# Математические методы в информатике и вычислительной технике

М.С. Беспалов

Владимир 2006

# Глава 1

# Элементы теории множеств

## 1.1 Множества

Множество является одним из основных и первоначальных понятий в математике и понимается как набор (совокупность, семейство) различных элементов.

Запись $a \in A$ означает, что элемент $a$ принадлежит множеству $A$. Если каждый элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$, то $A$ есть подмножество множества $B$, что обозначают $A \subset B$. Символом $\emptyset$ обозначается пустое множество, не содержащие элементов. Множество всех подмножеств множества $A$ обозначается $\mathfrak{P}(A)$.

Число элементов конечного множества $A$ называют порядком множества $A$ и обозначают $|A|$. Примеры конечных множеств, используемых далее:
$Z_2 = \{0, 1\}, Z_3 = \{0, 1, 2\}, Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Перечислим основные числовые множества бесконечного порядка:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - множество натуральных чисел;
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество неотрицательных целых чисел;
$\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \dots\}$ - множество целых чисел;
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ - множество действительных (вещественных) чисел;
$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ - множество комплексных чисел.
Для них имеет место вложения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. В приведенной записи рациональных чисел встречаются равные элементы. Например, дроби $1/2$ и $2/4$ определяют одно и то же число. Основным представителем считается несократимая дробь, которая для любого рационального числа единственная.

Множество $\mathbb{R}$ составляют рациональные и иррациональные числа. Примером иррационального числа служит $\sqrt{2}$. Докажем, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где дробь несократимая. Тогда $2n^2 = m^2$ и, стало быть $m$ – четное. Обозначим $m = 2k$ и получим $2n^2 = 4k^2$, откуда следует, что $n$ – четное. Пришли к противоречию с предположением о несократимости дроби.

Существует три подхода (Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса) к построению теории действительных чисел. Множество $\mathbb{R}$, как расширение множества $\mathbb{Q}$, должно сохранять основные свойства $\mathbb{Q}$. Множество $\mathbb{Q}$ относительно операций сложения и умножения является полем, на котором заданы отношения $<$ и $\leq$ линейного порядка, позволяющее расположить все рациональные числа на числовой оси.

**Утверждение 1.** *Между любыми двумя различными рациональными числами найдется рациональное число.*

Множество, обладающее этим свойством называется *всюду плотным.* Это свойство также утверждает, что рациональные числа отделены друг от друга.

Метод сечений Дедекинда, изложение которого дано в [Ф], позволяет расположить все рациональные и иррациональные числа на числовой оси с сохранением перечисленных свойств.

Методом Кантора множество $\mathbb{R}$ вводится как пополнение $\mathbb{Q}$.

Поясним это понятие. Введем *расстояние* между числами $x, y \in \mathbb{Q}$ по формуле $d(x, y) = |x - y|$.

**Определение 1.** Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *фундаментальной последовательностью* (*последовательностью Коши*), если для любого $\epsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n, m > N$ выполнено $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Множество чисел назовем *полным*, если любая последовательность Коши в нем сходится к элементу этого множества.

В теореме Больцано-Коши [Ф, с.100] утверждается, что множество действительных чисел является полным.

**Лемма 1.** *Множество рациональных чисел не является полным.*

*Доказательство.* Для числа $x \in [0, 1)$, представленного в десятичной системе счисления

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots \quad , \tag{1}$$

введем понятие *срезки* числа $\quad [x]_n = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n$.

Примером фундаментальной последовательности рациональных чисел служит последовательность $\{[x]_n\}$ срезок любого фиксированного числа $x$. Возьмем в качестве $x$ иррациональное число. Рациональное число не может быть пределом указанной последовательности.

Данная схема рассуждений будет рассмотрена подробнее позднее, при изучении метрических пространств.

Метод Вейерштрасса построения множества $\mathbb{R}$, изложенный в [B], считается более наглядным, так как основан на представлении чисел в виде (1). Приведем краткое изложение основ метода Вейерштрасса на примере двоичных дробей, добавив аналогичную конструкцию (применяемую в дальнейших построениях) для натуральных чисел.

Для любого натурального $n$ существует единственное представление

$$n = \sum_{k=1}^{M} n_k 2^{k-1}, \qquad \text{где } n_k \in Z_2 = \{0, 1\},\ n_M = 1 \tag{2}$$

в двоичной системе счисления. Число $M$ здесь определяется из условия $2^M \le n < 2^{M+1}$. Будем говорить, что числу $n$ соответствует кортеж $\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$, являющийся обратной двоичной записью числа, или финитная последовательность $\hat{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M, 0, 0, \ldots)$, полученная заполнением старших разрядов нулями. Формулу (2) часто записывают в виде $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k 2^{k-1}$. Числу 0 соответствует нулевая последовательность. Добавлением знака перед суммой получаем двоичное представление целых отрицательных чисел.

Любое действительное число $x$ можно представить в виде $x = [x] + \{x\}$, где $[x]$ – целая часть числа $x$, а $\{x\} \in [0, 1)$ – дробная часть числа $x$.

Рассмотрим множество чисел полуинтервала $[0, 1)$. Числа вида $\frac{k}{2^n}$ называются двоично-рациональными, а остальные числа – двоично-иррациональными. Для любого двоично-иррационального числа $x \in [0, 1)$ существует единственное двоичное представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \text{ где } x_k \in Z_2, \tag{3}$$

которое аналогично представлению (1).

Двоично-рациональному числу $x \in (0, 1)$ соответствуют два двоичных представления вида (3) с совпадающими значениями на первых $(m-1)$-м разрядах: в одном представлении, которое назовем левым (или особым) и будем обозначать $x^-$, имеем $x_m = 0$ и $x_k = 1$ при всех $k > m$; в другом представлении, которое назовем правым (или допустимым) и будем обозначать $x^+$, имеем $x_m = 1$ и $x_k = 0$ при всех $k > m$. Сравнение и упорядочение на оси чисел вида (2,3) осуществляется со старшего разряда до первого несовпадения. Поэтому представление $x^-$ предшествует представлению $x^+$, а расстояние между этими элементами равно нулю. В модели Вейерштрасса действительных чисел эти два представления отождествляют, то есть считают одним и тем же действительным числом. Например, приведем для числа $\frac{1}{2}$ двоичную запись особого представления $\frac{1}{2}^- = 0,0111\ldots$ и допустимого $\frac{1}{2}^+ = 0,1000\ldots$.

В дальнейшем (например, при рассмотрении функций Уолша) будем пользоваться другой моделью действительных чисел, при которой особое и допустимое представления двоично-рационального числа не отождествляется. Данная модель от традиционной модели Дедекинда-Кантора-Вейерштрасса отличается наличием счетного (это понятие поясним позже) числа неотделимых точек, коими являются двоично-рациональные. В этой модели полуинтервал $[0,1)$ превращается в модифицированный отрезок $[0,1]^*$. Чтобы сохранить единообразие в обозначениях мы и для модифицированного отрезка будем использовать обозначение $[0,1)$, а вместо отрезков $[0,\frac{1}{2}^-]^*$ и $[\frac{1}{2}^+,1]^*$ (и аналогичных им) указывать $[0,\frac{1}{2})$ и $[\frac{1}{2},1)$ соответственно.

**Определение 2.** *Декартовым произведением* множеств $A$ и $B$ называется множество упорядоченных пар

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}.$$

Приняты следующие обозначения:
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ для множества упорядоченных пар действительных чисел, которое изображается как множество всех точек плоскости в декартовой системе координат;
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ для множества кортежей длиной $n$ из действительных чисел, которое в следующей главе трактуется как множество точек $n$-мерного действительного пространства;
$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ для множества точек $n$-мерного комплексного пространства;
$Z_2^n = Z_2 \times Z_2 \times \ldots \times Z_2 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in Z_2 = \{0,1\}\}$ – множество кортежей длиной $n$ из нулей и единиц. Возможно декартово произведения для бесконечного числа сомножителей. Например, обозначим

$$Z_2^\infty = Z_2 \times Z_2 \times \ldots \times Z_2 \times \ldots$$

– множество всех последовательностей из нулей и единиц.

## 1.2 Отображение множеств. Мощность множеств

**Определение 3.** *Отображением $f$ множества $A$* во множество $B$ называется правило, по которому каждому элементу $a$ множества $A$ ставится в соответствие элемент $f(a) \in B$.

Используется запись $f : A \to B$. Заметим, что в определении рассматриваются отображения, удовлетворяющие свойствам полноты (слова "каждому элементу") и однозначности. Однозначным служит отображение, при котором у каждого элемента только один образ. Например, извлечение комплексного корня есть многозначное отображение. Если запись $f : A \to B$ придется использовать для неполных отображений, то будем особо отмечать этот факт.

**Определение 4.** Отображение $f : A \to B$ *сюръективно*, если для каждого элемента $b \in B$ существует прообраз $a \in A$, то есть такой элемент, что $f(a) = b$.

**Определение 5.** Отображение $f : A \to B$ *инъективно*, если у каждого элемента $b \in B$ существует не более одного прообраза $a \in A$.

**Определение 6.** Отображение $f : A \to B$ *биективно*, если оно сюръективно и инъективно.

Биективное отображение также называется изоморфизмом или взаимно-однозначным отображением.

**Определение 7.** Множества $A$ и $B$ называются *изоморфными*, что обозначается $A \simeq B$, если существует биективное отображение $f : A \to B$.

**Утверждение 2.** *Для отображения $f : A \to B$ конечных множеств:*
*если $f$ – сюръективно, то $|A| \geq |B|$,*
*если $f$ – инъективно, то $|A| \leq |B|$,*
*если $f$ – биективно, то $|A| = |B|$.*

**Теорема 1.** *Если $f : A \to B$ биективно, то существует обратное отображение $f^{-1} : B \to A$, которое тоже биективно.*

*Доказательство.* Так как $f$ сюрьективно, то у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз $a \in A$, который и считаем образом элемента $b$ при отображении $f^{-1} : B \to A$. По свойству инъективности прообраз единственный, что означает однозначность отображения $f^{-1}$. Полнота прямого отображения обеспечивает сюрьективность обратного, а однозначность прямого отображения обеспечивает инъективность обратного.

**Определение 8.** Множество изоморфное множеству $\mathbb{N}$ называется *счетным* (или множеством счетной мощности).

Конечное или счетное множество называют также *не более чем счетным.*

**Утверждение 3.** *Объединение и декартово произведение счетных множеств счетно. Пересечение счетных множеств не более чем счетно.*

**Теорема 2 (Кантора).** *Множество всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$ несчетно.*

*Доказательство* от противного. Предположим, что удалось перенумеровать все элементы модифицированного отрезка $[0, 1]^*$, представленные в двоичной системе счисления. Пусть число с номером $k$

при этой нумерации имеет вид

$$0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots \quad \text{, где } a_{ki} \in \{0,1\}.$$

Будем использовать обозначения $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$. Элемент

$$0, \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}}\,\overline{a_{33}}\ \ldots$$

не встречается среди перенумерованных чисел. Пришли к противоречию с возможностью такой нумерации.

Переход от модифицированного отрезка к отрезку $[0,1]$ осуществляется ссылкой на утверждение 3.

Мощность множества $[0,1]$ называется *контимуум.* Любое изоморфное отрезку $[0,1]$ множество имеет мощность континуум.

Обозначим $Z^{(n)}$ множество всех последовательностей из нулей и единиц, у которых только первые $n$ координат могут быть ненулевыми. Легко показать, что множества $Z^{(n)}$ и $Z_2^n$ изоморфны. Множество $Z^{(n)}$ есть подмножество $Z_2^\infty$, которое называется вложением множества $Z_2^n$ во множество $Z_2^\infty$. Элементы множеств $Z^{(n)}$ называются *финитными* последовательностями. Обозначим $Z_2^{(\infty)} = \bigcup_{n=1}^\infty Z^{(n)}$ – множество всех финитных последовательностей. Имеет место цепочка строгих (то есть равенство не допустимо) включений

$$Z^{(1)} \subset Z^{(2)} \subset \ldots \subset Z^{(n)} \subset Z^{(n+1)} \subset \ldots \subset Z_2^{(\infty)} \subset Z_2^\infty.$$

Упражнения

1. Укажите поэлементно $\mathfrak{P}(Z_2)$ и $\mathfrak{P}(Z_3)$.

2. Докажите, что $|\mathfrak{P}(Z_n)| = 2^n$.

3. Докажите утверждение 1.

4. Докажите, что последовательность $\{[x]_n\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Является ли $\{[x]_n\}$ последовательностью Коши?

5. Приведите пример монотонно убывающей и ограниченной снизу последовательности рациональных чисел, предел которой не является рациональным числом. Можно ли гарантировать существование предела и принадлежность его $\mathbb{R}$?

6. Постройте биективное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Найдите к нему обратное отображение.

7. Докажите утверждения 2 и 3.

8. Докажите, что $\mathbb{Q}$ счетно.

9. Докажите, что $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

10. Докажите, что множества $Z_2^n$ и $Z^{(n)}$ изоморфны. Докажите, что $Z_2^{(\infty)} \subset Z_2^\infty$. Докажите, что обратного включения нет.

11. Докажите, что множество $Z_2^{(\infty)}$ счетное. Введите на множестве $Z_2^{(\infty)}$ отношение порядка, совпадающее с упорядочением натуральных чисел.

12. Докажите, что множество $Z_2^{\infty}$ имеет мощность континуум.

13. Постройте подмножество множества $Z_2^{(\infty)}$ изоморфное множеству $Z_2^n$ и не пересекающееся с множеством $Z^{(n)}$.

# Глава 2

# Элементы алгебры

## 2.1 Абелевы группы

Говорят, что на множестве $M$ задана *бинарная операция* $\star$, если для любых $a, b \in M$ определен элемент $c = a \star b \in M$.

**Замечание.** Отметим, что в определении сформулированы свойства: полноты (для любых $a, b \in M$), однозначности ($c$ единственный) и замкнутости ($c \in M$) отображения $\star$ множества $M^2$ во множество $M$. Например, операция деления на множестве целых чисел не замкнута, так как $1 : 2 \notin \mathbb{Z}$, и не полна, так как $1 : 0$ не определено. В большинстве случаев справедливость этих свойств, которые назовем свойством 0, очевидна. При определении новой операции свойство 0 также надо проверять.

Перечислим свойства, которыми обладают многие бинарные операции (для всех элементов $a, b, c \in M$):

1. $a \star b = b \star a$ - коммутативность;

2. $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ - ассоциативность;

3. существует $e \in M$ такой, что $a \star e = a \ , \quad e \star a = a$ ;

4. существует $a^{-1} \in M$ такой, что $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Элемент $e$ принято называть *нейтральным* (для операции $+$ нейтральным элементом служит 0, для операции $\cdot$

нейтральным элементом служит 1). Элемент $a^{-1}$ называют *обратным* элементу $a$. В случае сложения его обозначают $-a$ и называют *противоположным*.

**Определение 1.** *Абелевой групой* $G$ называется множество $M$ с бинарной операцией $\star$ на нём, удовлетворяющей свойствам 1-4, что обозначается $G = (M, \star)$.

Требование выполнения свойства 0 заключено в словах "с бинарной операцией на нём".

*Порядком группы*, который обозначается $|G|$, считается порядок множества $M$.

**Утверждение 1.** *В группе существует единственный нейтральный элемент.*

**Определение 2.** Если $L \subset M$ и $G_1 = (L, \star)$ также является абелевой группой, то $G_1$ называется *подгруппой* группы $G$, что обозначается $G_1 \subset G$ аналогично обозначению для множеств.

Подгруппа, состоящая из одного нейтрального элемента называется *тривиальной*. Подгруппа, отличная от тривиальной и самой группы, называется *собственной* подгруппой.

Примером абелевых групп бесконечного порядка служат группы по сложению: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ и по умножению:
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ . Группу $(\mathbb{Z}, +)$ обозначают также $\mathbb{Z}$. Символом $2\mathbb{Z}$ обозначают группу четных целых чисел по сложению и символом $n\mathbb{Z}$ – группу целых чисел, кратных натуральному $n$.

