

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет  
  
Кафедра физики и прикладной математики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «КОНЦЕПЦИИ  
СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ»**

Составители  
А. О. КУЧЕРИК  
А. А. АНТИПОВ

Владимир 2010

УДК 5  
ББК 20  
М54

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, профессор  
зав. кафедрой общей и прикладной физики  
Владимирского государственного университета  
*В. В. Дорожков*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**М54**    **Методические** указания к лабораторным работам по дисциплине «Концепции современного естествознания» / Владим. гос. ун-т ; сост. : А. О. Кучерин, А. А. Антипов. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 20 с.

Содержат описание восьми лабораторных работ, в которых изложены основные теоретические положения, сформулированы цель, задания. Цель издания – изучение студентами современной естественнонаучной картины мира.

Предназначены для студентов, магистров первого и второго курсов обучения по специальности 010501 (010500) – прикладная математика и информатика.

Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 12 назв.

УДК 5  
ББК 20

*В предлагаемом издании рассмотрены основы таких разделов современной математики, как теория колебаний, нелинейная динамика, фрактальная геометрия, статистический анализ. Знание методов и подходов данных разделов необходимо при компьютерном моделировании систем различной природы (физической, экономической, экологической и т.д.). Заданиям к лабораторным работам предшествует краткий теоретический материал, который поможет упростить их выполнение.*

## **ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

Работа в лаборатории требует от студента соответствующей подготовки для выполнения лабораторной работы. Кроме теоретического материала также необходимо использовать литературу, которую рекомендует преподаватель на лекции.

В отчет по лабораторной работе необходимо внести:

- Номер и название работы.
- Цель работы.
- Теоретическую часть.
- Текст программы, таблицы, расчетные формулы, графики и т.д.
- Вывод.

При работе в лаборатории следует быть внимательным и выполнять правила техники безопасности. Инструкция по технике безопасности находится в лаборатории.

Работа заканчивается составлением краткого заключения (вывода), в котором следует указать: программную среду, в которой реализована лабораторная работа, и привести краткий анализ результатов.

## Лабораторная работа № 1

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим три системы с одной степенью свободы, изображенные на рис. 1, *a*, *б* – механические системы и рис. 1, *в* – электрический колебательный контур. Составим для них уравнения движения.

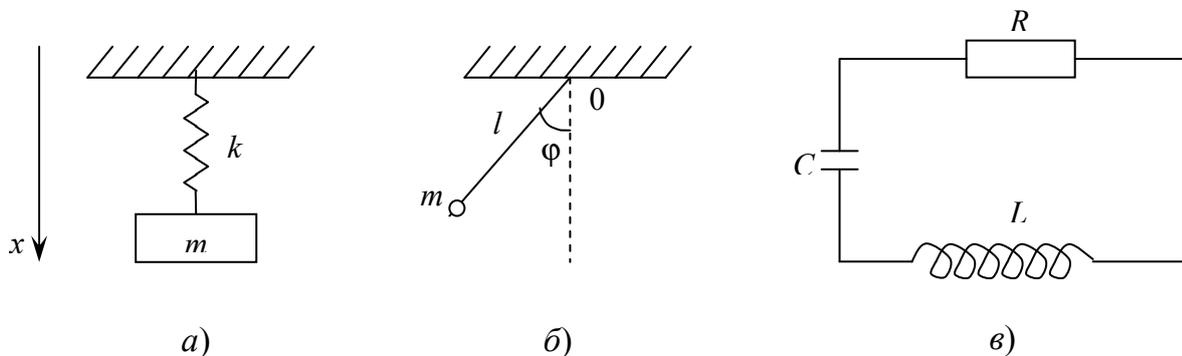


Рис. 1. Простейшие линейные системы с одной степенью свободы:  
*a* – пружинный маятник; *б* – математический маятник; *в* – RLC-контур

Ограничимся анализом малых вертикальных колебаний массы  $m$  около положения равновесия  $x = 0$  (см. рис. 1, *a*). Имеем

$$m\ddot{x} = F_{\text{пр}} + F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где  $F_{\text{пр}}$  и  $F_{\text{тр}}$  – сила пружины и сила трения. При малых отклонениях  $F_{\text{пр}} = -kx$ ,  $k = \text{const} > 0$  – жесткость пружины. Сила трения обусловлена сопротивлением воздуха и в линейном приближении пропорциональна скорости груза  $\dot{x}$ :  $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$ ,  $b = \text{const} > 0$ . В итоге уравнение динамики груза (в случае малых одномерных колебаний) принимает вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (2)$$

Свободные колебания груза возникают после его отклонения от положения равновесия  $x = 0$ ;  $\dot{x} = 0$ .

