

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Практикум

В двух частях

Часть 1

Издание второе, переработанное и дополненное

Владимир 2009

УДК 539.3/6(075)

ББК 30.121

P24

Авторы:

В.М. Кислов, Л.Е. Кондратьева, А.М. Бурлакова,
И.А. Черноусова

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор зав. кафедрой
строительной механики Новосибирского государственного
архитектурно-строительного университета

Г.И. Гребенюк

Кандидат технических наук,
доцент кафедры строительных конструкций
Владимирского государственного университета

И.И. Шишов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Кислов, В.М.

P24 Расчет стержневых систем : практикум. В 2 ч. Ч.1 / В. М. Кислов, Л. Е. Кондратьева, А. М. Бурлакова, И. А. Черноусова ; Владим. гос. ун-т. – 2-е изд., перераб. и доп. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 88 с.

ISBN 978-89368-992-1

Содержит варианты заданий к курсовым и расчетно-проектировочным работам по сопротивлению материалов и примеры их выполнения. Соответствует стандарту курса сопротивления материалов. Во второй части будут представлены задания и методические указания по расчету при сложных видах деформации и на устойчивость.

Предназначен для студентов строительных специальностей, всех форм обучения, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов».

Табл. 7. Ил. 30. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3/6(075)

ББК 30.121

ISBN 978-89368-992-1

© Владимирский государственный
университет, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Первая часть практикума «Расчет стержневых систем» включает задания и указания по их выполнению по следующим разделам дисциплины:

- геометрические характеристики плоских сечений;
- метод сечений, внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня, эпюры внутренних усилий;
- расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии и прямом поперечном изгибе.

Во вторую часть практикума планируется включить задания и указания к выполнению по разделам "Сложное сопротивление", "Напряженное состояние в точке", "Устойчивость сжатых стержней", "Продольно-поперечный изгиб".

Задания практикума предусмотрены индивидуальными. Каждый студент должен выбрать задание в соответствии с вариантом, выданным преподавателем.

Основные требования к выполнению и оформлению работ следующие:

- работу оформляют на одной стороне листов белой бумаги формата А4;
- вначале необходимо выписать условие задачи в соответствии с индивидуальным вариантом и сделать в едином масштабе чертеж условия задачи, на котором указать численные значения всех необходимых для расчета величин;
- затем необходимо оформить все этапы решения задачи, записав название этапа и подробные пояснения хода решения; результаты вычислений по каждому этапу должны быть выделены;
- все рисунки выполняют с использованием чертежных инструментов, аккуратно;
- титульный лист работы оформляют в соответствии с прил. 1; листы нумеруют и сшивают.

Задание 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

Для плоских сечений, изображенных на рис. 1 и 2, требуется определить:

1. Положение центра тяжести сечения.
2. Значения осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей.
3. Положение главных центральных осей инерции сечения.
4. Главные центральные моменты инерции сечения.

Данные для расчета взять из табл. 1 в соответствии с шифром, выданным преподавателем.

Таблица 1

№ п/п	b , см	h , см	Номер двутавра	Номер швеллера	Равнополочный уголок	Неравнополочный уголок
1	15	13	10	5	5 / 5	5/3,2/4
2	14	12	12	6,5	5,6 / 5	7,5/5/5
3	13	11	14	8	6,3 / 6	9/5,6/6
4	12	10	16	10	7 / 6	10/6,3/6
5	9	11	18	12	7,5 / 7	11/7/8
6	10	12	20	14	8 / 7	12,5/8/7
7	11	13	22	33	9 / 8	14/9/8
8	12	14	24	36	10 / 12	16/10/9
9	13	15	27	16	11 / 8	18/11/10
10	14	16	30	16а	12,5 / 12	20/12,5/11
11	15	24	33	18	14 / 12	10/6,3/8
12	16	23	36	18а	16 / 16	12,5/8/10
13	17	22	40	20	18 / 12	14/9/10
14	18	21	45	22	9 / 6	16/10/12
15	19	20	50	24	10 / 7	18/11/12
16	20	19	55	27	11 / 7	20/12,5/16
17	21	18	60	30	12,5 / 8	12,5/8/8
18	22	17	20	33	14 / 9	16/10/10
19	23	16	22	36	16 / 10	10/6,3/7
20	24	15	24	40	18 / 11	20/12,5/14

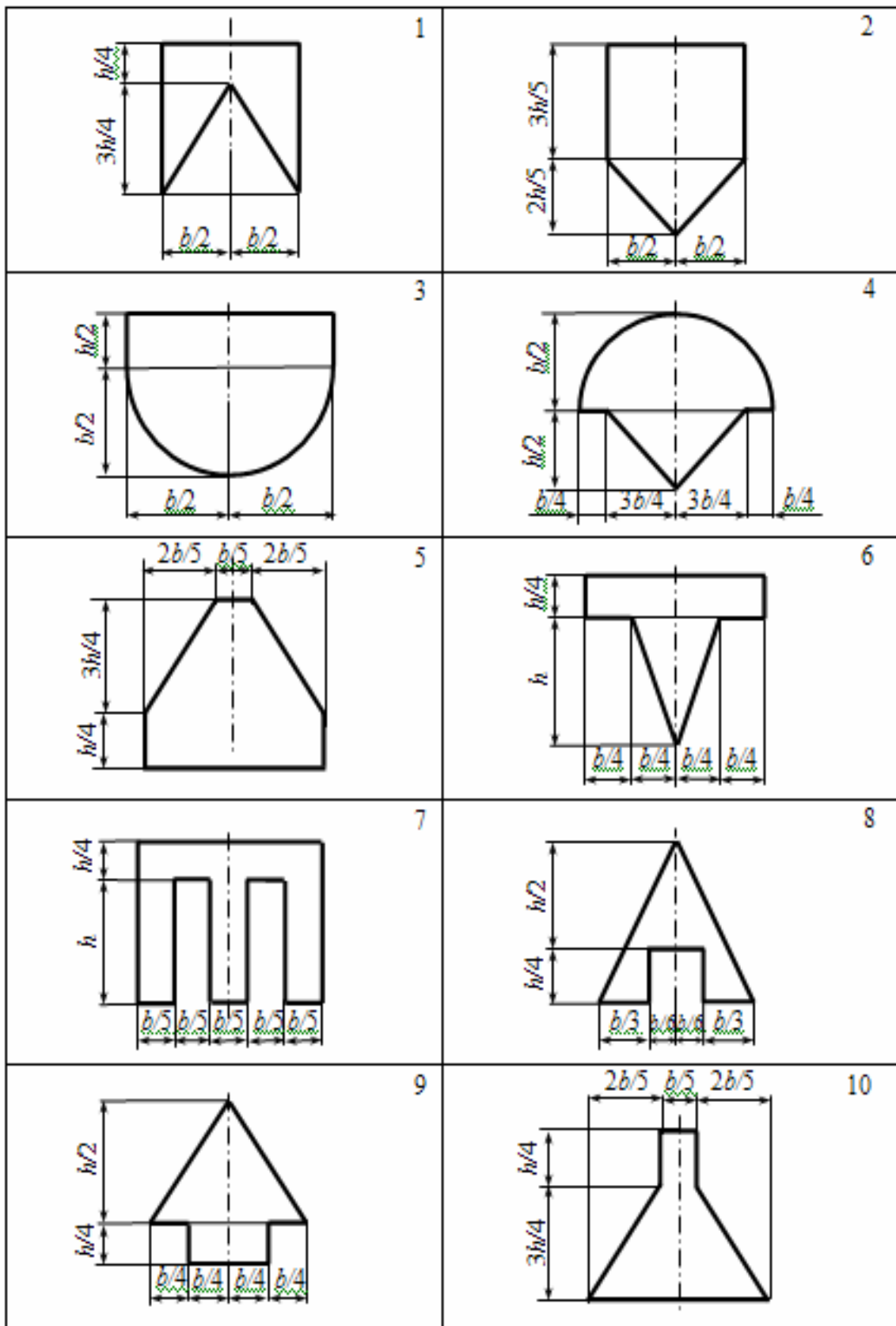


Рис. 1

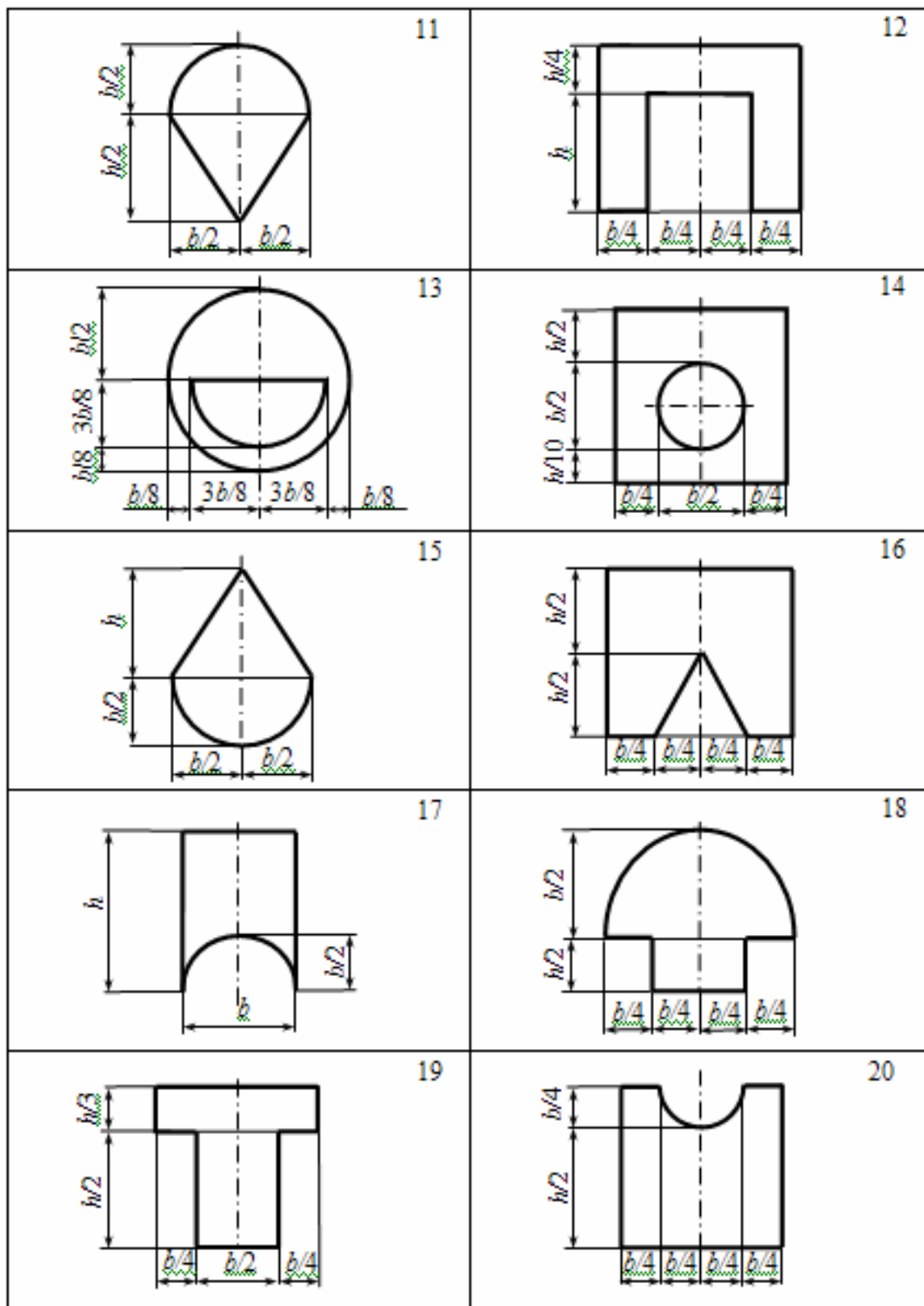


Рис. 1. Окончание


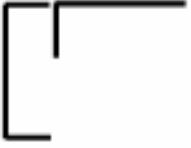





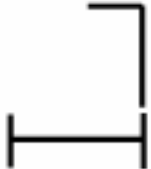

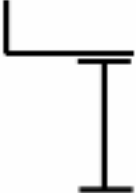
 <p>1</p>	 <p>2</p>
 <p>3</p>	 <p>4</p>
 <p>5</p>	 <p>6</p>
 <p>7</p>	 <p>8</p>
 <p>9</p>	 <p>10</p>

Рис. 2

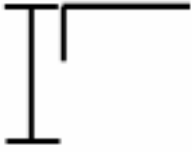

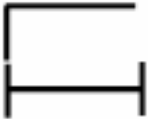
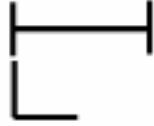

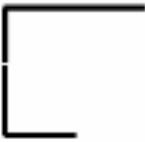

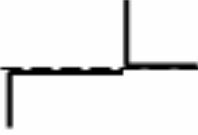

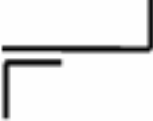
 <p>11</p>	 <p>12</p>
 <p>13</p>	 <p>14</p>
 <p>15</p>	 <p>16</p>
 <p>17</p>	 <p>18</p>
 <p>19</p>	 <p>20</p>

Рис. 2. Окончание

Пример 1

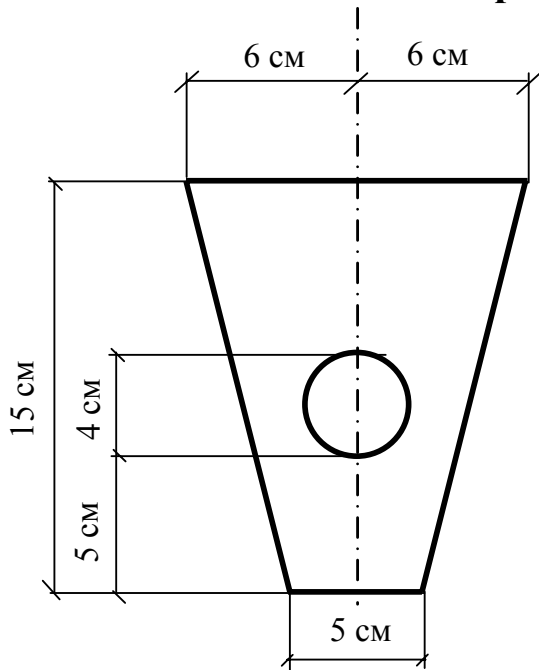


Рис. 3

Для сечения, изображенного на рис. 3, требуется определить:

1. Положение центра тяжести сечения.
2. Значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.
3. Положение главных центральных осей инерции сечения.
4. Главные центральные моменты инерции сечения.

Вычертим сечение в масштабе (рис. 4).

Внимание! В качестве единиц измерения длин приняты сантиметры, поэтому на рисунках единицы измерения указываться не будут.

Разобьем фигуру на простейшие:

I – прямоугольник (15×5 см);

II и III – прямоугольные треугольники ($15 \times 3,5$ см);

IV – круг ($d = 4$ см).

У каждой простейшей фигуры покажем центры тяжести c_i и собственные центральные оси y_i, z_i . Для определения положения центров тяжести простейших фигур можно воспользоваться таблицей прил. 2 данного практикума.

Так как заданное сечение симметрично, центр тяжести всей фигуры лежит на оси симметрии сечения. Назовем эту ось y_C .

Выберем исходную систему координат: $y_C 0 z_0$. Координата z центра тяжести будет равна нулю: $z_C = 0$. Найдём координату y центра тяжести всей фигуры:

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{C_1} + A_2 \cdot y_{C_2} + A_3 \cdot y_{C_3} - A_4 \cdot y_{C_4}}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4},$$

где A_i - площадь простейшей фигуры, составляющей сложную; y_{C_i} - координата у центра тяжести этой фигуры в выбранной системе координат.

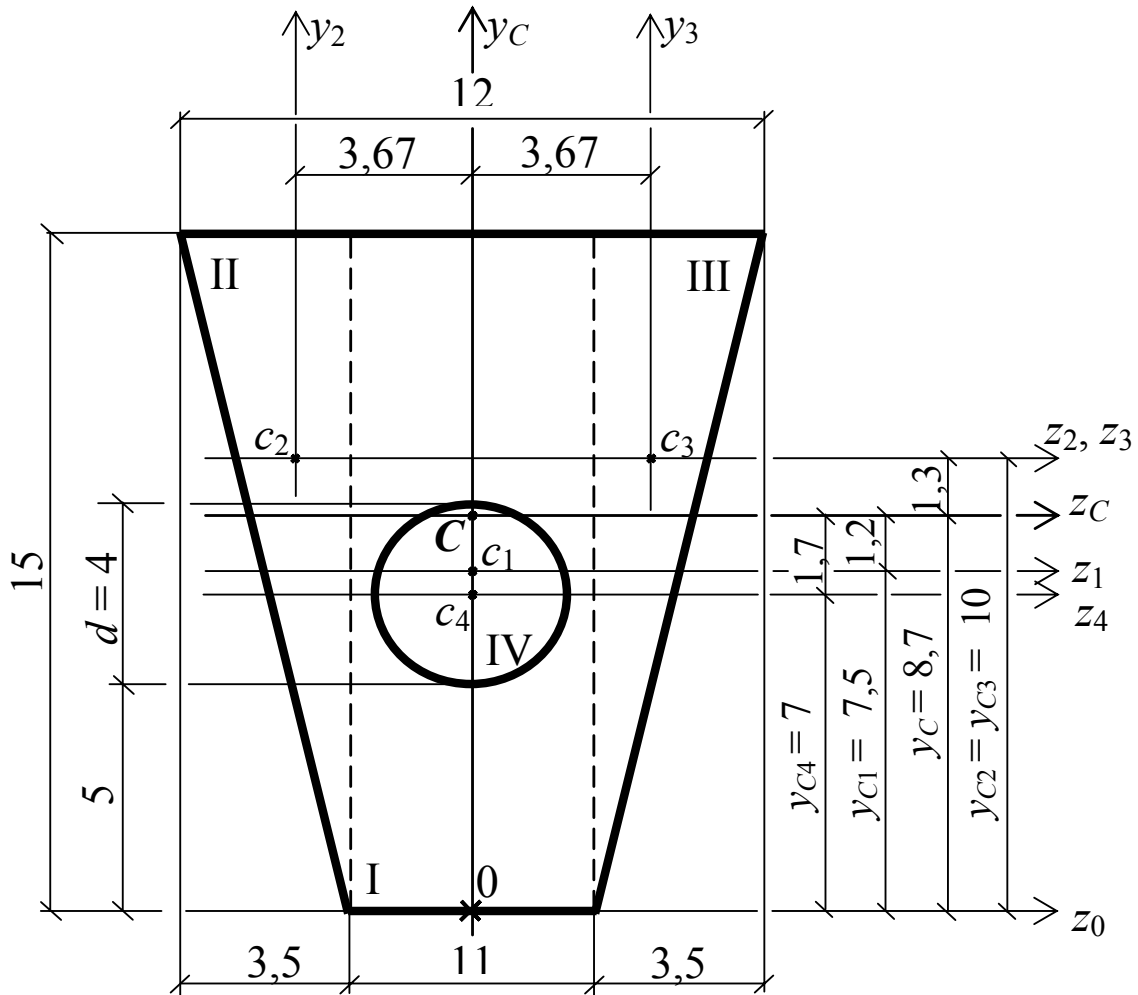


Рис. 4

Формулы для определения площадей простейших фигур приведены в прил. 2.

$$A_1 = 15 \cdot 5 = 75 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = A_3 = \frac{15 \cdot 3,5}{2} = 26,25 \text{ см}^2;$$

$$A_4 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2;$$

$$y_{C_1} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см};$$

$$y_{C_2} = y_{C_3} = \frac{2}{3}15 = 10 \text{ см};$$

$$y_{C_4} = 5 + \frac{4}{2} = 7 \text{ см}.$$

Подставим полученные значения в формулу для определения положения центра тяжести составного сечения

$$y_C = \frac{75 \cdot 7,5 + 26,25 \cdot 10 \cdot 2 - 12,56 \cdot 7}{75 + 26,25 \cdot 2 - 12,56} = 8,70 \text{ см}.$$

Через точку C с координатами $(0; 8,7)$ проведем ось z_C . Оси y_C и z_C будут являться главными центральными осями инерции сечения, так как они проходят через центр тяжести всей фигуры и одна из этих осей y_C – ось симметрии. Как известно, центробежный момент инерции $I_{y_C z_C}$ симметричного сечения относительно осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю, и, следовательно, эта пара осей является главными осями инерции сечения.

Найдем величины главных центральных моментов инерции сечения

$$I_{y_C} = \sum I_{y_C}^i, \quad I_{z_C} = \sum I_{z_C}^i,$$

где $I_{y_C}^i$ и $I_{z_C}^i$ – осевые моменты инерции простейшей фигуры относительно центральных осей. Формулы для определения моментов инерции фигур относительно собственных центральных осей приведены в прил. 2.

Если центральная ось инерции сложной фигуры не совпадает с центральными осями простейших фигур, моменты инерции простейших фигур относительно общей оси будем находить, учитывая параллельный перенос осей

$$I_{z_C}^i = I_{z_i}^i + a_i^2 A_i, \quad I_{y_C}^i = I_{y_i}^i + b_i^2 A_i,$$

где $I_{z_i}^i$ и $I_{y_i}^i$ - осевые моменты инерции простейшей фигуры относительно собственных центральных осей (см. прил. 2); a_i и b_i - координаты y и z центра тяжести рассматриваемой фигуры в осях $y_C z_C$.

