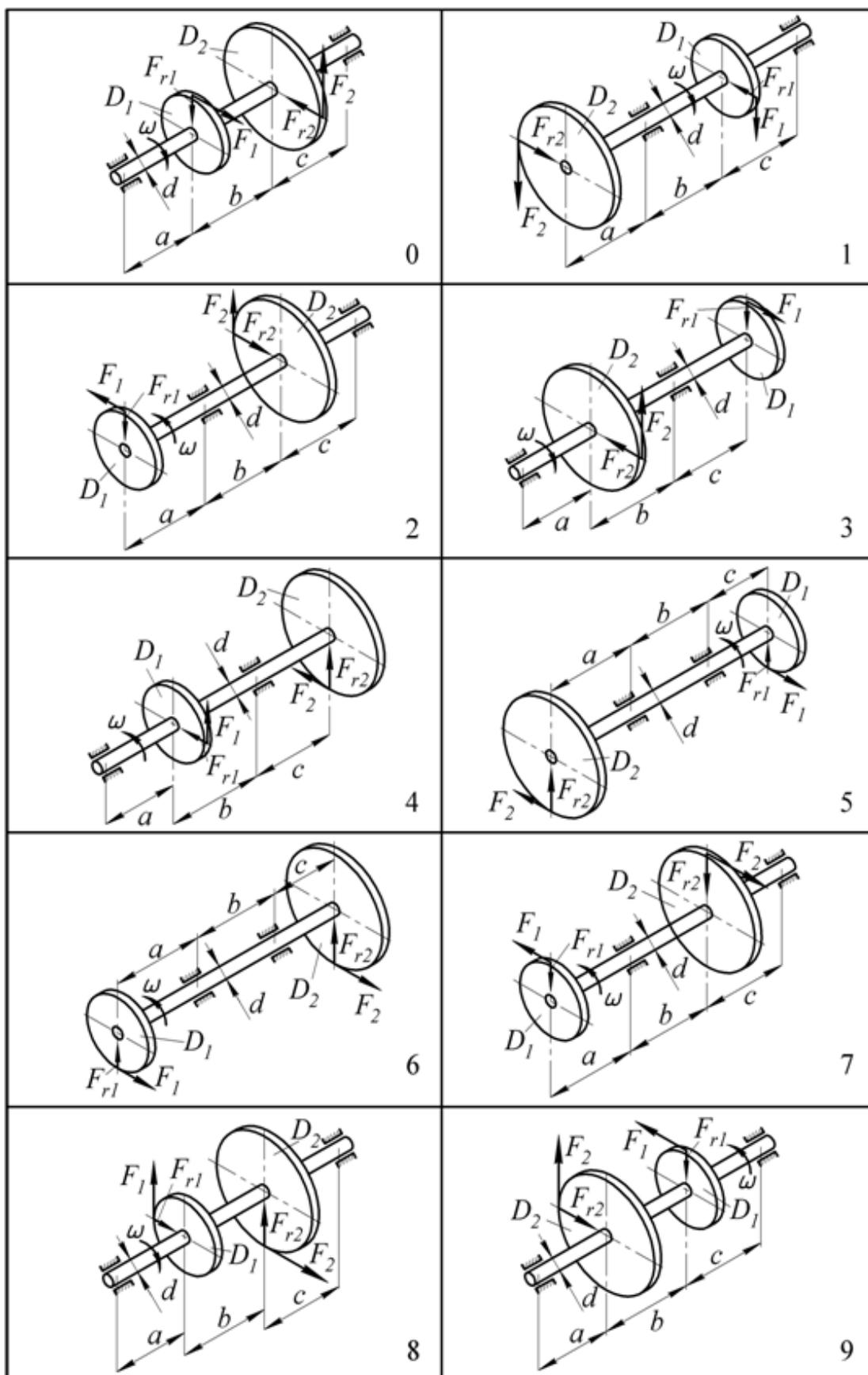


Рис. 9

Пример выполнения задания 5

Исходные данные: схема вала (рис. 10, а), передаваемая мощность $P = 6$ кВт, угловая скорость вращения вала $\omega = 48 \text{ с}^{-1}$, $F_{r1} = 0,4F_1$, $F_{r2} = 0,4F_2$, $[\sigma] = 70$ МПа, $D_1 = 125$ мм, $D_2 = 300$ мм, $a = 60$ мм, $b = 80$ мм, $c = 60$ мм.

