

**Министерство образования и науки РФ**  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет»

**С. А. Маврина      И. А. Черноусова**

**РУКОВОДСТВО  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ  
МЕХАНИКИ**

*Примеры расчета  
статически определимых стержневых систем*

УДК 624.04 (07)

ББК 38.112 я2

С86

Рецензент

Кандидат технических наук,

доцент кафедры «Строительные конструкции»

Т. Н. Яшкова

Руководство к решению задач строительной механики. Примеры расчета статически определимых стержневых систем: Учебное электронное издание / Владим. гос. ун-т ; сост. С.А. Маврина, И.А. Черноусова. – Владимир, 2010. – 68 с.

Содержит примеры расчета основных стержневых систем (многопролетных балок, арок, простых ферм) на неподвижную и подвижную нагрузки. Также рассмотрено практическое определение перемещений в рамах.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению «Строительство»: «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство», «Автомобильные дороги и аэродромы». Ориентировано на студентов очной, заочной и дистанционной форм обучения.

Табл. 5. Ил. 37. Библиогр.: 7 назв.

УДК 624.04 (07)

ББК 38.112 я2

С86

Представленное руководство содержит примеры *расчета статически определимых стержневых систем* на заданное силовое воздействие. Подробно рассматривается и анализируется расчет стержневых систем в виде многопролетных (разрезных балок), трехшарнирных систем на примере трехшарнирной арки, простых и сложных ферм. Для этих систем представлена методика расчета как на неподвижную, так и на подвижную нагрузки. Также рассматривается определение перемещений стержневых систем на примере статически определимых рам. Основные теоретические положения достаточно подробно представлены в курсе «Лекции по строительной механике. Часть 1. Статически определимые стержневые системы». Здесь же показано применение теоретических сведений к практическому расчету.

## 1. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ (РАЗРЕЗНЫЕ) БАЛКИ

Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо выполнить кинематический анализ: вычислить число степени свободы системы и убедиться, что оно равно нулю; выполнить структурный анализ. Далее необходимо составить схему взаимодействия простых балок между собой – поэтажную схему. Для этого мысленно удалить соединительные шарниры и выделить главные (основные) балки и второстепенные (подвесные). При оформлении работы эту схему следует расположить непосредственно под схемой заданной балки.

После построения поэтажной схемы заданную балку можно рассматривать как ряд простых балок. Особенность расчета многопролетной балки заключается в правильной передаче и учете нагрузки вышележащих балок на нижележащие. Поэтому расчет на неподвижную нагрузку (построение эпюр) начинают с вышележащих балок, последовательно переходя к нижележащим балкам.

Каждая простая балка вычерчивается для расчета отдельно, а эпюры  $M$  и  $Q$  переносятся на общие оси под поэтажной схемой. Следует обязательно показывать определение реакций опор и их проверки в каждой простой балке.

Расчет на подвижную нагрузку – это построение линий влияния. Для построения линий влияния следует начертить еще раз заданную балку, но уже без действующей нагрузки, и поэтажную схему. Обычно линии влияния строятся в два этапа. На первом этапе строится линия влияния усилия в пределах той отдельной балки (соответствующего этажа поэтажной схемы), к которой относится исследуемое сечение (или опора). На рис. 1.1 изображена балка на двух опорах с консолями и построены линии влияния реакций, а также линии влияния усилий для различных вариантов сечений. На втором этапе добавляется продолжение линии влияния, обусловленное взаимодействием отдельных балок при движении по ним единичного груза. Груз не оказывает влияния на усилия в балках, расположенных выше той, где он находится и действует через соединительные шарниры только на нижележащие балки. Если груз попадает в опору, то и воспринимается этой опорой. Он не оказывает воздействия ни на какие усилия, кроме реакции этой опоры. Таким образом, под шарнирами график линии влияния имеет перелом, а под опорами соответствующие значения линии влияния равны нулю.

Определение усилий по линиям влияния от заданной нагрузки называется загрузением линии влияния. Загружение линий влияния проводится по формуле, рассмотренной подробно в соответствующей лекции.

Сравнение результатов, полученных для различных сечений аналитически и при загрузении линий влияния удобно свести в таблицу, в которой указать полученные результаты (по эпюрам и по линиям влияния) и показать погрешность (если необходимо) сравнения полученных значений.

**Пример 1.** Для балки, показанной на рис. 1. 2, требуется:

- построить эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ ;
- построить линии влияния внутренних силовых факторов, возникающих в сечении 1, и линию влияния реакции во второй опоре;
- по построенным линиям влияния определить усилия от заданной нагрузки;
- сравнить результаты, полученные при построении эпюр, с аналогичными, полученными по линиям влияния.

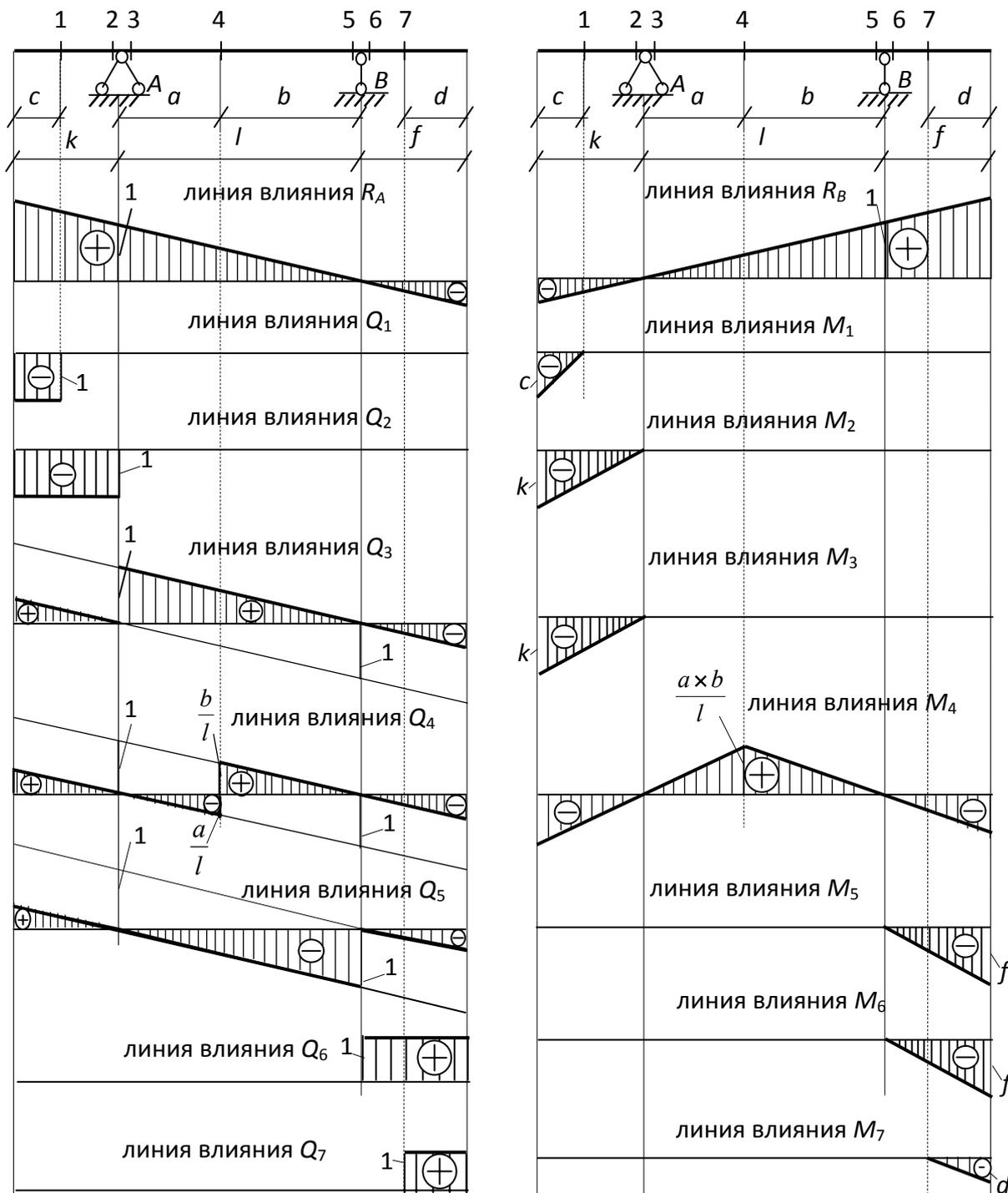


Рис. 1.1. Линии влияния в простых балках

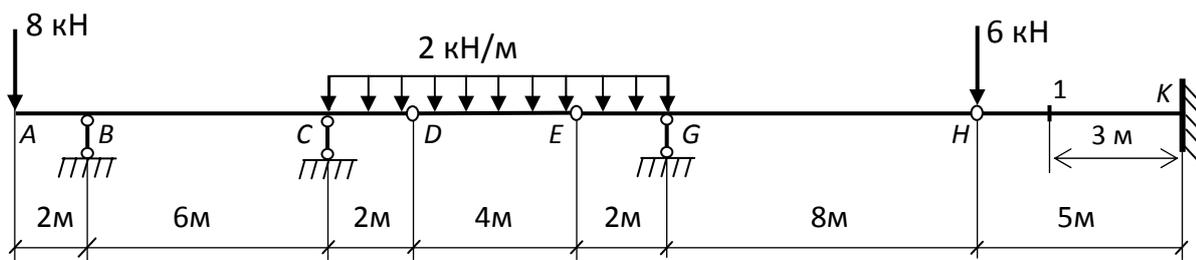


Рис. 1. 2

Выполним *кинематический анализ системы*.

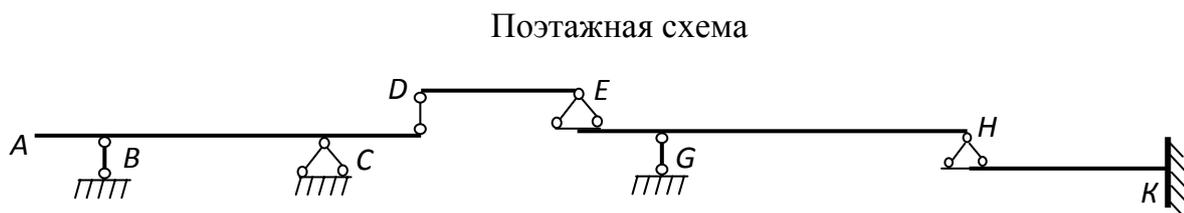
Определим число степени свободы системы:

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Проводим структурный анализ. Балка  $HK$  (диск) и диск «земля» соединены с помощью трех, не пересекающихся одновременно в одной точке стержней, следовательно, они образуют единый диск – диск I. К полученному диску I присоединяется балка  $EH$  (диск) с помощью шарнира  $H$  и опорного стержня  $G$ , не пересекающего этот шарнир: образуется единый диск II. К диску II присоединена балка  $AD$  (диск) с помощью трех, не пересекающихся одновременно в одной точке стержней (двух опорных стержней  $B$  и  $C$  и стержня  $CD$ ): образуется единый диск, представляющий всю заданную балку в целом. Так как система образована в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых систем, она сама является геометрически неизменяемой.

Построим *поэтажную схему*. Для этого мысленно сделаем разрезы по имеющимся шарнирам  $D$ ,  $E$  и  $H$ , проанализируем полученные отдельные участки вместо единой заданной балки. Балкой, имеющей три связи с землей и способной самостоятельно нести нагрузку, является балка  $HK$ . Эта балка является главной (основной). Балка  $EGH$  опирается на землю (опорой  $G$ ) и на балку  $HK$  в соединительном шарнире  $H$ . При построении поэтажной схемы этот шарнир принято заменять шарнирно неподвижной опорой. Очевидно, балка  $DE$  не опирается на землю. Справа она опирается в шарнире  $E$  на балку  $EGH$ , здесь показываем шарнирно неподвижную опору. Слева, очевидно, она должна опираться на нижележащую балку

$ABCD$ . Балка  $ABCD$  является условно основной, т. к. ей не хватает горизонтального опорного стержня. Заметим, что при замене шарниров  $D$  и  $E$  шарнирно неподвижными опорами одна горизонтальная связь избыточна. По условию горизонтальной связью для балки  $ABCD$  служит стержень  $DE$ . С учетом этого при построении поэтажной схемы шарнирно неподвижную опору в шарнире  $D$  заменяем на шарнирно подвижную, а горизонтальный опорный стержень переносим в опору  $C$ , где вместо подвижной опоры покажем неподвижную. Окончательно, балка  $DE$  опирается в шарнире  $D$  на балку  $ABCD$ . Таким образом, имеем две основных балки и две подвесных.



Строим *эпюры поперечной силы и изгибающего момента* для каждого отдельного участка поэтажной схемы. Начнем построение эпюр с верхней балки  $DE$ . Ее мы будем рассчитывать только на собственную нагрузку. Далее в любом порядке можно рассматривать или балку  $ABCD$  или балку  $EGH$  как нижележащие балки. Строить эпюры на балке  $HK$  можно только после расчета балки  $EGH$ . Нижележащие балки рассчитываем на собственную нагрузку и реакцию (или реакции), перенесенную с вышележащей балки в виде силы, равной по величине этой реакции, но противоположно направленной.

#### *Расчет балки $DE$ .*

Определим реакции опор. За счет симметрии этой балки реакции опор будут равны между собой:  $R_D = R_E = ql/2 = 2 \cdot 4/2 = 4$  кН. Построение

эпюр проводим методом сечений. В данном руководстве подробно не будем рассматривать построение эпюр внутренних силовых факторов, считая это прерогативой дисциплины «Сопротивление материалов». Полученные эпюры поперечной силы и изгибающего момента показаны на рис 1.3.

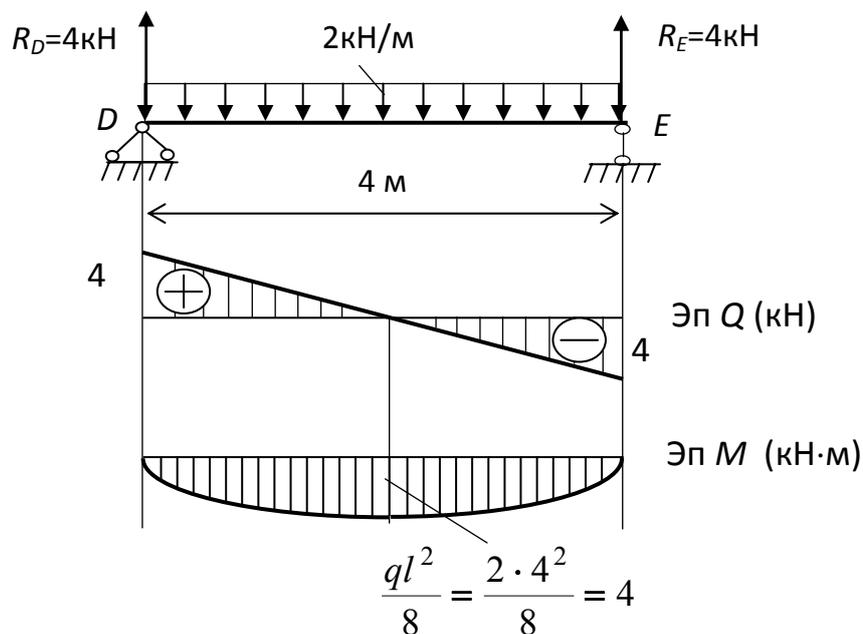


Рис. 1.3

### Расчет балки ABCD.

На эту балку действует собственная нагрузка и сила взаимодействия между балками *DE* и *ABCD*. Эта сила равна найденной ранее реакции  $R_D$  балки *DE*, но направлена в противоположную первоначальному направлению сторону. Таким образом, на балку *ABCD* в точке *D* вниз действует сила равная 4 кН.

Определим реакции опор балки *ABCD*:

$$\sum M_B = 0, \quad 8 \cdot 2 + R_C \cdot 6 - 2 \cdot 2 \cdot 7 - 4 \cdot 8 = 0, \quad R_C = 7,33 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0, \quad 8 \cdot 8 - R_B \cdot 6 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0, \quad R_C = 8,67 \text{ кН.}$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum y = 0, \quad -8 + 8,67 + 7,33 - 2 \cdot 2 - 4 = 0 - \text{проверка выполняется.}$$

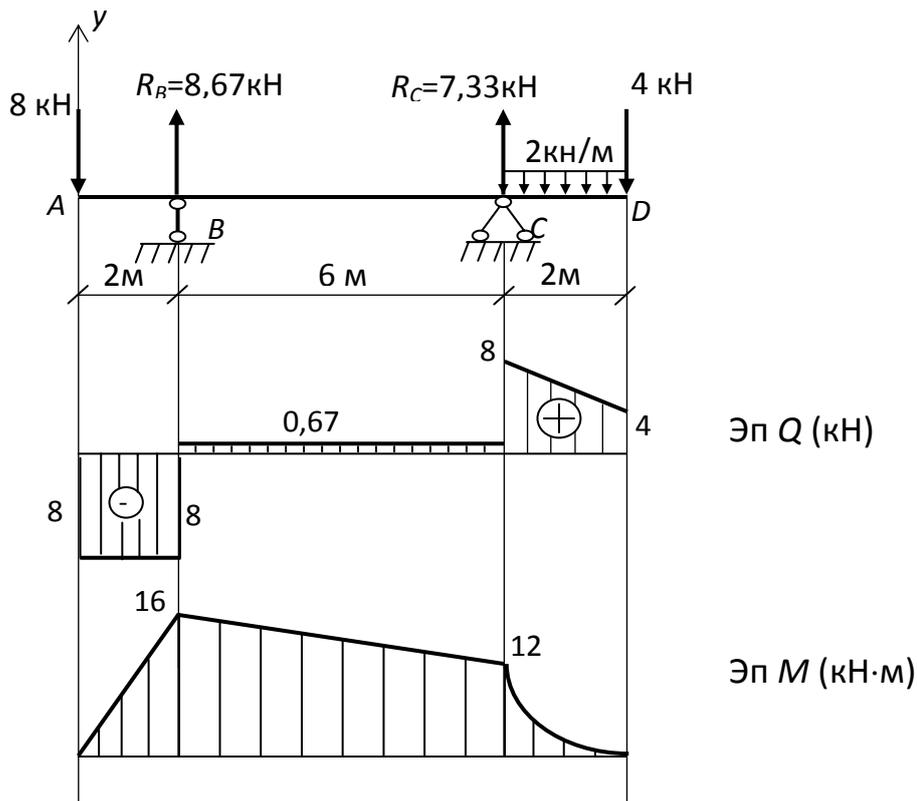


Рис. 1.4

### Расчет балки EGH.

На эту балку, кроме собственной нагрузки, действует в точке  $E$  сила, равная реакции  $R_E$  балки  $DE$  и направленная в противоположную первоначальному направлению сторону. Эта сила равна 4 кН.

Определим реакции опор:

$$\sum M_G = 0, \quad 4 \cdot 2 + R_H \cdot 8 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 8 = 0, \quad R_H = 4,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_H = 0, \quad 4 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 9 - R_G \cdot 8 = 0, \quad R_C = 9,5 \text{ кН.}$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum y = 0, \quad -4 + 9,5 + 4,5 - 2 \cdot 2 - 6 = 0 \text{ — проверка выполняется.}$$

Полученные эпюры показаны на рис. 1.5.

