

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

А.В. ДУХАНОВ
О.Н. МЕДВЕДЕВА

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Курс лекций

Владимир 2010

УДК 004.94

ББК 30в6

Д85

Рецензенты

Кандидат технических наук, профессор,
зав. кафедрой информатики и вычислительной техники
Владимирского государственного гуманитарного университета
Ю. А. Медведев

Генеральный директор ООО «СALS-технологии»,
профессор ВФ РАГС и МИЭМ, доктор технических наук
лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники,
академик Международной академии информатизации
А. С. Шалумов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Духанов, А. В. Имитационное моделирование сложных систем : курс лекций / А. В. Духанов, О. Н. Медведева ; Владимир. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 107 с.

ISBN 978-5-9984-0037-7

Формулируются основные понятия и концепции имитационного моделирования сложных систем. Подробно излагается методика построения имитационных моделей. Также рассматривается прогнозирование параметров системы как одно из приложений имитационного моделирования.

Курс лекций предназначен для студентов четвертого, пятого курсов очной формы обучения специальностей 010501 – прикладная математика и информатика, 230401 – прикладная математика при изучении дисциплины «Имитационное моделирование сложных систем».

Ил. 10. Табл. 9. Библиогр.: 7 назв.

УДК 004.94

ББК 30в6

ISBN 978-5-9984-0037-7

© Владимирский государственный университет, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ.....	7
Лекция 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ	9
1.1. Предварительные определения	9
1.2. Понятие «Модель».....	9
1.3. Требования, предъявляемые к модели. Функции модели ...	10
1.4. Классификация моделей	11
1.5. Примеры моделей	14
Лекция 2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	15
2.1. Понятие имитационного моделирования	15
2.2. Преимущества и недостатки имитационного моделирования.....	15
2.3. Процесс имитационного моделирования	17
Лекция 3. КОНЦЕПЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	20
Лекция 4. ДАТЧИКИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ	24
4.1. Генераторы псевдослучайных чисел	24
4.2. Оценка качества	26
4.3. Выбор параметров ЛК-генератора	27
4.4. Проверка генераторов псевдослучайных чисел.....	30
4.5. Проверка равномерности распределения элементов последовательности с помощью критерия Колмогорова – Смирнова.....	31
4.6. Спектральный тест	32
Лекция 5. СИСТЕМНАЯ ДИНАМИКА	34
5.1. Предпосылки и ограничения	34
5.2. Системная динамика	36
5.3. Базовые принципы системной динамики	38
5.4. Преобразование системно-динамической модели, реализованной в PSC, в код алгоритмического языка высокого уровня.....	43
Лекция 6. КОНЦЕПЦИЯ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	56

Лекция 7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	61
7.1. Обозначения.....	64
7.2. Предварительные понятия и определения	64
7.3. Оценка параметров линейной многофакторной модели.....	66
7.4. Построение линейной многофакторной регрессионной модели.....	67
Лекция 8. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ	77
8.1. Прогнозирование с помощью методов экстраполяции.....	80
8.2. Модель Хольта – Уинтерса.....	98
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	105
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	106

ПРЕДИСЛОВИЕ

В самых разных областях практической деятельности – организации производства и снабжения, эксплуатации транспорта, планировании боевых действий и выборе вооружений, расстановке кадров, бытовом обслуживании и так далее – возникают сходные задачи, решение которых можно осуществить путем построения имитационных моделей.

Цель курса лекций «Имитационное моделирование сложных систем» – не делая акцента ни на одной области практики, познакомить студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика» и «Прикладная математика», с основными разделами моделирования сложных систем во времени. Курс охватывает следующие разделы:

1. Общие принципы моделирования;
2. Имитационное моделирование;
3. Концепция универсальной системы имитационного моделирования;
4. Датчики псевдослучайных чисел;
5. Системная динамика;
6. Концепция объектно-ориентированной системы моделирования;
7. Статистическая обработка результатов экспериментов;
8. Прогнозирование параметров системы.

В разделе «Общие принципы моделирования» приводится определение понятия «модель», требования, предъявляемые к модели, функции модели и классификация моделей.

В разделе «Имитационное моделирование» приводится понятие имитационного моделирования, рассматривается процесс, а также преимущества и недостатки имитационного моделирования.

В разделе «Концепция универсальной системы имитационного моделирования» приводятся основные принципы построения универсальной системы имитационного моделирования.

В разделе «Датчики псевдослучайных чисел» приводится описание датчиков псевдослучайных чисел и их применения при построении имитационных моделей сложных систем, в которых присутствует фактор случайности.

В разделе «Системная динамика» рассматривается совокупность принципов и методов анализа динамических управляемых систем с обратной связью и их применения для решения производственных, организационных и социально-экономических задач.

В разделе «Концепция объектно-ориентированной системы моделирования» содержится описание основных принципов объектно-ориентированной системы моделирования.

В разделе «Статистическая обработка результатов экспериментов» рассматривается методика оценки влияния факторов системы на ее отклик.

В разделе «Прогнозирование параметров системы» рассматриваются методы оценки неизвестного параметра в будущем периоде или в неизвестной части пространства.

Курс лекций предваряет «Введение», которое содержит краткую историческую справку о возникновении и развитии моделей и моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе жизнедеятельности нам приходится сталкиваться с проявлениями окружающего нас мира. На нас различным образом воздействуют другие люди, животные, техногенные и природные объекты. Мы также воздействуем на них и получаем соответствующую реакцию. Она может возникать почти мгновенно или с некоторым запаздыванием. Негативная реакция способствует накоплению отрицательного опыта, а позитивная – положительного. Таким способом мы отвечаем на вопрос: «Что будет, если...?» и формируем знания о процессах, происходящих в окружающем мире. Благодаря этим знаниям, расширяются наши возможности.

Начало истории моделирования можно отнести к истокам самого человечества и цивилизаций. Наскальные рисунки, которые иллюстрируют события того далекого времени, можно назвать «моделью». Скульптуры античной эпохи можно определить как «модели» соответствующих персонажей.

С ростом цивилизаций совершенствовались модели, расширялось их применение. Например, в эпоху древнего Рима и даже ранее люди могли создавать динамические модели, то есть имитировать (воспроизводить) нужные события. Будущие войны отрабатывали приемы на деревянных мечях. Полководец планировал на столе с помощью карты и каменных фигурок предстоящее сражение. Во всех случаях все преследовали одну общую цель – получить положительный эффект с будущих событий. Модель позволяла вышеуказанным людям улучшить свои действия и избежать (снизить влияние) негативных событий.

Развитие моделирования неразрывно связано с успехами всей науки. Так в момент открытия дифференциальных уравнений стали появляться математические модели динамических процессов. С появлением электронных вычислительных устройств связаны компьютерные имитационные модели, способные имитировать исследуемые процессы в различных масштабах времени.

Цель нашего курса – рассмотреть основные понятия и принципы имитационного моделирования, условия, при которых оно необходимо, основные свойства и содержание таких моделей. Перед этим мы познакомимся с основными понятиями моделирования и классификацией моделей.

Лекция 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Предварительные определения

Определение 1.1. Изоморфизмом называют взаимнооднозначное отображение из одной системы S в другую систему S' такое, что любому элементу $x \in S$ ставится единственный элемент $x' \in S'$ и наоборот.

Определение 1.2. Гомоморфизмом называют отображение элементов одной системы S в другую систему S' с сохранением значимых свойств (отношений).

1.2. Понятие «Модель»

Когда говорят о моделировании, то оперируют тремя основными понятиями:

1) *объект* – тот реальный предмет, процесс, который необходимо изучить или описать;

2) *система* – объект, процесс в котором участвующие элементы связаны некоторыми связями и отношениями;

3) *модель* – результат отображения исследуемого объекта, системы в известных для нас компонентах и правилах.

Фактически мы ввели общее понятие модели как представление (отображение) исходного объекта в рамках заданных форм и правил. Теперь приведем одно из развернутых определений данного понятия.

Определение 1.3. Модель – представление объекта, системы или понятия в некоторой форме, отличной от реального существования, для его (ее) замещения другой системой с целью изучения оригинала или воспроизведения его каких-либо свойств.

Модель может быть точной копией какого-либо объекта (хотя и в другом масштабе и из другого материала) или сохранять лишь часть значимых при постановке задачи его свойств. Во втором случае модель – абстракция объекта.

Когда модель полностью дублирует объект, то она ему изоморфна. Абстрактные модели – гомоморфные по отношению к объекту.

Большинство моделей лишь гомоморфны, то есть являются упрощенным представлением реального мира или абстракцией. Тем не менее, они отвечают на поставленные в рамках той или иной задачи вопросы.

1.3. Требования, предъявляемые к модели. Функции модели

Требования

Модель должна быть:

- 1) простой и понятной пользователю;
- 2) целенаправленной, надежной в смысле гарантии от абсурдных ответов;
- 3) удобной в управлении и «общении» с ней;
- 4) полной, с точки зрения решения главных задач;
- 5) адаптивной, то есть позволять без существенных усилий переходить к другим модификациям или обновлять данные, иначе, совершенствоваться во взаимодействии с пользователем;
- 6) адекватной – в полной мере в соответствии с постановкой задачи воспроизводить оригинал.

Функции

В силу того, что идея представления системы с помощью модели носит столь общий характер, четкого определения функций модели не приводят. Тем не менее, можно определить пять основных направлений функций.

1. Модели могут помочь нам упорядочить нечеткие или противоречивые понятия, например, при сетевом планировании некоторого производственного процесса.

2. Все языки, в основе которых лежит слово, оказываются неточными, когда дело доходит до сложных понятий и описаний. Речь идет о том, что рассматриваемая система более компактно представляется в форме принятых обозначений, блоков, уравнений и так далее, нежели в словесном описании. В качестве примера можно привести уравнение теплопроводности.

3. Модели часто применяются как превосходное средство обучения лиц, которые должны уметь справляться со всевозможными случайностями до возникновения критической ситуации (модели космических кораблей, тренажеры для обучения водителей и др.).

4. Прогнозирование поведения моделируемых объектов. Здесь модель может отвечать на вопрос: «Что будет, если..?».

5. Модели позволяют производить контролируемые эксперименты в ситуациях, где экспериментирование на реальных объектах экономически нецелесообразно или практически невозможно. Здесь обычно варьируют несколько параметров системы, поддерживая остальные неизменными, и наблюдают результаты эксперимента. Часто, моделируя систему, можно узнать значительно больше о ее внутренних взаимосвязях, чем оперируя с реальной системой.

1.4. Классификация моделей

Мы можем давать различные классификации моделей, но не одна из них не будет полностью правильной (как мы уже знаем, идея представления системы с помощью модели носит столь общий характер).

Тем не менее, можно привести общую классификацию по принципу перемещения от точности до абстракции (рис. 1).

Укрупненная классификация

1. Физическая (натуральная) модель внешне напоминает изучаемую систему и позволяет воспроизводить ее физические свойства.

2. Масштабируемая модель может представлять объект в различных масштабах (уменьшенные модели автомобилей, модель атомов).

3. Аналоговая модель – такая модель, в которой свойство реального объекта представляется другим свойством, аналогичным по поведению объекта.

4. Управленческие игры – когда во взаимодействие вступают люди и машинные компоненты.

5. Компьютерная модель – модель, которая представляется в виде компьютерной программы. Она позволяет проводить автоматизированное исследование изучаемой системы.

6. Математическая модель – модель, в которой для представления процесса используют символы, а не физические свойства (дифференциальные уравнения и тому подобные). Математические модели – совокупность математических объектов и отношений между ними, которая адекватно отображает некоторые свойства объекта.

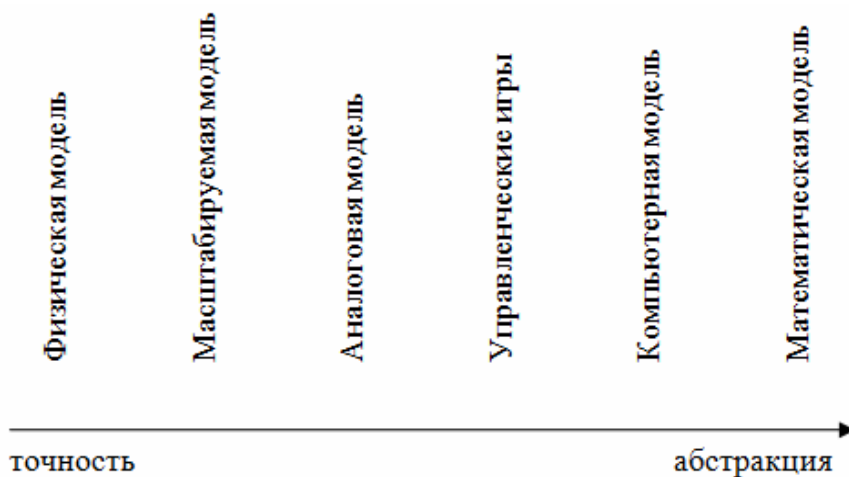


Рис. 1. Укрупненная классификация моделей по принципу перемещения от точности к абстракции

Математическая модель представляет собой самостоятельное описание исследуемой системы в принятых терминах, понятиях, соотношениях. Она сама по себе является самостоятельной структурой. В соответствии с правилами, ограничениями, принятыми и выведенными для соответствующего класса структурных компонент, над моделью можно проводить исследования, как бы оторвавшись, абстрагировавшись от реального объекта. Когда модель построена корректно и является адекватной, можно открывать новые свойства исследуемого объекта. Благодаря этому, с помощью абстрактных моделей могут осуществляться научные открытия.

Детализированная классификация моделей

Классификацию моделей можно осуществлять более детально, уточняя общие классы более частными. Объединяя приводимые в различной литературе классы, можно получить следующий список моделей:

1) *физическая* – использует эффекты законов физики, которые встречаются в оригинале;

2) *биологическая* – биологически связана или подобна оригиналу;

3) *материальная* – использует материалы, которые могут быть в оригинале;

4) *геометрическая* – геометрически подобна оригиналу;

5) *структурная* – структурно подобна оригиналу, содержит связи между компонентами, которые подобны связям в оригинале;

6) *функциональная* – функции модели, то есть процессы ввода/вывода, подобны функциям оригинала;

7) *детерминированная* – модель, в которой не задействованы случайные эффекты;

8) *стохастическая* – модель, на которую воздействуют случайные эффекты (в модели используются датчики случайных/псевдослучайных чисел для имитации случайных эффектов);

9) *статистическая* – не изменяется во времени;

10) *динамическая* – изменяется во времени;

11) *непрерывная* – все параметры модели представляют собой непрерывные функции времени, а значения параметров изменяются без скачков;

12) *дискретная* – имеет скачкообразные изменения значений параметров;

13) *компьютерная* – модель, в роли которой выступает компьютерная программа;

14) *теоретическая* – модель, полученная на основе изучения физических закономерностей;

15) *формальная* – модель, полученная на основе проявления свойств моделируемого объекта во внешней среде, то есть рассмотрения оригинала как кибернетического черного ящика;

16) *линейная* – состоит из линейных соотношений;

17) *нелинейная* – содержит хотя бы одно нелинейное соотношение;

18) *алгоритмическая* – представляется в виде систем уравнений;

19) *аналитическая* – представляется в виде зависимостей выходных от внутренних параметров.

Некоторые классы, в том числе последние шесть классов моделей, относятся к группе математических моделей.

1.5. Примеры моделей

Пример 1

Microsoft Flight Simulator – серия гражданских авиасимуляторов, выпускаемых корпорацией Microsoft. MSFS можно рассматривать как специализированное программное обеспечение, использующееся как тренажерный комплекс. Оно используется летными учебными заведениями для обучения пилотов. Например, MSFS позволяет освоить первоначальные навыки пилотирования в простых и сложных метеоусловиях на различных этапах полета, от предполетной подготовки, взлета и полета до выполнения снижения и посадки. Могут рассматриваться штатные и внештатные ситуации, в том числе в рамках тренировки взаимодействия экипажа по отработке аварийных ситуаций согласно руководству по летной эксплуатации соответствующего типа воздушного судна. На базе тренажерных комплексов, использующих MSFS в качестве платформы, принимаются некоторые зачеты и экзамены.

Приведем классы моделей, к которым можно отнести Microsoft Flight Simulator:

- 1) функциональная;
- 2) стохастическая;
- 3) динамическая;
- 4) дискретная;
- 5) компьютерная;
- 6) теоретическая;
- 7) алгоритмическая (и да, и нет).

Пример 2

Подопытная мышь:

- 1) физическая;
- 2) биологическая;
- 3) материальная;
- 4) структурная (и да, и нет);
- 5) функциональная;
- 6) динамическая;
- 7) непрерывная.

Лекция 2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Приведенный в лекции 1 список классов моделей не содержит такого понятия как имитационная модель. На самом деле имитационные модели могут быть одновременно представителями нескольких классов.

2.1. Понятие имитационного моделирования

Когда говорят об имитационном моделировании, то предполагают использование некоторой структурной схемы, математического обеспечения, а также вычислительного устройства для создания соответствующей программы. Отсюда следует определение имитационного моделирования.

Определение. Имитационной моделью называют абстрактную динамическую модель, реализованную, как правило, на ЭВМ, и воспроизводящую в рамках установленных ограничений поведение оригинала в хронологическом порядке.

Имитационные модели не способны формировать решение в таком виде, как в аналитических моделях, а служат лишь средством для анализа поведения системы (оригинала) в условиях, которые определяются экспериментатором. По сути, имитационное моделирование является экспериментальной и прикладной методологией, которая имеет следующие цели:

- 1) описать поведение системы;
- 2) построить теории и гипотезы, которые могут объяснить наблюдаемое поведение;
- 3) использовать данные теории для предсказания будущего поведения системы.

2.2. Преимущества и недостатки имитационного моделирования

Имитационное моделирование целесообразно применять при наличии условий:

1) не существует законченной математической постановки данной задачи (например, модель многофазных, многоканальных систем массового обслуживания);

2) аналитические методы имеются, но очень сложны и трудоемки, а имитационное моделирование дает более простой способ решения;

3) аналитические решения имеются, но их реализация невозможна из-за недостаточной подготовки имеющегося персонала. В этом случае сопоставляются затраты на работу с имитационным моделированием и затраты на приглашение специалистов со стороны;

4) кроме оценки определенных параметров необходимо осуществлять наблюдение за ходом процесса в течение определенного периода;

5) имитационное моделирование может быть единственно возможным вследствие трудности постановки эксперимента и наблюдения явлений в реальных условиях (наблюдение за поведением космических кораблей);

6) может понадобиться сжатие шкалы времени (как замедление, так и ускорение; например, исследование проблемы развития городов).

Вышеперечисленные условия можно определять как значимые преимущества применения имитационных моделей. Также можно заметить, что имитационное моделирование – непревзойденное средство создания средств обучения в виде тренажеров, симуляторов и другого. С помощью имитационного моделирования можно разыграть реальные процессы и ситуации, которые помогут исследователю понять и прочувствовать проблему, что стимулирует процесс поиска нововведений. Благодаря этому, порядка 30 % из всех используемых на практике моделей – имитационные модели.

Вместе с тем имитационное моделирование обладает рядом недостатков.

Во-первых, имитационное моделирование представляет собой весьма дорогостоящий процесс, требующий существенных затрат временных ресурсов и привлечения высококвалифицированных специалистов.