Решение:

1. Составляем расчетную схему вала. Для этого «снимем» зубчатые колеса с вала, а действующую нагрузку приведем к оси вала (перенесем силы, приложенные к зубчатым колесам, на ось вала). При этом необходимо учесть известные из теоретической механики свойства сил. А именно:

а) сила есть вектор скользящий. Следовательно, силы F_{r1} и F_{r2} просто переносим вдоль линии действия и прикладываем к оси вала;

а) при параллельном переносе силы необходимо добавить так называемую «присоединенную» пару сил, момент которой равен моменту силы относительно новой точки приложения. Поэтому при переносе сил F_1 и F_2 на ось вала необходимо добавить пары сил, моменты которых соответственно равны $M_1 = F_1 \frac{D_1}{2}$ и $M_2 = F_2 \frac{D_2}{2}$.

Данные моменты характеризуют вращательное действие на вал со стороны зубчатых колес. При этом момент M_1 является движущим моментом, его направление совпадает с направлением вращения вала, а момент M_2 – момент сопротивления, направлен противоположно вращению вала.

Кроме действующих (активных) сил, необходимо показать реакции связей – реакции опор (подшипников A и B). Обозначим данные реакции Y_A , Z_A , Y_B , Z_B . Величина и направление реакций опор неизвестны, поэтому показываем их произвольно, например, в положительном направлении соответствующих осей. Полученная расчетная схема вала представлена на рис. 10, б.

2. Определяем вращающий момент, действующий на вал. Так как вал вращается с постоянной скоростью (в механике такое движение называют динамическим равновесием), то очевидно, движущий

момент должен уравновешиваться моментом сопротивления, то есть $M_1 = M_2$. Передаваемая валом мощность и момент связаны соотношением $P = \omega \cdot M$, откуда $M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{6000}{48} = 125 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