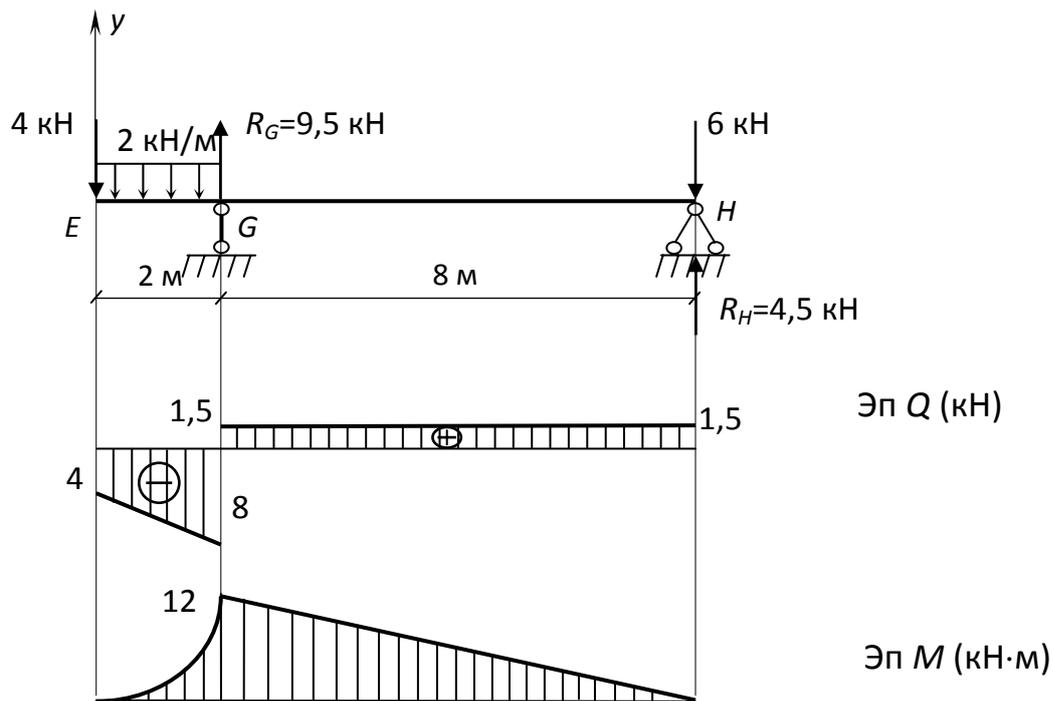


Рис. 1.5

### Расчет балки НК.

На эту балку в точке Н действует сила, равная по величине реакции, но направленная в противоположную первоначальному направлению сторону. Величина этой силы равна 4,5 кН.

Определим реакции опор:

$$\sum y = 0, -4,5 + R_K = 0, R_K = 4,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_K = 0, -M_K + 4,5 \cdot 5 = 0, M_K = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Полученные эпюры показаны на рис. 1.6.

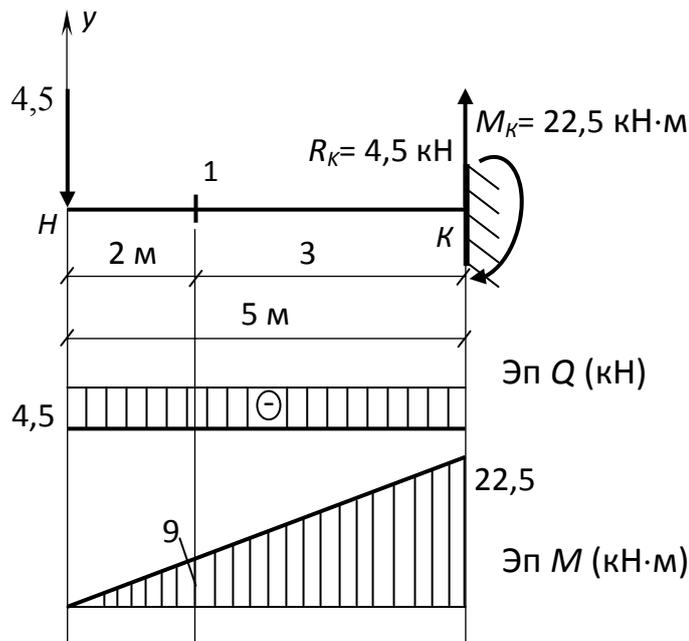


Рис. 1.6

Перенесем все полученные эпюры  $Q$  и  $M$  простых балок на общие оси, получим эпюры внутренних силовых факторов для заданной многопролетной разрезной балки (рис. 1.7). Обратим внимание: должна соблюдаться в полной мере дифференциальная зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой для многопролетной балки. В имеющихся шарнирах  $D$ ,  $E$ ,  $H$  значения изгибающего момента должно быть равно нулю.

Для построения линий влияния начертим балку без нагрузки и поэтажную схему. Нагрузку покажем на отдельной оси выше заданной балки, она нам понадобится при определении усилий по линиям влияния (см. далее рис. 4.)

Построим линию влияния опорной реакции, например, линию влияния  $R_C$  (л.в.  $R_C$ ). Начнем построение с балки  $ABCD$ . Воспользуемся графиками линий влияния, приведенными на рис. 1.1. Эта часть линии влияния реакции  $R_C$  показана на рис. 1.8 отрезком  $A'-D'$ . При движении груза  $F = 1$  по балке  $DE$  она своей реакцией в точке  $D$  передает нагрузку на балку

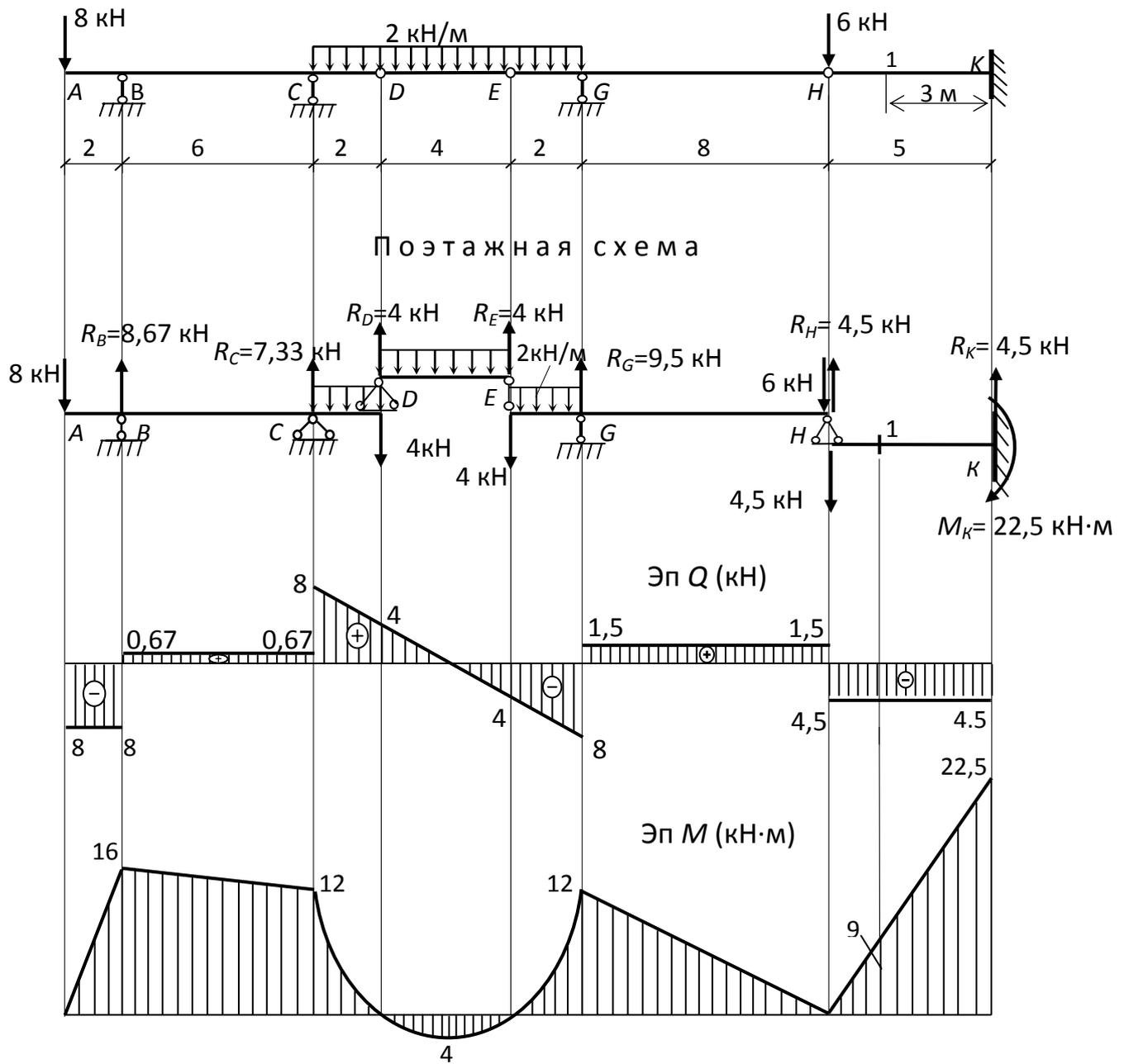


Рис. 1.7

$ABCD$ . Тогда все усилия в балке  $ABCD$ , в том числе и  $R_C$ , будут зависеть от реакции  $R_D$ . Следовательно, линия влияния  $R_C$  повторит линию влияния  $R_D$  балки  $DE$  с некоторым коэффициентом пропорциональности. Величина этого коэффициента должна быть такова, чтобы совместить линию влияния  $R_C$  балки  $ABCD$  и линию влияния  $R_D$  балки  $DE$  в точке  $D'$ . Когда груз  $F = 1$  движется по балкам  $EGH$  и  $HK$  нагрузка на главную балку  $ABCD$  не передается и, следовательно, на этих участках линия влияния  $R_C$  будет равна нулю. Окончательно л.в.  $R_C$  показана на рис. 1.8.

Построим *линию влияния поперечной силы в сечении 1* (л.в.  $Q_1$ ). Начинаем с балки  $HK$ , которой принадлежит это сечение. Балка  $HK$  – левая консоль. На рис. 1 этот случай соответствует сечению 1. Эта часть линии влияния  $Q_1$  на рис. 4 показана отрезком  $H' - 1'$ . При движении груза  $F = 1$  по балке  $EGH$  нагрузка на балку  $HK$  передается посредством опорной реакции  $R_H$  балки  $EGH$ . Следовательно, поперечная сила в сечении 1 будет зависеть от величины этой реакции, т.е. линия влияния  $Q_1$  повторит линию влияния  $R_H$  балки  $EGH$  с некоторым коэффициентом пропорциональности. Величина этого коэффициента такова, что линия влияния  $Q_1$  балки  $HK$  и линия влияния  $R_H$  балки  $EGH$  совместятся в точке  $H'$ . При движении груза  $F = 1$  по балке  $DE$  на балку  $EGH$  будет передаваться опорная реакция  $R_E$  балки  $DE$ , т.е. от ее значения будут зависеть все усилия в балке  $EGH$ , в том числе и реакция  $R_H$ . Тогда линия влияния  $R_H$  балки  $EGH$  повторит линию влияния  $R_E$  балки  $DE$  с некоторым коэффициентом пропорциональности. Этот коэффициент совместит в точке  $E'$  линию влияния  $R_H$  балки  $EGH$ . Величина поперечной силы в сечении 1 зависит от реакции  $R_H$  балки  $EGH$ . Рассуждая подобным образом, построим линию влияния  $Q_1$ , которая показана на рис. 1.8 (л.в.  $Q_1$ ).

Аналогично построим *линию влияния изгибающего момента в сечении 1* (л.в.  $M_1$ ), которая также показана на рис. 1.8.

Эти подробные рассуждения объясняют построение линии влияния, но в дальнейшем будем все рассуждения представлять в уме, а фактическое построение будем проводить на соответствующих аналитических выражениях следующим образом.

*Построение л.в.  $R_C$ .*

1) Определим, какой балке в поэтажной схеме принадлежит сечение  $C$ . В нашем примере оно принадлежит шарнирной балке  $ABCD$ . Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния опорной реакции *шарнирной балки*: откладываем значение «единица» на базисной линии под сечением, соответствующем опоре  $C$ , соединяем с нулевым значением под другой опорой балки; на имеющийся консольный участок слева линию влияния продолжаем.

2) Учитываем подвесную балку  $DE$ . Полученную ранее ординату под сечением  $D$  соединяем с нулевым значением под другой опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $E$ . Линия влияния построена.

*Построение л.в.  $Q_1$ .*

1) Определим, какой балке принадлежит сечение  $I$ . Оно принадлежит консольной балке, закрепленной правым концом. Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния поперечной силы в такой балке: откладываем постоянное отрицательное значение «единица» на базисной линии на участке от рассматриваемого сечения до свободного конца балки.

2) Учитываем подвесные балки: в данном случае это две балки слева: балка  $EGH$  и балка  $DE$ . Учитываем балку  $EGH$ : полученную ранее единичную ординату под сечением  $H$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой  $G$  подвесной балки; на имеющуюся консоль  $EG$  построенную ранее линию влияния продолжаем (до сечения  $E$ ). Аналогично учитываем балку  $DE$ . Полученную ординату линии влияния под сечением  $E$  соединяем с нулевым значением под другой опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $D$ . Линия влияния построена.

*Построение л.в.  $M_1$ .*

1) Сечение  $I$  принадлежит консольной балке, закрепленной правым концом; расположено на расстоянии «2» от свободной точки консоли. Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния изгибающего момента в такой балке: откладываем отрицательное значение «два» на базисной линии под свободной точкой консоли (под сечением  $H$ ) и соединяем с нулевым значением под сечением  $I$ . Получили

линию влияния на участке от рассматриваемого сечения до свободного конца балки.

2) Учитываем подвесные балки: в данном случае это две балки слева: балка  $EGH$  и балка  $DE$ . Учитываем балку  $EGH$ : полученную ранее ординату под сечением  $H$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой  $G$  подвесной балки; на имеющуюся консоль  $EG$  построенную линию влияния продолжаем (до сечения  $E$ ). Аналогично учитываем балку  $DE$ . Полученную ординату линии влияния под сечением  $E$  соединяем с нулевым значением под другой опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $D$ . Линия влияния построена.

Ординаты на границах участков линий влияния вычислим из подобия треугольников.

Определим усилия от заданной нагрузки по линиям влияния.

$$R_c = 8 \cdot (-0,333) + 2 \cdot \left( \frac{1 + 1,333}{2} \cdot 2 + \frac{1,333 \cdot 4}{2} \right) = 7,334 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = 6 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{0,25 \cdot 6}{2} = -4,5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = 6 \cdot (-2) + 2 \cdot \frac{0,5 \cdot 6}{2} = -9 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Полученные результаты покажем в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Усилие,	$R_c$ , кН	$Q_1$ , кН	$M_1$ , кН · м
найденное при построении эпюр	7,33	-4,5	-9
найденное по линии влияния	7,334	-4,5	-9
расхождение результатов в %	0,05%	0	0

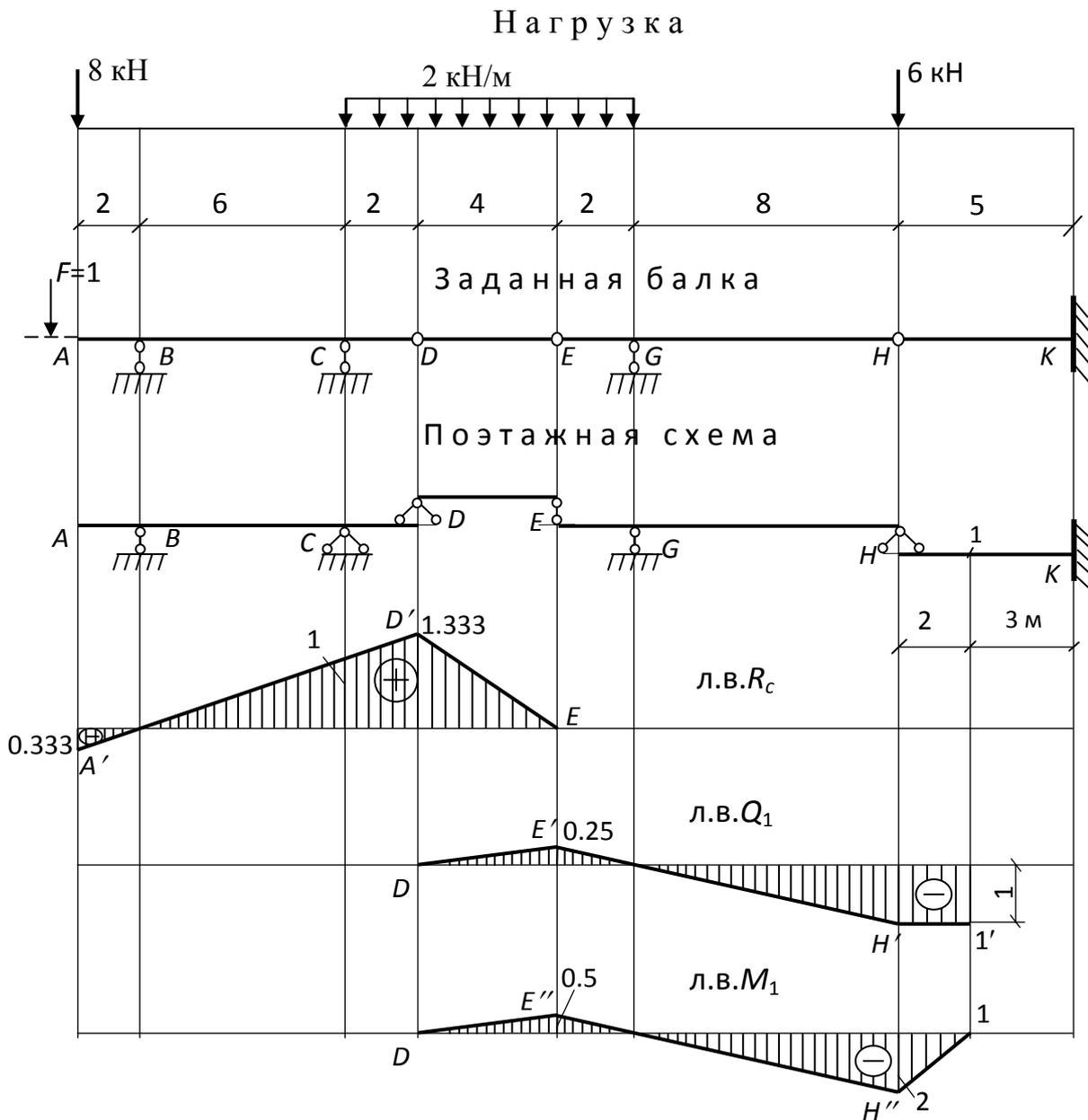


Рис. 1.8

**Пример 2.** Для балки, показанной на рис. 1.9, требуется:

- построить эпюры поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ );
- построить линии влияния внутренних силовых факторов, возникающих в сечении 1 и линию влияния реакции во второй опоре;
- по построенным линиям влияния определить усилия от заданной нагрузки;

– сравнить результаты, полученные при построении эпюр, с соответствующими, полученными по линиям влияния.

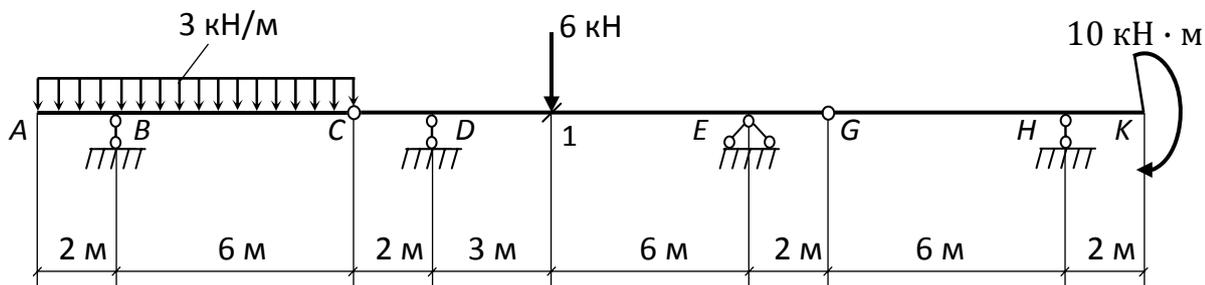


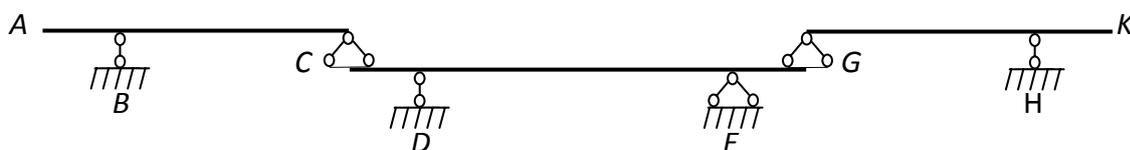
Рис. 1.9

*Решение.* Выполним *кинематический анализ* балки. Определим число степени свободы системы

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Очевидно, балка может быть геометрически неизменяемой. Выполним структурный анализ балки. Балка *CDEG* (диск) и диск «земля» соединены с помощью трех, не пересекающихся одновременно стержней опор *D* и *E*. В результате получим единый диск I. К диску I слева присоединен диск *AC* с помощью шарнира *C* и стержня *A*, не пересекающего этот шарнир. В результате получим единый диск II, состоящий из участков балки между точками *A* и *C*. К полученному диску по аналогичному принципу присоединена оставшаяся часть балки справа. Так как балка образована в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых систем, она является геометрически неизменяемой.

