

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

Е.А. ОЛЕНЕВ

КОНСТРУИРОВАНИЕ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРИБОРОВ И АППАРАТОВ

Учебник

В трех частях

Часть 3. Научное творчество

Владимир 2009

УДК 616.2 + 629.4.047.2 + 683.344.9

ББК 37.52

О-53

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
зав. лабораторией, председатель секции «Системы управления
технологическими процессами» ученого совета
Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
В.А. Лотоцкий

Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
А.К. Бернюков

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Оленев, Е. А.

О-53 Конструирование и технология производства приборов и аппаратов : учебник. В 3 ч. Ч. 3. Научное творчество / Е. А. Оленев ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 92 с. – ISBN 978-5-89368-978-5.

Третья часть учебника посвящена научной деятельности – одной из высших форм творческой деятельности человека. В ней показаны подходы к решению научных задач, построению математических моделей и обработке экспериментальных данных. На ряде численных примеров показано, как следует решать задачи научного характера. Даны также примеры определения постоянных искомым уравнений методом средних арифметических и методом наименьших квадратов, представлены приемы определения по экспериментальным данным связей между изучаемыми зависимостями. Учебник содержит таблицы, иллюстрации и примеры, которые способствуют более легкому усвоению материала.

В первой и второй частях учебника рассматривалось изобретательское и инженерное творчество.

Предназначен для студентов 5-го курса очной формы обучения направлений 200300 – биомедицинская инженерия, 200101 – приборостроение при изучении дисциплин «Конструирование и технология производства приборов и аппаратов», «Основы проектирования приборов и систем», «Основы научно-технического творчества» и др. Также полезен аспирантам и молодым инженерам.

Табл. 7. Ил. 14. Библиогр.: 16 назв.

УДК 616.2 + 629.4.047.2 + 683.344.9

ББК 37.52

ISBN 978-5-89368-978-5

© Владимирский государственный университет, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений, обучающихся по направлениям 200300 – биомедицинская инженерия, 200101 – приборостроение, а также для аспирантов и молодых инженеров, желающих познать основы решения задач научного характера, методы сбора и обработки экспериментальных данных.

Методы моделирования – весьма эффективное орудие исследования различных процессов, позволяющее изучать на модели количественное и качественное протекание какого-либо процесса. В настоящее время моделирование получило широкое распространение практически во всех областях техники.

В процессе экспериментальной исследовательской работы в любой области техники мы получаем данные, которые характеризуют зависимость между изучаемыми переменными величинами. Эта зависимость может быть представлена по-разному – в виде таблиц, графиков и формул.

Преимущества таблиц заключаются в том, что записанные в них данные относительно точно отвечают результатам измерений. В таблицах также можно одновременно привести величины нескольких переменных.

К недостаткам таблиц следует отнести их громоздкость, а также то, что они составлены из дискретных данных.

Преимущества графиков состоят в том, что они дают наглядное представление о характере изменения зависимости между переменными величинами. Кроме того, пользуясь графиками, можно найти любые промежуточные значения переменных, в то время как нахождение этих данных из таблиц требует определенных вычислений.

Отображение исследуемой зависимости между переменными величинами с помощью уравнений и формул устраняет указанные не-

достатки. При этом, как правило, уравнение представляет ту или иную зависимость в удобной и ясной форме, весьма легкой как для запоминания, так и для записи.

Исследовательские работы можно разделить на две группы. К первой группе следует отнести те, в которых изучаемые явления или процессы протекают по известным законам и вид формулы, отображающей эти процессы, экспериментатору известен. В этом случае его задача состоит в определении постоянных, входящих в эту формулу.

Ко второй группе необходимо отнести те исследовательские работы, в которых изучаемые процессы не подчиняются уже известным теоретическим законам. В этом случае задача исследователя состоит в том, чтобы сначала на основе опытных данных попытаться определить вид формулы, а потом – ее постоянные коэффициенты. Задача нахождения эмпирических формул значительно сложнее. Особенно это относится к формулам с тремя переменными.

Материал книги доступен для понимания широкому кругу читателей, интересующихся решением задач научного характера.

Ученым следует помнить, что самые важные и интересные научные открытия – это те, которые нельзя предвидеть.

П.Л. Капица

ВВЕДЕНИЕ

Научные и экспериментальные исследования в различных областях науки, техники и производства (от сельского хозяйства до медицины и космоса) составляют весьма существенную часть человеческой деятельности, поэтому эффективное решение научных, технических, производственных задач имеет существенное практическое и экономическое значение и заслуживает всестороннего анализа.

Решение задач научного характера предполагает, как правило, моделирование исследуемых явлений физического, технического и социально-психологического характера и использование математического аппарата теории вероятностей, исследования операций, теории графов и т.д.

При решении указанных задач фактор затрат времени выступает на первый план, а профессионализм во многом способствует ускорению получения национального продукта.

Многие практически необходимые задачи не имеют простых и удобных решений. В практике экспериментальных исследований очень часто возникают сложные зависимости, для выявления которых дать готовый план действий невозможно, его приходится разрабатывать самому исследователю. Для этого необходимо знать основные приемы построения математических моделей, уметь давать оценку параметрам процесса и находить зависимость между исследуемыми переменными.

Хорошее понимание процессов моделирования необходимо не только тому, кто впоследствии займется научными исследованиями. Математический стиль мышления и умение рассуждать логически нужны также и работникам других профессий.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Построение аналитической модели физического процесса

Рассмотренные ранее решения технических задач достаточно просты. При проектировании новой техники часто приходится решать более сложные задачи с использованием математических методов, позволяющих моделировать различные процессы. Построение модели физического процесса, как правило, основывается на причинно-следственной связи между отдельными его моментами и общим его ходом, поэтому прежде всего необходимо выявить эти связи, описать их математически в виде определенных зависимостей, которые потом следует использовать для составления дифференциальных уравнений. Методы дифференциального исчисления применяют в том случае, когда решение технической задачи иными путями оказывается невозможным.

Составление дифференциальных уравнений – эвристическая задача, поскольку общих методов не существует, и навыки в этом вопросе могут быть приобретены лишь в результате рассмотрения конкретных задач.

Для примера приведем научную разработку ингалятора для лечения верхних дыхательных путей как у детей, так и у взрослых путем введения в дыхательные пути аэрозоля (рис. 9.1). Лекарственные аэрозоли оказывают как местное, так и общее действие. Для понимания механизма их физиологического и лечебного действия весьма важно иметь четкое представление о глубине проникновения и скорости оседания ингалируемых веществ. Известны три главных физических процесса, которые определяют задержку аэрозольных частиц: инерционное столкновение со стенкой дыхательных путей, осаждение (седиментация) и диффузия. Успех ингаляционной терапии в значи-

тельной степени зависит от глубины проникновения лекарств в дыхательные пути, которая, как известно, прежде всего определяется размером аэрозольных частиц. Оптимальный размер частиц для проникновения в бронхи и альвеолы – 1 мкм (см. таблицу). Более мелкие частицы в большом количестве выдыхаются, а частицы размером около 10 мкм и более оседают в бронхах и альвеол не достигают.

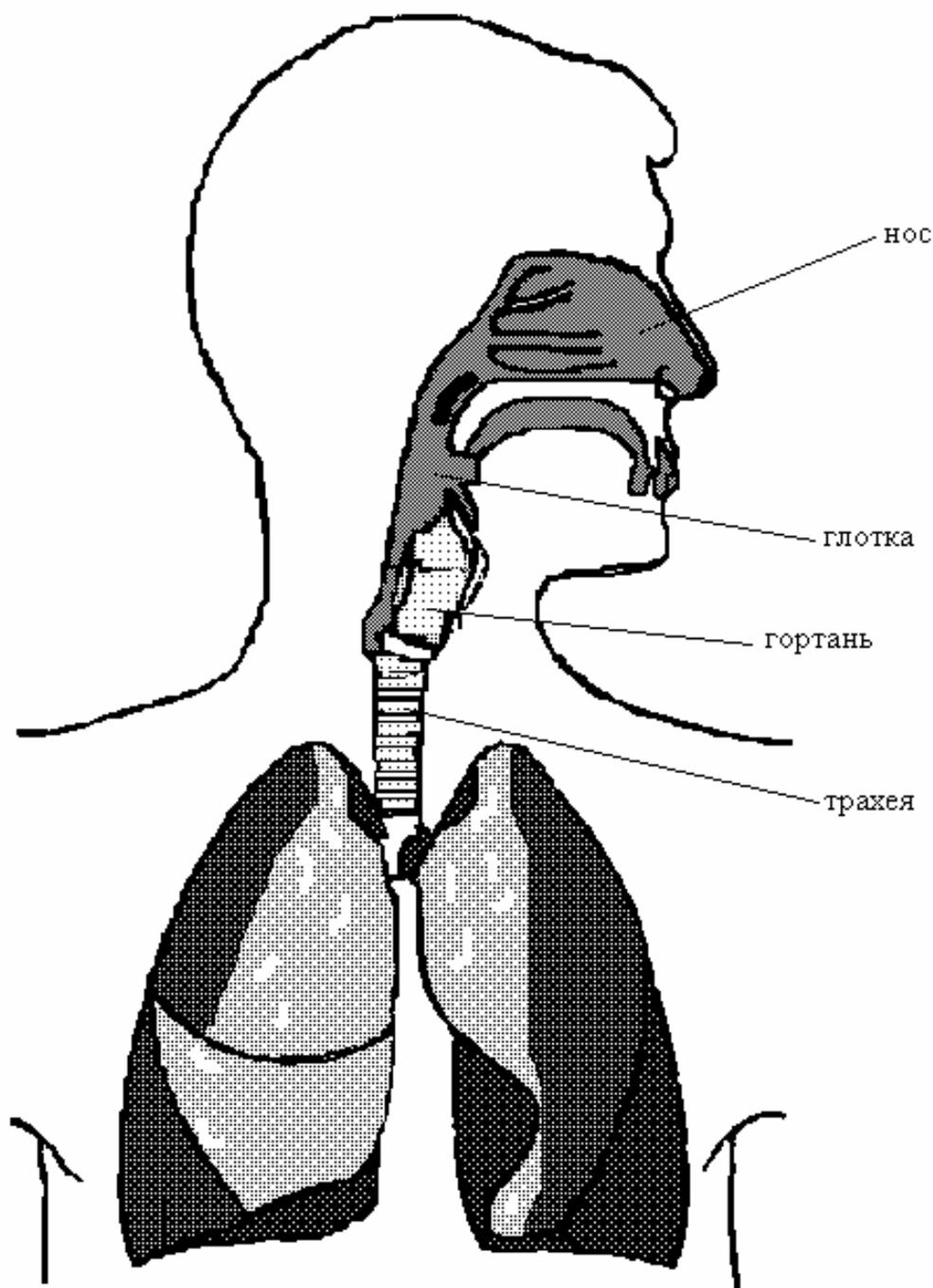


Рис. 9.1. Схема верхних и нижних дыхательных путей

Отдел легкого	Проникновение аэрозолей различных размеров в дыхательные пути, %			
	Диаметр частицы аэрозоля, мкм			
	0,03	0,3	1	10
Трахея	0,16	0,03	0,1	7,8
Бронхи:				
главные	0,22	0,07	0,26	17,2
первого порядка	0,29	0,1	0,34	22,5
второго порядка	0,56	0,17	0,17	23,1
третьего порядка	1,04	0,31	0,87	13,3
терминальные	6,11	2,02	4,84	14,0
дыхательные	6,31	2,0	4,49	–
альвеолярные	37,2	15,8	42,1	–
Альвеолярные мешки	14,1	12,7	42,7	–
Выдыхается	34,0	65,8	2,6	–

Одна из главных характеристик аэрозолей – величина аэрозольных частиц. По степени дисперсности выделяют пять групп аэрозолей: 1) высокодисперсные (0,5 – 5 мкм); 2) среднедисперсные (5 – 25 мкм); 3) низкодисперсные (25 – 100 мкм); 4) мелкокапельные (100 – 250 мкм); 5) крупнокапельные (250 – 400 мкм). Диспергирование лекарственного препарата приводит к появлению более высокой фармакологической активности аэрозоля. Распыление лекарств резко увеличивает их поверхность. Если, например, 1 мл раствора превратить в аэрозоль, состоящий из частиц размером 5 мкм, то образуется 15 000 000 частиц с суммарной площадью 12 000 см². При размере частиц 2 мкм их суммарная площадь составит 30 000 см². Так как химические реакции происходят на поверхности соприкасающихся тел, увеличение общей поверхности капель способствует повышению биологической и фармакологической активности медикаментов, применяемых в виде аэрозолей.

Идеально лекарственные аэрозоли при физическом измельчении должны иметь диаметр 1 – 2 мкм, хотя на практике они обычно превышают эти размеры. Количество частиц препарата, содержащихся в единице объема, именуется *счетной концентрацией*. В отличие от этого *концентрация по массе* представляет собой массу вещества в единице объема.

Размер частиц аэрозоля – не единственный фактор, определяющий глубину его проникновения. Оседание лекарственных частиц в дыхательных путях связано также с глубиной вдоха, задержкой выдоха, скоростью полета аэрозольных частиц, их стабильностью.

В фармакодинамике лекарств при ингаляционной терапии большое значение имеет депонирующая способность легких. Она, с одной стороны, обуславливает создание высокой концентрации лекарства в дыхательных путях, а с другой – обеспечивает его длительное действие в организме. В депонировании лекарств в легких основную роль играют два фактора: большая внутренняя поверхность легких, содержащая поверхностно-активное вещество (альвеолярный сурфактант), способствует адсорбции ингалируемых лекарств; наличие густой сети лимфатических путей, имеющих сложные петли, лакулы и слепые концы, создает условия для задержки поступления лекарственного вещества в кровь.

Получает все большее распространение создание аэрозолей посредством ультразвука. При воздействии интенсивным ультразвуком воздух, проходящий через жидкость, создает поток и превращает жидкость в туман. Используют ультразвуковые излучатели с такой фокусировкой, которая позволяет концентрировать всю энергию в одной точке. Такой механический эффект появляется при частоте колебаний 1,5 – 3 МГц. При этом возникает переменное давление до 80 ат и больше. Появление такого давления на ключе и соответственно противодействия разрывает жидкость на частицы размером 0,5 – 5 мкм. Плотность ультразвукового аэрозоля значительно выше плотности простых аэрозолей. Вместе с жидкостью распыляются растворенные или суспензированные частицы. Действие ультразвука на лекарственные вещества обычно не изменяет их лечебных свойств.

Существуют ультразвуковые ингаляторы, в которых образование аэрозоля лекарственного препарата осуществляется в результате высокочастотной вибрации пьезокерамической пластины. Они позволяют получать аэрозоли на основе водных и спиртовых растворов лекарственных препаратов. Большая часть образующихся в них частиц имеет размеры от 2 до 5 мкм. С помощью этих устройств можно распылять большие объёмы жидкости (20 – 30 мл за 20 – 25 мин), что требуется при проведении диагностических исследований (в частно-

сти для получения индуцированной мокроты). Однако неэкономично использовать в таких ультразвуковых ингаляторах дорогостоящие лекарственные препараты из-за их большого расхода, возникающего вследствие потерь препарата.

Для устранения указанных недостатков был разработан новый способ ингаляции лекарственного препарата, суть которого заключается в следующем.

Ингалятор содержит сообщенный с внутренней полостью баллончика *1* объем *3* с гофрой *10* и отверстием *4* для удаления из него взаимодействующей с игольчатым электродом *2* дисперсной системы *7* струей, элементы которой закручены в плоскости, проходящей через геометрическую ось *6*, и могут иметь вид кольца (тора) *5*. В объеме установлен ультразвуковой излучатель *8* для распыления помещенной на нем дисперсной фазы *9* (рис. 9.2).

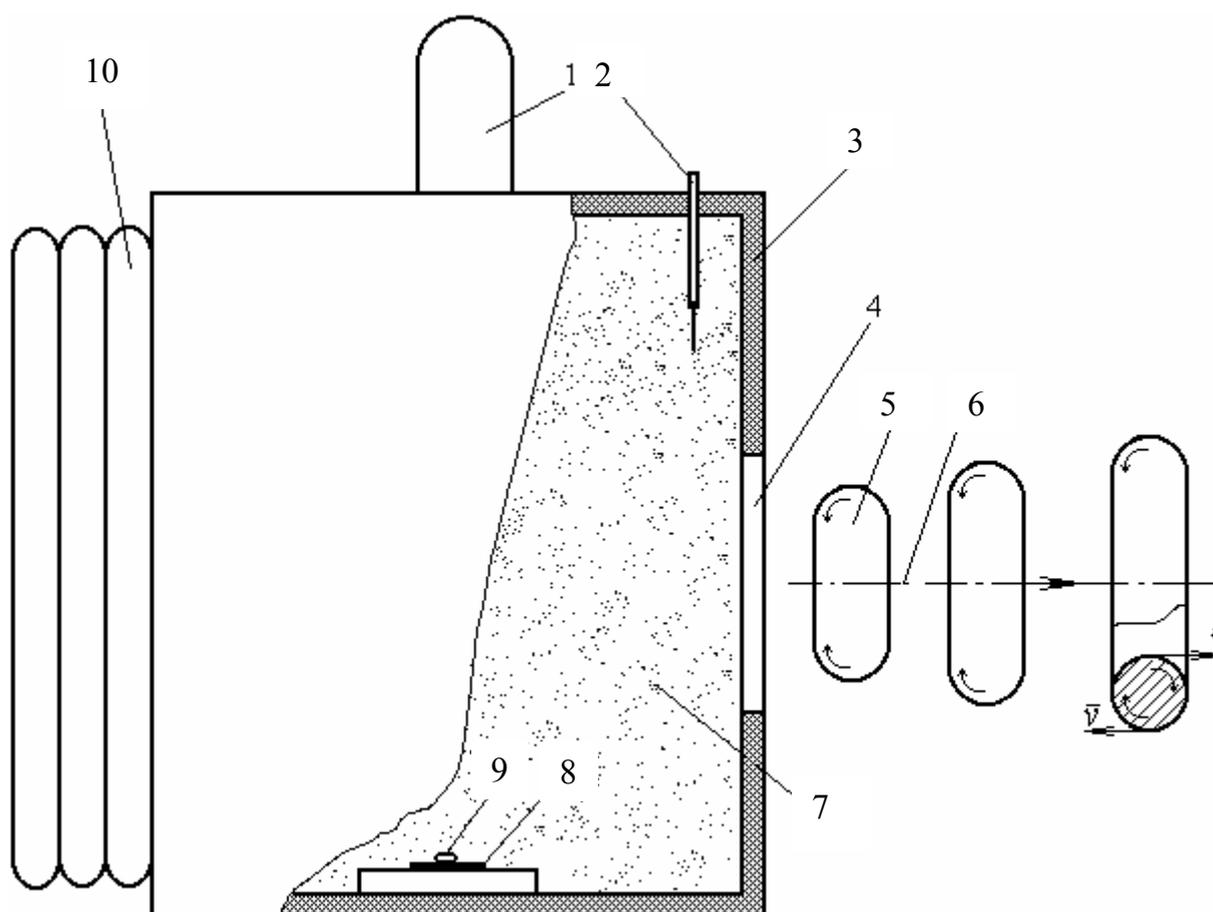


Рис. 9.2. Схема ингалятора

На ультразвуковой излучатель помещают дисперсную фазу (лекарственный препарат), которую при необходимости дозируют. Включают излучатель, в результате чего дисперсная фаза превращается в туман, создавая в объеме дисперсную систему. Затем изменяют с инфранизкой частотой величину объема гофрой и удаляют дисперсную систему через отверстие струей, элементы которой закручивают в плоскости, проходящей через геометрическую ось струи. При этом вектор скорости \bar{v} элемента струи, находящегося в ближней к оси точке сечения, совпадает с направлением движения струи, а вектор скорости элемента струи, находящегося в дальней от оси точке сечения, ориентирован против ее направления движения. Таким образом, из ингалятора (объема 3) вылетают кольца, содержащие лекарственный препарат.

Кольца дают возможность уменьшить приток аэрозоля при сохранении дальнобойности струи, т.е. обеспечить доставку его малого количества в зону 1 всасывания, в которой пациент 2 осуществляет прием лекарственного препарата посредством вдоха (рис. 9.3).

Получаемые кольца по мере движения увеличиваются в размерах и в конце концов распадаются, создавая перед лицом пациента зону с искусственным микроклиматом или лекарственным препаратом. При этом человек может принимать процедуру в удобной для себя позе, при необходимости периодически меняя ее, что совместно с бесшумной работой устройства создает психоэмоциональный комфорт.

Регулирование количества поставляемого в зону 1 аэрозоля производят путем изменения частоты следования колец, что способствует, во-первых, снижению скорости движения аэрозоля (в паузах между импульсами) практически до нуля и оказывает благоприятное воздействие на кожу; во-вторых, улучшает беспрепятственный выдох пациентом воздуха и понижает шум, связанный с подачей дисперсной системы.

Кроме того, происходит экономия лечебного препарата, поскольку дыхание пациента также осуществляется периодически с различной частотой. Если бы препарат подавался непрерывно без респиратора, то большая его часть не успевала бы расходоваться пациентом.