Во-вторых, в процессе моделирования не представляется возможным получить точный результат. При этом оценка точности может быть выполнена путем анализа чувствительности модели к изменению определенных параметров.

В-третьих, имитационное моделирование в действительности не отражает полного положения вещей. Данный факт необходимо учитывать при анализе исследуемого объекта (процесса).

2.3. Процесс имитационного моделирования

Построение имитационной модели, так же как и любое исследование, требует проведения работ по следующим этапам.

1. Определение границ модели.
2. Разработка концептуальной модели.
3. Подготовка исходных данных.
4. Создание концептуальной модели в виде диаграммы.
5. Трансляция модели.
6. Оценка адекватности модели.
7. Планирование машинных экспериментов:
 - а) стратегическое планирование;
 - б) тактическое планирование.
8. Моделирование – проведение эксперимента.
9. Анализ (интерпретация) результатов.
10. Документирование и реализация.

Границы системы определяются таким образом, чтобы охватить те компоненты, взаимодействие которых определяет важные стороны поведения системы. При этом система должна быть способна сама генерировать любую ситуацию, любые затруднения, которые, возможно, потребуется проанализировать.

Разработка концептуальной схемы объекта (системы) – один из самых важных этапов исследования. На этом этапе осуществляется *формализация системы*, то есть переход от реального объекта к некоторой логической схеме (абстракции). Такая формализация начинается со словесного описания реальности в системе принятых терминов и формальных понятий. Здесь приводятся сведения о природе и параметрах (характеристиках) элементарных явлений исследуемой системы, о виде и степени взаимодействия

между ними, о месте и значении каждого элементарного явления в общем процессе функционирования системы. Завершается формализация построением общей схемы процессов, подлежащих исследованию.

В дальнейшем полученная схема уточняется и дополняется в соответствии с тем уровнем детализации, который определяется (стратифицируется) постановкой задачи. Действия, которые позволяют представить модель в виде совокупности частей (подсистем, элементов), называют *декомпозицией* системы. Составные части модели должны обеспечивать сохранение целостности системы, с одной стороны, а с другой – достижение поставленных целей моделирования.

Процесс построения концептуальной схемы системы завершается структуризацией (указанием и общим описанием связей между выделенными элементами системы), а также укрупненным описанием динамики функционирования системы и ее возможных состояний. От того, как будет построена концептуальная схема имитационной модели, зависит результат исследования.

Следующий, не менее важный этап имитационного моделирования – **подготовка исходных данных**. В некоторых случаях он проходит параллельно с построением концептуальной схемы. Фактически на данном этапе формируется информационное пространство системы. Здесь выявляются количественные характеристики (параметры) функционирования системы и ее элементов, численные значения которых составят исходные данные для моделирования.

Когда подготовлены исходные данные и концептуальная схема модели, последняя **оформляется в виде диаграммы**, состоящей из стандартных блоков. Это технический этап, благодаря которому схема модели становится доступной для понимания широкому кругу специалистов, владеющих соответствующей методикой. Как правило, диаграмма оформляется с помощью специализированных прикладных программных средств, таких как BP Win, Microsoft Project, Visio.

На этапе **трансляции** модели осуществляется преобразование диаграммы модели в отдельную компьютерную программу или

сценарий специализированной системы моделирования. В современных версиях таких систем этот этап выполняется автоматически, благодаря наличию визуальных средств построения моделей.

Оценка адекватности полученной модели осуществляется путем ее экспертизы и проигрывания на тестовых данных. На данном этапе модель проверяется на корректность, то есть на соответствие реальному объекту в рамках поставленной задачи (границ системы). Когда модель не адекватна, то она подвергается исправлениям и корректировкам до приемлемого уровня степени уверенности, с которой можно судить о корректности выводов, касающихся реальной системы.

Добившись адекватности модели, исследователи осуществляют **стратегическое и тактическое планирование эксперимента**. Когда говорят о стратегическом планировании, то предусматривают схему получения желаемых результатов с помощью имитационной модели. На тактическом уровне планируют способ проведения каждой серии испытаний, предусмотренных планом эксперимента.

На этапе экспериментирования осуществляется проигрывание запланированных сценариев с целью получения желаемого результата.

После того, как получены результаты моделирования, наступает важный этап исследования – **интерпретация результатов**. По полученным выходным данным эксперимента строятся выводы о поведении исследуемой системы. При этом очень важно не пропустить эффект двойного прочтения одних и тех же результатов. В этом случае следует дорабатывать модель.

На этапе интерпретации результатов также дается заключение о полезности или бесполезности модели.

В случае полезности модели осуществляется ее **реализация**, то есть практическое использование. На данном этапе выполняются вспомогательные действия, такие как регистрация хода осуществления исследования и его результатов, документирование процесса создания и использования модели.

Лекция 3. КОНЦЕПЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В предыдущей лекции были рассмотрены принципы построения имитационной модели сложной системы. Они являются классическими и подходят для имитационного моделирования любой динамической системы. Основным недостатком этих принципов – трудоемкость построения модели для систем, содержащих сложные многоуровневые процессы. Основные трудности при построении имитационных моделей вызывают математический и программный этапы. В большинстве случаев математическое и программное обеспечение в разных моделях содержат одинаковые и (или) похожие блоки. Поэтому при создании моделей на разработку необходимых модулей нерационально расходуется время.

Подход (концепция) универсальной системы моделирования, который основывается на автоматизации процедур, позволяет не только сэкономить время разработки и реализации имитационной модели, но и сделать процесс самого моделирования более простым и доступным. Тем самым сокращается вероятность возникновения ошибок в ходе создания моделей из-за недостаточного знания языковых средств, невнимательности в работе с большими объемами информации и т.д.

Концепция универсальной системы имитационного моделирования (УСИМ) основывается на трех принципах:

- 1) простота;
- 2) модульность;
- 3) универсальность.

Принцип простоты заключается в минимуме необходимых знаний пользователя о системе моделирования, и как следствие, в минимуме трудозатрат.

Принцип модульности предусматривает наличие в УСИМ общих для различных классов систем моделей – готовых модулей. При необходимости они подсоединяются к разрабатываемой мо-

дели, уточняются и дополняются. Как показывает анализ задач, возникающих в сфере системного анализа и исследования операций, автоматизации проектирования и исследования сложных систем, основной формой задания реальных объектов является описание элементов системы (модулей УСИМ) в виде конечных автоматов, а связей между элементами – многоуровневых схем сопряжения.

Заключительный принцип построения УСИМ – принцип универсальности. Он определяется способностью УСИМ охватить сложные многоуровневые объекты произвольной структуры, элементы которых являются динамическими системами в широком понимании. Существующие системы моделирования можно условно разделить на две группы: системы, использующие классические языки моделирования (например, GPSS, iThink Analyst, Arena) и специализированные системы, ориентированные на решение задач имитационного моделирования какой-то конкретной узкой предметной области (например, ПАК «Волна»). Очевидно, что достоинства одной группы систем моделирования являются одновременно недостатками другой. Например, наличие в системе моделирования языковых средств для разработки сценариев дает возможность решать широкий класс соответствующих задач. Специализированные системы моделирования позволяют проводить более детальное и адекватное моделирование объектов, для анализа которых они собственно и создавались. С этой точки зрения, полностью универсальную систему имитационного моделирования построить, естественно, невозможно. Но вызывает интерес создание системы, охватывающей наибольший спектр реальных объектов и, прежде всего, систем, продуктом которых является управление.

Учитывая рассмотренные принципы, концептуальная схема УСИМ может быть представлена в виде, показанном на рис. 2.

Данная схема основана на том, что УСИМ должна осуществлять, по крайней мере, следующую совокупность операций:

- 1) ввод и формирование области исходных данных;
- 2) визуальное представление элементов моделируемой системы и схем сопряжения;
- 3) имитация модуля и взаимодействия элементов системы;

- 4) обработка результатов моделирования;
- 5) управление моделью.

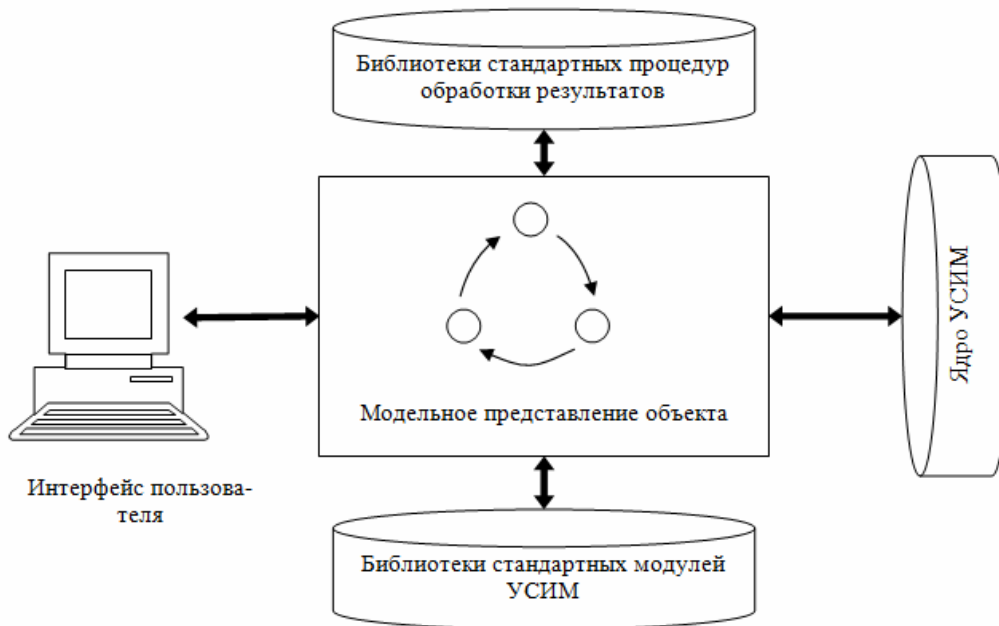


Рис. 2. Концептуальная схема УСИМ

Исходя из этого, основным назначением элементов концептуальной схемы УСИМ будет следующее:

- 1) для интерфейса пользователя – обеспечение представления состава и структуры модели реальной системы посредством модулей и возможных схем сопряжения УСИМ;
- 2) для библиотек стандартных процедур имитации и модулей – реализация модельного представления исследуемой системы;
- 3) для библиотек стандартных процедур обработки результатов – представление и предварительный анализ результатов моделирования в виде, удобном для восприятия и дальнейшего анализа;
- 4) для ядра УСИМ – обеспечение взаимодействия элементов УСИМ и управление процессом моделирования.

Применение УСИМ позволяет сократить количество этапов разработки, при этом время реализации имитационной модели существенно сокращается.

Этапы построения универсальной модели:

- 1) разработка концептуальной модели;
- 2) подготовка исходных данных;
- 3) реализация концептуальной модели в виде диаграммы;

- 4) планирование машинных экспериментов;
- 5) моделирование;
- 6) анализ результатов.

Таким образом, технология моделирования в УСИМ, базирующаяся, главным образом, на экстраполяции исходных данных о некоторой физической системе на содержательную основу УСИМ, исходные положения которой определены независимо от моделируемого объекта, позволяет не только сократить промежуток времени между возникновением идеи о построении модели и получением результатов, но и открывает широкие возможности по проведению самых разнообразных экспериментов с составом, структурой и способами функционирования реальной системы.

Лекция 4. ДАТЧИКИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Приведем основные определения, используемые при изучении материалов лекции.

Определение 4.1. Числа A, B называют взаимно-простыми, если их наибольший общий делитель (НОД) равен единице. Например, числа 5 и 10 не являются между собой взаимно-простыми, так как их НОД равен пяти. Числа 15 и 49 – взаимно простые.

Определение 4.2. Некоторое значение $l \geq 0$ считается равным k по модулю m , где $0 < k < m$, если остаток от деления данного числа на m равен k . Выражение записывается следующим образом:

$$l = k \bmod m.$$

4.1. Генераторы псевдослучайных чисел

Когда ставится задача имитационного моделирования некоторой сложной системы, зачастую в ней предполагается наличие случайностей. Например, в описании системы финансовых потоков в торговой компании встречается случайный фактор – спрос на продаваемую продукцию. Если мы рассматриваем производство болтов для некоторой сложной металлической конструкции, то их размер также может служить случайной величиной. Поэтому в имитационной модели должен присутствовать блок, отвечающий за моделирование случайных величин. Такие блоки должны выдавать последовательность случайных значений, которые должны быть распределены по заданному закону.

В качестве «истинных» генераторов случайных чисел используют различные физические объекты, изменение состояния которых можно зарегистрировать существующими приборами. Например, из урановой руды вылетают частицы, которые можно зарегистрировать. Интервал времени между регистрациями частиц можно принять как случайную величину. Мы же будем говорить о ге-

нераторах псевдослучайных чисел, которые можно реализовать на ЭВМ.

Определение 4.3. Датчиком псевдослучайных чисел называют алгоритм (программный модуль), который позволяет генерировать последовательность разных элементов, значения которых находятся в заданном диапазоне.

Нужно четко понимать, что любой генератор дает не случайную, а детерминированную последовательность чисел. У этой последовательности есть период, то есть длина подпоследовательности, в которой все значения не повторяются.

Наиболее популярны и одни из простых в реализации датчики, основанные на линейном конгруэнтном (ЛК) методе.

Определение 4.4. ЛК-генератор – алгоритм, вычисляющий последовательность $\{x_n\}$ целых чисел по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m. \quad (1)$$

Чтобы определить генератор, нужно задать четверку целых чисел $\{m, a, c, x_0\}$. Будем предполагать, что $m > 2, 1 < a < m$ ($a = 0$ или $a = 1$ брать бессмысленно, а все остальные по модулю m эквивалентны числам из диапазона $0 \leq a < m$), $0 \leq c < m$ и $0 \leq x_0 < m$.

Нам будет удобно выделить три случая:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, c \neq 0, \quad (2)$$

$$x_{n+1} = ax_n \bmod m, m - \text{составное число}, \quad (3)$$

$$x_{n+1} = ax_n \bmod m, m - \text{простое число}. \quad (4)$$

Генераторы (3), (4) являются частным случаем (2) и определяются тройкой параметров $\{m, a, x_0\}$, причем на самом деле в случае (4) выбор x_0 безразличен, при $1 \leq x_0 < m$ получается один и тот же генератор.

Члены ЛК-последовательности с шагом $k \geq 0$ связаны формулами

$$x_{n+k} = \left(a^k x_n + \frac{a^k - 1}{a - 1} c \right) \bmod m,$$

$$x_{n+k} = a^k x_n \bmod m.$$

Таким образом, мы можем «прогнозировать» поведение ЛК-генераторов. Они являются строго детерминированными.

4.2. Оценка качества

Оценка качества генератора псевдослучайных чисел осуществляется по двум критериям:

- 1) равномерность распределения;
- 2) независимость испытаний.

Равномерность распределения можно трактовать как симметричность расстановки дискретных точек, посещаемых последовательностью. Независимость также можно рассматривать как определенную симметрию, но уже в пространстве размерности больше единицы. Значение x_{n+1} ЛК-последовательности зависит от единственного предыдущего x_n . Период повторения последовательности l определяется как $l = \min\{t : x_n = x_{n+t}\}$. Очевидно, что $l \leq m$. При выборе значения параметров генератора следует добиваться увеличения l .

Число различных значений, встречающихся среди членов последовательности, также равно l . Даже если члены последовательности затем нормируются к интервалу $[0,1)$ с помощью линейного преобразования $u_n = x_n/m$, все равно значения последовательности $\{u_n\}$ не замечают весь диапазон $[0,1]$, а принимают лишь l состояний. Именно этой характеристикой ограничена разрешающая способность имитационного эксперимента по вероятности.

Естественно, предпочтительно использовать ЛК-генераторы с полным периодом $l = m$. Можно показать, что генераторы с неполным периодом обычно имеют не просто $l < m$, а существенно меньше (в несколько раз). Помимо того, обычно на дискретной сетке $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ значения, встречающиеся в качестве членов $\{x_n\}$ у генераторов с неполным периодом, расставлены **неравномерно**. Это сильно сказывается на результатах моделирования при попытках увеличить точность: при мелком разбиении сетки $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ на равные интервалы мы заинтересованы в равномерном попадании точки в каждый из этих интервалов.

Введем еще одно определение, которое отражает качество датчика псевдослучайных чисел.

Определение 4.5. Число $s_0 = \min_{s \in \mathbb{N}} \{s : (a-1)^s = 0 \pmod{m}\}$ называется

мощностью ЛК-последовательности. Она показывает, многочленом какой степени (по k) связаны между собой два значения последовательности x_n и x_{n+k} . Этот показатель тем лучше, чем он больше – при этом ослабевают, усложняются связи между соседними членами последовательности.

Требуется, чтобы последовательность чисел, вырабатываемая генератором, была хорошо перемешана. Если мы считаем $\{x_n\}$ моделью случайной последовательности, то ее члены должны походить на результаты независимых испытаний.

4.3. Выбор параметров ЛК-генератора

Приведем некоторые утверждения, которые связывают рассмотренные характеристики качества генератора с его набором параметров $\{m, a, c, x_0\}$.

Лемма 1. Для ЛК-генератора $l \leq m$.

Лемма 2. Пусть последовательность $\{y_n\}$ получается из последовательности $\{x_n\}$ с помощью правила $y_n = x_n \pmod{d}$. Если d – делитель m , то из (1) немедленно следует $y_{n+1} = (ay_n + c) \pmod{d}$ и период последовательности $\{y_n\}$ не превосходит d .

Лемма 3. Период последовательности ЛК-генератора (2) равен m (то есть является полным), если и только если выполнены условия:

1. Аддитивный член c взаимно прост с модулем m .
2. Если p – простой делитель модуля $m \Rightarrow p$ – делитель числа $b = a - 1$.
3. Если 4 – делитель модуля $m \Rightarrow 4$ – делитель $b = a - 1$.

Лемма 4. Пусть a и m взаимно просты. Если $a^\lambda = 1 \pmod{m}$, то λ называется порядком числа a по модулю m . Обозначим $\lambda(m) = \max_{1 \leq a < m} \{\lambda \in \mathbb{Z}^+ : a^\lambda = 1 \pmod{m}\}$ – наибольшее возможное зна-

чение порядков чисел по модулю m . Те числа a , на которых $\lambda(m)$ достигается, называются первообразными элементами по модулю m . Максимально возможный период последовательности для генератора (3) равен $\lambda(m)$. Он реализуется, если выполнены два условия.

1. Стартовое значение x_0 взаимно просто с модулем m .
2. Мультипликатор a – первообразный элемент по модулю m .

Лемма 5. Период последовательности ЛК-генератора (4) равен $m-1$ при всяком $a: 1 < a < m$.

Лемма 6. Пусть $1 < a < m$, $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$ – каноническое разложение модуля m , все p_k – простые, все $e_k \geq 1$, тогда два утверждения эквивалентны.

- 1) $\exists s \in N$ такое, что $(a-1)^s = 0 \pmod m$.
- 2) Хотя бы один $e_k > 1$ и $b = a-1$ представимо в виде $b = rp_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_t^{f_t}$, где все $f_k \geq 1$, все p_k взаимно просты с r .