Найдем осевой момент инерции относительно главной центральной оси y_C :

$$I_{y_C} = \sum I_{y_C}^i = I_{y_C}^I + I_{y_C}^{II} + I_{y_C}^{III} - I_{y_C}^{IV}.$$

$$I_{y_C}^I = \frac{15 \cdot 5^3}{12} = 156,25 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C}^{II} = I_{y_C}^{III} = I_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2, \quad b_2 = -\left(\frac{5}{2} + \frac{3,5}{3}\right) = -3,67 \text{ см};$$

$$I_{y_C}^{II} = I_{y_C}^{III} = \frac{15 \cdot 3,5^3}{36} + 3,67^2 \cdot 26,25 = 371,42 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C}^{IV} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_C} = 156,25 + 371,42 \cdot 2 - 12,56 = 886,53 \text{ см}^4.$$

Найдем осевой момент инерции относительно главной центральной оси z_C :

$$I_{z_C} = \sum I_{z_C}^i = I_{z_C}^I + I_{z_C}^{II} + I_{z_C}^{III} - I_{z_C}^{IV}.$$

$$I_{z_C}^I = I_{z_1}^I + a_1^2 A_1; \quad a_1 = -(8,7 - 7,5) = -1,2 \text{ см};$$

$$I_{z_C}^I = \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 1,2^2 \cdot 75 = 1514,25 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C}^{II} = I_{z_C}^{III} = I_{z_2}^{II} + a_2^2 A_2; \quad a_2 = 10 - 8,7 = 1,3 \text{ см};$$

$$I_{z_C}^{II} = \frac{3,5 \cdot 15^3}{36} + 1,3^2 \cdot 26,25 = 372,49 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C}^{IV} = I_{z_4}^{IV} + a_4^2 A_4; \quad a_4 = -(8,7 - 7) = -1,7 \text{ см};$$

$$I_{z_C}^{IV} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} + 1,7^2 \cdot 12,56 = 48,86 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C} = 1514,25 + 372,49 \cdot 2 - 48,86 = 2210,37 \text{ см}^4.$$

Таким образом, имеем

$$I_{y_c} = I_{\min} = 886,53 \text{ см}^4, \quad I_{z_c} = I_{\max} = 2210,37 \text{ см}^4.$$

Пример 2

Для сечения, изображенного на рис. 5, требуется определить:

1. Положение центра тяжести сечения.

2. Значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.

3. Положение главных центральных осей инерции сечения.

4. Главные центральные моменты инерции сечения.

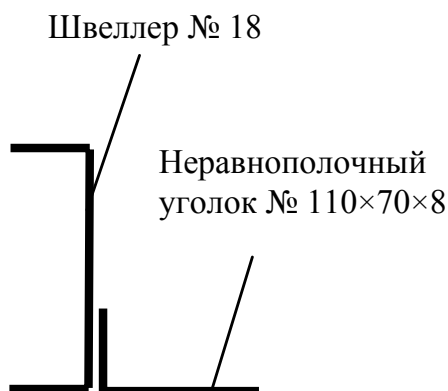


Рис. 5

Разобьем фигуру на простейшие:

1 - швеллер № 18;

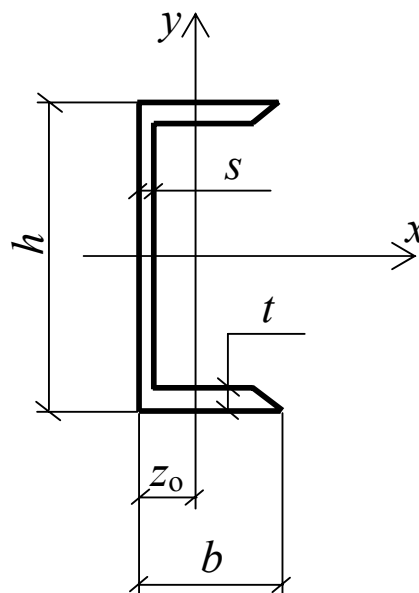
2 - уголок неравнополочный № 110 × 70 × 8.

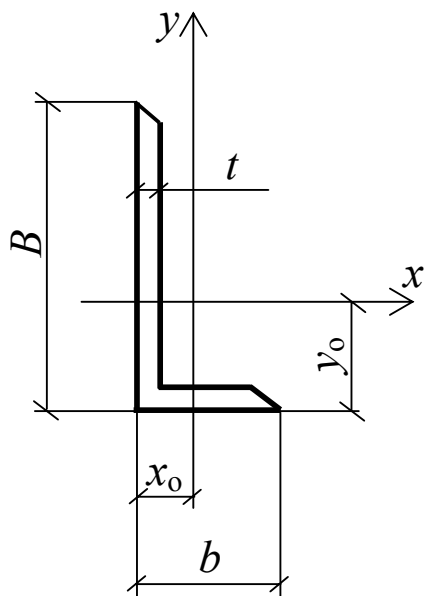
Перед началом решения задачи надо выписать из сортамента прокатной стали (прил. 2 - 6) необходимые геометрические характеристики прокатных профилей.

1. Швеллер № 18 (ГОСТ 8240-89) – прил. 4.

$$\begin{aligned} h &= 180 \text{ мм}; & b &= 70 \text{ мм}; \\ s &= 5,1 \text{ мм}; & t &= 8,7 \text{ мм}; \\ A &= 26,7 \text{ см}^2; & z_0 &= 1,94 \text{ см}; \\ I_x &= 1090 \text{ см}^4; & I_y &= 86 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

2. Уголок неравнополочный № 110×70×8 (ГОСТ 8510-86) – прил. 5.





$$\begin{aligned}
 B &= 110 \text{ мм}; & b &= 70 \text{ мм}; \\
 t &= 8 \text{ мм}; & A &= 13,9 \text{ см}^2; \\
 x_0 &= 1,64 \text{ см}; & y_0 &= 3,61 \text{ см}; \\
 I_x &= 172 \text{ см}^4; & I_y &= 54,6 \text{ см}^4; \\
 & & |I_{xy}| &= 55,9 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Вычертим сечение в масштабе (рис. 6).

У каждой простейшей фигуры на графической части покажем центры тяжести и собственные центральные оси.

Выберем исходную систему координат: $y_1 z_1$.

Найдем координаты центра тяжести сложной фигуры

$$y_c = \frac{\sum A_i y_{c_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2}}{A_1 + A_2}.$$

$$A_1 = 20,7 \text{ см}^2; \quad A_2 = 13,9 \text{ см}^2.$$

$$y_{c_1} = 0; \quad y_{c_2} = -(9 - 1,64) = -7,36 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{20,7 \cdot 0 + 13,9(-7,36)}{20,7 + 13,9} = -2,96 \text{ см}.$$

$$z_c = \frac{\sum A_i z_{c_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_{c_1} + A_2 z_{c_2}}{A_1 + A_2}.$$

$$z_{c_1} = 0; \quad z_{c_2} = 1,94 + 3,61 = 5,55 \text{ см}.$$

$$z_c = \frac{20,7 \cdot 0 + 13,9 \cdot 5,55}{20,7 + 13,9} = 2,23 \text{ см}.$$

Через точку C , отложенную по найденным координатам, проведем оси y_c и z_c параллельно исходным осям. Эти оси будут являться центральными осями сечения.

Положение главных центральных осей инерции сечения определим по формуле

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{y_c^2} - I_{z_c^2}},$$

где α - угол, на который надо повернуть центральные оси y_c и z_c , чтобы они стали главными. При положительном значении угла оси поворачиваем против часовой стрелки, а при отрицательном – по часовой.

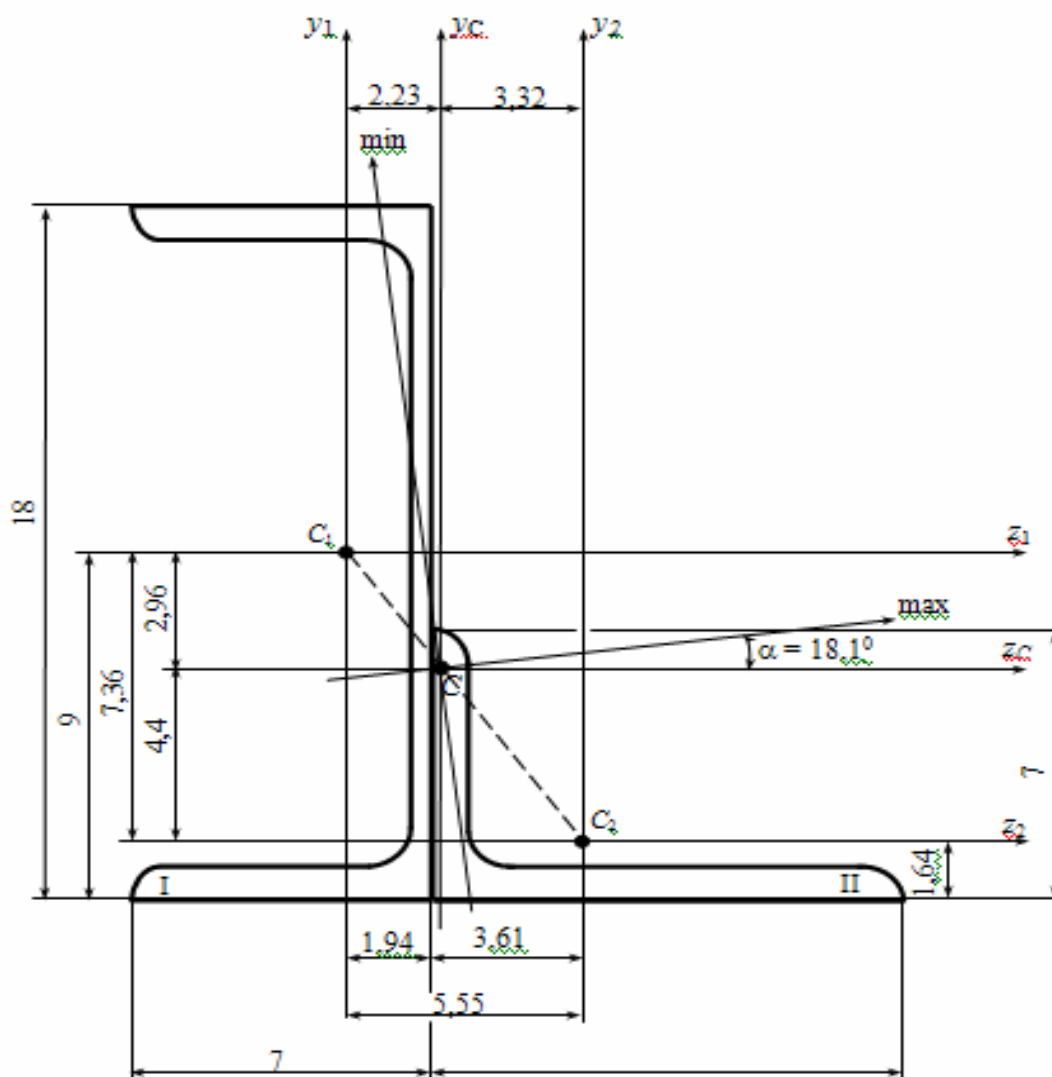


Рис. 6

Найдем величины осевых моментов инерции сечения относительно центральных осей

$$I_{y_c} = \sum I_{y_c}^i = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II}.$$

$$I_{y_c}^I = I_{y_1}^I + b_1^2 A_1; \quad b_1 = -2,23 \text{ см.}$$

$$I_{y_c}^I = 86 + 2,23^2 \cdot 20,7 = 188,9 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_c}^{II} = I_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2, \quad b_2 = -(5,55 - 2,23) = 3,32 \text{ см.}$$

$$I_{y_c}^{II} = 172 + 3,32^2 \cdot 13,9 = 325,2 \text{ см}^4.$$

Здесь следует заметить, что собственный осевой момент инерции неравнополочного уголка $I_{y_2}^{II}$ равен сортаментному значению I_x этого уголка, так как ось y_2 заданного уголка пересекает его длинную сторону, а в сортаменте длинную сторону пересекает ось x . То есть ось y_2 заданного уголка соответствует оси x сортаментного уголка, а ось z_2 – соответственно оси y .

Осевой момент инерции всего сечения относительно оси y_c равен

$$I_{y_c} = 188,9 + 325,2 = 514,1 \text{ см}^4.$$

Найдем осевой момент инерции всего сечения относительно оси z_c

$$I_{z_c} = \sum I_{z_c}^i = I_{z_c}^I + I_{z_c}^{II}.$$

$$I_{z_c}^I = I_{z_1}^I + a_1^2 A_1, \quad a_1 = 2,96 \text{ см;}$$

$$I_{z_c}^I = 1090 + 2,96^2 \cdot 20,7 = 1271,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c}^{II} = I_{z_2}^{II} + a_2^2 A_2, \quad a_2 = -(7,36 - 2,96) = -4,4 \text{ см.}$$

$$I_{z_c}^{II} = 54,6 + 4,4^2 \cdot 13,9 = 323,7 \text{ см}^4.$$

$$I_{z_c} = 1271,4 + 323,7 = 1595,1 \text{ см}^4.$$

Найдем центробежный момент инерции составного сечения относительно осей $y_c z_c$.

$$I_{y_c z_c} = \sum I_{y_c z_c}^i = I_{y_c z_c}^I + I_{y_c z_c}^{II}.$$

$$I_{y_c z_c}^I = I_{y_1 z_1}^I + a_1 b_1 A_1; \quad I_{y_c z_c}^{II} = I_{y_2 z_2}^{II} + a_2 b_2 A_2.$$

Собственный центробежный момент инерции швеллера $I_{y_1z_1}^I$ равен нулю, так как одна из осей – ось z_1 – является его осью симметрии.

Собственный центробежный момент инерции неравнополочного уголка в сортаменте задан по модулю, так как знак этой величины зависит от расположения фигуры относительно осей координат. В нашем случае большая часть второй фигуры лежит во второй и четвертой четвертях собственной системы координат, и, следовательно, знак величины $I_{y_2z_2}^{II}$ будет отрицательным.

$$I_{y_c z_c}^I = 0 + 2,96(-2,23) \cdot 20,7 = -136,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c z_c}^{II} = -555,9 + (-4,4)3,32 \cdot 13,9 = -258,9 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c z_c} = -136,6 - 258,9 = -395,5 \text{ см}^4.$$

Найдем положение главных центральных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = \frac{2(-395,5)}{514,1 - 1595,1} = 0,732;$$

$$2\alpha = 36,2^\circ; \alpha = 18,1^\circ.$$

Через центр тяжести сечения проведем главные центральные оси инерции. Относительно одной из этих осей осевой момент инерции будет наибольшим из всех возможных, а относительно другой – наименьшим. В нашем случае момент инерции $I_{z_c} > I_{y_c}$, следовательно, та из главных осей, которая будет находиться ближе к оси z_c , будет давать максимальный момент инерции, а та, которая ближе к оси y_c , минимальный.

Найдем величины главных центральных моментов инерции.

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2}.$$

$$I_{\min}^{\max} = \frac{514,1 + 1595,1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(514,1 - 1595,1)^2 + 4 \cdot 395,5^2};$$

$$I_{\max} = \frac{514,1 + 1595,1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(514,1 - 1595,1)^2 + 4 \cdot 395,5^2} = 1724,3 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = \frac{514,1 + 1595,1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(514,1 - 1595,1)^2 + 4 \cdot 395,5^2} = 384,9 \text{ см}^4.$$

Проверим правильность расчетов I_{\max} и I_{\min} по формуле

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min}.$$

$$I_{z_c} + I_{y_c} = 514,1 + 1595,1 = 2109,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} + I_{\min} = 1724,3 + 384,9 = 2109,2 \text{ см}^4.$$

Проверка выполняется.

Задание 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Для систем, изображенных на рис. 7, требуется построить эпюры внутренних силовых факторов.

Данные для расчета взять из табл. 2 по варианту, выданному преподавателем.

Пример 1

Построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, показанной на рис. 8.

Внимание! Все длины измеряются в метрах, силы – в килоньютонах. В записях расчетов и на рисунках в примерах 1 - 3 единицы измерения проставляться не будут.

Сначала указывают реакции опор балки, которые могут в них возникнуть (рис. 9, а).

Затем записывают уравнения равновесия балки, из которых находят значения реакций. С балкой связана система координат хуз (см. рис. 9, а).

$$\sum x = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; 65 - 50 \cdot 4 - 18 \cdot 3 \cdot 6,5 + R_B \cdot 6 = 0 \rightarrow R_B = 81 \text{ кН};$$

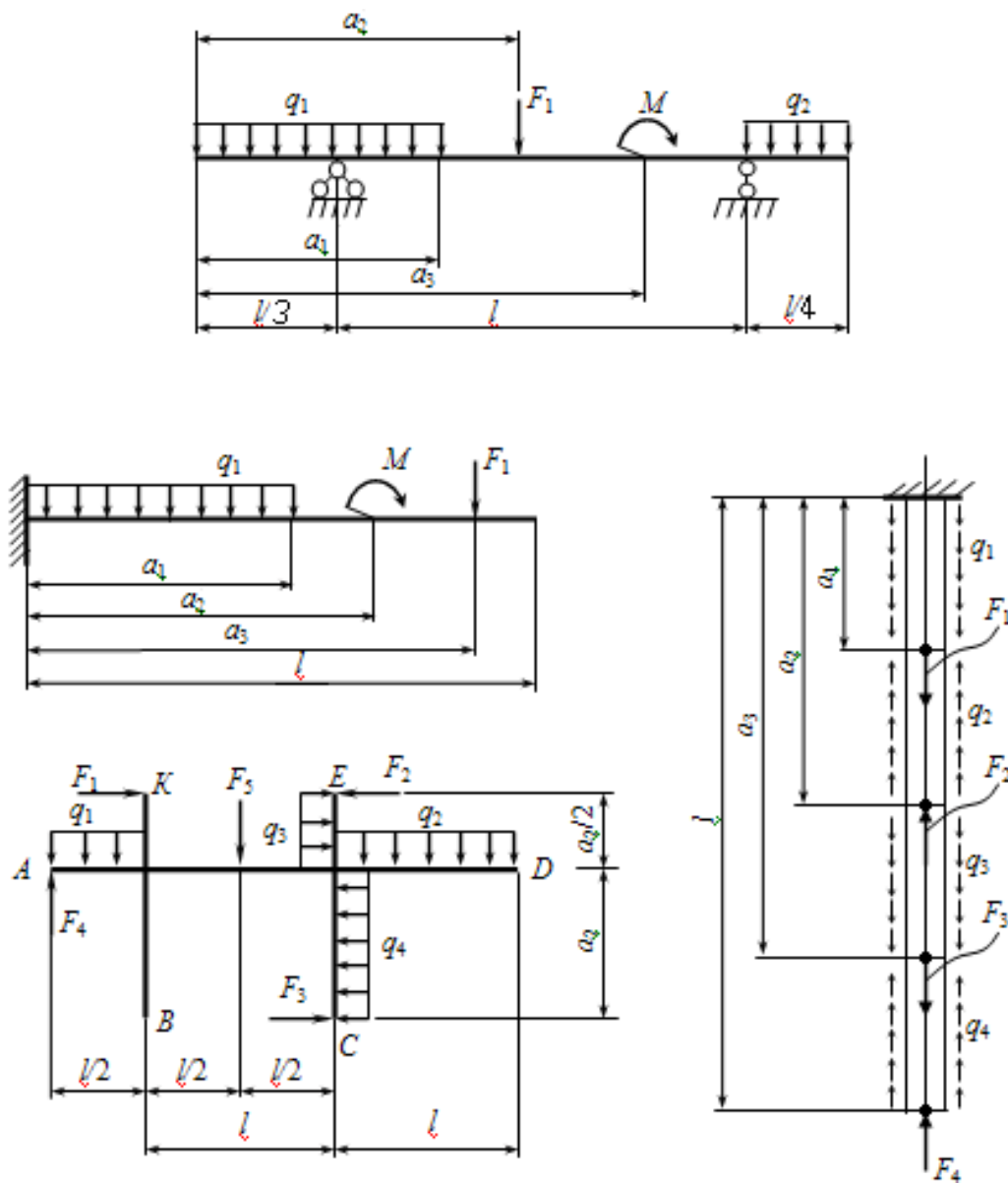


Рис. 7

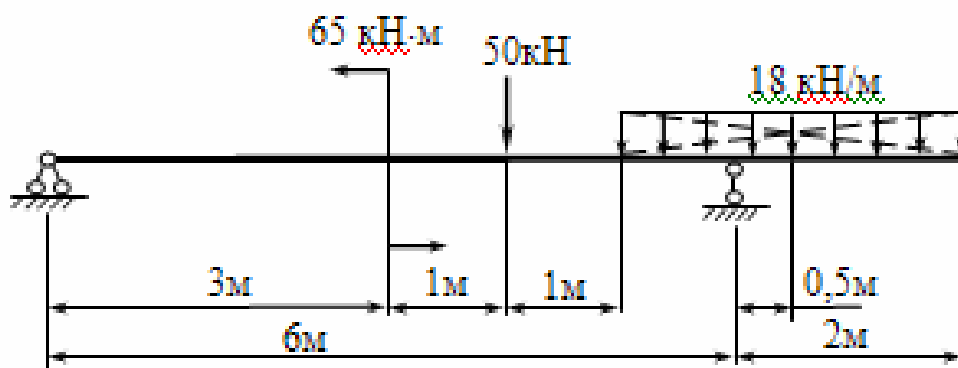





Рис. 8

Таблица 2

№ п/п	I						II										
	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	l , м	 В точ- ке	 В точ- ке	 В точ- ке	$F_{1,1}$ кН	$F_{2,2}$ кН	$F_{3,3}$ кН	$F_{4,4}$ кН	$F_{5,5}$ кН	$q_{1,1}$ кН/м	$q_{2,2}$ кН/м	$q_{3,3}$ кН/м	$q_{4,4}$ кН/м	M , кН·м
1	2,0	4,0	3,0	6,0	A	C	-	-40	31	-50	-	-	6	24	-	-14	50
2	2,5	4,1	3,1	6,1	A	D	-	39	33	-	51	-	-8	16	13	-	-51
3	2,6	4,2	3,2	6,2	A	-	E	-38	35	-	-	-52	10	-22	-	15	52
4	2,7	4,3	3,3	6,3	A	-	C	37	-29	53	-	-	-12	23	-12	-	-53
5	2,8	4,4	3,4	6,4	B	-	D	36	-39	-	-59	-	14	5	-	-16	54
6	2,9	4,5	3,5	6,5	B	C	-	-34	37	-	-	-60	16	-6	11	-	-55
7	3,0	4,6	3,6	6,6	B	D	-	32	40	-54	-	-	-18	7	-	17	69
8	3,1	4,7	3,7	6,7	B	-	E	30	-41	-	-	61	20	-8	-10	-	-68
9	3,2	4,8	3,8	6,8	F	D	-	-20	43	-	62	-	7	9	-	-19	67
10	3,3	4,9	6,0	6,9	B	-	D	-22	45	55	-	-	-9	10	18	-	66

Окончание табл. 2

11	3,4	5,0	5,9	7,0	F	C	-	24	-47	-	63	11	-21	-	-20	-65
12	3,5	5,1	5,8	7,1	F	D	-	-26	49	-64	-	13	20	-9	-	64
13	3,6	5,2	5,7	7,2	F	-	C	28	-51	-56	-	-15	11	-	-21	-63
14	3,7	5,3	5,6	7,3	F	-	B	-30	53	65	-	17	-12	8	-	-62
15	3,8	5,4	5,5	7,4	F	-	D	42	55	-	-66	19	-13	-	22	61
16	3,9	5,5	5,4	7,5	C	A	-	-44	57	67	-	-21	19	-7	-	-60
17	4,0	5,6	5,3	7,6	C	B	-	46	-59	-68	-	22	14	-	-23	59
18	4,1	5,7	5,2	7,7	C	-	A	-48	61	-57	-	23	-15	6	-	-58
19	4,2	5,8	5,2	7,8	C	-	E	50	-63	-	69	-24	18	-	24	57
20	4,3	5,9	5,0	7,9	C	-	F	-52	65	58	-	25	17	-5	-	-56

$$\sum M_B = 0; -R_B \cdot 6 + 65 + 50 \cdot 2 - 18 \cdot 3 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow R_A = 23 \text{ кН.}$$

Проверочное уравнение:

$$\sum y = 0; 23 - 50 - 18 \cdot 3 + 81 = 0; 0 \equiv 0.$$

Положение равнодействующей равномерно распределенной нагрузки Q , необходимое для расчетов, показано на рис. 9, а.