Рассмотрим теперь малые колебания математического маятника (см. рис. 1, *б*). Уравнение динамики

$$I\dot{\omega} = \sum_k M_k, \quad (3)$$

где  $I$  – момент инерции:  $I = ml^2$ ;  $\omega = \dot{\varphi}$  – угловая скорость массы  $m$ . Справа стоит сумма моментов сил, действующих на массу  $m$ . Учтем две силы – силу тяжести и силу вязкого трения, пропорциональную  $\dot{\varphi}$ . В соответствии с этим сумма моментов будет состоять из двух слагаемых:

$$M_1 = M_{\text{тяж}} = -mgl \sin \varphi, \quad M_2 = M_{\text{тр}} = -b \dot{\varphi}, \quad b = \text{const} > 0, \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести. Все моменты взяты относительно оси, проходящей через точку  $O$  подвеса маятника перпендикулярно плоскости чертежа. Таким образом, уравнение динамики записывается в виде

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -b \dot{\varphi} - mgl \sin \varphi. \quad (5)$$

Рассматриваются малые колебания, следовательно,  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда окончательно имеем

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (6)$$

Составим теперь уравнение динамики колебательного контура (см. рис. 1, в). Пусть  $q$  – заряд на конденсаторе. По определению электрический ток в контуре равен  $\dot{q}$ . Напряжения на сопротивлении  $R$ , индуктивности  $L$  и конденсаторе  $C$  соответственно равны  $R\dot{q}$ ,  $L\ddot{q}$ , и  $q/C$ . Сумма этих напряжений равна нулю, поскольку внешние источники питания отсутствуют:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \quad (7)$$

С точки зрения теории колебаний между рассмотренными системами (в случае малых колебаний) и соответственно между уравнениями (2), (6), (7) нет принципиальной разницы. Все три системы – линейные осцилляторы с затуханием, описываемые линейным уравнением

$$\ddot{y} + h\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (8)$$

Соответствие коэффициентов  $h$  и  $\omega_0$ , с одной стороны, и параметров систем (2), (6), (7), (8), с другой стороны, представлено в таблице.

Система	Уравнение	$y$	$2h$	$\omega_0^2$
Груз на пружине	(2)	$x$	$b/m$	$k/m$
Маятник	(6)	$\varphi$	$b/ml^2$	$g/l$
Колебательный контур	(7)	$q$	$R/L$	$1/LC$

Уравнение (8) описывает свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы. Коэффициент  $h$  называют коэффициентом затухания, а  $\omega_0$  – циклической частотой свободных колебаний в отсутствие затухания (при  $h = 0$ ).

Решение уравнения (8) и соответственно свободные колебания в системе будут различными в зависимости от коэффициента затухания  $h$  и частоты  $\omega_0$ . Возможны три случая:

- 1) трение отсутствует:  $h = 0$ ;
- 2) трение мало:  $h < \omega_0$ ;
- 3) трение велико:  $h > \omega_0$ .

### Задание к лабораторной работе № 1.

Провести компьютерное моделирование линейных систем с одной степенью свободы в указанных трех случаях. Описать все возможные поведения систем. Провести компьютерное моделирование линейных систем с одной степенью свободы в случае воздействия на них внешней периодической вынуждающей силы.

### Лабораторная работа № 2

#### ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ АТОМНОГО РЕАКТОРА

Рассмотрим простейшую модель динамики ядерного реактора.

Пусть  $N$  – плотность нейтронов в момент  $t$  и  $T$  – среднее время жизни одного поколения нейтронов. Спустя время  $t$ , плотность нейтронов будет равна  $kN$ ; по определению  $k$  – коэффициент размножения нейтронов. Изменение плотности нейтронов за единицу времени есть

$$\frac{dN}{dt} = \frac{kN - N}{T} = \frac{k-1}{T} N. \quad (9)$$

В стационарном состоянии  $k = 1$ , в простейшем случае  $k - 1$  – линейная функция изменения температуры  $\Theta$  реактора:

$$\frac{k-1}{T} = -\alpha(\Theta - \Theta_0), \quad (10)$$

где  $\alpha = \text{const}$ , а  $\Theta_0$  – стационарное значение температуры.