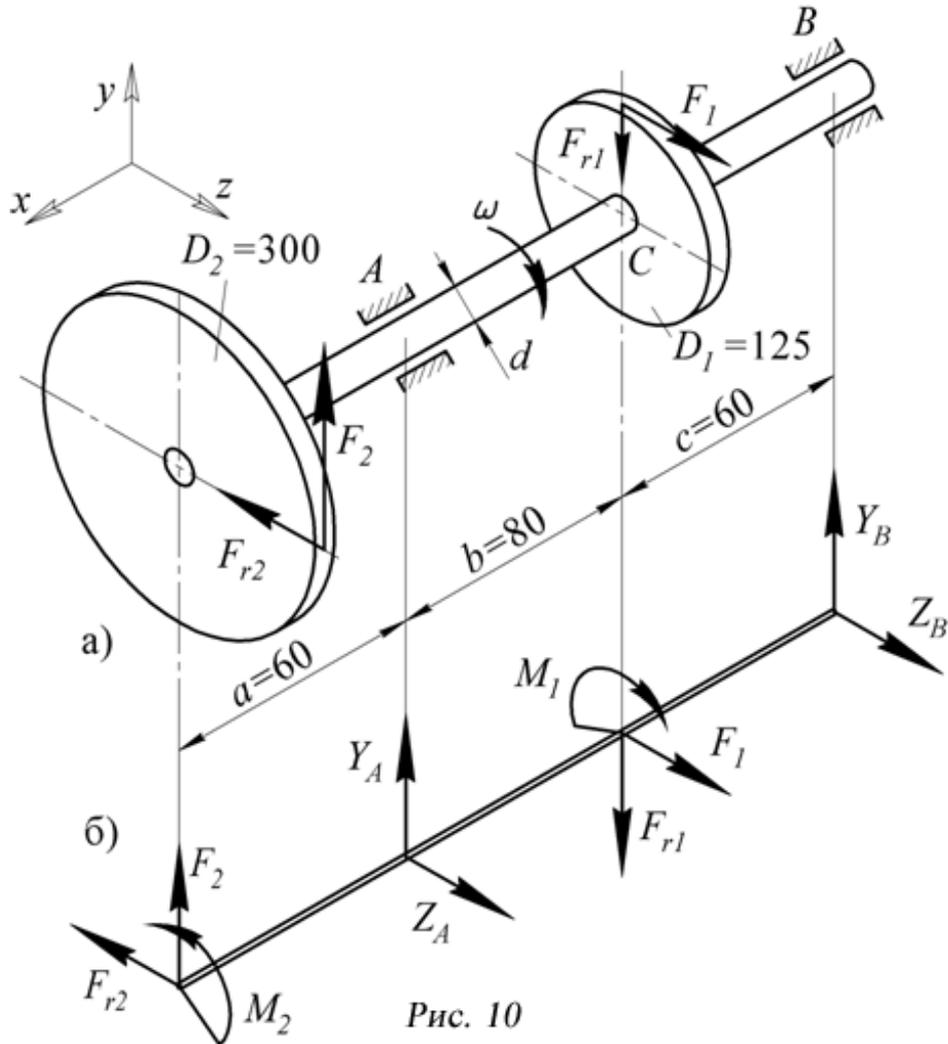


Рис. 10

3. Рассчитываем величины сил, действующих на вал

$$F_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 125}{0,125} = 2000 \text{ Н}, \quad F_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 125}{0,3} = 833 \text{ Н},$$

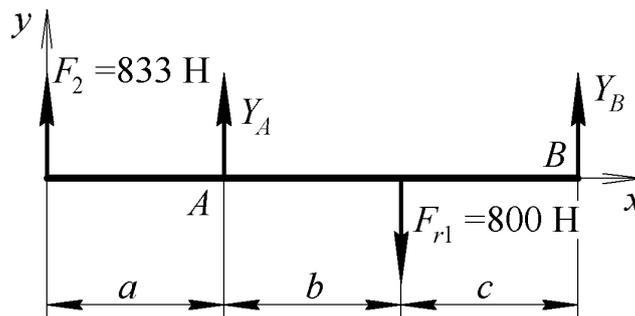
$$F_{r1} = 0,4 \cdot F_1 = 800 \text{ Н}, \quad F_{r2} = 0,4 \cdot F_2 = 333 \text{ Н}.$$

4. Определяем реакции опор. Рассмотрим равновесие вала (см. расчетную схему вала на рис. 10, б). Для определения неизвестных реакций необходимо записать уравнения равновесия – уравнения проекций сил на оси координат – и уравнения моментов сил относительно осей. Решение подобных задач подробно

рассматривалось в курсе теоретической механики. Если при решении возникают трудности, то можно порекомендовать рассмотреть отдельно силы, действующие на вал в вертикальной плоскости, и отдельно – в горизонтальной. То есть разбить пространственную задачу на две плоские. Покажем это на примере:

а) вертикальная плоскость

Нарисуем вспомогательный рисунок (дополнительно к расчетной схеме вала рис. 10, б) – вид вдоль оси z (вид сбоку).



Запишем уравнения равновесия

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0: \quad -F_2 \cdot a - F_{r1} \cdot b + Y_B(b + c) = 0.$$

$$\sum m_B(\bar{F}) = 0: \quad -F_2(a + b + c) - Y_A(b + c) + F_{r1} \cdot c = 0.$$

Из первого уравнения

$$Y_B = \frac{1}{(b + c)}(F_2 \cdot a + F_{r1} \cdot b) = \frac{1}{0,14}(833 \cdot 0,06 + 800 \cdot 0,08) = 814 \text{ Н}.$$

Из второго уравнения

$$Y_A = \frac{1}{(b + c)}(F_{r1} \cdot c - F_2(a + b + c)) = \frac{1}{0,14}(800 \cdot 0,06 - 833 \cdot 0,2) = -847 \text{ Н}.$$

Проверка

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0: \quad F_2 + Y_A - F_{r1} + Y_B &= 0, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 833 - 847 - 800 + 814 &= 1647 - 1647 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Решение верно;

б) горизонтальная плоскость

Нарисуем вид на вал вдоль оси y , вид сверху.

Запишем уравнения равновесия

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0: \quad -F_{r2} \cdot a - F_1 \cdot b - Z_B(b + c) = 0.$$

$$\sum m_B(\bar{F}) = 0: \quad -F_{r2}(a + b + c) + Z_A(b + c) + F_1 \cdot c = 0.$$

Из первого уравнения

$$Z_B = \frac{1}{(b+c)}(-F_{r2} \cdot a - F_1 \cdot b) = \frac{1}{0,14}(-333 \cdot 0,06 - 2000 \cdot 0,08) = -1286 \text{ Н.}$$