Далее переходим к определению внутренних усилий в поперечных сечениях балки.

Вначале нужно определиться с количеством участков балки. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок, начала и концы участков распределенных нагрузок. Таким образом, у нашей балки пять участков.

Расчет внутренних усилий начат с крайнего левого участка. В его пределах проведено сечение 1 – 1, перпендикулярное оси балки, имеющее произвольную координату x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$ м). Этим сечением балка поделена на две части, одну из которых (левую) будем рассматривать отдельно (рис. 9, б). Действие отброшенной правой отсеченной части балки на левую часть заменим усилиями Q_{y_1} и M_{z_1} . Пока они неизвестны, поперечную силу покажем положительной.

Поперечная сила Q_y считается положительной, если она стремится вращать отсеченную часть балки по часовой стрелке.

Изгибающий момент будем направлять произвольно. Если после его определения он будет со знаком "плюс", то направление момента оказалось верным. На эпюре он будет откладываться со стороны тех волокон балки, которые он растягивает. Если же момент получится со знаком "минус", то направление момента было выбрано неверно. Тогда его направление меняется на обратное (и он также откладывается со стороны растянутых им волокон балки).

Внутренние усилия находятся из уравнений равновесия рассматриваемой отсеченной части балки:

$$\sum y = 0; 23 - Q_{y_1} = 0; Q_{y_1} = 23 \text{ кН;}$$

$$\sum M_1 = 0; -23x_1 + M_{z_1} = 0 \rightarrow M_{z_1} = 23x_1,$$

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = 0,$$

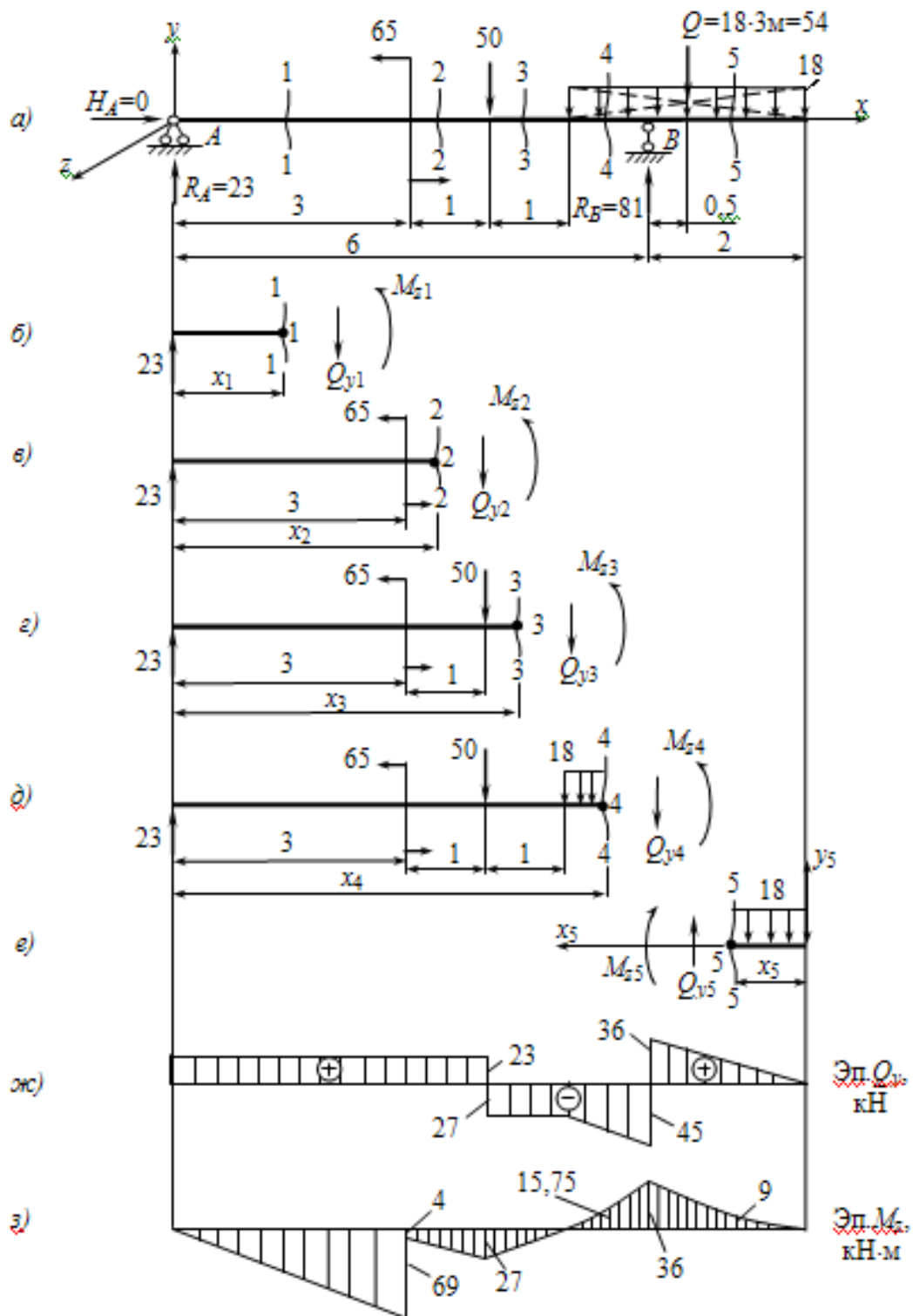


Рис. 9

при $x_1 = 3 \rightarrow M_{z1} = 69 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Для второго участка $3 \text{ м} \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$ (рис. 9, в):

$$\sum y = 0; 23 - Q_{y2} = 0 \rightarrow Q_{y2} = 23 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0; -23x_2 + 65M_{z_2} = 0 \rightarrow M_{z_2} = 23x_2 - 65,$$

$$\text{при } x_2 = 3 \rightarrow M_{z_2} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_2 = 4 \rightarrow M_{z_2} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для третьего участка $4 \text{ м} \leq x_3 \leq 5 \text{ м}$ (рис. 9, з):

$$\sum y = 0; 23 - 50Q_{y_3} = 0 \rightarrow Q_{y_3} = -27 \text{ кН};$$

$$\sum M_3 = 0; -23x_3 + 65 + 50(x_3 - 4) + M_{z_3} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z_3} = 23x_3 - 50(x_3 - 4) - 65 = 0,$$

$$\text{при } x_3 = 4 \rightarrow M_{z_3} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_3 = 5 \rightarrow M_{z_3} = 0.$$

Для четвертого участка $5 \text{ м} \leq x_4 \leq 6 \text{ м}$ (рис. 9, д):

$$\sum y = 0; 23 - 50 - 18(x_4 - 5) - Q_{y_4} = 0 \rightarrow Q_{y_4} = -18(x_4 - 5) - 27,$$

$$\text{при } x_4 = 5 \rightarrow Q_{y_4} = -27 \text{ кН},$$

$$\text{при } x_4 = 6 \rightarrow Q_{y_4} = -45 \text{ кН}.$$

$$\sum M_4 = 0;$$

$$-23x_4 + 65 + 50(x_4 - 4) + 18(x_4 - 5)\frac{x_4 - 5}{2} + M_{z_4} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z_4} = -9(x_4 - 5)^2 - 50(x_4 - 4) + 25x_4 - 65,$$

$$\text{при } x_4 = 5 \rightarrow M_{z_4} = 0,$$

$$\text{при } x_4 = 5,5 \rightarrow M_{z_4} = -15,75 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_4 = 6 \rightarrow M_{z_4} = -36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для этого участка сделан отдельный рис. 10, где показаны плечи всех нагрузок, действующих на левую отсеченную часть балки, при составлении уравнения $\sum M_4 = 0$.

Для определения усилий на последнем пятом участке рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки, что значительно проще, чем левой. Для этого расчета использована другая система координат (рис. 9, е), $0 \leq x_5 \leq 2 \text{ м}$.

$$\sum y = 0; Q_{y_5} - 18x_5 = 0 \rightarrow Q_{y_5} = 18x_5,$$

$$\text{при } x_5 = 0 \rightarrow Q_{y_5} = 0,$$

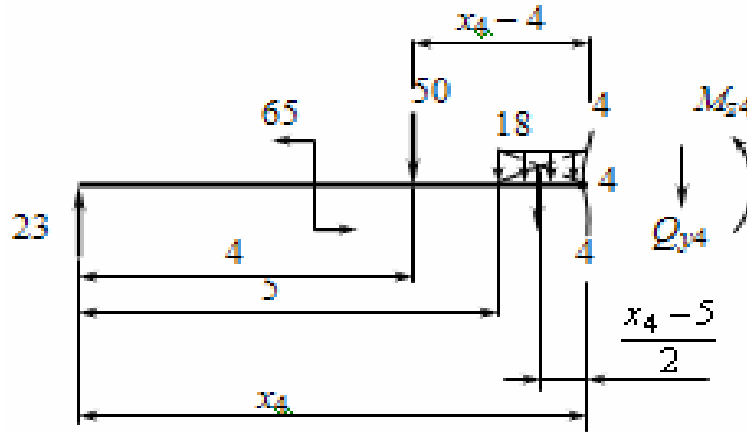


Рис. 10

при $x_5 = 2 \rightarrow Q_{y_5} = 36$ кН.

$$\sum M_5 = 0; -M_{z_5} - 18x_5 \frac{x_5}{2} = 0 \rightarrow M_{z_5} = -9x_5^2,$$

при $x_5 = 0 \rightarrow M_{z_5} = 0,$

при $x_5 = 1 \rightarrow M_{z_5} = -9$ кН·м,

при $x_5 = 2 \rightarrow M_{z_5} = -36$ кН·м.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 9, ж, з.

Пример 2

Построим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы, показанной на рис. 11.

Сначала определяют реакции опор A и B (см. рис. 11).

$$\sum M_A = 0; 15 \cdot 6 - (22 \cdot 2)5 - 60 \cdot 2 - (10 \cdot 6)3 + R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = 71,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; 15 \cdot 6 - (22 \cdot 2)5 - 60 \cdot 2 + (10 \cdot 6)3 + R_A \cdot 6 = 0;$$

$$R_A = -11,67 \text{ кН}.$$

Знак "минус" у реакции R_A означает, что выбранное первоначально направление этой реакции является неверным и на самом деле реактивная сила направлена противоположно.

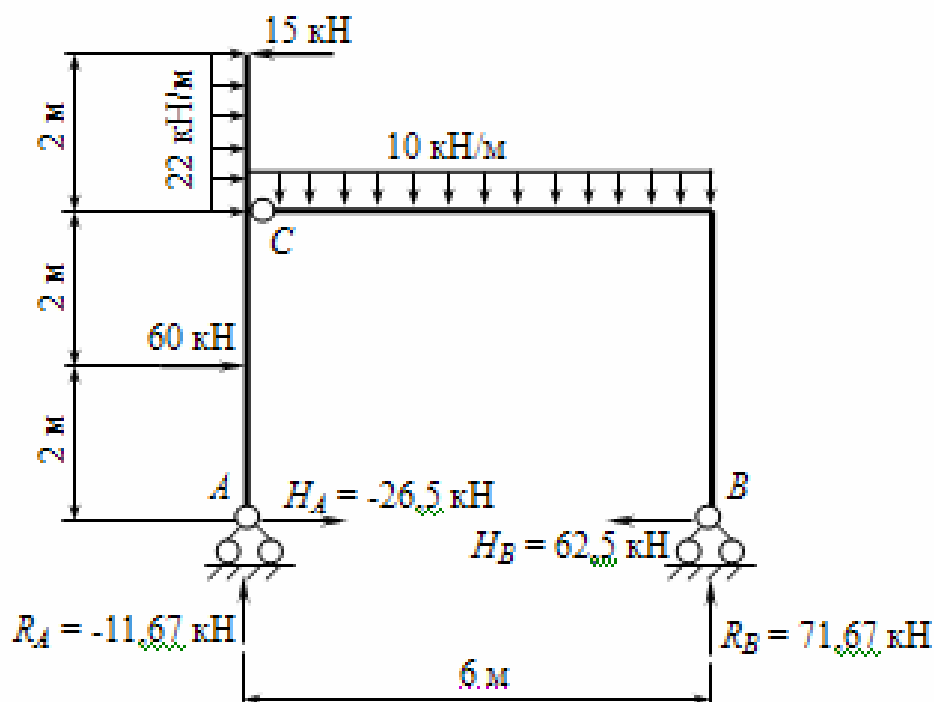


Рис. 11

Проверочное уравнение для вертикальных составляющих опорных реакций:

$$\sum y = 0; -10 \cdot 6 - 11,67 + 71,67 = 0; 0 \equiv 0.$$

Для расчета горизонтальных составляющих опорных реакций используют тот факт, что шарнир C (см. рис. 11) не скрепляет соединяемые части от взаимного поворота, т. е. изгибающий момент в сечениях рамы у шарнира C равен нулю.

Отсюда

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ и } \sum M_C^{\text{прав}} = 0,$$

где $\sum M_C^{\text{лев}}$ и $\sum M_C^{\text{прав}}$ - суммы моментов всех нагрузок, действующих только на левую и только на правую по отношению к шарниру C части рамы соответственно.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; 15 \cdot 6 - (22 \cdot 2)5 + 60 \cdot 2 + H_A \cdot 4 = 0;$$

$$H_A = -26,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; -(10 \cdot 6)3 + 71,67 \cdot 6 - H_B \cdot 4 = 0;$$

$$H_B = 62,5 \text{ кН};$$

Проверочное уравнение:

$$\sum x = 0; -15 + 22 \cdot 2 + 60 - 26,5 - 62,5 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Чтобы определить внутренние усилия в этой раме, необходимо рассмотреть пять участков. Для рам удобно на каждом участке использовать свою систему координат (рис. 12).

Первым рассмотрен участок от опоры *A* до точки приложения силы 60 кН. В его пределах проведено поперечное сечение 1 – 1,

которым рама разделена на две части.

Рассмотрено равновесие нижней отсеченной части (рис. 13, *a*). Вместе с поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_z в поперечном сечении рамы возникает и продольная сила N . Продольная сила N считается положительной, если она растягивающая, т. е. если она направлена от сечения.

Рассмотрено равновесие нижней отсеченной части (рис. 13, *a*). Вместе с поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_z в поперечном сечении рамы возникает и продольная сила N . Продольная сила N считается положительной, если она растягивающая, т. е. если она направлена от сечения.

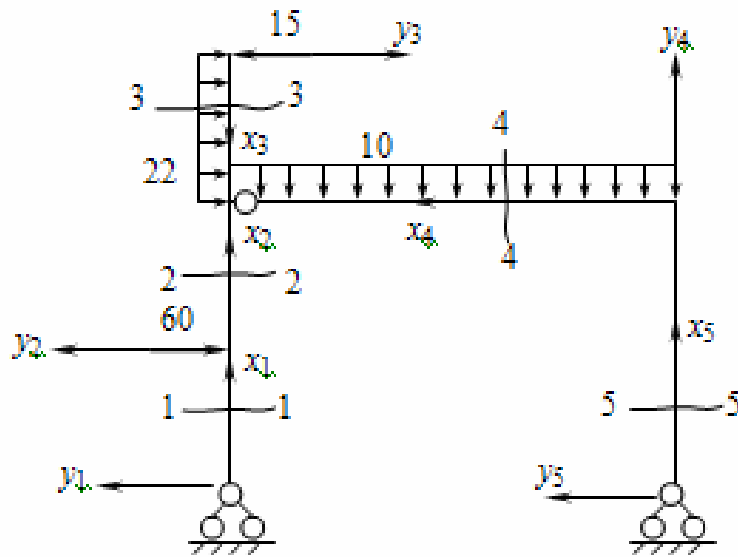


Рис. 12

Рассмотрено равновесие нижней отсеченной части (рис. 13, *a*). Вместе с поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_z в поперечном сечении рамы возникает и продольная сила N . Продольная сила N считается положительной, если она растягивающая, т. е. если она направлена от сечения.

Уравнения равновесия рассматриваемой нижней отсеченной части рамы ($0 \leq x_1 \leq 2$ м) (см. рис. 13, *a*):

$$\sum x_1 = 0; -11,67 + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = 11,67 \text{ кН};$$

$$\sum y_1 = 0; 26,5 - Q_{y_1} = 0 \rightarrow Q_{y_1} = 26,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0; -26,5x_1 + M_{z_1} = 0 \rightarrow M_{z_1} = 26,5x_1 \text{ кН},$$

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = 0,$$

$$\text{при } x_1 = 2 \rightarrow M_{z_1} = 53 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для второго участка $0 \leq x_2 \leq 2$ м (рис. 13, *б*):

$$\sum x_2 = 0; -11,67 + N_2 = 0 \rightarrow N_2 = 11,67 \text{ кН};$$

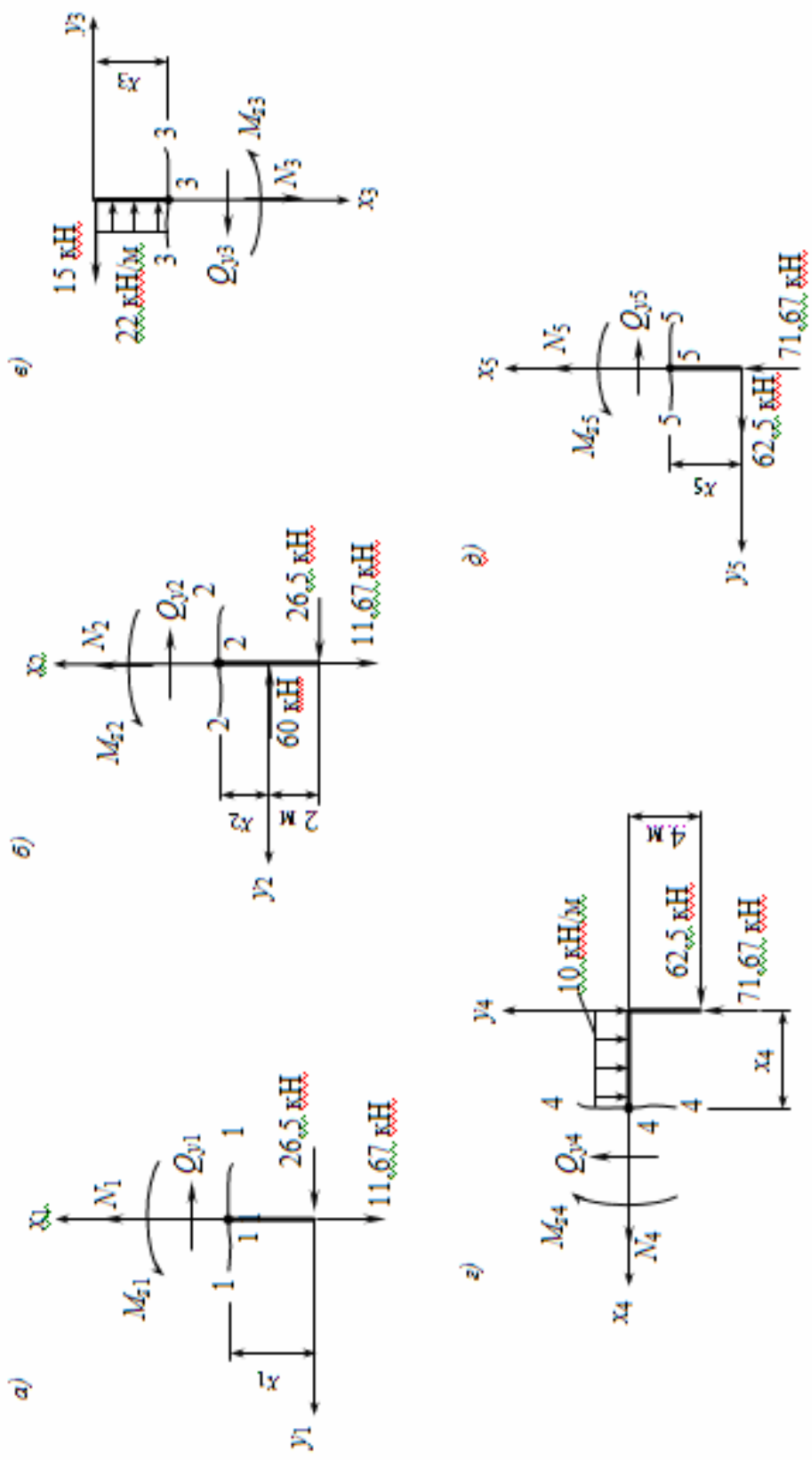


Рис. 13

$$\sum y_2 = 0; 26,5 - 60 - Q_{y_2} = 0 \rightarrow Q_{y_2} = -33,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0; -26,5(2 + x_2) + 60x_2 + M_{z_2} = 0 \rightarrow M_{z_2} = -33,5x_2 + 53;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \rightarrow M_{z_2} = 53 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_2 = 2 \rightarrow M_{z_2} = -14 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для третьего участка рассмотрено равновесие верхней отсеченной части ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$) (рис. 13, в):

$$\sum x_3 = 0; N_3 = 0;$$

$$\sum y_3 = 0; -15 + 22x_3 - Q_{y_3} = 0 \rightarrow Q_{y_3} = 22x_3 - 15, \quad (1)$$

$$\text{при } x_3 = 0 \rightarrow Q_{y_3} = -15 \text{ кН},$$

$$\text{при } x_3 = 2; Q_{y_3} = 29 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3 = 0; 15x_3 - (22x_3) \frac{x_3}{2} + M_{z_3} = 0 \rightarrow M_{z_3} = 11x_3^2 - 15x_3, \quad (2)$$

$$\text{при } x_3 = 0 \rightarrow M_{z_3} = 0,$$

$$\text{при } x_3 = 1 \rightarrow M_{z_3} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_3 = 2 \rightarrow M_{z_3} = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На этом участке имеется сечение, где $Q_y = 0$. В соответствии с формулой, связывающей внутренние усилия в поперечных сечениях изгибаемого стержня