Учтем, что выделение тепла за 1 с пропорционально плотности нейтронов, и предположим, что отвод тепла (за 1 с) происходит в среду с постоянной температурой  $\bar{\Theta}$ . Тогда уравнением для  $\Theta$  будет

$$mc \frac{d\Theta}{dt} = AN - \lambda(\Theta - \bar{\Theta}). \quad (11)$$

Здесь  $m$  и  $c$  – масса и удельная теплоемкость ядерного топлива;  $A = \text{const} > 0$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопередачи от ядерного топлива с температурой  $\Theta$  к охлаждающей среде с температурой  $\bar{\Theta}$ .

В стационарном состоянии  $N = N_0 > 0$  и  $\Theta = \Theta_0 > \bar{\Theta}$ , где  $N_0$  определяется специальными физическими расчетами и здесь предполагается известной величиной, а  $\Theta_0$  определяется уравнением

$$AN_0 - \lambda(\Theta_0 - \bar{\Theta}) = 0. \quad (12)$$

В уравнениях (9) – (12) введем новое «безразмерное» время  $t_{\text{нов}} = \lambda t / mc$  и перейдем к новым безразмерным переменным

$$x = \frac{N - N_0}{N_0}; \quad y = \frac{\lambda}{AN_0}(\Theta - \Theta_0) = \frac{\Theta - \Theta_0}{\Theta_0 - \bar{\Theta}}. \quad (13)$$

После элементарных преобразований уравнения (9) – (12) примут вид

$$\dot{x} = -\nu y(1 + x); \quad \dot{y} = x - y. \quad (14)$$

Здесь  $\nu$  – безразмерный параметр:  $\nu = \alpha \frac{mc}{\lambda} (\Theta_0 - \bar{\Theta})$ . Точкой отмечается дифференцирование по  $t_{\text{нов}}$ .

## Задание к лабораторной работе № 2

Используя подход, рассмотренный в лабораторной работе № 1, исследовать поведение ядерного реактора в различных режимах при малом отклонении, отклонениях от состояния равновесия.

### Лабораторная работа № 3

## ПРОСТЕЙШИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Параметрические колебания обусловлены (периодическим) изменением каких-либо параметров системы. Пример приведен на рис. 2. Подтягивая и опуская конец нити (точка А), мы изменяем длину  $l$  маятника. Параметрические колебания, как и вынужденные, связаны с действием на систему внешней силы. Однако параметрические колебания возникают тогда, когда действие внешней силы ведет к изменению параметров системы, а не к непосредственным отклонениям от положения равновесия. Изменения параметров при надлежащих условиях приводят к возбуждению колебаний, которые и называют параметрическими.

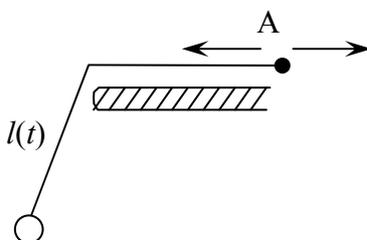


Рис. 2. Пример параметрического маятника

### Задание к лабораторной работе № 3

Вывести уравнение движения параметрического маятника. Исследовать режимы его движения на предмет возникновения резонанса и биений.

### Лабораторная работа № 4

## АВТОКОЛЕБАНИЯ. ГЕНЕРАТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Автоколебания широко распространены в природе. Необходимым условием их возникновения является наличие процессов энерго-и/или массообмена с окружающей средой. Принципиальным отличием этих колебаний от рассмотренных ранее и также происходящих в открытых системах является автономность. Иными словами, автоколебания возникают в системах, параметры которых не зависят явно от

времени. Существование автоколебаний обусловлено авторегулировкой поступления (отвода) энергии и/или вещества в систему (из системы). Важнейшим признаком автоколебаний является независимость их амплитуды и периода от начальных условий.

Рассмотрим, каким образом возникают колебания в ламповом генераторе (рис. 3).