Если число s существует, оно ограничено снизу величиной

$$s \geq \max_{1 \leq k \leq t} \left\{ \left\lceil \frac{e_k}{f_k} \right\rceil \right\}.$$

Сформулируем теперь кратко основные выводы из приведенных лемм, которые позволяют сделать выбор в пользу тех или иных значений параметров ЛК-генератора.

Модуль m должен быть больше для всех трех типов генераторов, поскольку он непосредственно влияет на период повторения ЛК-последовательности (см. лемму 1). Обычно ограничением сверху служат соображения быстродействия генерирующей числа программы, поскольку реализация арифметики длиной больше машинного слова вызывает довольно значительные накладные расходы. Обычно для конкретного компьютера, очевидно, такое значение не должно превышать m , чтобы эти расходы были приемлемы.

Если предполагается использовать последовательность $\{y_n\}$, полученную из последовательности $\{x_n\}$ генератора указанным в лемме 2 способом, то нужно использовать более простой модуль m .

Пример. Для широко распространенных последовательностей с модулем $m = 2^n$ часто утверждают, что младшие разряды их членов *менее случайны* (здесь речь может идти о генераторе фон Неймана, когда осуществляется возведение в квадрат числа в двоичном представлении и в полученном результате выбирается набор бит заданной длины). Действительно, в соответствии с леммой 2 вырезка из x_n младших s разрядов (т.е. последовательность $y_n = x_n \bmod 2^s$) имеет период повторения меньше либо равный 2^s . В частности, самый младший разряд либо мигает, либо постоянен. Если всё же m по каким-то причинам выбрано составным, то последовательности на сетке $\{0, 1, \dots, d-1\}$, где $d < m$, лучше получать преобразованием $y_n[x \cdot d / m]$, то есть стараться использовать старшие разряды.

Леммы 3 – 5 указывают условия, при которых генераторы (2) – (4) обладают максимально возможным периодом при данном m . Все они сводятся к ограничениям, накладываемым на мультипликатор a . Самые слабые ограничения имеет случай (4). Эти утверждения также явно указывают возможную длину периода: отметим, что в случае (4) ЛК-генератор всегда обладает почти полным периодом – $l = m - 1$, в случае (2) полный период $l = m$ сравнительно легко достижим, а в случае (3) период всегда существенно меньше m .

Если m представить как каноническое разложение, то есть $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$, то для достижения максимального периода в генераторе (2) мультипликатор a определяется как $a = 1 + r p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_t^{f_t}$. При этом в соответствии с леммой 6 мощность последовательности (2) не меньше

$$s \geq \max_{1 \leq k \leq t} \left\{ \left[\frac{e_k}{f_k} \right] \right\}.$$

Известно, что ЛК-генераторы с мощностью $s \leq 5$ устойчиво зарекомендовали себя с плохой стороны.

Генератор типа (2), как это следует из леммы 3, не может иметь полного периода, если m – простое число. Поскольку мы вынуждены выбрать составное $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$, то производные от $\{x_n\}$

последовательности на сетке $\{0, 1, \dots, q-1\}$, построенные с помощью преобразования $y_n = x_n \bmod q$, имеют уменьшенный период, если только q равно одному из p_k . Если стоит задача генерации последовательностей, равномерно распределенных на дискретных целочисленных сетках с любым q , $1 < q < m$, то генератор типа (2) использовать невозможно.

Генератор типа (4) обладает почти полным периодом и равномерно заполняет своими значениями сетку $\{0, 1, \dots, m-1\}$. При этом его мощность бесконечна, а модуль является простым числом.

Таким образом, наилучшими характеристиками обладают генераторы двух типов.

1. Со свободным членом $c \neq 0$, составным модулем m , и мультипликатором a , выбранным согласованным с m способом, как описано выше. Они обладают полным периодом $l = m$, значения последовательности x_k равномерно посещают все точки сетки. При соответствующем выборе параметров можно добиться приемлемой мощности.

2. Со свободным членом $c = 0$ и простым модулем m . Они обладают почти полным периодом $l = m - 1$. Значения последовательности x_k равномерно посещают все точки сетки, кроме нуля. Обладают большой мощностью.

4.4. Проверка генераторов псевдослучайных чисел

Как мы уже обсуждали выше, оценка качества генератора псевдослучайных чисел осуществляется по двум критериям:

- 1) равномерность распределения;
- 2) независимость испытаний.

Тестирование генератора производится по следующему принципу:

- 1) с помощью генератора вырабатывается последовательность чисел длины $t \geq 1$;
- 2) вычисляется некоторый функционал от полученной выборки;
- 3) процесс повторяется некоторое количество раз и строится эмпирическое распределение функционала;

4) эмпирическое распределение с помощью стандартной техники гипотез сравнивается с тем, которое функционал должен иметь, если считать выборку извлеченной из действительно равномерно распределенной случайной последовательности.

К подобным тестам относятся проверки распределения длин серий – длин интервалов, разнообразные модификации покер-теста, традиционные проверки равномерности распределения элементов последовательности по критериям χ^2 и Колмогорова – Смирнова, а также спектральный тест.

4.5. Проверка равномерности распределения элементов последовательности с помощью критерия Колмогорова – Смирнова

Критерий Колмогорова – Смирнова используется в случаях, когда объем выборки находится примерно в пределах от 10 до 100 элементов.

Пусть задана сетка $E = \{0, 1, \dots, m-1\}$, на которой осуществляется генерация псевдослучайных чисел. Обозначим попадание сгенерированного числа $x_n, n = \overline{1, N}$ (N – объем выборки) в узел $k, k = \overline{0, m-1}$ как событие e_k . Естественно, что одно или несколько событий e_k обязательно произойдет. Количество наступлений события $e_k, k = \overline{0, m-1}$ называют его абсолютной частотой, кото-

рую обозначим через ν_k . Очевидно, что $\sum_{k=0}^{m-1} \nu_k = N$. Таким образом,

можно определить наблюдаемую вероятность p_k^w как $p_k^w = \frac{\nu_k}{N}$.

Если мы говорим о равномерном распределении моделируемой случайной величины, то теоретическая вероятность наступления события $e_k, k = \overline{0, m-1}$ равна $p_k^t = p(e_k) = \frac{1}{m}$. Чтобы определить

соответствующие распределения (наблюдаемое и теоретическое),

достаточно для каждого k вычислить сумму $F_k^h = \sum_{i=0}^k p_i^h, h \in \{w, t\}$.

Когда вычислены данные распределения, находится максимум между их абсолютными разностями: $D_f = \max_{k=0, m-1} |F_k^w - F_k^t|$. Полученное значение сравнивается с критическим D_e . Если $D_f < D_e$, то гипотеза о равномерном распределении полученной последовательности является состоятельной, в противном случае последовательность не распределена по нормальному закону.

4.6. Спектральный тест

Спектральный тест проверяет, насколько хорошо перемешаны последовательно выдаваемые ЛК-генератором с полным периодом значения из сетки $E = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Обозначим через X_k вектор из r последовательных значений элементов последовательности $\{x_n\}$, то есть $X_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1})^T$. Для всякого $r \geq 1$ имеется ровно l различных X_k , через l членов последовательности элементы начинают повторяться. Рассматривая X_k как точки r -мерного пространства, можно заметить, что они лежат в «дискретном» гиперкубе E^r с ребрами длины m (точнее, в его точках с целыми координатами). Имеющиеся l различных векторов X_k каким-то образом распределены среди m^r точек гиперкуба E^r (рис. 3).

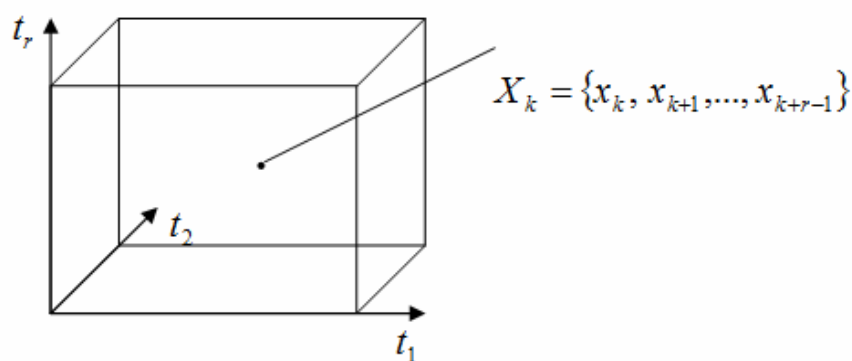


Рис. 3. «Дискретный» гиперкуб E^r

Если бы последовательность $\{x_n\}$ была действительно случайной, то последовательные вырезки длины r из этой последовательности равновероятно посещали бы все точки гиперкуба E^r . Опре-

делим плотность распределения посещений точки $T = \{t_1, \dots, t_r\} \in E^r$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$ как

$$d(T) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \delta_{T, X_k},$$

где δ_{T, X_k} – частота события попадания вектора X_k в точку T .

Для случайной последовательности она одинакова для всех m^r точек гиперкуба $T \in E^r$ и равна $d(E) = \frac{1}{m^r}$. Такая симметрия рав-

носильна равной вероятности появления в последовательности $\{x_n\}$ на любом месте любого вектора размерности r (т.е. вектора $T = \{t_1, \dots, t_r\}$, где все t_i берутся из сетки $E = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$).

Хороший ЛК-генератор должен иметь более равномерную расстановку точек в E^r для любых длин вырезок $r = 1, 2, 3, \dots$.

Для неслучайной последовательности ЛК-генератора плотность естественно определить как

$$d(T) = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{T, X_k},$$

где l – период повторения последовательности.

Если период последовательности l фиксирован, то влиять на величину плотности мы не можем. Однако выбор мультипликатора a существенно влияет на расстановку точек, обладающих ненулевой плотностью посещения вырезками внутри гиперкуба.

Вычислить $d(T)$ для последовательности ЛК-генератора в явном виде трудно. Поэтому для проверки рассматриваемой гипотезы используют дискретное преобразование Фурье этой плотности.

Лекция 5. СИСТЕМНАЯ ДИНАМИКА

Системная динамика – передовая и одна из самых эффективных методологий имитационного моделирования. Ее разработал известный американский финансист Дж. Форрестер и использовал для моделирования макро- и микроэкономических процессов. Чтобы понять суть методологии, изложим в начале предпосылки создания методологии и ограничения.

5.1. Предпосылки и ограничения

Общая структура систем

Для моделирования динамического поведения системы необходимо различать 4 иерархические ступени её структуры: внешняя граница замкнутой системы; цепи обратной связи как основные структурные элементы внутри границы системы; переменные, называемые **уровнями**¹ (в теории управления – состояние), которые представляют накопления (аккумуляцию) в цепях обратной связи; переменные, называемые **темпами**², которые отражают активность в цепях обратной связи.

Компоненты переменной темпа:

- 1) цель;
- 2) наблюдаемые условия;
- 3) выявление несоответствий;
- 4) действия, обусловленные несоответствием.

Граница системы

Она выбирается таким образом, чтобы охватить те компоненты, взаимодействие которых определяет важные стороны поведения системы. В пределах этой границы система должна быть спо-

¹ Более строго уровнем называется характеристика запаса системы, представляющая собой емкость резервуара.

² Темпом называется скорость изменения уровня, характеризующего запас системы. Характеризует потоки, входящие и выходящие из резервуаров. Темпы не зависят непосредственно друг от друга.

собна сама генерировать любую ситуацию, любые затруднения, которые, возможно, потребуется проанализировать. Принцип замкнутости предполагает, что поведение исследуемой системы не навязывается ей извне, а создается внутри границ.

Чтобы построить имитационную модель системы, в первую очередь, необходимо выявить компоненты, чье взаимодействие определяет те стороны поведения системы, которые должны быть исследованы. Для каждого конкретного случая выбор ограничивается компонентами, лежащими внутри динамической границы, соответствующей данному случаю, все же другие компоненты исключаются как нерелевантные в данной ситуации и, следовательно, находятся за пределами границы.

Структура цепи обратной связи

Динамическое поведение системы генерируется узлами обратной связи. Цепи обратной связи являются основными ячейками систем. На рис. 4 приведена простейшая структура цепи обратной связи.

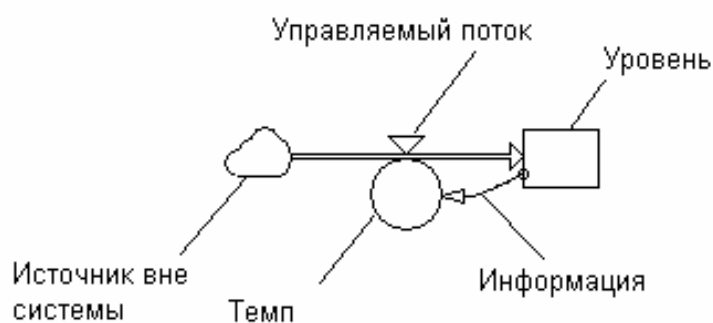


Рис. 4. Простейшая структура обратной связи

Цепь обратной связи описывается переменными двух типов: темп и уровень. Они необходимы и достаточны для построения модели системы. Как видно из рис. 4, цепь обратной связи должна содержать по одной из этих переменных. Цепь обратной связи соответствует структуре, внутри которой принятие решения – уравнение темпа управляет потоком (процессом) или действием потока. Действие потока аккумулируется (интегрируется) и тем самым определяет уровень системы. Информация об уровне – основа для управления темпом потока. Темп – причина изменения уровня. Изменение уровня определяется только темпами потока. Один уро-

вень может воздействовать на другой только посредством темпа потока. Ни один темп не может непосредственно воздействовать на другой темп, так же как и уровень не может воздействовать на другой.

Уравнения темпов представляют собой формулировки линии поведения системы. Они определяют, каким образом имеющаяся информация об уровнях преобразуется в действие потока, то есть приводит к принятию решений, изменяющих величины темпов потока. Внутри каждого уравнения темпа создаётся явная и неявная цель, к которой или от которой стремится точка рассеяния в системе. Эти уравнения содержат также способ, посредством которого можно фиксировать наблюдения в системе.

5.2. Системная динамика

Системная динамика представляет собой совокупность принципов и методов анализа динамических управляемых систем с обратной связью и их применения для решения производственных, организационных и социально-экономических задач. В системах поддержки принятия решений применение системной динамики позволяет объединить несколько функциональных пространств организации в одно целое и обеспечить организационный и количественный базис для выработки более эффективной управленческой политики. Три достижения, приобретенные в основном благодаря разработкам в области вооружений, сделали возможным применение системной динамики.

1. Успехи в проектировании и анализе систем управления с обратной связью.

2. Прогресс в методах компьютерного моделирования и развитие вычислительной техники.

3. Накопленный опыт в моделировании процесса принятия решений.

На первое место по своей важности следует поставить осознание необходимости развития динамических информационных систем с обратной связью, которые появились уже после того, как подобные электромеханические, а затем и электронные системы стали широко применяться на практике.

Другим основным достижением, которое легло в основу системной динамики, является компьютерное моделирование.

Философия системной динамики заключается в предположении, что организация более эффективно представляется в терминах, лежащих в ее основе потоков, нежели в терминах отдельных функций. Потоки людей, денег, материалов, заявок и оборудования, а также интегрированных потоков информации могут быть выявлены во всех организациях. Направленность на потоковую структуру заставляет аналитика естественным образом преодолевать внутриорганизационные границы. Методология системной динамики была построена так, чтобы сделать применимой на практике философию развития. Для этого были использованы и модифицированы известные методы представления потоковых диаграмм, математического и имитационного моделирования. Для большинства системно-динамических проектов были созданы формальные потоковые диаграммы, представляемые в виде систем дифференциальных уравнений. Как потоковые диаграммы, так и системы уравнений выражают управленческие связи с помощью двух категорий: накопителей (уровней) и потоков (темпов). Накопители представляют собой такие объекты реального мира, в которых сосредотачиваются некоторые ресурсы: знания (идеи), фонды, источники рабочей силы и другое. Потоки – это все активные компоненты системы: потоки усилий (попыток), информационные потоки, расходные платежи и т.п.

Если система управления представима в виде сети накопителей и потоков, то соответствующая системно-динамическая модель может быть реализована в виде компьютерной программы. С помощью такой программы можно провести экспериментальное тестирование предлагаемых изменений управленческой политики. Исследовательской группой массачусетского технологического института был разработан компилятор DYNAMO, с помощью которого можно было решать системы линейных и нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, содержащих до нескольких тысяч переменных. С появлением графических средств доступа язык моделирования DYNAMO стал языком графического моделирования.

5.3. Базовые принципы системной динамики

Принято считать, что системная динамика базируется на четырех принципах, в одинаковой степени влияющих на плодотворность применения метода.

Первый принцип – фондовые потоки

Первый принцип гласит, что динамику поведения сколь угодно сложного процесса можно свести к изменениям некоторых фондов (уровней), а сами изменения регулируются темпами наполняющих или исчерпывающих фонды потоков (темпов). Подобно тому, как большинство из нас при формировании и обсуждении проблем рисуют их идеограммы в виде геометрических фигур, современные аналитические технологии предлагают делать примерно то же самое на экране монитора ПК, конструируя концептуальные схемы проблемных ситуаций плоскими идеограммами «фондовых потоков», динамика которых интерпретируется соответствующими программными средствами.

На рис. 5 представлены примеры отображения примитивных модельных ситуаций.

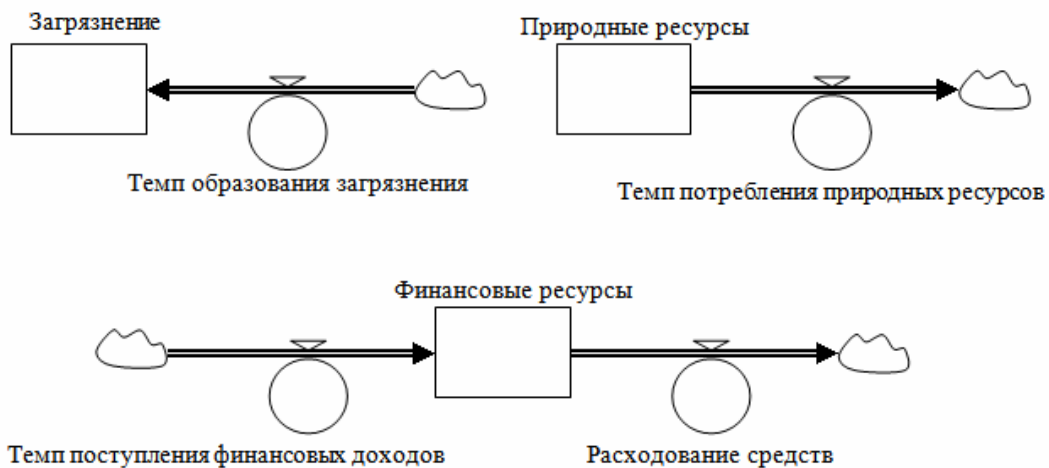


Рис. 5. Примеры простейших диаграмм фондовых потоков

В большинстве программных средств имитационного моделирования на базе системной динамики принято использовать вышеприведенные обозначения:

- 1) прямоугольник – фонд (уровень);
- 2) двойная стрелка – поток (темп);

3) круг – управление потоком;

4) «облако» – поглотитель или источник модельных единиц (транзактов), лежащих за пределами концептуальной схемы проблемной ситуации, то есть за рассматриваемыми границами системы.