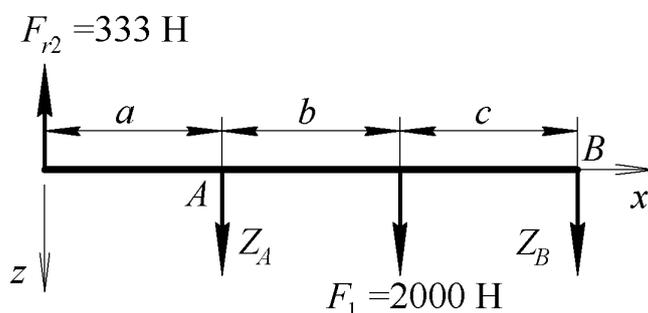
Из второго уравнения

$$Z_A = \frac{1}{(b+c)}(F_{r2}(a+b+c) - F_1 \cdot c) = \frac{1}{0,14}(333 \cdot 0,2 - 2000 \cdot 0,06) = -381 \text{ Н.}$$

Проверка

$$\begin{aligned} \sum F_Z = 0: \quad & -F_{r2} + Z_A + F_1 + Z_B = 0, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow & -333 - 381 + 2000 - 1286 = 2000 - 2000 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Решение верно.



На расчетной схеме вала необходимо указать действующую нагрузку и найденные реакции опор (с указанием численных значений). Так как реакции Z_A , Z_B , Y_A оказались отрицательными, на расчетной схеме изменим их направления на противоположные. **На расчетной схеме вала показываем истинные направления реакций. Величина реакции при этом всегда положительна.** Таким образом, окончательный вид расчетной схемы вала показан на рис. 11, (отличие от первоначального рис. 10 в том, что показаны истинные направления реакций подшипников, а также указаны численные значения всех сил и моментов).

5. Строим эпюры крутящих моментов.

Построение данной эпюры подробно рассмотрено в задании 2. Крутящий момент $M_X = \sum m_X(\bar{F}^{\text{внеш}})$. Так как момент всех действующих внешних сил относительно оси x , относительно оси вала равен нулю, то очевидно $M_X = M_1 = M_2 = 125 \text{ Н} \cdot \text{м}$, причем