Для этой схемы составим уравнения, описывающие изменения напряжения на конденсаторе  $C$  в  $LCR$ -контуре в цепи сетки лампы. При указанном на рис. 3 способе связи катушек увеличение анодного тока  $I_a$  и соответствующий рост магнитного потока  $\Phi$  в катушке  $L$  индуцируется ток  $I$ , направленный по правилу Ленца так, что конденсатор заряжается и напряжение на сетке  $U_c$  возрастает. Индуктивная связь катушек  $L_a$  и  $L$  создает в цепи  $LCR$ -контуре ЭДС индукции

$$E_{\text{инд}} = M \frac{dI_a}{dt}, \quad (15)$$

где  $M$  – коэффициент взаимной индукции катушек  $L_a$  и  $L$ . Знак в правой части этой формулы выбран так, чтобы  $E_{\text{инд}}$  было положительным, когда анодный ток растет. Тогда для рассматриваемого контура имеем

$$L \frac{dI}{dt} + RI + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (16)$$

Мы считаем, что ток положителен,  $I > 0$ , когда он приводит к зарядке конденсатора, т.е. полагаем  $I = dQ/dt$ . Соответственно напряжение на конденсаторе  $U_c = Q/C$ . С учетом этого оказывается, что  $I = C dU_c/dt$ . Тогда уравнение (16) принимает вид

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (17)$$

Важным свойством электронной лампы является то, что увеличение напряжения на ее сетке  $U_c$  приводит к увеличению анодного тока  $I_a$ . Как следствие, возрастает ЭДС  $E_{\text{инд}}$ , наведенная в катушке  $L$ , входящей в сеточную цепь. В результате растет ток  $I$  в сеточной цепи. В свою

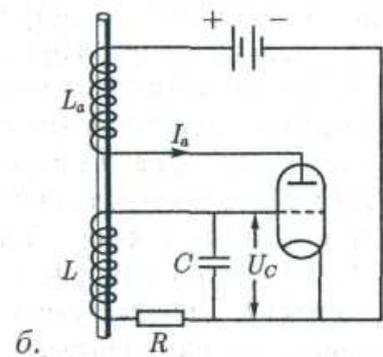


Рис. 3. Ламповый автогенератор Ван-дер-Поля

очередь, это приводит к дальнейшему росту напряжения на сетке, и, следовательно, к росту анодного тока и т.д.

Проведенное рассуждение демонстрирует принципиальную схему раскачки колебаний, т.е. возникновение неустойчивости стационарного режима. Ограничение амплитуды колебаний обусловлено насыщением анодного тока, т.е. прекращением роста  $I_a$  при увеличении  $U_c$ .

Для того чтобы получить условия самовозбуждения колебаний, примем, что анодный ток задается некоторой функцией

$$I_a = I_a(U_c). \quad (18)$$

Типичный вид этой зависимости (сеточно-анодной или просто сеточной характеристики лампы) приведен на рис. 4, а. Производная

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c} \quad (19)$$

называется крутизной сеточной характеристики. График зависимости  $S(U_c)$  приведен на рис. 4, б. Для того чтобы усиление лампы было максимальным, желательно выбирать рабочую точку так, чтобы крутизна сеточной характеристики лампы в этой точке была максимальна.

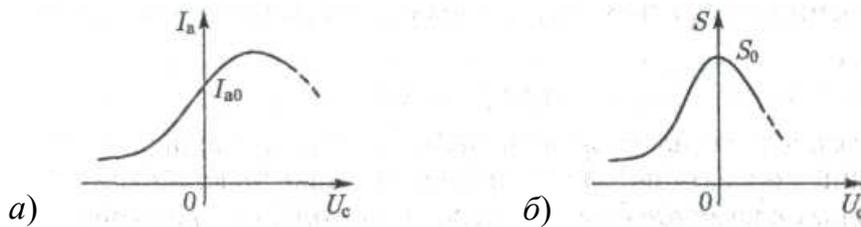


Рис. 4. Графики зависимости: а – анодного тока лампы от напряжения на сетке; б – анодно-сеточной характеристики лампы от напряжения на сетке

Для упрощения примем, что соответствующее рабочее напряжение (напряжение смещения)  $U_{c0} = 0$ . Этому соответствует анодный ток  $I = I_{a0}$ . Обычно при этом лампа оказывается наиболее чувствительной к изменениям потенциала сетки. Другими словами, так выбранный рабочий режим отвечает точке перегиба на кривой  $I_a(U_c)$  и соответствует точке максимума на кривой  $S(U_c)$ . Согласно сказанному в окрестности рабочей точки

$$\begin{aligned} S &= S_0 - S_2 U_c^2, \\ I_a &= I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка (20) в (17) дает

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[ S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (21)$$

где, как обычно,  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Обозначая далее

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad (22)$$

перепишем (21) в виде

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (23)$$

Это уравнение носит название **уравнения Ван-дер-Поля** и представляет собой одну из наиболее известных математических моделей автоколебаний.