Формализованные модели динамических процессов в точном естествознании существовали уже давно и по информации о фазовых координатах в некоторый момент времени пытались определить будущее состояние системы. Однако существенный вклад в развитие традиционного подхода системная динамика внесла через введение понятия задержки (запаздывания) темпов развития на задаваемое число единиц модельного времени. Подобные задержки диктуют дисциплину передачи изменений уровней фондов на изменения темпов их регулирования. Модельная интерпретация задержек и управление ими – одно из центральных понятий системной динамики, требующее особого внимания.

Второй принцип – обратные связи

Второй принцип заключается в том, что нетривиальное поведение любой сложной системы связано, прежде всего, с регулированием положительных и отрицательных обратных связей. В моделях, с которыми имеет дело системная динамика, информация к воздействующим на фонды потокам может передаваться или напрямую, или через другие структурные единицы. В результате, реакцией на такое воздействие может быть изменение уровней фондов и, следовательно, замыкание циклов обратных связей. Примеры отрицательных и положительных обратных связей приведены на рис. 6.

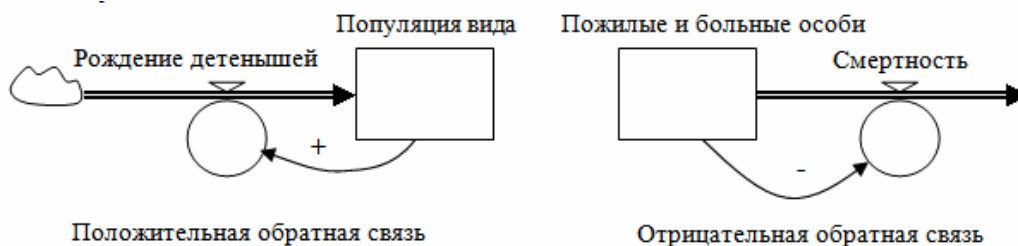


Рис. 6. Примеры обратной связи

Положительные связи генерируют самоусиливающееся пове-

дение, а отрицательные связи генерируют поведение противодействующее.

Принцип регулирования нетривиального поведения обратными связями позволяет системной динамике сосредоточить внимание на концептуальных особенностях и причинах различия понятий «роста» и «развития». Действительно, сегодня уже ясно, что все основные инфраструктуры постиндустриального мира, такие как промышленное производство, численность населения и так далее стремятся к экспоненциальному росту. В противовес роста используется понятие «развитие», которое предполагает расширение и реализацию потенциальных возможностей, интенсивное улучшение своего состояния. Системная динамика декларирует, что «нет пределов развития, но есть пределы роста» и концентрирует внимание не столько на тривиальном росте, сколько на концептуальных проблемах многопланового развития.

Третий принцип – нелинейность

Третий принцип – сохранение некоторой неопределенности концептуальных моделей за счет возможности возникновения (в непростых конструкциях с циклами обратных связей) композиций нелинейных пар. Это по существу означает, что информация о системных уровнях через обратные связи опосредованно подпитывает уровни в непропорциональном (иногда усложненном и непредсказуемом) режиме. Классические методы исследования разнообразных сложных динамических систем всегда базировались на законах сохранения – массы, энергии, импульса, которым в естественных науках отводится главенствующая роль. В экономике также подобные законы сохранения находят свое место в балансовых соотношениях и соглашениях о сохранении материальных потоков.

Тем не менее, в отличие от подобных традиционных концепций, системная динамика не столь строго придерживается этих правил, концентрируя внимание на исследовании, прежде всего, природы поведения и потери определенности за привлекательные возможности разыгрывать на моделях сценарии проблемных ситуаций сложного поведения.

Четвертый принцип – прагматизм

Четвертый принцип утверждает, что системная динамика является прагматическим аппаратом, который наиболее адекватно способен отразить нетривиальное поведение сети фондовых потоков, обратных связей и нелинейных пар. Его целесообразно применять при анализе сложных проблемных ситуаций, которые на первый взгляд не поддаются точному математическому описанию, требуют предварительных огрубленных оценок и предполагают использование в процедурах концептуальных предположений интуиции «тех, кто принимает решения» и знаний специалистов прикладных наук.

Для построения компьютерных имитационных моделей систем (на основе системной динамики) на текущий момент имеется целый ряд **программных продуктов** от различных производителей программного обеспечения. Наиболее распространены следующие:

1) iThink® Analyst 5.0 фирмы High Performance Systems, Inc. – один из наиболее распространённых программных пакетов для моделирования с использованием технологии System Dynamics;

2) Powersim® Constructor 2.5 норвежской фирмы Powersim AG – аналогично iThink® Analyst реализует все необходимые функции для построения и анализа моделей, а также представления результатов моделирования. В отличие от iThink® Analyst предоставляет более широкие возможности для осуществления обмена данными с другими бизнес-приложениями на основе механизмов Microsoft Windows® DDE (Dynamic Data Exchange) и OLE (Objects Links Embedding), а также предоставляет интерфейс ActiveX для вызова функций Powersim® Constructor 2.5 из других приложений;

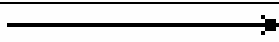
3) Stella® 4.0 и Stella® 5.0 фирмы High Performance Systems, Inc. – аналогичный iThink® Analyst программный продукт, реализующий ряд отличий (значительно менее распространён в России).

Powersim – визуальный диаграммно-ориентированный язык системно-динамического моделирования для IBM. Данный пакет оснащен продвинутыми функциями: моделирование диалогов, диалоговая помощь, расширяемая библиотека функций, двустороннее

конвертирование данных со всеми языками системно-динамического моделирования.

Приведем классификацию и обозначение элементов модели, принятые в Powersim (табл. 1).

Таблица 1. Элементы имитационной модели

Элемент	Обозначение
Уровень	
Темп	
Вспомогательная переменная	
Константа	
Табличная функция	
Начальное условие	–
Временные границы и шаг моделирования	–
Материальные связи	
Информационные связи	

Уровень и темп уже описаны выше. Перейдем сразу к вспомогательной переменной.

Вспомогательные переменные (Auxiliary) – необходимы для определения переменных темпов и вводятся для более простого представления системы. Участвуют при формировании вспомогательных уравнений, необходимых для решения уравнений темпов. На диаграммах обозначаются в виде окружностей (см. табл. 1). Например, число договоров, количество рабочих на предприятии – вспомогательные переменные.

Константы (Constant) – относятся к экзогенным переменным³

³ Экзогенная переменная (exogenous variable) – внешняя переменная, которая изменяется под влиянием внешней среды, а не за счет динамики системы.

системы и необходимы для определения экзогенных параметров модели. Изображаются в виде ромбов.

Табличные функции (Graph) – используются для связи между переменными, устанавливаемой не аналитически, а при помощи экспертных оценок. Как правило, табличные функции используются для косвенной связи эндогенных переменных⁴ модели и изображаются в виде кружочков с графиком. Однако иногда они могут быть использованы для задания динамических рядов, описывающих экзогенные параметры модели.

Начальные условия (Initial) – задают начальные значения переменных уровня. Начальные условия не отражаются на диаграммах в целях улучшения восприятия последних.

Временные границы и шаг моделирования (Simulation Setup) определяются посредством задания начального времени (Start Time), конечного времени (Stop Time) и шага моделирования (Time Step). Данные величины необходимы для проведения имитационных экспериментов. На диаграммах они не отображаются.

В Powersim существует достаточно большой набор инструментов для построения графического пользовательского интерфейса. К нему относятся как стандартные графические средства MS Windows, так и некоторые специфические инструменты (например, графики динамики уровней).

5.4. Преобразование системно-динамической модели, реализованной в PSC, в код алгоритмического языка высокого уровня

Powersim® Constructor и iThink Analyst фактически позволяют «рисовать» динамические модели (создавать диаграммы), то есть осуществлять визуальное моделирование. Powersim® Constructor (PSC) имеет еще одно преимущество – возможность обмена данными с различными приложениями. Несмотря на это, составление моделей в данном пакете и их эксплуатация вызывает следующие проблемы:

⁴ Эндогенная переменная (endogenous variable) – внутренняя переменная, определяемая за счет внутренней динамики системы.

1) для работы моделей необходима установка PSC или ее облегченной версии (Powersim® Runtime);

2) обмен информацией между программными приложениями и PSC замедляет моделирование и повышает риск порчи или потери данных.

Кроме того, несмотря на большие возможности пакета Powersim® Constructor, имитационное моделирование в нем ограничивается фиксированным набором функций. Например, статистический и регрессионный анализ, решение задач оптимизации невозможно с помощью рассматриваемого средства. Однако такая проблема решается при совместном использовании имитационных моделей и программ (алгоритмов), реализующих методы оптимизации, статистического анализа и т.д.

Поэтому становится актуальной задача разработки метода преобразования имитационных моделей, представляемых в виде системы нотаций языка DYNAMO, в модели, реализованные на таком языке, который позволил бы избежать обозначенных выше проблем. Кроме того, такое преобразование позволит экономить ресурсы ЭВМ за счет значительного снижения размера дискового пространства, занимаемого получаемыми моделями, и снятия необходимости в использовании PSC.

Здесь речь пойдет о преобразовании системно-динамических моделей в код алгоритмического языка, такого как Pascal или C, то есть о получении аналогичной модели, но разработанной в виде некоторого метода (процедуры) или программного модуля. В этом случае будут сняты ограничения PSC, а также решены проблемы обмена данными между приложениями.

Идея преобразования моделей в коды базируется на том, что расчеты ее параметров в течение одного шага моделирования выполняются при помощи численного интегрирования (например, методом Эйлера), а также что язык DYNAMO предусматривает переменные двух основных типов – уровни и темпы.

Поэтому, как может показаться, преобразование системно-динамических моделей можно выполнять при помощи «переписывания» соотношений интегрирования ДУ в код алгоритмического языка. Но, на самом деле, такое преобразование будет искажать

PSC-модель, так как при его выполнении не будет выдержан нужный порядок вычислений. Например, если мы будем рассчитывать уровни и темпы в полном соответствии с цепочкой их следования (на рис. 7 уровни и темпы: Temp_1, Level_1, Temp_2, Level_2 и т.д.), то в полученном вычислительном алгоритме будет потеряна эффект временной задержки в ресурсных потоках.

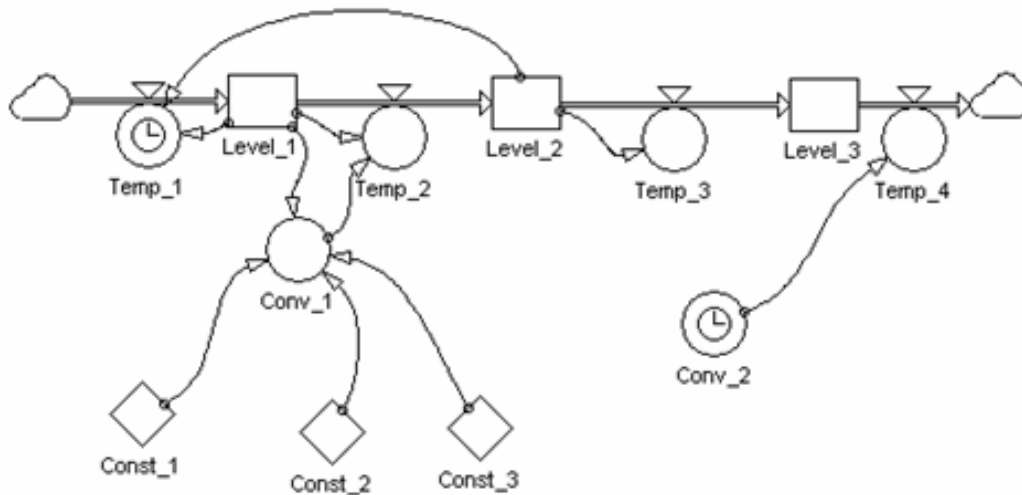


Рис. 7. Пример реализации модели в PSC

Также проблема преобразования состоит в том, что темпы от уровней могут зависеть или нет.

Таким образом, самая сложная часть рассматриваемой задачи – определение порядка вычислений соотношений интегрирования для переменных типа уровней.

Экспериментально можно установить, что для моделей, реализованных в PSC, будет корректным рассчитывать в первую очередь все её уровни на основании потоков в темпах, а затем сами темпы.

Для примера рассмотрим модель, изображенную на рис. 7.

Пусть для нее заданы следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 \text{Level}_1(t) &= \text{Level}_1(t-1) - dt * \text{Temp}_2 + dt * \text{Temp}_1 \\
 \text{Level}_2(t) &= \text{Level}_2(t-1) - dt * \text{Temp}_3 + dt * \text{Temp}_2 \\
 \text{Level}_3(t) &= \text{Level}_3(t-1) - dt * \text{Temp}_4 + dt * \text{Temp}_3 \\
 \text{Temp}_1 &= \text{IF}(\text{TIME}=0, 0, \text{INT}(\text{Level}_1 * 0.2 + \text{Level}_2 * 0.01)) \\
 \text{Temp}_2 &= \text{INT}(\text{Level}_1 * 0.1 + \text{Conv}_1) \\
 \text{Temp}_3 &= \text{Level}_2 \\
 \text{Temp}_4 &= \text{Conv}_2 * 4.
 \end{aligned}$$

Тогда фрагмент кода на языке Pascal, реализующий один шаг моделирования, будет следующим:

```

Level_1 := Level_1 - dt * Temp_2 + dt * Temp_1;
Level_2 := Level_2 - dt * Temp_3 + dt * Temp_2;
Level_3 := Level_3 - dt * Temp_4 + dt * Temp_3;
Temp_1 := IIF(TIME=0, 0, INT(Level_1*0.2+Level_2*0.01));
Temp_2 := INT(Level_1*0.1+Conv_1);
Temp_3 := Level_2;
Temp_4 := Conv_2*4;

```

В коде использована функция ПФ, которую легко можно написать, а также переменная TIME, в которой хранится модельное время.

Для другого программного продукта имитационного моделирования очередность расчетов может быть иной.

Независимо от сложности системы и специфики отрасли, в которой она функционирует, поведение уровней, темпов, а также цепей с обратной связью в ее имитационной модели не меняется. Поэтому полученный вариант очередности вычислений будет действовать не только для экспериментальных, но и для всех моделей, реализованных в PSC.

Когда определен порядок вычислений, остается решить задачу упорядочения вычисления переменных-конверторов и темпов. Неправильная последовательность вычисления переменных-конверторов приведет к искажению результатов моделирования. В PSC расчетные формулы вычисления конверторов приводятся в порядке их добавления пользователем в модель. Упорядочить эти формулы можно с помощью нижеописанной методики.

Для списка выражений составляется диаграмма зависимостей переменных друг от друга или соответствующая квадратная матрица из бинарных элементов размером $(n+1) \times (n+1)$, где n – количество переменных. Обозначим ее через B . Положим, что элемент матрицы b_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ равен единице, если i -й параметр зависит от j -й переменной. В противном случае он равен нулю.

Таким образом, в строках такой матрицы соответствующих переменных определяются те параметры, от которых они зависят. В столбцах матрицы – влияния соответствующих параметров на переменные. Строка с номером $n+1$ и аналогичный столбец содержат нулевые значения и являются вспомогательными.

После заполнения всех строк матрицы, кроме последней, анализируем матрицу и выписываем соответствующие выражения.

Вначале выписываются выражения, соответствующие нулевым строкам матрицы. Элементы $n + 1$ -го столбца, соответствующие таким строкам, меняются на единицу. Номера этих строк (переменных) заносятся в очередь.

Первый шаг начинается с того, что берется первый номер из очереди и рассматривается соответствующий столбец. Обозначим его через j^* . Если в столбце нет элементов, отличных от нуля, то соответствующий элемент последней строки меняется на единицу (столбец просмотрен). В противном случае рассматриваются те строки матрицы, которые соответствуют ненулевым элементам. Обозначим одну из таких строк через i^* . В ней рассматриваются все ненулевые элементы, кроме $b_{i^*j^*}$. Для каждого такого элемента $b_{i^*j} > 0$ просматривается соответствующий элемент последней строки b_{n+1j} , ненулевое значение которого показывает, что переменная с индексом j уже вычислена и соответствующий столбец просмотрен. Если все такие элементы, соответствующие $b_{i^*j} > 0$, нулевые, то выписывается выражение для переменной с номером i^* , значение b_{i^*n+1} меняется на единицу и номер i^* заносится в очередь, в противном случае соответствующая строка пропускается. Выражение, соответствующее этой строке, будет выписано на одном из следующих шагов.

После прохождения всего столбца с номером j^* элемент b_{n+1j^*} меняется на единицу. На этом шаг заканчивается.

Затем берется следующий элемент из очереди и процедура повторяется. Итерации продолжаются до тех пор, пока $n + 1$ -й столбец не будет заполнен полностью единицами, кроме последнего элемента b_{n+1n+1} и очередь не окажется пуста. В этом случае $n + 1$ -я строка также будет заполнена единицами (кроме элемента b_{n+1n+1}).

Пример

Пусть задан такой набор вычислений:

$$\begin{aligned}t_1 &= c_1 + c_2 - t_2, \\c_4 &= c_7 + c_8, \\c_2 &= c_5 - c_4 + c_3, \\c_1 &= c_5 + 6,\end{aligned}$$

Выписываем все выражения, соответствующие нулевым строкам:

$$\begin{aligned} c7 &= 8, \\ c5 &= 4. \end{aligned}$$

Так как переменная $c8$ не вычисляется (в PSC такие переменные являются константами, которые можно легко распознать), то для нее действий по записи выражения не производится.

Переопределим матрицу.

	$t1$	$c4$	$c2$	$c1$	$c7$	$c5$	$c6$	$t2$	$c8$	$c3$	
$t1$	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
$c4$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$c2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$c1$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$c7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$c5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$c6$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$t2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$c8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$c3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Образуем очередь: $(5, 6, 9)$.

Берем переменную из очереди 5 ($c7$) и анализируем соответствующий столбец.

Рассматриваем строку 2 ($c4$), так как $p_{25} = 1$. В ней элемент p_{29} не равен нулю. Но элемент в последней строке $p_{11,9}$ равен нулю (девятый столбец не анализировался). Поэтому вторая строка пропускается.

Других строк с ненулевыми элементами пятого столбца нет.

После данного шага матрица и очередь будут следующими.

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Очередь: (6,9).

Анализируем шестой столбец (*c5*).

Рассматриваем третью строку. В ней p_{32}, p_{310} не равны нулю. Но p_{112}, p_{1110} равны нулю. Поэтому ее мы пропускаем.

Результаты анализа четвертой строки позволяют выписать соответствующее выражение, заменить p_{411} на единицу и добавить четверку в очередь:

$$c_1 = c_5 + 6.$$

После данного шага матрица и очередь будут следующими.

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Очередь: (9,4).

После рассмотрения девятого столбца получим:

$$c4 = c7 + c8,$$

$$c6 = c8 + 1.$$

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	

Очередь: (4,2,7).

Четвертый столбец (*c1*)

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	

Очередь: (2,7).

Второй столбец (c4).

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	

Очередь: (7).