Примером абелевых групп конечного порядка служат группы:

$\mathbb{Z}_2 = (\{0, 1\}, \dot{+})$, с операцией сложения по модулю 2:
$0 \dot{+} 0 = 0,\ 0 \dot{+} 1 = 1, \quad 1 \dot{+} 1 = 0;$

$\mathbb{Z}_3 = (\{0, 1, 2\}, \dot{+})$, где сложение осуществляется по модулю 3: например, $1 \dot{+} 2 = 0, \quad 2 \dot{+} 2 = 1;$

$\mathbb{Z}_n = (Z_n, \dot{+})$, где сложение осуществляется по модулю $n$;

$(\{1, -1\}, \cdot)$.

**Замечание.** Далее в этой главе и главах относящихся к системам Уолша и Хаара формулы введенные для группы $\mathbb{Z}_2$ считаем определением операции $\dot{+}$ на множестве $Z_2$.

**Определение 3.** *Прямой суммой* абелевых групп $G = (M, \star)$ и $G_1 = (L, *)$ называется абелева группа $G \oplus G_1 = (M \times L, \diamondsuit)$, где операция $\diamondsuit$ вводится как покоординатное выполнение операций $\star$ и $*$:

$$(a, c)\diamondsuit(b, d) = (a \star b, c * d),$$

$a, b \in M$, $c, d \in L$.

**Замечание.** Термин прямая сумма применяется при аддитивной записи исходных операций. При мультипликативной записи исходных операций используют термин прямое произведение и другое обозначение.

Обозначим $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = (Z_2^2, \oplus)$ абелеву группу, элементами которой являются следующие пары $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, с операцией покоординатного сложения по модулю 2, которую будем обозначать $\oplus$.

Аналогично определяются следующие абелевы группы:
$\mathbb{Z}_2^n = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2$;
$\mathbb{Z}_2^\infty = (Z_2^\infty, \oplus) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots$ – группа последовательностей из нулей и единиц с операцией покоординатного сложения по модулю 2;
и $\mathbb{Z}_n^m = (Z_n^m, \oplus) = \mathbb{Z}_n^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_n$ – группа векторов длиной $m$, координаты которых есть целые неотрицательные числа меньшие $n$, с операцией покоординатного сложения по модулю $n$.

## 2.2 Фактор-группа. Сдвиги. Изоморфизм.

Пусть $H$ собственная подгруппа абелевой группы $G = (M, *)$.

**Определение 4.** Для фиксированного элемента $a \in G$ *классом смежности* по группе $H$ называется множество $H_a = \{a * b \mid b \in H\}$.

Множество $H_a$ также является *сдвигом* подгруппы $H$ (как подмножества) на элемент $a$.

**Утверждение 2.** *Сдвигом класса смежности $H_a$ на элемент $b$ служит класс смежности $H_{a*b}$.*

**Теорема 1.** *Для любых $a, b \in G$ классы смежности $H_a$, $H_b$ или совпадают или не пересекаются.*

*Доказательство.* Пусть $b \in H_a$. Тогда $b = a * h$, где $h \in H$. Для любого $c \in H_b$ имеем $c = b * d$, где $d \in H$. Отсюда $c = a * h * d \in H_a$, то есть $H_b \subset H_a$. Докажем обратное включение. Из равенства $b = a * h$ вытекает $a = b * h^{-1}$, $h^{-1} \in H$. Для любого $y \in H_a$ имеем $y = a * g$, где $g \in H$. Отсюда $y = b * h^{-1} * g \in H_b$, так как $h^{-1} * g \in H$. Значит $H_a \subset H_b$. Получили $H_a = H_b$.

Рассмотрим случай $b \notin H_a$. Предположим, что существует $c \in H_a \cap H_b$. Тогда $c = a * h$, $c = b * g$, где $h, g \in H$. Из равенства $a * h = b * g$ получаем $b = a * h * g^{-1} \in H_a$. Противоречие. Следовательно, $H_a \cap H_b = \emptyset$.

**Следствие.** *Любая абелева группа распадается на объединение непересекающихся смежных классов по собственной подгруппе $H$, то есть $G = \cup_k H_{a_k}$.*

В следствие указано, что в каждом классе смежности выбирается по одному представителю $a_k$, определяющему данный класс. В качестве одного из представителей выбирают $e$.

**Теорема 2 (Лагранжа).** *Если группа $G$ конечна, то порядок подгруппы делит порядок группы.*

*Доказательство.* Если $h \neq g$, то $a * h \neq a * g$. Значит, $|H| = |H_a|$. Так как $G = H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \ldots \cup H_{a_n}$ и классы смежности не пересекаются, то $|G| = |H_{a_1}| + |H_{a_2}| + \ldots + |H_{a_n}| = |H| \cdot n$.

Можно ввести операцию $\diamondsuit$ на множестве классов смежности, соответствующую групповой операции $*$ по правилу: $H_a \diamondsuit H_b = H_{a*b}$.

**Утверждение 3.** *Предложенное определение операции $\diamondsuit$ корректно, то есть результат операции $\diamondsuit$ не зависит от выбора $a$ и $b$ в качестве представителей классов.*

**Теорема 3.** *Множество всех непересекающихся классов смежности $\{H_{a_k}\}$ относительно операции $\diamondsuit$ является группой.*

*Доказательство.* Для любых $i, j$ класс $H_{a_i * a_j}$ совпадает с одним из классов $H_{a_k}$ (замкнутость операции).

Коммутативность: $H_a \diamondsuit H_b = H_{a*b} = H_{b*a} = H_b \diamondsuit H_a$.

Ассоциативность: $(H_a \diamondsuit H_b) \diamondsuit H_c = H_{(a*b)*c} = H_{a*(b*c)} = H_a \diamondsuit (H_b \diamondsuit H_c)$.

Класс $H = H_e$ является нейтральным элементом.

Если $a_k \notin H$, то $a_k^{-1} \notin H$ и обратным к $H_{a_k}$ будет класс $H_{a_k^{-1}}$, который отличен от $H$. Если $a_k^{-1} \notin H_{a_k}$, то $H_{a_k} \cap H_{a_k^{-1}} = \emptyset$ и класс $H_{a_k^{-1}}$ совпадает с классом $H_{a_j}$ для некоторого $j$ в предложенной нумерации классов. Если же $a_k^{-1} \in H_{a_k}$, то $H_{a_k} \diamondsuit H_{a_k} = H$.

**Определение 5.** *Фактор-группой* абелевой группы $G$ по собственной подгруппе $H$ называется множество всех различных классов смежности с бинарной операцией $\diamondsuit$.

Для фактор-группы принято обозначение $G/H = (\{H_{a_k}\}, \diamondsuit)$.

**Замечание.** Понятие фактор-группа вводится не только для абелевых групп. Операцию $\diamondsuit$ на классах смежности обычно обозначают тем же символом $*$, что и в исходной группе.

**Определение 6.** Отображение $\varphi : G \to G_1$ группы $G = (M, *)$ на группу $G_1 = (L, \star)$ называется *изоморфизмом* групп, если соответствующее отображение элементов $\varphi$ :

$M \to L$ биективно и сохраняет групповую операцию $\varphi(a * b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$ для всех $a, b \in M$. В этом случае группы называются *изоморфными*, что обозначается $G \simeq G_1$.

Свойство сохранения групповой операции называется *гомоморфизмом* групп.

**Примеры изоморфных групп бесконечного порядка.**

*Первый пример.* Покажем как на множестве $\mathbb{N}_0$ целых неотрицательных чисел ввести операцию, относительно которой это множество становится группой.

Каждое $n \in \mathbb{N}_0$ можно представить в виде $m$ разрядного числа в двоичной системе счисления $n_m \dots n_2 n_1$, для которого возврат к десятичной системе осуществляется по формуле

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i 2^{i-1}, \text{ где } n_i \in Z_2 = \{0, 1\}, \tag{1}$$

где сумма конечна, так как старшие разряды заменили нулями ($n_i = 0$ при $i > m$). Переписав в обратном порядке, поставим числу $n$ в соответствие финитную последовательность из нулей и единиц

$$\widetilde{n} = (n_1, n_2, ..., n_i \dots) \in Z_2^{(\infty)}. \tag{2}$$

Если известно, что $2^{m-1} \leq n < 2^m$, то можно уточнить старший ненулевой разряд $\widetilde{n} = (n_1, n_2, ..., n_{m-1}, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

И наоборот, каждой финитной последовательности вида (2) соответствует $n \in \mathbb{N}_0$ вида (1). Итак, множество $\mathbb{N}_0$ изоморфно множеству $Z_2^{(\infty)}$ финитных последовательностей из нулей и единиц.

На множестве $Z_2^{(\infty)}$ финитных последовательностей введем операцию $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2 (через операцию $\dot{+}$ на множестве $Z_2$, введенную формулами $0 \dot{+} 0 = 0,\ 0 \dot{+} 1 = 1,\ 1 \dot{+} 1 = 0)$ : если $\tilde{k} = (k_1, k_2, ..., k_l, \dots) \in$

$Z_2^{(\infty)}$, то

$$\tilde{n} \oplus \tilde{k} = (n_1 \dot{+} k_1,\ n_2 \dot{+} k_2, \ldots,\ n_i \dot{+} k_i, \ldots) \in Z_2^{(\infty)}. \qquad (3)$$

Тогда $(Z_2^{(\infty)}, \oplus)$ - абелева группа с нейтральным элементом $\tilde{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, в которой $\tilde{n} \oplus \tilde{n} = \tilde{0}$, то есть каждый элемент является обратным себе. Эту группу $(Z_2^{(\infty)}, \oplus)$ будем обозначать более коротко $X_\infty$.

Введенную на множестве $Z_2$ (однозначных чисел в двоичной системе счисления) операцию $\dot{+}$ продолжим на множество $\mathbb{N}_0$ всех целых неотрицательных чисел в двоичной системе счисления $n, k \in \mathbb{N}_0$ вида (1), формулой

$$n \dot{+} k = \sum_{i=1}^{\infty} (n_i \dot{+} k_i) \cdot 2^{i-1}.$$

Отображение $n \to \tilde{n}$ является *гомоморфизмом*, то есть сохраняющим операцию отображением, групп $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$ и $(Z_2^{(\infty)}, \oplus)$, что вместе с изоморфизмом множеств дает изоморфизм этих групп. Другими словами, $(\mathbb{N}_0, \dot{+})$ и $(Z_2^{(\infty)}, \oplus)$ есть разные представления одной и той же группы. Далее будет предложено третье представление этой группы.

*Второй пример.* Напомним, что модифицированный отрезок получается добавлением к множеству $[0, 1)$ счетного числа двоично-рациональных точек вида $\frac{k}{2^n}$, в результате чего для каждой двоично-рациональной точки множества $\mathbb{Q}_2 \cap (0, 1)$ на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$ присутствуют два представителя в виде особого и допустимого представления. Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ трактуется как множество всех положительных двоичных дробей с нулевой целой частью.

Для любых $x, y \in [0, 1]^*$ существуют единственные двоичные представления

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}, \quad \text{где} \quad x_k, y_k \in \{0, 1\}, \qquad (4)$$

которые запишем как последовательности из нулей и единиц

$$\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, ...), \quad \widetilde{y} = (y_1, y_2, ..., y_k, ...) \in Z_2^{\infty}.$$

Распространим операцию $\oplus$, введенную формулой (3), покоординатного сложения по модулю 2 с множества $Z_2^{(\infty)}$ на множество $Z_2^{\infty}$, исключив требование финитности элементов.

Операция $\dot{+}$ для $x, y \in [0,1]^*$ вида (4) вводится по правилу

$$x \dot{+} y = z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k} \in [0,1]^*$$

через операцию (обозначаемую тем же символом $\dot{+}$) в группе $\mathbb{Z}_2$: $\quad z_k = x_k \dot{+} y_k$.

Проверкой групповых свойств устанавливается, что алгебраические структуры $([0,1]^*, \dot{+})$ и $(Z_2^{\infty}, \oplus)$ являются изоморфными абелевыми группами.

Рассмотренные в этих примерах группы $X_{\infty} := (Z_2^{(\infty)}, \oplus)$ и $Z_2^{\infty} := (Z_2^{\infty}, \oplus)$ являются двойственными (одна из них является группой характеров для другой) диадическими группами, что иллюстрируется следующим построением.

Для $n \in \mathbb{N}_0$ вида (1) и $x \in [0,1]^*$ вида (4) вводится бинарная операция *скалярного произведения* по формуле

$$(n, x) = (\widetilde{n}, \widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k \quad (mod\, 2),$$

где сумма понимается как сложение по модулю 2. То есть в случае четной суммы скалярному произведению присваиваем значение 0, а в случае нечетной суммы скалярному произведению присваиваем значение 1. Так как последовательность $\widetilde{n}$ финитна, то в данной сумме конечное число ненулевых слагаемых (сумма финитна).

## 2.3 Кольцо. Поле

**Определение 6.** Множество $M$ с заданными на нём двумя бинарными операциями такими, что:
• операция $+$ удовлетворяет всем четырем свойствам бинарных операций (то есть абелева группа по сложению),
• операция $\cdot$ ассоциативна,
• для любых $a, b, c \in M$ выполняется свойство дистрибутивности

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c; \quad c(a+b) = ca + cb$$

называется *кольцом.*
Кольцо обозначается $K = (M; +, \cdot)$.

Если операция умножения коммутативна (обладает свойством 1), то кольцо называется коммутативным; если существует нейтральный элемент (выполнено свойство 3) для умножения, то это кольцо с единицей.

**Определение 7.** Множество $M$ с заданными на нём двумя бинарными операциями называют *поле* и обозначают $F = (M; +, \cdot)$, если:
• оно является абелевой группой по сложению,
• множество $M \setminus \{0\}$ есть абелева группа по умножению,
• выполнено свойство дистрибутивности $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Примером кольца служит множество $Z_n = \{0, 1, 2, .., n-1\}$, с операциями сложения по модулю $n$ и умножения по модулю $n$, которое обозначается $\mathbb{Z}_n$ (как и соответствующая группа) и называется кольцом вычетов по модулю $n$.

В поле в качестве особых элементов выделяют 0 (нейтральный элемент для сложения) и 1 (нейтральный элемент для умножения).

Любое поле можно считать кольцом. Примером поля служат множества $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ с операциями сложения и умножения на них.

**Утверждение 4.** *Если $p$ – простое число, то кольцо $\mathbb{Z}_p$ является полем.*

Существует теорема, утверждающая, что число элементов любого конечного поля есть степень простого числа. Поле порядка $p^n$, где $p$ простое число, $n > 1$, называют *поле Галуа*.

**Определение 8.** Два кольца $K = (M; +, \cdot)$ и $K_1 = (N; +, \cdot)$ (или два поля $F = (M; +, \cdot)$, $F_1 = (N; +, \cdot)$) называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : M \to N$, сохраняющее (являющееся гомоморфизмом) обе операции: для всех $a, b \in M$ справедливо

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \qquad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

## 2.4 Линейное пространство

**Определение 9.** *Линейным (векторным) пространством* над полем $F$ называется множество $M$ с заданной на нём бинарной операцией $+$ и внешней операцией умножения на элементы поля $F$ (для любых $a \in M$, $\alpha \in F$ требуем $\alpha \cdot a \in M$), которые удовлетворяют свойствам:
1. $a + b = b + a$ ;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. существует $e \in M$ такой, что $a + e = a$;
4. для любого $a \in M$ существует $-a \in M$ такой, что $a + (-a) = e$;
5. для любых $a \in M$, $\alpha, \beta \in F$ выполнено $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$;
6. для любых $a \in M$, $\alpha, \beta \in F$ выполнено $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$;
7. для любых $a, b \in M$, $\alpha \in F$ выполнено $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$;
8. для любого $a \in M$, $1 \in F$ выполнено $1 \cdot a = a$.