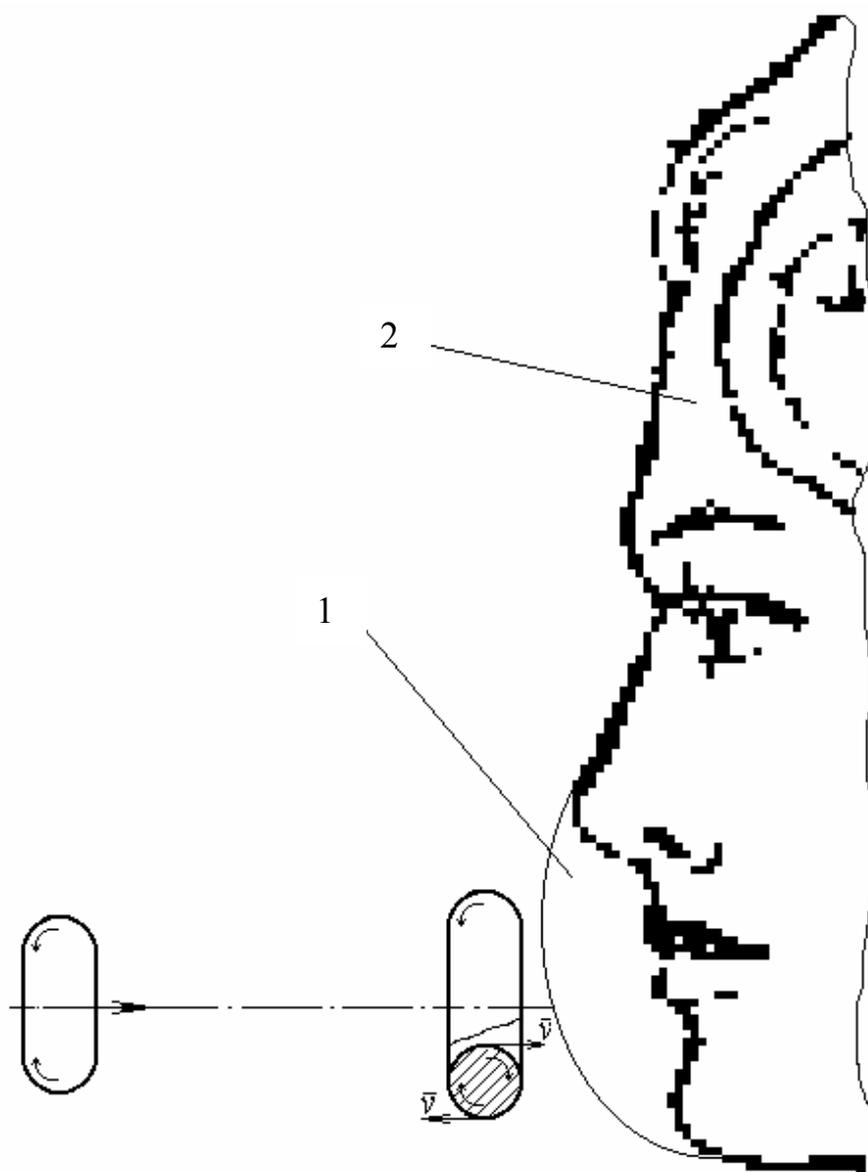


Рис. 9.3. Схема введения лекарственного препарата

При проведении процедуры в респираторе ухудшались бы качественные показатели препарата, поскольку аэрозольная система неустойчива и со временем меняет свое состояние. В аэрозолях нет тех сил, как в коллоидных растворах, которые бы препятствовали сцеплению частиц между собой. Разрушение частиц осуществляется путем оседания под действием силы тяжести, коагуляции, диффузии к стенкам сосуда, испарения. В газообразной среде частицы аэрозоля постоянно находятся в броуновском движении. Скорость диффузии частиц значительно больше, чем в жидкой среде, поскольку вязкость газа меньше вязкости жидкости.

Дисперсную среду можно создать из смеси воздуха и газа путем подачи, например, небольшими порциями углекислого газа из баллончика и при необходимости ионизировать, подавая на игольчатый электрод высокое напряжение (см. рис. 9.2).

Проектируя ингалятор, необходимо рассчитывать параметры, позволяющие выполнить конструкцию таким образом, чтобы кольца с лекарственным препаратом доставлялись на требуемое расстояние до пациента. Очевидно, что получить эти данные можно только путем решения научной задачи, к постановке которой мы переходим.

Постановка задачи. Пусть в сечении 0-0 сформировано аэрозольное кольцо, имеющее скорость u_0 , к которому подсасывается окружающий воздух со скоростью v_0 (рис. 9.4). В процессе движения кольцо смешивается с воздухом (растворяется в нем), образуя смесь. Требуется найти зависимость между давлением p в сечении x - x и начальным давлением p_0 в сечении 0-0, а также определить расстояние, на котором произойдет смешение аэрозольного кольца с воздухом до заданного значения порозности (объем среды, окружающей аэрозоль, на единицу объема пространства в данном сечении).

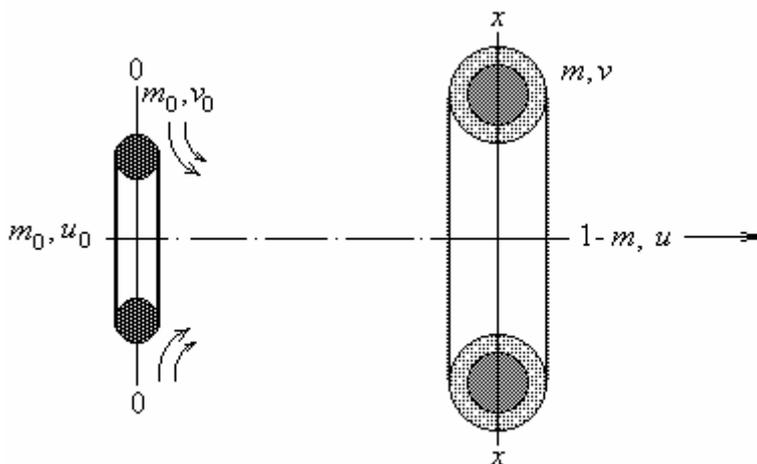


Рис. 9.4. Схема движения кольца с аэрозолем

Определение параметров потока. Смешение аэрозоля с воздухом происходит в процессе его движения, при этом аэрозоль проникает в окружающий его объем перемешанной смеси путем молекулярной диффузии и турбулентных пульсаций. Скорость этого смешения (проникновения) зависит от величины поверхности S соприкоснове-

ния объемов неперемешанного аэрозоля и окружающей его смеси, от разности концентраций в указанных объемах и смеси, а также от интенсивности массообмена.

Исходя из закона сохранения массы запишем

$$\rho_a u_0 (1 - m_0) + \rho_b v_0 m_0 = \rho_{см} v m + \rho_a u (1 - m); \quad (9.1)$$

$$\rho_a u_0 (1 - m_0) = \rho_a u (1 - m) + c_a v m, \quad (9.2)$$

где $\rho_a, \rho_b, \rho_{см}$ – плотность соответственно аэрозоля, воздуха и смеси, кг/м³; u, v – средние скорости движения аэрозоля и смеси в данном сечении (нулевой индекс соответствует исходному сечению, в котором происходит формирование аэрозольного кольца, еще не перемешанного с воздухом), м/с; m_0 и m – порозность в исходном и данном сечениях; c_a – концентрация аэрозоля в смеси, кг/м³.

Скорость смешения в бесконечно малом объеме выражается формулой

$$-\frac{d(c_a v m)}{dx} = S q, \quad (9.3)$$

где S – величина поверхности объемов неперемешанного аэрозоля и окружающей его смеси, зависит от порозности и среднего радиуса r объема неперемешанного аэрозоля в данном сечении, $\frac{1}{m}$; q – интенсивность массообмена, кг/м²·с. Знак минус указывает, что градиент концентрации отрицательный.

Величина поверхности может быть выражена формулой [8]

$$S = \frac{3(1 - m)}{r}. \quad (9.4)$$

Интенсивность q можно учесть через суммарный коэффициент массообмена β :

$$q = \frac{\beta}{1 + \frac{\beta \delta}{D}} (\rho_a - c_a), \quad (9.5)$$

где δ – толщина слоя на границе неперемешанного аэрозоля, через который он проникает в смесь путем молекулярной диффузии и турбулентных пульсаций, м; D – коэффициент молекулярной диффузии, м²/с. Полагая, что молекулярная диффузия действует во всем объеме неперемешанного аэрозоля, примем $\delta \approx r/3$.

Из уравнения состояния газовой среды для сечения на расстоянии x можно записать

$$p = \rho_x R_x T_x, \quad (9.6)$$

где ρ_x , R_x , T_x – соответственно средняя плотность (кг/м³), средняя газовая постоянная (Дж/кг·К) и средняя температура (К) для аэрозоля и смеси.

Средняя плотность ρ_x выражается формулой

$$\rho_x = \frac{\rho_a u(1-m) + \rho_{cm} vm}{u(1-m) + vm}. \quad (9.7)$$

Плотность смеси может быть найдена через концентрации аэрозоля c_a и воздуха c_b в смеси:

$$\rho_{cm} = c_a + c_b. \quad (9.8)$$

Из соотношения $\frac{c_a}{\rho_a} + \frac{c_b}{\rho_b} = 1$ получим

$$c_b = \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \rho_b. \quad (9.9)$$

Подставляя выражение (9.9) в уравнение (9.8), получим

$$\rho_{cm} = c_a + \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \rho_b. \quad (9.10)$$

Средняя газовая постоянная

$$R_x = \frac{\rho_{cm} R_{cm} vm + \rho_a R_a u(1-m)}{\rho_{cm} vm + \rho_a u(1-m)}. \quad (9.11)$$

Газовая постоянная смеси определяется концентрациями аэрозоля и воздуха в смеси и их газовыми постоянными. Поэтому

$$R_{\text{см}} = \frac{c_a}{\rho_{\text{см}}} R_a + \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \frac{\rho_b}{\rho_{\text{см}}} R_b. \quad (9.12)$$

Соотношение давлений в начальном сечении и на расстоянии x от него с учетом выражений (9.7) и (9.11) имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\rho_0 R_0} \cdot \frac{T_x}{T_0} \cdot \frac{\rho_{\text{см}} R_{\text{см}} \nu m + \rho_a R_a u (1-m)}{u(1-m) + \nu m}. \quad (9.13)$$

Если принять $T_x \approx T_0$ и учесть, что в конце смешения $m \rightarrow 1$, то для завершающей стадии процесса смешения уравнение (9.13) примет вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho_{\text{см}} R_{\text{см}}}{\rho_0 R_0}. \quad (9.14)$$

При движении кольца его скорость изменяется незначительно. Если принять скорости движения воздуха и кольца одинаковыми ($\nu = u$) и постоянными, то уравнения (9.2) и (9.3) примут вид

$$\rho_a (1 - m_0) = \rho_a (1 - m) + c_a m, \quad (9.15)$$

$$\frac{ud(c_a m)}{dx} = Sq. \quad (9.16)$$

Из уравнения (9.15) имеем

$$c_a = \rho_a \left(1 - \frac{m_0}{m}\right). \quad (9.17)$$

Подставляя выражения (9.4), (9.5), (9.17) в уравнение (9.16) и разделяя переменные, получим

$$\frac{m}{1-m} dm = \frac{3}{r} \cdot \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\beta r}{3D}\right)^u} m_0 dx. \quad (9.18)$$

Проинтегрируем левую часть выражения (9.18):

$$\int \frac{m}{1-m} dm = -m - \ln(1-m) + C. \quad (9.19)$$

Вычислив постоянную интегрирования $C = 1 + \ln(1-m_0)$, получим

$$\ln \frac{1-m_0}{1-m} + 1-m = \frac{3}{r} \cdot \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\beta r}{3D}\right)^u} m_0 x. \quad (9.20)$$

Средний радиус r объема неперемешанного аэрозоля может быть найден следующим образом.

Известно выражение

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha_m} + \frac{\delta}{D}, \quad (9.21)$$

где величина $1/\alpha_m$ представляет собой «сопротивление» турбулентного переноса, а величина δ/D – «сопротивление» молекулярной диффузии. Так как величина $\alpha_m \gg D/\delta$, то из выражения (9.21) следует, что

$$\beta \cong \frac{D}{\delta}. \quad (9.22)$$

Из выражения (9.22), учитывая, что $\delta \approx r/3$, находим r :

$$r = \frac{3D}{\beta}. \quad (9.23)$$

На рис. 9.5 показана зависимость $m = f(x)$, определяемая уравнением (9.20). Поскольку в кольце содержится H_2O , то значение коэф-

коэффициента молекулярной диффузии для аэрозоля приравнено к соответствующему коэффициенту диффузии H_2O в воздухе, $D = 0,21 \text{ см}^2/\text{с}$.

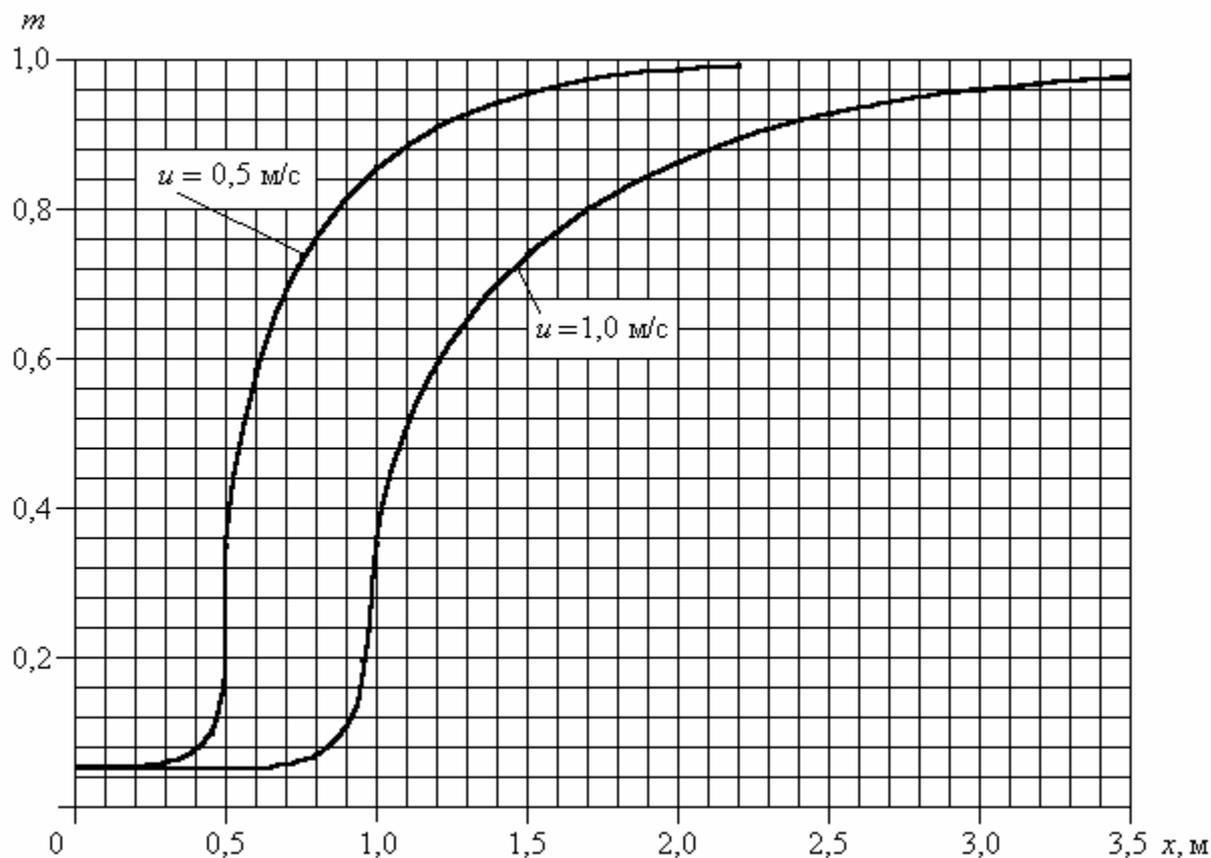


Рис. 9.5. Зависимость $m = f(x)$ для аэрозольного кольца

Графики показывают, что с возрастанием скорости движения кольца увеличиваются расстояние x_{\min} начала смешения аэрозоля с воздухом и продолжительность зоны смешения. Величину x_{\min} можно определить из уравнения (9.20), полагая $m = m_0$:

$$x_{\min} = \frac{2(1 - m_0)r^2u}{9Dm_0}. \quad (9.24)$$

Из уравнения (9.20) и графика видно, что полное смешение теоретически наступает при $x \rightarrow \infty$. Однако практически полное смешение наступает при $m = 0,99$. Расстояние $x_{0,99}$, при котором наступает практически полное смешение, может быть также определено из уравнения (9.20) или по упрощенной, приближенной формуле

$$x_{0,99} \approx \frac{r^2 u}{Dm_0}. \quad (9.25)$$

Тогда зона смешения, на протяжении которой происходит растворение кольца, может быть найдена из уравнений (9.24) и (9.25):

$$x_3 \approx \frac{r^2 u}{Dm_0} \left(1 - \frac{2(1-m_0)}{9} \right). \quad (9.26)$$

Таким образом, варьируя скорость движения кольца, можно изменять протяженность зоны смешения и ее положение относительно пациента.

Для построения математической модели ингалятора потребовался достаточно сложный анализ физических явлений, возникающих при работе этого устройства и описанных с использованием математического аппарата. В каждом конкретном случае необходимо уметь выбирать из многочисленных методов и приемов математики те, которые нужны для решения данной научной задачи и позволяют описать протекающие реальные физические процессы. В некоторых случаях для построения модели требуется проведение статистических исследований, на основании которых предварительно можно определить возможные законы распределения случайной величины. Полученные таким образом данные используются затем для построения математической модели описываемого процесса.

9.2. Построение аналитической модели с использованием статистических данных

Рассмотрим решение задачи, связанной с проблемой сортировки грузовых железнодорожных вагонов. Суть процесса формирования грузовых железнодорожных составов (сортировки вагонов) заключается в доставке вагона в сортировочный парк к накопленным вагонам того же назначения (пункта следования) на малой скорости, чтобы не ударить их, не повредить, т.е. не причинить ущерб им и грузу. Поскольку движение вагона происходит за счет сообщения ему потен-

циальной энергии, то для доставки его в нужное место в сортировочном парке необходимо правильно рассчитать величину сообщаемой вагону энергии (энергетическую высоту), а также момент времени, в который эту энергию ему следует сообщить. Это связано с тем, что движение вагонов происходит непрерывно, один за другим, а скорости у них (в силу разного груза, трения в подшипниках и т.п.) различны, поэтому чтобы предотвратить их соударение в процессе движения, необходимо соотносить момент сообщения последующему вагону потенциальной энергии с временем движения предыдущего вагона по объединенным участкам их маршрутов. В силу непредсказуемости различных факторов указанное время – случайная величина, законы распределения которой предварительно устанавливаются по результатам статистических исследований. Указанные исследования следует проводить на каждом участке, отделяемом от предыдущего стрелочным переводом. При этом следует иметь в виду, что минимальная выборка обследования участка должна обеспечивать устойчивые значения исследуемых явлений.

Постановка задачи. Пусть в сортировочном парке имеется множество M маршрутов, по которым при спуске с сортировочной горки в процессе формирования грузовых составов движутся вагоны (рис. 9.6). При этом каждый маршрут получают посредством установки стрелочных переводов A, B, C, D в определенное положение, в результате чего вагон попадает в один из тупиков E, G, H, F, I . Будем полагать, что маршруты движения k -го и $(k+1)$ -го грузовых вагонов пролегают соответственно через вершины O, P, R, A, B, C, D, E и O, P, R, A, B, C, D, F графа железнодорожного пути. Указанные маршруты имеют общий отрезок O, P, R, A, B, C, D пути, причем на дуге $P-R$ графа описанным ниже способом определяется масса вагона и сообщается ему потенциальная энергия, необходимая для последующего перемещения его накатом в заданную точку маршрута.

Требуется определить моменты времени начала движения грузового вагона из вершины O сортировочной горки и сообщения ему потенциальной энергии, при которых вероятность того, что в конце общего участка маршрута последующий вагон догонит предыдущий (в результате чего перемещение стрелочного перевода окажется невозможным), не превышала бы заранее заданного значения $P_{рд}$, если на

момент начала движения масса вагона и сопротивление его качению неизвестны.

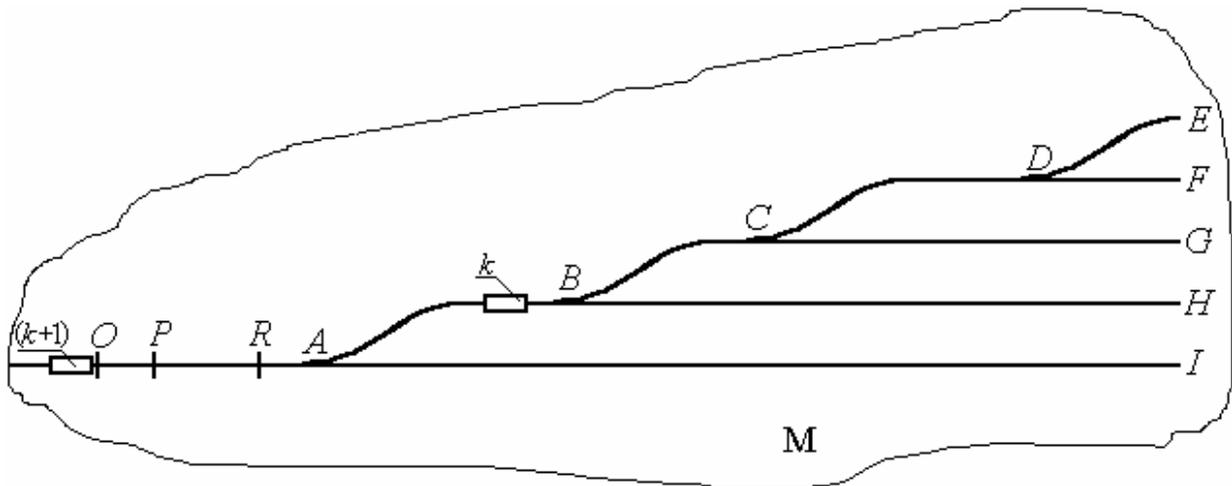


Рис. 9.6. Множество маршрутов движения вагона в сортировочном парке

Определение времени прохождения вагоном маршрута. Для оперативного управления процессом формирования грузовых составов необходимо знать скорость движения вагона на участках маршрута его движения, обозначенных последовательно соединенными дугами графа железнодорожного пути. Значение этой скорости может быть найдено через время прохождения грузовым вагоном данного участка, которое в силу непредсказуемости различных факторов (массы вагона, вязкости масла в буксах и т.д.) является случайной величиной, определяемой статистикой экспериментальных данных.

Проведенные статистические исследования участков маршрутов показали, что разброс времени движения по ним различных вагонов можно описать различными законами, относящимися к широкому классу экспоненциальных распределений. Это позволяет принять для описания этих распределений единую аналитическую модель, обобщающую их. Указанный класс экспоненциальных распределений можно представить известным аналитическим выражением [11]

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)} \exp\left(-\left|\frac{x-\bar{t}}{\lambda\sigma}\right|^\alpha\right), \quad (9.27)$$

где $p(x)$ – кривая плотности распределения вероятностей; α – показатель степени распределения; $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$; σ – среднее квадратическое отклонение; $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция; \bar{t} – среднее время прохождения участка пути (математическое ожидание).