Седьмой столбец (c6):

$$c3 = c6 + 7.$$

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	

Очередь: (10).

Десятый столбец (с3):

$$c2 = c5 - c4 + c3,$$

$$t2 = c3 * c3.$$

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	

Очередь: (3,8).

Третий столбец (с2).

	<i>t1</i>	<i>c4</i>	<i>c2</i>	<i>c1</i>	<i>c7</i>	<i>c5</i>	<i>c6</i>	<i>t2</i>	<i>c8</i>	<i>c3</i>	
<i>t1</i>	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
<i>c4</i>	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
<i>c2</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
<i>c1</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<i>c7</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c5</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c6</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<i>t2</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
<i>c8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>c3</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	

Очередь: (8).

Восьмой столбец (t2):

$$t1 = c1 + c2 - t2.$$

	t1	c4	c2	c1	c7	c5	c6	t2	c8	c3	
t1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
c4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
c2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
c1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
c7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
t2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
c8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Очередь: (1).

И, наконец, первый столбец.

	t1	c4	c2	c1	c7	c5	c6	t2	c8	c3	
t1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
c4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
c2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
c1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
c7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
t2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
c8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

() – очередь пуста.

В итоге получаем следующий набор вычислений:

$$c7 = 8,$$

$$c5 = 4,$$

$$c1 = c5 + 6,$$

$$c4 = c7 + c8,$$

$$c6 = c8 + 1,$$

$$c3 = c6 + 7,$$

$$c2 = c5 - c4 + c3,$$

$$t2 = c3 * c3,$$

$$t1 = c1 + c2 - t2.$$

Лекция 6. КОНЦЕПЦИЯ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Существуют шесть основных понятий, на которых базируется концепция объектно-ориентированной системы моделирования (ООСМ).

1. **Граф модели.** Все процессы, независимо от количества уровней структурного анализа, объединяются в виде ориентированного графа.

2. **Транзакт** – формальный запрос на какое-либо обслуживание. Транзакт в отличие от обычных заявок, которые рассматриваются при анализе моделей массового обслуживания, имеет набор динамически изменяющихся особых свойств и параметров. Пути миграции транзактов по графу стохастической сети определяются логикой функционирования компонентов модели в узлах сети.

Транзакт – динамическая единица любой модели, работающая под управлением имитатора.

Транзакт может выполнять следующие действия:

- а) порождать группы (семейства) других транзактов;
- б) поглощать другие транзакты конкретного семейства;
- в) захватывать ресурсы и использовать их некоторое время, а затем – освобождать;
- г) определять времена обслуживания, накапливать информацию о пройденном пути и иметь информацию о своем дальнейшем пути и о путях других транзактов.

Основные параметры транзактов:

- а) уникальный идентификатор транзакта;
- б) идентификатор (номер) семейства, к которому принадлежит транзакт;
- в) наборы различных ресурсов, которые транзакт может захватывать и использовать какое-то время;
- г) время жизни транзакта;
- д) приоритет – неотрицательное число; приоритет учитывается при доступе их к ресурсам, например в очереди;

е) параметры обслуживания в каком-либо обслуживающем устройстве (включая вероятностные характеристики).

Примеры транзактов:

- а) требование на перечисление денег;
- б) заказ на выполнение работ в фирме;
- в) телеграмма, поступающая на узел коммутации сообщений.

3. **Узлы** графа сети представляют собой центры обслуживания транзактов (но не обязательно массового обслуживания). В узлах транзакты могут задерживаться, обслуживаться, порождать семейства новых транзактов, уничтожать другие транзакты. С точки зрения вычислительных процессов в каждом узле порождается независимый процесс. Вычислительные процессы выполняются параллельно и координируют друг друга. Они реализуются в едином модельном времени, в одном пространстве, учитывают временную, пространственную и финансовую динамику.

Нумерация и присвоение имен узлам стохастической сети производится разработчиком модели. Следует учесть, что транзакт всегда принадлежит одному из узлов графа и независимо от этого относится к определенной точке пространства или местности, координаты которой могут изменяться.

Примеры узлов:

- а) бухгалтерия;
- б) производственный (ремонтный) участок;
- в) генератор или умножитель транзактов;
- г) склад ресурсов;
- д) транспортное средство, которое перемещает ресурсы из одной точки пространства в другую;
- е) компьютерный центр коммутации сообщений (или пакетов сообщений).

4. **Событие** – факт выхода из узла одного транзакта. События всегда происходят в определенные моменты времени. Они могут быть связаны с точкой пространства. Интервалы между двумя соседними событиями в модели – это, как правило, случайные величины. Предположим, что в момент времени t произошло какое-то событие, а в момент времени $t + d$ должно произойти ближайшее следующее, но не обязательно в том же узле. Если в модель вклю-

чены непрерывные компоненты, то, очевидно, что передать управление таким компонентам модели можно только на время в пределах интервала $(t, t + d)$.

Разработчик модели практически не может управлять событиями вручную (например, из программы). Поэтому функция управления событиями отдана специальной управляющей программе – координатору, автоматически внедряемому в состав модели.

5. Ресурс независимо от его природы в процессе моделирования может характеризоваться тремя общими параметрами: мощностью, остатком и дефицитом. Мощность ресурса – это максимальное число ресурсных единиц, которые можно использовать для различных целей. Остаток ресурса – число незанятых на данный момент единиц, которые можно использовать для удовлетворения транзактов. Дефицит ресурса – количество единиц ресурса в суммарном запросе транзактов, стоящих в очереди к данному ресурсу.

При решении задач динамического управления ресурсами можно выделить три основных типа: материальные, информационные и денежные ресурсы.

6. Пространство – географическая, декартова плоскость. Узлы, транзакты и ресурсы могут быть привязаны к точкам плоскости и мигрировать в ней.

Понятия 2 – 6 являются видами объектов моделируемой системы. Они располагаются в графе и взаимодействуют по определенным правилам и схемам. Таким образом, реализуется верхний графический уровень модели, состоящий из стандартизированных блоков. Если в средствах моделирования, работающих на базе методологии «Системная динамика», такие типы объектов не превышают десяти, то в общих системах, таких как GPSS или Pilgrim, их количество измеряется десятками. Это позволяет более гибко осуществлять моделирование особенностей функционирования систем.

Чтобы глубже понять принципы работы моделирующих систем, рассмотрим несколько типов объектов:

- 1) генератор транзактов;
- 2) очередь;
- 3) узел обслуживания;
- 4) терминатор;
- 5) клапан.

Генератор транзактов, имеющий, как правило, бесконечную емкость, создает новые транзакты и передает их в другие блоки модели. Источник для создания транзактов находится за пределами границы системы.

В очереди транзакты упорядочиваются по мере поступления. Выход транзактов из очереди, например к узлу обслуживания, осуществляется по определенным правилам. Различают очереди с приоритетами и без них. Если в очереди учитывается приоритет транзактов, то он учитывается при их упорядочении.

Узел обслуживания (одноканальный или многоканальный) принимает транзакт при наличии свободного канала. Когда время обслуживания закончилось, транзакт выпускается из узла. Обслуживание может быть в порядке поступления транзакта в освободившийся канал, либо по правилу абсолютных приоритетов. Если последнее правило задано и возникает ситуация, при которой в «голове» очереди на обслуживание находится транзакт с ненулевым приоритетом, все каналы заняты, причем в одном из каналов на обслуживании находится транзакт с более низким приоритетом, то выполняется следующее:

- 1) обслуживание «неприоритетного» транзакта прерывается;
- 2) «неприоритетный» транзакт удаляется из канала в стек временного хранения;
- 3) канал занимает транзакт с большим приоритетом.

После освобождения канала его занимает прерванный транзакт. Время обслуживания такого транзакта определяется как полное время обслуживания за вычетом времени нахождения в канале до прерывания.

Возможны вложенные прерывания, когда транзакт с некоторым приоритетом, вытеснивший предыдущий транзакт, сам вытесняется транзактом с большим приоритетом. Поэтому глубина стека временного хранения вытесненных транзактов не ограничена.

Терминатор уничтожает поступающий в него транзакт. В терминаторе фиксируется время жизни транзакта.

Клапан перекрывает транзакты, когда это требуется в моделировании. Если клапан открыт, транзакты проходят его без задержки, то есть за нулевое модельное время. Часто такой блок применяется для синхронизации или для моделирования работы с информационными ресурсами.

С помощью вышеперечисленных блоков можно составить имитационную модель дискретных систем с потоками, таких как система массового обслуживания. Пример такой системы – автозаправочная станция. Здесь транзакты играют роль автомобилей, узлы обслуживания – станция, в которой заправочная колонка является отдельным каналом.

Лекция 7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эффективность машинных экспериментов с имитационными моделями системы S , формализуемых в виде схем массового обслуживания, существенно зависит от выбора плана эксперимента, так как именно план определяет объем и порядок проведения вычислений на ПЭВМ, приемы накопления и статистической обработки результатов моделирования системы и в целом влияет на эффективность использования ресурсов ПЭВМ при моделировании.

Математические методы планирования экспериментов основаны на кибернетическом представлении процесса проведения эксперимента, наиболее подходящей моделью которого является абстрактная схема типа «черного ящика» вида $Y = \varphi(X)$, где $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ – множество векторов зависимых выходных переменных, называемых реакциями или откликами (для машинного эксперимента эти переменные являются эндогенными); $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – множество векторов входных независимых переменных, называемых факторами (для машинного эксперимента они являются экзогенными).

Функция φ , связывающая отклик с факторами, называется функцией реакции.

При проведении машинного эксперимента с моделью для оценки характеристик процесса функционирования исследуемой системы необходимо создать такие условия, которые способствовали бы выявлению влияния факторов, находящихся в функциональной связи с искомой характеристикой. Для этого необходимо:

- 1) отобрать факторы $x_i, i = \overline{1, m}$, влияющие на искомую характеристику, и описать функциональную зависимость;
- 2) установить диапазон изменения факторов $x_{i_{\min}} \dots x_{i_{\max}}$;
- 3) определить координаты точек факторного пространства $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, в котором следует проводить эксперимент;

4) определить необходимое число реализаций и их порядок в эксперименте.

Свойства объекта исследования, то есть процесса машинного моделирования системы S на многофакторное возмущение – одна из задач математического планирования эксперимента. Наиболее распространенными и полно отвечающими задачам статистического моделирования являются полиномиальные модели. Задача нахождения полиномиальной модели, описывающей систему или отдельные ее характеристики, состоит в оценке вида и параметров некоторой функции от переменных (x_1, x_2, \dots, x_m) .

Рассмотрим влияние m количественных факторов $x_i, i = \overline{1, m}$ на некоторую реакцию (отклик) η в отведенной для экспериментирования локальной области $[x_{i_{\min}} \dots x_{i_{\max}}, i = \overline{1, m}]$ факторного пространства G . Функцию реакции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ представим в виде полинома степени d от m переменных, который содержит C_{m+d}^d коэффициентов:

$$\begin{aligned} \eta \equiv \varphi = & \tilde{b}_0 + \sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{b}_i x_i + \sum_{i, j} \tilde{b}_{ij} x_j x_i + \\ & + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \tilde{b}_{i_1, i_2, \dots, i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}, \quad (5) \\ & \sum ij = d. \end{aligned}$$

Для нахождения значений коэффициентов данного полинома используют регрессионный анализ (метод наименьших квадратов). Для него необходимо получить $N \geq C_{m+d}^d$ результатов наблюдения величины отклика. В регрессионном анализе полагается, что выполняется ряд предпосылок.

1. Результаты наблюдений y_1, y_2, \dots, y_N – независимые, нормально распределенные случайные величины. Речь идет о распределении y относительно некоторой фиксированной точки (x_1, x_2, \dots, x_m) , так как на значение y влияют и другие неконтролируемые параметры. Если эта предпосылка не удовлетворяется, то коэффициен-

ты регрессии найти можно, однако ничего нельзя будет сказать об эффективности метода, то есть нельзя оценить точность уравнения регрессии. Если y не подчиняется нормальному распределению, то стараются подобрать такую функцию преобразования, чтобы перейти от y к новой случайной величине $q = f(y)$, приближенно распределенной по нормальному закону. Например, для многих асимметричных распределений делается замена $q = \ln(y)$.

2. Дисперсии $\sigma_y^2 = \sigma^2\{y_u\}$, $u = \overline{1, N}$ равны друг другу. Это означает, что если производить многократные и повторные наблюдения над величиной y_u при некотором определенном наборе значений $(x_{1u}, x_{2u}, \dots, x_{ku})$, то получим дисперсию σ_y^2 , которая не будет зависеть от математического ожидания My_u , вернее, не будет отличаться от σ_y^2 , полученной при повторных наблюдениях для любого другого набора независимых переменных. Это требование также не всегда выполняется для реального эксперимента.

3. Независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_m измеряются с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении y .

При таких предпосылках оказывается возможным вычислить коэффициенты полинома, а также оценить их точность и точность уравнения регрессии в целом.

Проведение эксперимента над моделью любой сложной системы завершается получением больших массивов данных. В состав данных массивов входят наборы исходных данных, значения промежуточных и результирующих параметров. Практически для любой системы требуется определить степени влияния исходных параметров на результат, меру линейной зависимости и получить иные статистические показатели функционирования системы.

В данном разделе приводятся методы получения статистической информации работы системы путем использования соответствующей имитационной модели на основе статистических исследований. Для обработки результатов эксперимента используются линейные многофакторные модели.

С помощью грамотно построенной многофакторной модели можно определить, как себя ведет отклик рассматриваемой сложной системы в зависимости от изменения факторов. Построение линейной многофакторной модели осуществляется с помощью методов корреляционно-регрессионного анализа.

7.1. Обозначения

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{значения отклика (зависимой переменной) в периодах времени, где } n - \text{число периодов наблюдения;}$$

где n – число периодов наблюдения;

$X = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ – ряды m факторов (независимых или объясняющих переменных);

\bar{x}^i – среднее значение i -й переменной.

7.2. Предварительные понятия и определения

Дисперсия случайной величины x определяется по формуле

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Ее называют еще среднеквадратическим отклонением.

Определение 7.1. Величину $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ называют стандартным отклонением величины x .

Коэффициент корреляции между случайными величинами x и y :

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту или силу связи между переменными y и x . Значения, принимаемые r_{xy} , находятся на отрезке $[-1, 1]$. Если $r_{xy} > 0$, то корреляция положительна, то есть с увеличением (уменьшением) одной переменной (x) увеличивается (уменьшается) другая переменная (y). Если корреляция отрицательна, то наблюдается обратная ситуация. При нулевой корреляции связи между переменными нет.

Если речь идет о многофакторной модели, то вычисляется коэффициент множественной корреляции $R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}}$, где σ_e^2 – остаточная дисперсия отклика, $\sigma_a^2 = \sigma_y^2$ – общая дисперсия отклика.

Общая дисперсия характеризует разброс наблюдений фактических значений от среднего \bar{y} .

Остаточная дисперсия

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{it})^2}{n - m - 1},$$

где y_{it} – вычисленные значения переменной y посредством уравнения регрессии при подстановке в него наблюдаемых фактических значений x^i . Остаточная дисперсия характеризует ту часть рассеяния переменной y , которая возникает из-за всякого рода случайностей и влияния неучтенных факторов.

Коэффициент детерминации

$$D = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}.$$

Данный коэффициент служит для оценки точности регрессии, точнее сказать, соответствия полученного уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным. Значение коэффициента изменяется в пределах $[0, 1]$. Чем D ближе к единице, тем точнее регрессионная модель. Стандартная ошибка оценки равна $\sqrt{\sigma_e^2}$.

Можно показать, что при $D = 0$ корреляционно-регрессионная связь между переменными x и y отсутствует. Если $D = 1$, то связь функциональная.

7.3. Оценка параметров линейной многофакторной модели

Общий вид линейной многофакторной модели следующий:

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^m a^j x^j, \quad (6)$$

где $x^0 = 1$ – дополнительная константа для учета в уравнении регрессии свободного коэффициента (в этом случае в матрицу X добавляется единичный вектор-столбец и единичная строка):

$$\hat{y} = (y_{1t}, \dots, y_{mt}).$$

В матричной форме уравнение (6) примет вид

$$\hat{y} = a^T x.$$

Для оценки параметров регрессионной модели необходимо минимизировать следующую функцию:

$$S(a) = (y - \hat{y})^2 = (y - Xa)^T (y - Xa) \rightarrow \min,$$

т.е. минимизировать сумму квадратов остатков. Такой метод, называемый методом наименьших квадратов, Вам известен.

Дифференцируя $S(a)$ по компонентам вектора a , получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial S(a)}{\partial a} = -2X^T y + 2X^T Xa = 0$$

или

$$X^T Xa = X^T y. \quad (7)$$

Соотношение (7) – система линейных уравнений, решением которой при условии обратимости матрицы $X^T X$ является

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Решение системы (7) можно осуществить соответствующими методами, например, методом Жордана – Гаусса. Здесь

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum x_i^1 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i^1 & \sum (x_i^1)^2 & \cdots & \sum x_i^1 x_i^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^m x_i^1 & \cdots & \sum (x_i^m)^2 \end{pmatrix};$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{pmatrix}.$$

Когда нам известна методика оценки параметров линейной многофакторной модели, мы можем приступить к ее построению.

7.4. Построение линейной многофакторной регрессионной модели

Построение многофакторной модели содержит не только этапы вычислений регрессионных коэффициентов, но и оценку правомерности ее использования по различным критериям. Также необходима проверка обсужденных ранее предпосылок.

Построение модели выполняется по следующим этапам:

- 1) априорное исследование системы;
- 2) формирование перечня факторов и их логический анализ;
- 3) сбор исходных данных и их первичная обработка;
- 4) спецификация функции регрессии;
- 5) оценка функции регрессии;
- 6) отбор главных факторов;
- 7) проверка адекватности модели;
- 8) интерпретация модели;
- 9) прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Последний этап может не выполняться, если только требуется оценить влияние выбранных факторов на отклик системы.

Рассмотрим подробнее содержание этапов.

Априорное исследование системы

В соответствии с целью работы на основе знаний в области рас-

смаатриваемой системы конкретизируются явления, процессы, зависимость между которыми подлежит оценке. При этом подразумевается, прежде всего, четкое определение явлений в системе, установление объектов и периода исследования.

На этом этапе должны быть сформулированы осмысленные и приемлемые гипотезы о зависимости явлений, например, зависимость производительности труда от автоматизации производственного процесса, уровня квалификации рабочих и размеров вознаграждений за труд.

Формирование перечня факторов и их логический анализ

Для определения разумного числа переменных в регрессионной модели, необходимо, прежде всего, ориентироваться на соображения профессионально-теоретического характера. Исходя из физического смысла явления, производят классификацию переменных на зависимые и объясняющие.

Сбор исходных данных и их первичная обработка

Исходная информация может быть представлена в трех формах:

- 1) динамические (временные) ряды;
- 2) пространственная информация – информация о работе нескольких объектов в одном разрезе времени;
- 3) сменная (табличная форма) – информация о работе нескольких объектов за разные периоды.

Объем выборки (число значений переменных) не может быть произвольным и зависит от количества факторов, входящих в состав модели с учетом свободного члена. Рекомендуется для статистически значимой модели на один фактор осуществлять выборку в объеме 5 – 8 наблюдений. Общий объем выборки рассчитывается исходя из количества факторов, а также количества свободных членов уравнения регрессии.