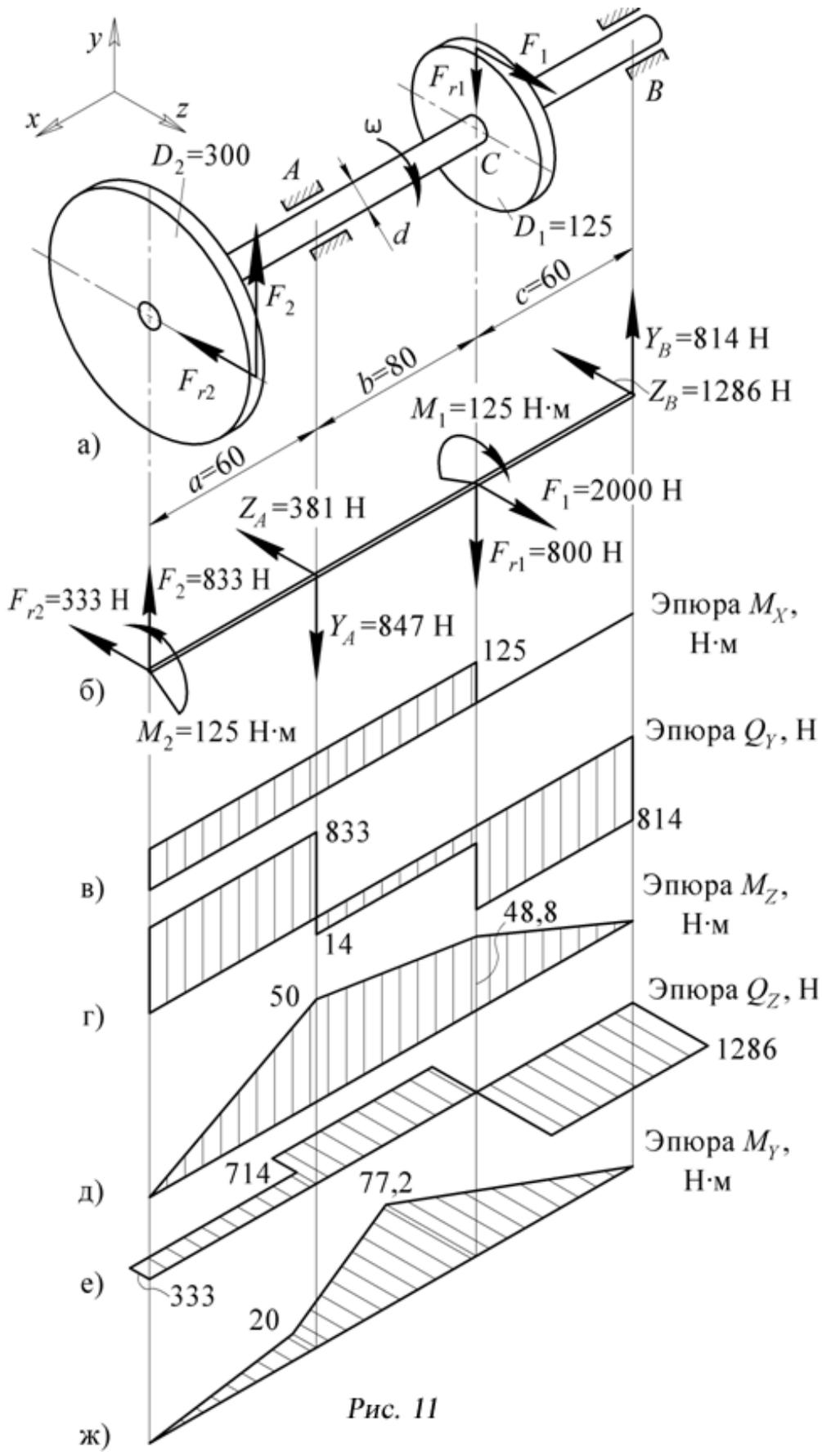


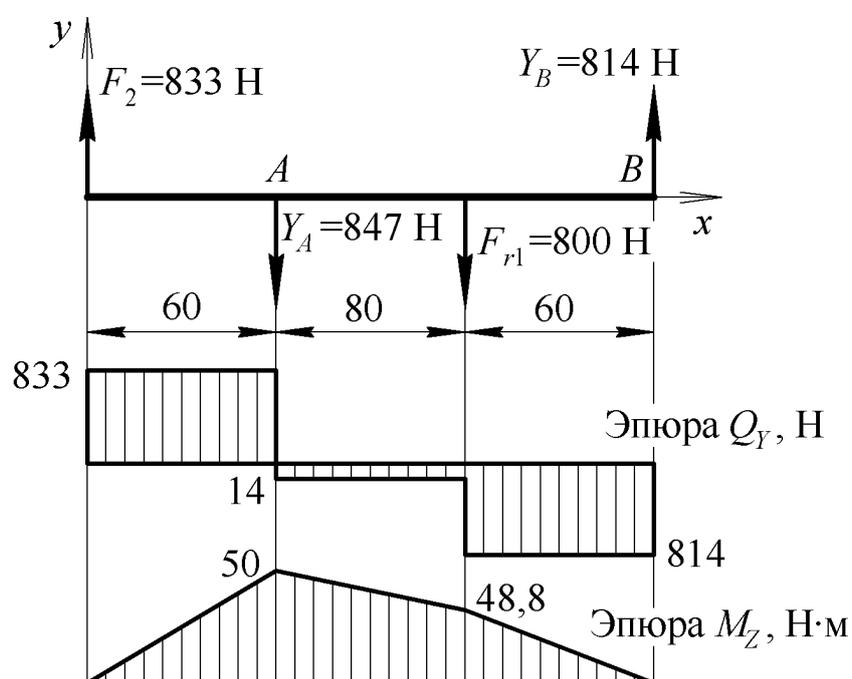
Рис. 11

возникать он будет на участке между сечениями, в которых приложены внешние моменты M_1 и M_2 (рис. 11, в).

6. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Построение данных эпюр подробно рассмотрено в заданиях 3 и 4. Следует только учесть, что в данном задании изгиб происходит в двух плоскостях – вертикальной и горизонтальной. Поэтому, как и при определении реакций связей, будет удобнее разбить пространственную задачу на две плоские. То есть построить эпюры сначала в горизонтальной плоскости, а затем – в вертикальной.