С помощью уравнения Ван-дер-Поля легко проследить развитие неустойчивости стационарного состояния. Этому стационарному состоянию отвечает в нашей модели  $x = 0$ , т.е. отсутствие напряжения на сетке лампы. При малых  $x$  уравнение (23) можно приближенно записать в виде

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (24)$$

Это линейное уравнение аналогично уравнению линейного осциллятора с трением. Единственное отличие состоит в замене  $\gamma$  на  $(-\gamma)$ . Благодаря этому точка  $x = 0$  оказывается неустойчивой.

Необходимым условием неустойчивости оказывается выполнение неравенства

$$MS_0 > RC. \quad (25)$$

Это означает, что лампа должна обладать достаточно большим усилением, чтобы компенсировать потери на активном сопротивлении контура.

Поскольку слагаемое  $(-2\gamma\dot{x})$  аналогично тому, которое учитывает трение, о нем говорят как об **отрицательном трении**.

По мере развития неустойчивости нелинейное слагаемое  $2\gamma x^2 \dot{x}$  в уравнении (23) начинает играть все более и более существенную роль, эффективно создавая положительное трение. Когда влияние отрицательного и положительного трений уравновешивается, устанавливается стационарный колебательный режим (автоколебания). Этот режим

устойчив, поскольку при больших отклонениях от равновесия  $|x| \gg 1$  возникает сильное затухание, выводящее из системы избыточную энергию.

Коэффициент взаимной индукции  $M$  задает связь между анодным и сеточным токами. Естественно, что характер связи между анодной и сеточной цепями лампы существенно определяется знаком  $M$ . Если  $M < 0$ , то колебания тока в контуре подавляются анодным током. В этом случае говорят об **отрицательной обратной связи** между двумя подсистемами, в нашем случае – между анодной и сеточной цепями лампы. Если же  $M > 0$ , то анодный ток усиливает колебания в контуре. Тогда говорят о **положительной обратной связи**. Однако только одного факта наличия положительной обратной связи может оказаться недостаточно для возникновения неустойчивости равновесного состояния. Согласно (25) коэффициент взаимоиндукции должен превышать критическое значение

$$M > M_{\text{кр}} = RC / S_0. \quad (26)$$

Иными словами, только достаточно глубокая положительная обратная связь создает отрицательное трение.

Рассмотренное выше уравнение Ван-дер-Поля описывает возникновение автоколебаний, т.е. самоподдерживающихся периодических колебаний.

#### **Задание к лабораторной работе № 4**

Произвести численное моделирование уравнения Ван-дер-Поля при различных обратных связях.

### **Лабораторная работа № 5**

#### **ФУРЬЕ-АНАЛИЗ**

Фурье-анализ играет важную роль при исследовании и анализе сигналов. Основная идея метода состоит в разложении исходной функции в ряд по гармоническим функциям

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (27)$$

где коэффициенты  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $f(x)$  – раскладываемая в ряд функция.

Для анализа сигнала рассчитывают мощности сигнала. В простейшем случае для гармонического сигнала (синус или косинус) спектр состоит из одной ненулевой компоненты с частотой  $1/T$ , для периодического сигнала другой формы в спектре появляются кратные гармоники (с частотами  $2/T$ ,  $3/T$ ,  $4/T$ , ...) (рис. 5).

Более сложно выглядит спектр квазипериодического сигнала. Квазипериодический сигнал выглядит довольно просто, если представляет собой сумму спектров отдельных периодических функций (рис. 6, а), в общем случае он выглядит достаточно сложно (рис. 6, б). В обоих случаях спектр остается дискретным.