Построим *поэтажную схему*. Мысленно разрезаем балку по шарнирам *C* и *G*. Анализируем полученные участки. Главной (основной) является балка *CDEG*. Вспомогательные (подвесные) балки *ABC* и *GHK* опираются на землю в опорах *B* и *H* соответственно, а также на главную балку в соединительных шарнирах *C* и *G*. Эти шарниры в поэтажной схеме заменим шарнирно неподвижными опорами.



*Построение эпюр* начинаем с любой из подвесных балок.

*Расчет балки ABC.* Определим реакции опор:

$$\sum M_B = 0, R_C \cdot 6 - 3 \cdot 8 \cdot 2 = 0, R_C = 8 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0, R_B \cdot 6 + 3 \cdot 8 \cdot 4 = 0, R_B = 16 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения опорных реакций:

$$\sum y = 0, 16 + 8 - 3 \cdot 8 = 0 - \text{проверка выполняется.}$$

Полученные эпюры представлены на следующей странице на рис. 1.10.

*Расчет балки GHK.* Определим реакции опор:

$$\sum M_G = 0, -R_H \cdot 6 - 10 = 0, R_H = 1,67 \text{ кН.}$$

$$\sum M_H = 0, -R_G \cdot 6 - 10 = 0, R_G = 1,67 \text{ кН.}$$

Полученные эпюры представлены на рис. 1.11.

*Расчет балки CDEG.* Определим реакции опор:

$$\sum M_D = 0, -R_E \cdot 9 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 1,67 \cdot 11 = 0, R_E = 1,82 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E = 0, -R_D \cdot 9 + 8 \cdot 11 + 6 \cdot 6 + 1,67 \cdot 2 = 0, R_D = 14,15 \text{ кН.}$$

Проверка правильности определения реакций:  $\sum y = 0,$

$$-8 + 14,15 - 6 - 1,82 + 1,67 = 0 - \text{проверка выполняется.}$$

Полученные эпюры для этого участка балки представлены на рис. 1.12.

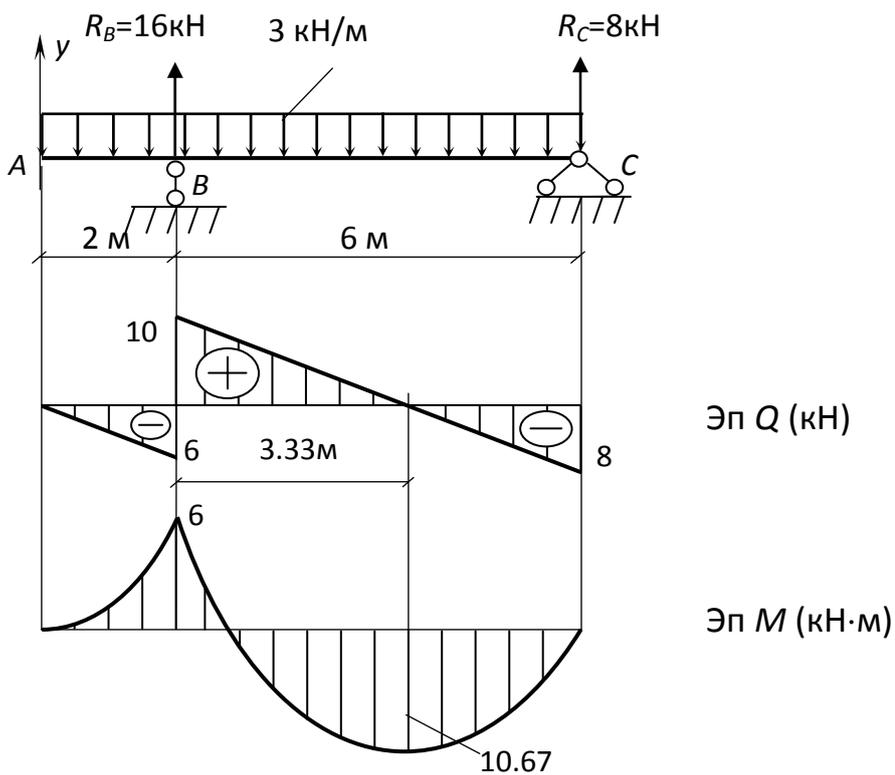


Рис. 1.10

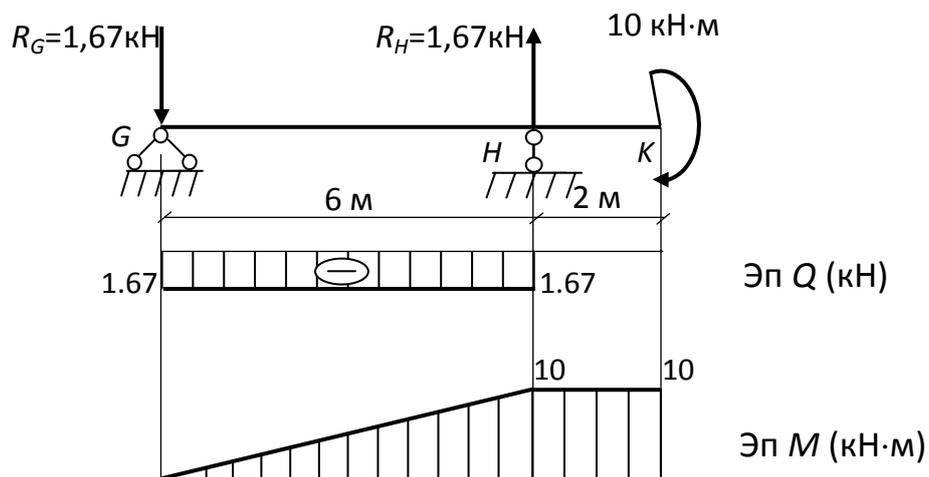


Рис. 1.11

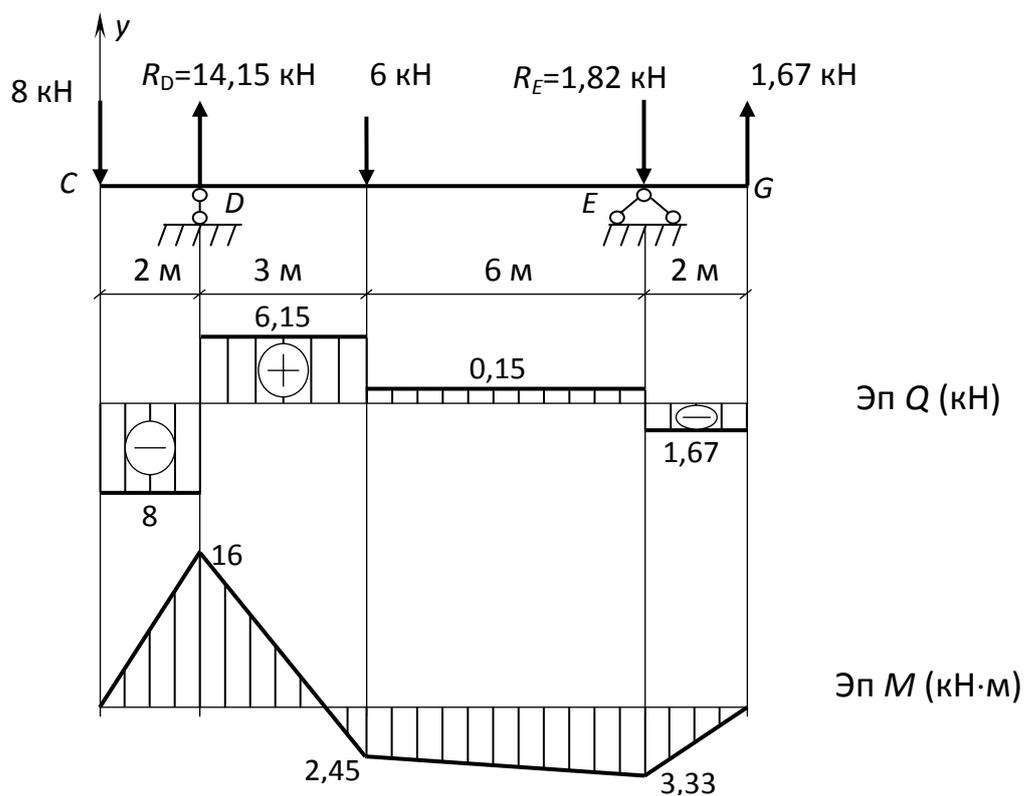


Рис. 1.12

Переносим полученные эпюры для отдельных участков балок на общие оси: получим эпюры в заданной многопролетной балке (рис. 1.13).

Для построения линий влияния начертим балку и поэтажную схему без нагрузки (рис. 1.14). Нагрузку покажем на отдельной оси выше заданной балки. Начнем с построения линии влияния  $R_D$  (л.в.  $R_D$ ).

1) Определим, к какой балке принадлежит сечение  $D$ . Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния опорной реакции шарнирной балки: откладываем значение «единица» на базисной линии под сечением, соответствующем опоре  $D$ , соединяем с нулевым значением под другой опорой балки; на имеющиеся консольные участки слева и справа линию влияния продолжаем.

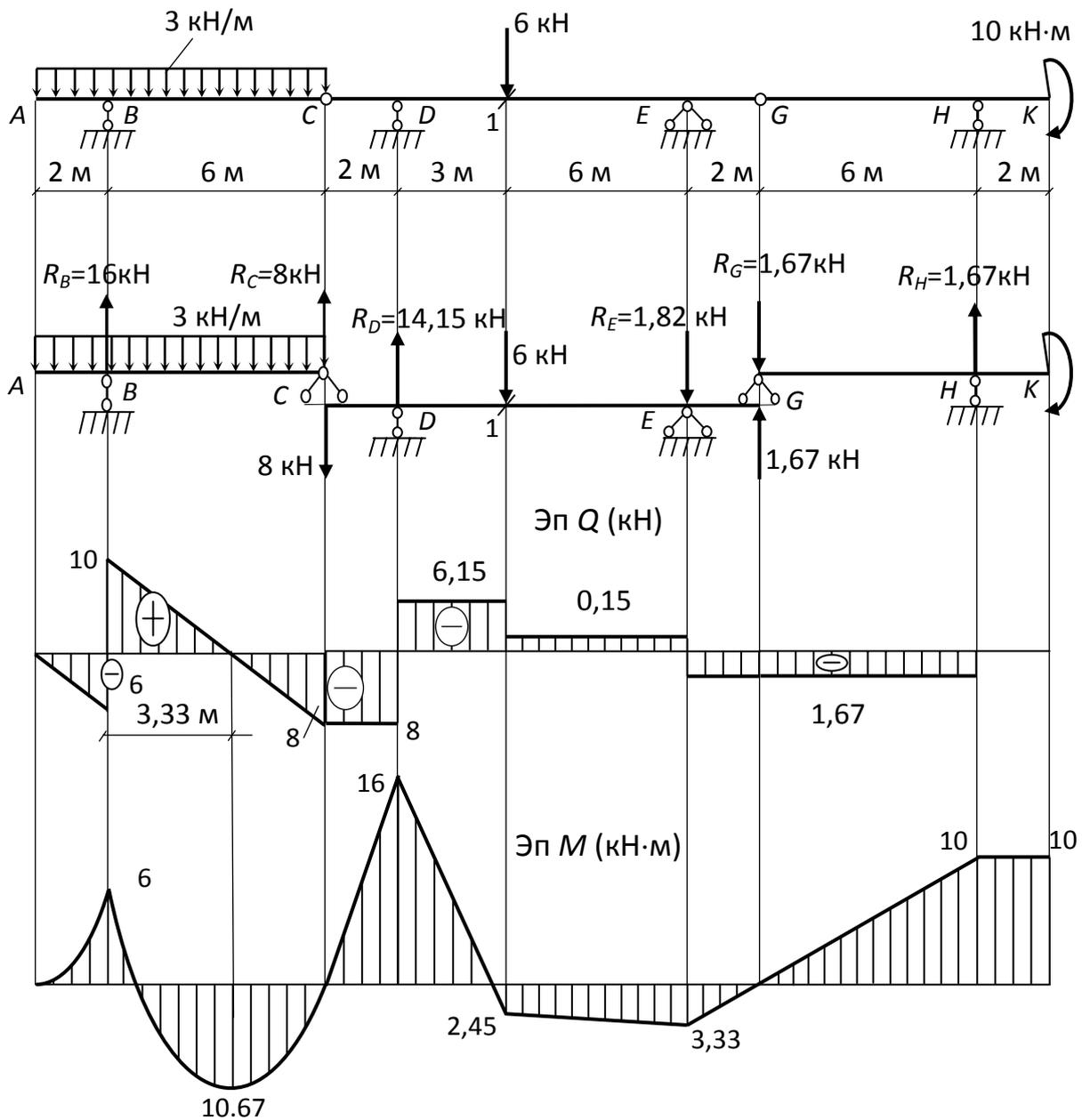


Рис. 1.13

2) Учитываем подвесные балки: в данном случае это балка  $ABC$  слева и балка  $GHK$  справа. Полученную ранее ординату под сечением  $C$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $B$ ; на консольный участок  $AB$  линию влияния продолжаем.

Аналогично учитываем подвесную балку справа. Полученную ранее ординату под сечением  $G$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $H$ ; на консольный участок НК линию влияния продолжаем. Теперь линия влияния построена – рис. 1.14.

*Построение л.в.  $Q_1$ .*

1) Сечение  $I$  принадлежит шарнирной балке и расположено между опорами. Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния поперечной силы в такой балке. Проводим две параллельные линии: сначала откладываем положительное значение «единица» на базисной линии под левой шарнирной опорой и соединяем с нулевым значением под правой шарнирной опорой (это правая ветвь линии влияния). Далее откладываем отрицательное значение «единица» на базисной линии под правой шарнирной опорой и соединяем с нулевым значением под левой опорой (это левая ветвь линии влияния). Под сечением  $I$  проводим вертикальную линию, т.е. показываем скачок на линии влияния. Таким образом, получили два треугольных участка линии влияния на участке под шарнирными опорами. На имеющиеся консольные участки  $CD$  и  $EG$  продолжаем: левую ветвь линии влияния продолжаем на левую консоль, а правую ветвь – на правую.

2) Учитываем подвесные балки – это балка  $EGH$  и балка  $DE$ . Учитываем балку  $EGH$ : полученную ранее единичную ординату под сечением  $H$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой  $G$  подвесной балки; на имеющуюся консоль  $EG$  построенную ранее линию влияния продолжаем (до сечения  $E$ ). Аналогично учитываем балку  $DE$ . Полученную ординату линии влияния под сечением  $E$  соединяем с нулевым значением под другой опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $D$ . Линия влияния построена – рис. 1.14.

*Построение л.в.  $M_1$ .*

1) Сечение  $I$  принадлежит шарнирной балке и расположено между опорами. Строим соответствующий участок линии влияния по правилу построения линии влияния изгибающего момента в такой балке.

Строим левую ветвь линии влияния. Сначала на правой опорной вертикали откладываем положительное значение «6», равное расстоянию между сечением и правой опорой. Далее нулевое значение под левой шарнирной опорой соединяем с построенной ординатой под правой опорой. Аналогично строим правую ветвь линии влияния. Сначала на левой опорной вертикали откладываем положительное значение «2», равное расстоянию между сечением и левой опорой. Далее нулевое значение под правой шарнирной опорой соединяем с построенной ординатой под левой опорой. Заметим, что обе ветви образуют треугольник с максимальной ординатой под сечением  $I$ . Это и есть линия влияния на участке между шарнирными опорами. На имеющиеся консольные участки  $CD$  и  $EG$  продолжаем: левую ветвь линии влияния продолжаем на левую консоль, а правую ветвь – на правую.

2) Учитываем подвесные балки – это балка  $EGH$  и балка  $DE$ . Учитываем балку  $EGH$ : полученную ранее ординату под сечением  $H$  соединяем с нулевым значением под наземной опорой  $G$  подвесной балки; на имеющуюся консоль  $EG$  построенную линию влияния продолжаем (до сечения  $E$ ). Аналогично учитываем балку  $DE$ . Полученную ординату линии влияния под сечением  $E$  соединяем с нулевым значением под другой опорой подвесной балки, т. е. под сечением  $D$ . Линия влияния построена – рис. 1.14. Ординаты на границах участков линий влияния вычислим из подобия треугольников.

Определим усилия от заданной нагрузки по линиям влияния.

$$R_D = 6 \cdot 0,667 + 3 \cdot \left( -\frac{0,407 \cdot 2}{2} + \frac{1,222 \cdot 6}{2} \right) - 10 \cdot \left( -\frac{0,704}{2} \right) =$$

$$= 14,15 \text{ кН.}$$

$$Q_1^{\text{лев}} = 6 \cdot 0,667 + 3 \cdot \left( -\frac{0,074 \cdot 2}{2} + \frac{0,222 \cdot 6}{2} \right) - 10 \cdot \left( -\frac{0,074}{2} \right) =$$

$$= 6,15 \text{ кН.}$$

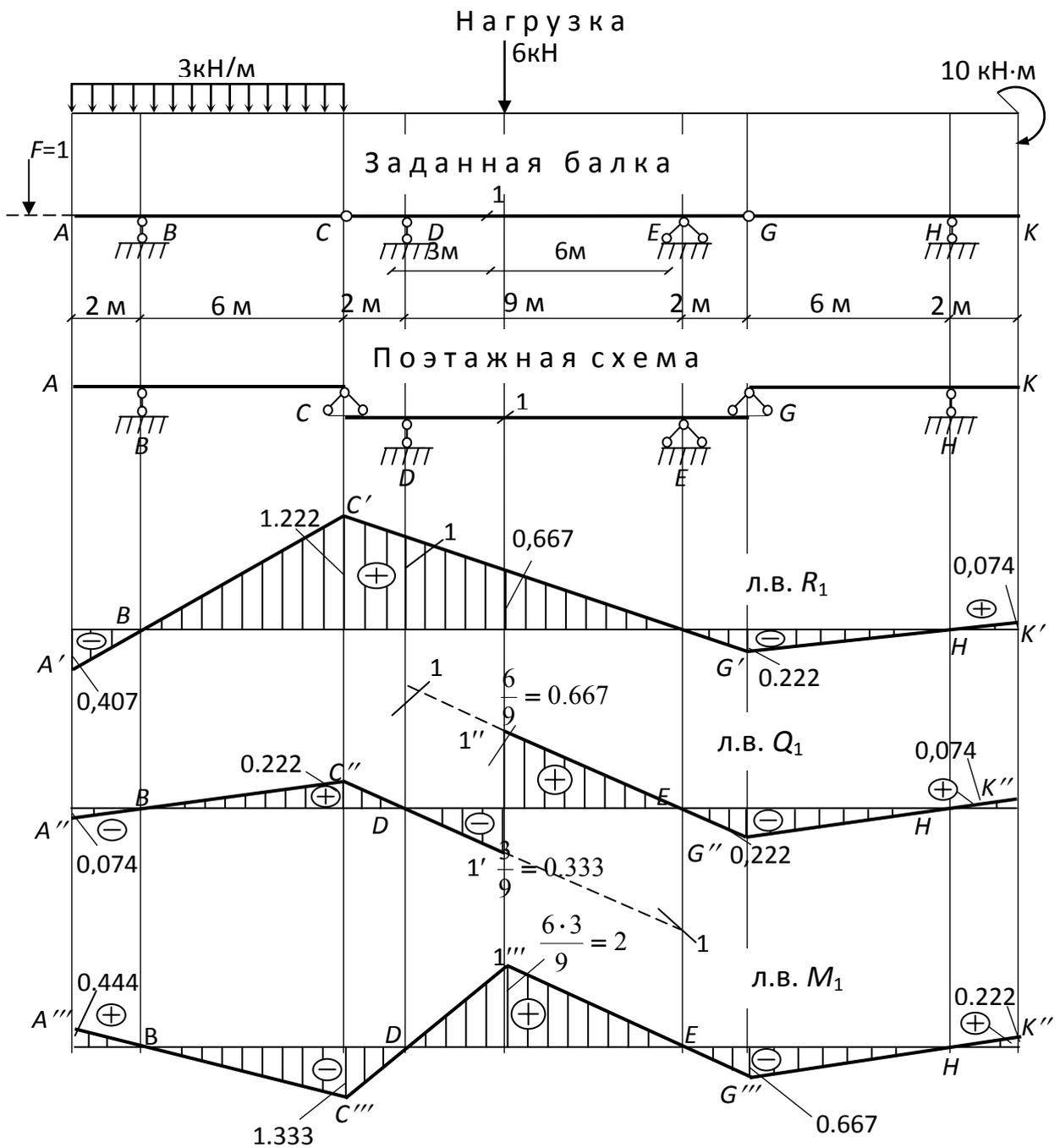


Рис. 1.14

$$Q_1^{\text{прав}} = 6 \cdot (-0,333) + 3 \cdot \left( -\frac{0,074 \cdot 2}{2} + \frac{0,222 \cdot 6}{2} \right) - 10 \cdot \left( -\frac{0,074}{2} \right) = 0,15 \text{ кН.}$$

$$M_1 = 6 \cdot 2 + 3 \cdot \left( \frac{0,444 \cdot 2}{2} - \frac{1,333 \cdot 6}{2} \right) - 10 \cdot \left( -\frac{0,222}{2} \right) = 2,445 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Результаты сравнения приводим в табл. 1.2.