Так как линейное пространство есть абелева группа с добавленной внешней операцией умножения на элементы поля, то в обозначении линейного пространства сохраняется обозначение исходной группы.

**Замечание.** Если $F = \mathbb{R}$, то приведено определение действительного (вещественного) линейного пространства. Если $F = \mathbb{C}$, то дано определение комплексного линейного пространства. Линейные пространства над другими полями в учебной литературе стараются не затрагивать.

*Линейной комбинацией* элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ называется

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n.$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \in F$, то линейная комбинация называется *тривиальной* и естественно равняется $0 \in M$.

**Определение 10.** Набор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ называется *линейно независимым*, если любая нетривиальная линейная комбинация этих элементов отлична от нуля.

Счетное семейство элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ называется *линейно независимым*, если любой конечный набор из этого семейства линейно независим.

**Определение 11.** Набор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ называется *полным* в $M$, если любой $a \in M$ можно представить в виде линейной комбинации элементов набора.

Счетное семейство элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ называется *полным*, если любой $a \in M$ можно представить в виде линейной комбинации элементов конечного набора, выбранного из этого семейства.

**Определение 12.** Линейное пространство $M$ называется *$n$-мерным*, если найдется набор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, являющихся линейно независимым и полным. В этом случае указанный набор называется *базисом* линейного пространства.

Линейное пространство $M$ называется *пространством со счетным базисом*, если найдется семейство элементов

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ (оно же базис), являющееся линейно независимым и полным. Пространство со счетным базисом является бесконечномерным пространством.

В качестве примера линейного пространства можно взять любое поле, являющееся одномерным линейным пространством над собой. Этот пример считается тривиальным. Другие примеры линейных пространств:
1. $\mathbb{R}^2$ – двумерное пространство геометрических векторов;
2. $\mathbb{R}^n$ – $n$-мерное действительное пространство;
3. $\mathbb{Z}_2^n$ – пространство $n$-мерных векторов из нулей и единиц;
4. **c** – пространство последовательностей действительных чисел;
5. пространство финитных последовательностей из нулей и единиц, которое условимся обозначать $X_\infty$;
6. $\mathbb{Z}_2^\infty = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots$ – пространство всех последовательностей из нулей и единиц;
7. $C[0,1]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций;
8. $L[0,1]$ – пространство суммируемых (интегрируемых по Лебегу) функций.

В примерах 3, 5 и 6 приведены линейные пространства над полем $\mathbb{Z}_2$.

Стандартный базис пространства $\mathbb{R}^2$ состоит из векторов $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$. Стандартным базисом пространства $X_\infty$ считается $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, где $e_k = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ с единицей в качестве $k$-й координаты.

## 2.5 Элементы теории двойственности

Существуют линейные пространства не обладающие конечным или счетным базисом.

В некоторых случаях в них можно ввести иное понятие базиса расширением допустимых операций. Например, можно разрешить наряду с конечными линейными комбинациями счетные суммы, для существования которых потребуем выполнение еще одного свойства.

**Определение 13.** Счетное семейство элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ назовем *счетно замкнутым*, если для любого семейства коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in F$ существует

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n + \ldots \in M.$$

**Определение 14.** Счетно замкнутое семейство элементов
$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ назовем *счетно линейно независимым*, если для любого семейства коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in F$ элемент

$$b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n + \ldots$$

отличен от нулевого элемента.

**Определение 15.** Счетно замкнутое семейство элементов
$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ назовем *счетно полным*, если любой $b \in M$ можно выразить в виде счетной линейной комбинации

$$b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n + \ldots.$$

**Определение 16.** Счетно замкнутое, счетно линейно независимое и счетно полное семейство элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in M$ назовем *слабым базисом* пространства $M$.

**Утверждение 4.** *Стандартный базис пространства $X_\infty$ служит слабым базисом пространства $\mathbb{Z}_2^\infty$.*

**Замечание.** Счетный базис или слабый базис будем считать занумерованным и называть системой элементов.

Приведем утверждения справедливые для линейных пространств над любым конечным полем, ограничившись в формулировках полем $\mathbb{Z}_2$.

**Теорема 4.** *Если столбцы матрицы бесконечного порядка из нулей и единиц есть счетный базис пространства $X_\infty$, то строки этой матрицы есть слабый базис пространства $\mathbb{Z}_2^\infty$.*

*Если строки матрицы бесконечного порядка из нулей и единиц есть слабый базис пространства $\mathbb{Z}_2^\infty$, то столбцы этой матрицы есть счетный базис пространства $X_\infty$.*

В процессе доказательства теоремы 4 устанавливается справедливость следующих утверждений (пункты 2,3,5,6 для матриц с финитными столбцами):

1. Если столбцы матрицы финитны, то строки счетно замкнуты.
2. Если столбцы линейно независимы, то строки счетно полны.
3. Если столбцы полны, то строки счетно линейно независимы.
4. Если строки счетно замкнуты, то все столбцы финитны.
5. Если строки счетно линейно независимы, то столбцы полны.
6. Если строки счетно полны, то столбцы линейно независимы.

**Определение 17.** Бесконечную матрицу из нулей и единиц с финитными столбцами назовем *невырожденной*, если ее столбцы есть счетный базис пространства $X_\infty$. Базисы столбцов (в пространстве $X_\infty$) и строк (в пространстве $\mathbb{Z}_2^\infty$) невырожденной матрицы назовем *дуальными* (двойственными).

**Замечание.** Приведенное определение для конечных квадратных матриц эквивалентно традиционному определению невырожденности матрицы с ненулевым определителем. Понятие дуального базиса имеет место и в конечномерных пространствах.

**Теорема 5.** *Невырожденная бесконечная матрица из* *нулей и единиц с финитными столбцами имеет обратную невырожденную бесконечную матрицу из нулей и единиц с финитными столбцами.*

Строки обратной матрицы составляют слабый базис в пространстве $\mathbb{Z}_2^\infty$, который называется *сопряженным* базисом к базису столбцов исходной матрицы.

В теории двойственности Понтрягина пары сопряженных пространств наделяют топологией, о чем позднее пойдет речь, и рассматривают сопряженные базисы относительно введенных топологий. Рассмотренный базис называется базисом Шаудера. Предложенным построением иллюстрируется возможность изложения основ теории двойственности без привлечения топологических понятий. Совсем исключить топологические понятия невозможно. Все построения основаны на принципе покоординатной стабилизации, что равносильно сходимости в тихоновской топологии.

**Замечание.** Указанная в теореме обратная матрица является одновременно и левой обратной и правой обратной матрицей.

Различие между понятиями обратная матрица, левая обратная и правая обратная матрицы продемонстрируем на примере конечных матриц. Пусть поставлена

**Задача.** Можно ли утверждать, что из условия равенства единичной матрице произведения матрицы $A$ на свою транспонированную $A^T$ вытекают равенства $A^T \cdot A = E$ и $A^T = A^{-1}$.

Ответ будет утвердительным только для класса квадратных матриц. Матрица $A$, удовлетворяющих условию $A^T = A^{-1}$, называется *унитарной* или, если ее элементы действительные числа, *ортогональной*. Удалив любое число строк ортогональной матрицы, получим не квадратную матрицу $A$ с условием $A \cdot A^T = E$, являющуюся примером отрицательного ответа на поставленную задачу. Это пример левой обратной матрицы не являющейся правой обратной.

Покажем как понятие *квадратная матрица* распространяется и на бесконечные матрицы.

Для конечных матриц кроме понятия ранг матрицы можно ввести понятие *ко-ранга* (при исследовании систем линейных уравнений используют термин дефект матрицы), указывающее минимальное число строк и столбов, после удаления которых матрица становится невырожденной.

Понятие ко-ранга переносится на бесконечные матрицы из нулей и единиц с финитными столбцами и является для них важным показателем. Матрица ко-ранга $(n, n)$ называется квадратной.

Для бесконечных матриц возможен случай матриц конечного ранга, которые рассматривают как особый случай конечных матриц. Для основного случая бесконечных матриц понятие ранга никакой дополнительной информации не несет, а потому не интересно. Приведем утверждение очевидное для случая конечных матриц.

**Теорема 6.** *Матрица (бесконечная с финитными столбцами) ко-ранга $(n, k)$ превращается в матрицу ко-ранга $(n+1, k)$ или $(n, k-1)$ при выполнении одного из следующих двух преобразований:*
*а) добавление в произвольном месте строки,*
*б) удаление произвольного столбца.*

*Причем, ко-ранг $(n+1, k)$ получится при удалении столбца, который линейно не выражается через остальные, а ко-ранг $(n, k-1)$ получится при удалении столбца, который линейно выражается через остальные.*

Можно сформулировать аналогичную теорему про удаление строки или добавление столбца.

Данная теория применима для исследования систем с бесконечным числом линейных уравнений.

Упражнения

1. Докажите утверждение 1.

2. Докажите, что при изоморфизме групп нейтральный элемент переходит в нейтральный.

3. Укажите среди приведенных примеров изоморфные группы конечного и бесконечного порядка.

4. Приведите пример группы третьего порядка по умножению. Докажите, что она изоморфна $\mathbb{Z}_3$.

5. Приведите аддитивное (по сложению) и мультипликативное (по умножению) представления группы четвертого порядка, не изоморфной группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

6. Установите корректность (проверьте выполнение всех пяти свойств) операции $\diamondsuit$, введенной в определении 3.

7. Докажите, что $\mathbb{Z}_2^n$, $X_\infty$, $\mathbb{Z}_2^\infty$ и $\mathbb{Z}_n^m$ являются абелевыми группами.

8. Докажите утверждение 2.

9. Установите корректность (независимость от выбора представителя) предложенной операции $\diamondsuit$ на классах смежности.

10. Докажите изоморфизм $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$.

11. Предложите на множестве $\mathbb{N}_0$ операцию, относительно которой оно становится группой. Выберете из упражнения 7 изоморфную группу. Найдите в данной группе последовательность различных вложенных подгрупп.

12. Предложите на множестве $[0,1]^*$ операцию, относительно которой оно становится группой. Выберете из упражнения 7 изоморфную группу. Найдите в данной группе последовательность различных вложенных подгрупп, которая в данной группе определяет систему окрестностей нуля. Укажите все классы смежности данной группы по одной из собственной подгрупп.

13. Можно ли на множестве $\mathbb{N}_0$ ввести другую операцию, относительно которой оно становится группой не изоморф-

ной группе из упражнения 11?

14. Составьте таблицы сложения и умножения для $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_6$. Какая из структур является полем?

15. Покажите, что $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot)$ служит коммутативным кольцом с единицей, но не является полем.

16. Выберите (и докажите это) из структур $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ те, которые являются полем.

17. Составьте таблицы сложения и умножения для поля из четырех элементов.

18. Докажите, что при умножении любого элемента линейного пространства ($a \in M$) на нулевой элемент поля ($0 \in F$) получим нулевой элемент линейного пространства. Докажите, что при умножении на $-1 \in F$ произвольного элемента $a \in M$ получим противоположный элемент $-a \in M$.
Докажите, что $0 \in M$ не может быть элементом базиса.

19. Проверьте, что семейство элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ с единицей в качестве $k$-й координаты, составляет базис линейного пространства $X_\infty$. Приведите пример другого базиса пространства $X_\infty$.

20. Докажите, что в пространстве $\mathbb{Z}_2^\infty$ нет счетного базиса. Проверьте, что семейство элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ составляет слабый базис линейного пространства $\mathbb{Z}_2^\infty = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots$. Приведите пример другого слабого базиса пространства $\mathbb{Z}_2^\infty$.

21. Какова размерность линейного пространства $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ над $\mathbb{Z}_2$? Укажите все возможные базисы этого пространства. Покажите, что абелеву группу поля из четырех элементов можно рассматривать как два разных линейных пространства: пространство над полем из четырех элементов и пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. Укажите размерность пространства и все возможные базисы для каждого из случаев.

# Глава 3

# Метрические пространства и элементы топологии

## 3.1 Метрическое пространство

В функциональном анализе изучаются факты не связанные с алгебраической природой чисел. Центральное место в исследованиях отводится понятию расстояния между элементами.

**Определение 1.** *Метрическим пространством* называется множество $M$ с заданной на нем метрикой $\rho$, которая определяется как отображение $\rho : M^2 \to \mathbb{R}$, обладающее свойствами:

- $\rho(x, x) \geq 0; \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии);
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

**Замечание.** Условие $\rho(x, y) \geq 0$ можно вывести из других свойств метрики.

Приведем примеры метрических пространств.
1. Множество $\mathbb{R}$ и метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, которая называется расстоянием между точками.
2. Множество $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

для $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. Множество с дискретной метрикой, определенной равенствами $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ если $x \neq y$.
4. Множество $\mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$. Это пространство обозначают $\mathbb{R}^2_1$.
5. Множество $\mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$. Это пространство обозначим $\mathbb{R}^2_\infty$.
6. Множество непрерывных на $[0, 1]$ функций с метрикой $\rho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - f(x)|$. Это пространство обозначают $C[0, 1]$.

В большинстве случаев метрическое пространство обозначают тем же символом $M$, что и запас точек.

*Открытым шаром* радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x_0$ называется множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \quad \rho(x, x_0) < \varepsilon, x \in M\}$.

Открытый шар является также *окрестностью* точки $x_0$ и остальных точек данного множества.

*Замкнутым шаром* называют множество
$B_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \quad \rho(x, x_0) \leq \varepsilon, x \in M\}$ .

Точка $x_0 \in A$ называется *внутренней* точкой множества $A$, если существует окрестность этой точки целиком лежащая во множестве $A$ : то есть $O_\varepsilon(x_0) \subset A$.

Множество $A$ называется *открытым*, если все его точки - внутренние.

Точка $x_0 \in M$ называется *предельной* точкой множества $A$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечно много точек множества $A$. Множество всех предельных точек множества $A$ обозначим $A'$.

Множество $A$ называется *замкнутым*, если все его предельные точки принадлежат множеству $A$: то есть $A' \subset A$.

Символом $\overline{A}$ обозначим *замыкание* множества $A$, которое определим $\overline{A} = A \cup A'$.

Множество $A$ называется *всюду плотным* в метрическом пространстве $M$, если $\overline{A} = M$ (то есть его замыкание совпадает с метрическим пространством).

**Лемма 1.** *Множество открыто тогда и только тогда, когда $M \setminus A$ (дополнение множества $A$) - замкнуто.*

Набор множеств $\{A_i\}$, где $A_i$ - открытое, такой что $A \subset \cup_i A_i$, называется *открытым покрытием* множества $A$.

Множество $A$ называется *компактным* множеством, если из любого открытого покрытия этого множества можно выбрать конечное подпокрытие.

Если всё пространство $M$ (как множесто в $M$) компактно, то оно называется *компактным пространством.*

Если для любой точки $x_0$ пространства $M$ существует такая окрестность, замыкание которой (то есть $\overline{O_\varepsilon(x_0)}$) - компактное множество, то пространство называется *локально компактным.*

Множество называют *ограниченным*, если найдется шар, в котором множество содержится.

Пусть $A$ – некоторое множество из метрического пространства $M$. Множество $B$ из $M$ называется *$\varepsilon$-сетью* для $A$, если для любого $x \in A$ найдется $b \in B$, что $\rho(x, b) \leq \varepsilon$.

Например, целочисленные точки образуют на плоскости $\frac{1}{\sqrt{2}}$-сеть.

Множество называется *вполне ограниченным* , если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon$-сеть.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства $M$ называется *сходящейся* к элементу $x$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$. Этот факт обозначают $x_n \to x$.

Отображение $f$ метрического пространства $M$ в метрическое пространство $L$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in M$, если для любой окрестности $O(f(x_0)) \in L$ найдется окрестность $O(x_0) \in M$ такая, что $f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$.