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx},$$

в таком поперечном сечении возникает экстремальный на участке изгибающий момент. Его необходимо знать для дальнейших расчетов на прочность. Сначала определяется координата x_3^* сечения, в котором $Q_{y_3} = 0$, для этого можно приравнять к нулю выражение (1):

$$Q_{y_3} = 22x_3^* - 15 = 0,$$

$$x_3^* = 0,68 \text{ м}.$$

После подстановки этого значения в (2) получено

$$M_{z_3}^{\text{экстр}} = M_{z_3} (x_3 = x_3^* = 0,68) = -5,11 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для четвертого участка $0 \leq x_4 \leq 6$ м (рис. 13, з):

$$\sum x_4 = 0; N_2 + 62,5 = 0 \rightarrow N_4 = -62,5 \text{ кН};$$

$$\sum y_4 = 0; Q_{y_4} - 10x_4 + 71,67 = 0 \rightarrow Q_{y_4} = 10x_4 - 71,67,$$

$$\text{при } x_4 = 0 \rightarrow Q_{z_4} = -71,67 \text{ кН},$$

$$\text{при } x_4 = 6 \rightarrow Q_{z_4} = -11,67 \text{ кН}.$$

$$\sum M_4 = 0; -M_{z_4} - (15x_4) \frac{x_4}{2} - 62,5 \cdot 4 + 71,67x_4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z_4} = -5x_4^2 + 71,67x_4 - 250,$$

$$\text{при } x_4 = 0 \rightarrow M_{z_4} = -250 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_4 = 3 \rightarrow M_{z_4} = -80 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_4 = 6 \rightarrow M_{z_4} = -0.$$

Для последнего участка $0 \leq x_5 \leq 4$ м (рис. 13, д):

$$\sum x_5 = 0; N_5 + 71,67 = 0 \rightarrow N_5 = -71,67 \text{ кН};$$

$$\sum y_5 = 0; 62,5 - Q_{y_5} = 0 \rightarrow Q_{y_5} = 62,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_5 = 0; M_{z_5} - 62,5x_5 = 0 \rightarrow M_{z_5} = 62,5x_5,$$

$$\text{при } x_5 = 0 \rightarrow M_{z_5} = 0,$$

$$\text{при } x_5 = 4 \rightarrow M_{z_5} = 250 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построенные по этим результатам эпюры N , Q_y , M_z представлены на рис. 14.

Пример 3

Построим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы с криволинейным стержнем, показанной на рис. 15. Ось криволинейного стержня описывается уравнением окружности.

Определим реакции опоры (см. рис. 15):

$$\sum x = 0; -N + 60 - 40 = 0 \rightarrow N = 20 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; R - 10 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow R = 15 \text{ кН},$$

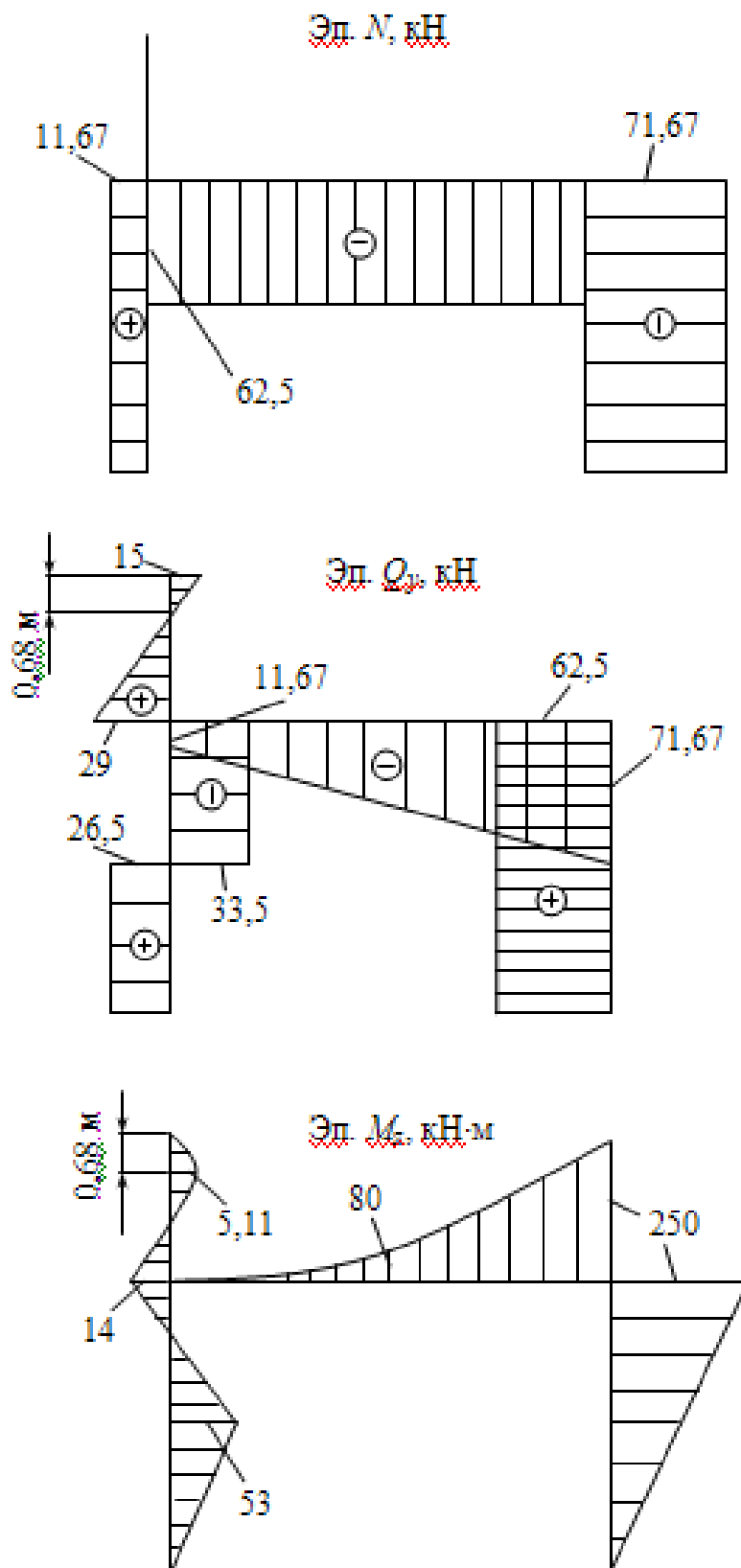


Рис. 14

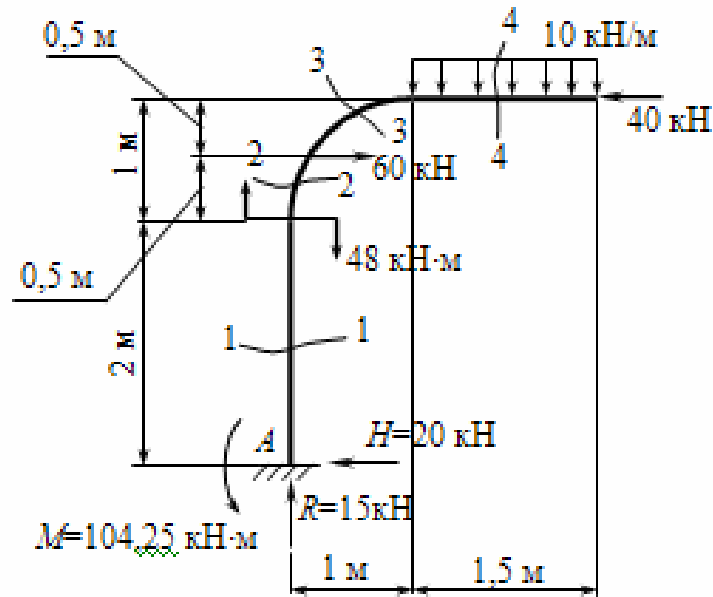


Рис. 15

$$\sum M_A = 0; M - 48 - 60 \cdot 2,5 - (10 \cdot 1,5)1,75 + 40 \cdot 3 = 0,$$

$$M = 104,25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Рама имеет четыре участка (см. рис. 15).

Для первого участка $0 \leq x_1 \leq 2$ м (рис. 16, а):

$$\sum x_1 = 0; 15 + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = -15 \text{ кН};$$

$$\sum y_1 = 0; 20 - Q_{y_1} = 0 \rightarrow Q_{y_1} = 20 \text{ кН},$$

$$\sum M_1 = 0; 104,25 - 20x_1 - M_{z_1} = 0 \rightarrow M_{z_1} = 104,25 - 20x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = 104,25 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_1 = 2 \rightarrow M_{z_1} = 64,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На втором участке (рис. 16, б) использованы полярные координаты сечения $2 - 2$ ($0^\circ \leq \alpha_2 \leq 30^\circ$):

$$\sum x_2 = 0; N_2 + 15 \cos \alpha_2 - 20 \sin \alpha_2 = 0 \rightarrow N_2 = 20 \sin \alpha_2 - 15 \cos \alpha_2,$$

$$\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow N_2 = -15 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow N_2 = -9,32 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow N_2 = -2,98 \text{ кН}.$$

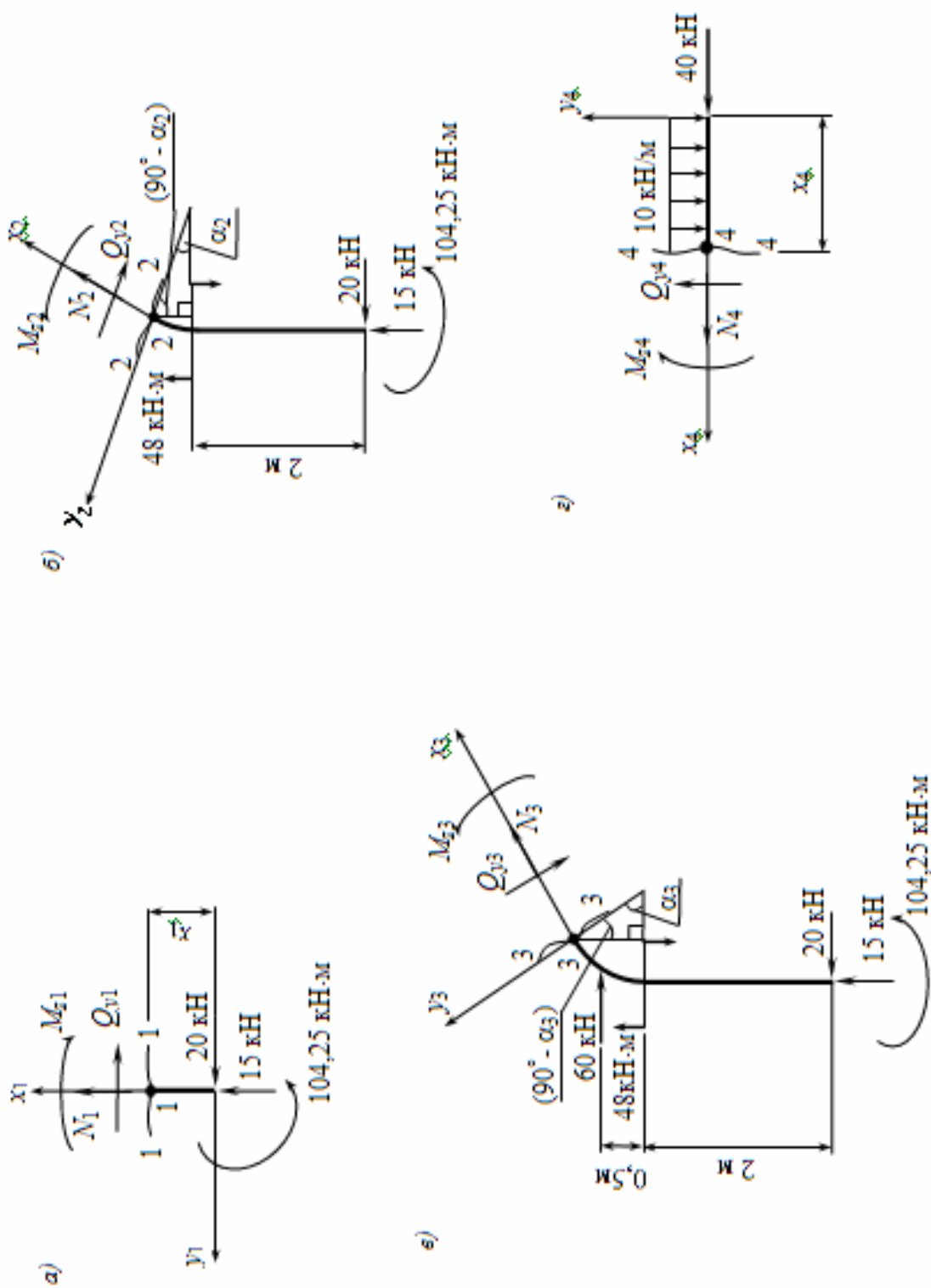


Рис. 16

$$\sum y_2 = 0; -Q_{y_2} + 15 \sin \alpha_2 + 20 \cos \alpha_2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow Q_{y_2} = 15 \sin \alpha_2 + 20 \cos \alpha_2,$$

$$\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow Q_{y_2} = 20 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow Q_{y_2} = 23,2 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow Q_{y_2} = -24,82 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2 = 0; 104,25 - 48 - 20 [2 + 1 \cos (90^\circ - \alpha_2)] -$$

$$-15 [1 - \cos \alpha_2] + M_{z_2} = 0 \rightarrow M_{z_2} = -1,25 + 20 \cos (90^\circ - \alpha_2) - 15 \cos \alpha_2,$$

$$\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow M_{z_2} = -16,25 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow M_{z_2} = -10,56 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow M_{z_2} = -4,24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем участке также используем полярные координаты для сечения 3 – 3 ($30^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$) (рис. 16, в):

$$\sum x_3 = 0; N_3 + 15 \cos \alpha_3 - 20 \sin \alpha_3 + 60 \sin \alpha_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow N_3 = -15 \cos \alpha_3 - 40 \sin \alpha_3,$$

$$\text{при } \alpha_3 = 30^\circ \rightarrow N_3 = -32,99 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 60^\circ \rightarrow N_3 = -42,14 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 90^\circ \rightarrow N_3 = -40 \text{ кН}.$$

$$\sum y_3 = 0; -Q_{y_3} + 15 \sin \alpha_3 + 20 \cos \alpha_3 - 60 \sin \alpha_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow Q_{y_3} = 15 \sin \alpha_3 - 40 \cos \alpha_3,$$

$$\text{при } \alpha_3 = 30^\circ \rightarrow Q_{y_3} = -27,14 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 60^\circ \rightarrow Q_{y_3} = -7,01 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 90^\circ \rightarrow Q_{y_3} = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3 = 0; 104,25 - 48 - 20 [2 + 1 \cos (90^\circ - \alpha_3)] -$$

$$-15 [1 - \cos \alpha_3] + 60 [1 \cos (90^\circ - \alpha_3) - 0,5] + M_{z_3} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z_3} = 28,75 - 40 \cos(90^\circ - \alpha_3) - 15 \cos \alpha_3,$$

при $\alpha_3 = 30^\circ \rightarrow M_{z_3} = -4,24 \text{ кН}\cdot\text{м},$

при $\alpha_3 = 60^\circ \rightarrow M_{z_3} = -13,39 \text{ кН}\cdot\text{м},$

при $\alpha_3 = 90^\circ \rightarrow M_{z_3} = -11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Для четвертого участка ($0 \leq x_4 \leq 1,5 \text{ м}$) (рис. 16, з):

$$\sum x_4 = 0; N_4 + 40 = 0 \rightarrow N_4 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum y_4 = 0; Q_{y_4} - 10x_4 = 0 \rightarrow Q_{y_4} = 10x_4,$$

при $x_4 = 0 \rightarrow Q_{y_4} = 0,$

при $x_4 = 1,5 \rightarrow Q_{y_4} = 15 \text{ кН};$

$$\sum M_4 = 0; -M_{z_4} - (10x_4) \frac{x_4}{2} = 0 \rightarrow M_{z_4} = -5x_4^2,$$

при $x_4 = 0 \rightarrow M_{z_4} = 0,$

при $x_4 = 0,75 \rightarrow M_{z_4} = -2,81 \text{ кН}\cdot\text{м},$

при $x_4 = 1,5 \rightarrow M_{z_4} = -11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Полученные эпюры представлены на рис. 17.

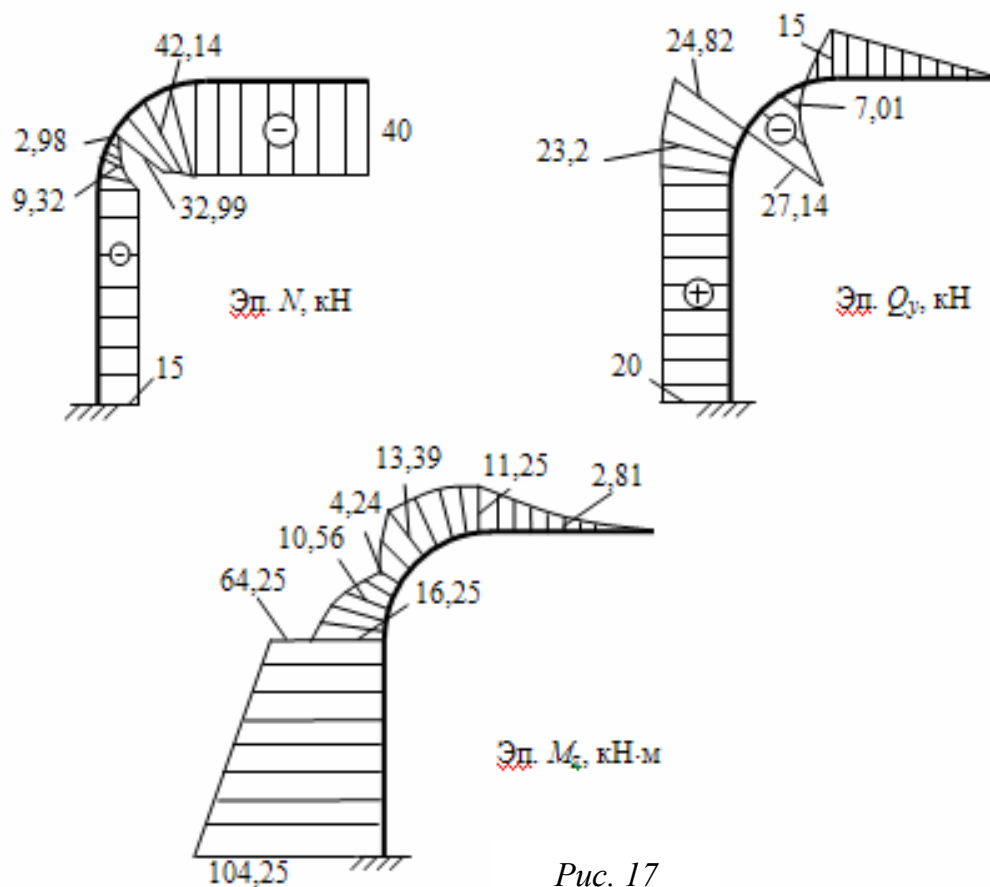


Рис. 17

Задание 3

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

В соответствии с вариантом, выданным преподавателем, данные для расчета берут из табл. 3. Для ступенчатого стержня, изображенного на рис. 18, требуется:

1. Построить эпюру:

- продольных сил;
- нормальных напряжений σ_x ;
- перемещений поперечных сечений.

2. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям найти площадь поперечного сечения, приняв $R = 210$ МПа.

3. Найти перемещение свободного конца стержня, приняв $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

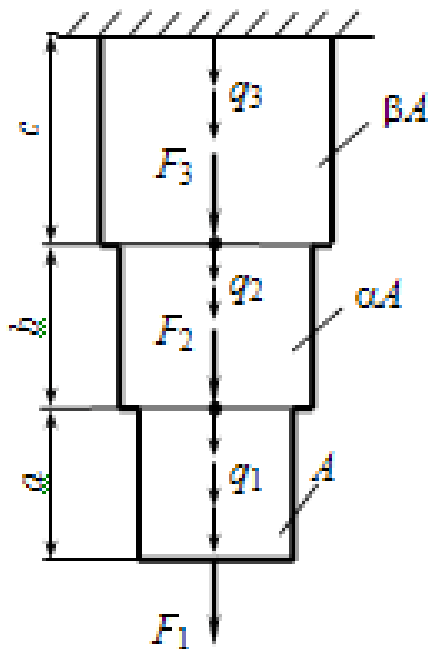


Рис. 18

Пример

Рассмотрим расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня, показанного на рис. 19.

Таблица 3

№ п/п	I						II					
	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	α	β	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$q_3, \text{кН/м}$	
1	2,1	3,4	3,9	1,2	0,4	20	-	10	-10	-	15	
2	2,2	1,5	3,8	1,3	0,5	-	-22	12	-14	10	-	
3	2,3	1,6	3,7	1,4	0,6	24	-	24	-	-11	18	
4	2,4	1,7	3,6	1,5	0,7	-12	28	-	-	12	20	
5	2,5	1,8	3,5	1,6	0,8	-	24	-12	6	-	-12	
6	2,6	1,9	3,4	1,7	0,9	16	-	28	8	18	-	
7	2,7	2,0	3,3	1,8	3,0	-30	-20	-	-5	14	-	
8	1,0	2,1	3,2	1,9	2,9	32	-	23	9	-	-17	
9	1,1	2,2	3,1	2,0	2,8	40	-26	-	-	-13	19	
10	1,2	2,3	2,0	0,5	2,7	-	44	22	11	-	14	
11	1,3	2,4	2,1	0,6	2,6	-	-46	18	-	-14	16	
12	1,4	2,5	2,2	0,7	2,5	36	-	-30	-	6	-8	
13	1,5	2,6	2,3	0,8	2,4	-44	20	-	-15	-	5	
14	1,6	2,7	2,4	0,9	2,3	-	-48	29	18	-10	-	
15	1,7	2,8	2,5	2,1	2,2	-	40	18	-12	8	-	
16	1,8	2,9	2,6	2,2	2,1	-34	12	-	-	15	-7	
17	1,9	3,0	2,7	2,3	2,0	39	-	-40	17	-	10	
18	2,0	3,1	2,8	2,4	1,9	-	22	41	7	-11	-	
19	2,8	3,2	2,9	2,5	1,8	-	-16	44	-10	12	-	
20	2,9	3,2	3,0	2,6	1,7	-18	32	-	-	-18	13	

1. Построим эпюру продольных сил.
Для этого разобьем стержень на участки 0 – 1, 1 – 2, 2 – 3 (рис. 20, а).

Найдем опорную реакцию R (рис. 20, а).

$$\sum x = 0;$$

$$15 + 20 \cdot 2,5 - 40 - R = 0 \rightarrow R = 25 \text{ кН.}$$

Для построения эпюры продольных сил воспользуемся методом сечений. Свяжем с каждым участком локальную систему координат.

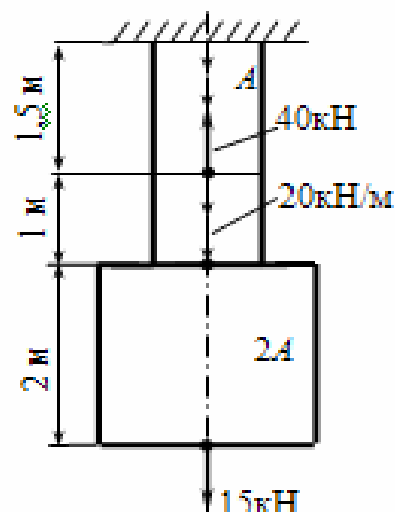


Рис. 19

На первом участке 0 – 1 сделаем сечение 1 – 1 на расстоянии x_1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м) от начала координат. Отбросим нижнюю часть и рассмотрим равновесие верхней части. Действие нижней части на верхнюю обозначим N_1 (рис. 20, б). Найдем проекции всех сил, действующих на верхнюю часть, на ось x_1 :

$$\sum x = 0; -25 + 20x_1 + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = 25 - 20x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow N_1 = 25 \text{ кН,}$$

$$\text{при } x_1 = 1,5 \rightarrow N_1 = -5 \text{ кН.}$$

График N_1 имеет вид прямой линии.

Сделаем сечение 2 – 2 в пределах второго участка 1 – 2 на расстоянии x_2 ($0 \leq x_2 \leq 1$ м) от начала участка (см. рис. 20, а).

Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части. Действие отброшенной верхней части на нижнюю обозначим N_2 (рис. 20, в). Найдем проекции всех сил на ось x_2 :

$$\sum x_2 = 0; -N_2 + 20(1 - x_2) + 15 = 0 \rightarrow N_2 = 35 - 20x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \rightarrow N_2 = 35 \text{ кН,}$$

$$\text{при } x_2 = 1 \rightarrow N_2 = 15 \text{ кН.}$$

Сделаем сечение 3 – 3 в пределах третьего участка 2 – 3 на расстоянии x_3 ($0 \leq x_3 \leq 2$ м) от начала участка (см. рис. 20, а).

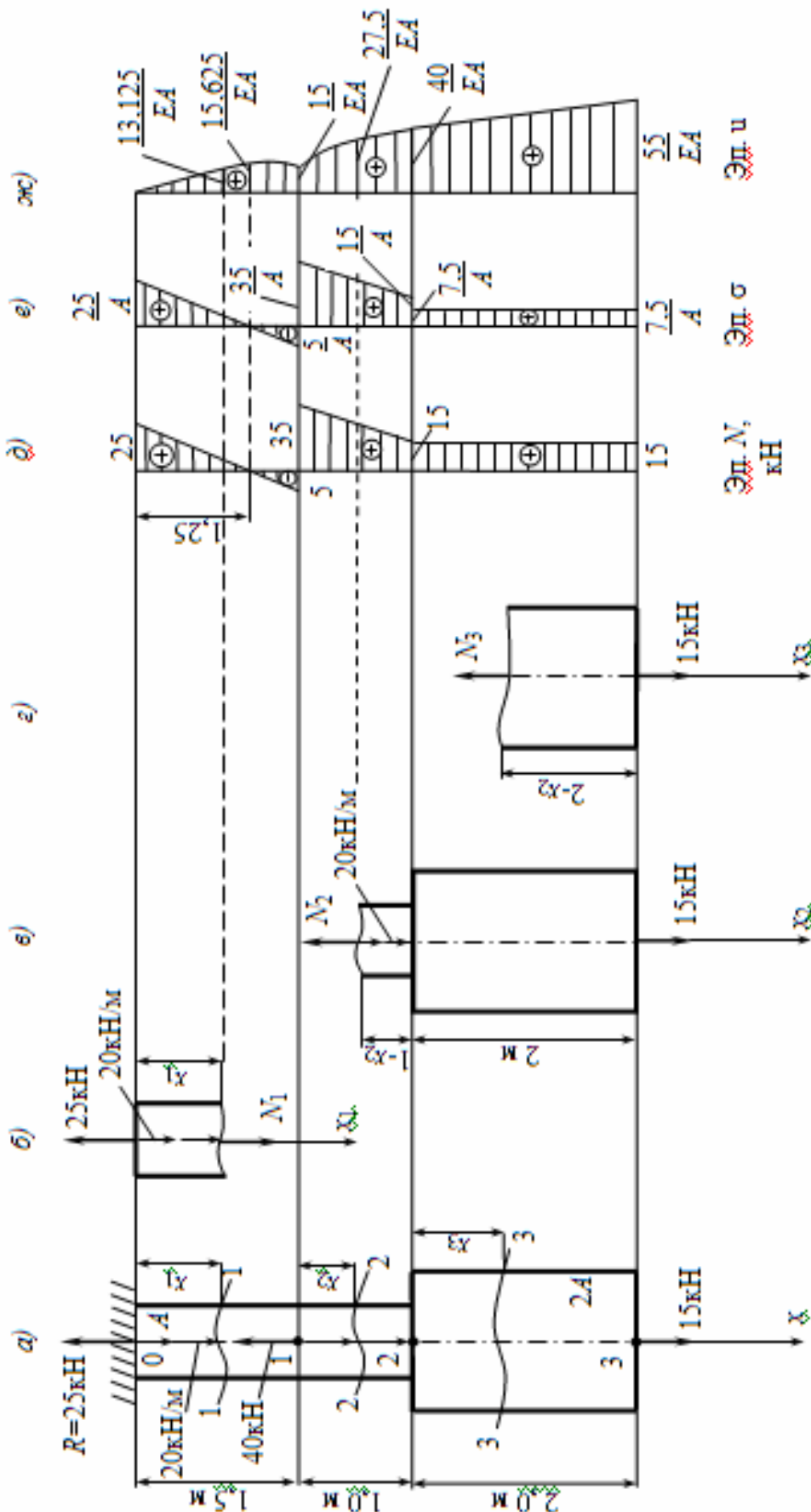


Рис. 20

Рассмотрим равновесие нижней части, обозначив действие верхней части на нижнюю N_3 (рис. 20, з). Найдем проекции всех сил на ось x_3 :

$$\sum x_3 = 0; -N_3 + 15 = 0 \rightarrow N_3 = 15 \text{ кН.}$$

Следовательно, в пределах третьего участка 2 – 3 продольная сила постоянна.

Полученные данные позволяют построить эпюру продольных сил для рассматриваемого стержня (рис. 20, д).

2. Построим эпюру нормальных напряжений σ_x .

При центральном растяжении-сжатии нормальные напряжения σ_x определяются по формуле $\sigma_x = \frac{N}{A}$.

Найдем нормальное напряжение для первого участка 0 - 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{25 - 20x_1}{A}; \text{ при } x_1 = 0 \rightarrow \sigma_1 = \frac{25 \text{ кН}}{A},$$

$$\text{при } x_1 = 1,5 \rightarrow \sigma_1 = \frac{-5 \text{ кН}}{A}.$$

Нормальное напряжение для второго участка 1 – 2 ($0 \leq x_2 \leq 1$ м):

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{35 - 20x_2}{A}; \text{ при } x_2 = 0 \rightarrow \sigma_2 = \frac{35 \text{ кН}}{A},$$

$$\text{при } x_2 = 1 \rightarrow \sigma_2 = \frac{15 \text{ кН}}{A}.$$

Нормальное напряжение для третьего участка 2 – 3 ($0 \leq x_3 \leq 2$ м):

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{15 \text{ кН}}{2A} = \frac{7,5 \text{ кН}}{A}.$$

Полученные данные позволяют построить эпюру нормальных напряжений (рис. 20, е).

3. Построим эпюру перемещений сечений стержня.

Перемещение точки с координатой x определяется по формуле

$$u = u_0 + \int_0^x \frac{N}{EA} dx,$$

где u_0 - перемещение начала координат (участка).

Для первого участка 0 – 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м) получим

$$u_1 = u_{10} + \int_0^{x_1} \frac{N_1}{EA_1} dx = 0 + \int_0^{x_1} \frac{25 - 20x_1}{EA} dx = \frac{1}{EA} (25x_1 - 10x_1^2).$$

Графиком этой зависимости будет парабола, поэтому для построения эпюры найдем значения перемещений на концах и в середине участка. При $x_1 = 0 \rightarrow u_1 = 0$;

$$\text{при } x_1 = 0,75 \rightarrow u_1 = \frac{13,125 \text{ кН}}{EA};$$

$$\text{при } x_1 = 1,5 \rightarrow u_1 = \frac{15 \text{ кН}}{EA}.$$

Заметим, что перемещение на первом участке будет иметь экстремум при $x_1 = 1,25$ м, и его значение будет $u_1 = \frac{15,625 \text{ кН}}{EA}$.

Для второго участка 1 – 2 ($0 \leq x_2 \leq 1,0$ м) получим

$$u_2 = u_{20} + \int_0^{x_2} \frac{N_2}{EA_2} dx = \frac{15}{EA} + \frac{1}{EA} (35x_2 - 20x_2^2).$$

Графиком этой зависимости также будет парабола, поэтому для построения эпюры найдем значения перемещений на концах и

в середине участка. При $x_2 = 0 \rightarrow u_2 = \frac{15 \text{ кН}}{EA}$;

$$\text{при } x_2 = 0,5 \rightarrow u_2 = \frac{27,5 \text{ кН}}{EA};$$

$$\text{при } x_2 = 1,0 \rightarrow u_2 = \frac{40 \text{ кН}}{EA}.$$

Для третьего участка 2 – 3 ($0 \leq x_3 \leq 2,0$ м) получим

$$u_3 = u_{30} + \int_0^{x_3} \frac{N_3}{EA_3} dx = \frac{40}{EA} + \frac{7,5}{EA} x_3.$$

Графиком этой зависимости будет прямая линия, поэтому для построения эпюры достаточно найти значения перемещений только на концах участка.

$$\text{При } x_3 = 0 \rightarrow u_3 = \frac{40 \text{ кН}}{EA};$$

$$\text{при } x_3 = 2,0 \rightarrow u_3 = \frac{55 \text{ кН}}{EA}.$$

Полученные значения перемещений позволяют построить эпюру перемещений стержня (рис. 20, ж).

4. Определим величину площади поперечного сечения стержня.

Из условия прочности по нормальным напряжениям, приняв $R = 210 \text{ МПа}$, определяем величину площади поперечного сечения стержня. Для этого из эпюры нормальных напряжений (см. рис. 20, е)

находим наибольшую величину, равную $\sigma_{\max} = \frac{35 \text{ кН}}{EA}$. Тогда усло-

вие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{35 \text{ кН}}{A} \leq 210 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Отсюда

$$A \geq 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Найдем перемещение свободного конца стержня при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ и $A = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$:

$$u_3 = \frac{55 \text{ кН}}{EA} = \frac{55 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} 1,67 \cdot 10^4 \text{ м}^2} = 1,65 \cdot 10^3 \text{ м} = 1,65 \text{ мм}.$$

Задание 4

РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Задача № 1. Для стальной балки, изображенной на рис. 21, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z .

2. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечных сечений балки, формы которых пока-

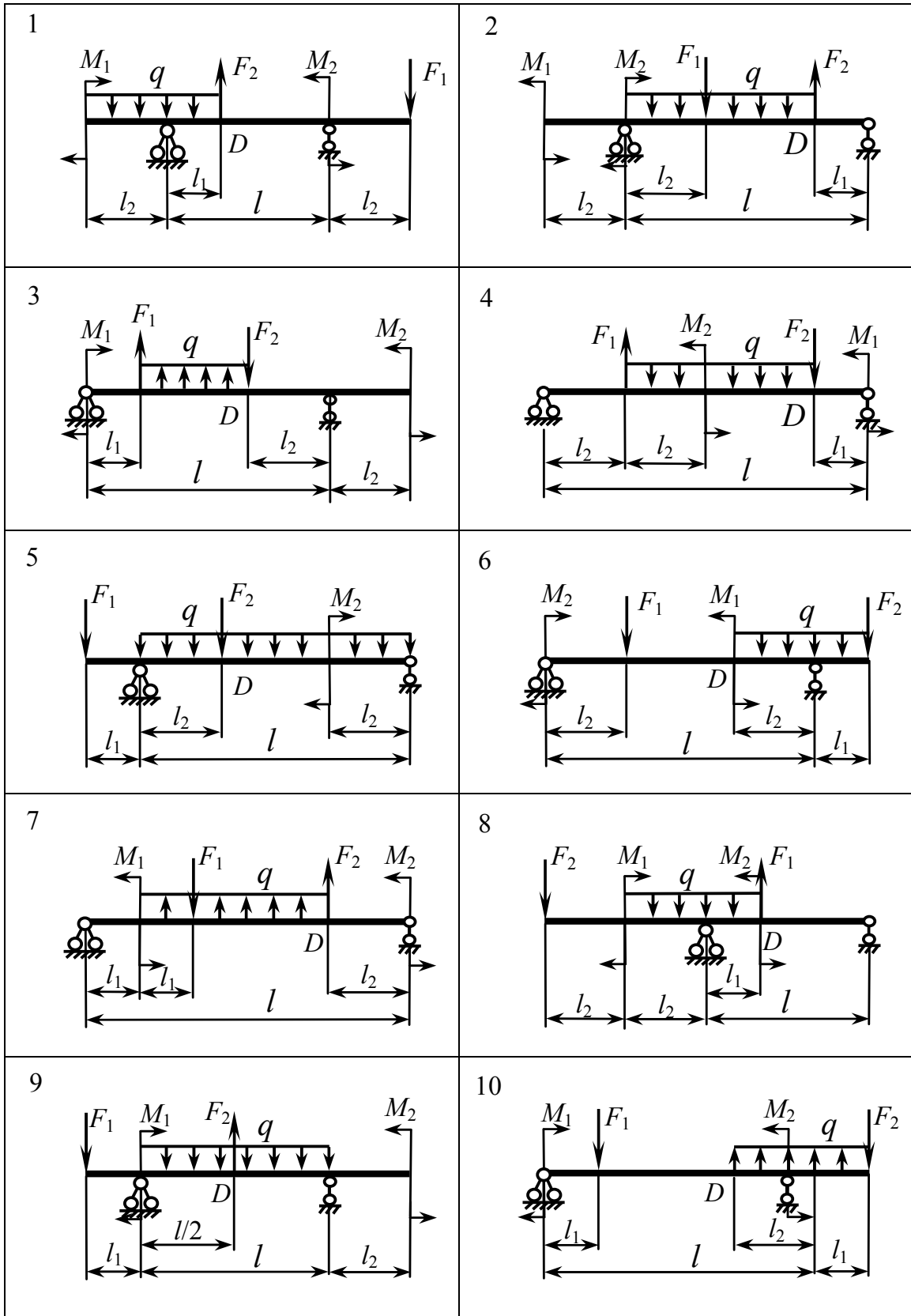


Рис. 21

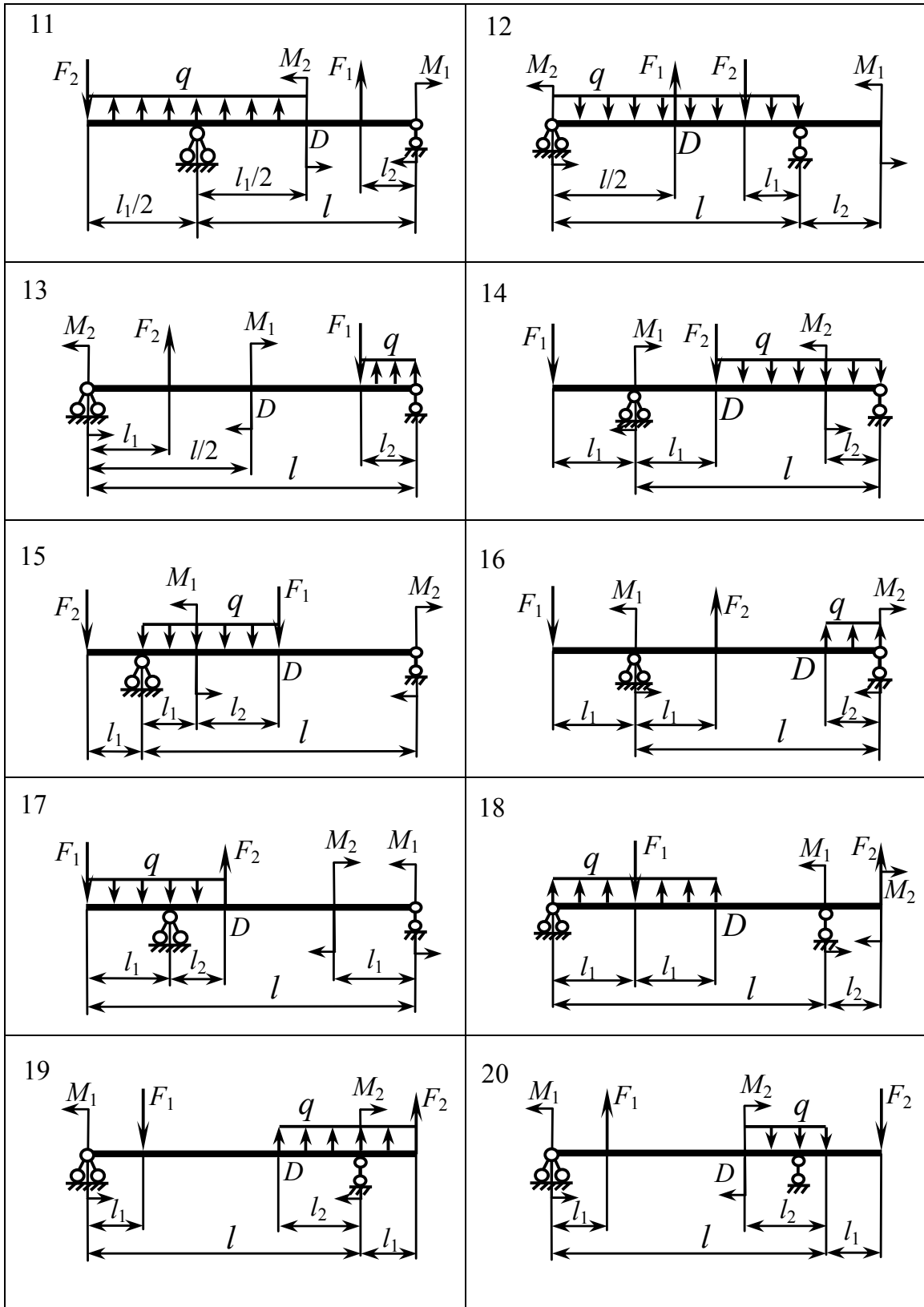


Рис. 21. Окончание

заны на рис. 22; сравнить балки с заданными поперечными сечениями по расходу материала и оценить их экономичность.