Приняв $\alpha/2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha) = A(\alpha)$, а при центрированном распределении $\bar{t} = 0$, получим

$$p(x) = A(\alpha) \exp\left(-\left|\frac{x}{\lambda\sigma}\right|^\alpha\right). \quad (9.28)$$

Такая модель при изменении показателя степени α от 0 до ∞ последовательно описывает все распределения с эксцессом 1,8 ($\alpha = \infty$) до распределений с бесконечно большим эксцессом ($\alpha \rightarrow 0$). При $\alpha < 1$ эта модель характеризует распределения с очень пологими спадами, близкие по своим свойствам к распределению Коши. При $\alpha = 1$ модель соответствует распределению Лапласа, при $\alpha = 2$ – нормальному распределению Гаусса, при $\alpha > 2$ она описывает распределения, близкие по свойствам к трапецеидальным, при $\alpha \rightarrow \infty$ – соответствует равномерному распределению.

Центральный момент k -го порядка для непрерывной случайной величины определяется формулой

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{t})^k p(x) dx. \quad (9.29)$$

При этом первый начальный момент называется математическим ожиданием, второй центральный момент – дисперсией случайной величины, квадратный корень из которой носит название среднего квадратического отклонения. Для центрированного распределения выражение (9.29) приобретает вид

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx. \quad (9.30)$$

Подставив в уравнение (9.30) значение функции $p(x)$ из выражения (9.28), получим

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k A(\alpha) e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma}\right|^\alpha} dx = 2A(\alpha) \int_0^{\infty} x^k e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma}\right|^\alpha} dx. \quad (9.31)$$

Введя в уравнение (9.31) $u = |x/\lambda\sigma|^\alpha$, $du = \frac{\alpha}{\lambda\sigma} u^{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)} dx$, имеем

$$\mu_k = \frac{2A(\alpha)}{\alpha} (\lambda\sigma)^{k+1} \int_0^\infty u^{\frac{k-\alpha+1}{\alpha}} e^{-u} du. \quad (9.32)$$

Заменив $\frac{k-\alpha+1}{\alpha}$ на $z-1$ в подынтегральном выражении, получим уравнение

$$\mu_k = \frac{2A(\alpha)}{\alpha} (\lambda\sigma)^{k+1} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du, \quad (9.33)$$

в котором подынтегральная функция представляет собой эйлеров интеграл второго рода, являющийся представлением гамма-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du. \quad (9.34)$$

Заменяя значение z гамма-функции на k , получим окончательное выражение для центрального момента k -го порядка

$$\mu_k = \frac{2A(\alpha)}{\alpha} (\lambda\sigma)^{k+1} \Gamma[(k+1)/\sigma]. \quad (9.35)$$

Эксцесс распределения случайной величины определяется отношением четвертого центрального момента к средней квадратической оценке, возведенной в четвертую степень:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\frac{2A(\alpha)}{\alpha} (\lambda\sigma)^5 \Gamma(5/\alpha)}{\left[\frac{2A(\alpha)}{\alpha} (\lambda\sigma)^3 \right]^2 [\Gamma(3/\alpha)]^2}, \quad (9.36)$$

где μ_4 и μ_2 – соответственно четвертый и второй моменты распределения. Подставляя в уравнение (9.36) значение $A(\alpha)$, получим

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(5/\alpha)}{[\Gamma(3/\alpha)]^2}. \quad (9.37)$$

Таким образом, показатель степени распределения однозначно определяет значение эксцесса.

Для вычисления времени прохождения вагоном общего отрезка маршрута (всего или его части) необходимо суммировать математические ожидания всех входящих в него участков.

Среднее квадратическое отклонение этого времени получают последовательным геометрическим суммированием средних квадратических отклонений времени на каждом указанном участке.

Далее находят эксцесс распределения, который, как известно, для суммы двух независимых случайных величин определяют по формуле

$$\varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_1 p^{*2} + 6p^* (1 - p^*) + \varepsilon_2 (1 - p^*)^2, \quad (9.38)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – эксцессы первого и второго распределений; $p^* = \sigma_1^2 / [\sigma_1^2 + \sigma_2^2]$ – вес дисперсии первого распределения в общей дисперсии.

Зная σ_1, ε_1 и σ_2, ε_2 , находят вес дисперсии одной из составляющих и по выражению (9.38) определяют эксцесс суммы двух величин. К указанной сумме добавляют ε_3 третьего участка маршрута и так далее. Последняя сумма даст значение эксцесса, по которому вычисляют показатель степени α , однозначно определяющий параметры формы распределения.

Для экспоненциальных распределений зависимость эксцесса от показателя степени α выражается соотношением (9.37), однако обратного решения этого уравнения в элементарных функциях не существует. В работе [13] дано приближенное выражение для нахождения α :

$$\alpha = 1,466 / \left[\ln \left(\varepsilon_{\Sigma} - \frac{2}{9} - \frac{11,6}{\varepsilon_{\Sigma}^7} \right) - 0,289 \right]. \quad (9.39)$$

Следует заметить, что указанные законы распределения должны быть найдены для различных значений массы вагона и сопротивления его качению.

Схема сортировочной горки показана на рис. 9.7. Она состоит из двух пассивных частей 1 и 2 и активной части, представляющей собой ферму 3, один конец которой закреплен шарнирно, а другой – связан с электродвигателем 4 через подъемный механизм 5.

При прохождении вагоном 6 под действием силы собственного веса пассивной части OP определяют время его движения до точки P и величину скорости в этой точке. Указанные параметры используют затем для нахождения сопротивления движению вагона, т. е. наката. В момент наезда вагона на ферму (точка P) включается электродвигатель, с помощью которого подъемный механизм производит подъем фермы вместе с вагоном. При этом измеряют момент на валу электродвигателя при двух фиксированных значениях угла подъема.

По результатам измерений вычисляют массу вагона, а также требуемую энергетическую высоту (угол подъема) вагона, на которую он поднимается в некоторый расчетный момент времени.

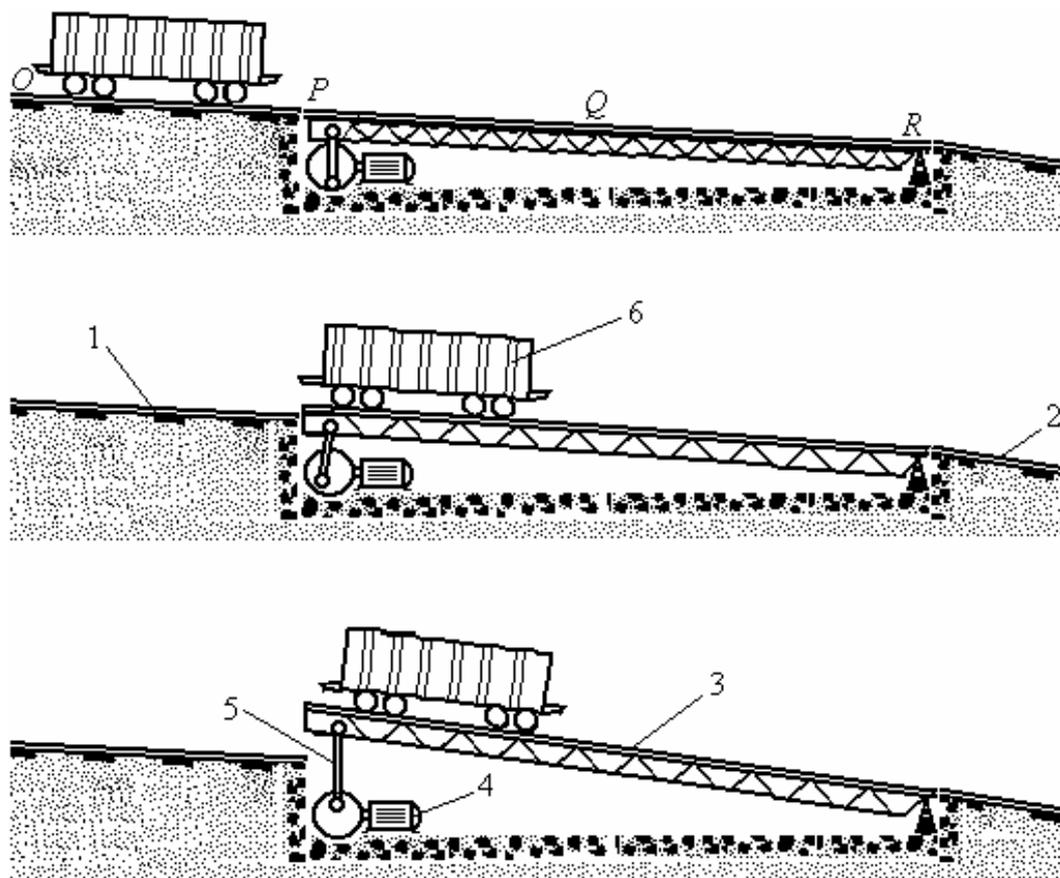


Рис. 9.7. Схема сортировочной горки

В соответствии с найденными параметрами выбирают закон распределения времени движения вагона с сортировочной горки, т. е. график спуска.

Определение моментов времени начала движения грузового вагона с сортировочной горки и сообщения ему потенциальной энергии. Пусть в некоторый момент времени t_1 из точки O по небольшому уклону рабочего участка сортировочной горки начал движение k -й грузовой вагон (рис. 9.8).

Получим в точке P необходимые параметры и выберем по ним соответствующий график спуска. Вагон должен прибыть в точку D общего отрезка маршрута в момент времени t_k , который является слу-

чайной величиной, определяемой функцией плотности распределения $p_1(x)$ рис. 9.9.

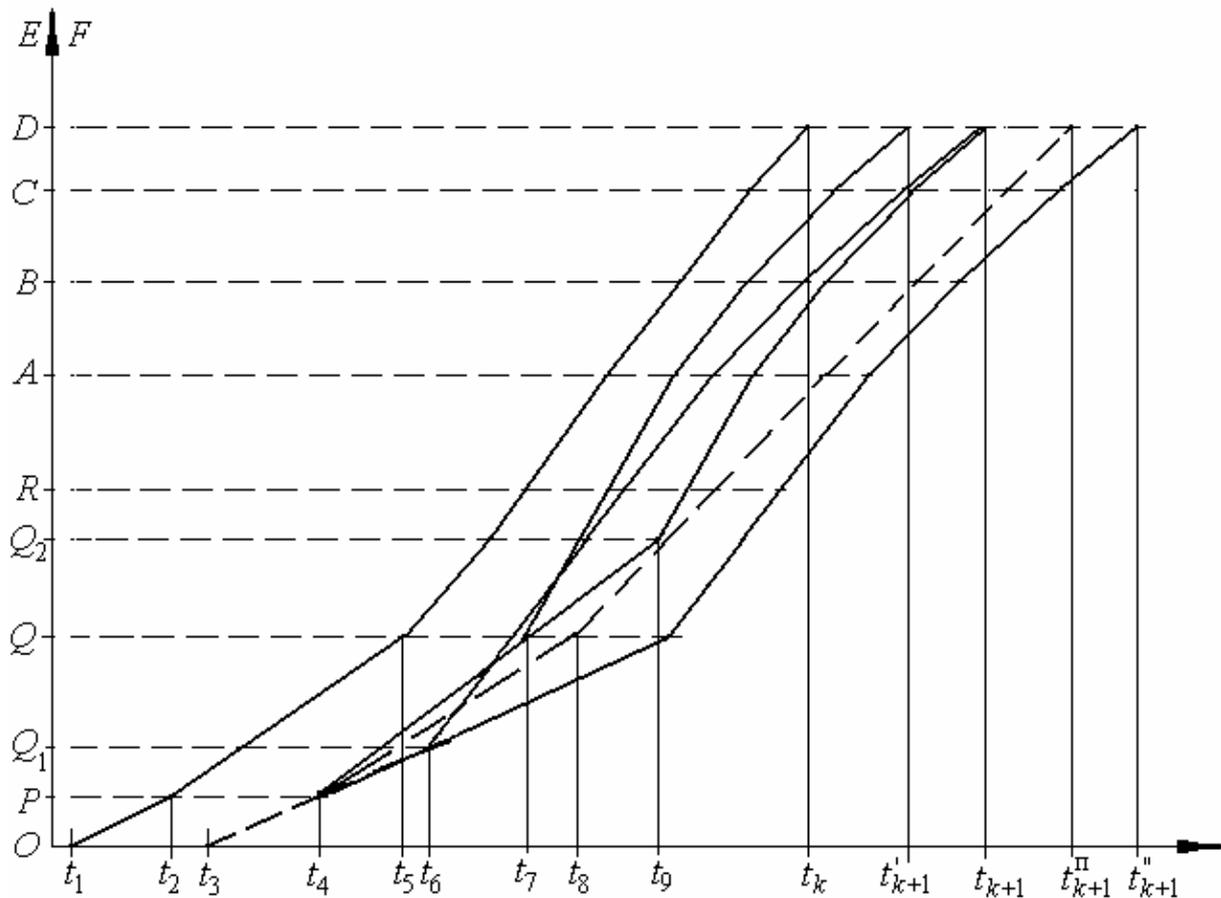


Рис. 9.8. К определению моментов времени начала движения вагона и сообщения ему потенциальной энергии

На момент начала движения последующего вагона параметры, по которым выбирают его график спуска, неизвестны. Для определения момента времени t_3 начала движения $(k+1)$ -го вагона необходимо спланировать такой график спуска, при котором (в случае более быстрого перемещения по сравнению с k -м вагоном) момент его прибытия в точку D должен быть больше t_k на величину, позволяющую осуществить перемещение стрелочного перевода из одного положения в другое. В противном случае стрелочный перевод не сможет быть смещен в нужное положение и последующий вагон будет заслан по маршруту предыдущего, т. е. не по назначению. Указанный график планируют путем построения (начиная с наименьшего) вариационного ряда из математических ожиданий времени прибытия вагонов в точку D

по тем графикам спуска, значения которых меньше, чем по графику k -го вагона (при этом величина разброса этих значений должна быть соизмерима с временем движения вагона по активной части фермы), и последующего нахождения их среднего арифметического. Получив график спуска $(k+1)$ -го вагона и момент t_{k+1}^n его прибытия в точку D , назначают момент времени t_3 начала движения этого вагона. При достижении момента времени t_3 $(k+1)$ -й вагон начинает движение по пассивной части OP сортировочной горки. При этом так же, как и для k -го вагона, определяют время его движения до точки P и скорость в этой точке, а потом, в момент времени t_4 , вычисляют массу этого вагона и высоту, на которую он должен быть поднят. Определив данные параметры, уточняют график спуска $(k+1)$ -го вагона, предполагая при этом, что сообщение ему энергетической высоты производится в точке Q (на середине участка OP), а функция $p_2(x)$ плотности распределения моментов прибытия его в точку D имеет вид, показанный на рис. 9.9.

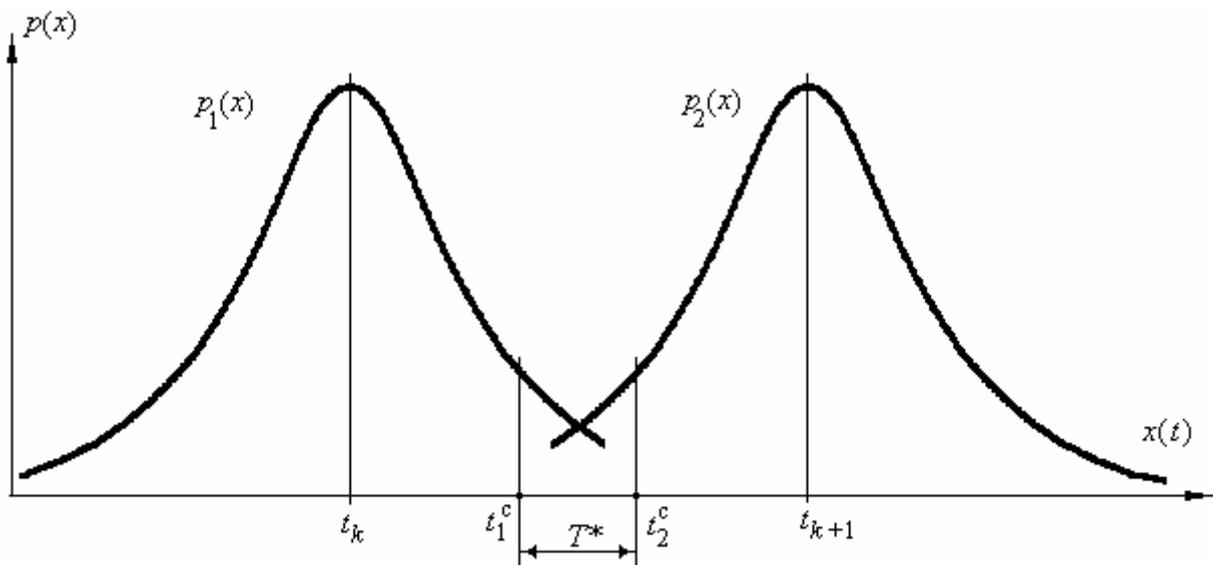


Рис. 9.9. К определению моментов прибытия вагонов в заданную точку общего участка маршрута

Если момент прибытия k -го вагона в точку D будет больше времени t_1^c (первое событие) и $(k+1)$ -й вагон прибудет раньше времени t_2^c (второе событие), то управление стрелочным переводом (время перемещения которого из одного положения в другое равно T^*) будет невозможно. В связи с тем, что моменты прибытия вагонов в точку D —

независимые события, ситуация, при которой исключается возможность управления стрелочным переводом, определяется произведением вероятностей наступления первого и второго событий:

$$P_p = P_1(x) P_2(x), \quad (9.40)$$

где P_p – вероятность риска.

Обозначим через

$$x = t_1^c - t_k = t_{k+1} - t_2^c \quad (9.41)$$

допускаемое отклонение моментов прибытия транспортных единиц, тогда с учетом выражения (9.28) вероятности первого и второго событий соответственно имеют вид

$$P_1(x) = 0,5 - A(\alpha_1) \int_0^x \exp\left(-\left|\frac{x}{\lambda_1 \sigma_{\Sigma 1}}\right|^{\alpha_1}\right) dx, \quad (9.42)$$

$$P_2(x) = 0,5 - A(\alpha_2) \int_0^x \exp\left(-\left|\frac{x}{\lambda_2 \sigma_{\Sigma 2}}\right|^{\alpha_2}\right) dx. \quad (9.43)$$

Обозначим

$$P^*(x) = A(\alpha) \int_0^x \exp\left(-\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}\right) dx \quad (9.44)$$

и введем новую переменную $t^2 = x$ ($dt = dx/2t$), которую подставим в уравнение (9.44):

$$P^*(x) = A(\alpha) \int_0^{t^2} 2te^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}}} dt. \quad (9.45)$$

Проведем интегрирование полученного выражения по частям, приняв $u = e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}}}$, $dv = 2tdt$, при этом $v = t^2$, $du = -e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}}} \frac{2\alpha |t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}} dt$.

Выполнив подстановку в (9.45), получим

$$P^*(x) = A(\alpha) \left(e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}}} t^2 + \int_0^{t^2} t^2 e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}}} \frac{2\alpha |t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}} dt \right). \quad (9.46)$$

Введем новую переменную $y = |t|^{2\alpha}/|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}$, тогда

$$|t|^2 = y^{\frac{1}{\alpha}} |\lambda \sigma_{\Sigma}|, \quad dy = \frac{2\alpha |t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda \sigma_{\Sigma}|^{\alpha}} dt.$$

Уравнение (9.45) преобразуется к виду

$$P^*(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left(y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right), \quad (9.47)$$

которое можно переписать в виде

$$P^*(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left[y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right) \right], \quad (9.48)$$

где $\Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right)$ – гамма-функция, а $\frac{1}{\Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy$ – неполная гамма-

функция, которая согласно [9] может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{e^{-y} y^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}}{\Gamma\left(2 \frac{1}{\alpha}\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{\left(1 \frac{1}{\alpha} + 1\right) \dots \left(1 \frac{1}{\alpha} + k\right)} \right) \right]. \quad (9.49)$$

Подставляя в выражение (9.48) переменную x и учитывая соотношение (9.49), получим

$$P^*(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left\{ e^{-\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha} + \Gamma\left(1 \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha+1}}{\Gamma\left(2 \frac{1}{\alpha}\right)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha k}}{\left(1 \frac{1}{\alpha} + 1\right) \dots \left(1 \frac{1}{\alpha} + k\right)} \right) \right] \right\}. \quad (9.50)$$

Поскольку $\Gamma\left(2\frac{1}{\alpha}\right) = 1\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)$, а $A(\alpha) = \alpha / 2\lambda\sigma_{\Sigma}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, то

$$P^*(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \left[e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right| + \frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha+1}}{1\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{ak}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\dots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (9.51)$$

Выражение (9.51) приведем к виду

$$P^*(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right| \left[1 + \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}}{1\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{ak}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\dots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (9.52)$$

Подставляя в выражение (9.52) величины α_1 и α_2 для графиков спуска k -го и $(k+1)$ -го вагонов, получают соответственно значения вероятностей $P^*_1(x)$ и $P^*_2(x)$, которые используют затем в уравнениях (9.42) и (9.43). Тогда выражение (9.40) примет вид

$$P_p = [0,5 - P^*_1(x)] [0,5 - P^*_2(x)]. \quad (9.53)$$

Момент времени t_1^c прибытия k -го грузового вагона

$$t_1^c = t_k + \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_k - T^*). \quad (9.54)$$

Из уравнений (9.41) и (9.54)

$$x = \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_k - T^*). \quad (9.55)$$

Отсюда момент времени t_{k+1} прибытия $(k+1)$ -го вагона в точку D железнодорожного пути, обеспечивающий беспрепятственное перемещение стрелочного перевода, будет иметь значение

$$t_{k+1} \geq 2x + t_k + T^*. \quad (9.56)$$

Приняв за $P_{pд}$ допустимое значение вероятности риска нарушения режима управления стрелочным переводом и задав параметр x в выражении (9.51), находят величины $P^*_1(x)$ и $P^*_2(x)$, которые затем подставляют в формулу (9.53). Если полученная при этом величина не превосходит значения $P_{pд}$, то сделав подстановку параметра x в выражение (9.56), получают момент времени t_{k+1} прибытия $(k+1)$ -го вагона в точку D .