Непрерывное отображение любую сходящуюся (в метрическом пространстве $M$) последовательность переводит в сходящуюся (в метрическом пространстве $L$) последовательность.

## 3.2 Элементы топологии. Топологические группы

Метрическое пространство является важным, но частным случаем топологического пространства, в котором введенные понятия определяются без привлечения метрики.

**Определение 2.** *Топологией* на множестве $M$ называется система $\tau$ его подмножеств, включающая само $M$ и пустое множество, замкнутая относительно выполнения конечного или бесконечного числа объединений и конечного числа пересечений. Пара $(M, \tau)$ называется *топологическим пространством.*

Множества, принадлежащие $\tau$, называются *открытыми.* Множество дополнительное к открытым называется *замкнутым.*

**Лемма 2.** *Пустое множество и все множество $M$ замкнуты.*
*Объединение конечного или бесконечного числа замкнутых множеств или пересечение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Остальные определения, введенные выше в метрическом пространстве, переносятся на топологическое пространство.

В некоторых конструкциях топологические понятия (возможно в виде метрического пространства) накладываются на алгебраические структуры.

**Определение 3.** *Топологической абелевой группой* называется абелева группа $G = (M; *)$ такая, что

- если $z = x*y$, то для любой окрестности $O(z)$ существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что: $O(x) * O(y) \subset O(z)$,

- если элемент $-x$ обратный для произвольного $x \in M$, то для любой окрестности $O(x)$ существует окрестность $O(-x)$ такая, что $-O(-x) \subset O(x)$.

В качестве множества $A * B$ понимается совокупность всех элементов $z$, представимых в виде $z = a * b$, $a \in A$, $b \in B$. В качестве множества $-A$ понимается совокупность всех элементов противоположных элементам множества $A$.

Если все окрестности, сформулированные в определении 3, определяются метрикой, то группа называется метрической.

## 3.3 Полное метрическое пространство

**Определение 4.** Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства ($x_n \in M$) называется *фундаментальной (последовательностью Коши)*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n, m \geq N$ выполняется условие $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

**Определение 5.** Пространство $M$ называется *полным* метрическим пространством, если для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ существует элемент $x$ из $M$ такой что, $x_n \to x$.

*Пополнением* пространства $M$ нзывается добавление всех возможных предельных элементов.

Например, Кантор вводил пространство $\mathbb{R}$ как пополнение пространства $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$.

**Теорема 1.** [КФ, с.69] *Каждое метрическое пространство имеет пополнение.*

**Теорема 2.** (Принцип вложенных шаров)[КФ, с.67] *Для того, чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы* *которых стремятся к нулю, имела не пустое пересечение.*

**Теорема 3.** [КФ, с.104] *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полное и вполне ограниченное.*

Отображение $f : M \to M$ метрического пространства в себя называется *сжатым*, если существует число $\alpha < 1$, что для любых $x, y \in M$ выполнено

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y).$$

**Теорема 4.** (Принцип сжатых отображений) [КФ, с.73] *Всякое сжатое отображение в полном метрическом пространстве имеет неподвижную точку, причем только одну.*

Упражнения

1. Выведите условие $\rho(x, y) \geq 0$ из остальных свойств метрики.

2. Проверьте для дискретной метрики все свойства. Приведите пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса может лежать внутри шара меньшего радиуса.

3. Докажите, что функция $\rho(x, x_0)$, где $x_0$ –фиксированная точка метрического пространства, является непрерывной числовой функцией.

4. Докажите, что метрику в $\mathbb{R}^2$ можно ввести по формулам примеров 4, 5 или по формуле

$$\rho_p(x, y) = (|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p)^{\frac{1}{p}},$$

где $1 \leq p < \infty$.
Напишите аналогичные формулы для метрики в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будет ли $\rho_p$ метрикой, если $p < 1$?

5. Докажите, что функция $\rho(x, y) = \sup_i |y_i - x_i|$ является метрикой в пространстве финитных последовательностей

действительных чисел.
Полученное пространство обозначается символом $f$.

6. Докажите, что функция $\rho(x, y) = \sup_i |y_i - x_i|$ является метрикой в пространстве ограниченных последовательностей действительных чисел.
Полученное пространство обозначается символом $l_\infty$ или $m$.

7. Докажите, что функция $\rho(x, y) = \sup_i |y_i - x_i|$ является метрикой в пространстве сходящихся числовых последовательностей.
Полученное пространство обозначается символом $c$. Подпространство последовательностей сходящихся к нулю обозначается символом $c_0$.

8. Пусть $1 \leq p < \infty$. Рассмотрим множество числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Докажите, что функция

$$\rho(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

является метрикой.
Полученное пространство обозначается символом $l_p$.

9. Докажите, что функция

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

является метрикой в пространстве:
ограниченных на $[a, b]$ функций (полученное пространство обозначается символом $B[a, b]$;
непрерывных на $[a, b]$ функций (полученное пространство обозначается символом $C[a, b]$.

10. Можно ли в предыдущей задаче отрезок заменить на интервал?

11. Докажите лемму 1 и лемму 2.

12. Приведите примеры открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$. Какими множествами являются отрезок $[a, b]$ и интервал $(a, b)$ в $\mathbb{R}^2$?

13. Постройте в $\mathbb{R}^2$ $\varepsilon$-сеть. Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ любое вполне ограниченное множество ограничено.

14. Покажите, что единичная сфера в $l_2$ есть пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества. (Указание. В качестве множества не покрытого конечной $\varepsilon$-сетью возьмите стандартный базис.)

15. Рассмотрим в $l_2$ множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, удовлетворяющих условиям

$$|x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq \frac{1}{2},\ |x_3| \leq \frac{1}{4},\ \ldots\ ,\ |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

Это множество называется *фундаментальным параллелепипедом* ("гильбертовым кирпичем") пространства $l_2$. Докажите, что оно вполне ограничено.

16. Покажите, что в пространстве $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots$ последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ из нулей и единиц можно ввести метрику

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Найдите вложенную систему окрестностей нуля $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ радиусов $2^{-n}$ соответственно. Докажите, что группа $\bigoplus \mathbb{Z}_2$ с системой окрестностей нуля $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, инвариантная относительно группового сдвига, является абелевой топологической группой и компактным пространством.

17. Приведите пример метрического пространства и последовательности Коши, которая в нем не сходится.

18. Докажите, что любая сходящаяся последовательность полного метрического пространства является фундаментальной.

19. Для введенных ранее пространств (с дискретной метрикой, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2_p$ и $l_p$ при $1 \leq p \leq \infty$, $f$, $c$, $c_0$, $B[a,b]$, $C[a,b]$ и из задачи 16) укажите полные пространства и не являющиеся полными.

# Глава 4

# Элементы теории меры и интеграл Лебега

## 4.1 Мера Лебега на прямой

Понятие меры $\mu(A)$ множества $A$ есть обощение понятий:
1) длина отрезка,
2) площадь плоской фигуры,
3) объем тела в пространстве,
4) приращение $f(b) - f(a)$ неубывающей функции $f(x)$ на $[a, b)$,
5) интеграл от неотрицательной функции по некоторой линейной, плоской или пространственной области.

Рассмотрим метод построения меры Лебега в наиболее простом случае, а именно на прямой.

Определим *меру интервала* $(a, b)$ равной его длине $b-a$. *Мерой непустого открытого ограниченного множества* $G$ называется сумма длин всех его составляющих интервалов $\delta_k$

$$mG = \sum_k m\delta_k.$$

Число слагаемых в сумме может быть конечно или счетно. Если $\delta_k$ заменим на произвольные открытые непересекающиеся множества, то получим формулировку свойства *полной аддитивности* меры. Ограниченность множества $G$ гарантирует конечность суммы.

Отсюда выводится, что

$$m[a,b] = m[a,b) = m(a,b] = b-a,$$

а мера отдельной точки равна нулю. Устанавливается теорема о конечной аддитивности замкнутых множеств.

**Определение 1.** *Внешней мерой $m^*E$ ограниченного множества* $E$ называется точная нижняя граница мер открытых множеств, содержащих множество $E$:

$$m^*E = \inf_{G\supset E}\{mG\}.$$

**Определение 2.** *Внутренней мерой $m_*E$ ограниченного множества* $E$ называется точная верхняя граница мер замкнутых множеств, содержащихся в множестве $E$:

$$m_*E = \sup_{F\subset E}\{mF\}.$$

**Лемма 1.** *Если $G$ есть открытое ограниченное множество, то*

$$m^*G = m_*G = mG.$$

**Лемма 2.** *Если $F$ есть замкнутое ограниченное множество, то*

$$m^*F = m_*F = mF.$$

**Теорема 1.** *Если $E$ ограниченное множество, то*

$$m_*E \le m^*E.$$

**Определение 3.** Ограниченное множество $E$ называется *измеримым*, если его внешняя и внутренняя меры равны друг другу

$$m^*E = m_*E.$$

Это общее значение называется *мерой множества* и обозначается $mE$.

Данный способ определения меры предложил Лебег. Измеримость по Лебегу подразумевает конечность меры, поэтому неограниченные множества считаются неизмеримыми. Числовую ось можно разбить на счетное число непересекающихся ограниченных множеств и ввести обобщение понятия измеримости для неограниченных множеств.

Мера множества на прямой не должна меняться при сдвиге и зеркальном отражении. Это отражается свойством инвариантности меры Лебега относительно движения на прямой.

Существуют ограниченные неизмеримые множества.

**Пример неизмеримого множества.** Разобьем все точки отрезка $[0,1]$ на классы $K(x)$, включая в один класс все точки различающиеся на рациональное число. Так же, как в теореме Лагранжа показывается, что два класса или совпадают или не пересекаются. Составим множество $A$, включив в него из каждого класса $K(x)$ по одному представителю. Утверждается, что
*множество $A$ неизмеримо.*

Для доказательства этого факта перенумеруем все рациональные точки отрезка $[-1,1]$: $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots$ обозначим через $A_k$ множество, полученное сдвигом множества $A$ на величину $r_k$:

$$A_k = \{x \mid x = y + r_k, y \in A\}.$$

Так как $mA_k = mA$ и

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-1,2],$$

то $1 \le \sum_{k=0}^{\infty} mA_k \le 3$. В качестве меры $A$ не подходит ни какое из действительных чисел.

**Лемма 3.** *Любое конечное или счетное множество имеет меру 0.*

**Пример несчетного множества меры нуль.** Обозначим $G_1 = (1/3, 2/3)$ и удалим из отрезка $[0,1]$ все точки множества $G_1$: $E_1 = [0,1] \setminus G_1$.
Обозначим $G_2^1 = (1/9, 2/9)$, $G_2^2 = (7/9, 8/9)$, $G_2 = G_2^1 \cup G_2^2$ и удалим из отрезка $E_1$ все точки множества $G_2$: $E_2 = E_1 \setminus G_2$.
Объединение середин оставшихся интервалов обозначим $G_3$ и построим $E_3 = E_2 \setminus G_3$.
Продолжая этот процесс неограниченно. Множества

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$$

и его дополнение $P = [0,1] \setminus G$ называются **канторовыми множествами**. Множество $P$ является *совершенным*, так как все его точки являются предельными.

## 4.2 Измеримые функции.

Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если для любого $a \in \mathbb{R}$ измеримо множество $\{x | f(x) > a\}$.

Аналогично определяется измеримая на произвольном измеримом множестве $E$ функция $f : E \to \mathbb{R}$ требованием измеримости множеств $E\{f > a\}$. Из измеримости дополнения вытекает измеримость множеств $E\{f \le a\}$. Для фиксированного $a \in \mathbb{R}$ из измеримости расширяющейся цепочки множеств $E\{f \le a - \frac{1}{n}\}$ при $n \to \infty$ следует измеримость множества $E\{f < a\}$. Отсюда, как разность двух измеримых множеств $E\{f \le a\}$ и $E\{f < a\}$ получаем измеримое множество $E\{f = a\}$. Значит, для измеримой функции множества $E\{f \geq a\}$, $E\{a \leq f < b\}$, $E\{a \leq f \leq b\}$, $E\{a < f \leq b\}$ должны быть измеримы.

**Лемма 1.** *Всякая функция, заданная на множестве меры* 0 *измерима.*

**Лемма 2.** *Если множество $E$ есть сумма непересекающихся измеримых множеств в конечном или счетном числе $E = \sum_k E_k$; а функция $f(x)$ измерима в каждом $E_k$, то $f(x)$ измерима на $E$.*

С помощью данной леммы понятие измеримости на конечном множестве переносится на всю числовую ось.

В дальнейшем в качестве $E$ рассматриваем отрезок, полуось или ось.

**Определение 1.** Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на множестве $E$, называются *эквивалентными*, если множество на котором они различны меры 0

$$mE(f \neq g) = 0.$$

Эквивалентные функции обозначают $f(x) \sim g(x)$.

Если некоторое свойство имеет место для всех точек рассматриваемого множества, за исключением точек множества меры 0, то говорят, что это свойство выполняется *почти всюду*.

Таким образом, эквивалентными считаются функции совпадающие почти всюду.

**Теорема 1.** [Н, с. 98] *Для любой, измеримой почти всюду конечной на множестве $E$ функции $f(x)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется измеримая ограниченная функция $g(x)$ такая, что $mE(f \neq g) < \varepsilon$.*

**Теорема Бореля.** [Н, с. 101] *Для любой измеримой почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ для произвольных $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$, такая что:*

$$m\{x | x \in [0, 1],\ |f(x) - g(x)| \geq \delta\} < \varepsilon.$$

*Если при этом* $|f(x)| \leq k$, *то и функцию* $g(x)$ *можно выбрать с условием* $|g(x)| \leq k$ *всюду на* $[0, 1]$.

## 4.3 Интеграл Лебега.

Классическое определение определенного интеграла, предложенное Коши и развитое Риманом, как предела последовательности интегральных сумм по последовательности размеченных разбиений отрезка с убывающими к нулю диаметрами разбиений, называется интегралом Римана. Необходимым условиями интегрируемости по Риману является ограниченность функции. *Функция Дирихле*, которая на $[0, 1]$ определяется следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

служит примером ограниченной не интегрируемой по Риману функции. Причина не интегрируемости в том, что точки разрыва встречаются слишком часто.

Лебег предложил другой метод построения интеграла, при котором точки группируются по признаку своей близости на оси значений функции. Проиллюстрируем это понятие на примере обобщенноступенчатой функции $f(x)$ на $[0, 1]$, то есть принимающей конечное число значений $y_1, y_2, \dots, y_n$, где множества $E_k = \{x | x \in [0, 1], f(x) = y_k\}$ измеримы.

Интеграл Лебега этой функции равен

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot mE_k.$$

В этом примере предполагалось $[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

Существуют разные подходы к построению интеграла Лебега.

Приведем построения из [Н] для случая отрезка. Пусть $f(x)$ является измеримой на $[0,1]$ и ограниченной $A < f(x) < B$ функцией. Разобьем отрезок $[A,B]$ на части $y_0 = A < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B$ и обозначим $E_k = \{x | x \in [0,1],\ y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$.

Введем *нижнюю* и *верхнюю суммы Лебега* соответственно:

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot mE_k,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot mE_k.$$

Дальнейшие построения совпадают с аналогичными построениями интеграла Римана, где доказывается:

1. Ни одна из нижних сумм не превосходит ни одной из верхних сумм;

2. выбором разбиения разность $S - s$ можно сделать как угодно малой.

Отсюда следует, что супремум всех нижних сумм совпадает с инфинумом всех верхних сумм. Это число и называют *интегралом Лебега* от функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[0,1]$, что обозначают $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$, указание $(L)$ обычно опускают.