=

Таблица 1.2

Искомое усилие	$R_D$ , кН	$Q_1^{\text{лев}} / Q_1^{\text{прав}}$ , кН	$M_1$ , кН · м
найденное при построении эпюр	14,15	6,15 / 0,15	2,45
найденное по линии влияния	14,15	6,15 / 0,15	2,445
расхождение результатов в %	0	0	0,2%

## 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Возможны следующие уравнения, описывающие очертание оси арки в предложенной системе координат (рис. 2.1):

$$x^2 + \left( y - \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \right)^2 = \frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - \text{уравнение окружности};$$

$$y = f - \frac{4f}{l^2} x^2 - \text{уравнение параболы};$$

$$\frac{4x^2}{l^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1 - \text{уравнение эллипса}.$$

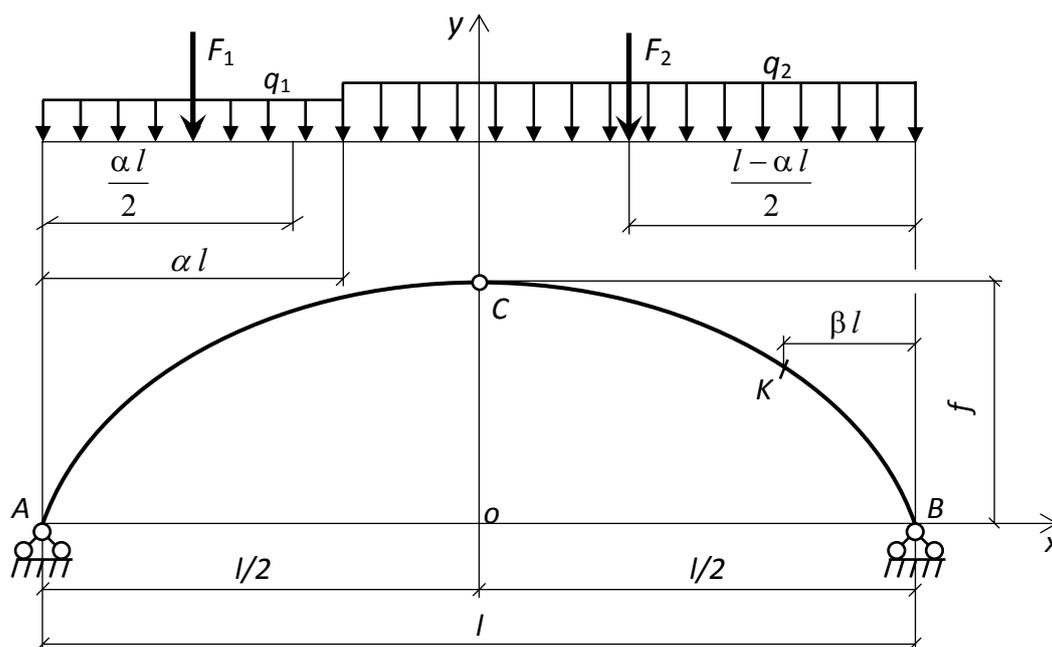


Рис. 2.1

Выполним *кинематический анализ*. Определим число степени свободы:  $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ . В трехшарнирной арке три диска (участки арки  $AC$  и  $CB$  и диск «земля») соединены с помощью трех, не пересекающихся одновременно в одной точке шарниров  $A$ ,  $C$ ,  $B$ . Как видим, арка является геометрически неизменяемой, т. к. она образована в соответствии с принципом образования геометрически неизменяемых систем.

При расчете арки на неподвижную нагрузку необходимо начертить арку в масштабе с указанием заданных размеров и нагрузки. Разбить ось арки на участки точками деления. Обязательные точки деления – это точки приложения сил, точки смены интенсивности нагрузки, заданное сечение  $K$ , ключевой шарнир  $C$ , и, конечно, опоры  $A$  и  $B$ . Обычно рассматривают 8 – 12 сечений. Желательно, чтобы длина каждого полученного участка составляла не менее одной десятой длины пролета арки.

При расчете арки потребуются тригонометрические функции угла между горизонталью и касательной, проведенной к оси арки в исследуемом сечении. Преобразуем заданное уравнение оси арки таким образом, чтобы было удобно находить ординаты выбранных сечений: вычислим первую производную от данной функции. Она, как известно, равна тангенсу описанного ранее угла. Зная тангенс, легко найти необходимые выражения косинуса и синуса этого угла:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Преобразуем уравнение окружности. Для этого перенесем  $x^2$  в правую часть и извлечем квадратные корни из правой и левой частей. Тогда

$$y - \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2};$$

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2} + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2 \right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot (-2x);$$

$$\operatorname{tg}\varphi = - \frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2}}.$$

Преобразуем уравнение параболы:

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = - \frac{8f}{l^2} x.$$

Преобразуем уравнение эллипса:

$$y^2 = \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) f^2;$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \cdot f;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{1}{2} f \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot \left( -\frac{8}{l^2} x \right);$$

$$\operatorname{tg}\varphi = - \frac{4fx}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}}.$$

Как правило, результат вычисления функций в каждом конкретном сечении сводят в общую таблицу расчета.

**Пример 1.** Для арки, показанной на рис. 2.2, требуется:

- построить эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил от постоянной заданной нагрузки.
- для заданного сечения  $K$  построить линии влияния усилий.
- определить соответствующие усилия по линиям влияния; полученные результаты сравнить с теми, что были найдены получены для сечения  $K$  при выполнении первого пункта.

Уравнение оси арки – эллипс:  $\frac{4x^2}{l^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1$ .

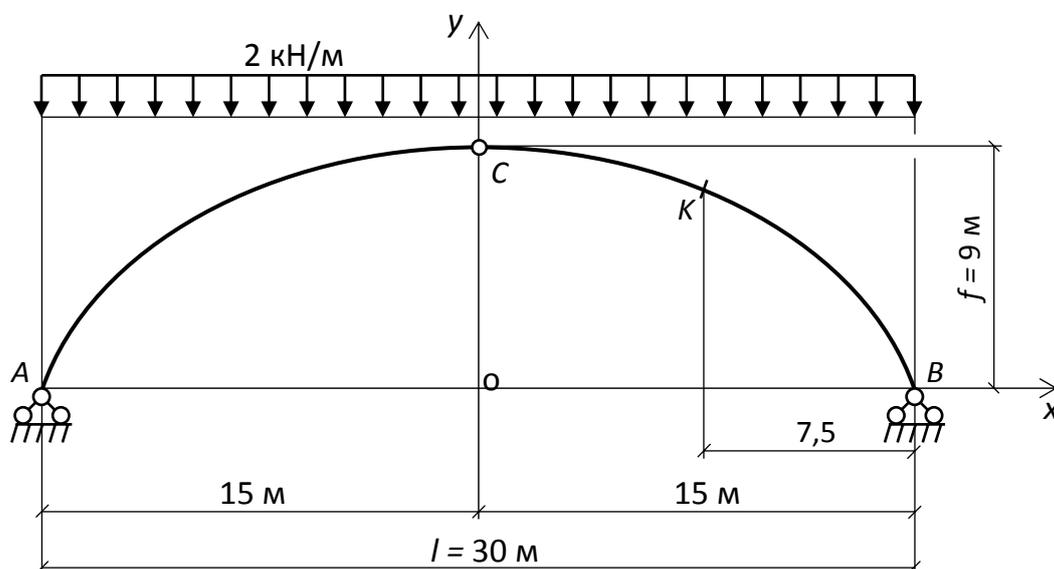


Рис. 2.2

*Примечание:* в дальнейшем размерности на рисунках не будем указывать, подразумевая, что силы измеряются в килоньютонах, а линейные размеры в метрах.

*Решение.* Начертим арку в масштабе в тонких линиях. Уточненное очертание оси арки сделаем после просчета высот промежуточных точек (рис. 2.3, а).

Вычислим реакции опор.

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 30 - 2 \cdot 30 \cdot 15 = 0, R_B = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 30 + 2 \cdot 30 \cdot 15 = 0, R_A = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0, -R_A \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 7,5 - H \cdot 9 = 0, H = 25 \text{ кН.}$$

Выполним проверки правильности определения реакций:

$$\sum Y = 0, 30 + 30 - 2 \cdot 30 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, 30 \cdot 15 - 2 \cdot 15 \cdot 7,5 - 25 \cdot 9 = 450 - 450 = 0.$$

Разобьем пролет арки на участки, как показано на рис. 2.3, а.

Заменяем арку простой балкой (рис. 2.3, б) и построим балочные эпюры внутренних силовых факторов. Балочная эпюра поперечной силы показана на рис. 2.3, в. Балочная эпюра изгибающего момента – на рис. 2.3, г.

Преобразуем уравнение оси арки до удобного для расчетов вида. Для этого подставим все известные величины в заданное уравнение очертания оси арки – уравнение эллипса, а также в уравнение вычисления тангенса угла между касательной к оси арки и горизонтальной осью.

$$y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \cdot f = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{30^2}} \cdot 9 = 9 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{225}};$$

$$\text{tg}\varphi = -\frac{4fx}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}} = -\frac{4 \cdot 9x}{30^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{30^2}}} = -\frac{0,04x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{225}}}.$$

Определим подробно арочные усилия в нескольких сечениях арки.

Сечение А:  $x_A = -15$  м,  $y_A = 0$ ,  $Q_A^0 = 30$  кН,  $M_A^0 = 0$ .

$$\text{tg}\varphi_A = -\frac{0,04x_A}{\sqrt{1 - \frac{x_A^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-15)}{\sqrt{1 - \frac{(-15)^2}{225}}} = \infty,$$

$$\varphi_A = 90^\circ, \quad \cos \varphi_A = 0, \quad \sin \varphi_A = 1.$$

Таким образом, арочные усилия для сечения  $A$  равны:

$$M_A = M_A^0 - Hy_A = 0;$$

$$Q_A = Q_A^0 \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A = 30 \cdot 0 - 25 \cdot 1 = -25 \text{ кН};$$

$$N_A = -(Q_A^0 \sin \varphi_A + H \cos \varphi_A) = -(30 \cdot 1 + 25 \cdot 0) = -30 \text{ кН}.$$

Сечение 1:  $x_1 = -12$  м,  $Q_1^0 = 24$  кН,  $M_1^0 = 81$  кН · м.

$$y_1 = 9 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{225}} = 9 \cdot \sqrt{1 - \frac{12^2}{225}} = 5,4 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{0,04x_1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-12)}{\sqrt{1 - \frac{(-12)^2}{225}}} = 0,8;$$

$$\cos \varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 0,8^2}} = 0,781;$$

$$\sin \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0,8 \cdot 0,781 = 0,625.$$

Арочные усилия сечения 1:

$$M_1 = M_1^0 - Hy_1 = 81 - 25 \cdot 5,4 = -54 \text{ кН · м};$$

$$Q_1 = Q_1^0 \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 24 \cdot 0,781 - 25 \cdot 0,625 = 3,12 \text{ кН};$$

$$N_1 = -(Q_1^0 \sin \varphi_1 + H \cos \varphi_1) = -(24 \cdot 0,625 + 25 \cdot 0,781) = \\ = -34,53 \text{ кН}.$$

Сечение 2:  $x_2 = -9$  м,  $Q_2^0 = 18$  кН,  $M_2^0 = 144$  кН · м.

$$y_2 = 9 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{225}} = 9 \cdot \sqrt{1 - \frac{(-9)^2}{225}} = 7,2 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{0,04x_2}{\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-9)}{\sqrt{1 - \frac{(-9)^2}{225}}} = 0,45;$$

$$\cos \varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 0,45^2}} = 0,912;$$

$$\sin \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0,45 \cdot 0,912 = 0,410.$$

Арочные усилия сечения 2:

$$M_2 = M_2^0 - H \cdot 2 = 144 - 25 \cdot 7,2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_2 = Q_2^0 \cos \varphi_2 - H \sin \varphi_2 = 18 \cdot 0,912 - 25 \cdot 0,410 = 6,17 \text{ кН};$$

$$N_2 = -(Q_2^0 \sin \varphi_2 + H \cos \varphi_2) = -(18 \cdot 0,410 + 25 \cdot 0,912) = \\ = -30,18 \text{ кН}.$$

Дальнейший расчет сведем в табл. 2.1.

По полученным данным построим арочные эпюры изгибающего момента (рис. 2.3, *д*), поперечной силы (рис. 2.3, *е*) и продольной силы (рис. 2.3, *ж*).

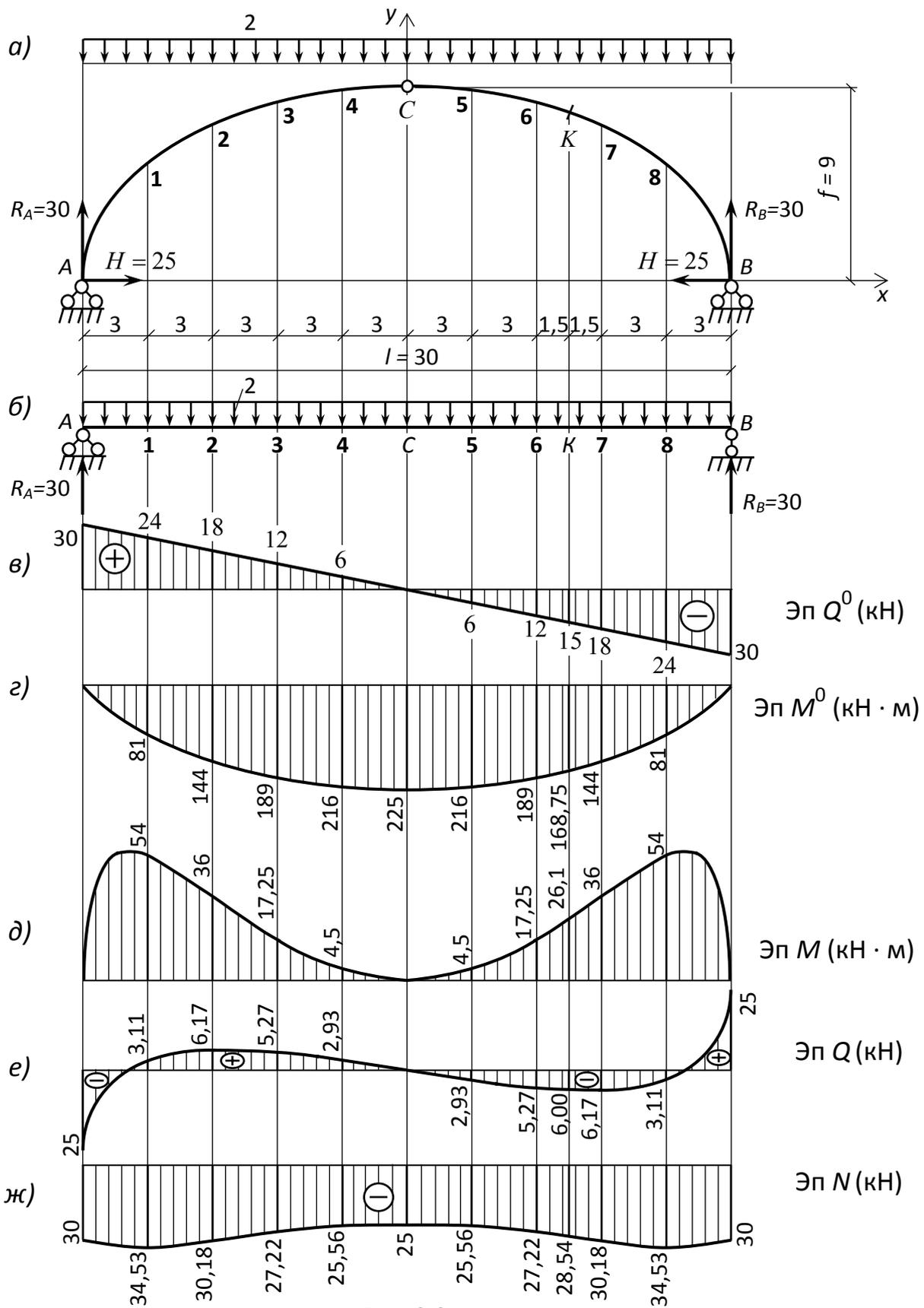


Рис. 2.3

№	x, м	y, м	tg φ	cos φ	sin φ	$M^0$	$H \cdot y$	$M$	$Q^0$	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	$Q$	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	$N$
A	-15	0	$\infty$	0	1	0	0	0	30	0	25	-25	30	0	-30
1	-12	5,4	0,8	0,781	0,625	81	135	-54	24	18,74	15,63	3,11	15	19,53	-34,53
2	-9	7,2	0,45	0,912	0,410	144	180	-36	18	16,42	10,25	6,17	7,38	22,8	-30,18
3	-6	8,25	0,262	0,967	0,253	189	206,2 5	-17,25	12	11,6	6,33	5,27	3,04	24,18	-27,22
4	-3	8,82	0,122	0,993	0,121	216	220,5	-4,5	6	5,96	3,03	2,93	0,73	24,83	-25,56
C	0	9	0	1	0	225	225	0	0	0	0	0	0	25	-25
5	3	8,82	-0,122	0,993	-0,121	216	220,5	-4,5	-6	-5,96	-3,03	-2,93	0,73	24,83	-25,56
6	6	8,25	-0,262	0,967	-0,253	189	206,2 5	-17,25	-12	-11,6	-6,33	-5,27	3,04	24,18	-27,22
K	7,5	7,79	-0,346	0,945	-0,327	168,75	194,8 5	-26,1	-15	-14,18	-8,18	-6	4,91	23,63	-28,54
7	9	7,2	-0,45	0,912	-0,410	144	180	-36	-18	-16,42	-10,25	-6,17	7,38	22,8	-30,18
8	12	5,4	-0,8	0,781	-0,625	81	135	-54	-24	-18,74	-15,63	-3,11	15	19,53	-34,53
B	15	0	$\infty$	0	-1	0	0	0	-30	0	-25	25	30	0	-30

*Построение линий влияния внутренних усилий сечения K арки.* Начертим арку в масштабе (рис. 2.4, б). Над аркой покажем нагрузку, которая понадобится нам при загрузении линий влияния (рис. 2.4, а). Простую балку покажем на рис. 2.4, в.

Параметры сечения K:

$$x_K = 7,5 \text{ м}; \quad y_K = 7,79 \text{ м}; \quad \cos \varphi_K = 0,945; \quad \sin \varphi_K = -0,327.$$

Сначала построим *линию влияния балочного момента сечения C* – л.в.  $M_C^0$  (рис.2.4, г). Затем, согласно формуле  $H = \frac{M_C^0}{f}$ , построим *ли-*

*нию влияния распора* – л.в.  $H$ . Для этого каждую ординату линии влияния  $M_C^0$  разделим на значение стрелы подъема арки, равную девяти метрам (рис. 2.4, д).

Построим *линию влияния балочного момента сечения K* (рис. 2.4, е).

Далее умножим каждую ординату линии влияния распора на величину  $y_K = 7,79 \text{ м}$ , следовательно, построим вспомогательную линию влияния  $H y_K$  (рис. 2.4, ж).

Теперь можно перейти к построению *линии влияния арочного момента в сечении K для заданной арки.* Для этого из каждой ординаты л.в.  $M_K^0$  вычтем соответствующую ординату (л.в.  $H y_K$ ). Очевидно, ордината под сечением C равна разности значений 3,75 и 6,489. Это значение отрицательно и равно 2,739. Аналогично под сечением K значение ординаты линии влияния равно разности значений 5,625 (из л.в.  $M_K^0$ ) и 3,245 (из (л.в.  $H y_K$ )). Эта разница равна 2,380. Получившийся график – л.в.  $M_K$  показан на рис. 2.4,з. Все необходимые промежуточные значения на графиках определяем из подобия треугольников, полученных при построении.