Если по уточненному графику спуска момент t'_{k+1} прибытия $(k+1)$ -го вагона в точку D окажется меньше момента t_{k+1} (см. рис. 9.8), то вероятность нарушения режима управления стрелочным переводом увеличится. Для предотвращения этого необходимо увеличить интервал между началом (момент t_3) его движения и подъемом на нужную высоту. С этой целью сообщение вагону энергетической высоты производят в момент времени t_9 , когда вагон достигнет точки Q_2 , двигаясь по ферме.

Если же по уточненному графику спуска момент t'_{k+1} , обозначающий прибытие $(k+1)$ -го вагона в точку D , окажется больше момента t_{k+1} (см. рис. 9.8), то вероятность нарушения режима управления стрелочным переводом уменьшится. Однако при этом увеличивается временной интервал между спуском предыдущего и последующего вагонов, в результате чего падает производительность формирования грузовых составов. В связи с этим уменьшение указанного значения вероятности по сравнению с величиной $P_{рД}$ следует считать нежелательным явлением. Для устранения последнего необходимо уменьшить интервал между началом (момент t_3) движения $(k+1)$ -го вагона и подъемом на нужную высоту, для чего следует поднять его в момент времени t_6 , когда вагон достигнет точки Q_1 , двигаясь по ферме. При этом, как и в первом случае, прибытие его в точку D будет соответствовать моменту t_{k+1} с заранее заданным значением вероятности нарушения режима управления стрелочным переводом.

Варьируя точку подъема грузового вагона на ферме, корректируют ожидаемый момент прибытия вагона в точку железнодорожного пути, в которой происходит разделение маршрутов движения предыдущего и последующего вагонов, последовательно скатывающихся с сортировочной горки.

Для математического описания решения данной задачи потребовалось проведение статистического анализа, который позволил определить законы распределения случайной величины. Данное математическое описание дает возможность оценить основные конструкции предложенного устройства и его составных частей, разработать алгоритмы различных программ для ЭВМ, которые позволят автоматизировать процесс формирования грузовых железнодорожных составов. Этот процесс – основной технологический процесс в работе

сортировочной станции, поэтому его автоматизация способствует значительному снижению стоимости грузовых перевозок. Таким образом, решение научной задачи вносит весомый вклад в экономику развития народного хозяйства.

9.3. Построение аналитической модели с использованием экспериментальных данных

Иногда решение научной задачи требует получения практических результатов, которые потом используются в математической модели.

Рассмотрим построение модели, необходимой для проектирования ионизатора воздуха.

Отрицательные и положительные ионы различно действуют на организм и окружающую среду. Отношение числа легких положительных ионов к числу легких отрицательных ионов называют коэффициентом униполярности [2] $q = n^+ / n^-$, где n^+ и n^- – соответственно количество легких положительных и отрицательных ионов.

Постановка задачи. При ионизации воздуха за 1 с образуется m положительных и столько же отрицательных легких ионов на один объем воздуха. Вследствие того, что положительные и отрицательные ионы соединяются между собой, количество их убывает.

Из общего количества n^+ положительных ионов каждую секунду исчезает часть их в количестве, пропорциональном $(n^+)^2$, поскольку соединение ионов в пары протекает как необратимая бимолекулярная реакция.

Необходимо определить изменение количества положительных ионов во времени.

Установление динамики процесса. Дифференциальное уравнение этого процесса будет иметь следующий вид:

$$\frac{d(n^+)}{dt} = m - a(n^+)^2, \quad (9.57)$$

где a – коэффициент, зависящий от параметров воздуха.

Решение этого уравнения отражает зависимость между количеством ионов n^+ и временем t . Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (9.57):

$$t = \int \frac{d(n^+)}{m - a(n^+)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(n^+)}{\frac{m}{a} - (n^+)^2}. \quad (9.58)$$

Обозначив $m/a = k^2$, получим табличный интеграл [6] вида

$$t = \frac{1}{a} \int \frac{d(n^+)}{k^2 - (n^+)^2}. \quad (9.59)$$

$$t = \frac{1}{2ak} \ln \frac{k + n^+}{k - n^+} + C. \quad (9.60)$$

При $t = 0$ $n = 0$, поэтому $C = 0$, следовательно,

$$\frac{k + n^+}{k - n^+} = e^{2akt}, \quad (9.61)$$

откуда

$$n^+ = k \frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1}. \quad (9.62)$$

Таким образом, мы получили математическую модель, для практической реализации которой необходимо провести эксперимент и найти значение коэффициента a . В помещениях с повышенными требованиями к чистоте, приточный воздух в которые приходит через фильтры тонкой очистки, оптимальным считается уровень ионизации, при котором число ионов в 1 см^3 воздуха в зоне дыхания составляет $n^+ = 5...6$ тыс., $n^- = 5...6$ тыс. (коэффициент униполярности – $0,8...1,2$). Предельно допустимые отклонения от оптимального уровня: $n^+ = 2,5...10$ тыс., $n^- = 2,5...10$ тыс. (коэффициент униполярности – $0,2... 0,5$). Для компенсации аэроионной недостаточности обычно применяют эффлювиальные аэроионизаторы закрытого типа, генерирующие ионы коронным разрядом. Для исключения деионизации воздуха при транспортировании его по воздуховодам аэроионизаторы устанавливают непосредственно в помещении или у приточных отверстий.

В заключение следует сказать, что эффективность математических методов способствует решению многих научных проблем и получению ценных результатов. Математический анализ процессов становится неотъемлемой частью современных методов проектирования и научного исследования.

Вопросы для самоконтроля

1. На чем основывается построение математической модели физического процесса?
2. Для чего необходимо проведение статистических исследований при построении некоторых математических моделей?
3. Для чего нужны экспериментальные данные при установлении некоторых математических зависимостей?

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

10.1. Феноменологические модели проблемной ситуации

Развитие кибернетики и ее математического аппарата предоставило проектировщикам, имеющим дело со сложными процессами управления, мощный инструмент математического анализа ситуаций и дало возможность проводить мыслительные эксперименты с объектами, природа которых не позволяет провести реальные эксперименты.

Совокупность новых подходов и способов решения задач планирования, организации и управления получила название «исследование операций». Это построение и разработка математических моделей целенаправленных процессов и выработка критериев качества их протекания с целью оптимизации этих процессов. Математические модели описывают процессы, происходящие в сложных системах, в форме количественных зависимостей условий и факторов, в том числе и трудноуловимых, таких как моральные и эмоциональные факторы. Может оказаться, что одно информационное состояние субъекта или охватывает целое множество его физических состояний, или является следствием положения связанного с ним множества физических объектов. При исследовании конкретного процесса определенную трудность представляет получение данных, необходимых для построения моделей. Часто эти параметры имеют не физический или технический характер, а социально-экономический или психологический, и их измерение – самостоятельная проблема. Эту трудность можно считать основным препятствием для построения модели.

С точки зрения точности феноменологические модели уступают физическим моделям, и процент ошибочных предсказаний у них больше. Однако научный подход, базирующийся на математическом моделировании, позволяет решить многие проблемы.

Построение математической модели включает в себя три этапа: подготовку исходных данных, разработку модели и ее проверку. Первые два этапа носят эвристический характер и являются наиболее сложными. Для их выполнения необходимо обладать определенными знаниями и опытом, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только эти этапы. Необходимость создания математических моделей порою диктуется изучением поведения объектов, которое предопределяет структуру и функции системы управления, т.е. формирует концептуальный базис управления.

Рассмотрим последовательность построения математических моделей, необходимых для формирования автоматической системы диспетчерского управления. При управлении ходом перевозочного процесса следует учитывать то обстоятельство, что отрицательные последствия, связанные с отклонениями от нормального протекания этого процесса, нельзя быстро устранить, поэтому необходимо проводить постоянное моделирование картины пассажирских перевозок, обеспечивающее прогнозирование результатов управления.

В первую очередь необходимо разработать математические модели, прогнозирующие поведение пассажирских корреспонденций (пассажиров) с учетом динамики формирования пассажиропотоков во времени и по направлениям транспортной сети города.

10.2. Модель прогнозирования выбора пассажиром маршрута поездки и отказа от нее

Присутствие человека, характеризующегося определенными потребностями и целями, побуждающими его совершать поездки на городском пассажирском транспорте, позволяет рассматривать перевозочный процесс как активную систему, элементами которой являются пассажиры, водители транспортных средств и работники городских служб [14].

Существующий механизм управления перевозочным процессом исчерпал свои возможности, поэтому назрела объективная необходимость в создании новых эффективных управленческих технологий, позволяющих поднять городские пассажирские перевозки на качественно новый уровень. Новая технология предполагает постоянное мо-

делирование состояния активной системы и его прогнозирование с учетом управляющих воздействий.

Идентификацию указанной активной системы следует начать с той ее части, поведение которой предопределяет ответные действия других частей, т. е. с построения стохастических моделей, прогнозирующих поведение пассажиров, совершающих поездки на городском пассажирском транспорте.

Поведение пассажира на остановочном пункте субъективное, однако оно зависит и от объективных обстоятельств, позволяющих выявить некоторые закономерности.

Придя на остановочный пункт, пассажир, как правило, имеет возможность выбора путей передвижения к пункту назначения. Он может воспользоваться множеством маршрутов 1-го выбора пути (которые являются для него более удобными для совершения поездки), 2-го выбора пути (менее удобные) или пойти пешком – 3-й выбор пути. Пассажир, ожидающий на остановочном пункте транспортное средство для осуществления посадки в него, выбирает пути следования в условиях риска, основываясь на анализе наблюдаемой с остановочного пункта картины перевозочного процесса, надеясь на свой опыт и интуицию. Способность человека прогнозировать состояние внешней среды – следствие обучения, которое с точки зрения психологии представляет собой процесс объединения ячеек памяти, хранящих условные рефлексы, в системы с определенной информационной структурой.

Пусть A , B , C – соответственно множества маршрутов 1, 2 и 3-го выбора пути, L – множество исходов поездки, включающее в себя следующие элементы: l , обозначающий исход поездки без опоздания, и \bar{l} , обозначающий исход поездки с опозданием. Получающиеся в результате возможного выбора связи между альтернативами и исходами изобразим в виде графа (рис. 10.1). Граф представляет собой дерево, на ветвях которого указаны вероятности, начиная от корня дерева (начальное состояние) и кончая конкретным исходом на его вершине.

Принятие решения в условиях риска будем характеризовать вероятной мерой, которую на графе связей альтернатив и исходов зададим путем указания вероятности каждого исхода, возможного при выборе данной альтернативы, которая, в свою очередь, выполняется с определенными значениями вероятности.

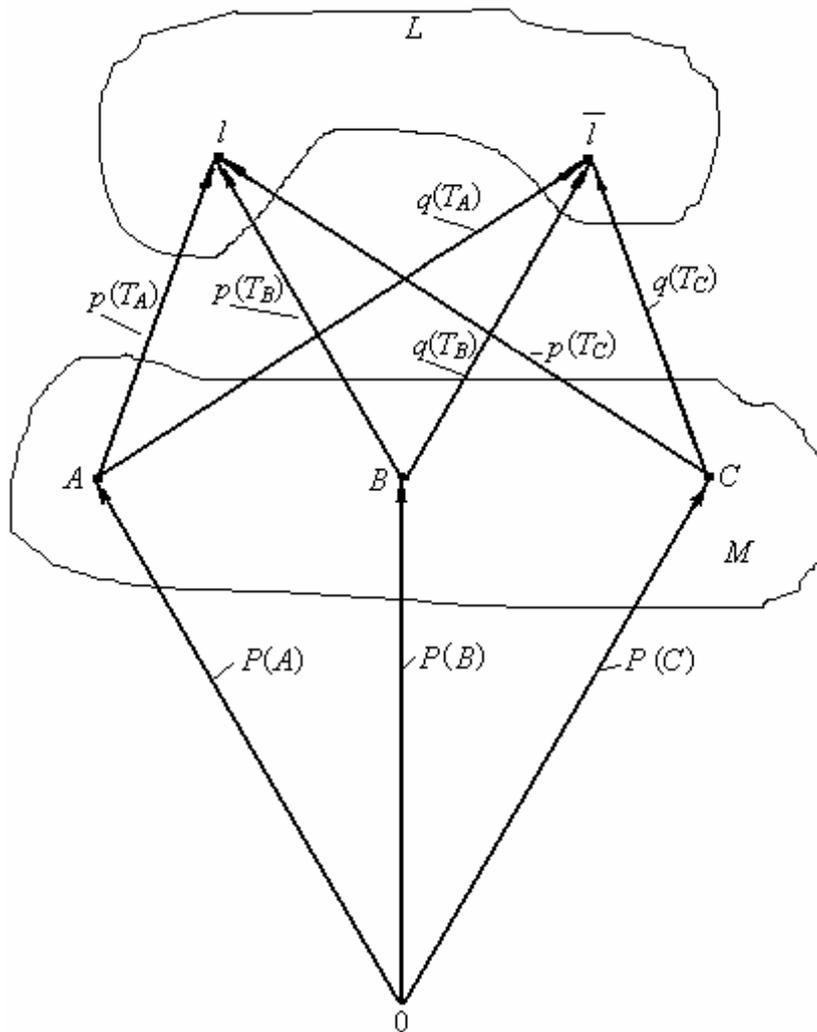


Рис. 10.1. Граф связей между альтернативами выбора пути и исходами поездки

Пусть $P(A), P(B), P(C)$ – соответственно вероятности реализации альтернатив A, B, C , входящих в множество M выбора путей следования пассажира, доверительные значения которых можно оценить посредством величины вероятности времени T_0^Φ фактического ожидания транспортных средств данного множества маршрутов. При этом следует заметить, что если пешеходный путь выбирается пассажиром в качестве альтернативы, то вероятность такой реализации будет равна единице.

Пусть $p(T)$ – множество вероятностей, обозначающее вероятности $p(T_A), p(T_B), p(T_C)$ передвижения на транспортных средствах соответствующих множеств маршрутов в течение времени, позволяющего пассажиру добраться до пункта назначения поездки без опоздания, а $q(T)$ – то же, но с опозданием.

Полная вероятность каждого исхода определяется как произведение вероятностей, указанных на ветвях дерева, поэтому каждый исход может быть представлен функциями

$$F_l = P(i) p(T_i), \tag{10.1}$$

$$F_{\bar{l}} = P(i) q(T_i), \tag{10.2}$$

где $q(T_i) = 1 - p(T_i); i = A, B, C$.

Функцию F_i будем называть функцией вероятности реализации поездки без опоздания, а F_i^- – функцией вероятности реализации поездки с опозданием.

Пассажиру, ожидающему транспортную единицу на остановочном пункте, доподлинно не известны значения вероятностей $P(i)$, $p(T_i)$ и $q(T_i)$, однако анализируя картину перевозочного процесса, используя интуицию и опыт, он достаточно точно выбирает тот маршрут поездки, который влечет наименьшие неприятности.

Пассажир, совершая поездку на общественном транспорте, и система автоматического управления, прогнозирующая действия пассажира на остановочном пункте, должны иметь общую цель, т. е. некую общность в поведении: функционирование и пассажира, и системы направлено к определенному результату. В кибернетике активное поведение разделяется на два класса: нецеленаправленное и целенаправленное. При целенаправленном поведении объект вступает в определенную связь в пространстве или во времени с некоторыми другими объектами или событиями. Указанный подход к понятиям цели связан с их объективацией и распространением на системы произвольной природы и основан на поведении объекта [1].

Имея цель, заданную с помощью функций (10.1) и (10.2), будем полагать, что из двух исходов предпочтителен тот, которому соответствует большее значение выражения (10.1) и меньшее – (10.2). Если две альтернативы ведут к исходу с одинаковой вероятностью, то выбор пути множества A предпочитается выбору пути множества B , а B предпочтительнее C .

Будем также полагать, что помимо линейности предпочтения должны удовлетворять условию транзитивности, т. е. если A предпочтительнее B , а B – C , то A предпочтительнее C .

Иногда реальные предпочтения людей могут не обладать свойствами линейности и транзитивности [10], однако это, скорее, исключение, а не правило.

Значения вероятностей множества $p(T)$ зависят от времени T_p , которым располагает пассажир для посадки в транспортное средство и проезда в нем, и времени T_o^Φ фактического ожидания пассажиром транспортного средства для совершения посадки. Если фактическое время

посадки пассажира в транспортное средство равно времени T_0 , отводимому им для посадки, то время поездки равно времени T_p , которым располагает пассажир. Следовательно, с принятым значением доверительной вероятности поездка закончится в положенный срок t_c (рис. 10.2, а).

Если время T_0^Φ меньше T_0 на Δt (рис. 10.2, б), то вероятность окончания поездки к указанному сроку увеличится. Наконец, если $T_0^\Phi > T_0$, то эта вероятность уменьшится (рис. 10.2, в).

Обозначим через x (см. рис. 10.2, б) моменты окончания поездок. Тогда

$$x = 1,6\sigma_\Sigma + T_0 - T_0^\Phi \quad (10.3)$$

и с учетом [15] вероятность прибытия транспортной единицы на участок может быть записана в виде

$$P(x) = A(\alpha)x \int_0^x e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} dx, \quad (10.4)$$

где $P(x)$ – значение вероятности прибытия транспортной единицы на участок; $A(\alpha) = \alpha/2\lambda\sigma_\Sigma\Gamma(1/\alpha)$; α – показатель степени распределения; $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$; $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция; σ_Σ – среднее квадратическое отклонение времени прибытия транспортной единицы на данный остановочный пункт. Введем новую переменную $t^2 = x$ ($dt = dx/2t$) и подставим ее в уравнение (10.4):

$$P(x) = A(\alpha) \int_0^{t^2} 2te^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} dt. \quad (10.5)$$

Произведя подстановку в (10.5), получим

$$P(x) = A(\alpha) \left(e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} t^2 + \int_0^{t^2} t^2 e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} \frac{2\alpha|t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha} dt \right). \quad (10.6)$$

Введем новую переменную $y = |t|^{2\alpha}/|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha$, тогда

$$|t|^2 = y^{\frac{1}{\alpha}} |\lambda\sigma_\Sigma|, \quad dy = \frac{2\alpha|t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha} dt$$

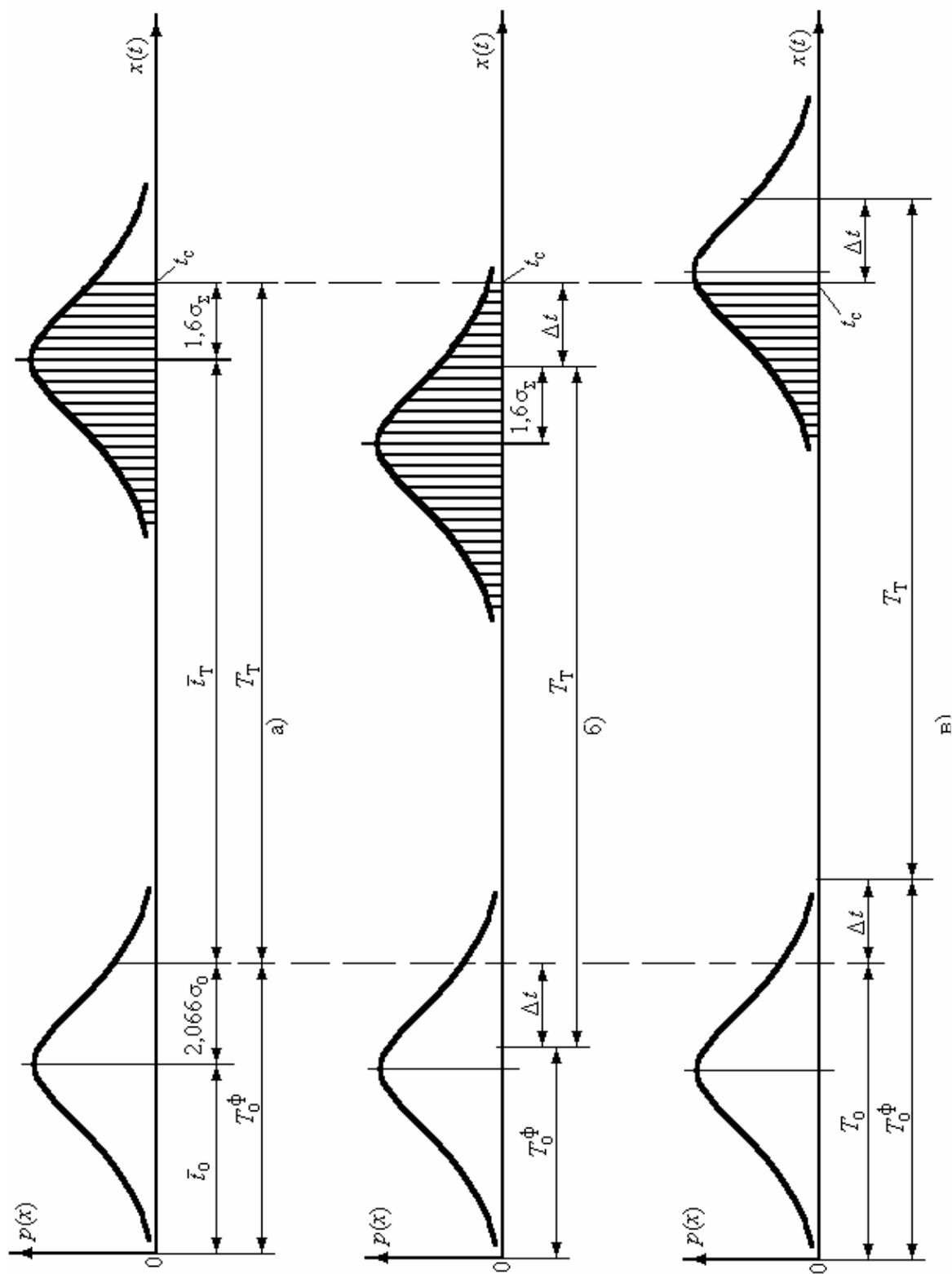


Рис. 10.2. К определению значения вероятности прибытия пассажиров в пункт назначения без опоздания

и уравнение (10.6) преобразуется к виду

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left(y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right), \quad (10.7)$$

которое можно переписать следующим образом:

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left[y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right) \right], \quad (10.8)$$

где $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ – гамма-функция; $\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy$ – неполная

гамма-функция, которая согласно [9] может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda \sigma_{\Sigma}| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{e^{-y} \binom{1}{\alpha}}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\alpha} + k\right)} \right) \right]. \quad (10.9)$$

Подставляя в выражение (10.8) переменную x и учитывая соотношение (10.9), получаем

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda \sigma_{\Sigma}| \left\{ e^{-\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha} + \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha+1}}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda \sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha k}}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\alpha} + k\right)} \right) \right] \right\}. \quad (10.10)$$

Поскольку $\Gamma\left(2\frac{1}{\alpha}\right) = 1\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)$, а $\Lambda(\alpha) = \alpha/2\lambda\sigma_{\Sigma}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, то имеем

$$P(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \left[e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha} + \frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha+1}}{1\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha k}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (10.11)$$

Выражение (10.11) приведем к виду

$$P(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}} \left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha} \left[1 + \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha}}{1\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_{\Sigma}}\right|^{\alpha k}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (10.12)$$

Принимая во внимание симметричность функции $p(x)$ (см. рис. 10.2), а также то обстоятельство, что величина x в выражении (10.3) может принимать отрицательное значение, запишем функцию вероятности передвижения пассажира на транспортной единице в течение времени, позволяющего ему добраться до пункта назначения в срок, выбрав i -ю альтернативу:

$$P(T_i) = \begin{cases} 0,5 + P(x), & x \geq 0; \\ 0,5 - P(x), & x < 0. \end{cases} \quad (10.13)$$

Таким образом, рассчитав числовые характеристики параметров $P(i)$, $p(T_i)$, $q(T_i)$, можно вычислить значения функций реализации поездки без опоздания (10.1) и с опозданием (10.2), прогнозируя выбор пассажиром маршрута (альтернативы) поездки.