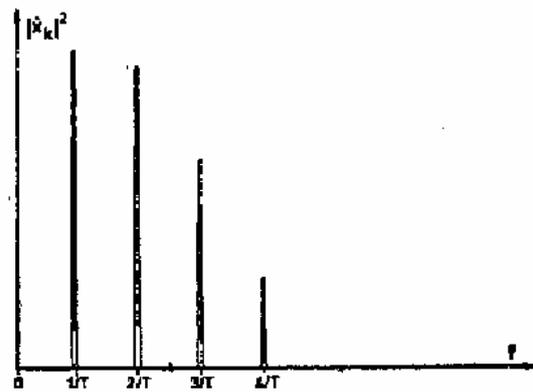


Рис. 5. Спектр гармонического сигнала

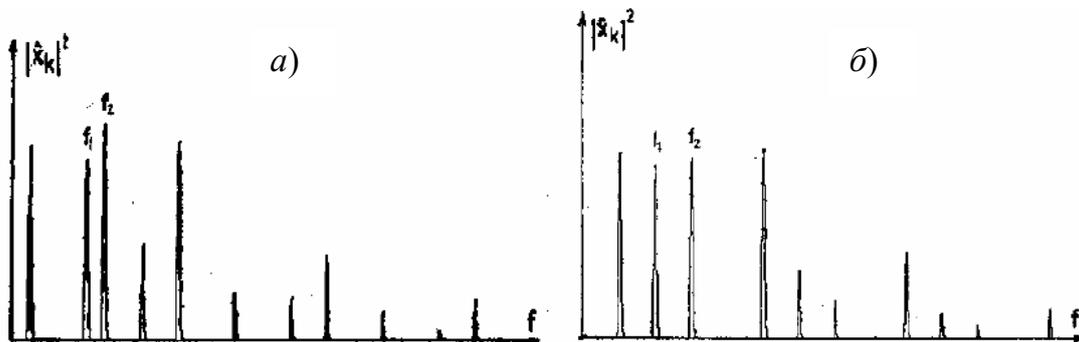


Рис. 6. Спектры квазипериодического сигнала

### Задание к лабораторной работе № 5

Произвести Фурье-преобразование и построить спектр мощности сиг-

налов, полученных в лабораторных работах 1 – 4. Также построить спектры мощности прямоугольного импульса и серии прямоугольных импульсов.

## Лабораторная работа № 6 ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть физическая система описывается уравнениями первого порядка

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

Это означает, что состояние системы в каждый данный момент времени полностью определяется заданием  $n$  чисел  $y_i$ . Введем  $n$ -мерное пространство, по осям координат которого будем откладывать значения  $y_i$ . Тогда состояние изучаемой системы в каждый данный момент времени представляется некоторой точкой в этом пространстве. Введенное таким образом пространство называется **фазовым**, а точка – **фазовой**, или изображающей, точкой.

С течением времени состояние системы меняется. Соответственно этому меняется и положение изображающей точки в фазовом пространстве, т.е. эта точка описывает некоторую кривую, называемую **фазовой траекторией**. Для описания поведения системы кроме уравнений движения необходимо задание начальных условий, т.е. задание значений переменных  $y_i$  в начальный момент времени:

$$t = t_0; \quad y_i = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

Эти соотношения означают задание начальной точки в фазовом пространстве, т.е. указание той точки, из которой выходит рассматриваемая фазовая траектория. Если состояние системы не меняется со временем, то фазовая точка неподвижна, т.е. вся фазовая траектория представляет собой одну точку.

Система называется **динамической**, если задание начальных условий полностью определяет ее поведение в последующие моменты времени. Все рассмотренные выше примеры относятся к динамическим системам. Примером нединамической системы является система, в которой действуют случайные силы, благодаря которым точное предсказание поведения делается невозможным.

В случае гладкой динамической системы фазовые траектории не пересекаются. В противном случае, взяв в качестве начальной точку пересечения, мы обнаружили бы, что точное предсказание поведения невозможно: из одной точки начинаются, по крайней мере, две различные фазовые траектории.

Совокупность фазовых траекторий, отвечающих различным начальным условиям, образует **фазовый портрет** системы.

Для систем с одной степенью свободы фазовое пространство двумерно и называется **фазовой плоскостью**. В качестве примера фазового портрета на фазовой плоскости можно привести рис. 7, отвечающий случаю гармонического осциллятора.

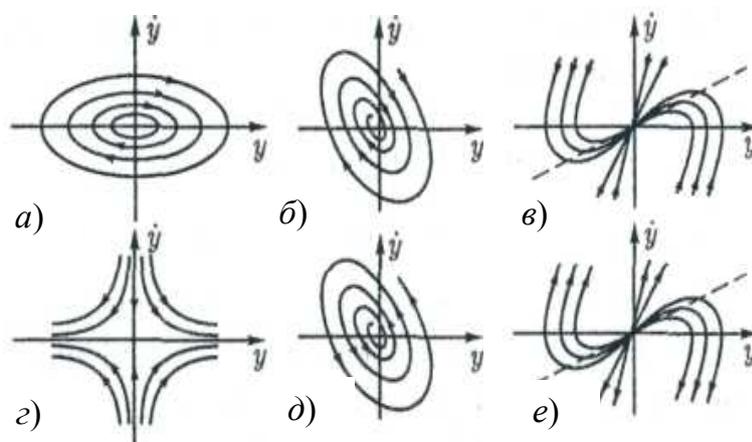


Рис. 7. Поведение фазовых траекторий на плоскости вблизи особых точек типа центра (а); устойчивого фокуса (б); устойчивого узла (в); седла (г); неустойчивого фокуса (д); неустойчивого узла (е)

### Задание к лабораторной работе № 6

Построить фазовые портреты всех сигналов, реализованных в лабораторных работах 1 – 4. Сравнить виды фазовых портретов и спектров мощности сигналов.