Построение *линий влияния поперечной и продольной сил* в сечении K подробно показано на рис. 2.5. Сначала строим *линию влияния балочной поперечной силы сечения K* – л.в.  $Q_K^0$  (рис. 2.5, а). Затем согласно формуле: л.в.  $Q_K = (\text{л.в. } Q_K^0) \cos \varphi_K - (\text{л.в. } H) \sin \varphi_K$ , строим вспомогательные линии влияния всех величин, входящих в эту формулу. Линия влияния  $Q_K^0 \cos \varphi_K$  показана на рис. 2.5, б. На ней каждая ордината л.в.  $Q_K^0$  умножена на значение  $\cos \varphi_K = 0,945$ . Линия влияния  $H \sin \varphi_K$

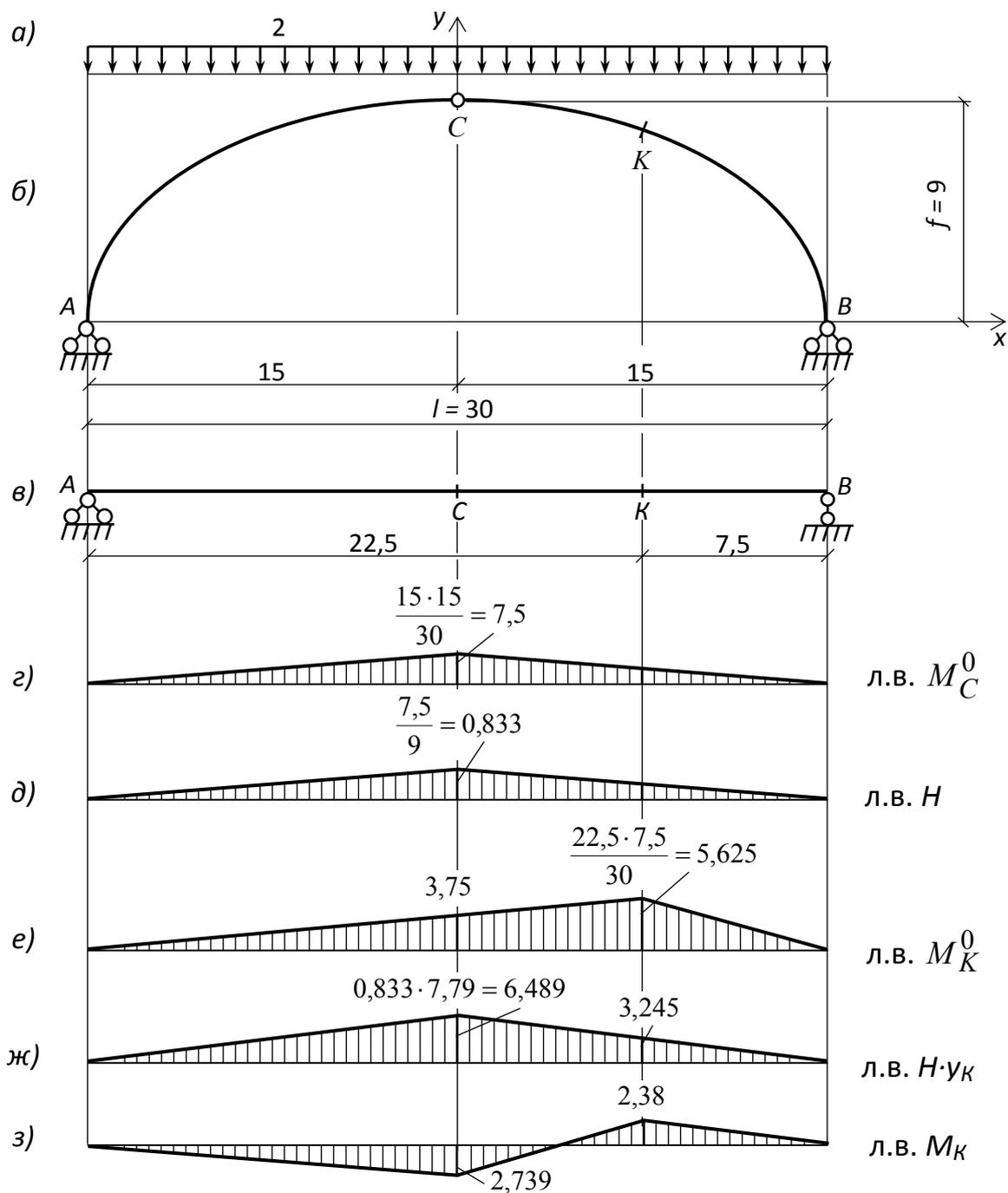


Рис. 2.4

показана на рис. 2.5, в. На ней каждая ордината л.в.  $H$  умножена на  $\sin \varphi_K = -0,327$ . Таким образом, все ординаты линии влияния  $H \sin \varphi_K$  меняют знак по отношению к л.в.  $H$ .

Окончательная линия влияния  $Q_K$  показана на рис. 2.5, г. Здесь, ордината под сечением  $C$  арки вычисляется следующим образом:

$$-0,472 - (-0,272) = -0,200.$$

Ордината под сечением, расположенным бесконечно близко слева от точки  $K$  арки:  $-0,709 - (-0,136) = -0,573$ .

Ордината под сечением, расположенным бесконечно близко справа от точки  $K$  арки:  $0,236 - (-0,136) = 0,372$ .

Линию влияния усилия  $N_K$  строим, используя аналитическую формулу: л. в.  $N_K = -((\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi_K + (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K)$ . Сначала построим  $(\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi_K$ . Она показана на рис. 2.5,  $\delta$ . Каждая ордината этой линии влияния получена умножением ординат л.в.  $Q_K^0$  на значение  $\sin \varphi_K = -0,327$ . Очевидно, график этой вспомогательной линии влияния отобразится относительно базисной линии по отношению к графику л.в.  $Q_K^0$ .

Линия влияния  $H \cos \varphi_K$  показана на рис.2.5,  $e$ . Каждая ордината этой линии влияния получена умножением соответствующей ординаты л.в.  $H$  на  $\cos \varphi_K = 0,945$ .

Окончательная л. в.  $N_K$  показана на рис. 2.5,  $ж$ . Здесь ордината под сечением  $C$  арки вычисляется следующим образом:

$$-(0,164 + 0,787) = -0,951.$$

Ордината под сечением, расположенным бесконечно близко слева от точки  $K$  арки:  $-(0,245 + 0,394) = -0,639$ .

Ордината под сечением, расположенным бесконечно близко справа от точки  $K$  арки:  $-(-0,082 + 0,394) = -0,312$ .

Найдем усилия в сечении  $K$  по построенным линиям влияния.

$$M_K = 2 \cdot \left( -\frac{2,739 \cdot 15}{2} - \frac{2,739 - 2,38}{2} \cdot 7,5 + \frac{2,38 \cdot 7,5}{2} \right) = -25,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_K = 2 \cdot \left( -\frac{0,2 \cdot 15}{2} - \frac{0,573 + 0,2}{2} \cdot 7,5 + \frac{0,372 \cdot 7,5}{2} \right) = -6,0 \text{ кН};$$

$$N_K = 2 \cdot \left( -\frac{0,951 \cdot 15}{2} - \frac{0,639 + 0,951}{2} \cdot 7,5 - \frac{0,312 \cdot 7,5}{2} \right) = -28,53 \text{ кН}.$$

Сравним результаты загрузки линий влияния и значения внутренних силовых факторов в сечении  $K$ , найденные при построении эпюр, и представим их в табл. 2.2.

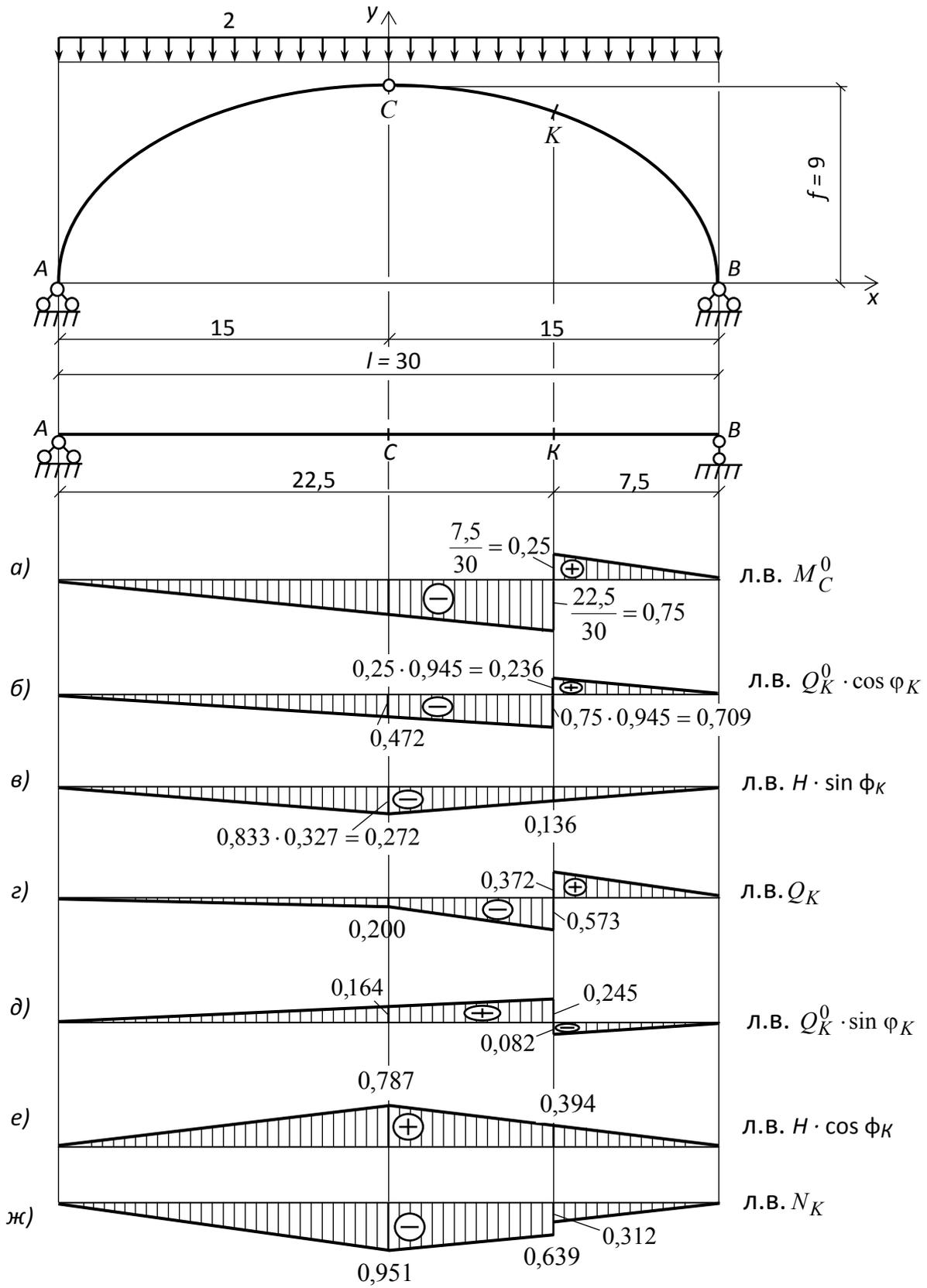


Рис. 2.5

Таблица 2.2

Искомое усилие,	$M_K, \text{кН} \cdot \text{м}$	$Q_K, \text{кН}$	$N_K, \text{кН}$
найденное при построении эпюр	- 26,1	- 6	- 58,54
найденное при загрузении линий влияния	- 25,9	- 6	- 28,53
расхождение результатов в %	0,8%	0	0,02%

Расхождение результатов расчетов вполне удовлетворительны:

$$\delta_M(\%) = \frac{|M_{\text{эп}} - M_{\text{л.в.}}|}{|M_{\text{эп}}|} \cdot 100\% = \frac{26,1 - 25,9}{26,1} \cdot 100\% \approx 0,8\% < 1\%;$$

$$\delta_N(\%) = \frac{|N_{\text{эп}} - N_{\text{л.в.}}|}{|N_{\text{эп}}|} \cdot 100\% = \frac{58,54 - 58,53}{58,54} \cdot 100\% \approx 0,02\% < 1\%.$$

**Пример 2.** Для арки, показанной на рис. 2. 6, а, найти внутренние силовые факторы в сечении, расположенном под сосредоточенной силой.

Уравнение оси арки – окружность:

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2} + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f};$$

$$\text{tg}\varphi = - \frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2}}.$$

*Решение.* Найдем вертикальные реакции опор.

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 24 - 30 \cdot 6 = 0, \quad R_B = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 24 + 30 \cdot 18 = 0, \quad R_A = 225 \text{ кН}.$$

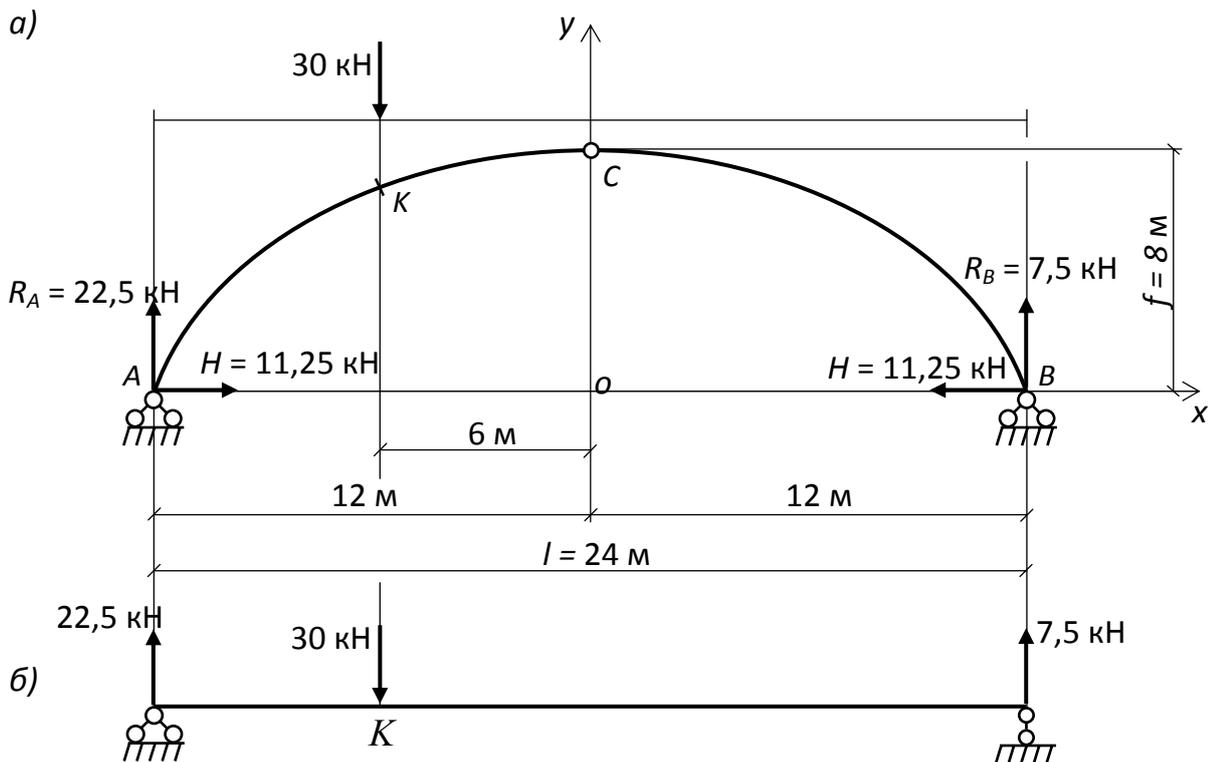


Рис. 2.6

Найдем распор (горизонтальные реакции) арки.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0, \quad -R_A \cdot 12 + 30 \cdot 6 - H \cdot 8 = 0, \quad H = 11,25 \text{ кН.}$$

Выполним проверки правильности определения реакций.

$$\sum y = 0, \quad 22,5 + 7,5 - 30 = 0, \quad 0 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad 7,5 \cdot 12 - 11,25 \cdot 8 = 0, \quad 0 = 0.$$

Заменим арку простой балкой (рис. 2.6, б) и найдем балочные усилия для сечения  $K$ . В этом сечении приложена сосредоточенная сила, поэтому значения балочной поперечной силы в сечении  $K$  будут различными бесконечно близко слева и справа от сечения. Вычислим их.

Бесконечно близко слева от сечения  $K$  балки:  $Q_K^0 = 22,5 \text{ кН.}$

Бесконечно близко справа от сечения  $K$  балки:  $Q_K^0 = -7,5 \text{ кН.}$

Балочный изгибающий момент в сечении  $K$ :  $M_K^0 = 135 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

Вычислим геометрические параметры сечения  $K$ , зная, что  $x_K = -6$  м.

$$y_K = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x_K^2} + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f} =$$

$$= \sqrt{\frac{24^2}{8} + \frac{24^4}{64 \cdot 8^2} + \frac{8^2}{4} - 6^2} + \frac{8}{2} - \frac{24^2}{8 \cdot 8} = 6,53 \text{ м.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_K = -\frac{x_K}{\sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x_K^2}} = -\frac{-6}{\sqrt{\frac{24^2}{8} + \frac{24^4}{64 \cdot 8^2} + \frac{8^2}{4} - 6^2}} = 0,52.$$

$$\cos \varphi_K = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,52^2}} = 0,887;$$

$$\sin \varphi_K = \operatorname{tg} \varphi_K \cdot \cos \varphi_K = 0,887 \cdot 0,52 = 0,461.$$

Вычислим *арочные* значения поперечной и продольной сил сечения  $K$ . Очевидно, они (как и балочные) будут различными бесконечно близко слева и справа от сечения. Бесконечно близко слева от сечения  $K$  арки:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = 22,5 \cdot 0,887 - 11,25 \cdot 0,461 = 14,77 \text{ кН};$$

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K) = -(22,5 \cdot 0,461 + 11,25 \cdot 0,887) =$$

$$= -20,35 \text{ кН.}$$

Бесконечно близко справа от сечения  $K$  арки:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = -7,5 \cdot 0,887 - 11,25 \cdot 0,461 = -11,84 \text{ кН};$$

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K) = -(-7,5 \cdot 0,461 + 11,25 \cdot 0,887) =$$

$$= -6,52 \text{ кН.}$$

Арочный момент в сечении  $K$ :

$$M_K = M_K^0 - H y_K = 135 - 11,25 \cdot 6,53 = -61,54 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

### 3. РАСЧЕТ ФЕРМ

При расчете фермы на неподвижную нагрузку необходимо определить продольную силу в каждом стержне фермы. Рассмотрим определение усилий во всех стержнях *заданной панели фермы*. *Панелью фермы* принято считать часть фермы, расположенную между ближайшими стойками фермы (напомним, что *стойки* – это вертикальные стержни фермы). Аналитически продольное усилие в стержне фермы можно найти методом вырезания узлов фермы или методом сечений. Для практического расчета метод выбирается так, чтобы усилие в стержне легко находилось бы непосредственно, т. е. в виде числовой или аналитической зависимости от заданной нагрузки и опорных реакций. В некоторых сложных случаях такие зависимости получить не удастся, тогда приходится выражать искомое усилие через другие ранее найденные усилия в соседних стержнях.

Рассчитывая ферму, надо показывать все схемы, рассматриваемые отсеченные части и указывать на схемах все величины, входящие в используемые формулы. Все геометрические размеры должны быть определены *аналитически*, а не со схемы фермы по масштабу.

Построение линий влияния надо начинать с линий влияния реакций опор. Все графики строятся под схемой фермы в том же линейном масштабе на одном листе графической части. Перенос графиков на другой лист без соответствующих схем фермы не допускается. На линиях влияния должны быть проставлены числовые значения ординат под всеми узлами. Все построения должны сопровождаться численными расчетами.

После определения усилий в указанных стержнях фермы от заданной нагрузки при помощи линий влияния необходимо сравнить полученные результаты с аналогичными, вычисленными аналитически. Как правило, результаты сравнения представляют в соответствующей таблице. Расхождение результатов оценивается следующим образом:

$$\delta_N(\%) = \frac{|N_{\text{анал}} - N_{\text{л.в.}}|}{|N_{\text{анал}}|} \cdot 100\% \leq 1\%.$$

Здесь  $N_{\text{анал}}$  – усилие в стержне фермы, найденное аналитически;  $N_{\text{л.в.}}$  – усилие в том же стержне, вычисленное при помощи линии влияния.