Существенная черта человека, отличающая его от механической системы, – наличие эмоций, которые зависят от его психофизиологического состояния и потребностей. Удовлетворение определенных потребностей протекает на фоне эмоционального напряжения, представляющего собой регулируемую систему, мобилизующую функции организма на активную целенаправленную деятельность и подготовку к ней. Поэтому накопившееся в процессе ожидания транспортного сред-

ства эмоциональное напряжение играет существенную роль при посадке. Картина учета психофизиологического состояния пассажира, характеризующая его действия на остановочном пункте транспортной сети, оказывается весьма сложной, поэтому не всегда можно дать точное, даже формальное ее описание. Это означает, что разрабатываемые для описания поведения пассажира модели отражают лишь некоторые черты рассматриваемого явления, пренебрегая которыми можно совершить грубые ошибки, которые исказят динамику хода перевозочного процесса и неблагоприятно отразятся на качестве предоставляемых транспортных услуг.

Эмоциональное напряжение пассажира – функция двух величин: потребности в поездке и дефицита сведений о путях ее удовлетворения. В исследовании [15] процесс накопления у пассажира эмоционального напряжения представлен в виде точки, совершающей в случайные моменты переходы за время Δ_T с уровня E_k на уровень E_{k+1} с вероятностью, равной $\gamma\Delta_T + o(\Delta_T)$, где γ – прогнозирующий параметр; $o(\Delta_T)$ – величина, имеющая порядок малости более высокий, чем Δ_T .

Указанный процесс описывается выражением

$$E(T) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\gamma T)^k}{k!} e^{-\gamma T} \quad (10.14)$$

или функцией $E(T)$ роста эмоционального напряжения

$$E(T) = 1 - e^{\left[\frac{\gamma}{\eta} (1 - e^{-\eta T}) - (\gamma + h) T \right]}, \quad (10.15)$$

где η – параметр, корректирующий скорость роста эмоционального напряжения; h – параметр, характеризующий уровень эмоционального напряжения пассажира в момент прихода его на остановочный пункт.

Полагая, что накапливаемое пассажиром эмоциональное напряжение определяет его действия на остановочном пункте, представим вероятность отказа пассажира от альтернативы A (множество маршрутов 1-го выбора пути) в течение бесконечно малого интервала времени $(T, T + \Delta_T)$ (при условии, что в начальный момент времени пассажир намеревался воспользоваться данным путем следования) выражением

$$Q = \beta \Delta_T,$$

где Q – вероятность отказа пассажира от альтернативы A ; β – некоторый параметр, прогнозирующий отказ.

Назовем событием A решение пассажира воспользоваться альтернативой A до момента времени T , а событием B – отказ пассажира от альтернативы A в интервале времени $(T, T + \Delta_T)$. Тогда наличие события A в момент времени $(T, T + \Delta_T)$ представляет собой противоположное отказу событие, т. е. \bar{B} . Тогда из предыдущего уравнения

$$Q(B|A) = Q = \beta\Delta_T. \quad (10.16)$$

Так как сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице, то условная вероятность события A в интервале времени $(T, T + \Delta_T)$

$$Q(\bar{B}|A) = 1 - \beta\Delta_T. \quad (10.17)$$

Если вероятность события A представить неизвестной функцией $g(T)$, то вероятность совместного появления событий A и \bar{B} будет равна значению этой функции в момент $(T, T + \Delta_T)$:

$$\left. \begin{aligned} Q(A) &= g(T), \\ Q(A \text{ и } \bar{B}) &= g(T + \Delta_T). \end{aligned} \right\}$$

На основании принципа умножения вероятностей

$$Q(A \text{ и } \bar{B}) = Q(A) \cdot Q(\bar{B} | A). \quad (10.18)$$

Подставляя в уравнение (10.18) выражения (10.16) и (10.17), получаем

$$g(T + \Delta_T) = g(T) (1 - \beta\Delta_T),$$

после преобразования

$$\frac{g(T + \Delta_T) - g(T)}{\Delta_T} = -\beta g(T).$$

Разность $g(T + \Delta_T) - g(T)$ представляет собой приращение вероятности за время Δ_T . Переходя к пределу $\Delta_T \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции $g(T)$

$$\frac{dg(T)}{dT} = -\beta g(T),$$

которое вместе с начальным условием $g(0) = 1$ полностью определяет функцию $g(T)$. Легко убедиться, что начальному условию отвечает решение

$$g(T) = e^{-\beta T}. \quad (10.19)$$

Найдем вероятность события \bar{A} – отказа пассажира воспользоваться альтернативой A до момента времени T , которая с учетом (10.19) имеет вид

$$Q(\bar{A}) = 1 - e^{-\beta T}. \quad (10.20)$$

Вероятность $Q(T_1, T_2)$ отказа пассажира от альтернативы A в интервале времени (T_1, T_2) можно определить на основании принципа сложения вероятностей. На отрезке времени $(0, T_1)$ вероятность отказа пассажира от альтернативы A равна $1 - e^{-\beta T_1}$, а на отрезке $(0, T_2)$ – соответственно $1 - e^{-\beta T_2}$.

В интервале времени $(0, T_2)$ отказ от альтернативы A может произойти только в случае появления одного из двух несовместных событий: отказ пассажира произошел или до момента времени T_1 , или в интервале времени (T_1, T_2) . Поэтому

$$1 - e^{-\beta T_2} = Q(T_1, T_2) + 1 - e^{-\beta T_1},$$

откуда

$$Q(T_1, T_2) = e^{-\beta T_1} - e^{-\beta T_2}. \quad (10.21)$$

Заменяя в формуле (10.21) $T_1 = T$, $T_2 = T + \Delta_T$, получаем

$$Q(T, T + \Delta_T) = e^{-\beta T} - e^{-\beta(T + \Delta_T)} = e^{-\beta T} (1 - e^{-\beta \Delta_T}).$$

Раскладывая показательную функцию в скобках в ряд Маклорена [5] и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, имеем

$$e^{-\beta \Delta_T} = 1 - \beta \Delta_T,$$

$$Q(T, T + \Delta_T) = \beta e^{-\beta T} \Delta_T.$$

Разделив последнее выражение на Δ_T и перейдя к пределу $\Delta_T \rightarrow 0$, найдем плотность вероятности отказа пассажира от альтернативы A , т. е. от поездки на транспортной единице множества маршрутов 1-го выбора:

$$f_A(T) = \beta e^{-\beta T}. \quad (10.22)$$

Придя на остановочный пункт, пассажир, как правило, не может в начальный момент времени отказаться от альтернативы A , поскольку этот путь следования наилучший для него. И только спустя некоторое время с начала выполнения безуспешных попыток воспользоваться транспортными средствами множества маршрутов 1-го выбора пассажир начинает искать выход из создавшейся неблагоприятной для

него ситуации. Поэтому в общем случае выражение (10.22) будет иметь вид двухпараметрического распределения:

$$f_A(T) = \begin{cases} \beta e^{-\beta(T-T_r)}, & T \geq T_r, \\ 0, & T < T_r, \end{cases} \quad (10.23)$$

где T_r – время гарантированного нахождения пассажира на остановочном пункте с момента прихода на него.

При $T_r = 0$ (например в случае полного останова перевозочного процесса) выражения (10.21) и (10.23) совпадают.

Если после отказа от альтернативы A решение пассажира воспользоваться альтернативой B (транспортными средствами множества маршрутов 2-го выбора) также не дало положительного результата, то он выбирает альтернативу C : покидает остановочный пункт (путь 3-го выбора). Можно предположить, что вид закона плотности распределения, отражающего моменты выбора альтернативы C , соответствует кривой плотности распределения роста эмоционального напряжения пассажира. Назовем событием C отказ пассажира от альтернативы B . При этом можно считать, что уровень эмоционального напряжения, накопленного в результате безуспешных попыток воспользоваться транспортными средствами, достаточно высокий.

Обратимся к выражению (10.14), плотность распределения которого имеет вид

$$f_c(T) = \frac{\gamma^{r+1}}{\Gamma(r+1)} T^r e^{-\gamma T}. \quad (10.24)$$

Воспользуемся формулой Сони́на [15] и с точностью до бесконечно малых преобразуем выражение $\Gamma(r+1)$:

$$\Gamma(r+1) = \sqrt{2\pi r} r^{\frac{1}{2}} e^{-r}.$$

Тогда уравнение (10.24) примет вид

$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{r/\gamma^2}} \left(\frac{\gamma T}{r} \right)^r e^{-\gamma T}. \quad (10.25)$$

При действительных значениях функция $(\gamma T/r)^r$ связана с показательной функцией соотношением

$$\left(\frac{\gamma T}{r} \right)^r = e^{r \ln \frac{\gamma T}{r}}.$$

Раскладывая степень показательной функции в степенной ряд и ограничиваясь двумя членами ряда, получаем

$$\left(\frac{\gamma T}{r}\right)^r = e^{r\left[\frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{(\gamma T/r - 1)^2}{2}\right]}. \quad (10.26)$$

Подставляя выражение (10.26) в уравнение (10.25), имеем

$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{r/\gamma^2}} e^{r\left[\frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{(\gamma T/r - 1)^2}{2}\right] + r - \gamma T}. \quad (10.27)$$

Преобразуем показатель степени функции в уравнении (10.27):

$$r\left[\frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{(\gamma T/r - 1)^2}{2}\right] + r - \gamma T = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{r} \left(T - \frac{r}{\gamma}\right)^2 = -\frac{\left(T - \frac{r}{\gamma}\right)^2}{2 \frac{r}{\gamma^2}}. \quad (10.28)$$

Подставляя выражение (10.28) в уравнение (10.27) и

$$\sqrt{\frac{r}{\lambda^2}} = \sigma_c, \quad \frac{r}{\gamma} = m_c,$$

получаем окончательно
$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{(T-m_c)^2}{2\sigma_c^2}}, \quad (10.29)$$

где m_c – среднее время отказа пассажира от альтернативы B ; σ_c – среднее квадратическое отклонение этого времени.

Из выражения (10.29) видно, что при возрастании r кривая плотности распределения, задаваемая (10.14), становится более симметричной и стремится к кривой плотности нормального распределения.

Вероятность времени отказа пассажира от поездки при высоком уровне эмоционального напряжения выражается формулой

$$Q(C) = \int_{-\infty}^T f_c(T) dT = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T-m_c}{\sigma_c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (10.30)$$

$$\Phi\left(\frac{T-m_c}{\sigma_c}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T-m_c}{\sigma_c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \text{функция Лапласа.}$$

Причины, побуждающие пассажира покинуть остановочный пункт, могут возникать в различные моменты времени его пребывания на остановочном пункте, причем действия этих причин сначала происходят на низком фоне эмоционального напряжения, а в конце – на высоком. Очевидно, что действия причин независимы друг от друга. Если одна из причин вынудила пассажира покинуть остановочный пункт, то действия других причин уже не смогут изменить положения. Тогда функцию вероятности времени ухода пассажира с остановочного пункта можно записать в виде

$$Q_y(T) = Q(\bar{A}) + Q(C) - Q(\bar{A}) Q(C). \quad (10.31)$$

Подставляя в уравнение (10.31) значения из выражений (10.20), (10.30), получаем

$$Q_y(T) = 1 - e^{-\beta T} \left[1 - \Phi \left(\frac{T - m_c}{\sigma_c} \right) \right]. \quad (10.32)$$

Продифференцировав полученное выражение, имеем

$$f_y(T) = e^{-\beta T} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{T - m_c}{\sigma_c} \right)^2} + \beta \left(1 - \Phi \left(\frac{T - m_c}{\sigma_c} \right) \right) \right]. \quad (10.33)$$

Кривые плотности этого распределения при различных значениях параметров представлены на рис. 10.3.

Следует заметить, что если $1/\beta$ меньше m_c , то функция плотности напоминает экспоненциальную кривую. И, наоборот, при $1/\beta$ больше m_c функция стремится к виду нормального распределения.

Используя данные функции, можно дать общую оценку хода перевозочного процесса применительно к данному остановочному пункту. Если функция плотности напоминает экспоненциальную кривую, то перевозочный процесс протекает крайне плохо, пассажиры не имеют возможности воспользоваться транспортными средствами и поэтому быстро покидают остановочный пункт.

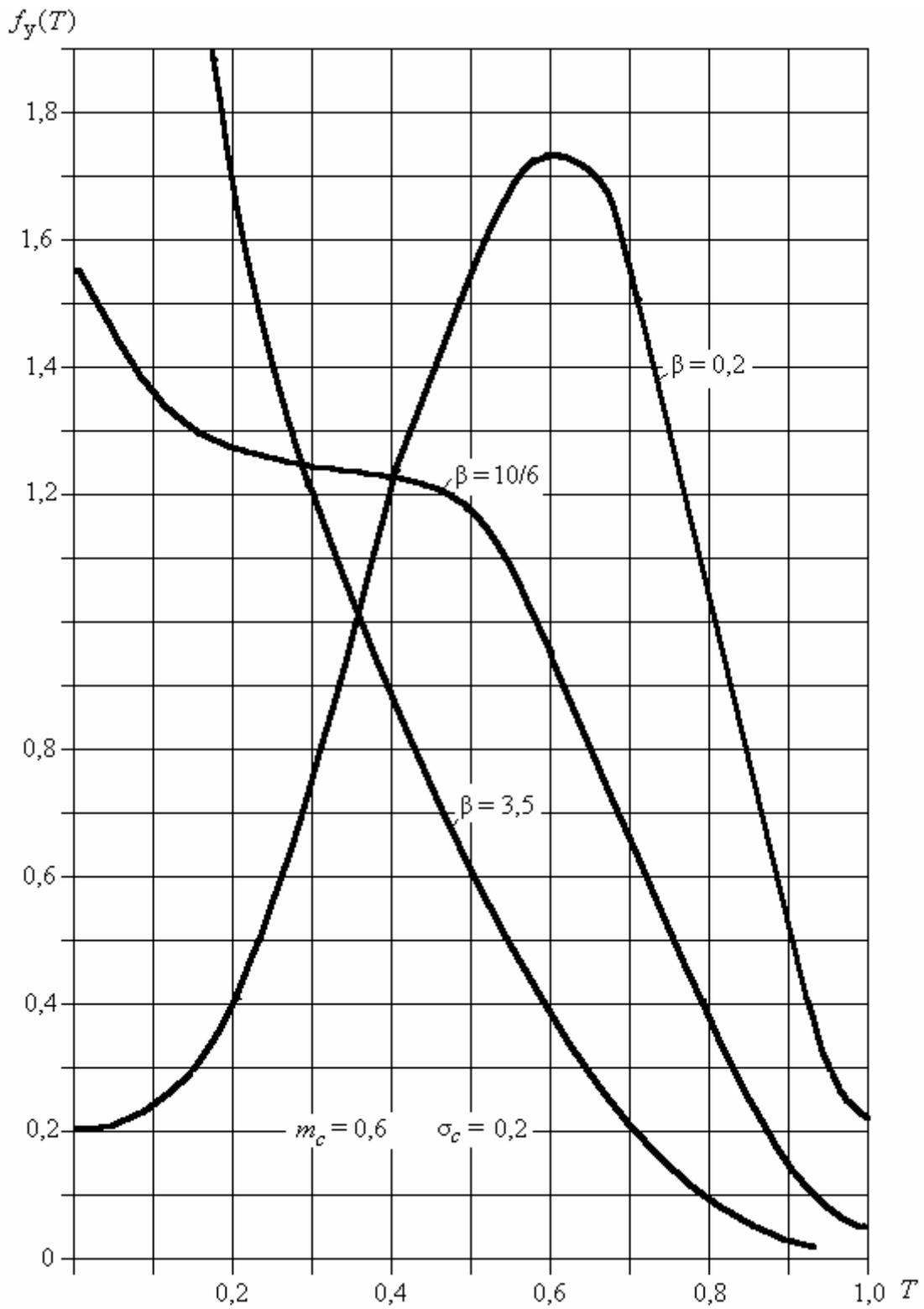


Рис. 10.3. Кривые плотности распределения времени отказа пассажира от поездки на городском пассажирском транспорте

В случае приобретения функцией вида, близкого к нормальному распределению, можно сказать, что перевозочный процесс идет несколько лучше. Пассажиры более длительное время находятся на остановочном пункте, пытаясь воспользоваться для поездки транспортными средствами. Математическое ожидание времени ухода имеет большее значение, чем в предыдущем случае, а следовательно, есть определенный запас времени для исправления возникающей на остановочном пункте неблагоприятной ситуации.

10.3. Подготовка исходных данных для построения модели

Статистические данные исследований, собранные с остановочных пунктов B_1, B_2, \dots, B_m , разбиваются на множества, каждое из которых содержит пассажирские корреспонденции с одноименным пунктом отправления. После этого полученное множество (рис. 10.4) разделяется на подмножества по видам потребности поездки и видам пассажирских корреспонденций (исток – сток). В результате этого образуются группы пассажирских корреспонденций класса XUZ , характеризующегося номером остановочного пункта, видом потребности поездки и видом корреспонденции.

Наибольшая потребность в поездке возникает у пассажира в условиях объективно ограниченного временного ресурса пользования общественным транспортом, альтернатива которому в это время суток отсутствует или маловероятна, а срыв поездки грозит большими неприятностями. Например, ранняя утренняя поездка на вокзал ограничена по времени, с одной стороны, началом работы городского транспорта, а с другой – моментом отправления поезда, при этом опоздание на поезд влечет за собой крупные неприятности. Будем считать, что такие поездки характеризуют потребность первого вида.

Потребность второго вида определяют поездки, опоздание при выполнении которых также чревато для пассажира неприятностями, однако для их совершения пассажир самостоятельно (по своему усмотрению) отводит время на ожидание транспортного средства и проезд в нем. К такому виду следует отнести поездки, совершаемые на работу (трудовые поездки).

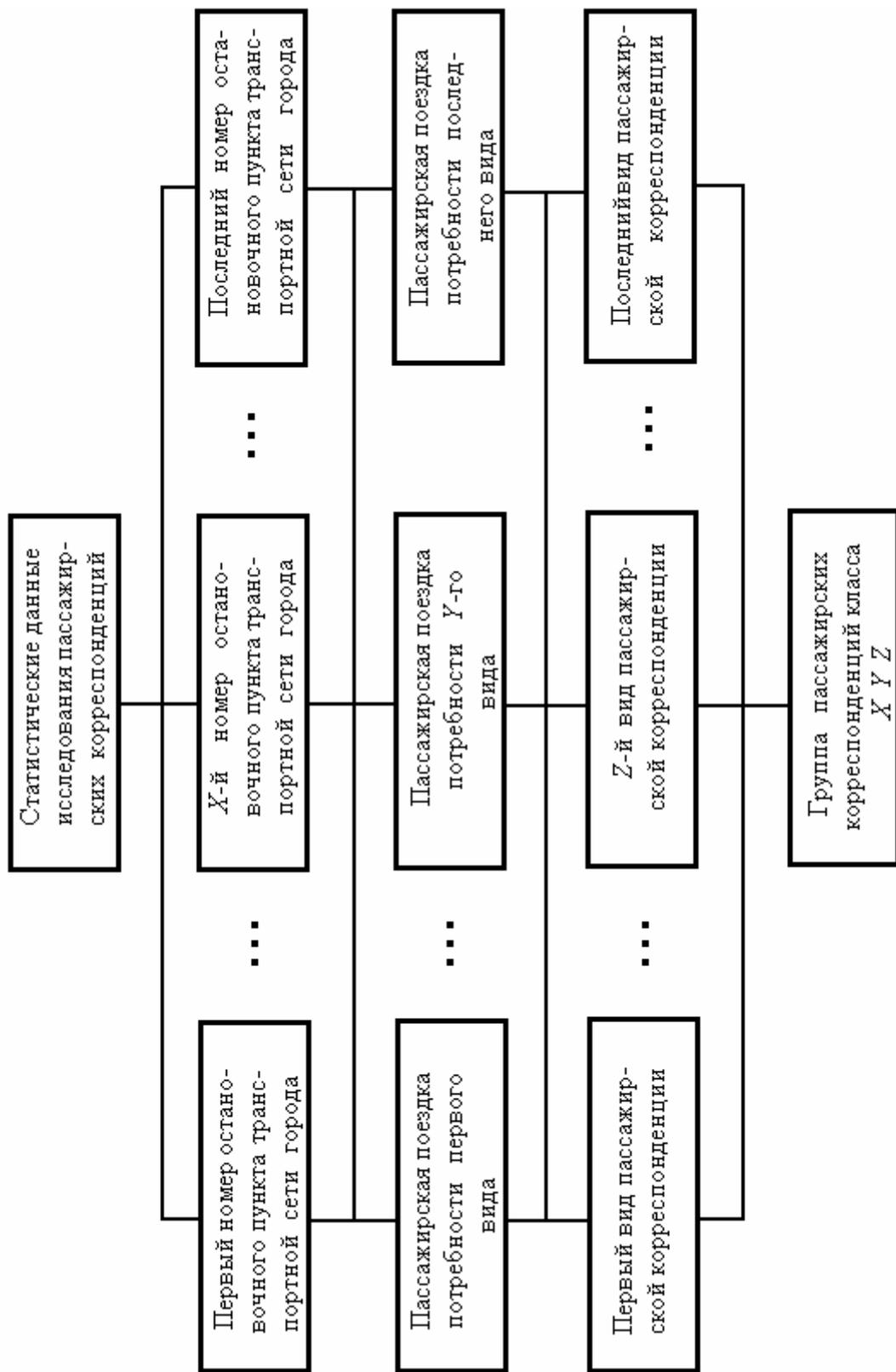


Рис. 10.4. Классы пассажирских корреспонденций

К третьему виду относят поездки, срыв которых влияет на величину свободного времени трудящихся (поездки с объектов трудовой организации).