Перечислим свойства интеграла Лебега от измеримых ограниченных функций $f(x)$ и $g(x)$:

**Теорема о линейности интеграла**. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, то*

$$\int\limits_0^1 (af(x) + bg(x))dx = a\int\limits_0^1 f(x)dx + b\int\limits_0^1 g(x)dx.$$

**Теорема об оценке**. *Если $f(x) \leq g(x)$ почти всюду, то*

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx.$$

**Теорема о среднем**. *Если $A \leq f(x) \leq B$ на $[0,1]$, то*

$$A \leq \int_0^1 f(x)dx \leq B.$$

**Теорема о полной аддитивности**. *Если измеримое множество $E$ представлено в виде объединения конечного или счетного числа не пересекающихся измеримых множеств $E = \bigcup_k E_k$, то для функции измеримой на $E$ справедливо*

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

**Следствие.** *Если $f(x) \sim g(x)$ на $[0,1]$, то $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 g(x)dx$.*

**Лемма**. *Справедлива оценка $\left|\int\limits_0^1 f(x)dx\right| \leq \int\limits_0^1 |f(x)|dx$.*

Доказательства теорем в [Н, с. 114–119].

Понятие интеграла Лебега обобщается на случай неограниченных функций.

Введем понятие срезки функции $f(x)$ равенством

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq N, \\ 0, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

**Лемма .** [Н, с. 129] *Если $f(x)$ измерима и неотрицательна на измеримом множестве $E$, то $[f(x)]_N$ измерима.*

Предел $\lim_{N\to+\infty}\int_E [f(x)]_N dx$ (конечный или бесконечный) называется *интегралом Лебега* от неотрицательной измеримой функции по множеству $E$ и обозначается

$$\int\limits_E f(x)dx.$$

Если данный предел конечен, то функция называется интегрируемой по Лебегу или *суммируемой*.

Для измеримой функции $f(x)$ введем неотрицательные функции:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

**Определение.** Если хотя бы одна из функций $f_+$, $f_-$ суммируема на $E$, то (конечная или бесконечная) разность

$$\int\limits_E f_+(x)dx - \int\limits_E f_-(x)dx$$

называется *интегралом Лебега от функции* $f(x)$ *на множестве* $E$ и обозначается $\int\limits_E f(x)dx$.

При этом функция $f(x)$ называется *суммируемой на множестве* $E$, если интеграл $\int\limits_E f(x)dx$ конечен. Класс суммируемых на множестве $E$ функций обозначают $L(E)$.

**Утверждение.** *Функция суммируема тогда и только тогда, когда* $\int\limits_E |f(x)|dx < \infty$.

## 4.4 Пространство с мерой. Мера на топологической группе.

По той же схеме, как вводилась мера Лебега на прямой, можно ввести меру в произвольном (метрическом или топологическом) пространстве. Мера определяется как функция на множествах данного пространства. Как правило, выделяется семейство основных множеств, для которых предлагаются явные или аксиоматические формулы для вычисления меры. Например, на плоскости таковыми множествами являются прямоугольники со сторонами параллельными осям.

В случае компактного пространства $X$ мера удовлетворяет свойствам:

1. $0 \le \mu(A) < \infty$;
2. $\mu(\emptyset) = 0$;
3. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$, если $E_i \cup E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Локально-компактное пространство, в котором не всегда выполнено условие $\mu(a) < \infty$ и потому не гарантирована сходимость ряда в свойстве 3, можно представить как счетную сумму компактных подпространств.

Аналогично определяются измеримые функции в пространстве с мерой. По изложенной выше схеме можно ввести понятие интеграла Лебега от функции $f(x)$ на множестве $A$, относительно введенной меры $\mu$, который обозначается

$$\int\limits_A f(x) d\mu(x).$$

Меру можно вводить в метрической или топологической абелевой группе $G = (M; +)$, добавив к отмеченным ранее свойствам меры следующие свойства:

4. Мера инвариантна относительно сдвига, то есть $\mu(A) = \mu(A + a)$ для любого элемента $a \in M$ и любого измеримого множества $A \subset M$;

5. Мера инвариантна относительно отражения, то есть $\mu(A) = \mu(-A)$ для любого измеримого $A \subset M$.

Здесь $A + a = \{x | x = y + a,\ y \in A\}$ — сдвиг множества $A$ на элемент $a$.

$-A = \{x | -x \in A\}$ — множество всех противоположных элементов множества $A$.

Это позволяет ввести интеграл на абелевой группе инвариантный относительно сдвига и обращения.

Упражнения.

1. Докажите, что объединение не более чем счетного числа измеримых множеств есть множество измеримое.
2. Верно ли, что объединение любого числа измеримых множеств есть множество измеримое?
3. Вычислите меру канторовых множеств $P$ и $Q$.
4. Докажите, что все точки канторова совершенного множества $P$ в троичной системе счисления (для троично-рациональных точек рассматриваем только не финитное представление) не содержат в записи цифры 1. И наоборот, все точки, представленные в троичной системе счисления только с помощью цифр 0 и 2, принадлежат множеству $P$.
5. Докажите, что канторово совершенное множество $P$ имеет мощность континуум.
6. Приведите построение, аналогичное построению канторовых множеств $P$ и $Q$, при котором на каждом шаге каждый оставшийся отрезок делим на 4 равные части и удаляем две средние. Вычислите меры полученных множеств.
7. Докажите теорему 1.
8. Докажите леммы 3, 4, 5.

9. Пусть $k(x) = \frac{2k-1}{2^n}$, если $x \in G_n^k$, где $G_n^k$ определены при построении канторова множества $G$. Функцию $k(x)$ определим на канторовом множестве $P$ условием $k \in C[0,1]$ (покажите, что это возможно). Функция $k(x)$ называется *канторовой лестницей.* Вычислите $\int\limits_0^1 k(x)dx$.

10. Для канторовой лестницы вычислить $\int\limits_0^x k(x)dt$ при $x$ равных $\frac{m}{9}$, где $m = 1, 2, \ldots, 8$.

11. Используя конструкцию задачи 6 построить аналог канторовой лестницы для которой найти аналогичные задаче 10 интегралы при $x$ равных $\frac{m}{8}$, где $m = 1, 2, \ldots, 8$.

12. Привести пример функции интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману.

13. Доказать, что функция, интегрируемая по Риману, интегрируема по Лебегу.

14. Привести пример функции $f(x)$ не интегрируемой по Лебегу на $[0,1]$, для которой конечен несобственный интеграл Римана $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

15. Вычислить интеграл Лебега по множеству $E$ от функции $f(x)$ вида $f(x) = (-1)^n$, если $x \in E_n = \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, $E = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$.

16. Пусть $f(x) = n$, $g(x) = \sqrt{n}$ при $x \in E_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Какая из функций суммируема на множестве $E$?

17. Приведите пример неизмеримой функции.

# Глава 5

# Линейные нормированные пространства

## 5.1 Полные линейные нормированные пространства.

Линейное пространство $X$ (действительное или комплексное) называется *линейным нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие вещественное число, которое называется *нормой* этого элемента, обозначается $||x||$, и для которого выполнены следующие условия (аксиомы нормы):

I. $||x|| \geq 0$, причем $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

II. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.

III. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Здесь $\alpha$ произвольный элемент поля, над которым строится линейное пространство.

Всякое нормированное пространство становится метрическим, если в нем ввести метрику с помощью равенства $\rho(x, y) = ||x - y||$. Тем самым на нормированные пространства переносятся все связанные с метрикой понятия, в частности, понятие полноты.

Полные линейные нормированные пространства называются *банаховыми пространствами.*

**Примеры банаховых пространств:**

1) Многомерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ и комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, состоящее из $n$-мерных векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с евклидовой метрикой

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

2. Пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

3. Пространство $L_p[a,b]$ функций, для которых суммируется $p$-тая степень $\int\limits_a^b |f(x)|^p dx < \infty$, где $1 \le p < \infty$, с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

В этом пространстве функции, различающиеся на множестве меры 0, эквивалентны друг другу и рассматриваются как один элемент пространства $L_p$.

4) Пространство $L_\infty[a,b]$ допускает три различных толкования:

- как пространство $C[a,b]$ непрерывных функций с нормой $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ;
- как пространство $B[a,b]$ измеримых ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ;
- как пространство $M[a,b]$ - измеримых почти всюду конечных функций с нормой
$\|f\|_\infty = \{\inf \alpha : \ |f(x)| \le \alpha$ почти всюду на $[a,b]\ \}$.

Как правило, будем использовать последнее толкование $L_\infty$, так как именно это пространство получается как предельный случай пространств $L_p$ при $p \to \infty$.

5) Пространство $l_p$ бесконечных последовательностей действительных чисел $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ с нормой $\|c\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^p\right)^{1/p}$ , $p \geq 1$.

В некоторых случаях рассматривают пространства $L_p[a,b]$ и $l_p$ над полем комплексных чисел.

6) Пространство, обозначаемое $c$, сходящихся последовательностей с нормой $\|c\| = \sup_i |c_i|$ и подпространство $c_0$ последовательностей сходящихся к нулю.

**Определение 1.** Класс функций $K = \{f(x)\}$ называется *всюду плотным* в линейном нормированном пространстве $X$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\varphi$ из пространства $X$ найдется такая функция $f$ из класса $K$, что $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Данное определение можно переформулировать для метрического или топологического пространства.

**Теорема 1.** *Каждый из классов функций:*
*1) ограниченные измеримые функции - $B[a,b]$,*
*2) непрерывные функции - $C[a,b]$,*
*3) многочлены - $P[a,b]$,*
*4) ступенчатые функции - $D[a,b]$,*
*5) ступенчатые функции с интервалами постоянства $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ (где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < 2^n$) ,*
*6) класс $L^q[a,b]$ при $1 \leq p < q < \infty$,*
*всюду плотен в $L_p[a,b]$, $p \geq 1$.*
*Если исходный интервал $(-\pi,\pi)$, то класс тригонометрических многочленов всюду плотен в $L_p(-\pi,\pi)$.* Доказательство почти всех утверждений теоремы в [Н, с.161].

**Определение 2.** Пространство называется *сепарабельным* , если в нем найдется счетное всюду плотное множество.

Например, в $C[a,b]$ многочлены с рациональными коэффициентами составляют счетное всюду плотное множество.

Сформулируем некоторые свойства пространств $L_p[a,b]$ и $l_p$ при $1 \leq p < \infty$.

1.**Неравенство Гельдера.** Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Если $f \in L_p[a,b]$, $g \in L_{p'}[a,b]$, то произведение $fg$ является суммируемой на $[a,b]$ функцией и

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \ .$$

Если $a \in l_p$ , $b \in l_{p'}$ , то:

$$\|ab\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{p'}\right)^{1/p'} = \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'}.$$

Отметим, что если $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то как сами индексы $p$ и $p'$, так и пары пространств $L_p[a,b]$ и $L_{p'}[a,b]$ (а также пару $l_p$ и $l_{p'}$) называют *сопряженными* друг другу.

2. *Неравенство треугольника* (аксиома III нормированного пространства)

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

допускает обобщение (называемое *неравенством Минковского*) для конечного числа слагаемых, для счетного числа слагаемых и для повторных интегралов. Последнее обобщение имеет вид

$$\left(\int_a^b |\int_c^d f(x,y) dy|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{1/p} dy,$$

где функция $f(x,y)$ суммируема на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$ .

3. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по норме пространства $L[a,b]$ к $f(x)$, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.

## 5.2 Евклидовы пространства.

Одним из способов введения нормы в линейном пространстве является задание в нем скалярного произведения.

*Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве $X$ называется действительная функция, которую обозначим $(x, y)$, определенная для каждой пары элементов $x, y \in X$ и удовлетворяющая условиям ($\alpha \in \mathbb{R}$):
1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$,
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

**Определение 3.** Линейное пространство $X$ с введенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

В евклидовом пространстве можно ввести норму по формуле $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

**Теорема 2.** *В евклидовом пространстве справедливо* **неравенство Коши-Буняковского**

$$|(x, y)| \leqq ||x|| \cdot ||y||.$$

*Доказательсво.* Рассмотрим квадратным трехчлен от $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2(x, x) + 2\alpha(x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Для дискриминанта этого трехчлена должно выполняться неравенство

$$1/4 \cdot D = (x, y)^2 - ||x||^2 \cdot ||y||^2 \leqslant 0,$$

откуда вытекает неравенство Коши-Буняковского.

В евклидовом пространстве $X$ сходимость последовательности элементов $x_n$ к элементу $x \in X$, обозначаемая $x_n \to$

$x$, есть сходимость по норме

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

**Лемма 1.** *Если* $x_n \to x$ *и* $y_n \to y$ *в евклидовом пространстве* $X$, $\alpha_n \to \alpha(\alpha, \alpha_n \in \mathbb{R})$, *то*

$x_n + y_n \to x + y$,

$\alpha_n \cdot x_n \to \alpha \cdot x$,

$(x_n, y_n) \to (x, y)$,

*то есть операции сложения, умножения на число и скалярного произведения непрерывны.*

Наряду с действительным часто рассматривают *комплексное* евклидово пространство, в котором сохраняются свойства 2-4 и изменяется первое свойство скалярного произведения (черта вверху означает комплексное сопряжение):

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Примерами конечномерных евклидовых пространств служат действительное пространство $\mathbb{R}_2^n$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

и комплексное пространство $\mathbb{C}_2^n$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}.$$

## 5.3 Гильбертово пространство.

**Определение 4.** Беконечномерное полное сепарабельное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Имеет место следующая

**Теорема 3 (об изоморфизме).** [КФ, с.154, с. 165]

*Любые два действительных (или комплексных) гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Рассматривают две основные реализации действительного гильбертова пространства: пространство $l_2$ элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ со скалярным произведением вида:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n \ ;$$

и пространство $L_2[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ со скалярным произведением вида:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Возможны видоизменения скалярных произведений, когда перед знаком суммы или интеграла появляется константа, область интегрирования заменяется на полуось или все $\mathbb{R}$, интегрирование производится не по мере Лебега на прямой, а относительно некоторого веса, например.

Основными реализациями комплексного гильбертова пространства служат пространства с теми же обозначениями , но несколько иным скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n} \quad \text{и} \quad (f, g) = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

соответственно.

Гильбертово пространство является естественным распространением понятия конечномерного евклидова пространства с ортонормированным базисом на случай бесконечномерного пространства.

## 5.4 Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные .

Введем классы функций, которые часто встречаются и используются в теории ортогональных рядов. Доказательства предлагаемых утверждений изложены в [Н].

**Определение 5.** *Абсолютно непрерывной* называется функция $f(x)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta$ такое, что для любого набора непересекающихся интервалов $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ из условия $\sum |I_k| < \delta$ ограниченности суммарной длины вытекает $\sum\limits_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$.

Абсолютная непрерывность рассматривается на некотором множестве, из которого и выбираются интервалы $I_k$. Класс абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначается $AC[a, b]$.

Очевидно, что абсолютно непрерывная функция является непрерывной. Обратное утверждение не верно. Примером непрерывной функции не являющейся абсолютно непрерывной служит лестница Кантора $k(x)$. Для нее $k'(x) = 0$ почти всюду и, следовательно, $\int_0^1 k'(x)dx = 0 < k(1) - k(0) = 1$.

**Теорема 4.** (с.199) *Если $f(x)$ возрастающая на $[a, b]$, то ее производная $f'(x)$ почти всюду конечная, суммируемая функция и*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

**Теорема 5.** (с.201) *Для любого множества меры 0 (на отрезке) найдется непрерывная возрастающая функция, производная которой равна $+\infty$ во всех точках этого множества.*

Данная теорема объясняет причину невыполнения формулы Ньютона-Лейбница. Добиться выполнения формулы Ньютона-Лейбница можно переходом к классу *обобщенных функций*, для которых мера может быть сконцентрирована в отдельных точках. Пока этого делать не будем.

**Определение 6.** *Полной вариацией (изменением) функции $f(x)$ на отрезке* $[a, b]$ называется точная верхняя грань, взятая по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выражения

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

которую принято обозначать $V_a^b(f)$.