а) Вертикальная плоскость



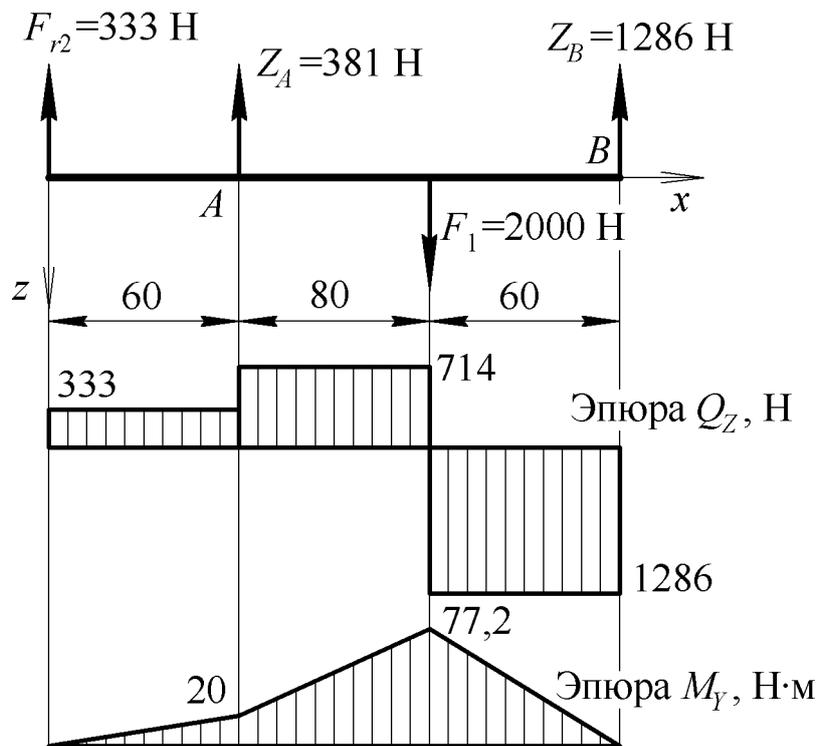
Нарисуем вспомогательный рисунок (дополнительно к расчетной схеме вала рис. 11, б) – вид вдоль оси z (вид сбоку). Не рассматривая подробно построение эпюр, покажем на рисунке их конечный вид.

б) Горизонтальная плоскость

Точно так же нарисует вспомогательный рисунок (дополнительно к расчетной схеме вала рис. 11, б) – вид вдоль оси y (вид сверху). На рисунке показан конечный вид эпюр.

Окончательно все построенные эпюры необходимо изобразить на одном рисунке (см. рис. 11). При этом необходимо учесть, что

эпюры Q_Z и M_Y должны быть расположены в горизонтальной плоскости – параллельной плоскости xz . **При оформлении работы обязательно должен быть выполнен рисунок, аналогичный рис. 11, на котором необходимо изобразить исходный рисунок, расчетную схему вала с указанием всех размеров и численных значений сил и реакций опор, а также эпюры.**



7. Определяем опасное сечение. Опасным является то сечение вала, в котором эквивалентный момент принимает максимальное значение, именно в этом сечении вала возникнут максимальные напряжения и может произойти разрушение. В зависимости от гипотезы прочности эквивалентный момент определяется по различным формулам. Так как валы изготавливают из незакаленных низколегированных сталей, то для их расчета применяют или третью, или пятую гипотезы прочности. По третьей гипотезе прочности эквивалентный момент определяется по формуле

$$M_{\text{ЭШ}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Подозрительными являются два сечения: сечение, соответствующее левому подшипнику – сечение A, а сечение,

соответствующее малому зубчатому колесу – сечение **C**. В обоих этих сечениях крутящий момент M_X одинаков и составляет 125 Н·м. Однако моменты M_Y и M_Z разные, причем M_Y больше в сечении **C**, а M_Z – в сечении **A**. В данном случае для определения опасного сечения необходимо рассчитать эквивалентный момент для каждого из подозрительных сечений.

Сечение **A**:

$$M_{\text{ЭIII}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{125^2 + 50^2 + 20^2} = 136 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Сечение **C**:

$$M_{\text{ЭIII}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{125^2 + 48,8^2 + 77,2^2} = 155 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, опасным оказалось сечение **C**.

8. Рассчитываем диаметр вала из условия прочности. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{Э}} = \frac{M_{\text{Э}}}{W_{\text{OC}}} \leq [\sigma],$$

где $W_{\text{OC}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала.