**Пример.** Для фермы, показанной на рис. 3.1, требуется:

- определить усилия во всех стержнях *третьей панели* от постоянной нагрузки (отсчет панели проводят слева направо);
- построить для тех же стержней линии влияния усилий;
- загрузить построенные линии влияния постоянной нагрузкой и сравнить результаты с теми, что были получены ранее.

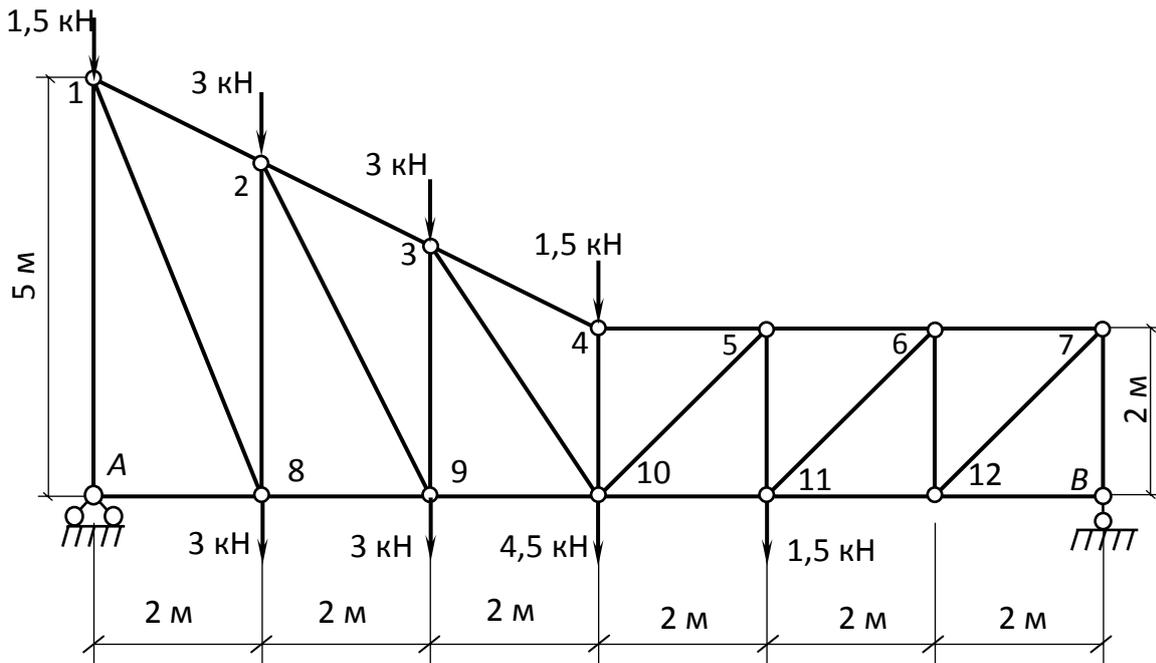


Рис. 3.1

**Решение.** Выполним кинематический анализ фермы. Определим число степени свободы системы:

$$W = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0.$$

Таким образом, необходимое условие статической определимости системы выполняется. Проведем структурный анализ. Очевидно, что структура фермы образована в соответствии с присоединением к отдельному стержню фермы (дису) двухстержневой системы (диады). Например, к диску  $A-8$  присоединена диада  $A-1$  и  $1-8$ , в результате часть фермы  $A-1-8$  является самостоятельным диском. К этому диску присоединяется диада  $1-2$  и  $2-8$  и т. д. Окончательно вся ферма (единый диск) присоединена к диску «земля» с помощью трех, не пересекающихся одновременно в одной точке

стержней. Ферма является геометрически неизменяемой системой, т. к. она образована в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых систем.

Начертим ферму в масштабе. Обозначим узлы фермы цифрами (рис. 3.2). В дальнейшем размерности на рисунках не будут указываться.

Найдем вертикальные реакции опор. (Горизонтальная реакция левой опоры равна нулю, т. к. по условию нет горизонтальных сил и их проекций, а условие статики в проекции на горизонтальную ось должно выполняться.)

$$\sum M_A = 0; -3 \cdot (2 + 2 + 4 + 4) - 4,5 \cdot 6 - 1,5 \cdot (6 + 8) + R_B \cdot 12 = 0,$$

$$\sum M_B = 0; 3 \cdot (10 + 10 + 8 + 8) + 4,5 \cdot 6 + 1,5 \cdot (6 + 4 + 12) - R_A \cdot 12 = 0,$$

$$R_A = 14 \text{ кН}; R_B = 7 \text{ кН}.$$

Выполним проверку определения реакций:

$$\sum y = 0, 7 + 14 - 3 \cdot 4 - 4,5 - 1,5 \cdot 3 = 0, 21 - 21 = 0.$$

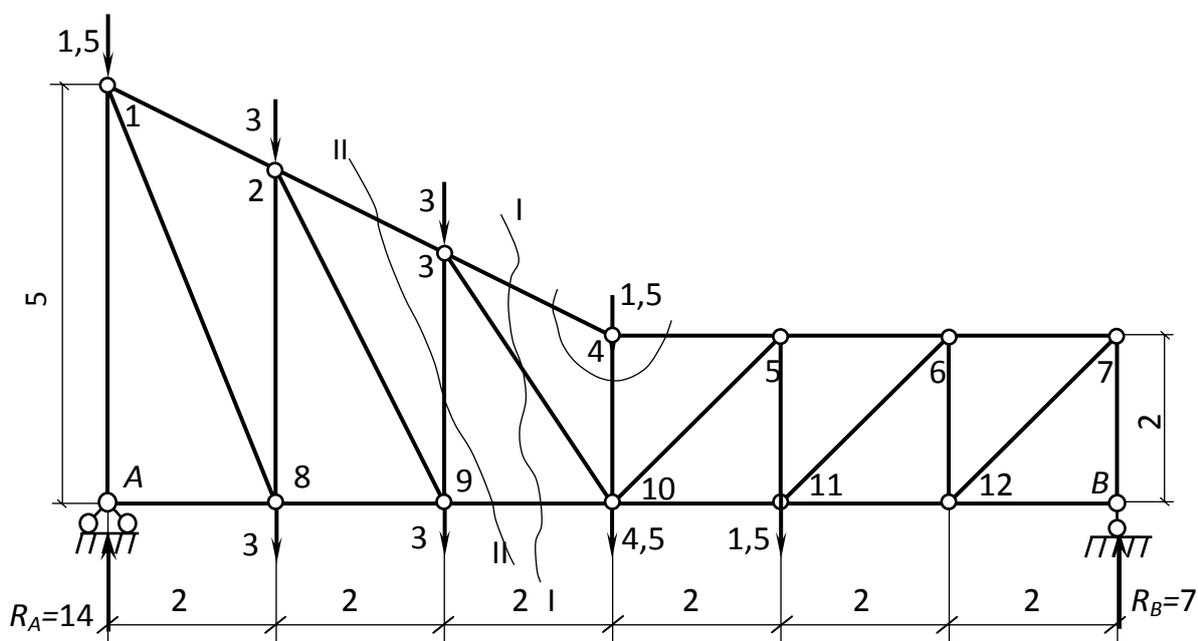


Рис. 3.2

Для дальнейших расчетов нам понадобятся некоторые геометрические параметры. Начертим решетку заданной фермы в масштабе и аналитически вычислим все необходимые нам размеры и углы (рис. 3.3).

Прежде всего найдем угол  $\alpha$ , рассмотрев треугольник  $K - 4 - 1$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{6} = 0,5; \alpha = 26,56^\circ; \sin \alpha = 0,447; \cos \alpha = 0,894.$$

Найдем длину отрезка  $12 - C$  (т.е. место пересечения оси верхнего пояса левой части фермы с осью нижнего пояса) из треугольника  $4 - 10 - C$ :

$$l_{12-C} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ м.}$$

Таким образом, мы видим, что точка  $C$  в нашем случае попадает в один из узлов нижнего пояса фермы.

Вычислим высоту левой стойки третьей панели, рассмотрев треугольник  $3 - 9 - 10$ :

$$h_1 = 6 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ м.}$$

Далее найдем высоту перпендикуляра, опущенного из точки  $10$  на продолжение отрезка  $2 - 3$ . Для этого рассмотрим треугольник  $12 - D - 10$ :

$$h_2 = 4 \cdot \sin \alpha = 4 \cdot 0,447 = 1,79 \text{ м.}$$

Определим параметры угла  $\beta$ , рассмотрев треугольник  $3 - 9 - 10$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2} = 1,5; \beta = 56,31^\circ; \sin \beta = 0,832; \cos \beta = 0,555.$$

Опустим из точки  $C$  перпендикуляр на продолжение отрезка  $3 - 10$  и рассмотрим получившийся треугольник  $12 - 10 - E$ :

$$h_3 = 4 \cdot \sin \beta = 4 \cdot 0,832 = 3,33 \text{ м.}$$

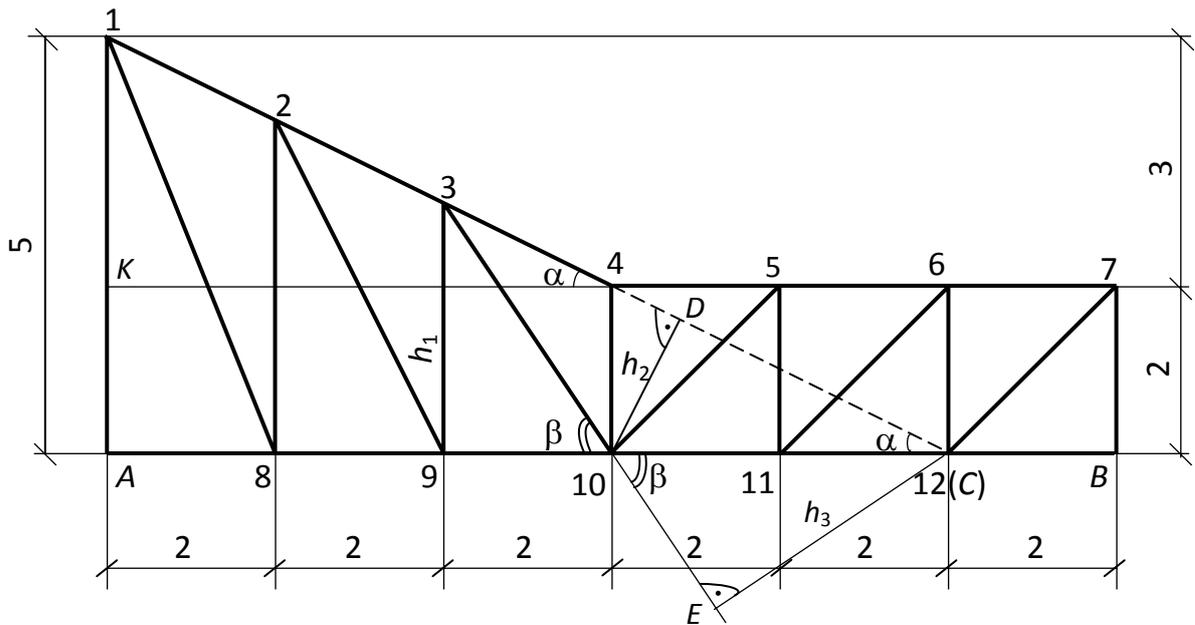


Рис. 3.3

Нам необходимо определить усилия в стержнях  $3 - 4$ ,  $3 - 10$ ,  $9 - 10$ ,  $3 - 9$ ,  $4 - 10$ .

Сделаем сечение  $I - I$  в заданной ферме (рис. 3.2) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы (рис. 3.4).

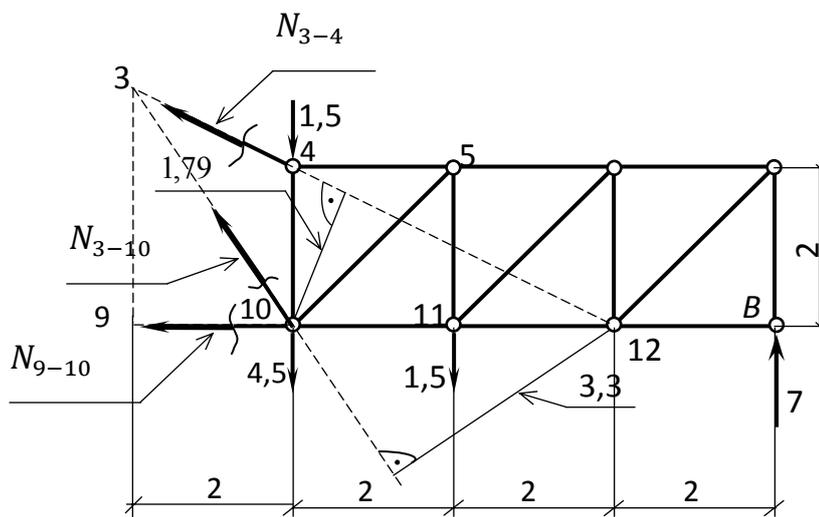


Рис. 3.4

Моментной точкой для  $N_{3-4}$  является точка 10, так как в ней пересекаются оси стержней 3 - 10 и 9 - 10.

$$\sum M_{10} = 0, N_{3-4} \cdot 1,79 + 7 \cdot 6 - 1,5 \cdot 2 = 0, N_{3-4} = -21,79 \text{ кН.}$$

Моментной точкой для усилия  $N_{3-10}$  является точка 12. В ней пересекаются оси стержней 3 - 4 и 9 - 10.

$$\sum M_{12} = 0, -N_{3-10} \cdot 3,33 + 7 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2 + 1,5 \cdot 4 + 4,5 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{3-10} = 12,31 \text{ кН.}$$

Чтобы найти усилие  $N_{9-10}$ , воспользуемся моментной точкой 3.

$$\sum M_3 = 0, N_{9-10} \cdot 3 + 7 \cdot 8 - 1,5 \cdot (2 + 4) - 4,5 \cdot 2 = 0,$$

$$N_{9-10} = 12,67 \text{ кН.}$$

Для нахождения усилия в стержне 3 - 9 сделаем сечение II - II (рис. 3.2) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 3.5).

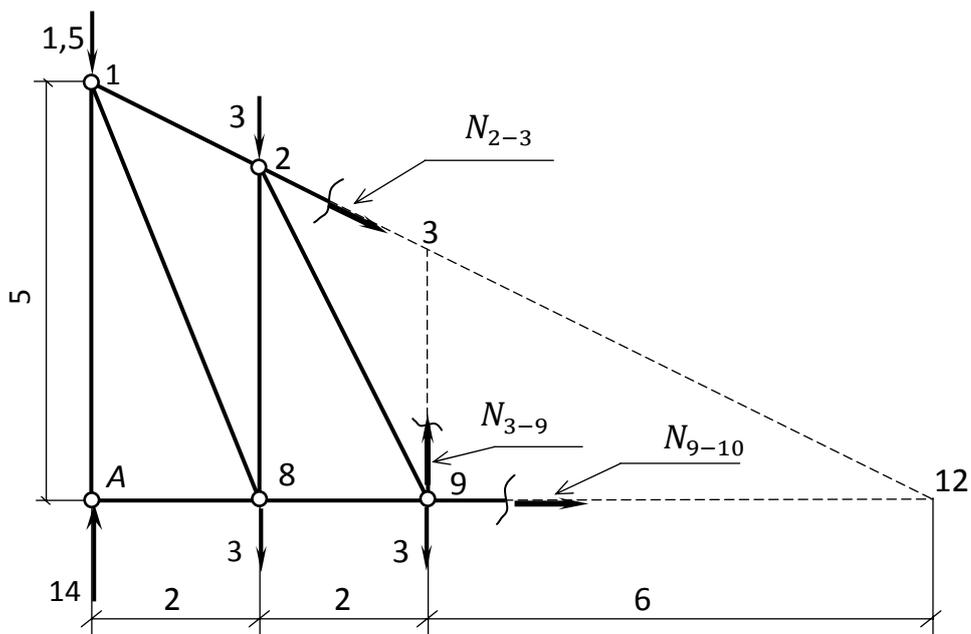


Рис. 3.5

Составим уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил этой части фермы относительно моментной точки. Моментной точкой является точка  $I_2$ , в ней пересекаются оси стержней 2 - 3 и 8 - 9, попавших, также как и стержень 3 - 9, в сечение  $II - II$ .

$$\sum M_{I_2} = 0, -14 \cdot 10 + 1,5 \cdot 10 + 3 \cdot (8 + 8 + 6) - N_{3-9} \cdot 6 = 0;$$

$$N_{3-9} = -9,83 \text{ кН.}$$

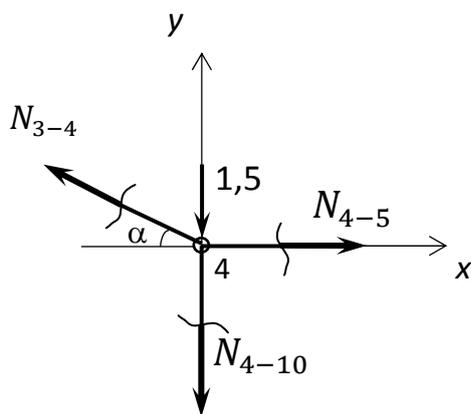


Рис. 3.6

Для определения усилия  $N_{4-10}$  вырежем узел 4 фермы (рис. 3.2) и рассмотрим его равновесие (рис. 3.6).

$$\sum y = 0,$$

$$N_{3-4} \sin \alpha - 1,5 - N_{4-10} = 0,$$

$$-21,79 \cdot 0,447 - 1,5 - N_{4-10} = 0,$$

$$N_{4-10} = -11,24 \text{ кН.}$$

Построим *линии влияния усилий* рассмотренных пяти стержней. Все построения будем показывать на рис. 3.7. Для последующего определения усилий по линиям влияния покажем заданную нагрузку над фермой на отдельных осях (см. рис. 3.7, а); схему фермы в масштабе без нагрузки покажем на рис. 3.7, б. Так как у нас загружен и верхний и нижний пояс фермы, необходимо рассматривать построение линий влияния при движении силы  $F = 1$  поверху и понизу фермы. Заметим, что сила  $F = 1$  безразмерна, следовательно, безразмерными будут и ординаты линий влияния.

Предварительно построим *линии влияния реакций опор* (см. рис. 3.7, в и г). Под каждым узлом заданной фермы на графиках изменения реакций проставим значения в долях от единицы, учитывая, что пролет фермы делится узлами на 6 равных частей. Такая постановка ординат линий влияния реакций очень удобна для дальнейших вычислений.

Линии влияния усилий в стержнях  $3-4$ ;  $3-10$  и  $9-10$  не будут зависеть от того, по какому поясу движется единичная сила. Для построения графиков изменения усилий в этих стержнях сделаем сечение  $I-I$  в заданной ферме (см. рис. 3.7, б). Рассмотрим два случая возможного положения груза.

1) Пусть сила  $F = 1$  находится *слева от сечения  $I-I$* .

Составим *уравнение равновесия правой отсеченной части*, т.е. той части, где нет силы.

Начнем с линии влияния  $N_{3-4}$ .

$$\sum M_{10} = 0, \quad N_{3-4} \cdot 1,79 + R_B \cdot 6 = 0, \quad N_{3-4} = -3,352R_B.$$

Тогда следует записать аналитическое выражение линии влияния:

$$\text{л. в. } N_{3-4} = -3,352 \text{ л. в. } R_B.$$

Полученное выражение показывает, что график изменения усилия  $N_{3-4}$  повторит линию влияния  $R_B$  (см. рис. 3.7, г), но все значения должны быть умножены на отрицательный коэффициент (-3,352). Это аналитическое выражение является *уравнением левой ветви* нашей линии влияния, т. к. оно получено в предположении, что единичная сила находится слева от сечения  $I-I$ , т.е. в интервале от узла  $A$  (1) до узла  $9$  (3). (Здесь и далее в скобках указаны номера узлов верхнего пояса фермы.) Фактическим участком линии влияния является отрезок между осями, проходящими через указанные узлы (рис. 3.7, д).

2) Пусть сила  $F = 1$  находится *справа от сечения  $I-I$*  (см. рис. 8, б).

Составим *уравнение равновесия левой отсеченной части*, т.е. той части, где нет силы.

$$\sum M_{10} = 0, \quad -N_{3-4} \cdot 1,79 - R_A \cdot 6 = 0, \quad N_{3-4} = -3,352R_A.$$

Тогда следует записать аналитическое выражение линии влияния:

$$\text{л. в. } N_{3-4} = -3,352 \text{ л. в. } R_A.$$

Это выражение является *уравнением правой ветви* нашей линии влияния, т. к. оно получено в предположении, что единичная сила находится справа от сечения  $I - I$ . График этой ветви повторит линию влияния  $R_A$  (см. рис. 8, в), все значения которой, как и в случае с левой ветвью, должны быть умножены на отрицательный коэффициент. Справедливо это выражение только в пределах между осями, проходящими через узлы 10 (4) и В (7). Выделим фактический участок на правой ветви линии влияния  $N_{3-4}$  (см. рис. 8, д).