Если $V_a^b(f) < +\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *конечное изменение* и принадлежит классу $Var[a, b]$ *функций с ограниченной вариацией.*

**Теорема 6.** *Класс $Var[a, b]$ является линейным нормированным пространством с нормой $V_a^b(f)$.*

**Теорема 7.** *Монотонная (возрастающая или убывающая) функция есть функция ограниченной вариации.*

**Теорема 8.** (с.229) *Абсолютно непрерывная функция есть функция ограниченной вариации.*

**Теорема 9.** *Функция ограниченной вариации ограничена.*

**Теорема 10.** *Функция ограниченной вариации представима в виде разности двух возрастающих функций.*

**Следствие.** *Если $f \in Var[a, b]$, то $f'(x)$ существует и конечна почти всюду и $f' \in L[a, b]$.*

**Теорема 11.** *Любая функция ограниченной вариации представима в виде суммы функции скачков (которых не более чем счетное число) и непрерывной функции ограниченной вариации.*

**Лемма 2.** (с.229) *Если $f \in AC[a, b]$ и $f'(x) = 0$ почти всюду, то $f(x) \equiv C$.*

Введем понятие интеграла с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

**Теорема 12.** (с.234) *Если* $f \in L[a, b]$, *то* $\Phi \in AC[a, b]$. *При этом:* $\Phi'(x) = f(x)$ *почти всюду;* $V_a^b(\Phi) = \int_a^b |f(x)|dx$.

**Теорема 13.** *Если* $f \in AC[a, b]$, *то она восстанавливается через свою производную*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Утверждение о восстановлении функции как производной неопределенного интеграла (почти всюду) можно усилить. Для этого дадим

**Определение 7.** *Точкой Лебега* функции $f(x)$ называется точка $x_0$, в которой функция конечна и

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt = 0.$$

**Теорема 14.** (с.237) *В точке Лебега* $x_0$ *производная неопределенного интеграла* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *равна подинтегральной функции* $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

**Теорема 15.** *Если* $f \in L[a, b]$, *то почти все точки отрезка* $[a, b]$ *есть точки Лебега.*

**Теорема 16.** *Если* $f \in C(x_0)$, *то* $x_0$ *есть точка Лебега.*

## 5.5 Ортогональные системы в евклидовых пространствах.

**Определение 5.** Ненулевые элементы $x, y \in X$ называются *ортогональными* в евклидовом пространстве $X$, если

$(x, y) = 0$. Система элементов $\{x_i\}$ называется *ортогональной*, если любая пара элементов системы ортогональна.

**Лемма 2.** *Элементы ортогональной системы* $\{x_i\}$ *линейно независимы.*

*Доказательство* от противного. Пусть
$\alpha_1 \cdot x_{i_1} + \alpha_2 \cdot x_{i_2} + \ldots + \alpha_n \cdot x_{i_n} = 0$
нулевая линейная комбинация с отличными от нуля коэффициентами. Тогда придем к противоречию

$$0 = (x_{i_1}, \alpha_1 \cdot x_{i_1} + \alpha_2 \cdot x_{i_2} + \ldots + \alpha_n \cdot x_{i_n}) = \alpha_1 \cdot (x_{i_1}, x_{i_1}) \neq 0.$$

**Определение 6.** Система $\{e_n\}$ называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

**Теорема 3 (об ортогонализации).** *Если* $f_n$ *линейно независимая система в евклидовом пространстве* $X$*, то с точностью до множителей* $\pm 1$ *однозначно определяется ортонормированная система* $\{e_n\}$ *с условием* $e_n = a_{n1} \cdot f_1 + a_{n2} \cdot f_2 + \ldots + a_{nn} \cdot f_n$*,* $a_{nn} \neq 0$*,* $a_{km} \in \mathbb{R}$*.*

*Доказательство.* Из условий $e_1 = a_{11} \cdot f_1$, $(e_1, e_1) = 1$ получаем $a_{11} = \frac{1}{||f_1||}$ (или $a_{11} = -\frac{1}{||f_1||}$).

Если элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ построены, то вычислим числа $b_1 = (f_n, e_1), \ldots, b_{n-1} = (f_n, e_{n-1})$ и элемент $h_n = f_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k \cdot e_k$. Заметим, что $(h_n, e_k) = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Нормировкой этого элемента получаем $e_n = \frac{h_n}{||h_n||}$ (или $e_n = -\frac{h_n}{||h_n||}$). При этом $||h_n|| \neq 0$ согласно линейной независимости $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

**Следствие 1.** В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

**Следствие 2.** Дествительное $n$-мерное евклидово пространство изоморфно $\mathbb{R}_2^n$. Комплексное $n$-мерное евклидово пространство изоморфно $\mathbb{C}_2^n$.

**Замечание.** Теорема об изоморфизме доказывается построением ортонормированного базиса в $L_2[a, b]$.

# Глава 6

# Линейные функционалы

## 6.1 Непрерывные линейные функционалы.

**Определение 1.** *Линейным функционалом* в линейном пространстве $X$ над полем $K$ называется отображение $F: X \to K$, удовлетворяющее свойствам (для любых $x, y \in X,\ \alpha \in K$):
$F(x+y) = F(x) + F(y);\ F(\alpha x) = \alpha F(x)$.

Например, в евклидовом пространстве скалярное произведение при фиксированном одном аргументе рассматривается как линенйный функционал.

Будем рассматривать линейные функционалы в линейном нормированном действительном пространстве, то есть в случае $K = \mathbb{R}$ и при наличии нормы.

**Определение 2.** Линейный функционал $F$ называется *ограниченным*, если при некоторой константе $C > 0$ и при всех $x \in X$ выполнено неравенство

$$|F(x)| \leq C\|x\|.$$

**Определение 3.** Линейный функционал $F$ на линейном нормированном пространстве $X$ называется *непрерывным* в $x$ $(x \in X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\|x -$

$y\| < \delta$ выполнено

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Аналогично определяются непрерывные функционалы в метрическом или в топологическом пространстве.

**Теорема 1.** *Если линейный функционал непрерывен в точке $x \in X$, то он непрерывен на всем пространстве $X$.*

**Теорема 2.** *Линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

**Теорема 3.** *Множество всех линейных непрерывных функционалов на линейном пространстве $X$ над полем $\mathbb{R}$ составляет линейное пространство.*

Формулировка теоремы означает, что для любых функционалов $F$, $G$ и чисел $\alpha$, $\beta$ выражение $\alpha F + \beta G$ является функционалом, действующим по правилу $(\alpha F + \beta G)x = \alpha F(x) + \beta G(x)$; множество функционалов удовлетворяет всем восьми аксиомам линейного протранства.

## 6.2 Сопряженное пространство.

Пространство линейных непрерывных функционалов на линейном пространстве $X$ называется *сопряженным пространством* и обозначается $X^*$.

Если пространство $X$ нормированное, то в сопряженном пространстве $X^*$ вводится норма

$$\|F\| = \sup_{x \in X} \tfrac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|.$$

Последнее равенство легко доказывается с помощью линейности.

**Теорема 4.** *Пространство $X^*$ полное (то есть банахово), если $X$ - нормированное (не обязательно полное).*

При доказательстве существенна полнота пространства $\mathbb{R}$.

Пространство $X$ называется *самосопряженным*, если $X = X^*$.

В данном определении более правильно было бы поставить знак изоморфности, а не равенства. Но изоморфные пространства принято отождествлять.

**Теорема 5.** *Любое полное евклидово пространство является самосопряженным.*

*Доказательство* приведем в одну сторону.

Любой элемент $x \in X$ определяет линейный функционал $F$ формулой $F(y) = (x, y)$, который ограничен согласно формуле

$$|F(y)| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Из равенства $F(x) = \|x\|^2$ вытекает $\|F\| = \|x\|$.

Более сложными рассуждениями [КФ, с.186] показывается, что для любого линейного функционала $F$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $F(y) = (x, y)$ для всех $y \in X$ и $\|F\| = \|x\|$. Тем самым завершается доказательство изоморфности исходного пространства пространству непрерывных линейных функционалов.

**Замечание.** Если евклидово пространство не полное, то сопряженное к нему будет его пополнением.

Понятие скалярного произведения $(x, y)$, введенное для евклидовых пространств, переносится на пару $X$ и $X^*$ сопряженных (полных линейных нормированных) пространств рассуждениями аналогичными доказательству теоремы 5. То есть $x \in X$, $y \in X^*$. При этом $\|y\|$ есть норма функционала, определенного этим фиксированным элементом $y$. Отсюда следует, что элемент $x$ задает линейный функционал на $X^*$ с нормой $\|x\|$. Тем самым определяется второе сопряженное пространство $(X^*)^*$ и доказывается вложение $X \subset (X^*)^*$.

Пространство называется *рефлексивным*, если $(X^*)^* = X$.

Рассмотрим последовательность $\{F_n\}$ линейных функционалов из $X^*$.

**Теорема 6.** *Если* $\|F_n - F\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то для любого* $x \in X$ *верно* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Данная теорема утверждает, что из равномерной сходимости (в пространстве $X^*$) следует поточечная сходимость. Отметим, что обратное утверждение не верно.

**Теорема Банаха-Штейнгауза.** *Если последовательность* $\{F_n\}$ *линейных непрерывных функционалов, определенных на банаховом пространстве* $X$, *ограничена в каждой точке* $x \in X$, *то последовательность норм этих функционалов* $\{\|F_n\|\}$ *также ограничена.*

**Теорема 7 (о полноте для поточечной сходимости).** *Если для любого* $x \in X$ *последовательность* $\{F_n(x)\}$ *фундаментальна, то существует линейный непрерывный функционал* $F$, *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *для любого* $x \in X$.

В следующих теоремах встречается понятие многообразия, то есть подмножества линейного пространства замкнутого относительно операций сложения и умножения на число.

**Теорема 8 (критерий сходимости всюду).** *Для любого* $x \in X$ *верно* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *тогда и только тогда, когда*
*1) последовательность* $\{\|F_n\|\}$ *равномерно ограничена сверху* $\|F_n\| \le C$;
*2) сходимость* $F_n(x) \to F(x)$ *имеет место на всюду плотном в* $X$ *многообразии.*

**Теорема Хана-Банаха.** *Любой линейный непрерывный функционал* $F$, *заданный на линейном многообразии* $L \subset X$, *можно с сохранением нормы продолжить на все* $X$.

Пусть $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ ($p$ и $p'$ - сопряженные индексы).

**Теорема Ландау.** *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ *существует и конечен для любой* $g \in L_{p'}[a,b]$, *то* $f \in L_p[a,b]$. Неравество Гельдера дает противоположное утверждение.

**Следствие.** *Общий вид линейного непрерывного функционала* $F : L_p[a,b] \to \mathbb{R}$ *определяется некоторой фиксированной функцией* $g \in L_{p'}[a,b]$ *и имеет вид* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ *для* $f \in L_p$, *что принято обозначать в виде скалярного произведения* $(f,g)$. *Короткая форма записи этого утверждения следующая* $(L_p[a,b])^* = L_{p'}[a,b]$.

Приведем другие примеры сопряженных пространств:

1. Если $\mathbb{R}^n_p = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \; \|x\|_p = \left( \sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\}$, то $\left(\mathbb{R}^n_p\right)^* = R^n_{p'}$.
2. $(C[a,b])^* = V[a,b]$ - пространство функций с ограниченным изменением.
3. $(L_\infty[a,b])^* = (M[a,b])^* = L[a,b]$.
4. $(l_p)^* = l_{p'}$. Общий вид линейного непрерывного функционала $F : l_p \to \mathbb{R}$ определяется фиксированной последовательностью $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...) \in l_{p'}$, и имеет вид $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n c_n$ для $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \in l_p$, что принято обозначать в виде скалярного произведения $(a,c)$.
5. $m^* = l_1$.
6. $(\bigoplus \mathbb{Z}_2)^* = X_\infty$.

Все примеры, кроме 2, есть примеры рефлексивных пространств. В последнем примере рассмотрены пространства над полем $\mathbb{Z}_2$.

# Глава 7

# Числовые и функциональные ряды

## 7.1 Числовые ряды.

*Рядом* называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

*Частной суммой ряда* называется $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ сумма первых слагаемых. Если $a_n$ действительные (или комплексные) числа, то ряд называется *числовым*. Известные из курса математического анализа утверждения сформулируем для комплексных рядов, опуская слово "числовые".

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* ряда.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Перечислим основные свойства сходящихся рядов.

**Свойство 1.** *Отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (изменяя при этом сумму).*

**Свойство 2.** *Сходимость ряда не нарушается при умножении всех членов ряда на одно и то же число, отличное* *от нуля.*

**Свойство 3.** *Если ряды (1) и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, *причем его сумма равна алгебраической сумме исходных рядов, то есть* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Свойство 4.** *Если ряд (1) сходится и его сумма есть* $S$, *то члены ряда (1) можно, не переставляя их, группировать произвольным образом, причем сумма полученного ряда будет снова равна* $S$.

Основные признаки сходимости (приведенные в терминах абсолютной сходимости) рядов следующие.

**Теорема 1 (критерий Коши).** *Для того чтобы числовой ряд (1) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое* $N$, *что неравенство* $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| < \varepsilon$ *имело бы место для любого* $n > N$ *и всех* $m \in \mathbb{N}$.

**Теорема 2 (необходимый признак).** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Следствие.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд (1) расходится.*

**Определение 1.** Числовой ряд (1) называется *абсолютно сходящимся* рядом, если сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

**Теорема 3.** *Если ряд (1) сходится абсолютно, то он сходится.*

**Теорема 4 (признак сравнения).** *1) Если* $|a_n| \leq b_n$ *при любом* $n$ *и действительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *- сходится.*

*2) Если* $|a_n| \geq b_n \geq 0$ *при любом* $n$ *и действительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится.*

**Теорема 5 (признак Даламбера).** *Пусть* $D = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

*Если* $D < 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится. Если* $D > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится.*

**Теорема 6 (радикальный признак Коши).** *Пусть* $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Если* $K < 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится. Если* $K > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится.*

Теорема 6 остается верной, если в формулировке предел заменить на верхний предел.

**Теорема 7 (интегральный признак Коши).** *Пусть действительная функция* $f(x) > 0$ *при* $x > 0$ *и монотонно убывает к нулю при* $x \to \infty$. *Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$.

Другой формулировкой свойства 1 служит

**Лемма 1.** *Изменение конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

Согласно лемме, любой действительный ряд с конечным числом отрицательных (или положительных) слагаемых исследуется как знакопостоянный ряд на сходимость с использованием перечисленных теорем, где модуль не ставится.

*Знакопеременным рядом* назовем действительный ряд, содержащий бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов ряда.

Знакопеременный ряд, а также комплексный ряд, исследуется на абсолютную и условную сходимость.

**Определение 2.** Числовой ряд (1) называют *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Биективное отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *перестановкой* натурального ряда.

**Определение 3.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *безусловно*, если для любой перестановки $\sigma$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

**Теорема 8.** *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то он сходится безусловно.*

*При любой перестановке абсолютно сходящегося ряда сумма ряда не меняется.*

В определении 2 и теореме 8 акцентировали внимание на то, что речь идет именно о числовом ряде.

**Теорема 9.** *Если хотя бы один из двух сходящихся рядов* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *сходится абсолютно, то произведение этих рядов сходится, причем его сумма равна произведению сумм исходных рядов.*

*Доказательство.* Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно. Обозначим его сумму через $S$, а через $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ его частные суммы. Обозначим $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ частные суммы второго ряда, а через $\sigma$ - его сумму. Частную сумму произведения $\delta_n$ запишем в виде

$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + ... + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + ... + u_nv_0) =$
$= u_0\sigma_n + u_1\sigma_{n-1} + ... + u_n\sigma_0 =$
$= u_0[\sigma + (\sigma_n - \sigma)] + u_1[\sigma + (\sigma_{n-1} - \sigma)] + ... + u_n[\sigma + (\sigma_0 - \sigma)] =$
$= s_n\sigma + u_0(\sigma_n - \sigma) + u_1(\sigma_{n-1} - \sigma) + ... + u_n(\sigma_0 - \sigma_n).$

Покажем, что выражение $\gamma_n = u_0(\sigma_n - \sigma) + u_1(\sigma_{n-1} - \sigma) + ... + u_n(\sigma_0 - \sigma_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ следует, что $|\sigma_k - \sigma| \le M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $|\sigma_k - \sigma| < \varepsilon$ для $k \ge N(\varepsilon)$.