3. Построить эпюры нормальных напряжений в опасном сечении балки для заданных форм поперечных сечений.

4. Определить наибольшие касательные напряжения в сечении балки, в котором поперечная сила максимальна, построить эпюры касательных напряжений для заданных форм поперечных сечений.

5. Проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

6. Определить прогиб и угол поворота в сечении D балки или в сечении, указанном преподавателем.

Номер схемы балки, данные для расчета взять из табл. 4 по номеру варианта. Материал балки – сталь, расчетное сопротивление при сжатии и растяжении $R = 210$ МПа, при срезе $R_{ср} = 120$ МПа, модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Форма поперечного сечения балки (см. рис. 22) задается преподавателем.

Задача № 2. Для балки, изображенной на рис. 23, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z .

2. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размера поперечного сечения балки (рис. 24).

3. Определить перемещения в сечении D балки.

Номер схемы балки, данные для расчета взять из табл. 5 по номеру варианта. При расчете принять $R = 10$ МПа, $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Задача № 3. Для балки, изготовленной из хрупкого материала, неодинаково сопротивляющегося сжатию и растяжению ($R_{сж} > R_{раст}$), требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z .

Таблица 4

№ п/п	I						II			
	Номер схемы	l , м	l_1 , м	l_2 , м	h/b	q , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м
1	1	6,0	2,2	1,4	1,8	22	15	24	12	0
2	2	6,2	2,0	2,4	1,6	24	20	14	0	18
3	3	5,8	1,8	2,2	1,5	30	24	0	20	12
4	4	4,2	1,6	1,4	2,0	18	0	18	24	10
5	5	5,6	2,0	1,8	2,2	20	30	12	14	0
6	6	4,6	1,5	1,3	2,4	16	22	10	0	34
7	7	4,8	1,6	1,4	2,5	28	18	0	30	20
8	8	5,2	1,8	2,0	1,4	26	0	20	36	12
9	9	5,0	1,5	2,1	1,5	10	25	12	15	0
10	10	5,4	1,9	1,5	1,6	22	8	30	0	24
11	11	4,0	1,4	1,2	1,8	18	12	0	16	8
12	12	6,4	2,6	1,8	2,1	20	0	28	10	22
13	13	5,5	1,8	1,7	2,2	25	20	14	18	0
14	14	4,4	1,4	1,6	2,4	32	14	25	0	30
15	15	4,5	1,5	1,2	2,5	14	32	0	12	24
16	16	5,0	2,2	1,4	2,8	18	0	26	8	28
17	17	5,8	2,4	1,8	3,0	16	16	20	24	0
18	18	6,1	2,5	1,6	1,8	26	12	10	0	16
19	19	5,6	1,8	2,2	1,7	28	18	0	21	10
20	20	4,8	1,6	1,4	2,3	12	0	22	14	26

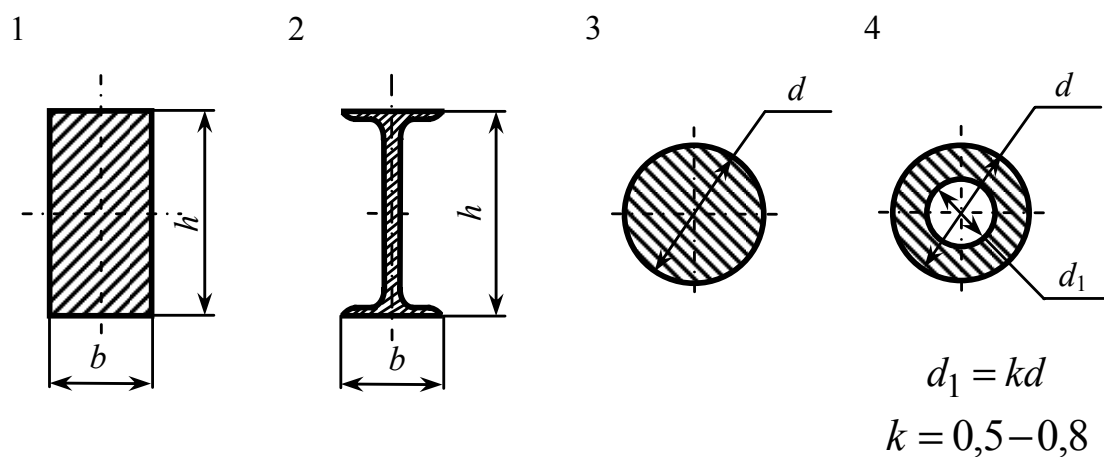


Рис. 22

2. Из условий прочности по нормальным напряжениям при сжатии и растяжении определить размеры заданного поперечного сечения балки (рис. 25), причем расположить балку рационально, выбрав такое положение поперечного сечения, при котором его размеры были бы минимальными, что обеспечивает экономию материала.

3. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки.

Номер схемы балки (см. рис. 23), данные для расчета взять из табл. 6 по номеру варианта.

Указания к выполнению задания

Расчет балки на прочность и определение перемещений в заданном сечении балки рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Изобразить расчетную схему балки в масштабе с указанием численных значений параметров нагрузки, линейных размеров.

2. Определить реакции опор, показать их на расчетной схеме балки.

3. Разбить балку на участки.

4. Методом сечений определить поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z на каждом участке балки в аналитическом виде.

5. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z .

6. По эпюре изгибающего момента найти опасное сечение, в котором возникает наибольший по величине изгибающий момент $|M_z|_{\max}$. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить осевой момент сопротивления поперечного сечения балки W_z :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R,$$

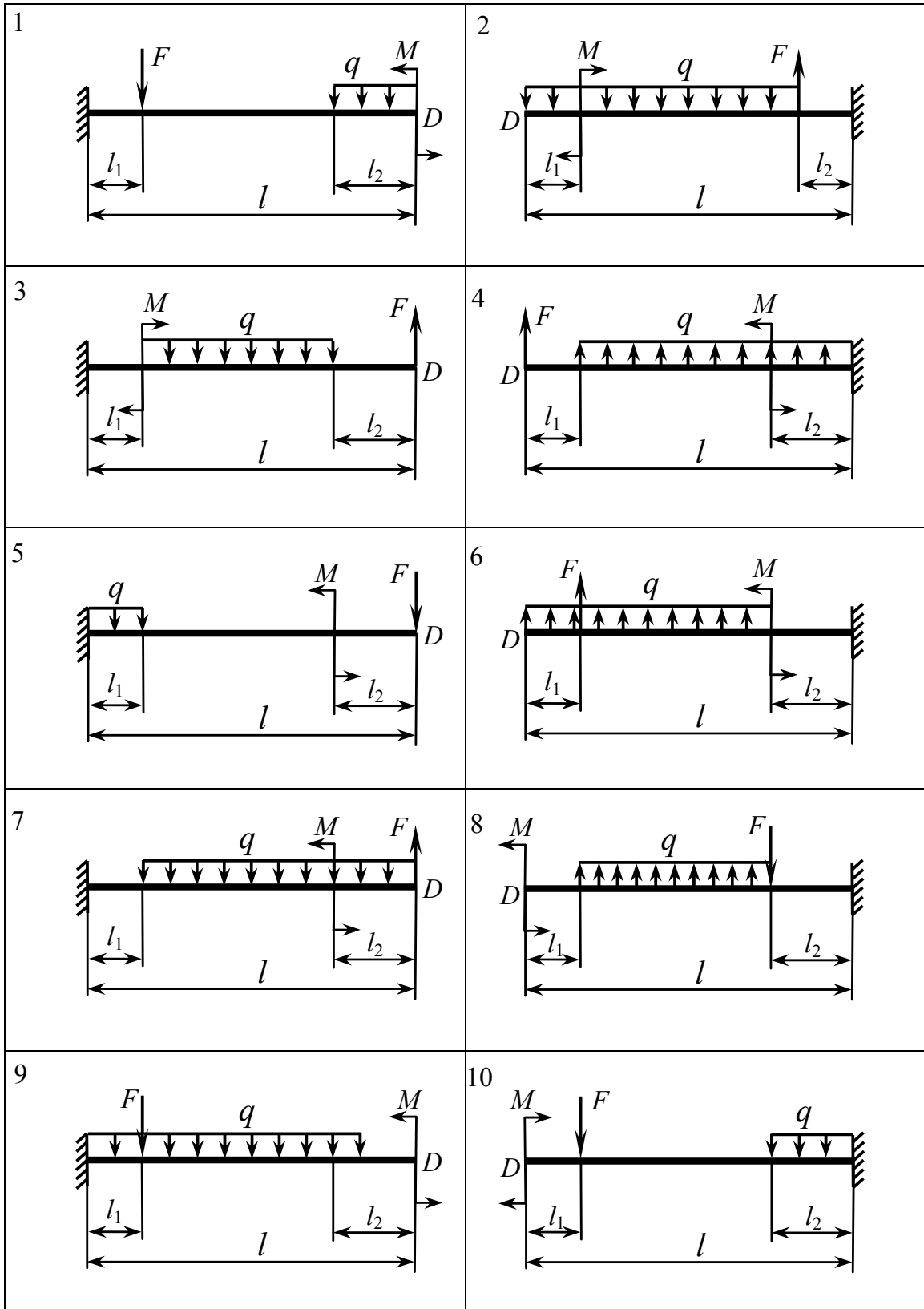


Рис. 23

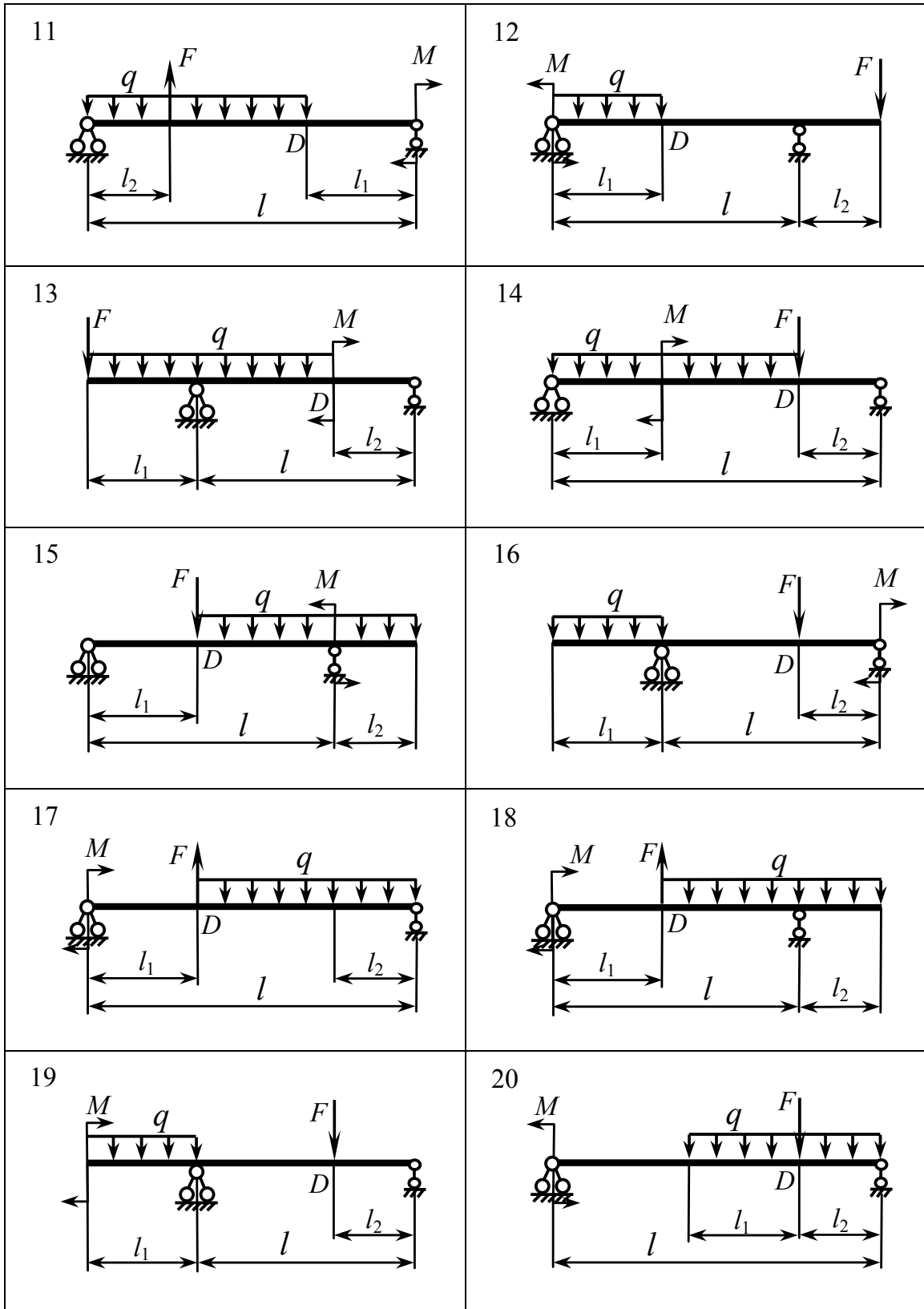


Рис. 23. Окончание

Таблица 5

№ п/п	I					II		
	Номер схемы	l , м	l_1 , м	l_2 , м	q , кН/м	F , кН	M , кН·м	Форма сечения
1	5	3,3	1,2	1,1	24	8	24	1
2	4	3,5	1,3	1,0	18	12	18	2
3	3	3,7	1,4	1,2	28	10	12	3
4	2	3,9	1,2	1,5	20	15	27	4
5	1	4,0	1,8	1,1	22	18	30	5
6	10	4,2	2,0	1,4	16	14	14	1
7	9	3,4	1,4	1,0	14	16	22	2
8	8	3,8	1,6	1,1	12	20	15	3
9	7	3,6	1,8	0,8	26	11	25	4
10	6	3,2	1,2	1,0	30	9	16	5
11	20	5,2	1,8	2,0	25	22	28	1
12	19	5,0	1,2	1,6	15	18	26	2
13	18	5,4	1,4	1,8	18	15	18	3
14	17	5,6	1,6	1,4	22	20	32	4
15	16	5,8	1,9	1,2	28	8	14	5
16	15	6,0	2,0	1,5	16	10	16	1
17	14	6,2	2,2	1,8	20	12	30	2
18	13	5,3	2,0	1,5	14	16	28	3
19	12	5,5	2,5	1,2	30	24	12	4
20	11	5,1	1,6	2,1	32	21	15	5

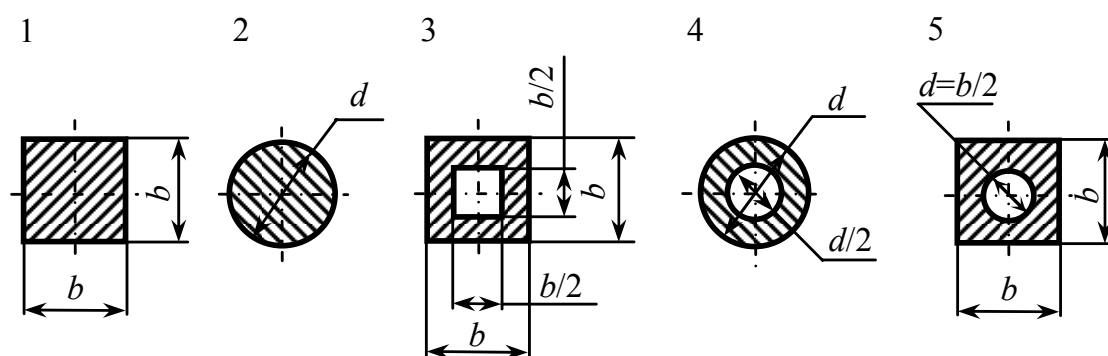


Рис. 24

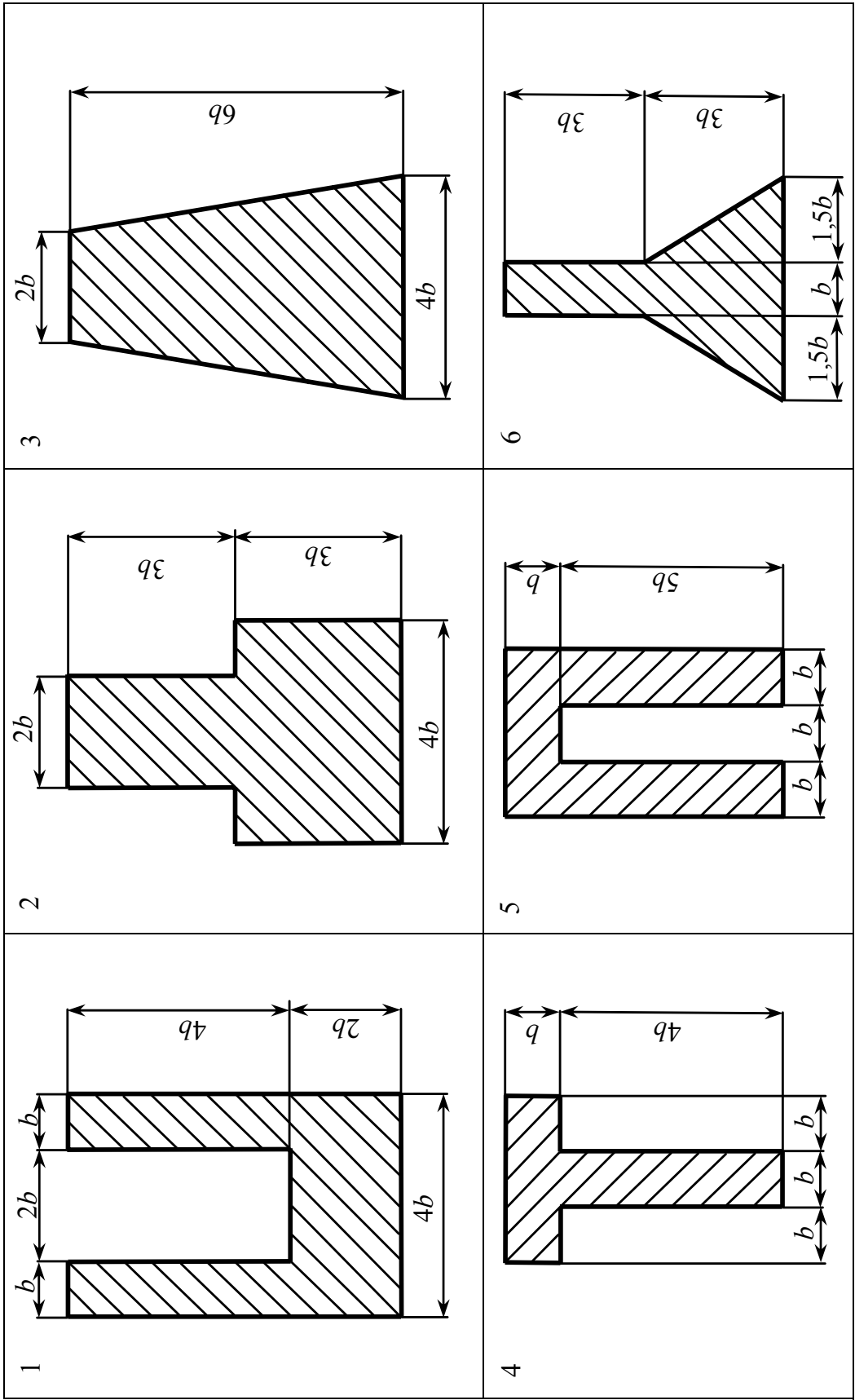


Рис. 25

Таблица 6

№ п/п	I						II			
	№ схемы	l , м	l_1 , м	l_2 , м	q , кН/м	№ сечения	F , кН	M , кН·м	Расчетное	
									$R_{сж}$	$R_{раст}$
1	11	5,0	2,1	1,5	12	1	21	25	120	45
2	12	5,2	2,2	1,6	10	2	24	12	80	40
3	13	5,4	1,7	1,8	6	3	12	20	12	8
4	14	6,0	2,4	1,6	8	4	16	12	8	0,5
5	15	5,6	1,8	1,9	15	5	8	24	120	60
6	16	5,8	2,0	1,8	20	6	10	30	10	1
7	17	6,2	2,5	1,7	18	1	15	24	120	45
8	18	4,8	1,6	1,4	16	2	20	16	140	80
9	19	4,6	1,4	1,5	9	3	22	14	15	9
10	20	5,5	2,1	1,7	22	4	18	12	8	0,8
11	1	3,6	1,4	1,2	11	5	11	21	120	50
12	2	3,8	1,5	1,3	9	6	9	28	140	60
13	3	4,0	1,9	1,1	5	1	14	30	14	7
14	4	4,2	2,0	1,2	7	2	21	18	12	1
15	5	3,4	1,4	1,0	14	3	17	9	100	50
16	6	4,3	2,1	1,2	10	4	10	27	150	80
17	7	4,5	2,2	1,1	12	5	15	22	10	0,8
18	8	4,1	1,1	1,9	16	6	8	18	15	10
19	9	3,4	1,3	1,0	18	1	12	20	140	70
20	10	3,9	1,8	1,2	20	2	20	12	100	40

отсюда

$$W_z = \frac{|M_z|_{\max}}{R}.$$

7. По найденному значению W_z найти размеры заданных поперечных сечений: для прямоугольного сечения – b и h , для круглого и кольцевого сечений – диаметр d , по таблице прил. 3 подобрать номер стандартного двутаврового сечения. Для каждого сечения найти площадь, осевой момент инерции I_z . В опасных сечениях балки при $|M_z|_{\max}$ и $|Q_y|_{\max}$ найти наибольшие нормальные σ_{\max} и касательные τ_{\max} напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z},$$
$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} S_z}{b_y I_z},$$

где S_z, I_z - статический момент полусечения и осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси z соответственно;

b_y - ширина поперечного сечения по нулевой линии, которая для симметричного сечения совпадает с осью z .