Спецификация функции регрессии

На данном этапе исследования дается конкретная формулировка гипотезы о форме связи (линейная или нелинейная, простая или множественная и так далее). Для этого используются различные критерии для проверки состоятельности гипотетического вида

зависимости. Также проверяются предпосылки корреляционно-регрессионного анализа.

Оценка функции регрессии

Здесь определяются числовые значения параметров регрессии и вычисляется ряд показателей, характеризующих точность модели.

Отбор главных факторов

Один из важных этапов составления многофакторной модели – отбор объясняющих переменных.

В первую очередь на данном этапе формируют перечень тех факторов, которые могут влиять на отклик системы. Обычно их число достигает нескольких десятков. Поэтому построенная с таким количеством факторов модель может быть неустойчивой. Она проявляется, когда при изменении некоторых факторов значение зависимой переменной будет расти вместо того, чтобы уменьшаться.

При небольшом количестве факторов полученная модель может приводить к ошибкам при принятии решений в ходе ее анализа.

В связи с этим определяют рациональный перечень факторов.

Отбор факторов из предварительного списка производят с помощью их анализа на мультиколлинеарность.

Определение 7.2. Мультиколлинеарность – попарная корреляционная зависимость между факторами.

Считается, что мультиколлинеарная зависимость между факторами x^i и x^j присутствует, если коэффициент парной корреляции $r_{ij} \geq 0,7 \div 0,8$.

Отрицательное воздействие мультиколлинеарности состоит в следующем:

- 1) усложняется процедура выбора главных факторов;
- 2) искажается смысл коэффициента множественной корреляции (он предполагает независимость факторов);
- 3) усложняются вычисления при построении самой модели;
- 4) снижается точность оценки параметров регрессии, искажается оценка дисперсии.

Следствие снижения точности – ненадежность регрессионных коэффициентов и отчасти неприемлемость их использования для

интерпретации меры воздействия соответствующей объясняющей переменной на зависимую переменную.

Оценки коэффициента становятся очень чувствительными к выборочным наблюдениям. Здесь становится ненадежным применение критериев значимости. Таким образом, становится ясно, что при построении рассматриваемой модели необходимо установить стохастическую мультиколлинеарность, которую по возможности следует устранить.

Для измерения мультиколлинеарности можно использовать квадрат коэффициента множественной корреляции

$$D = R^2 .$$

Значение D является коэффициентом детерминации. Введем коэффициент парной детерминации $d_{yj} = r_{yj}^2$. Тогда, при отсутствии мультиколлинеарности

$$D = \sum_{j=1}^m d_{yj} . \quad (8)$$

Соотношение (8) показывает, что в многофакторной модели присутствуют связи только между зависимой переменной y и факторами $x^j, j = \overline{1, m}$. Связи между факторами отсутствуют. Равенство (8) может выполняться в редких случаях. Поэтому вводят меру мультиколлинеарности:

$$M = D - \sum_{j=1}^m d_{yj} .$$

Чем меньше эта разность, тем меньше мультиколлинеарность. Для ее снижения используется метод исключения переменных. Суть метода определяется исключением тех факторов, которые хорошо коррелированы. При этом порог модуля коэффициента корреляции $r_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, m}$ задается значением больше 0,6. Как правило, если $|r_{ij}| \geq 0,7, i, j = \overline{1, m}$, то один из факторов исключают. Здесь сразу возникает вопрос: «Какой из двух хорошо коррелированных факторов исключать?» Решение об исключении того или иного

фактора принимают, исходя из управляемости факторов на уровне системы.

Если фактор хорошо управляем и позволяет улучшить функционирование системы, то его оставляют в модели. Но часто возникают ситуации, когда оба фактора положительно влияют на систему и на них можно воздействовать. Поэтому вопрос исключения факторов решают путем процедуры отбора главных факторов.

Принятие решения об отборе главных факторов производится с применением анализа значений специальных статистических характеристик.

Процедура отбора главных факторов включает следующие этапы:

1) анализ факторов на мультиколлинеарность и ее снижение (исключение);

2) анализ тесноты взаимосвязи факторов $x^j, j = \overline{1, m}$ с зависимой переменной y ;

3) анализ степени влияния факторов на зависимую переменную;

4) проверка коэффициента регрессии $a_j, j = \overline{0, m}$ на статистическую значимость;

5) анализ факторов на управляемость;

6) построение новой регрессионной модели без исключенных факторов;

7) исследование целесообразности исключения факторов из модели с помощью коэффициента детерминации.

Для выполнения первых двух этапов составляют корреляционную матрицу следующего вида (табл. 2).

Таблица 2. Корреляционная матрица

Номер переменной	x^1	x^2	...	x^m	y
x^1	1	r_{12}	...	r_{1m}	r_{1y}
x^2	r_{21}	1	...	r_{2m}	r_{2y}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x^m	r_{m2}	r_{m2}	...	1	r_{my}

Для анализа факторов на мультиколлинеарность используют коэффициенты парной корреляции r_{ij} , $i, j = \overline{1, m}$.

Анализ тесноты взаимосвязи x^j , $j = \overline{1, m}$ и y проводится с использованием соответствующих коэффициентов парной корреляции r_{jy} , $j = \overline{1, m}$. Если $r_{jy} = 0$, то j -й фактор исключается автоматически. Далее факторы сортируются в порядке возрастания модулей коэффициентов парной корреляции. Принятие решения об их исключении начинается с первых элементов полученной последовательности. Окончательное решение об исключении принимается в ходе анализа других статистических характеристик.

Анализ степени влияния факторов на зависимую переменную осуществляется путем вычисления коэффициента β_k :

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{x^k}}{\sigma_y}, \text{ где } k = \overline{1, m}.$$

Коэффициент показывает, на сколько σ_y изменится зависимая переменная y , если изменить на σ_{x^k} k -й фактор при фиксированных значениях остальных факторов. Он учитывает влияние анализируемого фактора на зависимую переменную с учетом различий уровня его колеблемости. Фактор x^j с меньшим коэффициентом β_j по отношению к фактору x^i (коэффициент β_i) может быть исключен из модели.

Принятие решения об исключении фактора из модели путем вычисления коэффициента β_k имеет меньший вес по отношению к принятию решения на базе оценки тесноты связи фактора с зависимой переменной. Иначе говоря, если для факторов x^i и x^j установлено, что $r_{iy} > r_{jy}$, но $\beta_i < \beta_j$, то исключению подлежит фактор x^j .

Проверка коэффициентов на статистическую значимость проводится по одному из двух критериев:

- 1) критерий Стьюдента;
- 2) критерий Фишера.

Проверка коэффициентов по критерию Стьюдента проводится по следующей формуле:

$$t_k = \frac{a_k}{S_{a_k}}, k = \overline{1, m},$$

где a_k – коэффициент регрессии при k -м факторе,

S_{a_k} – стандартное отклонение оценки параметра a_k , вычисляемое по формуле

$$S_{a_k} = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_k(1 - d_{yj})(n-1)}.$$

Здесь число степеней свободы статистики Стьюдента равно $f = n - m - 1$.

Полученные значения $t_k, k = \overline{1, m}$ сравниваются с критическим значением $t_{f, \alpha}$, где α – уровень значимости. Если $t_k \geq t_{f, \alpha}$, то очевидно a_k существенно больше нуля, а фактор x^k оказывает большее влияние на зависимую переменную y . В противном случае фактор исключается из модели.

Проверка статистической значимости по критерию Фишера проводится с помощью формулы

$$F_k = \left(\frac{a_k}{S_{a_k}} \right)^2, k = \overline{1, m}.$$

Здесь число степеней свободы статистики F_k следующие $f_1 = 1$, $f_2 = n - m - 1$. Как в предыдущей методике, значения F_k сравниваем с критическим значением $F_{f_1 f_2, \alpha}$. Если $F_k > F_{f_1 f_2, \alpha}$, то фактор x^k оказывает существенное влияние на y . В противном случае фактор x^k исключается.

При анализе факторов на управляемость осуществляется логический анализ факторов на предмет возможности воздействия на них на уровне системы. Те факторы, которые не поддаются управлению, исключаются из модели.

Например, мы исследуем зависимость объема выпускаемой продукции от следующих факторов: размер вознаграждения рабочим, скорость резки деталей, которую выполняет станок, количество технических перерывов за одну смену. Очевидно, что мы не можем воздействовать на второй фактор, потому что он определяется техническими характеристиками оборудования. Поэтому при близких значениях коэффициентов корреляции и β_k мы его исключаем.

Построение новой регрессионной модели

Пусть мы исключили из полученной ранее модели с коэффициентом детерминации D_m m_2 факторов. Тогда строим новую регрессионную модель с оставшимися $m_1 = m - m_2$ факторами. Для нее также вычисляем коэффициент детерминации D_{m_1} .

Исследование целесообразности исключения m_2 факторов из модели с помощью коэффициента детерминации осуществляется путем расчета следующей величины:

$$F_1 = \frac{(D_m - D_{m_1})(n - m - 1)}{(m - m_1)(1 - D_m)}. \quad (9)$$

С помощью данной величины, которая имеет F – распределение со степенями свободы $f_1 = m - m_1 = m_2$ и $f_2 = n - m - 1$, устанавливается, вносят ли совместно исключенные факторы существенную долю в вариацию объясняющей переменной y . Разность $D_m - D_{m_1}$ в (9) является мерой дополнительного объяснения вариации y за счет обратного включения выведенных из модели факторов.

Значение F_1 сравнивают с критическим F_{α, f_1, f_2} для уровня значимости α и степеней свободы f_1, f_2 . Если $F_1 > F_{\alpha, f_1, f_2}$, то m_2 объясняющих переменных совместно оказывают существенное влияние на вариацию переменной y , и, следовательно, все m_2 переменные из модели нельзя исключать. В противном случае, m_2 переменных совместно не оказывают существенного влияния на вариацию переменной y . Здесь эти переменные окончательно исключаются из модели.

Проверка адекватности модели

Данный этап анализа включает:

- 1) оценку значимости коэффициента детерминации;
- 2) проверку качества подбора теоретического уравнения;
- 3) вычисление специальных показателей.

Оценка значимости коэффициента детерминации необходима для решения вопроса: оказывают ли выбранные факторы влияние на зависимую переменную? Оценка позволяет выявить такие ситуации, когда величина D целиком обусловлена случайными колебаниями в выборке, на основании которой он вычислен.

Для оценки значимости D используется F -статистика со степенями свободы $f_1 = m$, $f_2 = n - m - 1$:

$$F = \frac{D(n - m - 1)}{m(1 - D)}.$$

Если значение F превышает критическое, то включенные в уравнение регрессии переменные достаточно объясняют зависимую переменную y .

Проверка качества подбора теоретического уравнения осуществляется с использованием средней ошибки аппроксимации.

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - y_{it}}{y_{it}} \right) 100\%.$$

Специальные показатели применяются для характеристики воздействия отдельных факторов на итоговый показатель.

Коэффициент эластичности

$$\beta_k^e = a_k \frac{\overline{x_k}}{\overline{y}}.$$

Он показывает, насколько процентов в среднем изменяется функция с изменением аргумента на 1 % при фиксированных значениях других аргументов.

Мера вариации результативного признака за счет изолированного влияния фактора x^k : $g_k = \beta_k^2$.

Показатель системного эффекта факторов показывает общее влияние факторов без учета внутренних связей:

$$\eta_s = R^2 - \sum_{j=1}^m \beta_j^2 .$$

Интерпретация системы

Результаты регрессионного анализа сравниваются с гипотезами, сформулированными на первом этапе исследования, и оценивается их правдоподобие с точки зрения поведения системы.

Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной

Полученное уравнение регрессии находит практическое применение в прогностическом анализе. Прогноз получают путем подстановки в регрессию численно оцененных значений факторов.

Лекция 8. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Прогноз осуществляется для оценки неизвестного параметра в будущем периоде времени или в неисследованной части пространства.

При прогнозировании используют два понятия.

1. **Предсказание** – суждение о будущем состоянии процесса (или состоянии процесса в неисследованной части пространства), основанное на субъективных оценках качественных и количественных факторов.

2. **Прогнозирование** – оценка параметра в будущем периоде или в неисследованной области пространства на базе эвристических и математических методов.

Эвристические методы базируются на использовании трудно формализуемых или не формализуемых явлений или процессов. В математических методах осуществляется подбор и обоснование соответствующей модели исследуемого процесса, а также способов определения неизвестных параметров. Здесь задача прогнозирования сводится к решению уравнений, описывающих данную модель для заданного момента времени.

Для экономических систем наиболее популярны методы экстраполяции, которые отличаются простотой, наглядностью и легко реализуются на ЭВМ. Экстраполяционные методы предполагают, что существует связь между прошлым, настоящим и будущим. Когда речь идет о временных рядах, то существенен порядок, в котором осуществляются наблюдения.

Временной ряд y_t , $t = \overline{1, n}$ может быть представлен в следующем виде:

$$y_t = x_t + \varepsilon_t,$$

где x_t – детерминированная компонента процесса,

ε_t – стохастическая (случайная) компонента процесса.

Детерминированная компонента, иначе ее называют трендом, x_t характеризует общую тенденцию изменения изучаемого показателя. Стохастическая компонента ε_t отражает случайные колебания или шумы.

Отрезок времени k , отмеряемый от момента времени t , то есть точки $n + 1, n + 2, \dots, n + k$, называют периодом упреждения, или прогнозным периодом. Если период упреждения находится в пределах трех лет, то прогноз называют краткосрочным. Когда мы прогнозируем на период от трех до пяти лет, то выполняем среднесрочный прогноз, а при периоде более пяти лет – долгосрочный прогноз.

При прогнозировании оценивается математическое ожидание исследуемого процесса (точечный прогноз) и величина интервала, в который с заданной вероятностью попадет прогнозируемое значение процесса (интервальный прогноз).

Экстраполяционные методы можно классифицировать на следующие группы:

- 1) методы авторегрессии;
- 2) методы, основанные на разложении временного ряда на компоненты;
- 3) методы, позволяющие учесть неравнозначность исходных данных;
- 4) методы прямой экстраполяции;
- 5) методы, основанные на построении многофакторных корреляционно-регрессионных моделей.

Дадим краткую характеристику вышеприведенным группам.

Авторегрессионные модели используют в случае, когда влияние факторов на исследуемый параметр четко не определено, то есть невозможно выделить стабильные во времени причинно-следственные связи. Такие модели целесообразно применять для сильно автокоррелированных динамических рядов.

При построении моделей авторегрессии предполагается, что во временных рядах существует связь между недавно реализованными значениями и значением, которое наступит в будущем, то есть имеется корреляция. Модель авторегрессии имеет следующий вид:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_m y_{t-m},$$

где $a_l, l = \overline{0, m}$ – параметры уравнения регрессии, y_t – значение показателя в прогнозируемом периоде ($t = \overline{n+1, n+k}$).

При составлении данного уравнения часто осуществляют элиминирование мультиколлинеарности в матрице приведенных рядов данных ($n - m > 2$):

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_n \\ y_m & y_{m+1} & \dots & y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Для улучшения свойств прогнозной модели в нее вводят фактор времени в виде самостоятельной переменной t . Увеличение точности прогнозирования в ряде случаев достигается за счет учета линейного тренда.

Методы прогнозирования, основанные на разложении временного ряда на компоненты – главная тенденция, сезонные колебания и случайная составляющая, – позволяют описать многие (практически любые) экономические процессы независимо от их характера. При аддитивной связи компонент модель имеет вид:

$$y_t = y_t' + y_t'',$$

где y_t' – трендовая составляющая, y_t'' – сезонные колебания и случайная составляющая.

При этом последняя ($y_t'' = y_t - y_t'$) может быть разложена в ряд Фурье:

$$y_t'' = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i \cos it_r + b_i \sin it_r) + \xi_t.$$

Смысл переменной t_r и правила вычисления коэффициентов $a_0, a_i, b_i, i = \overline{1, m}$ приведены в работе [3].

Качество прогнозирования напрямую зависит от качества и полноты исходных данных. Вышеприведенные методы могут давать сбои при неравнозначности исходных данных (например, разные размерности и порядки значений факторов).

Преодолеть данную проблему можно с помощью соответствующих методов:

1) метод авторегрессии с последующей адаптацией коэффициентов уравнения;

2) метод взвешенных отклонений.

Мы рассмотрим один из подходов адаптации коэффициентов.

Для адаптации коэффициентов модели авторегрессии может быть использован принцип метода градиентного (наискорейшего) спуска:

$$a_n = a_o - k - \text{grad}(l_{t+\tau}^2), \quad (10)$$

где a_n – вектор новых коэффициентов,

a_o – вектор старых коэффициентов,

$k > 0$ – управляемый коэффициент,

$l_{t+\tau}$ – ошибка прогноза в момент времени $t + \tau$.

После математических преобразований получим откорректированные оценки коэффициентов:

$$a_n = a_o + 2kl_{t+\tau}x_t.$$

Для нахождения коэффициента k можно использовать итеративную процедуру, описанную в работе [4].

8.1. Прогнозирование с помощью методов экстраполяции

Прогнозирование с помощью методов экстраполяции включает в себя следующие этапы:

1) определение цели и задачи исследования, анализ прогнозируемого объекта;

2) подготовка исходных данных;

3) фильтрация исходного временного ряда;

4) логический отбор видов аппроксимирующей (прогнозной) функции;

5) оценка математической модели прогнозирования (вычисление коэффициентов прогнозной функции);

6) выбор математической модели прогнозирования.

Определение цели и задачи исследования, анализ прогнозируемого объекта

Данный этап предусматривает детальное логическое изучение системы и формулирование взаимодействий ее компонент.

Подготовка исходных данных

На данном этапе устанавливается полнота исходных рядов данных. Недостающие значения вычисляются с помощью методов интерполяции.

Например, если значение y_k , $k = \overline{1, n}$ в поквартальном ряде отсутствует, то его можно вычислить (оценить) с помощью следующей формулы:

$$y_k = (y_{k-1} + y_{k+1}) \frac{y_{k-4}}{y_{k-5} + y_{k-3}}. \quad (11)$$

Вычисление недостающего значения по формуле (11) позволяет учесть соседние значения и прошлогоднюю тенденцию изменения ряда.

Фильтрация временного ряда

На данном этапе осуществляется выявление аномальных значений и замена их значениями, соответствующими тенденциям динамики прогнозируемого параметра.

Аномальным значением называют такую величину члена ряда, которая существенно отклоняется от значений ближних элементов.

Устранение аномальных явлений осуществляется двумя способами, которые могут быть использованы по отдельности или последовательно: сглаживание и выравнивание.

Сглаживание применяется для устранения случайных отклонений (шума) из экспериментальных значений исходного ряда.

Сглаживание проводится с помощью многочленов, приближающих группы опытных точек (методом наименьших квадратов). Чаще всего применяют линейную зависимость. При сглаживании пересчет ведется не только для текущих значений y_k , $k = \overline{1, n}$, но и для соседних.