### Лабораторная работа № 7

#### ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС. СТРАННЫЙ АТТРАКТОР

Одной из основополагающих в теории нелинейных динамических систем, претерпевающих хаотические колебания своих параметров,

является работа Э. Лоренца, в которой он исследовал математическую модель конвективного движения – систему трех обыкновенных, но нелинейных дифференциальных уравнений. Они представляют собой динамические уравнения для макроскопических характеристик среды – компонент Фурье локальной скорости и температуры.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{31}$$

где  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  – положительные константы;  $\sigma$  – число Прандтля – безразмерный критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах.

Переменные и коэффициенты в системе Лоренца (31) имеют следующий физический смысл: переменная  $x$  пропорциональна скорости циркулирующей жидкости; переменная  $y$  характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, переменная  $z$  пропорциональна отклонению вертикального профиля температур от равновесного значения.

$$P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad r > 24,75; \quad \sigma = 10; \quad b = 8/3,\tag{32}$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $r = Ra/Ra_{\text{крит}} \sim \text{grad}T$  – число Рэлея (управляющий параметр);  $b$  – характерный размер системы.

Конвективное движение возникает благодаря совместному действию поля тяжести и градиента температуры. Решение уравнений может быть проведено лишь численно. Проведенный анализ показал, что при достаточно больших значениях градиента температуры поведение решения является настолько сложным, что соответствующие движения воспринимаются как хаотические. Более того, было установлено, что малейшее изменение начальных условий радикально меняет характер движения. Тем самым движение оказывается динамически неустойчивым. Поскольку начальные условия могут быть заданы лишь с конечной точностью, то предсказание вида движения по заданным начальным условиям становится практически невозможным. Таким образом, динамическая система, описываемая дифференциальными

уравнениями определенного вида, обладает непредсказуемым (хаотическим) поведением. Явление такого рода получило название детерминированного, или динамического, хаоса.

Хаотические системные динамики описывают траектории, которые не развиваются безгранично, как в случайном процессе, а остаются привязанными к структурному пространству с ограниченным и нецелым измерением: конечный результат – это характерные растягивание и складывание траекторий. Важной характеристикой таких систем является эффективное число степеней свободы. В случае системы Лоренца система имеет так называемый «странный аттрактор» (рис. 8), такое множество, которое обладает свойствами как стохастического аттрактора, так и регулярного.

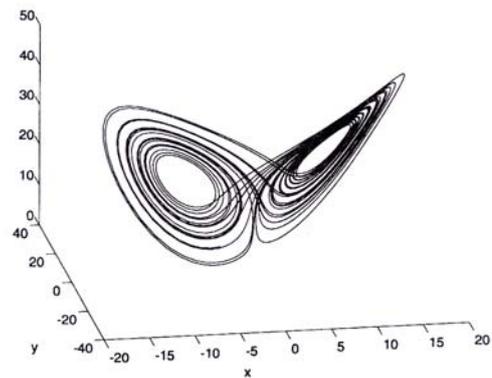


Рис. 8. Аттрактор системы Лоренца

### Задание к лабораторной работе № 7

Численно исследовать систему Лоренца при различных значениях управляющего параметра  $r$ . Построить фазовые портреты и спектры мощности реализованных сигналов.

### Лабораторная работа № 8

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящее время такой раздел современной математики, как фрактальная геометрия позволяет реализовать более «тонкий» анализ фазовых портретов, чем используемые традиционно сечения Пуанкаре, показатели Ляпунова и т.д. Это так называемый аппарат размерностей фазового пространства. В общем случае рассматриваемые размерности делятся на метрические и вероятностные.

В типичных случаях, когда аттрактор однороден, метрические размерности принимают одинаковую величину, которую принято назы-

вать фрактальной размерностью аттрактора  $D_F$ , которая для произвольного аттрактора  $D_F$  в  $n$ -мерном фазовом пространстве может быть вычислена как

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)], \quad (33)$$

где  $N(\varepsilon)$  – минимальное число шаров диаметром  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия аттрактора.