Наибольшее нормальное напряжение σ_{\max} возникает в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} для сечений, у которых ось z является осью симметрии, возникает в точках, лежащих на нулевой линии, т. е. на оси z .

8. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки при $|M_z|_{\max}$ и $|Q_y|_{\max}$ для заданных форм поперечных сечений.

9. Проверить выполнение условий прочности по нормальным и касательным напряжениям при заданных расчетных сопротивлениях R и $R_{\text{ср}}$.

10. Сравнить балки с заданными поперечными сечениями по расходу материала и указать наиболее рациональную форму поперечного сечения балки.

11. Определить перемещения (прогиб и угол поворота) в заданном сечении балки методом начальных параметров или методом Мора (по указанию преподавателя). Расчет довести до численных значений перемещений. Оценить полученные численные значения прогиба и угла поворота, выразить величину прогиба в процентах от длины пролета балки l .

12. Расчет балки, изготовленной из хрупкого материала (задача № 3), выполняется с учетом двух условий прочности:

$$\text{- при растяжении } \sigma_{\max}^p = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^p \leq R_{\text{раст}} ;$$

$$\text{- при сжатии } \sigma_{\max}^c = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^c \leq R_{\text{сж}} ,$$

где $|M_z|_{\max}$ - наибольший по величине изгибающий момент в опасном сечении балки; I_z - осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси z ; y_{\max}^p , y_{\max}^c - координаты точек, наиболее удаленных от нулевой линии (оси z) в растянутой и сжатой части поперечного сечения балки соответственно. Размеры поперечного сечения заданной формы и его положение относительно нагрузки необходимо выбрать так, чтобы выполнялись оба условия прочности во всех сечениях балки и при этом размеры сечения должны быть минимальными, что обеспечивает экономию материала.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Пример 1

Расчет балки, изготовленной из материала, у которого

$$R_p = R_{\text{сж}} = R \text{ (задачи № 1, 2)}$$

1. Расчетная схема балки изображена на рис. 6, а с указанием численных значений нагрузки и линейных размеров.

2. Определим реакции опор R_A и R_B , составив уравнения равновесия моментов относительно точек A и B :

$$\sum M_A = 0; -F_1 l_1 + Q l_2 - F_2 l_2 + M_2 - M_1 + R_B l = 0.$$

$$\sum M_B = 0; -F_1(l_1 + l) - Q(l - l_2) + F_2(l - l_2) + M_2 - M_1 - R_A l = 0.$$

$$\text{Здесь } Q = q(l_2 + l_3) = 10(2,1 + 2,1) = 42 \text{ кН.}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$R_B = \frac{1}{l} (F_1 l_1 - Q l_2 + F_2 l_2 - M_2 + M_1) =$$

$$= \frac{1}{6,3} (12 \cdot 1,8 - 42 \cdot 2,1 + 9 \cdot 2,1 - 14 + 30) = -5 \text{ кН.}$$

$$R_A = \frac{1}{l} [-F_1(l_1 + l) - Q(l - l_2) + F_2(l - l_2) + M_2 - M_1] =$$

$$= \frac{1}{6,3} [-12(1,8 + 6,3) - 42(6,3 - 2,1) + 9(6,3 - 2,1) + 14 - 30] = -40 \text{ кН.}$$

Знаки «минус» показывают, что реакции опор R_A и R_B направлены вниз, а не вверх, как предположили при составлении уравнений равновесия. На расчетной схеме покажем действительные направления найденных реакций опор.

Проверим правильность определения реакций опор, составив уравнения проекций на ось y :

$$\sum Y = 0; F_1 - R_A + Q - F_2 - R_B = 0,$$

$$12 - 40 + 42 - 9 - 5 = 0,$$

$$54 - 54 = 0,$$

отсюда $0 = 0$, что подтверждает правильность найденных значений реакций опор.

3. Разбиваем балку на участки, число участков – 4, номера участков проставлены на расчетной схеме балки (рис. 26, а).

4. Методом сечений находим на каждом участке поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z .

$$\underline{\text{Участок 1:}} \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad l_1 = 1,8 \text{ м.}$$

Для левой отсеченной части балки получим:

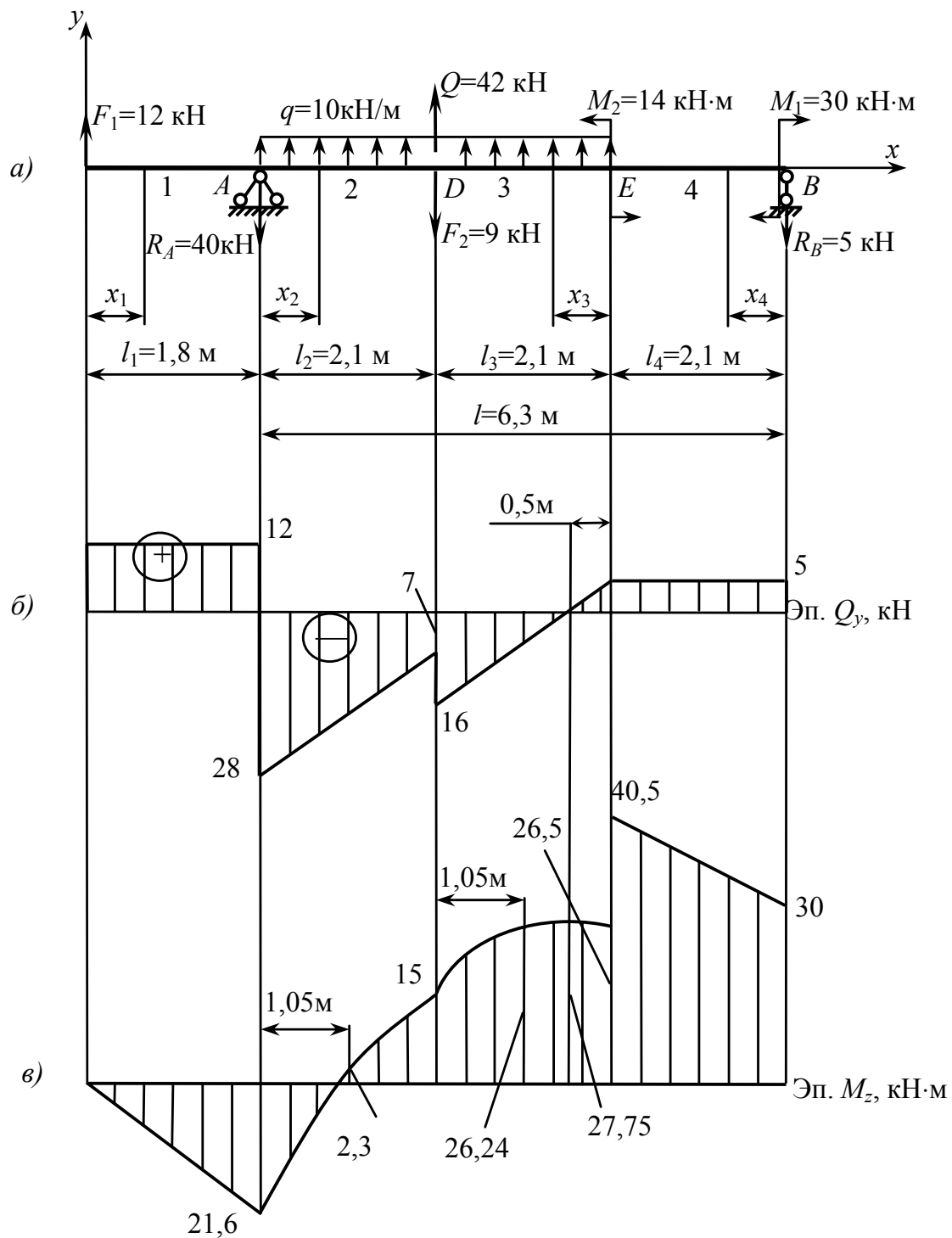


Рис. 26

$$Q_{y_1} = F_1 = 12 \text{ кН}; M_{z_1} = F_1 x_1 = 12x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow Q_{y_1} = 12 \text{ кН}; M_{z_1} = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 1,8 \text{ м} \rightarrow Q_{y_1} = 12 \text{ кН}; M_{z_1} = 12 \cdot 1,8 = 21,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq l_2$, $l_2 = 2,1$ м.

Для левой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y_2} = F_1 - R_A + qx_2 = 12 - 40 + 10x_2 = -28 + 10x_2;$$

$$M_{z_2} = F_1(l_1 + x_2) - R_A x_2 + \frac{qx_2^2}{2} = 12(1,8 + x_2) - 40x_2 + \frac{10x_2^2}{2};$$

$$\text{при } x_2 = 0 \rightarrow Q_{y_2} = -28 \text{ кН}; M_{z_2} = 12 \cdot 1,8 = 21,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 2,1 \text{ м} \rightarrow Q_{y_2} = -28 + 10 \cdot 2,1 = -7 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = 12(1,8 + 2,1) - 40 \cdot 2,1 + \frac{10 \cdot 2,1^2}{2} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_2 = \frac{l_2}{2} = 1,05 \text{ м} \rightarrow M_{z_2} = 12(1,8 + 1,05) - 40 \cdot 1,05 + \frac{10 \cdot 1,05^2}{2} =$$

$$= -2,29 \approx -2,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq x_3 \leq l_3$, $l_3 = 2,1$ м.

Для правой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y_3} = R_B - qx_3 = 5 - 10x_3;$$

$$M_{z_3} = -M_1 - R_B(l_4 + x_3) + M_2 + \frac{qx_3^2}{2} = -30 - 5(2,1 + x_3) + 14 + \frac{10x_3^2}{2};$$

$$\text{при } x_3 = 0 \text{ (в сечении } E) \rightarrow Q_{y_3} = 5 \text{ кН};$$

$$M_{z_3} = -16 - 5 \cdot 2,1 = -26,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_3 = 2,1 \text{ м (в сечении } D) \rightarrow Q_{y_3} = 5 - 10 \cdot 2,1 = -16 \text{ кН};$$

$$M_{z_3} = -16 - 5(2,1 + 2,1) + \frac{10 \cdot 2,1^2}{2} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_3 = \frac{l_3}{2} = 1,05 \text{ м} \rightarrow M_{z_3} = -16 - 5(2,1 + 1,05) + \frac{10 \cdot 1,05^2}{2} = -26,24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 4: $0 \leq x_4 \leq l_4$, $l_4 = 2,1$ м.

Для правой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y_4} = R_B = 5 \text{ кН}; M_{z_4} \rightarrow -M_1 - R_B x_4 = -30 - 5x_4;$$

при $x_4 = 0$ (в сечении B) $\rightarrow Q_{y_4} = 5 \text{ кН}; M_{z_4} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$

при $x_4 = 2,1$ (в сечении E) $\rightarrow Q_{y_4} = 5 \text{ кН};$

$$M_{z_4} = -30 - 5 \cdot 2,1 = -40,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z , используя численные значения, найденные в п. 4 (рис. 26, б, в).

Уточним эпюру M_z на участке 3. Поперечная сила Q_{y_3} меняет знак в сечении, где $Q_{y_3} = 0$ при $x_3 = \frac{R_B}{q} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ м}$. В этом сече-

нии M_{z_3} принимает экстремальное значение:

$$M_{z_3 \text{ экстр}} = -30 - 5(2,1 + 0,5) + 14 + \frac{10 \cdot 0,5^2}{2} = -27,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Покажем это значение на эпюре M_z (см. рис. 26, в).

6. По эпюре M_z находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения по модулю. Для нашей балки это сечение E , в котором $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R$$

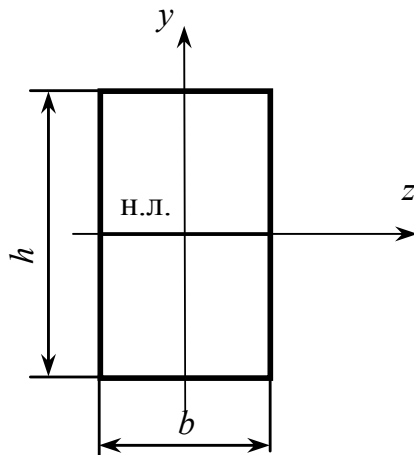
находим момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 192,86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 192,86 \text{ см}^3.$$

Принимаем $W_z = 193 \text{ см}^3$. По этой величине момента сопротивления находим размеры заданных поперечных сечений.

7. Определим размеры поперечного сечения балки заданной формы, а также найдем нормальные и касательные напряжения в опасных сечениях балки.

а) Прямоугольное сечение



Примем $h = 2,2b$, тогда

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2,2b)^2}{6} = 0,807b^3,$$

отсюда

$$b \geq 3\sqrt{\frac{W_z}{0,807}} = 3\sqrt{\frac{193}{0,807}} = 6,21 \text{ см},$$

тогда

$$h = 2,2b = 2,2 \cdot 6 \cdot 2,1 = 13,66 \text{ см}.$$

Примем $b = 6,2 \text{ см}$, $h = 13,7 \text{ см}$.

Найдем геометрические характеристики сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6,2 \cdot 13,7^2}{6} = 194 \text{ см}^3;$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6,2 \cdot 13,7^3}{12} = 1328 \text{ см}^4 \text{ - осевой момент инерции};$$

$$A = bh = 6,2 \cdot 13,7 = 85 \text{ см}^2 \text{ - площадь сечения}.$$

Определим наибольшие нормальное и касательное напряжения в опасных сечения балки при $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кНм}$, $|Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН}$.

Тогда

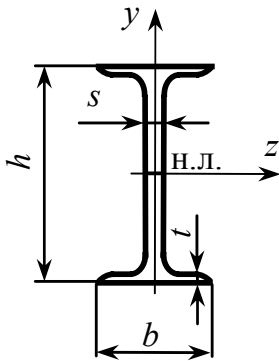
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{194 \cdot 10^{-6}} = 209 \cdot 10^6 \text{ Па} = 209 \text{ МПа} \approx 210 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет $\Delta\sigma = \frac{210 - 209}{210} 100\% = 0,6\%$, что

допустимо. При расчетах допускается $|\Delta\sigma| \leq 5\%$.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_y|_{\max}}{A} = \frac{3 \cdot 28 \cdot 10^3}{2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}} = 4,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,9 \text{ МПа}.$$

б) Двутавровое сечение



Из таблицы прил. 3 подбираем номер двутавровой балки по численному значению $W_z = W_x = 193 \text{ см}^3$ (табл. 7).

Таблица 7

Номер двутавра	Размер, мм				$A, \text{ см}^2$	$I_z, \text{ см}^4$	$W_z, \text{ см}^3$	$S_z, \text{ см}^3$
	h	b	s	t				
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131

Определим наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении этих балок при $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$:

$$\text{№ 20: } \sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 220 \cdot 10^6 \text{ Па} = 220 \text{ МПа} .$$

$$\text{Перенапряжение составляет: } \Delta\sigma = \frac{220 - 210}{210} 100\% = 4,76\% .$$

$$\text{№ 22: } \sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 174,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 174,6 \text{ МПа} .$$

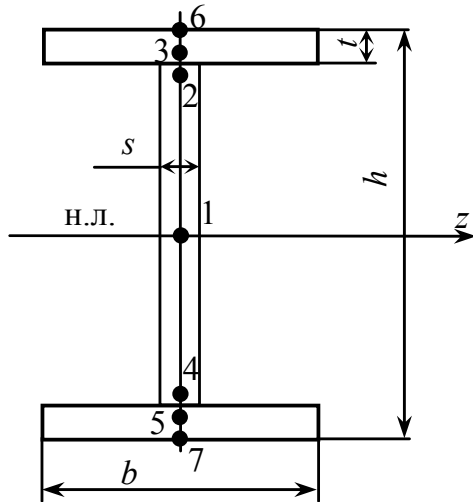
$$\text{Недонапряжение составляет } \Delta\sigma = \frac{210 - 174,6}{210} 100\% = 16,86\% .$$

В расчетах принимают $|\Delta\sigma| \leq 5\%$. Следовательно, выбираем балку двутавровую № 20.

Определим наибольшее касательное напряжение в опасном сечении этой балки в точках, лежащих на нулевой линии (на оси z), при $|Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН}$.

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{|Q_y|_{\max} S_z}{S I_z} = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 30,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30,4 \text{ МПа} .$$

Определим касательные напряжения в точках перехода от стенки к полке двутавра:



$$\tau_2 = \tau_4 = \frac{|Q_y|_{\max} S_{z_2}^{\text{отс}}}{s I_z};$$

$$\tau_3 = \tau_5 = \frac{|Q_y|_{\max} S_{z_3}^{\text{отс}}}{b I_z},$$

где $S_{z_2}^{\text{отс}}$, $S_{z_3}^{\text{отс}}$ - статический момент отсеченной части площади выше точек 2 и 3 соответственно.

Для наших расчетов можно принять

$$S_{z_2}^{\text{отс}} = S_{z_3}^{\text{отс}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 100 \cdot 8,4 \left(\frac{200}{2} - \frac{8,4}{2} \right) = 80472 \text{ мм}^3 = 80,472 \text{ см}^3.$$

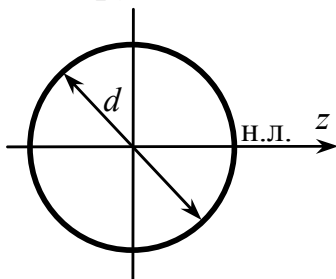
Тогда

$$\tau_2 = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 80,472 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 23,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 80,472 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,2 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение в точках 6, 7, наиболее удаленных от нулевой линии (оси \$z\$), $\tau_6 = \tau_7 = 0$.

в) *Круглое сечение*



$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ отсюда}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 193}{3,14}} = 12,5 \text{ см}.$$

Находим геометрические характеристики сечения:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 12,5^3}{32} = 192 \text{ см}^3,$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12,5^2}{4} = 123 \text{ см}^2,$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 12,5^4}{64} = 1198 \text{ см}^4.$$

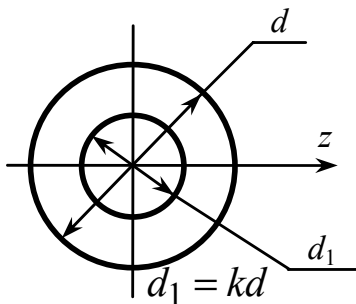
Определим наибольшие нормальное и касательное напряжения в опасных сечениях балки при $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $|Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} = 210,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 210,9 \text{ МПа},$$

перенапряжение $\Delta\sigma = \frac{210,9 - 210}{210} 100\% = 0,4\%$, такое перенапряжение допускается.

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q_y|_{\max}}{A} = \frac{4}{3} \frac{28 \cdot 10^3}{123 \cdot 10^{-4}} = 3,03 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,03 \text{ МПа}.$$

в) *Кольцевое поперечное сечение*



Примем $k = 0,6$, тогда $d_1 = kd = 0,6d$.

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - k^4), \text{ отсюда}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi (1 - k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 193}{3,14 (1 - 0,6^4)}} = 13,1 \text{ см}.$$

$$d_1 = kd = 0,6 \cdot 13,1 = 7,9 \text{ см}.$$

Находим геометрические характеристики сечения:

$$A = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) = \frac{\pi d^2}{4} (1 - k^2) = \frac{3,14 \cdot 13,1^2}{4} (1 - 0,6^2) = 86,2 \text{ см}^2,$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - k^4) = \frac{3,14 \cdot 13,1^3}{32} (1 - 0,6^4) = 192 \text{ см}^3,$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} (1 - k^4) = \frac{3,14 \cdot 13,1^4}{64} (1 - 0,6^4) = 1258 \text{ см}^4.$$

Определим наибольшие нормальное и касательное напряжения в опасных сечениях балки при $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $|Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} = 210,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 210,9 \text{ МПа},$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{|Q_y|_{\max} S_z^{\text{отс}}}{b_y I_z} = \frac{|Q_y|_{\max}}{(d - d_1) I_z} \left(\frac{\pi d^2}{8} \frac{4d}{6\pi} - \frac{\pi d_1^2}{8} \frac{4d_1}{6\pi} \right) = \\ &= \frac{|Q_y|_{\max}}{d(1-k) I_z} \frac{d^3}{12} (1 - k^3) = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 13,1^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,6^3)}{13,1 \cdot (1 - 0,6) \cdot 10^{-2} 1258 \cdot 10^{-8} \cdot 12} = \\ &= 6,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

8. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений, используя численные значения напряжений, полученных в п. 7 (рис. 27). Размеры всех поперечных сечений даны в сантиметрах.

9. Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям при заданных значениях $R = 210 \text{ МПа}$, $R_{\text{ср}} = 120 \text{ МПа}$ для рассмотренных поперечных сечений выполнены.

10. Определим наиболее рациональное сечение по расходу материала. Для этого сравним площади сечений:

$$\frac{A_{\text{пр}}}{A_{\text{двут}}} = \frac{85}{26,8} = 3,17; \quad \frac{A_{\text{кр}}}{A_{\text{двут}}} = \frac{123}{26,8} = 4,6; \quad \frac{A_{\text{кол}}}{A_{\text{двут}}} = \frac{86,2}{26,8} = 3,2.$$

Полученные значения отношений площадей сечений показывают, во сколько раз масса двутавровой балки меньше, чем масса других балок при одинаковом запасе прочности всех рассмотренных балок. Наименее рациональной является балка с круглым поперечным сечением.