Выражая из формулы диаметр вала, получим:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{Э}}}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

Таким образом, по третьей гипотезе прочности диаметр вала должен быть

$$d_{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭIII}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 155}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,02826 \text{ м} = 28,26 \text{ мм}.$$

По пятой гипотезе прочности эквивалентный момент определяется по формуле

$$M_{\text{ЭV}} = \sqrt{0,75 \cdot M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{0,75 \cdot 125^2 + 48,8^2 + 77,2^2} = 142 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Естественно, момент определяется для опасного сечения – сечения **C**. Таким образом, по пятой гипотезе прочности диаметр вала должен быть

$$d_V \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ЭV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 142}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,02745 \text{ м} = 27,45 \text{ мм}.$$

Как видно из расчетов, третья и пятая гипотезы прочности дают практически одинаковый результат. Более точной считают пятую гипотезу.

Расчетный диаметр вала необходимо округлить до четного числа. Если в данном сечении устанавливается подшипник, то диаметр вала должен быть кратным пяти.

Окончательно принимаем диаметр вала $d = 28$ мм (можно принять $d = 30$ мм).

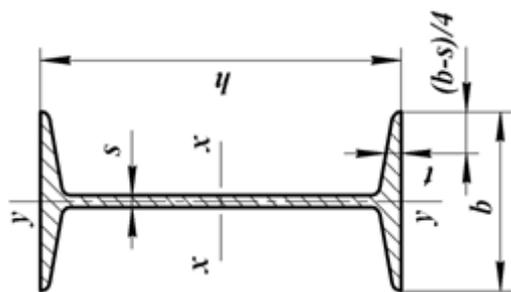
Приложение 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. Сортамент ГОСТ 8239–72 (извлечение)

Обозначения: h – высота балки; b – ширина полки; s – толщина стенки;

t – средняя толщина полки; J – момент инерции; W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения; i – радиус инерции.



Номер профиля	Размеры					Вес 1 пог. м, кг	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	R			r	x – x			y – y		
									$J_{x,4}$ см ⁴	$W_{x,3}$ см ³	$i_{x,}$ см	$S_{x,3}$ см ³	$J_{y,4}$ см ⁴	$W_{y,3}$ см ³
10	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12

20	200	100	5,2	8,4	9,5	4	21,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4	22,7	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10	4	24,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10	4	25,8	32,8	2790	254	9,22	143	209	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4	27,3	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4	29,4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11	4,5	31,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11	4,5	33,9	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12	5	36,5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12	5	39,2	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13	5	42,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14	6	48,6	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,0	13,0	15	6	56,1	71,4	18930	947	16,3	540	666	58,9	30,5
45	450	160	8,6	14,2	16	7	65,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	500	170	9,5	15,2	17	7	76,8	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	550	180	10,3	16,5	18	7	89,8	114	55150	200	22,0	1150	1350	150	3,44
60	600	190	11,1	17,8	20	8	104	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	650	200	12,0	19,2	22	9	120	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	700	210	13,0	20,8	24	10	138	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	700	210	15,0	24,0	24	10	158	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
706	700	210	17,5	28,2	24	10	184	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

Рекомендательный библиографический список

1. Иосилевич, Г. Б. Прикладная механика: учебник для студентов вузов / Г.Б. Иосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев. – М.: Машиностроение, 1985. – 576 с.
2. Иосилевич, Г. Б. Прикладная механика: учебник для вузов / Г. Б. Иосилевич, Г. Б. Строганов, Г. С. Маслов; под ред. Г. Б. Иосилевича. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.
3. Джамай, В. В. Прикладная механика : учебник для вузов / В. В. Джамай [и др.]; под ред. В. В. Джамаева. – М.: Дрофа, 2004. – 414. с. – ISBN 5-7107-6232-6.
4. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов: учебник для сред. спец. учеб. заведений / Г. М. Ицкович. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 368 с. – ISBN 5-06-004153-0.
5. Аркуша, А. И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: учебник для сред. спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 352 с. – ISBN 5-06-004313-4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Требования к оформлению работ.....	3
Задание 1. Построение эпюр при растяжении (сжатии).....	4
Задание 2. Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении.....	11
Задание 3. Расчет консольной балки на прочность.....	16
Задание 4. Расчет двухопорной балки на прочность.....	25
Задание 5. Расчет бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением.....	31
Приложение.....	42
Рекомендательный библиографический список.....	44

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

Составитель

Рязанов Андрей Алексеевич

Ответственный за выпуск - зав. кафедрой доцент В.Н. Филимонов

Подписано в печать 01.08.10.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 2,79. Тираж 300 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.