Далее, из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ заключаем, что $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = L < \infty$ и $\sum_{k=N_1}^{n} |u_k| < \varepsilon$ для всех $n \ge N_1(\varepsilon)$; следовательно, $|\gamma_n| \le |u_0||\sigma_n - \sigma| + ... + |u_{n-N}||\sigma_N - \sigma| + |u_{n-N+1}||\sigma_{N-1} - \sigma| + ... + |u_n||\sigma_0 - \sigma| \le \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n-N} |u_k| +$

$M\sum_{k=n-N+1}^{n}|u_k|$.

Можно считать, что $n-N+1\geq N_1$, тогда справедлива оценка

$$|\gamma_n|<\varepsilon L+M\varepsilon=\varepsilon(L+M).$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$, а поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}(s_n\sigma+\gamma_n)=s\sigma.$$

**Замечание.** Для условно сходящихся рядов утверждения теорем 8 и 9 не верны, что подтверждает следующая теорема.

**Теорема 10.** *Если знакопеременный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *сходится условно, то для любого* $K\in[-\infty;\ +\infty]$ *существует перестановка* $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такая, что* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{\sigma(n)}=K$.

*Доказательство.* Обозначим

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & \text{если } a_n\geq 0,\\ 0, & \text{если } a_n<0,\end{cases}\qquad a_n^-=\begin{cases}0, & \text{если } a_n\geq 0,\\ -a_n, & \text{если } a_n<0.\end{cases}$$

При этом $a_n=a_n^+-a_n^-,\ \ |a_n|=a_n^++a_n^-$.

При условной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=+\infty,\ \ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty$.

Пусть $K\in(-\infty;\ +\infty)$. Если $K\leq 0$, то полагаем $n_1=1$. Если $K>0$, то выберем $n_1$ из условия $\sum\limits_{n=1}^{n_1}a_n^+>K,\ \ \sum\limits_{n=1}^{n_1-1}a_n^+\leq K$. Выберем $n_2$ из условия $\sum\limits_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{n_2}a_n^-<K$, но $\sum\limits_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{n_2-1}a_n^-\geq K$

Далее выберем $n_3$ из условия $\sum\limits_{n=1}^{n_3}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{n_2}a_n^->K$, но $\sum\limits_{n=1}^{n_3-1}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{n_2}a_n^-\leq K$. И так далее. Последовательность чисел $\{n_m\}$

определяет перестановку $\sigma$, при которой выбираются чередующиеся группы подряд идущих положительных и отрицательных членов ряда.

Для произвольного $\epsilon > 0$ находим номера $N$ и $M$ такие, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n^+ < \epsilon$, $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n^- < \epsilon$. Частная сумма переставленного ряда, в которую включены все слагаемые вида $a_n^+$ с номерами меньше $N$ и слагаемые вида $a_n^-$ с номерами меньше $M$, отличается от $K$ не более, чем на $\epsilon$.

Если $K = +\infty$, то при выборе $n_{2m-1}$ и $n_{2m}$ сравниваем с $m$ (а не с $K$). Если $K = -\infty$, то при выборе $n_{2m-1}$ и $n_{2m}$ сравниваем с $-m$.

Теорема доказана.

Действительный ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где $u_n > 0$, называется *знакочередующимся.*

**Теорема 11 (признак Лейбница).** *Если $u_n \geq u_{n+1}$ для всех $n$ (начиная с некоторого номера) и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится.*

Рассмотрим ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ и его частную сумму $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n$.

Обозначим $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ – частную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ – первую разность (вперед) для элементов последовательности $\{a_n\}$.

**Лемма 2 (преобразование Абеля).** *Для любых $m > n \geq 0$ выполнено соотношение*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} \Delta a_k B_k - a_n B_{n-1},$$

*которое называют преобразование Абеля. В частности,*

$S_N = a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} \Delta a_k B_k$.

*Доказательство.* Так как $b_k = B_k - B_{k-1}$, то

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} \Delta a_k B_k - a_n B_{n-1}.$$

Для частного случая полагаем $B_0 = 0$.

**Теорема 12 (признак Дирихле-Абеля).** *Если $a_n \downarrow 0$ (то есть монотонно убывают к нулю) и $|B_n| \leq M$ (то есть частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ограничены в совокупности), то ряд из произведений $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

Как обобщение теоремы 8 сформулируем утверждение для двойных числовых рядов.

**Теорема 13.** *Если ряд $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится абсолютно, то абсолютно сходится каждый из повторных рядов и выполняется равенство*

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}).$$

Аналогом данной теоремы для интегралов служит

**Теорема Фубини.** *Пусть $f(x,y)$ суммируемая функция на множестве $E = E_x \times E_y \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для почти всех $y \in E_y$ ($x \in E_x$) функция $f(x,y)$ является суммируемой на множестве $E_x$ ($E_y$) и выполняется равенство*

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy = \int_{E_y} \Big(\int_{E_x} f(x,y)dx\Big)dy = \int_{E_x} \Big(\int_{E_y} f(x,y)dy\Big)dx.$$

## 7.2 Суммирование расходящихся рядов.

Приведем пример расходящегося ряда, частные суммы которого ограничены в совокупности: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$.
Для него $S_{2n} = 0$, $S_{2n+1} = 1$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует. Однако, возникает желание присвоить подобным рядам в качестве суммы какое-то значение (например $1/2$ как среднее между указанными значениями), которое можно реализовать обращением к методам суммирования.

**Метод Чезаро (метод (C,1)-средних или метод средних арифметических)** состоит в вычислении среднего арифметического частных сумм

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{n}$$

для ряда (1). Встречается обозначение $\sigma_n = \frac{S_0+S_1+S_2+...+S_n}{n+1}$, если рассматривается ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Говорят, что ряд (1) суммируется к числу $S$ методом Чезаро, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$.

**Определение 3.** Метод суммирования ряда назовем: *регулярным*, если сходящийся ряд суммируется этим методом к своей сумме; и *вполне регулярным*, если дополнительно к этому любой расходящийся к $+\infty$ (или к $-\infty$) ряд суммируется этим методом к тому же значению.

**Теорема 14.** *Метод Чезаро вполне регулярный.*

*Доказательство.* Для произвольного $\epsilon > 0$ укажем $N$, начиная с которого $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$. Обозначим $A = (S_1 + S_2 + \ldots + S_N) - N \cdot S$. Выберем $m$ таким, что $2A - N\epsilon < m\epsilon$. Тогда

$$|\sigma_m - S| = |\frac{1}{m}(A + (S_{N+1} - S) + \ldots + (S_m - S))| < \frac{1}{m}(A + (m-N)\frac{\epsilon}{2}) < \epsilon,$$

что означает регулярность метода.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть для любого $M_1$ найдется $N$, что для всех $n > N$ выполнено $S_n > M_1$. Для произвольного $M$ выберем $M_1 = \frac{9}{10}M$. Тогда $\sigma_m = \frac{1}{m}(N \cdot \sigma_N + (S_{N+1} + \ldots + S_m)) > M_1 + N \cdot \frac{\sigma_N - M_1}{m} > M$ начиная с некоторого $m$. Случай $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ доказывается аналогично.

**Метод Абеля** (действительный). Для действительного ряда (1) и $x \in [0, 1)$ построим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Если для любого $x \in [0, 1)$ он сходится, к сумме $S(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется по методу Абеля к числу $S$.

**Теорема 15.** *Метод Абеля регулярный.*

**Теорема 16.** *Если ряд суммируется методом Чезаро к $S$, то он суммируется и по методу Абеля к $S$.*

Обратное утверждение не верно, то есть метод Абеля сильнее метода Чезаро.

Метод Абеля (комплексный). Для ряда (1) строим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Если в круге $|z| < 1$ построенный ряд сходится и представляет аналитическую функцию $S(z)$, принимающую в граничной точке $z = 1$ значение $S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется по методу Абеля к числу $S$.

Теория методов суммирования, которую продемонстрировали на примере двух основных методов, подробно разработана и изложена в математической литературе. В частности, линейные методы суммирования излагаются в терминах бесконечных матриц.

## 7.3 Функциональные ряды.

Функциональным рядом называют ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ (или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, где $z \in \mathbb{C}$ ). Начиная со следующей главы будут рассматриваться функциональные ряды на конечном отрезке. Для определенности можно считать $x \in [0, 1]$.

Для фиксированного $x$ определяется частная сумма функционального ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$. Если при этом $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, то ряд сходится в точке $x$ к числу $S(x)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \infty$ или не существует, то ряд расходится в точке $x$.

**Определение 4.** Множество всех точек $x$, где ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Подход, при котором сначала фиксируется $x$, а потом совершается предельный переход в числовом ряде, относится к понятию *поточечной сходимости.* Кроме сходимости в выбранной точке часто обращают внимание на возможность для исследуемого ряда поточечной сходимости на множестве положительной меры, почти всюду (обозначается $f_n \underset{\text{п.в.}}{\to} f$) или всюду (обозначается $f_n \to f$). Для каждого из указанных видов поточечной сходимости может быть поставлен вопрос об абсолютной или безусловной сходимости.

Кроме этого классического подхода к исследованию функциональных рядов существуют более современные подходы, примером которых служит равномерная сходимость. Слагаемые функционального ряда рассматриваются как элементы линейного нормированного пространства $X$, в качестве которого будем брать $C[0, 1]$ или $L_p[0, 1]$ при $p > 1$.

Тогда частная сумма $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x) \in X$ и изучается сходимость последовательности частных сумм $\{S_n(x)\}$. В комплексном случае отрезок $[0,1]$ заменяется на область. И в действительном случае часто приходится сужать отрезок $[0,1]$.

Кроме поточечной сходимости рассматриваются следующие виды сходимости последовательностей $\{f_n(x)\}$:

1) **Сходимость по мере** к измеримой функции $f(x)$: если для любого $\delta > 0$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \le \delta\} = 0$, что обозначают $f_n \Rightarrow f$.
Она равносильна сходимости по норме $\|f\|_0 = \int\limits_0^1 \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\, dx$.

2) **Сходимость по норме (сильная сходимость)** к $f \in X$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0$, что обозначают $f_n \to f$ или $\|f_n - f\|_X \to 0$. Естественно, что полагают $f_n \in X$.

В случае $X = C[0,1]$ речь идет о равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$. Для равномерной сходимости часто возникают другие случаи. Например, $S_n \notin C[0,1]$ для частной суммы по системе Хаара, или равномерная сходимость имеет место только на более узком участке $[a,b] \subset [0,1]$.

3) **Равномерная сходимость** на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$:
если для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N$ такой, что для всех $n > N$, $x \in [a,b]$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, что обозначают $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ (или $f_n \rightrightarrows f$ в случае $[a,b] = [0,1]$).

4) **Слабая сходимость** к элементу $f \in X$:
если для любого $g \in X^*$ имеет место сходимость числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, g) = (f, g)$. Здесь скалярное

произведение $(f, g)$ понимается в виде $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ (или в виде $\int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ в комплексном случае). Естественно полагают $f_n \in X$.

Для этих видов сходимости можно также рассматривать безусловную сходимость, то есть выбранный вид сходимости рассматривать для всевозможных перестановок.

**Теорема 17.** *Из сильной сходимости последовательности $\{f_n\}$ в полном нормированном пространстве $X$ вытекает слабая сходимость.*

*Доказательство* для $X = L_p[0,1]$, $p > 1$. По неравенству Гельдера

$$|(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_{p'} \to 0$$

при $n \to \infty$ для произвольной $g \in L_{p'}[0,1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

**Замечание.** Определения и утверждения сохраняются для комплекснозначных функций. Также можно и область определения функций считать комплексной. Виды сходимости и теоремы можно переформулировать, заменив отрезок действительной прямой на ограниченную область комплексной плоскости. Свойство полноты рассматриваемых пространств $C$ и $L_p$ сохранится и его обычно (в частности для случая равномерной сходимости) формулируют в виде *критерия Коши* сходимости последовательностей (частных сумм при рассмотрении ряда). Признак сравнения функционального ряда со знакоположительным сходящимся числовым рядов есть *признак Веерштрасса равномерной сходимости* (в общем случае в некоторой области комплексной плоскости).

Сформулируем свойства равномерно сходящихся рядов в более общем случае (для комплексного переменного).

**Теорема 18 (о непрерывности суммы).** *Если члены*

*$u_n(z)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ непрерывны в области $D$ и ряд сходится равномерно в этой области, то его сумма $S(z)$ непрерывна в области $D$.*

**Теорема 19 (о предельном переходе).** *Если: 1) функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области $D$, и 2) точка $z_0$ есть такая предельная точка множества $D$, для которой конечны все следующие пределы изнутри области $D$ $(z \in D)$*

$$\lim_{z \to z_0} u_n(z) = c_n,$$

*то: 1) числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится,*
*2)предел $S(z)$ суммы функционального ряда изнутри области $D$ $(z \in D)$ равен сумме $S$ числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, то есть*

$$\lim_{z \to z_0} S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

**Теорема 20 (об интегрировании ряда).** *Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области $D$ и все функции $u_n(z)$ интегрируемы по любой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$, то ряд можно почленно интегрировать и интеграл от суммы равен сумме интегралов*

$$\int_\gamma S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma u_n(z)dz.$$

**Теорема 21 (Веерштрасса о дифференцировании ряда).** *Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в любой $D' \subset D$ замкнутой односвязной подобла-*

*сти области $D$ и все функции $u_n(z)$ являются однозначными аналитическими в области $D$, то:*
*1) сумма ряда $S(z)$ являются аналитической в области $D$,*
*2) ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, при этом*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n(z))^{(k)},$$

*3) полученные после многократного дифференцирования ряды сходятся равномерно в любой $D' \subset D$ замкнутой односвязной подобласти области $D$.*

# Глава 8

# Ортогональные ряды

## 8.1 Ортогональные системы.

Ортогональные системы изучают обычно в пространстве функций и обозначают $\{\varphi_n(x)\}$ или $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если хотят подчеркнуть, что нумерация счетного числа функций системы начинается с единицы. Часто нумерация начинается с нуля или берется по множеству целых чисел. Сокращенное обозначение системы $\{\varphi_n\}$.

Так как ортогональность определяется через скалярное произведение, то раасматривают пару сопряженных линейных нормированных пространств $X$, $X^*$ и требуют принадлежность функций системы каждому из пространств. Как правило $X = L_p[a,b]$, $X^* = L_{p'}[a,b]$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p \geq 1$. При $p = 2$ имеем гильбертово пространство $L_2[a,b]$, совпадающее со своим сопряженным.

Напомним, что система $\{\varphi_i\}$ ортогональна, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j \qquad \text{и } (\varphi_i, \varphi_i) > 0.$$

Система удовлетворяющая условию

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, если } i = j, \\ 0 & \text{, если } i \neq j, \end{cases}$$

называется ортонормированной. Здесь приведено определение символа Кронекера $\delta_{ij}$.

Любую ортогональную систему легко сделать ортонормированной с помощью операции нормировки: перехода от элемента $x$ к элементу $\frac{x}{\|x\|}$.

Многочленом по системе $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ называют линейную комбинацию элементов системы $l_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i(x) \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$.

**Определение 1.** Система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ называется *замкнутой* в в пространстве $X$, если для любой $f \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $l_n(x)$, что $\|f - l_n\|_X < \varepsilon$.

**Определение 2.** Система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ элементов пространства $X^*$ называется *полной* в $X$, если для $f \in X$ из условия $(f, \varphi_i) = 0$ для любого i следует, что $f = 0$ пространстве $X$.