Соединим левую и правую ветви линии влияния  $N_{3-4}$  в части, расположенной между узлами 9 (3) и 10 (4) заданной фермы, *передаточной прямой*, которая на рис. 8, д выделена звездочками. Линия влияния построена. Для контроля правильности построения линии влияния нужно помнить свойство: обе ветви линии влияния должны пересекаться под моментной точкой, т.е. в нашем случае под точкой 10.

Ординаты под каждым узлом заданной фермы на этом графике можно легко вычислить, используя доли от единицы, проставленные на линиях влияния реакций опор. Например, при попадании единичной силы в узел 9 (3) усилие  $N_{3-4}$  будет иметь значение:

$$N_{3-4} = \frac{2}{6} \cdot (-3,352) = -1,117.$$

Построим *линию влияния усилия в стержне 3 - 10*, используя сечение  $I - I$  в заданной ферме (см. рис. 8, б).

1) Пусть сила  $F = 1$  находится *слева от сечения  $I - I$* .

Составим уравнение равновесия *правой отсеченной части* фермы:

$$\sum M_{12} = 0, \quad -N_{3-10} \cdot 3,33 + R_B \cdot 2 = 0, \quad N_{3-10} = 0,601R_B.$$

тогда л. в.  $N_{3-10} = 0,601$  л. в.  $R_B$ .

Получено *уравнение левой ветви* линии влияния, которое справедливо только в интервале между осями, проходящими от узла А (1) до узла 9 (3).

2) Пусть сила  $F = 1$  находится *справа от сечения  $I - I$* .

Составим уравнение равновесия *левой отсеченной части* фермы.

$$\sum M_{12} = 0, \quad N_{3-10} \cdot 3,33 - R_A \cdot 10 = 0, \quad N_{3-10} = 3,003R_A,$$

тогда л. в.  $N_{3-10} = 3,003$  л. в.  $R_A$ .

Получено уравнение правой ветви линии влияния, которое справедливо в интервале между осями, проходящими от узла 10 (4) до узла В (7). Левая и правая ветви графика пересекаются под точкой 12. В интервале между осями, проходящими через узлы 9 (3) и 10 (4), проводим передаточную прямую. Линия влияния  $N_{3-10}$  показана на рис. 8, е.

При помощи того же сечения I - I в заданной ферме (рис. 8, б), построим линию влияния  $N_{9-10}$ .

1) Пусть сила  $F = 1$  находится слева от указанного сечения.

Составим уравнение равновесия правой отсеченной части фермы.

$$\sum M_3 = 0, \quad -N_{9-10} \cdot 3 + R_B \cdot 8 = 0, \quad N_{9-10} = 2,667,$$

тогда л. в.  $N_{9-10} = 2,667$  л. в.  $R_B$ .

Получили выражение левой ветви линии влияния, справедливое в пределах от узла А (1) до узла 9 (3).

2) Пусть сила  $F = 1$  находится справа от сечения I - I.

Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы (см. рис. 8, б). Получим уравнение правой ветви линии влияния  $N_{9-10}$ , которое справедливо только в интервале между осями, проходящими от узла 10 (4) до узла В (7).

$$\sum M_3 = 0, \quad -N_{9-10} \cdot 3 + R_A \cdot 4 = 0, \quad N_{9-10} = 1,333R_A,$$

тогда л. в.  $N_{9-10} = 1,333$  л. в.  $R_A$ .

Левая и правая ветви графика пересекаются под моментной точкой 3. В пределах между осями, проходящими через узлы 9 (3) и 10 (4) находится передаточная прямая. Полученная линия влияния  $N_{9-10}$  показана на рис. 8, ж.

Для построения *линии влияния*  $N_{3-9}$  используем *сечение II - II* (см. рис. 8, б). Это сечение на верхнем поясе пересекает вторую панель, а на нижнем третью, поэтому линии влияния усилия  $N_{3-9}$  при движении силы  $F = 1$  поверху и понизу фермы не будут одинаковыми.

1) Пусть сила  $F = 1$  находится *слева от сечения II - II*. Составим уравнение равновесия *правой отсеченной части*.

$$\sum M_{12} = 0, \quad N_{3-9} \cdot 6 + R_B \cdot 2 = 0, \quad N_{3-9} = -0,333R_B,$$

тогда л. в.  $N_{3-9} = -0,333$  л. в.  $R_B$ .

Получено *уравнение левой ветви линии влияния*, которое справедливо только при нахождении силы в пределах первой панели при движении по верхнему поясу и в пределах первой и второй панелей при движении единичной силы по нижнему поясу фермы.

2) Пусть сила  $F = 1$  находится *справа от сечения II - II*. Составим уравнение равновесия *левой отсеченной части* фермы.

$$\sum M_{12} = 0, \quad N_{3-9} \cdot 6 + R_A \cdot 10 = 0, \quad N_{3-9} = -1,667R_A,$$

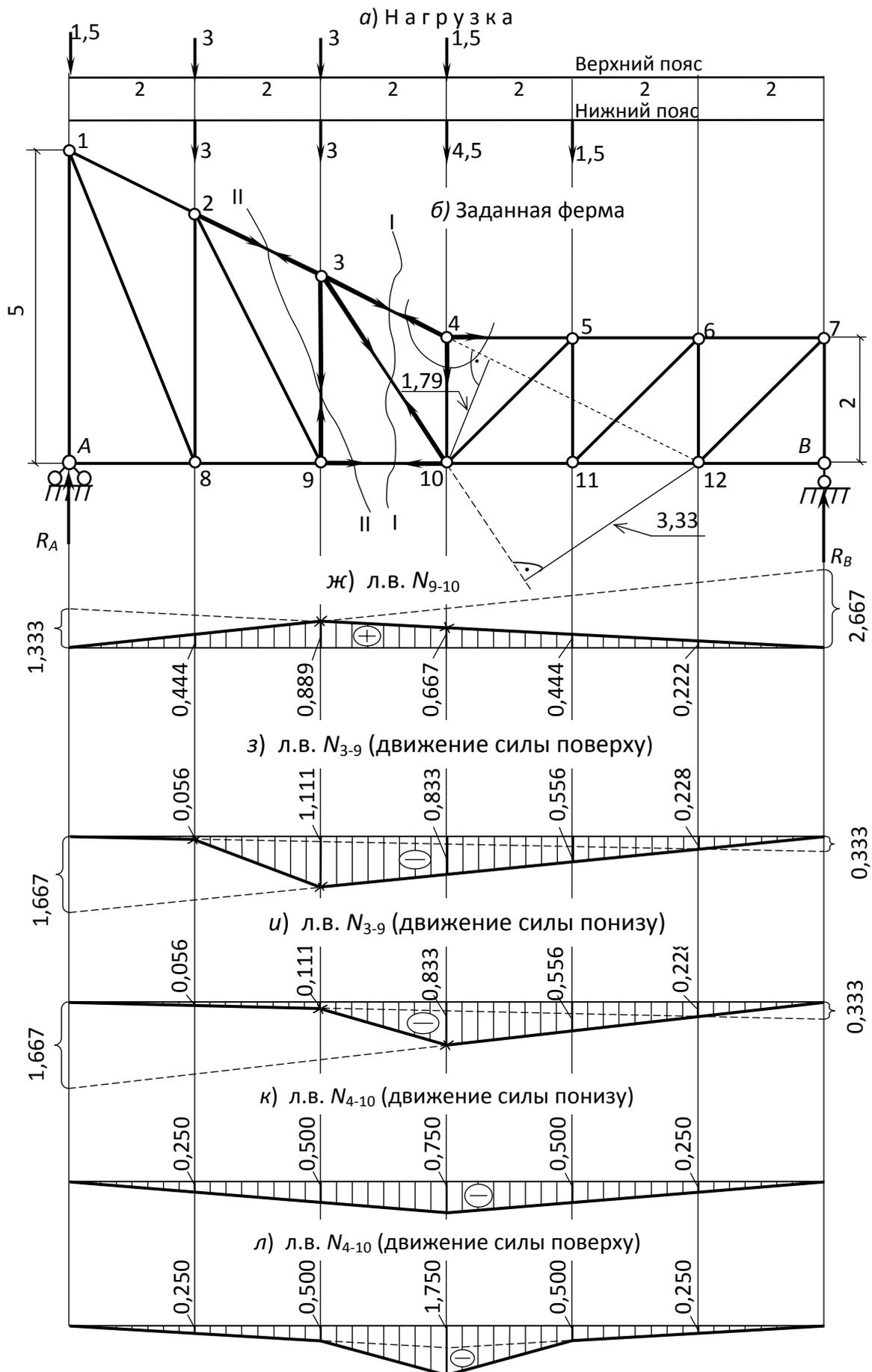
тогда л. в.  $N_{3-9} = -1,667$  л. в.  $R_A$ .

Здесь мы имеем *уравнение правой ветви линии влияния*. Оно справедливо при движении единичной силы поверху в пределах от узла 3 до конца фермы и при движении понизу от узла 10 также до конца фермы.

Передаточные прямые будут расположены на графиках соответственно при движении силы поверху между осями, проходящими через узлы 2 и 3 и при движении понизу через узлы 9 и 10.

Полученные графики линий влияния показаны на рис. 8, з и 8, и соответственно.





Построим последнюю линию влияния – л.в.  $N_{4-10}$ . Для ее построения вырежем узел 4.

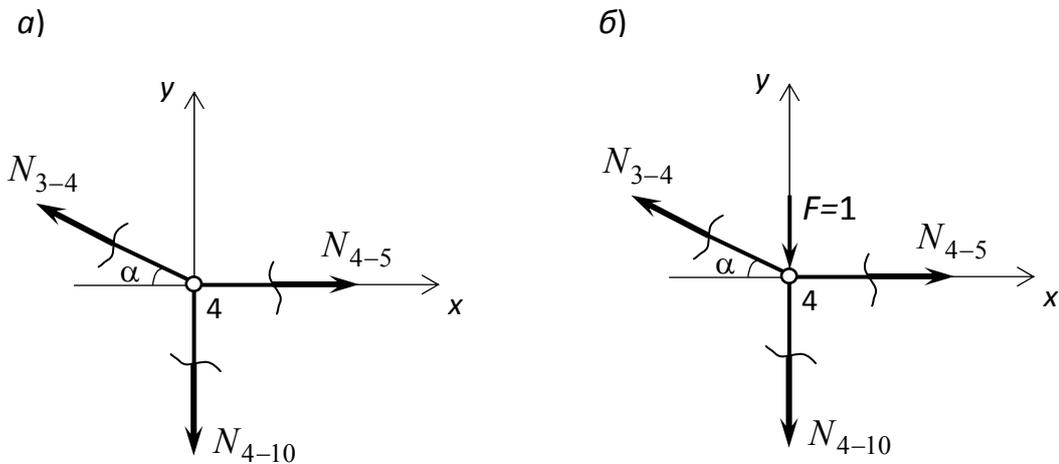


Рис. 3.8

Здесь, как и в случае со стойкой 3 - 9, при загрузении верхнего и нижнего поясов линии влияния будут различны. При загрузении верхнего пояса сила  $F = 1$  может оказаться в узле 4, в то время как при загрузении нижнего пояса этого не произойдет никогда.

1) Пусть сила  $F = 1$  находится *вне узла 4* (см. рис. 3.8, а).

$$\sum y = 0, N_{3-4} \sin \alpha - N_{4-10} = 0, N_{3-4} \cdot 0,447 - N_{4-10} = 0,$$

$$N_{4-10} = 0,447 N_{3-4}.$$

Тогда л. в.  $N_{4-10} = 0,447$  л. в.  $N_{3-4}$ .

Как видно из этого уравнения, график изменения усилия  $N_{4-10}$  полностью повторит линию влияния  $N_{3-4}$ , все ординаты которой умножены на коэффициент 0,447. Это справедливо при движении силы понизу (см. рис. 8, к), а также под всеми узлами, кроме четвертого, при движении силы поверху фермы (см. рис. 8, л).

2) Пусть сила  $F = 1$  находится в узле 4 верхнего пояса фермы (рис. 9, б). Рассмотрим уравнение равновесия этого узла.

$$\sum y = 0, N_{3-4} \sin \alpha - N_{4-10} - 1 = 0, N_{3-4} \cdot 0,447 - N_{4-10} - 1 = 0,$$

$$N_{4-10} = 0,447N_{3-4} - 1.$$

Тогда л. в.  $N_{4-10} = 0,447$  л. в.  $N_{3-4} - 1$ .

Первое слагаемое получившейся алгебраической суммы представляет собой величину усилия  $N_{4-10}$  без учета действия в узле единичной силы. Это значение берем с л. в.  $N_{4-10}$  (движение понизу) под узлом 4 (см. рис. 8, к):  $N_{4-10} = -0,75$ . Таким образом, окончательное значение усилия  $N_{4-10}$  при попадании единичной силы в узел 4 будет равно:

$$N_{4-10} = -0,75 - 1 = -1,75.$$

Ординаты графика под узлами 3 (- 0,500), 4 (- 1,750) и 5 (- 0,500) соединим передаточными прямыми. Окончательный вид линии влияния показан на рис. 8, л.

Определим *усилия по линиям влияния от заданной нагрузки*, т.е. сделаем загрузку линий влияния. В каждом случае по линии влияния можно определить именно то усилие, для которого построена эта линия влияния.

$$N_{3-4} = 6 \cdot (-0,559 - 1,117 - 1,676) + 1,5 \cdot (-1,117) = -21,79 \text{ кН.}$$

Аналогично по линиям влияния найдем усилия  $N_{3-10}$  и  $N_{9-10}$ .

$$N_{3-10} = 6 \cdot (0,1 + 0,2 + 1,502) + 1,5 \cdot 1,001 = 12,31 \text{ кН;}$$

$$N_{9-10} = 6 \cdot (0,444 + 0,889 + 0,667) + 1,5 \cdot 0,444 = 12,67 \text{ кН.}$$

Усилие  $N_{3-9}$  при загрузении верхнего пояса:

$$N_{3-9} = 3 \cdot (-0,056 - 1,111) - 1,5 \cdot 0,833 = -4,75 \text{ кН.}$$

Усилие  $N_{3-9}$  при загрузении нижнего пояса:

$$N_{3-9} = 3 \cdot (-0,056 - 0,111) - 4,5 \cdot 0,833 - 1,5 \cdot 0,556 = -5,08 \text{ кН.}$$

При загрузке обоих поясов  $N_{3-9} = -4,75 - 5,08 = -9,83$  кН.

Усилие  $N_{4-10}$  при загрузке верхнего пояса:

$$N_{4-10} = 3 \cdot (-0,25 - 0,5) - 1,5 \cdot 1,75 = -4,875 \text{ кН.}$$

Усилие  $N_{4-10}$  при загрузке нижнего пояса:

$$N_{4-10} = 3 \cdot (-0,25 - 0,5) - 4,5 \cdot 0,75 - 1,5 \cdot 0,5 = -6,375 \text{ кН.}$$

При загрузке обоих поясов  $N_{4-10} = -4,875 - 6,375 = -11,25$  кН.

Все значения усилий, полученные при аналитическом расчете и при загрузке линий влияния занесем в таблицу сравнения результатов (табл. 3.1). Как видим, величины усилий, вычисленные двумя разными способами, совпадают для всех стержней, кроме стержня 4 - 10. Вычислим расхождение результатов для этого стержня:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{11,25 - 11,24}{11,24} \right| \cdot 100\% = 0,09\% \ll 1\%.$$

Таблица 3.1

Искомое усилие (кН)	$N_{3-4}$	$N_{3-10}$	$N_{9-10}$	$N_{3-9}$	$N_{4-10}$
$N_{\text{анал}}$	-21,79	12,31	12,67	- 9,83	-11,24
$N_{\text{л.в.}}$	-23,46	15,02	12,67	3	-11,25
$\Delta(\%)$	0	0	0	0	0,09

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ОТ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

При практическом определении перемещений необходимо хорошо понимать и знать основные положения метода Мора, интеграл Максвелла-Мора и правила практического вычисления интеграла Максвелла-Мора (см., например, краткое изложение в лекциях 7-9 курса лекций по строительной механике). Здесь приведем лишь необходимые результирующие формулы.

Для определения перемещений стержневой системы необходимо рассмотреть два состояния: 1) грузовое, т. е. состояние системы от заданной нагрузки; 2) единичное (вспомогательное) состояние, которое формируется дополнительно от единичного воздействия. Единичное воздействие выбирается в зависимости от вида перемещения, которое необходимо рассмотреть.

Для стержневых систем, которые работают преимущественно на изгиб (балки, рамы), влияние продольной и поперечной сил на перемещения незначительно (по сравнению с влиянием изгибающего момента) и им обычно пренебрегают. В таких системах интеграл Максвелла - Мора имеет вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_F}{EJ} dx. \quad (4.1)$$

Использование формулы (4.1) подразумевает, что под знаком интеграла изгибающие моменты двух состояний (единичного и грузового) представлены в виде функций от координаты сечения. Получение таких функций подробно рассматривается в курсе «Соппротивление материалов» при определении внутренних силовых факторов, в частности, изгибающего момента, методом сечений. В дальнейшем проводится непосредственное интегрирование по общим правилам высшей математики. Разумеется, с увеличением нагрузки и количества участков интегрирования практическое использование записанной общей формулы становится сложным и громоздким.

На практике определение перемещений стержневых систем чаще всего

выполняют с использованием *правила Верещагина*: при перемножении эпюр, одна из которых линейна, а другая имеет произвольное очертание, интеграл  $\int_0^l \overline{M}_l M_F dx$  можно вычислить как произведение площади эпюры произвольного очертания на ординату под ее центром тяжести, взятую из линейной эпюры. Разделив обе части записанного равенства на жесткость при изгибе  $EJ$ , получим искомое перемещение в виде

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_l M_F dx = \frac{1}{EJ} \omega y_{cm}, \quad (4.2)$$

где  $\omega$  – площадь криволинейной эпюры,  $y_{cm}$  – ордината, взятая из линейной эпюры и лежащая под центром тяжести первой.

Таким образом, при перемножении эпюр по правилу Верещагина довольно сложное математическое действие «интегрирование» заменяется более простым – «умножение». При этом нужно помнить и учитывать следующие правила.

1. Площадь  $\omega$  подсчитывается для эпюры произвольного очертания, ордината  $y_{cm}$  берется из эпюры прямолинейной.

2. Если обе эпюры прямолинейные, то площадь  $\omega$  можно вычислить для любой из них, а ординату  $y$  взять из другой перемножаемой эпюры.

3. Произведение  $\omega y_{cm}$  считается положительным, если площадь  $\omega$  и ордината  $y_{cm}$  расположены по одну сторону от базисных линий соответствующих эпюр. Произведение является отрицательным, если указанные величины расположены по разные стороны от базисных линий.

Заметим, что наиболее простым применение формулы (4.2) оказывается в случае, когда одна из эпюр (или обе) постоянна по величине на всем участке перемножения, т. е. в случае перемножения прямоугольной эпюры на прямоугольную или в случае перемножения прямоугольной эпюры на треугольную или трапецеидальную эпюру.

Для случая, когда одна из эпюр очерчена по квадратной параболе (что соответствует действию равномерно распределенной нагрузки  $q$ ), удобнее использовать "универсальную" формулу:

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx =$$

$$= \frac{l}{6EJ} \left( 2a\bar{a} + 2b\bar{b} + a\bar{b} + b\bar{a} + \frac{ql^2}{4} (\bar{a} + \bar{b}) \right). \quad (4.3)$$

Заметим, что на основе правила Верещагина получены и другие формулы перемножения. Использование той или иной формулы обусловлено удобством ее применения.

**Пример 1.** Для заданной рамы (рис. 4.1) найти полное линейное перемещение точки  $C$ .

Полное линейное перемещение в плоскости определяем как

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2},$$

где  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещения точки  $C$ . Найдем эти линейные перемещения. Очевидно, в качестве единичных воздействий принимаем силу, приложенную в точке  $C$  горизонтально (для нахождения  $\Delta_x$ ) и силу, приложенную в точке  $C$  вертикально (для нахождения перемещения  $\Delta_y$ ).