Для трех точек используются следующие формулы:

$$y'_k = \frac{1}{3}(y_{k-1} + y_k + y_{k+1}),$$
$$y'_{k-1} = \frac{1}{6}(5y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}),$$

$$y'_{k+1} = \frac{1}{6}(-y_{k-1} + 2y_k + 5y_{k+1}).$$

Для пяти точек используются следующие формулы:

$$y'_k = \frac{1}{5}(y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2}),$$

$$y'_{k-1} = \frac{1}{10}(4y_{k-2} + 3y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1}),$$

$$y'_{k+1} = \frac{1}{10}(y_{k-1} + 2y_k + 3y_{k+1} + 4y_{k+2}),$$

$$y'_{k-2} = \frac{1}{5}(3y_{k-2} + 2y_k + y_{k+1} - y_{k+2}),$$

$$y'_{k+2} = \frac{1}{5}(-y_{k-2} + y_0 + 2y_{k+1} + 3y_{k+2}).$$

Сглаживание (даже в простом линейном варианте) является во многих случаях эффективным средством выявления тренда при наличии в экспериментальных точках случайных помех и ошибок измерения.

Выравнивание применяется для представления исходного ряда без изменения его числовых значений. Для этого исходную эмпирическую формулу $y = f(t, a, b)$, где t – момент времени, a, b – параметры, приводят к следующему виду:

$$Y = a_1 T + b_1.$$

Здесь используется двухпараметрическая зависимость, которая широко распространена и проста в получении. Использование большего числа параметров влечет за собой получение громоздких формул и, зачастую, неудачу в выравнивании.

Наиболее часто при выравнивании используется логарифмирование и замена переменной.

Ниже приводятся примеры выравнивания для некоторых эмпирических формул.

Пример 1:

$$y = at^b.$$

Логарифмирование: $\lg y = \lg a + b \lg t$. Замена переменных $T = \lg t$, $Y = \lg y$, $b_1 = \lg a$, $a_1 = b$.

Пример 2:

$$y = ae^{bt}.$$

Логарифмирование: $\lg a = \lg a + bt \lg e$. Замена переменных $a_1 = b \lg e$, $b_1 = \lg a$, $T = t$.

Пример 3:

$$y = \frac{1}{a + be^{-t}}.$$

Выравнивание: $Y = \frac{1}{y}$, $T = e^{-t}$, $a_1 = b$, $b_1 = a$.

С помощью выравнивания мы имеем линейную зависимость, для которой значительно проще определить коэффициенты. После прогнозирования полученные значения необходимо пересчитать по формулам, обратным исходному преобразованию.

На практике метод выравнивания используется для определения приближенных значений параметров аппроксимирующей функции.

Логический отбор аппроксимирующей функции

На данном этапе осуществляется анализ исходного ряда данных на предмет изменения его значений во времени. При этом учитываются условия протекания рассматриваемого процесса и требования, предъявляемые к математической модели. Этап предусматривает рассмотрение и решение следующих вопросов:

1) какой функции соответствует поведение значений исследуемого параметра (монотонной, стабильно монотонной, периодической, имеющей один или несколько экстремумов, функции детерминированного хаоса);

2) имеются ли ограничения для показателя сверху и снизу, связанные с постановкой задачи;

3) имеет ли функция, определяющая процесс, точки перегиба;

4) обладает ли анализируемая функция свойством симметричности (такие случаи могут проявляться, например, при рассмотрении жизненного цикла товара);

5) накладываются ли на процесс ограничения во времени.

Ниже приведены классы наиболее часто используемых функций.

Степенной полином:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i t^i ;$$

экспоненциальный полином:

$$y(t) = \exp \left(a + \sum_{i=1}^m a_i t^i \right) ;$$

гиперболический полином:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i t^i} ,$$

где y – прогнозируемый показатель,

t – момент времени,

a_0, a_1, \dots, a_m – параметры (коэффициенты) экстраполирующих функций.

На практики хорошие результаты показывают линейная, квадратичная и степенная ($y(t) = at^b$) функции. Они содержат малое количество параметров и в прогнозном периоде показывают большую точность.

Также хорошие результаты получаются, когда используются следующие функций:

Экспоненциальная:

$$y(t) = ae^{bt} ;$$

модифицированная экспоненциальная:

$$y(t) = k - ae^{-bt} ;$$

гиперболическая:

$$y(t) = a + \frac{b}{c+t} ;$$

логистическая:

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-et}} .$$

При выборе вида аппроксимирующей функции, когда есть возможность, прибегают к графическому способу подбора по виду

точек временного ряда. Иногда вместо значений ряда используют их первые разности $z_k = y_k - y_{k-1}$, $k = \overline{2, n}$ или производную аппроксимирующей функции.

Для программной реализации выбора аппроксимирующей функции осуществляют верификацию прогноза по ретроспективному периоду, в которой используются остатки:

$$e_i = y_i - f(a, t_i),$$

где t_i – i -й момент времени, $i = \overline{1, n}$;

$f(a, t_i)$ – значение экстраполирующей функции в момент времени t_i ;

a – вектор параметров экстраполирующей функции;

y_i – фактическое значение параметра в момент времени t_i .

Когда средняя величина остатков равна или близка нулю, то функция может быть внесена в список прогнозных функций. Обычно при прогнозировании выбирают сразу несколько аппроксимирующих функций. Окончательный выбор осуществляется путем сравнения точности прогнозирования по ретроспективному периоду.

Оценка математической модели прогнозирования

На данном этапе определяются параметры различных аппроксимирующих функций. Для этого используются метод наименьших квадратов (МНК) и его модификации, метод экспоненциального сглаживания, метод вероятностного моделирования, метод адаптивного сглаживания.

Мы подробно рассмотрим два метода: модификацию МНК и метод экспоненциального сглаживания.

Метод наименьших квадратов, как мы уже знаем, сводится к минимизации квадратов разности расчетного значения параметра и фактического на ретроспективном периоде:

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (12)$$

где \hat{y}_i – расчетные значения исходного ряда,

y_i – фактические значения исходного ряда, n – число наблюдений.

МНК с соотношением (12) называют классическим МНК. В этом случае предполагается, что все значения ряда являются равноправными. Если это не так, то каждое слагаемое умножается на коэффициент дисконтирования $\beta_i < 1, i = \overline{1, n}; \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Такая модификация носит название «Метод взвешенных наименьших квадратов» (МВНК). В данном методе соотношения (12) принимает вид

$$S_w = \sum_{i=1}^n \beta_i (\hat{x}_i - x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Коэффициенты β_i могут быть заданы в числовой форме или в виде функции. Обычно строят возрастающие последовательности, показывая, что будущее поведение системы в большей степени определяется поздними наблюдениями, чем ранними.

Метод наименьших квадратов – один из самых простых с точки зрения реализации на ЭВМ. За этой простотой, к сожалению, стоят три серьезных недостатка:

1. Модель тренда жестко фиксируется, и с помощью МНК можно получить прогноз на небольшой период. Из этого следует, что МНК относят к методам краткосрочного прогнозирования.

2. Выбор вида модели весьма затруднителен. Также сложно обосновать выбор весов в МВНК.

3. Метод МНК хорошо реализуется для линейных и реализуемых зависимостей. В этом случае нахождение коэффициентов модели сводится к решению системы линейных уравнений. Задача значительно усложняется, если для прогноза используется функциональная зависимость, не сводимая к линейной.

Метод экспоненциального сглаживания – эффективный и надежный метод среднесрочного прогнозирования.

В данном методе предполагается, что чем ближе точка (значение по времени) к прогнозному периоду, тем выше их ценность. Такое положение лежит в основе метода экспоненциального сглаживания.

Сущность метода заключается в сглаживании исходного динамического ряда взвешенной скользящей средней, веса которой ($w_i, i = \overline{1, n}$) подчиняются экспоненциальному закону (рис. 9).

Пусть исходный динамический ряд описывается полиномом следующего вида:

$$y_t = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_p}{p!} t^p + \varepsilon_t,$$

где b_0, b_1, \dots, b_p – коэффициенты полинома,

p – порядок (степень) полинома,

ε_t – случайная составляющая.

Величина $S_t^k(y)$ называется экспоненциальной средней k -го порядка для ряда y_t .

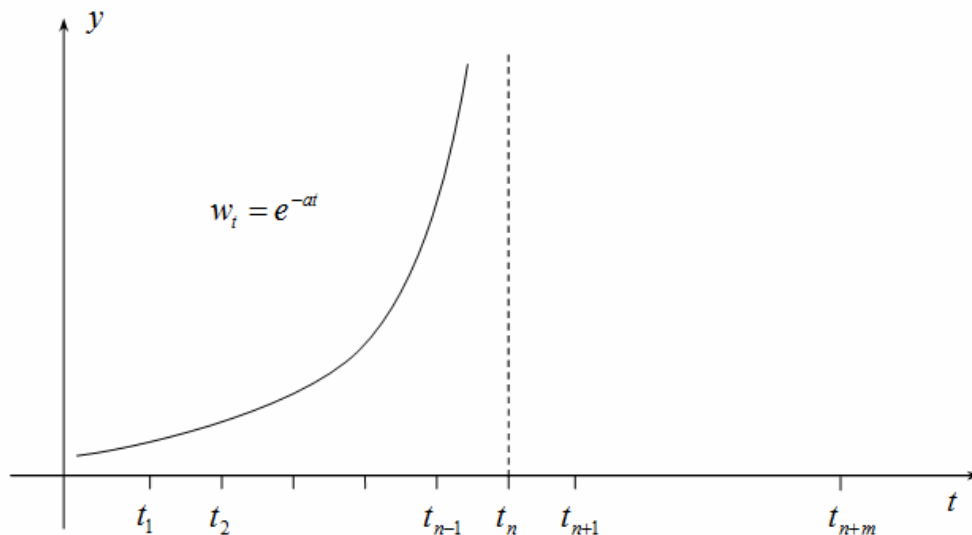


Рис. 9. Коэффициент экспоненциального сглаживания

Параметр сглаживания α определяет влияние исходного ряда наблюдений. Чем больше α , тем больше вклад последних наблюдений в формирование тренда, а влияние начальных условий убывает быстро. При малом значении параметра α прогнозные оценки учитывают все наблюдения, при этом уменьшение влияния более ранней информации происходит медленно.

В расчетах экспоненциальная средняя определяется с помощью рекуррентной формулы Брауна:

$$S_t^k(y) = \alpha S_{t-1}^{k-1}(y) + (1 - \alpha) S_{t-1}^k(y). \quad (13)$$

Для того чтобы использовать соотношение (13), необходимо задать начальные условия $S_0^l, l = \overline{1, k}$ по формуле Брауна – Мейера:

$$S_0^l = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\hat{b}_i}{n!} \frac{\alpha(1-\alpha)}{(l-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} j^n (1-\alpha)^j \frac{(n-1+j)!}{j!}, \quad (14)$$

где \hat{b}_i , $i = \overline{0, n}$ – оценки коэффициентов.

Оценку коэффициентов прогнозирующего полинома определяют через экспоненциальные средние по фундаментальной теореме Брауна – Мейера.

Рассмотрим применение метода экспоненциального сглаживания для линейного и параболического тренда, которые наиболее популярны.

Линейная модель Брауна

Она имеет следующий вид:

$$y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t. \quad (15)$$

Начальные приближения (условия) для случая линейного тренда равны (по формуле (14)):

экспоненциальная средняя первого порядка:

$$S_1^1(y) = b_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_1;$$

экспоненциальная средняя второго порядка:

$$S_1^2(y) = b_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_1.$$

Экспоненциальные средние первого и второго порядков в момент времени t (см. формулу (15)):

$$S_2^1(y) = \alpha y_1 + (1-\alpha) S_1^1(y);$$

$$S_2^2(y) = \alpha S_2^1(y) + (1-\alpha) S_1^2(y).$$

Для $t > 2$:

$$S_t^1(y) = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^1(y);$$

$$S_t^2(y) = \alpha S_t^1(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^2(y).$$

Оценки коэффициентов линейного тренда:

$$\hat{b}_0 = 2 S_t^1(y) - S_t^2(y),$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} [S_t^1(y) - S_t^2(y)].$$

Прогноз на m шагов (в моменты времени $t = \overline{t_{n+1}, t_{n+m}}$) равен $y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t$. При этом оценка ошибки прогноза:

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon_t} \sqrt{\frac{\alpha}{(2-\alpha)^3} \left[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)t_m + 2\alpha^2 t_m^2 \right]}.$$

Параболический тренд

$$y_t = b_0 + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \varepsilon_t.$$

Начальные приближения

$$S_0^1(y) = b_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} b_2;$$

$$S_0^2(y) = b_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_1 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2\alpha^2} b_2;$$

$$S_0^3(y) = b_0 - \frac{3(1-\alpha)}{\alpha} b_1 + \frac{(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} b_2.$$

Экспоненциальные средние:

$$S_t^1(y) = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^1(y);$$

$$S_t^2(y) = \alpha S_t^1(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^2(y);$$

$$S_t^3(y) = \alpha S_t^2(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^3(y).$$

Оценки коэффициентов параболической зависимости для тренда:

$$\hat{b}_0 = 3[S_t^1(y) - S_t^2(y)] + S_t^3(y);$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left[(6-5\alpha) S_t^1(y) - 2(5-4\alpha) S_t^2(y) + (4-3\alpha) S_t^3(y) \right];$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left[S_t^1(y) - 2S_t^2(y) + S_t^3(y) \right].$$

Прогноз на m шагов (в моменты времени $t = \overline{t_{n+1}, t_{n+m}}$) равен $y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t + \frac{1}{2} \hat{b}_2 t^2$. При этом оценка ошибки прогноза будет рав-

на: $\sigma_y^* \approx \sigma_{\varepsilon_t} \sqrt{2\alpha + 3\alpha^2 + 3\alpha^3 t_1}$.

Для метода экспоненциального сглаживания основной и наиболее трудный момент – выбор параметра сглаживания α . Он определяет оценки коэффициентов модели, а следовательно, и результаты прогноза.

Приближенная оценка параметра метода α осуществляется двумя способами.

1. *Соотношение Брауна*, выведенное из условия равенства скользящей и экспоненциальной средней:

$$\alpha = \frac{2}{N+1}, \text{ где } N \text{ – число точек ряда, для которых динамика}$$

считается однородной и устойчивой (число точек в интервале

сглаживания). Иногда $\alpha = \frac{2}{n+1}$, где n – число наблюдений

(точек) в ретроспективном периоде.

2. *Соотношение Мейера*:

$$\alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_e}, \text{ где } \sigma_n \text{ – средняя квадратическая ошибка модели;}$$

σ_e – средняя квадратическая ошибка исходного ряда.

Очевидно, что выбор параметра α нужно связывать с точностью прогнозирования. Для более обоснованного выбора α можно использовать процедуру обобщенного сглаживания, в результате которой получаются соотношения, связывающие оценку ошибки прогноза σ и параметр сглаживания:

для линейной модели:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2} \left[1 + 4\beta + 5\beta^2 + 2\alpha(1+3\beta)\tau + 2\alpha^2\tau^3 \right] \sigma_e^2;$$

для квадратичной модели:

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 (2\alpha + 3\alpha^3 + 3\alpha^2\tau),$$

где $\beta = 1 - \alpha$,

τ – горизонт прогнозирования,

σ_e – дисперсия остатков на ретроспективном диапазоне.

Очевидно, что при уменьшении параметра сглаживания α снижается оценка ошибки прогноза, но при этом увеличивается риск получения некачественной экстраполяционной модели.

Качество прогноза во многом зависит от выбора порядка полинома. Известно, что превышение второго порядка модели не приводит к существенному увеличению точности прогноза, но значительно усложняет расчет.

В заключение отметим, что метод экспоненциального сглаживания – один из наиболее эффективных, надежных и широко применяемых методов прогнозирования. Он позволяет получить оценку параметров тренда, характеризующих не средний уровень процесса, а тенденцию, сложившуюся к моменту последнего наблюдения, и при этом отличается простотой вычислительных операций.

Проиллюстрируем применение метода экспоненциального сглаживания на конкретном примере.

Ниже, в табл. 3 приведены исходные данные.

Таблица 3. Исходные данные

Год	1997	1998	1999	2000
t	1	2	3	4
y_t	40	43	46	48

Очевидно, что представленный ряд исходных значений можно аппроксимировать с помощью линейной функции. Ее коэффициенты, вычисленные с помощью метода наименьших квадратов будут следующие: $a = 2,7$; $b = 37,5$, то есть $y = 2,7t + 37,5$. При этом относительная ошибка составит $\sigma_{\varepsilon} = 0,3$.

Параметр сглаживания при $N = 4$:

$$\alpha = \frac{2}{4+1} = 0,4.$$

Найдем экспоненциальные средние.

Начальные условия:

$$S_1^1 = 37,5 - \frac{1-0,4}{0,4} 2,7 = 33,45;$$

$$S_1^2 = 37,5 - \frac{2(1-0,4)}{0,4} 2,7 = 29,4.$$

Вычислим экспоненциальные средние, начиная с момента времени $t = 2$ (мы делаем прогноз на ретроспективном периоде для

$m = 1$ при $t = 2$) и с использованием вышеприведенных начальных условий:

$$S_2^1 = 0,4 \cdot 40 + 0,6 \cdot 33,45 = 36,07 ,$$

$$S_2^2 = 0,4 \cdot 36,07 + 0,6 \cdot 29,4 = 32,07 .$$

Соответственно пересчитываются коэффициенты регрессии a и b :

$$\hat{a}_2 = \frac{0,4}{1-0,4} (36,07 - 32,07) = 2,67 ,$$

$$\hat{b}_2 = 2 \cdot 36,07 - 32,07 = 40,07 ,$$

а прогнозируемое значение равно $\hat{y}_2 = 40,07 + 2,67 \cdot 1 = 42,74$. Мы умножаем на единицу, так как осуществляем прогноз на один период $m = 1$.

Аналогичным образом вычисляются необходимые величины для $t = \overline{3, 5}$.

В табл. 4 сведены исходные, промежуточные и результирующие значения прогнозирования с помощью метода экспоненциального сглаживания.

Таблица 4. Результаты прогнозирования

t	y_t	$S_t^{[1]}$	$S_t^{[2]}$	\hat{a}_t	\hat{b}_t	\hat{y}_t	$\hat{y}_t - y_t$
1	40						
2	43	36,07	32,07	40,07	2,67	42,74	-0,26
3	46	38,84	34,78	42,90	2,71	45,62	-0,38
4	48	41,71	37,55	45,86	2,77	48,63	0,63
5 ($l = 1$)	-	44,22	40,21	48,23	2,67	51,89	-

Окончательная модель прогнозирования

$$y_{t+m} = 2,67m + 48,23 .$$

Оценка ошибки прогноза

$$\sigma = 0,46 .$$

Выбор математической модели прогнозирования

Выбор моделей прогнозирования базируется на оценке их качества. Качество модели определяется их точностью и адекватностью.

Адекватность характеризуется наличием и учетом определенных статистических свойств. Точность модели определяется степенью ее близости к фактическим данным.

Адекватность модели

Модель прогнозирования считается адекватной, если она учитывает существенную закономерность исследуемого процесса. В ином случае ее нельзя применять.

Закономерность исследуемого процесса находит отражение в наличии определенных статистических свойств остаточной компоненты. Их всего три:

- 1) независимость остатков;
- 2) случайность остатков и подчинение их нормальному закону распределения;
- 3) равенство суммы остатков нулю.