И, наконец, потребность четвертого вида может быть охарактеризована поездками культурно-бытового назначения.

Исходя из сказанного, собранные в течение всего суточного цикла работы данные о пассажирских корреспонденциях следует группировать по временным отрезкам, в которые совершается подавляющее большинство поездок того или иного вида.

Вторая величина, определяющая степень эмоционального напряжения, – дефицит информации. Информация о ходе перевозочного процесса поступает к пассажиру, находящемуся на остановочном пункте, в натуральном и параметрическом виде. Натуральная информация отражает реально существующие объекты – транспортные средства, поток людей, прибывающих на остановочный пункт, и так далее. Носители параметрической информации – сведения, извлекаемые пассажиром из картины перевозочного процесса (наполненность салона прибывающих на остановочный пункт транспортных единиц, интервал их движения на маршруте, количество людей, желающих произвести посадку на то или иное транспортное средство, и т. д.). Эти данные в общих чертах воспринимаются и оцениваются пассажиром для координации своих действий, направляемых на достижение поставленной цели.

Разность между необходимыми для гарантированного успеха поездки сведениями и субъективными сведениями, имеющимися у пассажира на остановочном пункте, представляет собой дефицит информации, который способствует росту эмоционального напряжения, что, в свою очередь, активизирует работу различных функций организма и побуждает пассажира к проведению на остановочном пункте целенаправленной деятельности. Она определяется готовностью пассажира нести неизбежные энергетические затраты как при посадке в общественный транспорт, так и при проезде в нем. Будем полагать, что величина этих энергозатрат прямо пропорциональна накопившемуся на данный момент эмоциональному напряжению.

В группе пассажирских корреспонденций одного класса каждой корреспонденции ставится в соответствие значение коэффициента Ξ

потери комфортабельности поездки, после чего корреспонденции с близким по значению Ξ объединяют в подгруппы, для которых вычисляют среднее значение этого коэффициента по формуле:

$$\bar{\Xi}^i = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \Xi_j^i, \quad (10.34)$$

где $\bar{\Xi}^i$ – средний коэффициент потери комфортабельности поездки для i -й подгруппы; μ – число пассажирских корреспонденций в i -й подгруппе; Ξ_j^i – значение коэффициента потери комфортабельности j -й пассажирской корреспонденции i -й подгруппы.

Затем вычисляют общую среднюю величину коэффициента потери комфортабельности для всего класса корреспонденций:

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{\Xi}^i, \quad (10.35)$$

где $\bar{\Xi}$ – средний коэффициент потери комфортабельности поездки для всего класса корреспонденций; l – количество подгрупп пассажирских корреспонденций в этом классе.

Затем вычисляют дисперсию D_i :

$$D_i = \frac{1}{\mu - 1} \sum_{j=1}^{\mu} \left(\Xi_j^i - \bar{\Xi}^i \right)^2. \quad (10.36)$$

При помощи критерия Бартлетта [16] проверяют однородность данных подгрупп путем сравнения дисперсий. Для этого находят значение хи-квадрат по формуле

$$\chi^2 = \frac{2,3026}{1 + \frac{l+1}{3l(\mu-1)}} l(\mu-1) \left[\lg \frac{\sum_{i=1}^l D_i}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \lg D_i \right] \quad (10.37)$$

и число степеней свободы

$$\omega = l - 1. \quad (10.38)$$

По таблице [12] находят величину $\chi^2_{0,05}$ для значения вероятности, равного 0,05 и соответствующего числу степеней свободы ω . Если окажется, что значение $\chi^2 \leq \chi^2_{0,05}$, то данные не противоречат равенству дисперсий.

На следующем этапе проводят проверку расхождения средних значений коэффициента потери комфортабельности поездки. Для этого подсчитывают сумму квадратов отклонений O_1 , O_2 соответственно между подгруппами и внутри самих подгрупп по формулам

$$O_1 = \mu \sum_{i=1}^l (\bar{E}^i - \bar{E})^2, \quad (10.39)$$

$$O_2 = (\mu - 1) \sum_{i=1}^l D_i \quad (10.40)$$

и соответствующие этим отклонениям значения степеней свободы:

$$\omega_1 = l - 1, \quad (10.41)$$

$$\omega_2 = l(\mu - 1), \quad (10.42)$$

а потом находят их отношение F :

$$F = \frac{O_1 / \omega_1}{O_2 / \omega_2}. \quad (10.43)$$

Взяв в качестве ω_1 то из чисел степеней свободы, которое соответствует большему из двух чисел O_1 и O_2 , по таблице [7] 5%-х отклонений F находят величину F_{ω_1, ω_2} . Если $F \leq F_{\omega_1, \omega_2}$, то делается вывод о равенстве средних значений.

Аналогичную процедуру проводят с временем ожиданий указанных корреспонденций, определяя значения среднего времени ожидания $\bar{\tau}_0^i$ посадки для каждой подгруппы, среднего времени ожидания $\bar{\tau}_0$ посадки для всего класса пассажирских корреспонденций и дисперсии для каждой группы. Убедившись в том, что полученные статистические данные не противоречат однородности, находят прогнозирующий параметр γ , задающий среднюю скорость роста эмоционального напряжения по формуле

$$\gamma = \frac{\bar{E}}{\bar{\tau}_0}. \quad (10.44)$$

Для нахождения постоянной h продифференцируем выражение (10.15):

$$\frac{dE(T)}{dT} = [h + \gamma(1 - e^{-\eta T})] e^{\left[\frac{\gamma}{\eta} (1 - e^{-\eta T}) - (\gamma + h)T \right]} \quad (10.45)$$

и подставим в него значение $T = 0$. Тогда выражение (10.45) примет вид

$$\frac{dE(T)}{dT} = h. \quad (10.46)$$

Предположим, что уравнение (10.45) отражает плотность роста эмоционального напряжения. Выберем из указанного класса пассажирских корреспонденций те, время ожидания которых близко к нулю, и подсчитаем частоту этого события:

$$V = \frac{n_0}{n}, \quad (10.47)$$

где n_0 – количество пассажирских корреспонденций, время ожидания которых близко к нулю; n – количество пассажирских корреспонденций в классе. Затем, разделив ее значение на величину τ_n начального временного интервала, в который попадает n_0 , получаем параметр h :

$$h = \frac{n_0}{n} / \tau_n. \quad (10.48)$$

Физически это означает, что если $h \neq 0$, то, придя на остановочный пункт, пассажир имеет уже определенный эмоциональный настрой, побуждающий его практически сразу же затрачивать определенное количество энергии на посадку, т. е. рост эмоционального напряжения начинается с некоторого уровня, продиктованного сложившимися со временем на данном остановочном пункте условиями посадки.

Далее производят разбиение пассажирских корреспонденций некоторым числом θ и подсчитывают частоту:

$$v(\theta) = \frac{n(\theta)}{n}, \quad (10.49)$$

где $n(\theta)$ – количество пассажирских корреспонденций, у которых время ожидания меньше θ .

Прологарифмировав уравнение (10.15) при $T = \theta$ и подставив в полученное выражение вместо $E(T)$ значение $v(\theta)$ из (10.49), получаем соотношение

$$\frac{1 - e^{-\eta\theta}}{\eta} = \theta \left(1 + \frac{h}{\gamma} \right) + \frac{\ln[1 - v(\theta)]}{\gamma}, \quad (10.50)$$

в правой части которого стоит известная величина. Решая его относительно η , определяют значение последнего параметра. Параметр η корректирует скорость роста эмоционального напряжения.

Следует заметить, что с использованием вычислительной техники указанные параметры модели могут быть найдены и другими методами. Поскольку расчет параметров функции выбранного вида есть операция чисто детерминированная, то ее полностью можно доверить компьютеру. В связи с тем, что число экспериментальных данных больше числа параметров модели, то количество независимых уравнений системы (для нахождения этих параметров) избыточно. Следовательно, из этих уравнений в разных комбинациях можно составить несколько систем уравнений, каждая из которых даст свое решение. При этом решения будут несовместны между собой, так как каждое будет соответствовать своей функции. В результате этого получится целый пучок кривых, который, во-первых, позволит провести усреднение полученных кривых, а во-вторых, покажет форму и ширину исследуемого явления. Усредненная функция точнее и достовернее может описать исследуемое явление, поскольку она в значительной степени защищена от случайного разброса отдельных экспериментальных точек.

Таким образом, полученные исходные данные для математической модели (10.15) дают возможность посредством этой модели оценивать психофизиологическую готовность пассажира, ожидающего на остановочном пункте транспортное средство, совершить в него посадку.

Теперь определим исходные данные для моделей (10.23) и (10.33).

Проведем оценку параметров на основе данных о времени τ ухода пассажиров с остановочного пункта. Величина времени гарантированного нахождения пассажиров на остановочном пункте

$$T_r = \min(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad (10.51)$$

где n – количество данных.

Далее отыскивают наименьшие значения τ_i^* из данных, принадлежащих каждой из l подгрупп одного класса (XYZ), после чего находят параметр β

$$\beta = \frac{l^2}{\sum_{i=1}^l \tau_i^* \sum_{i=1}^l \vartheta_i}, \quad (10.52)$$

где ϑ_i – число реализаций случайной величины в i -й подгруппе.

Применяя метод разделяющих разбиений, разбивают данные реализации случайной величины, пронумерованные в порядке возрастания ($\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_n$), некоторыми выбранными числами θ_1, θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$) на три группы. Затем подсчитывают частоту данных, оказавшихся соответственно в интервалах $(0, \theta_1)$ и $(0, \theta_2)$, по формуле

$$v(\theta_j) = \frac{m(\theta_j)}{n}, \quad (10.53)$$

где $m(\theta_j)$ – количество значений в j -м интервале, $j = 1, 2$.

Подставляя в выражение (10.32) вместо T значения θ_j и преобразовывая его, получаем

$$\Psi_j = \Psi \left[1 - (1 - v(\theta_j)) e^{\beta \theta_j} \right], \quad (10.54)$$

где Ψ – обратная функция Лапласа.

Параметр m_c находят по формуле

$$m_c = \frac{\Psi_1 \theta_2 - \Psi_2 \theta_1}{\Psi_1 - \Psi_2}, \quad (10.55)$$

а параметр σ_c – из выражения

$$\sigma_c = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Psi_1 - \Psi_2}. \quad (10.56)$$

Следует иметь в виду, что получить значения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ непосредственно из результатов статистических исследований пассажиропотоков сложно, поскольку в процессе этих исследований не предусматривается нарушение нормального хода перевозочного процесса. Эти сведения появлялись бы только на нескольких остановочных пунктах, на которых ход перевозочного процесса был неудовлетворительным, и из-за своей малочисленности они не дали бы возможности составить полную картину отказов пассажиров от поездки. Кроме того, полученная таким образом модель была бы индивидуальна для сложившейся при проведении исследований фазы перевозочного процесса, а следовательно, малоприспособна для практического применения. Поэтому, имея разработанные математические модели, отражающие ход перевозочного процесса, целесообразно воспользоваться статистическим моделированием, применяя для этой цели известный метод Монте-Карло [4]. Задавая различные интервалы движения транспорт-

ных средств, моделируют варианты хода перевозочного процесса, из которых потом выбирают наилучший, позволяющий сформировать расчетный план движения. Худшие варианты используют для получения значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, с помощью которых потом может быть построено целое семейство функций (10.33) для каждого остановочного пункта. Обобщая полученные функции для определенных фаз перевозочного процесса, определяют усредненные значения математического ожидания времени ухода пассажиров с остановочного пункта и интервала времени ухода большей части пассажиров, которые впоследствии применяют для принятия решений выхода из нештатных ситуаций, возникающих при выполнении пассажирских перевозок на общественном транспорте.

Таким образом, поскольку отрицательные последствия, связанные с отклонением от нормального протекания перевозочного процесса, нельзя, как правило, быстро устранить, то для нормализации процесса перевоза и снижения возможных потерь необходимо осуществлять постоянный прогноз складывающейся ситуации на остановочных пунктах, применяя полученные математические модели.

Кроме того, используя созданные динамические модели прогнозирования поведения пассажиров (основной части активной системы) на остановочных пунктах транспортной сети, можно предопределять действия другой части активной системы, в которую входят водители городского пассажирского транспорта. Для успешной работы водителей необходимо создание соответствующих условий, обеспечивающих заинтересованность водителей в качественном выполнении своей работы и позволяющих уменьшить зависимость этого качества от неправильных действий других участников перевозочного процесса. Очевидно, что решение этой задачи также предполагает разработку математических моделей, которые позволяли бы получать количественные оценки труда водителей исходя из затрачиваемой водителем энергии при управлении транспортным средством.

Прежде всего следует определить время прохождения транспортным средством участков дорожной сети.

Определим данные для моделей (10.1) и (10.2), а именно время, отводимое пассажиром на ожидание посадки в транспортное средство и проезд в нем, и время фактического ожидания пассажиром транспортного средства.

При нормальном ходе перевозочного процесса время ожидания пассажиром транспортного средства на остановочном пункте распределено по нормальному закону. Кривая плотности этого распределения может быть описана выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-\bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (10.57)$$

где \bar{t}_0 – среднее время ожидания пассажиром на остановочном пункте посадки в транспортные средства множества маршрутов 1-го выбора пути; σ_0 – среднее квадратическое отклонение этого времени. Отметим, что для краткости записи индекс t_0 при x опущен.

Математическое ожидание этого распределения и его среднее квадратическое отклонение зависят от величины суммарного потока транспортных средств, входящих в множество маршрутов 1-го выбора пути, которым может воспользоваться пассажир для выполнения поездки, а также от наполненности прибывающих транспортных единиц. Поэтому можно предположить, что пассажирские корреспонденции с одинаковым истоком, имеющие одно множество маршрутов реализации поездки, будут обладать близкими по значению \bar{t}_0 и σ_0 .

На основании этого возможно объединение в серию классов XVZ одного множества маршрутов 1-го выбора пути и последующее определение параметров \bar{t}_0 и σ_0 по формулам

$$\bar{t}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\tau}_0^k, \quad (10.58)$$

где N – количество классов в серии; $\bar{\tau}_0^k$ – среднее время ожидания посадки в k -м классе пассажирских корреспонденций.

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\bar{\tau}_0^k - \bar{t}_0)^2 / (N-1)}. \quad (10.59)$$

В общем случае нормальное распределение задается на всей оси x от $-\infty$ до $+\infty$, однако для математической модели (см. рис. 10.2), описывающей время ожидания пассажира, необходимо сделать ограничение интервала неопределенности, по крайней мере, до величины, которая охватывала бы большую часть значений этого времени.

В качестве такой меры будем использовать энтропийный интервал неопределенности. Согласно К. Шеннону, энтропия

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx . \quad (10.60)$$

Для нормального распределения (10.57)

$$\ln p(x) = - \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) - \frac{(x - \bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2} . \quad (10.61)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[\ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) + \frac{(x - \bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2} \right] dx = \\ &= \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{1}{2\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{t}_0)^2 dx . \end{aligned} \quad (10.62)$$

Учитывая, что из условия нормирования площадь под кривой плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (10.63)$$

и по определению дисперсии

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{t}_0)^2 dx = \sigma_0^2 , \quad (10.64)$$

получаем

$$H(X) = \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \quad (10.65)$$

или

$$H(X) = \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi e}) . \quad (10.66)$$

Тогда энтропийный интервал неопределенности, равный $e^{H(X)}$, составит

$$d_0 = \sqrt{2\pi e} \sigma_0 = 4,133 \sigma_0 , \quad (10.67)$$

при этом величина доверительной вероятности для данного интервала равна 0,961. Поэтому если пассажир приходит на остановочный пункт с таким расчетом, что отводимое им на посадку время ожидания T_0 было бы

$$T_0 = \bar{t}_0 + d_0 / 2 , \quad (10.68)$$

то вероятность P_0 его посадки в транспортное средство за это время будет не менее 0,961.

После завершения посадки пассажир передвигается на транспортном средстве к месту назначения. Среднее время \bar{t}_T передвижения пас-

сажир равно сумме математических ожиданий времени движения транспортной единицы по отдельным участкам маршрута поездки, а суммарное среднее квадратическое отклонение σ_{Σ} этого времени находится из выражения

$$\Delta_{0,9\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^g \Delta_{0,9i}^2}, \quad (10.69)$$

где g – количество суммируемых участков маршрута при значении доверительной вероятности 0,9. Исходя из этого интервал неопределенности

$$d_T = 3,2 \sigma_{\Sigma}. \quad (10.70)$$

Следовательно, если пассажир для передвижения на транспортном средстве отводит время (см. рис. 10.2, б)

$$T_T = \bar{t}_T + d_T / 2, \quad (10.71)$$

то вероятность P_T того, что продолжительность поездки на транспортном средстве не превысит указанного времени, будет не менее 0,95.

Для того чтобы поездка пассажира состоялась, необходимо появление двух событий – посадки в транспортное средство и передвижения в нем до пункта назначения. Эти события независимые, поэтому событие, состоящее в появлении обоих указанных событий, определяется произведением их вероятностей.

Если время посадки пассажира в транспортное средство оказалось больше времени, отводимого им для этой цели, а в процессе передвижения на транспортном средстве скомпенсировать эту потерю времени не удалось, то пассажир может опоздать в пункт назначения.

Пассажир также может опоздать и в случае, когда посадка в транспортное средство была произведена в отведенное для этого время, а поездка в транспортном средстве оказалась более длительной, чем это планировалось пассажиром.

Но самый неприятный для пассажира случай наступает тогда, когда он затрачивает время больше положенного и на посадку, и на передвижение. Это, как правило, бывает при плохой работе общественного транспорта.

Будем считать, что в первых двух случаях потери времени не очень большие и пассажир благополучно добирается до целевого объекта, компенсируя потерю за счет остатков свободного времени, а за-

паздывание в последнем случае грозит пассажиру неприятностями. Тогда риск пассажира попасть в ситуацию, обусловленную неприятностями, определяется вероятностью q_p наступления двух независимых событий, характеризуемых перерасходом времени на посадку в транспортное средство и проезд в нем. Вероятность

$$q_p = (1 - P_0)(1 - P_T). \quad (10.72)$$

Предположим, что в течение года пассажир делает ν трудовых поездок. Тогда вероятность Q_p того, что пассажир опоздает на работу за год не более u раз, можно подсчитать по формуле Бернулли:

$$Q_p = C_\nu^u q_p^u (1 - q_p)^{\nu - u}, \quad (10.73)$$

где C_ν^u – число сочетаний из ν по u .

Поскольку вероятность q_p мала, а количество ν трудовых поездок велико, то Q_p может быть выражена формулой Пуассона:

$$Q_p = \frac{(\nu q_p)^u}{u!} e^{-\nu q_p}. \quad (10.74)$$

Подставляя в уравнение (10.74) значение q_p из выражения (10.72), получаем значение 0,978 вероятности того, что пассажир может опоздать на работу не более одного-двух раз в год. Это вполне приемлемая величина риска при совершении трудовых поездок на общественном транспорте.

Следовательно, время, которым располагает пассажир для посадки в транспортное средство и проезд в нем, может быть описано выражением

$$T_p = T_0 + T_T = \bar{t}_0 + d_0 / 2 + \bar{t}_T + d_T / 2. \quad (10.75)$$

Так как $d_0/2$ и $d_T/2$ – допустимые отклонения случайной величины, то формула (10.75) принимает вид

$$T_p = \bar{t}_0 + \Delta_0 + \bar{t}_T + \Delta_T, \quad (10.76)$$

где $\Delta_0 = d_0 / 2$ – допустимое отклонение времени ожидания пассажиром транспортного средства для совершения посадки в него; $\Delta_T = d_T / 2$ – допустимое отклонение времени передвижения в транспортном средстве.

Полученные выражения (10.68, 10.71, 10.76) позволяют произвести оценку времени, отводимого пассажиром для посадки, передвиже-

ния и поездки в целом, т. е. оценить запас времени у пассажира, однако фактические значения указанных времен зависят от реально складывающейся картины перевозочного процесса.

Время T_0^Φ фактического ожидания пассажиром посадки в транспортное средство в основном зависит от интенсивности потока транспортных единиц множества маршрутов, с помощью которых удовлетворяется потребность пассажира в поездке, от наполненности этих единиц на момент посадки и количества пассажиров на остановочном пункте (условной очереди), желающих выполнить поездку на этих транспортных единицах.

Пусть t_1, \dots, t_m – интервалы движения транспортных средств соответственно на 1-м, ..., m -м маршрутах множества, которыми намеревается воспользоваться пассажир (рис. 10.5, а). Интенсивность ξ -го потока транспортных средств

$$\lambda_\xi = \frac{1}{t_\xi}, \quad (10.77)$$

где t_ξ – интервал движения на ξ -м маршруте.

Поскольку пассажир может воспользоваться множеством маршрутов, то интенсивность потока транспортных единиц, с помощью которых возможно совершить поездку, выразится как

$$\lambda_\Pi = \sum_{\xi=1}^m \lambda_\xi = \frac{1}{t_\Pi}, \quad (10.78)$$

где λ_Π – интенсивность движения транспортных единиц, принадлежащих множеству маршрутов 1, ..., m (интенсивность суммарного потока Π_Σ); t_Π – интервал движения транспортных единиц, принадлежащих множеству маршрутов 1, ..., m .