В формуле для вычисления фрактальной размерности одинаково важны все непустые шары. Это представляет серьезный недостаток для странных аттракторов, так как они неоднородны, т. е. некоторые области аттрактора посещаются чаще других. Требуется знание очень длинной траектории, чтобы гарантировать посещение даже очень маловероятных шаров. Поэтому каждый непустой шар нужно взвешивать с помощью относительной частоты, с которой он посещается типичной траекторией. Размерности, определяемые с учетом вероятности посещения траекторией различных областей аттрактора в фазовом пространстве, называют вероятностными. К этому классу и относится информационная размерность, определяемая следующим образом:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln I(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)], \quad I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i, \quad (34)$$

где  $I(\varepsilon)$  – количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности  $\varepsilon$ ;  $p_i$  – вероятность посещения фазовой траекторией  $i$ -го шара.

Возможно определение более строгой величины корреляционной размерности  $D_C$ , рассчитываемой по следующей формуле:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right) / \ln(\varepsilon) \right], \quad (35)$$

где  $p_i^2$  – вероятность того, что пара точек аттрактора принадлежит  $i$ -му шару диаметром  $\varepsilon$ . При расчете данное выражение преобразуют к выражению вида

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln C(\varepsilon) / \ln(\varepsilon)], \quad (36)$$

где  $C(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m \theta(\varepsilon - \rho(x_i, x_j))$  – корреляционный интеграл, рас-

считываемый через функцию Хэвисайда;  $x_i, x_j$  – точки в фазовом пространстве,  $\rho$  – расстояние.

Таким образом, размерность  $D_C$  определяется значением корреляционного интеграла  $C(\varepsilon)$ , характеризующим относительное число пар точек  $x_i, x_j$ , удаленных на расстояния  $r_{ij} = \rho(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ .

В общем случае при однородности тела фазового портрета значения предложенных размерностей должны совпадать, в противном случае неоднородность можно оценивать по разбросу в значениях размерностей, при этом должно выполняться следующее условие  $D_C \leq D_I \leq D_F$ .

### **Задание к лабораторной работе № 8**

Рассчитать размерности  $D_F$ ,  $D_I$ ,  $D_C$  для фазовых портретов, полученных в лабораторных работах № 6, 7.

### **Библиографический список**

1. *Рабинович, М. И.* Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1992. – 560 с. – ISBN 5-93972-012-9.
2. *Карлов, Н. В.* Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – М. : Физматлит, 2001. – 496 с. – ISBN 5-9221-0205-2.
3. *Анищенко, В. С.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко [и др.]. – М. : Ин-т компьютер. исследований, 2003. – 544 с. – ISBN 5-93972-289-X.
4. *Горяченко, В. Д.* Элементы теории колебаний / В. Д. Горяченко. – М. : Высш. шк., 2001. – 396 с. – ISBN 5-06-004166-2.
5. *Мандельброт, Б. Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Б. Мандельброт. – М. : Мир, 2003. – 656 с. – ISBN 5-93972-108-7.
6. *Федер, Е.* Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с. – ISBN 5-03-001712-7.
7. *Берже, П.* Порядок в хаосе / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 366 с. – ISBN 5-1148-0133-3.
8. *Потапов, А. А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки / А. А. Потапов. – М. : Университет. книга, 2005. – 848 с. – ISBN 5-98699-015-3.

9. *Неймарк, Ю. И.* Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М. : Физматлит, 2009. – 424 с. – ISBN 978-5-397-01245-4.

10. *Гукенхеймер, Дж.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – М. : Ин-т компьютер. исследований, 2002. – 560 с. – ISBN 5-93972-200-8.

11. *Гринченко, В. Т.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – М. : ЛКИ, 2007. – 264 с. – ISBN 978-5-382-00063-3.

12. *Шустер, Г.* Детерминированный хаос. Введение / Г. Шустер. – М. : Мир, 1988. – 240 с. – ISBN 5-03-001373-3.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ .....	4
Лабораторная работа № 2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ АТОМНОГО РЕАКТОРА.....	6
Лабораторная работа № 3. ПРОСТЕЙШИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	8
Лабораторная работа № 4. АВТОКОЛЕБАНИЯ. ГЕНЕРАТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ .....	8
Лабораторная работа № 5. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ.....	12
Лабораторная работа № 6. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО.....	14
Лабораторная работа № 7. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС. СТРАННЫЙ АТТРАКТОР .....	15
Лабораторная работа № 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.....	17
Библиографический список.....	19