Независимость остаточной компоненты означает отсутствие автокорреляции между остатками $e_i = y_i - y_{it}$, $i = \overline{1, n}$. Наличие автокорреляции может привести к следующим последствиям:

- 1) дисперсия остатков регрессии будет недооцененной;
- 2) выборочная дисперсия параметров регрессии будет рассчитана с ошибкой, что станет препятствием к корректному применению МНК при построении модели исходного динамического ряда.

Для идентификации наличия автокорреляции остатков используется критерий Дарбина – Уотсона, в соответствии с которым вычисляется d -статистика:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n [(y_i - y_{it}) - (y_{i-1} - y_{it-1})]^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{it})^2},$$

где y_i , $i = \overline{1, n}$ – фактические значения исходного ряда, y_{it} , $it = \overline{1, n}$ – теоретические значения ряда, n – объем выборки.

Установлено, что областью значений величины d является отрезок $[0, 4]$. Согласно методу Дарбина – Уотсона существуют нижний d_n и верхний d_b пределы значений статистики d . Такие значе-

ния, зависящие от уровня значимости, объема выборки и числа объясняющих переменных (факторов), называют критическими. С ними сравнивается полученная величина d . При сравнении возникает один из четырех нижеперечисленных случаев (табл. 5, рис. 10).

Критерий Дарбина – Уотсона обладает двумя недостатками:

1) наличие области неопределенности, в которой нельзя прийти ни к какому выводу;

2) при объеме выборки менее 15 для статистики d не существуют критические значения d_n и d_b .

Таблица 5. Возможные случаи при сравнении величины d

№ п/п	Случай	Принимаемое решение
1	$d_b \leq d \leq 4 - d_b$	принимается гипотеза отсутствия автокорреляции остатков
2	$0 \leq d \leq d_n$	принимается гипотеза существования положительной автокорреляции остатков
3	$d_n \leq d \leq d_b$ или $4 - d_b \leq d \leq 4 - d_n$	при выбранном уровне значимости нельзя прийти к определенному выводу
4	$4 - d_n \leq d \leq 4$	принимается гипотеза о существовании отрицательной автокорреляции остатков

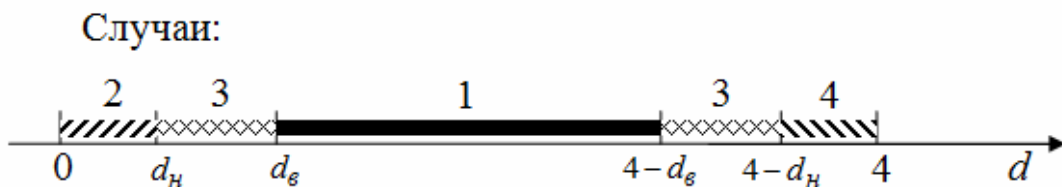


Рис. 10. Возможные случаи для значения статистики d

В этом случае для оценки независимости остатков можно использовать коэффициент автокорреляции:

$$r_a = 1 - \frac{d}{2}.$$

Расчетное значение r_a сравнивается с табличным r_{aT} . При этом степень свободы f равна n . Если $r_a \leq r_{aT}$, то остатки независимы.

Проверка случайности остатков осуществляется с помощью расчета количества так называемых точек поворота (критерий пиков и впадин). Здесь каждое значение ряда остатков сравнивается с

двумя соседними. Если оно больше или меньше их, то данная точка ряда является поворотной.

Пусть всего поворотных точек K . Тогда, если остатки случайны, то должно выполняться следующее строгое неравенство:

$$K > \left[\frac{(2n-1)}{3} - 2\sqrt{\left(16n - \frac{29}{90}\right)} \right].$$

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения можно проверить с помощью критерия Колмогорова – Смирнова. Также такую проверку можно выполнить, используя коэффициенты асимметрии – A_c (мера «скошенности») и эксцесса – E_k (мера «скупченности»):

$$A_c = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^3}{\sqrt{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \right]^3}};$$

$$E_k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \right)^2} - 3.$$

Данные коэффициенты оцениваются на близость к нулю. Для этого вычисляются среднеквадратические отклонения:

$$S_a = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)};$$

$$S_e = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}.$$

Если выполняются соотношения

$$A_c \leq 1,5S_a;$$

$$E_k \leq 1,5S_e,$$

то считается, что распределение ряда остатков не противоречит нормальному закону. В случае $A_c > 2S_a$ или $E_k > 2S_e$, то распределе-

ние ряда не соответствует нормальному закону распределения, и построение прогноза и его доверительных интервалов не правомочно. Если $1,5S_a < A_c \leq 2S_a$ или $1,5S_e < E_k \leq 2S_e$, то есть коэффициенты попадают в зону неопределенности, то можно использовать RS -критерий:

$$RS = (E_{\max} - E_{\min}) / S,$$

где $E_{\max} = \max_{i=1,n} e_i$, $E_{\min} = \min_{i=1,n} e_i$, S – среднеквадратическое отклонение остатков.

Если значение RS попадает между табулированными границами с заданным уровнем значимости, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается.

Равенство нулю средней ошибки можно проверить с помощью критерия Стьюдента:

$$t_p = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \right| \sqrt{\frac{n}{S}}.$$

Если t_p больше табличного значения при числе степеней свободы статистики t $f = n - 1$ и заданном уровне значимости α , то гипотеза равенства нулю средней ошибки отклоняется.

Оценка точности модели f выполняется с помощью ряда характеристик. Ниже приведены наиболее часто используемые показатели:

- 1) оценка стандартной ошибки;
- 2) средняя относительная ошибка модели;
- 3) среднее линейное отклонение;
- 4) ширина доверительного интервала.

Оценка стандартной ошибки осуществляется по формуле

$$S_{1,f(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2}{n - p}},$$

где n – число наблюдений, p – число определяемых коэффициентов модели.

Средняя относительная ошибка оценки вычисляется по формуле

$$\bar{m}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - f(x_i)}{f(x_i)} 100 \%$$

Среднее линейное отклонение вычисляется по формуле

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Ширина доверительного интервала в точке прогноза

Данный показатель позволяет определить, в каком диапазоне может находиться прогнозное значение. При вычислении ширины доверительного интервала оценивают верхнее и нижнее значение посредством определения стандартных ошибок коэффициентов модели.

Для решения задач используются интервальные оценки коэффициентов модели:

$$a_i^I = a_i \pm t_p S_{a_i}, \quad (16)$$

где $a_i, i = \overline{0, m}$ – коэффициенты модели (предполагается, что в ней присутствует свободный член, в противном случае i изменяется от единицы до m), $S_{a_i}, i = \overline{0, m}$ – стандартное отклонение коэффициента (см. п. 7.4), t_p – теоретическое значение критерия Стьюдента при уровне значимости 0,05 и числе степеней свободы $f_1 = n - m - 1$.

Если работа ведется с аппроксимацией вида $y_t = a_1 x + a_0$, то стандартные отклонения вычисляются по следующим формулам:

$$S_{a_0} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \quad S_{a_1} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}},$$

где σ^2 – среднеквадратическое отклонение исходного ряда. Следует обратить внимание на то, что S_{a_0} для многофакторной модели вычисляется точно также как для вышеуказанной аппроксимации.

Несмещенная оценка дисперсии случайной составляющей

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{it})^2 .$$

Используя соотношение вида (16) вычисляются верхняя и нижняя границы доверительного интервала Y_u, Y_d :

$$Y_u = f(a^u, x); Y_d = f(a^d, x),$$

где $a_i^u = a_i + t_p S_{a_i}$, $a_i^d = a_i - t_p S_{a_i}$, x – вектор факторов, используемый для прогнозирования.

По найденным границам вычисляется ширина доверительного интервала:

$$\Delta = Y_u - Y_d .$$

Из вышесказанного следует, что ширина доверительного интервала зависит:

1) от числа степеней свободы, и как следствие, от объема выборки, то есть чем больше объём выборки, тем, при прочих равных условиях, меньше ширина доверительного интервала;

2) от величины стандартного отклонения S_{a_i} , $i = \overline{0, m}$: чем больше данная величина, тем шире интервал.

Итогом работ по выбору вида математической модели прогноза является формирование ее обобщенных характеристик. В них должны входить:

- 1) вид уравнения модели и значения его параметров;
- 2) оценка точности и адекватности модели;
- 3) точечные и интервальные прогнозные оценки.

8.2. Модель Хольта – Уинтерса

Модель Хольта – Уинтерса относится к классу мультипликативных моделей с линейным ростом и позволяет проводить экстраполяционный прогноз с учетом сезонного спектра исходного ряда и общей тенденции поведения параметра. При этом предполагается, что временной ряд разбит на равные интервалы, которые называют сезонами.

Пусть ряд Y разбит на k сезонов по L значений. Всего ряд содержит kL значений. Модель Хольта – Уинтерса для таких обозначений имеет следующий вид:

$$y_t(t + \tau) = [\tau a(t) + b(t)]F(t + \tau - L),$$

где $y(t + \tau)$ – прогнозная оценка, τ – период упреждения (шаг прогнозирования), $a(t), b(t), F(t + \tau - L)$ – адаптируемые коэффициенты модели.

Последний множитель модели F называют коэффициентом сезонности. Все коэффициенты адаптируются (пересчитываются) при переходе между сезонами, то есть от членов ряда с номером $t - L$ к t .

Задача прогнозирования параметра с помощью модели Хольта – Уинтерса сводится к нахождению ее коэффициентов, которые вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$b(t) = \alpha_1 \frac{y(t)}{F(t-L)} + (1 - \alpha_1)[b(t-1) + a(t-1)], \quad (17)$$

$$a(t) = \alpha_2 [b(t) - b(t-1)] + (1 - \alpha_2)a(t-1), \quad (18)$$

$$F(t) = \alpha_3 \frac{y(t)}{b(t)} + (1 - \alpha_3)F(t-L). \quad (19)$$

В данных формулах присутствуют переменные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Такие переменные называются параметрами сглаживания. Они задаются специалистом в диапазоне от нуля до единицы. Их нахождение для модели, описывающей тот или иной процесс – отдельная задача.

Очевидно, что для вычисления необходимых коэффициентов, нам потребуется вычислить их начальные значения $a(0), b(0), F(-3), F(-2), F(-1), F(0)$.

Величины $a(0)$ и $b(0)$ – коэффициенты линейной аппроксимации исходного временного ряда $y = (y_1, y_2, \dots, y_{kL})$.

Обозначим через y_{tl} значения аппроксимации в момент времени $t = \overline{1, kL}$, а именно $y_{tl} = a(0)t + b(0)$. Тогда оставшиеся начальные значения вычисляются по следующим формулам:

$$F(-p) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{y_{z(p,i)}}{y_{z(p,i),l}}; \quad p = \overline{0, L-1}, \quad \text{где } z_i = iL - p.$$

Имея начальные коэффициенты, мы можем вычислять коэффициенты модели от сезона к сезону и перейти, тем самым, к про-

гнозированию. Очевидно, что горизонт прогнозирования кратен величине сезона L . При этом рекомендуют осуществлять прогноз только на один сезон $\tau = \overline{1, L}$.

Оценку адекватности модели можно осуществить с помощью ранее приведенной методики (см. п. 8.1).

Для иллюстрации работы модели Хольта – Уинтерса приведем пример.

Даны следующие значения параметра y (табл. 6).

Таблица 6. Исходные данные для параметра y

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	49	78	84	94	65	99	111	142	103	189	152	181

Пусть сезон состоит из четырех значений $L = 4$, тогда $k = 3$. Аппроксимация для данного ряда имеет следующий вид:

$$y_{it} = 10,98t + 40,86.$$

$$\text{Отсюда } a(0) = 10,98; b(0) = 40,86.$$

Вычислим начальные значения коэффициента сезонности. Для этого рассчитаем значения аппроксимации $y_{it}, t = \overline{1, 12}$ в каждый момент времени исторического периода (табл. 7).

Таблица 7. Значения y_{it}

t	1	2	3	4	5	6
y_{it}	51,79	62,72	73,65	84,58	95,51	106,44
t	7	8	9	10	11	12
y_{it}	117,37	128,3	139,23	150,16	161,09	172,02

$$\text{Отсюда } F(-3) = \frac{1}{3} \left(\frac{49}{51,79} + \frac{65}{95,51} + \frac{103}{139,23} \right) = 0,79,$$

$$F(-2) = 1,14, F(-1) = 1,01, F(0) = 1,09.$$

Пусть заданы следующие параметры сглаживания: $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,3$, $\alpha_3 = 0,6$. Тогда по формулам (17) – (19) можно последовательно находить коэффициенты модели (табл. 8).

Таблица 8. Результаты расчётов

t	$a(t)$	$b(t)$	$F(t)$	$y(t)$	$y_t(t)$
-3	–	–	0,787091	–	–
-2	–	–	1,141154	–	–
-1	–	–	1,007124	–	–
0	10,98	40,864	1,086843	–	–
1	8,276464	42,83221	1,001236	49	40,22719
2	7,366116	48,07418	1,429957	78	67,76762
3	8,070179	57,78718	1,275015	84	68,14361
4	7,640718	64,42582	1,310162	94	82,53274
5	4,032448	60,03897	1,050072	65	64,50543
6	3,200137	61,29705	1,541034	99	103,0521
7	4,755359	69,68126	1,465787	111	101,628
8	7,117056	82,30894	1,559189	142	114,44
9	5,594413	84,35052	1,152686	103	93,90377
10	7,504419	96,31162	1,793842	189	148,7762
11	4,788733	94,76375	1,548708	152	151,9436
12	5,048805	100,4194	1,70514	181	172,7226

Прогнозные значения $y_t(12 + \tau)$, $\tau = \overline{1,4}$ приведены в табл. 9.

Таблица 9. Прогнозные значения

τ	1	2	3	4
$y_t(12 + \tau)$	115,752	189,1933	171,1586	197,0559

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия «модель».
2. Проведите сопоставление понятий «модель», «система», «объект».
3. Какие требования предъявляются к модели?
4. Какие функции выполняет модель?
5. Перечислите классы моделей и их свойства согласно укрупненной классификации.
6. Назовите классы моделей и их свойства согласно детализированной классификации.
7. Какая модель называется имитационной?
8. Перечислите этапы построения имитационной модели.
9. Что происходит на этапе трансляции модели?
10. К каким последствиям может привести использование неадекватной модели?
11. В чем отличие стратегического и тактического планирования эксперимента?
12. На каких принципах строится концепция УСИМ?
13. Какие операции должна выполнять УСИМ?
14. Назовите этапы имитационного моделирования согласно концепции УСИМ.
15. Дайте определение понятия «датчик псевдослучайных чисел».
16. Что такое линейный конгруэнтный генератор?
17. Каким образом можно определить качество ЛК-генератора?
18. Перечислите принципы выбора параметров ЛК-генератора.
19. Что такое период генератора псевдослучайных чисел?
20. С помощью какого критерия можно проверить равномерность распределения чисел, полученных с помощью ЛК-генератора?
21. Что такое мощность ЛК-последовательности?
22. Каким образом можно подобрать параметры генератора с ненулевым аддитивным членом и составным модулем, чтобы его период был полным?
23. Назначение спектрального теста.
24. Назовите базовые принципы системной динамики.
25. Приведите структуру простейшей цепи обратной связи.

26. Дайте определение понятиям «уровень» и «темп»?
27. Назовите примеры программных продуктов, применяемых при построении имитационных моделей.
28. Что такое экзогенная переменная?
29. Что такое эндогенная переменная?
30. Как можно представить динамическую модель, основанную на системной динамике, в виде математических соотношений?
31. В чем заключается концепция объектно-ориентированной системы моделирования?
32. Что такое транзакт? Какие действия он может выполнять?
33. Приведите примеры транзактов.
34. Какими характеристиками обладает транзакт?
35. На что влияет приоритет транзакта?
36. Что представляет собой узел графа сети в концепции ООСМ?
37. Какие этапы необходимо пройти при проведении машинных экспериментов с моделью?
38. Дайте определение понятию «многофакторная модель».
39. Что характеризует остаточная дисперсия?
40. Назовите назначение коэффициента детерминации?
41. Каким образом можно оценить параметры многофакторной модели?
42. Назовите этапы построения многофакторной модели.
43. В чем заключается отрицательное воздействие коэффициента мультиколлинеарности на результат моделирования?
44. При выполнении расчетов коэффициентов корреляции коэффициент r_{12} оказался равным 0,8. Какой фактор необходимо исключить из модели?
45. По каким критериям проводится анализ факторов на статистическую значимость?
46. Для чего необходимо проверять модель на адекватность?
47. Что показывает коэффициент эластичности?
48. Назовите отличия предсказания от прогноза?
49. Приведите классификацию экстраполяционных методов прогнозирования.
50. На какие компоненты разбивается ряд при прогнозировании методами разложения ряда?

51. Влияют ли исходные данные на качество прогноза?
52. Назовите этапы прогнозирования с помощью методов экстраполяции.
53. В чем заключается подготовка исходных данных для выполнения прогноза?
54. В чем заключается критерий Дарбина – Уотсона?
55. Приведите характеристики модели Хольта – Уинтерса?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс лекций «Имитационное моделирование сложных систем», не делая акцента ни на одной области практики, знакомит читателей с основными разделами моделирования сложных систем во времени. В частности, рассматриваются принципы построения имитационных моделей, динамических моделей, построенных на принципах системной динамики, а также методика статистической обработки результатов экспериментов и прогнозирование.

Конечно, данная работа не может дать все знания по имитационному моделированию сложных систем, однако, имеющаяся в ней информация достаточно полно отражает все главные задачи дисциплины, демонстрирует основные способы их решения.

После изучения представленных материалов студент или любой другой, изучающий данную дисциплину, получит достаточный объем знаний, необходимых для решения серьезных прикладных задач. Также курс лекций снабжен библиографическим списком, в котором любой желающий может найти более подробные сведения по узким вопросам данной дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Афанасьев, В. Н.* Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 228 с. – ISBN 5-279-02419-8.

2. *Бережная, Е. В.* Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 368 с. – ISBN 2-279-02291-8.

3. *Лабскер, Л. Г.* Теория массового обслуживания в экономической сфере / Л. Г. Лабскер, Л. О. Бабешко. – М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1998. – 320 с. – ISBN 5-238-00020-0.

4. *Лукинский, В. С.* Модели и алгоритмы управления обслуживанием и ремонтом автотранспортных средств / В. С. Лукинский, Е. И. Зайцев, В. И. Бережной. – СПб. : СПГИЭА, 1997. – 122 с. – ISBN 5-88996-063-6.

5. *Френкель, А. А.* Математические методы анализа динамики и прогнозирования производительности труда / А. А. Френкель. – М. : Экономика, 1972. – 190 с.

6. *Форрестер, Дж.* Динамика развития города / Дж. Форрестер. – М. : Прогресс, 1974. – 286 с.

7. *Форрестер, Дж.* Мировая динамика / Дж. Форрестер. – М. : АСТ, 2003. – 384 с. – ISBN 5-17-019253-3.

Учебное издание

ДУХАНОВ Алексей Валентинович
МЕДВЕДЕВА Ольга Николаевна

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Курс лекций

Подписано в печать 30.03.10.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,28. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.