Пусть из пассажирских корреспонденций, осуществляющих поездки с данного остановочного пункта, сформировано упорядоченное множество $\{Z(E), \geq\}$, или условная очередь, в которой пассажирская корреспонденция Z_i занимает i -е место. Предположим, что на прибывшую на остановочный пункт транспортную единицу, принадлежащую потоку Π_Σ (рис. 10.5, б), была произведена посадка, которая закончилась на пассажирской корреспонденции Z_j . Тогда если $j < i$, то посадка пассажира, обозначенного корреспонденцией Z_i , может быть осуществлена через k транспортных единиц потока Π_Σ , которые будут

заполняться пассажирскими корреспонденциями, доминирующими над Z_i в множестве $\{Z(E), \geq\}$.

Будем полагать, что количество пассажиров, входящих в каждое прибывающее транспортное средство потока Π_Σ , равно некоторому среднему числу \bar{Z} . Исходя из этого число транспортных единиц

$$k = \left[\frac{Z_i}{\bar{Z}} \right], \quad (10.79)$$

т. е. равно целой части числа («антье»), если Z_i / \bar{Z} – нецелое число, и

$$k = \frac{Z_i}{\bar{Z}} - 1, \quad (10.80)$$

если Z_i / \bar{Z} – целое число.

Следовательно, у нового потока Θ , обеспечивающего посадку пассажира в транспортное средство, интервал t_Θ между событиями представляет собой сумму $(k + 1)$ независимых случайных величин, распределенных одинаково по показательному закону с параметром λ_Π .

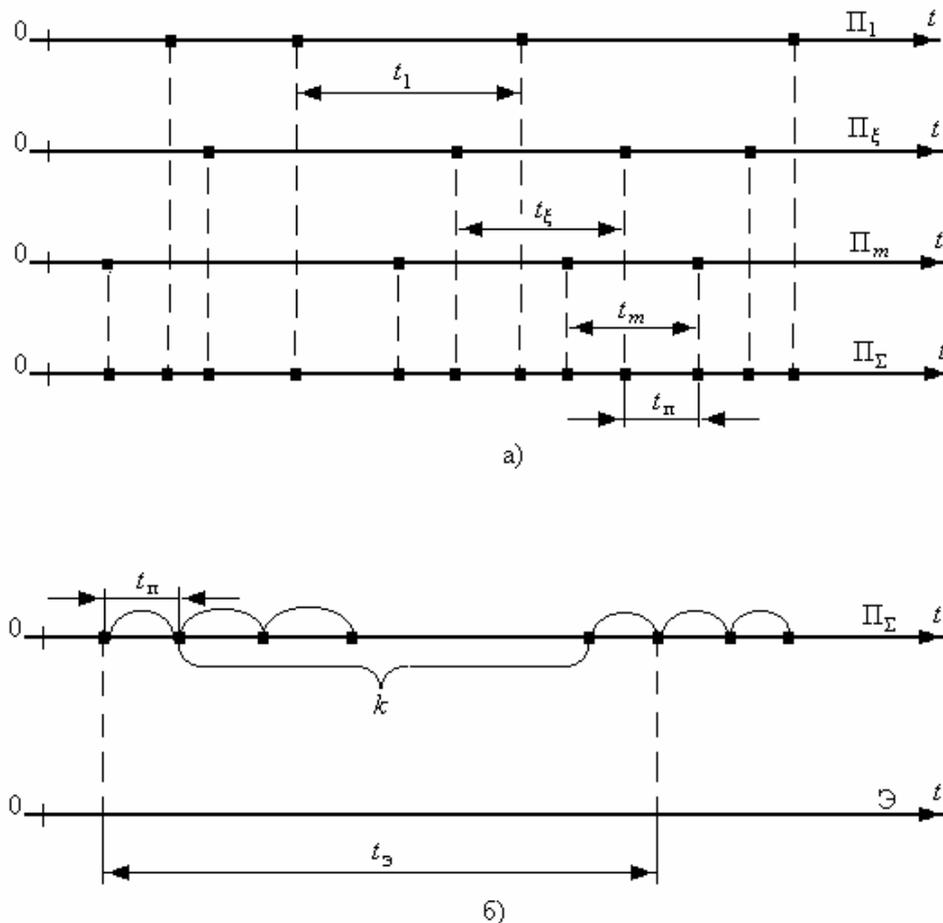


Рис. 10.5. К определению времени фактического ожидания пассажиром посадки в транспортное средство

Данный поток является потоком Эрланга k -го порядка, плотность распределения случайной величины t_3 (интервала между двумя соседними событиями) в котором

$$f(t) = \frac{\lambda_n (\lambda_n t)^k}{k!} e^{-\lambda_n t}. \quad (10.81)$$

Функция распределения случайной величины для целого $k \geq 0$ имеет вид

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 1 - \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda_n t)^n}{n!} e^{-\lambda_n t}. \quad (10.82)$$

Обозначим

$$R(k, \lambda_n t) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda_n t)^n}{n!} e^{-\lambda_n t}, \quad (10.83)$$

тогда выражение (10.82) примет вид

$$F(t) = 1 - R(k, \lambda_n t). \quad (10.84)$$

Математическое ожидание интервала t_3 между прибытием соседних транспортных единиц в потоке Э

$$m_3 = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (10.85)$$

Подставляя в уравнение (10.85) значение функции плотности распределения из выражения (10.81), получаем

$$m_3 = \frac{\lambda_n^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} t^{(k+1)} e^{-\lambda_n t} dt = \frac{k+1}{\lambda_n}. \quad (10.86)$$

Соответственно дисперсия и среднее квадратическое отклонение находятся следующим образом:

$$D_3 = \int_0^{\infty} (t - m_3)^2 f(t) dt = \frac{k+1}{\lambda_n^2}, \quad (10.87)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda_n}. \quad (10.88)$$

Поскольку, как было сказано выше (10.69), отклонение времени движения транспортной единицы на участках дорожной сети определяется с 90%-й доверительной вероятностью, то целесообразно и время фактического ожидания пассажиром этого транспортного средства вычислять с таким же значением доверительной вероятности. Для этого воспользуемся свойством функции $R(k, \lambda_n t)$, которое дает возможность при значении параметра $(\lambda_n t) > 20$ применять выражение

$$R(k, \lambda_n t) \approx \Phi^* \left(\frac{k + 0,5 - \lambda_n t}{\sqrt{\lambda_n t}} \right), \quad (10.89)$$

где $\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Значение функции Φ^* при доверительной вероятности 0,9 равно 1,27. Подставляя это значение в формулу (10.89), получаем параметр $(\lambda_n t) = 20,209$ при $k = 14$. С учетом выражений (10.86, 10.88) можно записать

$$\lambda_n t = \lambda T_0^\Phi = \lambda_n \left(\frac{k+1}{\lambda_n} + E \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda_n} \right) = k+1 + E\sqrt{k+1}, \quad (10.90)$$

где E – коэффициент, связывающий между собой значение времени T_0^Φ и уровень доверительной вероятности.

Решая уравнение (10.90) относительно E при $\lambda_n t = 20,209$ и $k = 14$, получаем $E = 1,34$. Подставляя выражение (10.90) в уравнение (10.82) и учитывая значение E , получаем

$$F(t) = 1 - \sum_{n=0}^k \frac{(k + 1,34\sqrt{k+1} + 1)^n}{n!} e^{-(k+1,34\sqrt{k+1}+1)}, \quad (10.91)$$

что позволяет вычислить уровень доверительной вероятности при $k < 14$. Расчеты по формуле (10.91) показывают, что для всех $1 \leq k < 14$ $F(t) = 0,9$ с погрешностью не более 0,2 %. Следовательно, с вероятностью 0,9 время фактического ожидания пассажиром транспортного средства

$$T_0^\Phi = t_n (k + 1 + 1,34\sqrt{k+1}). \quad (10.92)$$

При $k = 0$ получается исходный поток Π_Σ , так как никакого преобразования исходного потока мы не производим.

Напомним, что полученное значение времени T_0^Φ необходимо для прогнозирования автоматической системой диспетчерского управления выбора пассажиром маршрута поездки. Значение T_0^Φ в условиях работы системы определяется через интервал t_n движения транспортных единиц, принадлежащих соответствующему множеству маршрутов, получаемый с помощью автоматического контроля моментов их прибытия на остановочный пункт.

Таким образом, получение данных для разработанных математических моделей – сложная задача, для решения которой необходимо

использовать различные методы и приемы, а иногда руководствоваться только здравым смыслом. Более того, поскольку подготавливаемые для моделей данные зависят от нескольких факторов, то необходимо расчленять задачу на ряд частных, решать каждую из них в отдельности и потом объединять полученные решения. Несмотря на то, что подобное получение данных представляет собой довольно трудоемкую процедуру, приходится мириться с этим, так как это единственный путь решения указанной задачи.

Если необходима модель, которая адекватно отражала бы протекающие в действительности процессы, то она должна быть многофакторной, чувствительной к изменению ряда факторов, а следовательно, и более содержательной с точки зрения информационного наполнения. При этом с увеличением числа учитываемых факторов возрастает и сложность отыскания закономерности взаимосвязей между переменными. Однако не следует также забывать, что одно из требований к математической модели, обеспечивающее удобство ее дальнейшего использования, – ее компактность. Но это требование, предполагающее отказ от учета лишних факторов, входит в прямое противоречие с требованиями точности описания моделируемого явления, поэтому использовать для модели нужно только те факторы, которые действительно повышают точность описания исследуемого явления. Повышение точности важно в конечном счете для получения экономического эффекта от использования модели.

В заключение следует сказать, что моделирование поведения биологических объектов, в частности человека, зависит от множества факторов и представляет собой сложную задачу.

Вопросы для самоконтроля

1. Какова точность феноменологических моделей по сравнению с физическими?
2. Какими приемами следует руководствоваться при определении исходных данных для модели?
3. Каким образом следует подготавливать для моделей данные, которые зависят от нескольких факторов?

Глава 11
МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

**11.1. Выбор эмпирической формулы.
Метод выравнивания**

Опытное изучение какой-либо неизвестной закономерности $y = f(x)$ дает результаты наблюдений, которые можно представить в виде таблицы соответствующих значений x_i и y_i . По этим значениям можно построить кривую зависимости y от x и приближенно представить ее некоторой эмпирической формулой $y = \varphi(x)$. При этом выбор той или иной эмпирической формулы диктуется требованием наилучшего приближения $\varphi(x)$ к $f(x)$ в некотором интервале значений x .

Функцию $f(x)$ можно выразить различными эмпирическими формулами. В некоторых задачах в качестве $\varphi(x)$ берут функцию, для которой в заданном интервале значений x получается наилучшее приближение, т.е. $|f(x) - \varphi(x)|$ будет меньше, чем при использовании какой-либо другой эмпирической формулы.

Прежде чем приступить к определению численных значений коэффициентов в выбранной эмпирической формуле, необходимо проверить возможность ее использования методом выравнивания, который заключается в том, что преобразование функции $y = \varphi(x)$ осуществляют таким образом, чтобы превратить ее в линейную функцию, например:

- 1) $y = \frac{a}{x} \rightarrow y = ax'$, где $x' = \frac{1}{x}$;
- 2) $y = x^a \rightarrow \lg y = a \lg x \rightarrow y' = ax'$, где $y' = \lg y$, $x' = \lg x$;
- 3) $y = a \lg x \rightarrow y = ax'$, где $x' = \lg x$;
- 4) $y = a^x \rightarrow y' = a'x$, где $y' = \lg y$, $a' = \lg a$;
- 5) $y = e^{ax} \rightarrow y' = a'x$, где $y' = \lg y$, $a' = a \lg e$;
- 6) $y = ax$ не требует никакого преобразования.

Поскольку все формулы преобразованы в формулы одинакового вида, то можно найти общий вид уравнения для вычисления коэффициента a . Обычно его определяют среднеарифметическим методом, а в случае необходимости – методом наименьших квадратов.

При вычислении среднеарифметическим методом требуется, чтобы сумма разностей между значениями искомой величины, найденными по используемой формуле, и экспериментальными значениями равнялась нулю. Для этого составляют уравнения, число k которых равно числу переменных:

$$\sum_{i=1}^k (y_i - ax_i) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^k y_i = a \sum_{i=1}^k x_i. \quad (11.1)$$

Откуда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^k x_i}. \quad (11.2)$$

Для первой формулы $y = a/x$ в соответствии с уравнением (11.2) имеем

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^k x'_i} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}}. \quad (11.3)$$

Для второй формулы $y = x^a$ запишем

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k y'_i}{\sum_{i=1}^k x'_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \lg y_i}{\sum_{i=1}^k \lg x_i}. \quad (11.4)$$

Соответственно для третьей формулы $y = a \lg x$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^k x'_i} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^k \lg x_i}. \quad (11.5)$$

Для формулы $y = a^x$ получим

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^k y'_i}{\sum_{i=1}^k x_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \lg y_i}{\sum_{i=1}^k x_i}. \quad (11.6)$$

И, наконец, для формулы $y = e^{ax}$ имеем

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^k y'_i}{\sum_{i=1}^k x_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \lg y_i}{\sum_{i=1}^k x_i}, \quad (11.7)$$

откуда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k \lg y_i}{\lg e \sum_{i=1}^k x_i}. \quad (11.8)$$

Для последней формулы $y = ax$ значение постоянной a определяется по формуле (11.2) без всяких преобразований.

Согласно методу наименьших квадратов постоянная величина формулы определяется из условия, при котором сумма квадратов разностей между значениями искомой величины, вычисленными по найденной формуле, и опытными значениями этой величины была бы минимальной. При этом нет необходимости (как и в первом случае) стремиться к нулю, т.е. к совпадению всех опытных данных со значениями, вычисленными по эмпирической формуле, так как в силу погрешности измерения опытных данных такое совпадение иногда может снизить точность формулы.

$$\text{В общем виде} \quad \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i)^2 = \min. \quad (11.9)$$

Для определения значения a надо взять производную по a от этой суммы и приравнять к нулю:

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i)^2 = 0 \quad (11.10)$$

или $\sum_{i=1}^k (y_i - ax_i)x_i = 0$, откуда

$$\sum_{i=1}^k y_i x_i = a \sum_{i=1}^k x_i^2. \quad (11.11)$$

Из уравнения (11.11) находим

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x_i y_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2}. \quad (11.12)$$

Преобразуем приведенные выше формулы (для линейной зависимости) в соответствии с уравнением (11.12).

Для первой формулы $y = a/x$ имеем

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i y_i}{\sum_{i=1}^k x_i'^2} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{y_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i^2}}. \quad (11.13)$$

Для второй формулы $y = x^a$ получаем

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^k x_i'^2} = \frac{\sum_{i=1}^k \lg x_i \cdot \lg y_i}{\sum_{i=1}^k (\lg x_i)^2}. \quad (11.14)$$

Для третьей формулы $y = a \lg x$ запишем

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i y_i}{\sum_{i=1}^k x_i'^2} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i \lg x_i}{\sum_{i=1}^k (\lg x_i)^2}. \quad (11.15)$$

Для четвертой формулы $y = a^x$ имеем

$$a' = \lg a \frac{\sum_{i=1}^k x_i y'_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \lg y_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2}. \quad (11.16)$$

В данном случае определяется сначала значение $\lg a$, а затем величина a . Наконец, для пятой формулы получаем

$$a' = a \lg e \frac{\sum_{i=1}^k x_i y'_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \lg y_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2}, \quad (11.17)$$

откуда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \lg y_i}{\lg e \sum_{i=1}^k x_i^2} \quad (11.18)$$

Для формулы $y = ax$ значение постоянной a вычисляется по формуле (11.12) без всяких преобразований.

Покажем на численных примерах, как определяется на основе опытных данных постоянная формулы.

Пример 11.1. Результаты опытов по измерению теплоемкости бензина для различной температуры приведены в табл. 11.1, 11.2.

Таблица 11.1

x_i Температура, t , °С	y_i Теплоемкость бензина, c_p , $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$	$\lg y_i$	$\lg x_i$	$a = \frac{\lg y_i}{\lg x_i}$
60	2,24	0,350	1,778	0,197
70	2,30	0,362	1,845	0,196
80	2,35	0,371	1,903	0,195
90	2,41	0,382	1,954	0,195
100	2,46	0,391	2,000	0,195
110	2,51	0,400	2,041	0,196
120	2,57	0,410	2,079	0,197
130	2,62	0,418	2,114	0,198
140	2,68	0,428	2,146	0,199
150	2,74	0,438	2,176	0,201
—	—	$\Sigma = 3,95$	$\Sigma = 20,036$	—

Теоретические соображения дают основания предполагать наличие пропорциональной зависимости между опытными данными: с повышением температуры происходит увеличение теплоемкости бензина. Предположительно эта зависимость может быть описана функ-

цией $y = x^a$. Если такая зависимость существует, то согласно среднеарифметическому методу (11.4)

$$a = \frac{\lg y_i}{\lg x_i} = \text{const}.$$

Находим величину этих соотношений и вписываем ее в табл. 11.1.

Для нахождения постоянной a методом наименьших квадратов воспользуемся формулой (11.14):

$$a = \frac{\lg x_i \cdot \lg y_i}{(\lg x_i)^2} = \text{const}.$$

Находим величину указанных соотношений и вписываем ее в табл. 11.2.

Таблица 11.2

x_i Температура, t , °С	y_i Теплоемкость бензина, c_p , $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$	$\lg x_i \cdot \lg y_i$	$(\lg x_i)^2$	$a = \frac{\lg x_i \lg y_i}{(\lg x_i)^2}$
60	2,24	0,622	3,161	0,197
70	2,30	0,668	3,404	0,196
80	2,35	0,706	3,621	0,195
90	2,41	0,746	3,818	0,195
100	2,46	0,782	4,000	0,195
110	2,51	0,816	4,166	0,196
120	2,57	0,852	4,322	0,197
130	2,62	0,884	4,469	0,198
140	2,68	0,918	4,605	0,199
150	2,74	0,953	4,735	0,201
–	–	$\Sigma = 7,947$	$\Sigma = 40,301$	–

Согласно среднеарифметическому методу $a = \frac{\sum_{i=1}^{10} \lg y_i}{\sum_{i=1}^{10} \lg x_i} = \frac{3,95}{20,036} = 0,19715$.

Согласно методу наименьших квадратов

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} \lg x_i \cdot \lg y_i}{\sum_{i=1}^{10} (\lg x_i)^2} = \frac{7,947}{40,301} = 0,19719.$$

Чтобы установить, какой из найденных коэффициентов a наиболее соответствует результатам опытов, надо определить по принятой формуле значения y_i для каждого опыта при обоих значениях коэффициента a , а затем найти разность между опытными данными и вычисленными значениями. Далее следует вычислить квадраты этих разностей согласно обоим методам. Результаты таких вычислений приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

x_i	y_i	Среднеарифметический метод, $a = 0,19715$			Метод наименьших квадратов, $a = 0,19719$		
		x^a	Δ	Δ^2	x^a	Δ	Δ^2
60	2,24	2,24	0	0	2,24	0	0
70	2,30	2,31	-0,01	0,0001	2,31	-0,01	0,0001
80	2,35	2,37	-0,02	0,0004	2,37	-0,02	0,0004
90	2,41	2,43	-0,02	0,0004	2,43	-0,02	0,0004
100	2,46	2,48	-0,02	0,0004	2,48	-0,02	0,0004
110	2,51	2,53	-0,02	0,0004	2,53	-0,02	0,0004
120	2,57	2,57	0	0	2,57	0	0
130	2,62	2,61	+0,01	0,0001	2,61	+0,01	0,0001
140	2,68	2,65	+0,03	0,0009	2,65	+0,03	0,0009
150	2,74	2,69	+0,05	0,0025	2,69	+0,05	0,0025
—	—	—	$\Sigma = 0,18$	$\Sigma = 0,0048$	—	$\Sigma = 0,18$	$\Sigma = 0,0048$

Из табл. 11.3 видно, что оба метода в данном случае дают одинаковую точность, поскольку $\Sigma \Delta^2$ одинаковы. В противном случае следовало бы выбрать то значение коэффициента a , при котором $\Sigma \Delta^2$ оказалась бы меньше.

Следовательно, для представления теоретической зависимости теплоемкости бензина от температуры можно использовать $a = 0,19715$ или $a = 0,19719$.

11.2. Выбор эмпирической формулы с двумя постоянными величинами

При описании экспериментальных кривых часто используют формулы с двумя постоянными величинами.

Проведем преобразование некоторых функций:

$$1) y = nx^a \rightarrow y' = ax' + n', \text{ где } y' = \lg y, x' = \lg x, n' = \lg n;$$

$$2) y = a \lg x + n \rightarrow y = ax' + n, \text{ где } x' = \lg x;$$

$$3) y = e^{ax+n} \rightarrow y' = a'x + n', \text{ где } y' = \lg y, a' = a \lg e, n' = n \lg e;$$

$$4) y = ne^{ax} \rightarrow y' = a'x + n', \text{ где } y' = \lg y, a' = a \lg e, n' = \lg n;$$

$$5) y = \frac{a}{x} + n \rightarrow y = ax' + n, \text{ где } x' = \frac{1}{x};$$

$$6) y = \frac{1}{ax+n} \rightarrow y' = ax + n, \text{ где } y' = \frac{1}{y};$$

$$7) y = \frac{x}{nx+a} \rightarrow y' = ax' + n, \text{ где } y' = \frac{1}{y}, x' = \frac{1}{x};$$

$$8) y = ax + n \text{ не требует преобразования.}$$

Согласно среднеарифметическому методу для последней формулы имеем $\sum_{i=1}^k [y - (ax + n)] = 0$, где k – число опытных данных (опытов).

Раскрывая скобки, получаем

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x - \sum_{i=1}^k n = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x - nk = 0. \quad (11.19)$$

Так как для определения a и n требуется два уравнения, то данные разбивают на две группы с одинаковым числом опытов в каждой.

$$\sum_{i=1}^{k/2} y - a \sum_{i=1}^{k/2} x - \frac{nk}{2} = 0 \text{ и } \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k y - a \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k x - \frac{nk}{2} = 0.$$

Решая эти уравнения находят постоянные a и n .

Равенство (11.19) остается без изменений только для последнего уравнения $y = ax + n$, а для остальных оно трансформируется в зависимости от произведенных преобразований.