Эпюра изгибающего момента от внешнего воздействия изображена на рис. 4.2, а эпюры от единичных воздействий – на рис. 4.3,  $a$  и  $b$  соответственно. Линейные перемещения определяем перемножением эпюр. Заметим, что перемножение производим по участкам, которые можно выделить в раме: на рис. 4.1 их всего четыре ( $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$  и  $D-E$ ). Границами участков являются характерные узлы рамы с точки зрения конфигурации рамы и приложенной нагрузки. В первом случае понимаются сечения, в которых приложены опоры, шарниры, происходит смена направления осей стержней – это узлы  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$ . Во втором случае понимаются сечения, в которых приложены сосредоточенные нагрузки, или сечения начала и конца участков приложенной распределенной нагрузки – это узлы  $A$ ,

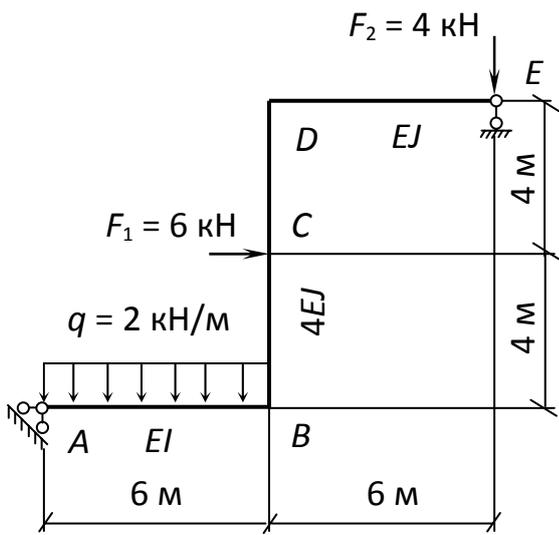


Рис. 4.1

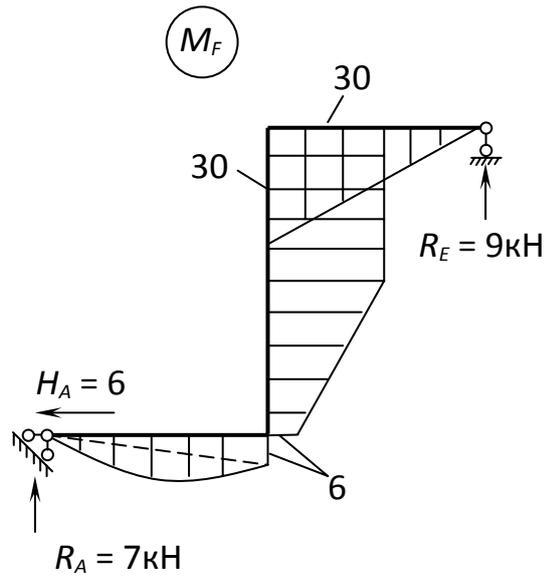


Рис. 4.2

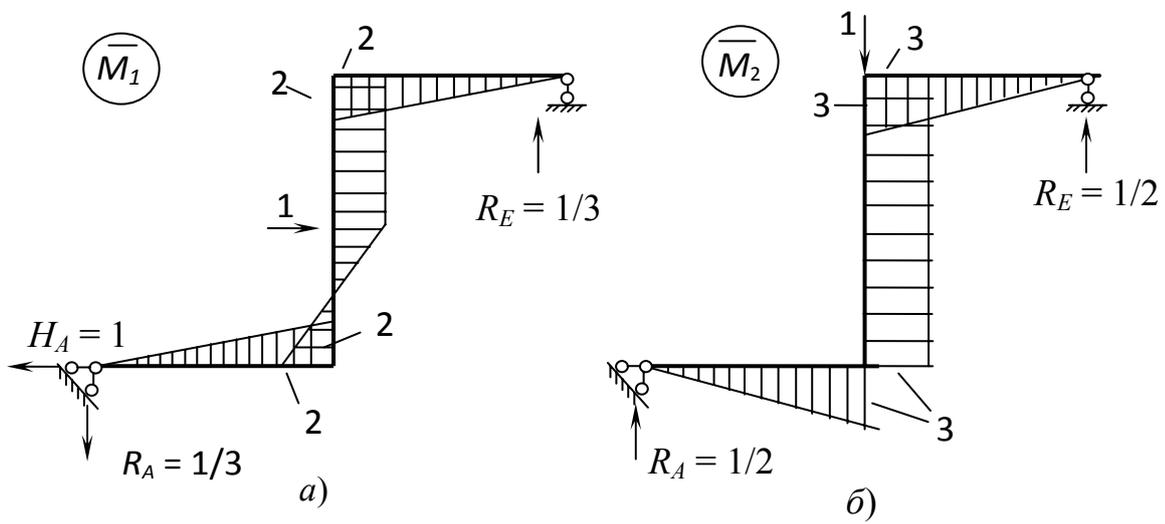


Рис. 4.3

$B, C, E$ . Тем самым обеспечивается постоянный закон изменения эпюры в пределах каждого участка. Далее на рис. 4.4 отдельно показаны пары перемножаемых участков. (Обычно так подробно не показывают, здесь это представлено для большей убедительности вышесказанного.) На участке  $A - B$  (см. рис. 4.4, а) необходимо перемножить параболу и треугольник по формуле (4.3). Получим

$$\Delta_x^{AB} = \frac{6}{6EJ} \left( -2 \cdot 6 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 6^2}{4} (0 + 2) \right) = -\frac{60}{EJ}.$$

На участке  $B - C$  (см. рис. 4.4, б) перемножаем две прямолинейные эпюры также по формуле (4.3) и получаем

$$\Delta_x^{BC} = \frac{4}{6 \cdot 4EJ} (-2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 30 + 6 \cdot 2) = \frac{8}{EJ}.$$

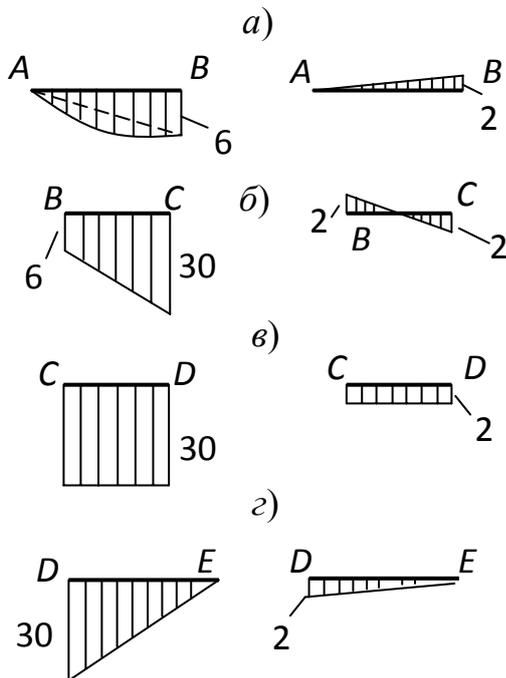


Рис. 4.4

На участке  $C - D$  (рис. 4.4, в) необходимо перемножить два прямоугольника. Очевидно, что для данного участка лучше пользоваться формулой Верещагина (4.2). Поэтому

$$\Delta_x^{CD} = \frac{1}{4EJ} \cdot 30 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{60}{EJ}.$$

И, наконец, на участке  $D - E$  (рис. 4.4, г) перемножаем две треугольные эпюры также по формуле (4.2):

$$\Delta_x^{DE} = \frac{6}{4EJ} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 2 = \frac{120}{EJ}.$$

Таким образом, линейное горизонтальное перемещение точки  $C$  равно:

$$\Delta_x = \Delta_x^{AB} + \Delta_x^{BC} + \Delta_x^{CD} + \Delta_x^{DE} = -\frac{60}{EJ} + \frac{8}{EJ} + \frac{60}{EJ} + \frac{120}{EJ} = \frac{128}{EJ} \left( \frac{\text{кН} \cdot \text{м}^3}{EJ} \right).$$

Перемещение  $\Delta_x$  положительно, т. к. в знаменателе величина жесткости при изгибе  $EJ$  является положительной. Полученный положительный знак показывает, что возникающее перемещение точки  $C$  происходит по горизонтали вправо, т. е. в соответствии с предположенным выбором направления единичного воздействия (единичная сила приложена в этой точке по горизонтали вправо).

Линейное перемещение измеряется в метрах (сантиметрах, миллиметрах), но пока значение перемещения до конца не определено. Предположим, что каждый стержень рамы на рис. 4.1 имеет прямоугольное поперечное сечение  $b \times h = 4 \times 10$  (см), причем  $h$  – высота поперечного сечения,  $b$  – ширина (размер, перпендикулярный плоскости рисунка). Рама изготовлена из материала с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Вычислим жесткость поперечного сечения при изгибе:

$$EJ = E \frac{bh^3}{12} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{12} \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 0,667 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 = 667 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Вычислим значение найденного горизонтального перемещения:

$$\Delta_x = \frac{128}{EJ} = \frac{128 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{667 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = 0,192 \text{ м} = 19,2 \text{ см}.$$

Это значение достаточно большое и свидетельствует о гибкости рассматриваемой рамы, т. е. длина участков большая, жесткость маленькая. В реальной практике перемещения достаточно малы по сравнению с линейными размерами самой системы. В дальнейшем во всех выражениях перемещений параметр жесткости  $EJ$  будем оставлять в виде константы, подразумевая, что ее значение можно при необходимости легко найти. Аналогично горизонтальному перемещению вычислим перемещение  $\Delta_y$ ,

перемножая эпюры  $\overline{M}_2$  и  $M_F$ . Так же, как и в предыдущем случае, перемножение производим по участкам. Разбиение на участки остается прежним. Приведем лишь окончательное выражение

$$\Delta_y = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_2 M_F dx = \frac{6}{6EJ} \left( 2 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{2 \cdot 6^2}{4} (0 + 3) \right) +$$

$$+ \frac{1}{4EJ} \cdot \frac{6 + 30}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{4EJ} \cdot 30 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{6}{6EJ} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 3 = \frac{414}{EJ}.$$

Положительный знак перемещения показывает, что возникает перемещение точки  $C$  по вертикали вниз. Заметим, что при вычислении перемещения  $\Delta_y$  пользовались формулой (4.3) при перемножении эпюр на участках  $A - B$  и  $D - E$  и формулой (4.2) при перемножении эпюр на участках  $B - C$  и  $C - D$ . Окончательно вычисляем полное перемещение точки  $C$  в плоскости

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = \sqrt{\left(\frac{128}{EJ}\right)^2 + \left(\frac{414}{EJ}\right)^2} = \frac{433,34}{EJ}.$$

**Пример 2.** Для рамы (см. рис. 4.1) определить угол поворота сечения  $D$ . Так как эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки построена ранее (см. рис. 4.2), то для нахождения перемещения нужно построить вспомогательную эпюру изгибающих моментов от единичного воздействия. В данном случае за единичное воздействие принимаем изгибающий момент, приложенный в точке  $D$ , например, по ходу часовой стрелки. Эпюра от единичного воздействия показана на рис. 4.5. Перемножение эпюр производим по участкам  $A - B$ ,  $B - C$ ,  $C - D$  и  $D - E$ , применяя в каждом случае одну из формул (4.2) или (4.3).

$$\Delta_\varphi = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_1 M_F dx = \frac{6}{6EJ} \left( -2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot 6^2}{4} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) \right) -$$

$$- \frac{1}{4EJ} \cdot \frac{6 + 30}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4EJ} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{6EJ} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{EJ}.$$

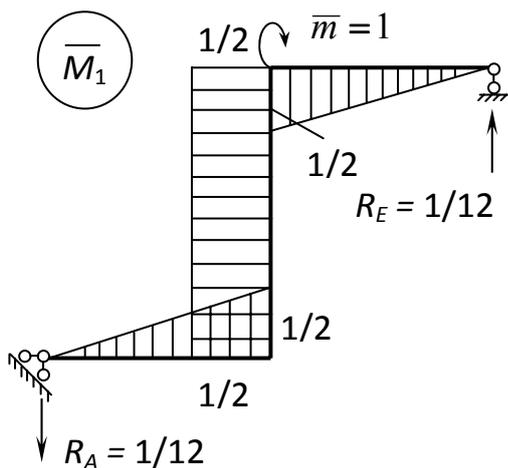


Рис. 4.5

Отрицательный знак, полученный в результате, показывает, что угловое перемещение точки  $D$  происходит против хода часовой стрелки, т.е. противоположно предполагаемому направлению единичного воздействия.

**Пример 3.** Для рамы, показанной на рис. 4.6, определить взаимное линейное смещение точек  $B$  и  $K$ .

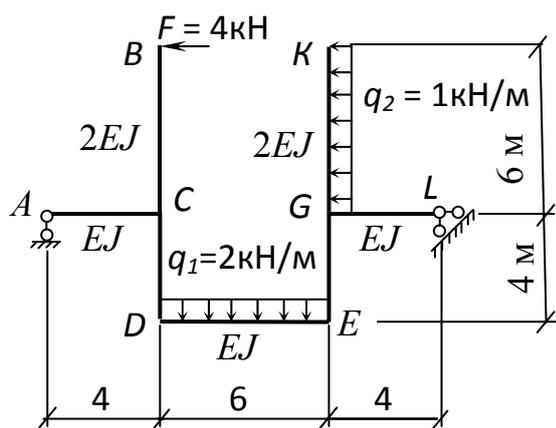


Рис. 4.6

Для нахождения искомого перемещения необходимо построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки и эпюру от единичного воздействия, в качестве которого принимаем силы, приложенные одновременно в сечениях  $B$  и  $K$  по прямой, соединяющей эти сечения. Эпюры показаны на рис. 4.7, 4.8. (Все значения на эпюре  $M_F$  вычислены в  $\text{кН} \cdot \text{м}$ .)

Перемножение эпюр  $M_F$  и  $\bar{M}_1$

проводим по участкам. В соответствии с видом эпюры от заданной нагрузки будем рассматривать участки  $A - C$ ,  $B - C$ ,  $C - D$ ,  $D - E$ ,  $E - G$ ,  $G - K$  и  $K - L$ . Так как на участках  $A - C$  и  $G - L$  эпюра от единичного воздействия нулевая, а поэтому и результат перемножения на этих участках тоже будет нулевым, то ограничимся записью перемножения на всех остальных участках рамы. При перемножении пользуемся формулой (4.3) перемножения эпюр.

$$\begin{aligned}
\Delta = & \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_1 M_F dx = \frac{6}{6 \cdot 2EJ} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 + \\
& + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (-2 \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 - 10 \cdot 12) + \\
& + \frac{6}{6EJ} \left( 2 \cdot 4 \cdot 10 - 2 \cdot 14 \cdot 10 + 4 \cdot 10 - 14 \cdot 10 - \frac{2 \cdot 6^2}{4} (10 + 10) \right) + \\
& + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (-2 \cdot 6 \cdot 30 - 2 \cdot 10 \cdot 14 - 10 \cdot 30 - 6 \cdot 14) + \\
& + \frac{6}{6 \cdot 2EJ} \left( -2 \cdot 6 \cdot 18 + \frac{1 \cdot 6^2}{4} (0 + 6) \right) = -\frac{992}{EJ}.
\end{aligned}$$

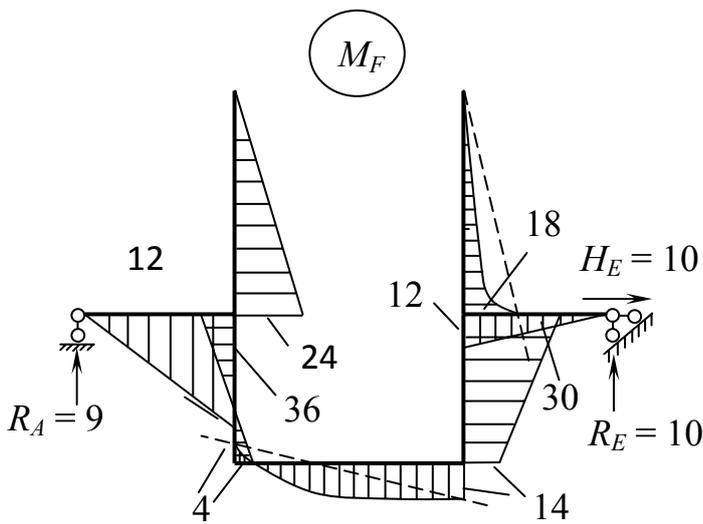


Рис. 4.7

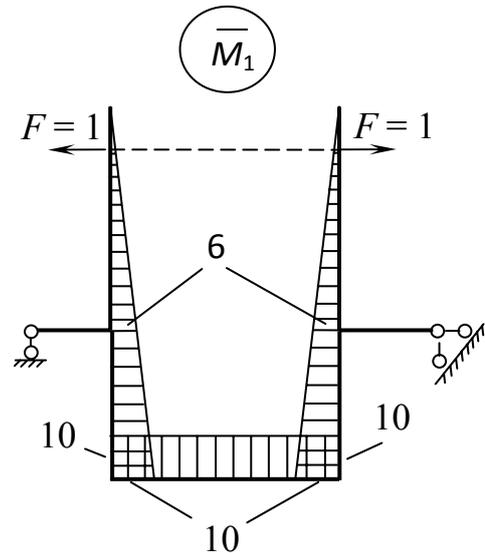


Рис. 4.8

Полученный отрицательный знак указывает, что сечения  $B$  и  $K$  не удаляются друг от друга, как предполагали, а наоборот, сближаются.

**Пример 4.** Для рамы, показанной на рис. 4.6, определить угол взаимного поворота сечений  $C$  и  $G$ . Для нахождения перемещений построим эпюру изгибающих моментов от единичных самоуравновешенных моментов, приложенных в точках  $C$  и  $G$  (рис. 4.9). Перемножаем эту эпюру с эпюрой

от внешнего воздействия (см. рис. 4.6), причем только на участках  $C-D$ ,  $D-E$  и  $E-G$  (на остальных участках на единичной эпюре имеем нулевые значения изгибающего момента):

$$\Delta_{\varphi} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_2 M_F dx = \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (-2 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 12) +$$

$$+ \frac{6}{6EJ} \left( 2 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 14 - 1 \cdot 14 + 1 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 6^2}{4} (1 + 1) \right) -$$

$$- \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{30 + 14}{2} \cdot 4 \cdot 1 = -\frac{118}{EJ}.$$

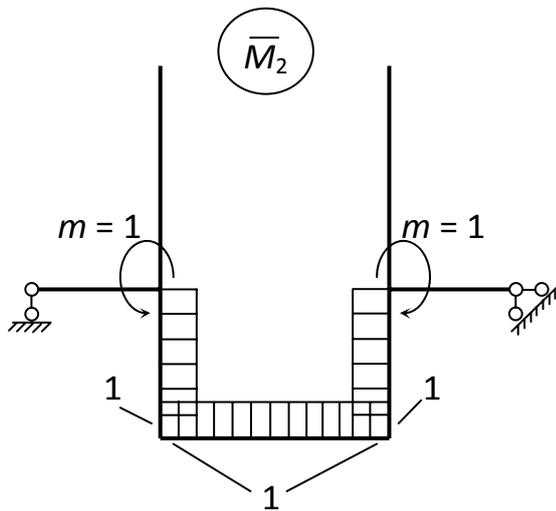


Рис. 4.9

При перемножении на участках  $C - D$  и  $D - E$  использована формула (4.3), на участке  $E - G$  – формула (4.2). Полученный отрицательный знак показывает, что действительный взаимный угол поворота сечений  $C$  и  $G$  происходит в сторону, противоположную выбранным единичным воздействиям.

## Список использованной и рекомендательной литературы

1. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. Вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Снитко Н. К. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов / 3-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 1980. – 431 с.
3. Руководство к практ. занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем); Учеб. пособие для студентов вузов / Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков и др.; Под ред. Г. К. Клейна. 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
4. Определение перемещений в стержневых системах. Матричная форма расчета : метод. указания к курсовой работе по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост.: С. А. Маврина, В. П. Валуйских. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2000. – 28 с.
5. Расчет многопролетной статически определимой балки. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост. : В.М. Кислов, И.А. Черноусова. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005 г. – 24 с.
6. Расчет фермы. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост. : В.М. Кислов, И.А. Черноусова. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006 г. – 32 с.
7. Расчет трехшарнирной арки. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост. : И.А. Черноусова. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006 г. – 24 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Многопролетные разрезные балки . . . . .	3
2. Расчет трехшарнирных арок . . . . .	26
3. Расчет ферм . . . . .	42
4. Определение перемещений стержневых систем от силового воздействия . . . . .	58
Список использованной и рекомендательной литературы . . . . .	68