Напомним, что $f = 0$ пространстве $L_p[a, b]$ означает равенство нулю почти всюду.

**Замечание.** В современной научной литературе (например [КС]) используется другая терминология: систему называют полной вместо замкнутой и тотальной вместо полной.

**Теорема 1.** Система $\{\varphi_i\}$ замкнута в $L_p[a, b]$ тогда, и только тогда, когда она полна в $L_{p'}[a, b]$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p \geq 1$.

Доказательство при $p = 2$ приведем в следующем разделе, а для общего случая отошлем к [КШ, с.], [КС, с.].

**Определение 3.** *Коэффициентами Фурье* функции $f \in L_p[0, 1]$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ называются числа

$$c_n = c_n[f] = (f, \varphi_n) = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx.$$

При этом выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

называется *рядом Фурье* функции $f \in L_p[0,1]$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Будем использовать обозначение $\sigma[f]$ для ряда Фурье функции $f(x)$.

Сумму первых $n$ слагаемых ряда $\sigma[f]$ называют *частной суммой* ряда Фурье и обозначают $S_n(f;x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ или сокращенно $S_n$.

К основным вопросам в теории рядов Фурье относятся вопрос о сходимости ряда $\sigma[f]$ и вопрос о равенстве $f$ и $\sigma[f]$. Условие $f \in L[0,1]$ гарантирует возможность вычисления $c_n$ и, следовательно, существование ряда $\sigma[f]$, что указывается записью $f \sim \sigma[f]$ о соответствии ряда функции.

**Замечание.** Вместо $[0,1]$ можно брать любой другой конечный интервал. Если функции $\varphi_n(x)$ системы комплекснозначные, то с учетом изменения вида скалярного произведения имеем
$c_n[f] = (f, \varphi_n) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx.$

Предпочитают работать с ортонормированной системой, так как для ортогональной системы $\{\varphi_n\}$ в определении коэффициентов Фурье через скалярное произведение появляются константы
$c_n = A_n(f, \varphi_n)$, где $A_n = \frac{1}{(\varphi_n, \varphi_n)}$.
Действительно, если $f = \sigma[f]$ в каком-то смысле, то формально получаем $(f, \varphi_n) = (\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i, \varphi_n) = c_n \cdot (\varphi_n, \varphi_n)$.

## 8.2 Ортогональные системы в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим действительное пространство $L_2[0,1]$ функций с интегрируемым квадратом, а систему будем нумеровать начиная с нуля.

**Теорема о неравенстве Бесселя.** *Если* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *ортонормирована в* $L_2[0,1]$, *то имеет место* ***неравенство Бесселя***

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_i^2 \leq \|f\|_2^2, \text{ где } c_i = c_i[f].$$

*Доказательство.* Рассмотрим
$\|f - S_n\|^2 = (f - S_n, f - S_n) = (f,f) - 2(f, S_n) + (S_n, S_n)$.
Так как $(f, S_n) = (f, \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i(f, \varphi_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2$

q и $(S_n, S_n) = (\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i, \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2(\varphi_i, \varphi_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2$, то

получим *тождество Бесселя*: $\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2$. Из

него вытекает *конечное неравенство Бесселя*: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2 \leq \|f\|^2$, сохраняющееся при предельном переходе $n \to \infty$.

**Следствие.** Стремление к нулю коэффициентов Фурье. *Если* $f \in L_2[a,b]$, *то* $c_n[f] \to 0$ *при* $n \to \infty$.

**Теорема о минимальном свойстве частных сумм ряда Фурье.**

*Среди всех многочленов* $l_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i\varphi_i$ *по ортогональной системе в* $L_2[0,1]$ *частные суммы ряда Фурье дают наилучшее приближение, а именно* $min_{\alpha_i}\|f - l_n\| = \|f - S_n\|$.

*Доказательство.* Рассмотрим $\|f - l_n\|^2 = (f - l_n, f - l_n) =$

$\|f\|^2 - 2\sum\limits_{i=0}^{n-1}\alpha_i c_i + \|l_n\|^2 = \|f\|^2 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2 - 2\sum\limits^{n-1}\alpha_i c_i + \sum\limits^{n-1}\alpha_i^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2 = \|f\|^2 + \sum\limits_{i=0}^{n-1}(c_i - \alpha_i)^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2$. Отсюда $min_{\alpha_i}\|f - l_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2 + 0$ при $\alpha_i = c_i$.

**Замечание.** Отсюда также вытекает (сначала конечное) неравенство Бесселя.

**Теорема о сходимости ряда Фурье.**

*Для любой $f \in L_2[0,1]$ и любой ортогональной системы $\{\varphi_n\}$ ряд Фурье функции $f$ по этой системе сходится в метрике $L_2$.*

*Доказательство.* По неравенству Бесселя частные суммы ряда Фурье образуют фундаментальную последовательность в $L_2$:
$\|S_n(f) - S_m(f)\|_2^2 = \sum\limits_{k=m}^{n-1} c_k^2 \to 0$ при $n > m \to \infty$.

**Теорема о равенстве Парсеваля.**

*Если ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в $L_2[0,1]$, то для любой $f \in L_2[0,1]$ выполнено **равенство Парсеваля**:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

*Доказательство.* Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в тождестве Бесселя с учетом минимального свойства частных сумм
$\|f\|^2 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i^2 = \|f - S_n(f)\|^2 \le \|f - l_n\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

**Следствие.** *Если ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ замкнута в $L_2[0,1]$, то для любых $f, g \in L_2[0,1]$ выполне-*

*но* ***обобщенное равенство Парсеваля***

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[f]\cdot c_n[g] \quad ,$$

сокращенная запись которого $\qquad (f,g) = (c[f], c[g]) \quad ,$ где $c[f] = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ и $c[g] = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ есть последовательности из $l^2$ коэффициентов Фурье функций $f$ и $g$.

*Доказательство.* Так как $(f+g, \varphi_i) = c_i + b_i$, то по равенству Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i^2$, $\|g\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i^2$ и $\|f + g\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(c_i+b_i)^2$. Так как в равенстве

$$\sum_{i=0}^{\infty}(c_i+b_i)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}(c_i^2+2c_ib_i+b_i^2) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 + 2\sum_{i=0}^{\infty} c_ib_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2$$

все ряды сходятся, то из $\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2$ получим $\|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i^2 + 2\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_ib_i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i^2$.

Отсюда вытекает $(f,g) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_ib_i$.

**Теорема о равносильности полноты и замкнутости.**

*Ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *полна в* $L_2[0,1]$ *тогда и только тогда, когда* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *замкнута в* $L_2[0,1]$.

*Доказательство.* Пусть система $\{\varphi_n\}$ - полна. Возьмем любую $f$ из $L_2$. Для нее по теореме о сходимости ряда Фурье в силу полноты $L_2$ существует функция $F \in L_2[0,1]$ такая, что $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e_k(x)$ в $L_2$. Во-первых, докажем совпадение всех коэффициентов Фурье функций $f$ и $F$. По неравенству Гельдера $|(f,g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ из сильной сходимости в $L_2$ ($\|S_n[f] - F\| \to 0$) вытекает слабая сходимость $(S_n[f] - F, g) \to 0$ для любой $g \in L_2$ и, в частности, для $\varphi_m$ : $(S_n[f] - F, \varphi_m) \to 0$ при $n \to \infty$. Так как при $n > m$ имеем $(S_n[f], \varphi_m) = c_m[f]$, то $c_m[f] - c_m[F] \to 0$ при $n \to \infty$. То есть $c_m[f] - c_m[F] = 0$.

Отсюда для функции $f - F \in L_2$ равенство всех ее коэффициентов Фурье нулю означает $c_n[f - F] = (f - F, \varphi_n) \equiv 0$ ортогональность ее всем функциям системы. Из полноты системы $\{\varphi_n\}$ следует, что $f - F = 0$ и $f = F$ в $L_2$ (или $f(x) = F(x)$ почти всюду). Частные суммы ряда $\sigma[f] = F$, сходящегося к $f$ в $L_2$ аппроксимируют (то есть приближают) $f$ с любой заданной точностью, что означает замкнутость $\{\varphi_n\}$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ замкнута. Тогда имеет место равенство Парсеваля.
Для любой $g \in L_2$ такой, что $(g, \varphi_n) \equiv 0$ по равенству Парсеваля $\|g\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (g, \varphi_n)^2 = 0$ следует, что g=0 в $L_2$, то есть система полна.

**Вывод.** Установили, что замкнутость или полнота системы в $L_2[0,1]$ равносильна обращению неравенства Бесселя в равенство Парсеваля для произвольной функции $f \in L_2$ и гарантирует равенство $f = \sigma[f]$ в $L_2[0,1]$.

Для обозначения полной ортонормированной системы используют абревиатуру ПОНС.

**Следствие.** (Утверждение единственности). Если $\{\varphi_n\}$ - ПОНС, то для всех $f \in L_2$ справедливо равенство $f = \sigma[f]$ и ряд $\sigma[f]$ есть единственный ряд по системе $\{\varphi_n\}$, представляющий функцию $f$ в $L_2$.

Если $\{\varphi_n\}$ - ПОНС, то ее можно рассматривать как базис в $L_2$, а $c_n[f]$ - как координаты элемента $f \in L_2$ в этом базисе.

**Теорема Рисса-Фишера.**

*Для любой последовательности* $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ *из* $l^2$ $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty)$ *и для любой ортонормированной системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *существует* $f$ *из* $L_2[0,1]$ *такая, что коэффициенты Фурье этой функции равны соответствующим координатам последовательности* $c_n[f] = c_n$ *для любого* $n$.

*Если* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна, то функция* $f$ *- единственна.*

*Доказательство.* Применим к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, а также к разности его частных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k(x)$ равенство Парсеваля: $\|S_n - S_m\|^2 = \sum\limits_{k=m}^{n-1} |c_k|^2 \to 0$ при $n > m \to \infty$. Итак последовательность $\{S_n(x)\}$ - фундаментальна в $L_2$. Значит существует функция $f \in L_2$ предельная для этой последовательности. Далее повторяем доказательство двух предыдущих утверждений.

**Следствие.** Пространства $L_2[a,b]$ и $l^2$ изоморфны, $L_2[a,b] \simeq l^2$.

**Докозательство.** В $L_2[a,b]$ есть ПОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Биективное отображение $F : L_2[a,b] \to l^2$ любой функции $f \in L_2[a,b]$ ставит в соответствие последовательность коэффициентов Фурье $(c_0[f], c_1[f], ..., c_n[f], ...)$ из $l^2$ согласно равенству Парсеваля. Инъективность отображения есть утверждение единственности. Сюрьективность устанавливает теорема Рисса-Фишера.

С помощью ПОНС в $L_2$ устанавливаются некоторые утверждения для других пространств.

**Теорема Мерсера.** *Если ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *равномерно ограничена (то есть* $|\varphi_n(x) \le M$*), то для любой* $f \in L[a,b]$ *имеем* $c_n[f] \to 0$ *при* $n \to \infty$ .

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $F \in L_2[a,b]$ такая, что $\|f -$

$F\|_1 < \varepsilon$. В качестве $F$ можно взять срезку функции $f(x)$ вида:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \le N, \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Рассмотрим $|c_n[f-F]| = |(f-F, \varphi_n)| \le \|f-F\|_1 \cdot \|\varphi_n\|_\infty \le \varepsilon \cdot M$ (по неравенству Коши-Буняковского). Так как $c_n[F] \to 0$, то и $c_n[f] \to 0$.

**Замечание.** Для справедливости теоремы Мерсера важно, чтобы $|\varphi_n(x)| \le M$. Контрпример строится для системы Хаара.

Подстановкой выражения для коэффициентов Фурье получаем интегральное представление частной суммы

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(t)\overline{\varphi_k(t)}dt\varphi_k(x) = \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}dt,$$

которое для мультипликативных функций (удовлетворяющих условию $\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)} = \varphi_k(x \ominus t) = \overline{\varphi_k(t \ominus x)}$ ) записывается через операцию *свертки* (обозначаемую символом $*$) с *ядром Дирихле* ( которое определяется равенством

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x) \qquad )$$

в следующем виде

$$S_n(f;x) = \int_0^1 f(t)D_n(x \ominus t)dt = (f * D_n)(x).$$

Последний интеграл при условии инвариантности интеграла относительно сдвига перепишем в более удобном виде

$$S_n(f;x) = \int_0^1 f(x \ominus t)D_n(t)dt.$$

Здесь использован знак $\ominus$ операции группового вычитания, противоположной операции $\oplus$ группового сложения. В случае системы Уолша эти операции совпадают.

Поведение частных сумм ряда Фурье в крайних пространствах $L$ и $L_\infty$ и многие другие вопросы зависят от поведения функций Лебега, которые для мультипликативных систем функций превращаются в *константы Лебега* и определяются формулой

$$L_n = \int_0^1 |D_n(t)|dt.$$

## 8.3 Формальные операции над рядами Фурье.

Приведем формальные вычисления в предположении, что $\{\varphi_n(x)\}$ является ПОНС, все рассмотренные ряды сходятся, допускается перемена знаков суммирования и интегрирования, функции системы являются мультипликативными (и комплекснозначными). ез этих предположений знак равенства заменяют на $\sim$ нак соответствия. Сумма для ряда берется по $n$ от 0 до $\infty$ (для систем Уолша, Хаара и Крестенсона-Леви) или по всем целым числам (для тригонометрической системы в комплексной форме). Групповой операцией для тригонометрического ряда в комплексной форме является обычное сложение. Зафиксируем обозначения для коэффициентов Фурье исходных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) = \sum c_n \varphi_n(x), \qquad g(x) = \sum d_n \varphi_n(x).$$

1. *Сложение и вычитание* рядов Фурье соответствует аналогичной операции над функциями

$$f(x) \pm g(x) = \sum (c_n \pm d_n)\varphi_n(x).$$

2. *Умножение на число*

$$k \cdot f(x) = \sum (k \cdot c_n)\varphi_n(x).$$

3. *Сдвиг* ряда Фурье соответствует умножению коэффициентов Фурье на функцию системы в выбранной точке

$$f(x \oplus a) = \sum (c_n \cdot \varphi_n(a))\varphi_n(x).$$

4. *Умножение на функцию системы* соответствует обратному сдвигу коэффициентов Фурье

$$f(x) \cdot \varphi_m(x) = \sum c_{n \ominus m} \varphi_n(x).$$

Свойства 3 и 4 не выполняются для системы Хаара, не являющейся мультипликативной.

5. Ряд Фурье сопряженной функции (не для систем Уолша, Хаара) получается групповым обращением и сопряжением последовательности коэффициентов

$$\overline{f(x)} = \sum \overline{c_{\ominus n}} \cdot \varphi_n(x).$$

*Свертку функций* $f(x)$ и $g(x)$ на $[0,1]$ относительно групповой операции $\oplus$ определим равенством

$$f * g = (f * g)(x) = \int_0^1 f(t) g(x \ominus t) dt.$$

Соответственно *сверткой последовательностей* $c = \{c_n\}$ и $d = \{d_n\}$ называется последовательность $a = \{a_n\}$, координаты которой вычисляются по формулам

$$a_n = \sum_k c_k d_{n \ominus k}.$$

Применяется то же обозначение для свертки последовательностей $a = c * d$.

6. *Ряд Фурье для свертки* получается с помощью перемножения соответствующих коэффициентов Фурье

$$f * g = \sum (c_n \cdot d_n) \varphi_n.$$

7. *Ряд Фурье для произведения* функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется последовательностью коэффициентов $a = c * d$

$$f(x) g(x) = \sum (\sum_k c_k d_{n \ominus k}) \varphi_n(x).$$

Если система является полной ортогональной (но не ортонормированной), то добавляется коэффициент перед интегралом в определении свертки функций.

Для рядов по тригонометрической системе (а также по другим системам непрерывных функций) в качестве основных формальных операций рассматривают также дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.

# Оглавление