Для первой функции $y = nx^a$ запишем

$$\sum_{i=1}^k y' - a \sum_{i=1}^k x' - n'k = \sum_{i=1}^k \lg y - a \sum_{i=1}^k \lg x - k \lg n = 0. \quad (11.20)$$

Для второй функции $y = a \lg x + n$ имеем

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k \lg x - nk = 0. \quad (11.21)$$

Для третьей функции $y = e^{ax+n}$ получаем

$$\sum_{i=1}^k y' - a' \sum_{i=1}^k x - n'k = \sum_{i=1}^k \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x - kn \lg e = 0. \quad (11.22)$$

Для четвертой формулы $y = ne^{ax}$ имеем

$$\sum_{i=1}^k y' - a' \sum_{i=1}^k x - n'k = \sum_{i=1}^k \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x - k \lg n = 0. \quad (11.23)$$

Для пятой функции $y = \frac{a}{x} + n$ запишем

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} - nk = 0. \quad (11.24)$$

Для шестой функции $y = \frac{1}{ax+n}$ получаем

$$\sum_{i=1}^k y' - a \sum_{i=1}^k x - nk = \sum_{i=1}^k \frac{1}{y} - a \sum_{i=1}^k x - nk = 0. \quad (11.25)$$

И, наконец, для седьмой функции $y = \frac{x}{nx+a}$ имеем

$$\sum_{i=1}^k y' - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k \frac{1}{y} - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} - nk = 0. \quad (11.26)$$

Согласно методу наименьших квадратов для уравнения $y = ax + n$ запишем

$$\sum_{i=1}^k [y - (ax + n)]^2 = \min. \quad (11.27)$$

Приравнявая к нулю частные производные от этого выражения по a и n имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^k (y - ax - n)^2 &= \sum_{i=1}^k [-2x(y - ax - n)] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^k (y - ax - n)^2 &= \sum_{i=1}^k [-2(y - ax - n)] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^k xy - a \sum_{i=1}^k x^2 - n \sum_{i=1}^k x = 0; \quad (11.28)$$

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x - nk = 0. \quad (11.29)$$

Решая уравнения (11.28), (11.29), находят постоянные a и n , причем эти равенства остаются без изменений только для функции $y = ax + n$, а для других функций необходимы соответствующие преобразования.

Для первой функции $y = nx^a$ запишем

$$\sum_{i=1}^k x'y' - a \sum_{i=1}^k x'^2 - n' \sum_{i=1}^k x' = \sum_{i=1}^k \lg x \cdot \lg y - a \sum_{i=1}^k (\lg x)^2 - \lg n \sum_{i=1}^k \lg x = 0; \quad (11.30)$$

$$\sum_{i=1}^k \lg y - a \sum_{i=1}^k \lg x - k \lg n = 0. \quad (11.31)$$

Для второй функции $y = a \lg x + n$ имеем

$$\sum_{i=1}^k x'y' - a \sum_{i=1}^k x'^2 - n \sum_{i=1}^k x' = \sum_{i=1}^k y \lg x - a \sum_{i=1}^k (\lg x)^2 - n \sum_{i=1}^k \lg x = 0; \quad (11.32)$$

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k \lg x - nk = 0. \quad (11.33)$$

Для третьей функции $y = e^{ax+n}$ получаем

$$\sum_{i=1}^k xy' - a \sum_{i=1}^k x^2 - n' \sum_{i=1}^k x = \sum_{i=1}^k x \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x^2 - n \lg e \sum_{i=1}^k x = 0; \quad (11.34)$$

$$\sum_{i=1}^k y' - a' \sum_{i=1}^k x - n'k = \sum_{i=1}^k \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x - nk \lg e = 0. \quad (11.35)$$

Для четвертой функции $y = ne^{ax}$ запишем

$$\sum_{i=1}^k xy' - a' \sum_{i=1}^k x^2 - n' \sum_{i=1}^k x = \sum_{i=1}^k x \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x^2 - \lg n \sum_{i=1}^k x = 0; \quad (11.36)$$

$$\sum_{i=1}^k y' - a' \sum_{i=1}^k x - n'k = \sum_{i=1}^k \lg y - a \lg e \sum_{i=1}^k x - k \lg n = 0. \quad (11.37)$$

Для пятой функции $y = \frac{a}{x} + n$ имеем

$$\sum_{i=1}^k x'y' - a \sum_{i=1}^k x'^2 - n \sum_{i=1}^k x' = \sum_{i=1}^k \frac{y}{x} - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x^2} - n \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} = 0; \quad (11.38)$$

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} - nk = 0. \quad (11.39)$$

Для шестой функции $y = \frac{1}{ax+n}$ получаем

$$\sum_{i=1}^k xy' - a \sum_{i=1}^k x^2 - n \sum_{i=1}^k x = \sum_{i=1}^k \frac{x}{y} - a \sum_{i=1}^k x^2 - n \sum_{i=1}^k x = 0; \quad (11.40)$$

$$\sum_{i=1}^k y' - a \sum_{i=1}^k x - nk = \sum_{i=1}^k \frac{1}{y} - a \sum_{i=1}^k x - nk = 0. \quad (11.41)$$

И, наконец, для седьмой функции $y = \frac{x}{nx+a}$ имеем

$$\sum_{i=1}^k x'y' - a \sum_{i=1}^k x'^2 - n \sum_{i=1}^k x' = \sum_{i=1}^k \frac{1}{xy} - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x^2} - n \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} = 0; \quad (11.42)$$

$$\sum_{i=1}^k y' - a \sum_{i=1}^k x' - nk = \sum_{i=1}^k \frac{1}{y} - a \sum_{i=1}^k \frac{1}{x} - nk = 0. \quad (11.43)$$

Определение постоянных a и n , входящих в формулу, сводится к решению системы уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + nk_1 + y_1 &= 0, \\ ax_2 + nk_2 + y_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

где x , y и k – постоянные величины, соответствующие опытным данным, следующими способами:

1) умножением первого уравнения на x_2/x_1 или второго уравнения на x_1/x_2 для определения n ;

2) умножением первого уравнения на k_2/k_1 или второго уравнения на k_1/k_2 для определения n .

Так как в уравнениях системы (11.44) коэффициенты – приближенные величины, определяемые опытными данными, то для получения более точных результатов следует использовать тот способ, в котором умножение происходит на наименьший множитель.

Пример 11.2. Найдем зависимость теплоемкости бензина от температуры, используя для этого функцию $y = nx^a$. Согласно среднеарифметическому методу (11.20)

$$a \sum_{i=1}^5 \lg x + k \lg n - \sum_{i=1}^5 \lg y = 0;$$

$$a \sum_{i=6}^{10} \lg x + k \lg n - \sum_{i=6}^{10} \lg y = 0.$$

Подставляя значения $\sum x_i$ и $\sum y_i$ из табл. 11.1, получаем

$$9,48a + 5 \lg n - 1,856 = 0;$$

$$10,556a + 5 \lg n - 2,094 = 0.$$

Решая эти два уравнения путем исключения n , получаем $a = 0,221$, $n = 0,896$.

Для определения a и n методом наименьших квадратов (11.30), (11.31) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^{10} (\lg x_i)^2 + \lg n \sum_{i=1}^{10} \lg x_i - \sum_{i=1}^{10} \lg x_i \cdot \lg y_i = 40,301a + 20,036 \lg n - 7,947 = 0, \\ a \sum_{i=1}^{10} \lg x_i + k \lg n - \sum_{i=1}^{10} \lg y_i = 20,036a + 10 \lg n - 3,95 = 0. \end{array} \right.$$

Решаем эту систему уравнений и получаем $a = 0,209$, $n = 0,947$.

Для определения более приемлемых значений a и n необходимо, как это делалось ранее, сравнить суммы отклонений и суммы квадратов отклонений, полученные обоими методами. Результаты этих вычислений представлены в табл. 11.4.

Таблица 11.4

x_i	y_i	Среднеарифметический метод, $a = 0,221, n = 0,896$			Метод наименьших квадратов, $a = 0,209, n = 0,947$		
		nx^a	Δ	Δ^2	nx^a	Δ	Δ^2
60	2,24	2,21	+0,03	0,0009	2,23	+0,01	0,0001
70	2,30	2,29	+0,01	0,0001	2,30	0	0
80	2,35	2,36	-0,01	0,0001	2,37	-0,02	0,0004
90	2,41	2,42	-0,01	0,0001	2,43	-0,02	0,0004
100	2,46	2,48	-0,02	0,0004	2,48	-0,02	0,0004
110	2,51	2,53	-0,02	0,0004	2,53	-0,02	0,0004
120	2,57	2,58	-0,01	0,0001	2,58	-0,01	0,0001
130	2,62	2,63	-0,01	0,0001	2,62	0	0
140	2,68	2,67	+0,01	0,0001	2,66	+0,02	0,0004
150	2,74	2,71	+0,03	0,0009	2,70	+0,04	0,0016
–	–	–	$\Sigma = 0,16$	$\Sigma = 0,0032$	–	$\Sigma = 0,16$	$\Sigma = 0,0038$

Сравнение результатов вычислений показывает, что сумма отклонений оказалась в обоих методах одинаковой, а сумма квадратов отклонений – меньше по среднеарифметическому методу. Поэтому в окончательной формуле учитывают коэффициенты, найденные по среднеарифметическому методу: $y = 0,896x^{0,221}$. Заметим, что сумма отклонений и сумма квадратов отклонений, вычисленных с помощью среднеарифметического метода и метода наименьших квадратов по формуле $y = nx^a$, оказались меньше, чем по формуле $y = x^a$.

11.3. Выбор эмпирической формулы с тремя постоянными величинами

В случае, когда не удастся описать экспериментальную кривую посредством формул с одной или двумя постоянными, приступают к

подбору формулы с тремя постоянными. Количество и разнообразие таких формул велико.

В общем виде уравнение с тремя постоянными можно записать следующим образом:

$$y = ax^2 + nx + c. \quad (11.45)$$

Постоянные a , n и c такого уравнения могут быть также определены среднеарифметическим методом и методом наименьших квадратов.

Для среднеарифметического метода запишем

$$\sum_{i=1}^k [y - (ax^2 + nx + c)] = \sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x^2 - n \sum_{i=1}^k x - kc = 0. \quad (11.46)$$

Поскольку для определения трех постоянных требуется три уравнения, то экспериментальные данные следует разбить на три группы и составить указанные уравнения, решение которых даст величины этих постоянных.

Для метода наименьших квадратов необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$\sum_{i=1}^k [y - (ax^2 + nx + c)]^2 = \min. \quad (11.47)$$

Приравнявая к нулю частные производные по a , n и c , имеем

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^k [y - (ax^2 + nx + c)]^2 = 2 \sum_{i=1}^k \{-x^2 [y - (ax^2 + nx + c)]\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^k [y - (ax^2 + nx + c)]^2 = 2 \sum_{i=1}^k \{-x [y - (ax^2 + nx + c)]\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^k [y - (ax^2 + nx + c)]^2 = 2 \sum_{i=1}^k \{-[y - (ax^2 + nx + c)]\} = 0.$$

После преобразования получаем

$$\sum_{i=1}^k yx^2 - a \sum_{i=1}^k x^4 - n \sum_{i=1}^k x^3 - c \sum_{i=1}^k x^2 = 0; \quad (11.48)$$

$$\sum_{i=1}^k yx - a \sum_{i=1}^k x^3 - n \sum_{i=1}^k x^2 - c \sum_{i=1}^k x = 0; \quad (11.49)$$

$$\sum_{i=1}^k y - a \sum_{i=1}^k x^2 - n \sum_{i=1}^k x - kc = 0. \quad (11.50)$$

Чтобы составить полученные уравнения, необходимо предварительно по результатам каждого эксперимента вычислить значения yx^2 , yx , x^4 , x^3 , x^2 и, найдя их суммы, подставить в выражения (11.48), (11.49), (11.50).

Пример 11.3. Найдем зависимость теплоемкости бензина от температуры, используя для этого функцию $y = ax^2 + nx + c$. Согласно среднеарифметическому методу (11.46) можно записать

$$\sum_{i=1}^3 y - a \sum_{i=1}^3 x^2 - n \sum_{i=1}^3 x - kc = 0;$$

$$\sum_{i=4}^6 y - a \sum_{i=4}^6 x^2 - n \sum_{i=4}^6 x - kc = 0;$$

$$\sum_{i=7}^{10} y - a \sum_{i=7}^{10} x^2 - n \sum_{i=7}^{10} x - kc = 0.$$

Берем из таблицы 11.1 данные для каждой группы опытов и определяем значения $\sum x_i$, $\sum y_i$ и $\sum x_i^2$. Результаты вычислений сведены в табл. 11.5. После этого составляем систему из трех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\,900a + 210n + 3c - 6,89 = 0; \\ 30\,200a + 300n + 3c - 7,38 = 0; \\ 73\,400a + 540n + 4c - 10,61 = 0. \end{array} \right.$$

Решая первое полученное уравнение со вторым, а второе – с третьим, получаем

$$15\,300a + 90n - 0,49 = 0;$$

$$24\,850a + 105n - 0,5775 = 0.$$

Решая полученные уравнения, находим $a = 8,3 \cdot 10^{-7}$, $n = 5,3 \cdot 10^{-3}$ и $c = 1,92$.

Для определения постоянных a , n , c по методу наименьших квадратов в соответствии с выражениями (11.48), (11.49), (11.50) и данными из табл. 11.4 составляем следующие уравнения:

$$17,7333 \cdot 10^8 a + 14,175 \cdot 10^6 n + 118\,500c - 304\,330 = 0;$$

$$14,175 \cdot 10^6 a + 118\,500 n + 1\,050 c - 2\,657,6 = 0;$$

$$118\,500 a + 1\,050 n + 10 c - 24,88 = 0.$$

Таблица 11.5

x_i	y_i	$y_i \cdot x_i$	x_i^2	$y_i \cdot x_i^2$	x_i^3	x_i^4
60	2,24	134,4	3 600	8 064	$2,16 \cdot 10^5$	$1,296 \cdot 10^7$
70	2,30	161	4 900	11 270	$3,43 \cdot 10^5$	$2,401 \cdot 10^7$
80	2,35	188	6 400	15 040	$5,12 \cdot 10^5$	$4,096 \cdot 10^7$
$\Sigma = 210$	6,89	483,4	14 900	34 374	$10,71 \cdot 10^5$	$7,793 \cdot 10^7$
90	2,41	216,9	8 100	19 521	$7,29 \cdot 10^5$	$6,561 \cdot 10^7$
100	2,46	246	10 000	24 600	10^6	10^8
110	2,51	276,1	12 100	30 371	$1,331 \cdot 10^6$	$1,4641 \cdot 10^8$
$\Sigma = 300$	7,38	739	30 200	74 492	$3,06 \cdot 10^6$	$3,1202 \cdot 10^8$
120	2,57	308,4	14 400	37 008	$1,728 \cdot 10^6$	$2,0736 \cdot 10^8$
130	2,62	340,6	16 900	44 278	$2,197 \cdot 10^6$	$2,8561 \cdot 10^8$
140	2,68	375,2	19 600	52 528	$2,744 \cdot 10^6$	$3,8416 \cdot 10^8$
150	2,74	411	22 500	61 650	$3,375 \cdot 10^6$	$5,0625 \cdot 10^8$
$\Sigma = 540$	10,61	1 435,2	73 400	195 464	$10,044 \cdot 10^6$	$13,8338 \cdot 10^8$
$\Sigma = 1050$	24,88	2 657,6	118 500	304 330	$14,175 \cdot 10^6$	$17,7333 \cdot 10^8$

Решая первое из полученных уравнений со вторым, второе – с третьим, получаем

$$1\,732\,500 a + 8\,250 n - 45,2 = 0;$$

$$1,735801 \cdot 10^8 a + 801\,429 n - 4\,400,87 = 0.$$

Решая эти уравнения путем исключения постоянной n , находим $a = 18,96 \cdot 10^{-7}$, $n = 5,08 \cdot 10^{-3}$, $c = 1,93$.

Для того чтобы осуществить выбор коэффициентов, использование которых будет точнее отвечать опытным данным, следует сравнить сумму средних отклонений и сумму квадратов отклонений, вычисленных по обоим методам. Результаты вычислений сведены в табл. 11.6.

Таблица 11.6

x_i	y_i	Среднеарифметический метод, $a = 8,3 \cdot 10^{-7}$, $n = 5,3 \cdot 10^{-3}$, $c = 1,92$			Метод наименьших квадратов, $a = 1,894 \cdot 10^{-6}$, $n = 5,08 \cdot 10^{-3}$, $c = 1,93$		
		$y = ax^2 + nx + c$	Δ	Δ^2	$y = ax^2 + nx + c$	Δ	Δ^2
60	2,24	2,24	0	0	2,24	0	0
70	2,30	2,30	0	0	2,30	0	0
80	2,35	2,35	0	0	2,35	0	0
90	2,41	2,40	+0,01	0,0001	2,40	+0,01	0,0001
100	2,46	2,46	0	0	2,46	0	0
110	2,51	2,51	0	0	2,51	0	0
120	2,57	2,57	0	0	2,57	0	0
130	2,62	2,62	0	0	2,62	0	0
140	2,68	2,68	0	0	2,68	0	0
150	2,74	2,73	+0,01	0,0001	2,74	0	0
–	–	–	$\Sigma = 0,02$	$\Sigma = 0,0002$	–	$\Sigma = 0,01$	$\Sigma = 0,0001$

Более точными оказались значения постоянных, определенные по методу наименьших квадратов, поэтому окончательно имеем

$$y = 1,89 \cdot 10^{-6} x^2 + 5,08 \cdot 10^{-3} x + 1,93.$$

Как видно из приведенного примера, метод наименьших квадратов в применении к формулам с тремя постоянными весьма трудоемок, требует значительных вычислений и больших затрат времени, поэтому для устранения этих недостатков были разработаны программы для вычисления указанных постоянных с помощью программируемого калькулятора «Электроника МК-61».

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается метод выравнивания?
2. Какое условие учитывается при определении постоянной величины формулы по методу наименьших квадратов?
3. В каком случае для математического описания экспериментальной зависимости приступают к подбору формулы с тремя постоянными коэффициентами?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом ряде случаев можно найти формулу, отражающую некую зависимость между изучаемыми переменными величинами, используя опытные данные. Однако следует иметь в виду, что задача выбора функциональной зависимости неформализуема, так как одна и та же кривая на некотором участке может быть описана различными аналитическими выражениями. Главное требование к математической модели – ее удобство для дальнейшего использования. Для достижения более точного соответствия модели описываемому явлению обычно приходится усложнять модель, что затрудняет ее дальнейшее применение, например в других аналитических выражениях. Рациональное решение при выборе модели состоит в том, чтобы найти компромисс между компактностью модели и точностью, которую она обеспечивает.

Не исключено, что исследователь после целого ряда неудачных подборов будет вынужден отказаться от попыток построить достаточно удобную для практических целей математическую модель. Особенно это характерно для случаев, когда построенная по опытным данным кривая имеет резкие перегибы или состоит из отдельных ярко выраженных участков, и исследователь не может найти уравнения, отвечающие всей кривой. Здесь целесообразно вывести математические зависимости, отражающие каждый участок в отдельности, но при этом всегда необходимо указывать, в каких пределах изменения переменных применима предлагаемая формула.

Библиографический список

1. *Абрамова, Н. Т.* Целостность и управление / Н. Т. Абрамова. – М. : Наука, 1974. – 200 с.
2. *Баркалов, Б. В.* Кондиционирование воздуха в промышленных, общественных и жилых зданиях / Б. В. Баркалов, Е. Е. Карпис. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1982. – 176 с.
3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
4. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) / Н. П. Бусленко [и др.]. – М. : Физматгиз, 1962. – 48 с.

5. *Выгоцкий, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгоцкий. – М. : Физматгиз, 1963. – 832 с.
6. *Двайт, Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1964. – 228 с.
7. *Дунин-Барковский, И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики / И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1965. – 164 с.
8. *Лавров, Н. В.* Введение в теорию горения и газификации / Н. В. Лавров, А. П. Шурыгин. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1962. – 190 с.
9. Математическая энциклопедия / редкол. : И. М. Виноградов [и др.]. – М. : Сов. энцикл., 1984. – Т. 4. – 600 с.
10. *Миркин, Б. Г.* Проблема группового выбора / Б. Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. – 120 с.
11. *Назаров, И. А.* К вопросу о предельных значениях энтропийного коэффициента / И. А. Назаров // Известия ЛЭТИ. – 1965. – Вып. 66, ч. 1. – С. 72.
12. *Новиков, О. А.* Прикладные вопросы теории массового обслуживания / О. А. Новиков, С. И. Петухов. – М. : Сов. радио, 1969. – 400 с.
13. *Новицкий, П. В.* Оценка погрешностей измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. – 240 с.
14. *Оленев, Е. А.* Пассажиры городского общественного транспорта – элементы активной системы перевозочного процесса / Е. А. Оленев // Тр. Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления», Москва, 26 – 28 сентября 2000 г. / Ин-т проблем управления РАН. – М., 2000. – С. 776 – 802.
15. *Сонин, Н. Я.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах / Н. Я. Сонин. – М., 1954. – 60 с.
16. *Хальд, А.* Математическая статистика с техническими приложениями / А. Хальд. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 100 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	5
Глава 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	6
9.1. Построение аналитической модели физического процесса.....	6
9.2. Построение аналитической модели с использованием статистических данных.....	19
9.3. Построение аналитической модели с использованием экспериментальных данных.....	32
<i>Вопросы для самоконтроля.....</i>	<i>34</i>
Глава 10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ.....	35
10.1. Феноменологические модели проблемной ситуации.....	35
10.2. Модель прогнозирования выбора пассажиром маршрута поездки и отказа от нее.....	36
10.3. Подготовка исходных данных для построения модели.....	51
<i>Вопросы для самоконтроля.....</i>	<i>68</i>
Глава 11. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ.....	69
11.1. Выбор эмпирической формулы. Метод выравнивания.....	69
11.2. Выбор эмпирической формулы с двумя постоянными величинами.....	76
11.3. Выбор эмпирической формулы с тремя постоянными величинами.....	81
<i>Вопросы для самоконтроля.....</i>	<i>86</i>
Заключение.....	87
Библиографический список.....	87

Учебное издание

ОЛЕНЕВ Евгений Александрович

КОНСТРУИРОВАНИЕ И ТЕХНОЛОГИЯ
ПРОИЗВОДСТВА ПРИБОРОВ И АППАРАТОВ

Учебник

Часть 3. Научное творчество

Подписано в печать 28.09.09.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,35. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.