Из рассмотренных балок наиболее экономичной по расходу материала является двутавровая балка, т. е. двутавр - наиболее рациональная форма поперечного сечения балки.

11. Определим прогиб и угол поворота в сечении D балки (см. рис. 26, а).

а) *Метод начальных параметров*

Универсальные уравнения прогибов и углов поворота сечения для n -го участка имеют вид [1]:

Эп. σ , МПа

Эп. τ , МПа

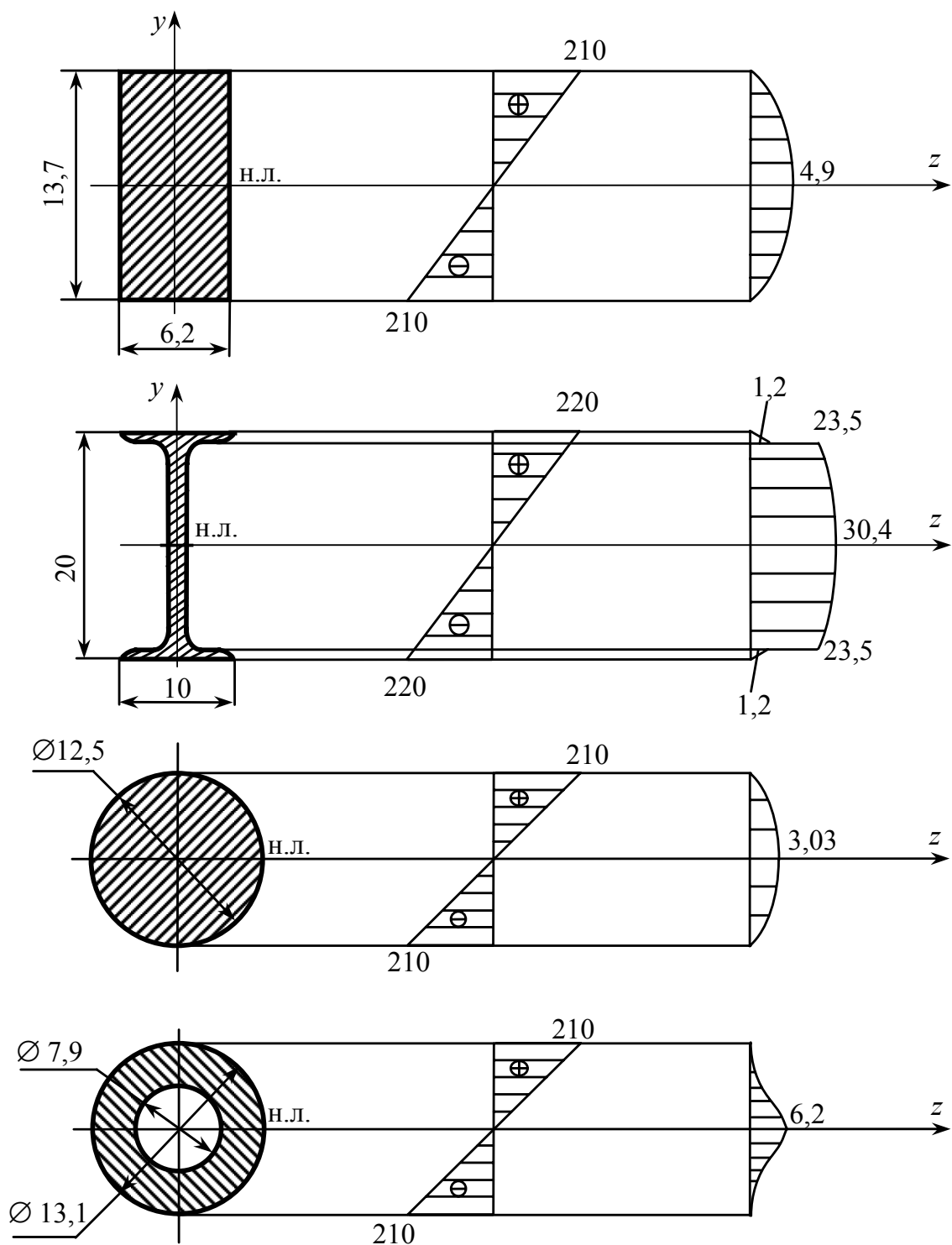


Рис. 27

$$y_n(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + q_0 \frac{x^4}{4!} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + F_i \frac{(x-b_i)^3}{3!} + q_i \frac{(x-c_i)^4}{4!} - q_i \frac{(x-d_i)^4}{4!} \right) \right];$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(M_i (x-a_i) + F_i \frac{(x-b_i)^2}{2!} + q_i \frac{(x-c_i)^3}{3!} - q_i \frac{(x-d_i)^3}{3!} \right) \right],$$

где y_0, φ_0 - прогиб и угол поворота сечения в начале координат на левом конце балки;

M_0, Q_0, q_0 - изгибающий момент, поперечная сила и интенсивность распределенной нагрузки в начале координат;

M_i, F_i, q_i - внешние сосредоточенные моменты, силы и интенсивность распределенной нагрузки, действующие на границах участков, расположенных левее n -го участка;

a_i, b_i - координаты сечений, в которых приложены внешние моменты M_i и силы F_i ;

c_i, d_i - координаты сечений, в которых начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки q_i ;

$EI = EI_z$ - жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Разобьем балку на участки:

Участок 1: $0 \leq x \leq 1,8$ м.

Участок 2: $1,8 \leq x \leq 3,9$ м.

Участок 3: $3,9 \leq x \leq 6$ м.

Участок 4: $6 \leq x \leq 8,1$ м.

В начале координат на левом конце балки: $M_0 = 0, Q_0 = Q_{y_0} = F_1 = 12$ кН, $q_0 = 0$.

Составим уравнения прогибов и углов поворота сечения на каждом участке.

$$\text{Участок 1: } y_1(x) = y_0 + \varphi_0 x + F_1 \frac{x^3}{6EI};$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_0 + F_1 \frac{x^2}{2EI}.$$

Участок 2:

$$y_2(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^3}{6} - \frac{R_A (x-1,8)^3}{6} + \frac{q(x-1,8)^4}{24} \right);$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^3}{2} - \frac{R_A (x-1,8)^2}{2} + \frac{q(x-1,8)^3}{6} \right).$$

Участок 3:

$$y_3(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^3}{6} - \frac{R_A (x-1,8)^3}{6} + \frac{q(x-1,8)^4}{24} - \frac{F_2 (x-3,9)^3}{6} \right);$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^2}{2} - \frac{R_A (x-1,8)^2}{2} + \frac{q(x-1,8)^3}{6} - \frac{F_2 (x-3,9)^2}{2} \right).$$

Участок 4:

$$y_4(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^3}{6} - \frac{R_A (x-1,8)^3}{6} + \frac{q(x-1,8)^4}{24} - \frac{q(x-6)^4}{24} - \frac{F_2 (x-3,9)^3}{6} - \frac{M_2 (x-6)^2}{2} \right);$$

$$\varphi_4(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{F_1 x^2}{2} - \frac{R_A (x-1,8)^2}{2} + \frac{q(x-1,8)^3}{6} - \frac{q(x-1,8)^3}{6} - \frac{F_2 (x-3,9)^2}{2} - M_2 (x-6) \right).$$

Определим начальные параметры y_0 , φ_0 из условий отсутствия прогибов в сечениях над опорами A и B :

$$y_A = 0 \text{ на участке 1 при } x = 1,8 \text{ м,}$$

$$y_B = 0 \text{ на участке 4 при } x = 8,1 \text{ м.}$$

Подставим эти координаты и численные значения моментов и сил в уравнения прогибов для первого и четвертого участков, причем слагаемые в уравнениях пишем со знаком «плюс», если соответствующий фактор нагрузки вызывает в сечении балки положительный изгибающий момент, и со знаком «минус», если данный фактор нагрузки вызывает в сечении балки отрицательный изгибающий момент.

Запишем полученные уравнения:

$$y_0 + 8,1\varphi_0 + \frac{12 \cdot 1,8^3}{6EI} = 0,$$

$$y_0 + 8,1\varphi_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{12 \cdot 8,1^3}{6} - \frac{40(8,1-1,8)^3}{6} + \frac{10(8,1-1,8)^4}{24} - \frac{10(8,1-1,8)^4}{24} - \frac{9(8,1-3,9)^3}{6} - \frac{14(8,1-6)^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$y_0 + 1,8\varphi_0 = -\frac{11,66}{EI}; \quad y_0 + 8,1\varphi_0 = \frac{97,83}{EI}, \text{ откуда } y_0 = -\frac{42,9}{EI}, \quad \varphi_0 = \frac{17,4}{EI}.$$

Найдем перемещения в сечении D – участок 2, $x = 3,9$ м:

$$y_D = y_2(3,9) = -\frac{42,9}{EI} + \frac{17,4}{EI} \cdot 3,9 + \frac{1}{EI} \left(\frac{12 \cdot 3,9^3}{6} - \frac{40(3,9-1,8)^3}{6} + \frac{10(3,9-1,8)^4}{24} \right) = \frac{89,5}{EI},$$

$$\varphi_D = \varphi_2(3,9) = \frac{17,4}{EI} + \frac{1}{EI} \left(\frac{12 \cdot 3,9^2}{6} - \frac{40(3,9 - 1,8)^2}{2} + \frac{10(3,9 - 1,8)^3}{6} \right) = \frac{35,8}{EI}.$$

Прогиб y_D положительный, т. е. сечение D перемещается вдоль оси y вверх. Угол поворота сечения также положительный, т. е. поворот сечения D вокруг оси z направлен против хода часовой стрелки.

б) *Метод Мора*

Согласно методу Мора в направлении искомого перемещения приложим единичные воздействия – единичную силу в направлении прогиба в сечении D и единичный момент в направлении угла поворота сечения D (рис. 28, а, в). Построим единичные эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис. 28, б, г). Перемещения y_D и φ_D найдем, «перемножая» эпюру изгибающих моментов M_z в заданной балке (рис. 28, д) и соответствующую единичную эпюру:

$$y_D = \sum_{k=1}^n \frac{M_z \bar{M}_1}{EI}, \quad \varphi_D = \sum_{k=1}^n \frac{M_z \bar{M}_2}{EI},$$

где n – число участков; k – номер участка ($k = 1, 2, 3, 4$).

Найдем численные значения перемещений, применяя известные способы вычисления интеграла Мора (способы Симпсона, Верещагина и т.п.):

$$y_D = \frac{1}{EI} \left[\frac{2,1}{6} (21,6 \cdot 0 - 4 \cdot 2,3 \cdot 0,7 - 15 \cdot 1,4) + \frac{2,1}{6} (-15 \cdot 1,4 - 4 \cdot 26,24 \cdot 1,05 - 26,5 \cdot 0,7) + \frac{2,1}{6} (-40,5 \cdot 0,7 - 4 \cdot 35,25 \cdot 0,35 + 30 \cdot 0) \right] = -\frac{89,3}{EI}.$$

Знак «минус» означает, что прогиб y_D направлен вверх, а не вниз, как приложенная единичная сила.

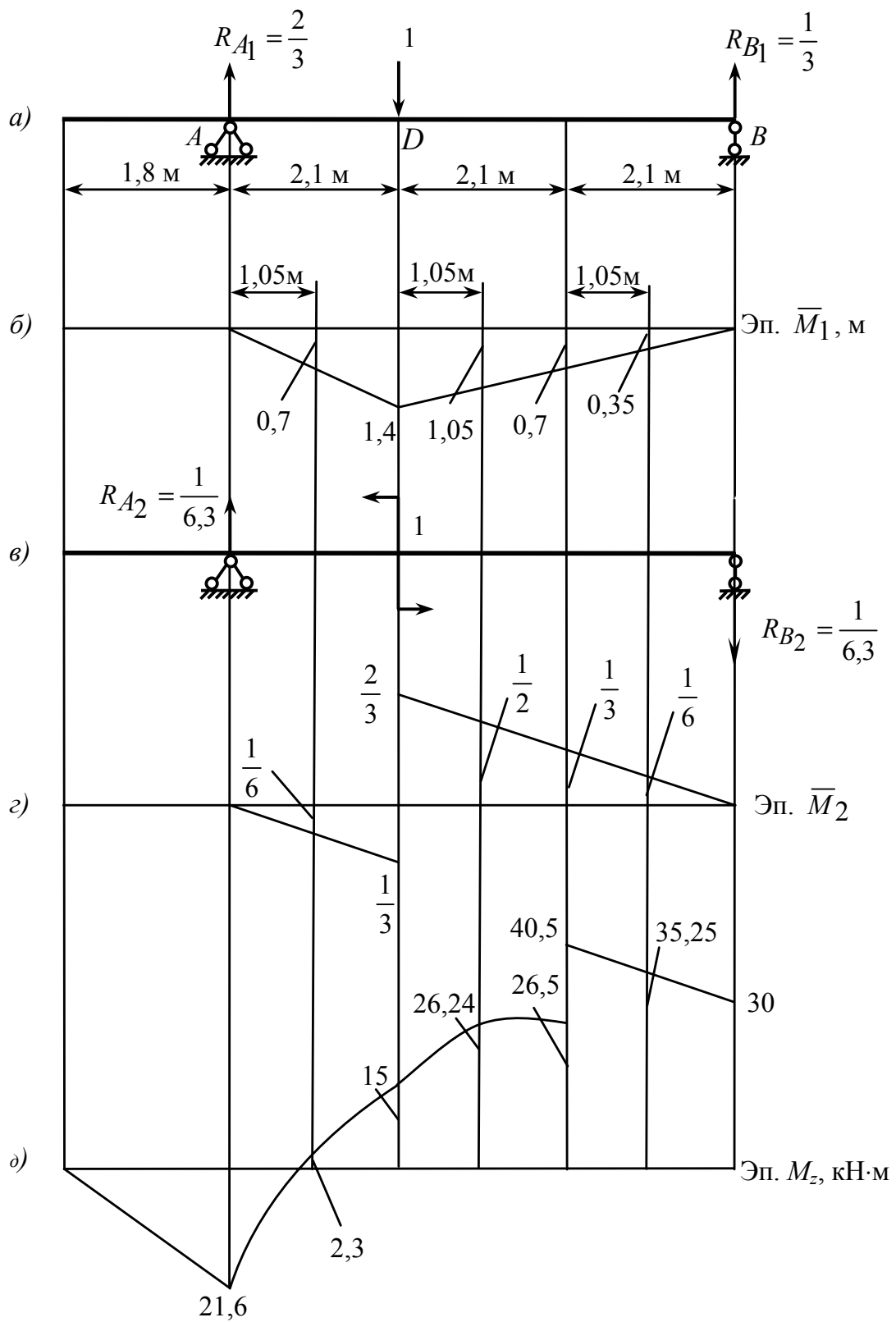


Рис. 28

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \frac{1}{EI} \left[\frac{2,1}{6} \left(21,6 \cdot 0 - 4 \cdot 2,3 \cdot \frac{1}{6} - 15 \cdot \frac{1}{3} \right) + \right. \\ &+ \frac{2,1}{6} \left(15 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 26,24 \cdot \frac{1}{2} + 26,5 \cdot \frac{1}{3} \right) + \\ &\left. + \frac{2,1}{6} \left(40,5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 35,25 \cdot \frac{1}{6} + 30 \cdot 0 \right) \right] = \frac{35,6}{EI}. \end{aligned}$$

Угол поворота сечения D положительный, т. е. сечение D поворачивается вокруг оси z против хода часовой стрелки, т. е. соответствует направлению единичного момента.

Сравним значения перемещений, полученные методом начальных параметров и методом Мора. Результаты вычисления перемещений несколько различаются, выразим эту разницу в процентах:

$$\Delta y_D = \left| \frac{89,5 - 89,3}{89,3} \right| 100 = 0,22 \%,$$

$$\Delta \varphi_D = \left| \frac{35,8 - 35,6}{35,6} \right| 100 = 0,56 \%.$$

Видно, что отличия невелики, и их можно объяснить округлением величин, входящих в расчеты.

Найдем численные значения перемещений для двутавровой балки № 20:

$$y_D = \frac{89,5}{EI_z} = \frac{89,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 24,32 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 24,32 \text{ мм}.$$

$$\varphi_D = \frac{35,8}{EI_z} = \frac{35,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 9,73 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,56 \text{ град}.$$

Сравним прогиб y_D с длиной пролета балки l , т. е. с расстоянием между опорами A и B :

$$\frac{y_D}{l} = \frac{24,32 \cdot 10^{-3}}{6,3} = \frac{3,86}{1000},$$

т. е. прогиб y_D составляет 0,386 % пролета балки AB . Прогиб мал по сравнению с длиной пролета, что означает достаточную жесткость балки.

Пример 2

Расчет балки из хрупкого материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию $R_{сж} \geq R_p$ (задача № 3)

Схему балки, нагрузки и эпюры внутренних силовых факторов возьмем из примера 1. Форма поперечного сечения балки показана на рис. 29.

1. Для заданного поперечного сечения балки найдем положение центра тяжести C . Определим осевой момент инерции I_z , выразив его величину через искомый размер b : $I_z = 171b^4$.

Необходимые для расчетов размеры показаны на рис. 29.

2. Расчет балки из хрупкого материала, у которого расчетное сопротивление на сжатие $R_{сж}$ значительно больше расчетного сопротивления на растяжение R_p , выполняется с учетом двух условий прочности:

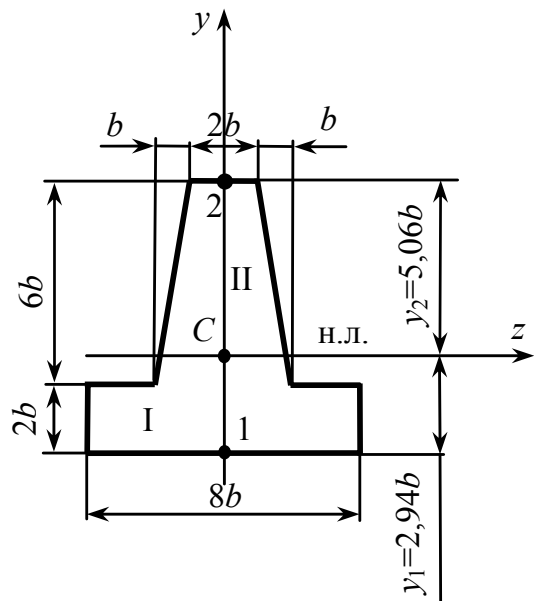


Рис. 29

$$\sigma_{\max}^p = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^p \leq R_p, \quad (1)$$

$$|\sigma^c|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^c \leq R_c, \quad (2)$$

где σ_{\max}^p , $|\sigma^c|_{\max}$ - наибольшие напряжения в опасных точках в

растянутой и сжатой частях поперечного сечения балки; y_{\max}^p , y_{\max}^c - расстояния от нулевой линии до опасных точек.

Для рационального использования материала и уменьшения веса балки поперечное сечение балки необходимо расположить так, чтобы опасные точки, в которых возникает растяжение, находились ближе к нулевой линии, чем опасные точки в сжатой части сечения. Например, для поперечного сечения, изображенного на рис. 29, часть сечения, в которой находится опасная точка 1, рациональнее расположить в зоне растяжения, в этом положении растянутые волокна приближены к центру тяжести сечения точке C .

Также при расчете необходимо учитывать соотношение между координатами опасных точек y_{\max}^p , y_{\max}^c и расчетными сопротивлениями R_p , $R_{сж}$, что позволяет сократить объем вычислений. Рассмотрим следующие случаи этих соотношений:

- а) $\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} < \frac{R_c}{R_p}$ - расчет ведем по условию прочности (1), условие (2) выполняется;
- б) $\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} > \frac{R_c}{R_p}$ - расчет ведем по условию прочности (2), условие (1) выполняется;
- в) $\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} = \frac{R_c}{R_p}$ - расчет ведем по любому из условий (1) или (2).

3. Определим размеры поперечного сечения.

Значения изгибающего момента в опасном сечении принимаем из примера 1 - $M_{z\max} = 40,5$ кН·м (см. рис. 26, в).

а) Материал балки – чугун, $R_c = 120$ МПа; $R_p = 40$ МПа.

$$\frac{R_c}{R_p} = \frac{120}{40} = 3; \quad \frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{5,06b}{2,94b} = 1,72 \quad (\text{см. рис. 29});$$

$$\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} < \frac{R_c}{R_p} \text{ - расчет ведем по условию прочности (1).}$$

$$\sigma_{\max}^p = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^p \leq R_p,$$

отсюда

$$\frac{|M_z|_{\max}}{171b^4} 2,94b \leq R_p.$$

Найдем размер b :

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 2,94}{171 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,59 \text{ см}.$$

Поперечное сечение располагаем так, чтобы часть сечения I , приближенная к нулевой линии, находилась в зоне растяжения. Положение сечения показано на рис. 30.

Определим напряжения в опасных точках сечения при найденном размере b :

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_1 = \frac{|M_z|_{\max}}{171b^4} 2,94b = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 2,94 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{171(2,59 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$$= 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$

$$|\sigma^c|_{\max} = |\sigma_2| = \frac{|M_z|_{\max}}{171b^4} 5,06b = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{171(2,59 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$$= 69 \cdot 10^6 \text{ Па} = 69 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений σ показана на рис. 30, *a*.

Проверим выполнение условия прочности в сечении A балки (см. рис. 26, *в*), в котором изгибающий момент M_{z_A} имеет наибольшее значение другого знака (+), чем момент $M_{z_{\max}}$ в опасном сечении балки E , т. е. эпюра изгибающего момента знакопеременна и условия прочности должны выполняться во всех сечениях балки. В сечении A точка 1 находится в сжатой части сечения, а точка 2 – в растянутой части, что является нежелательным положением.

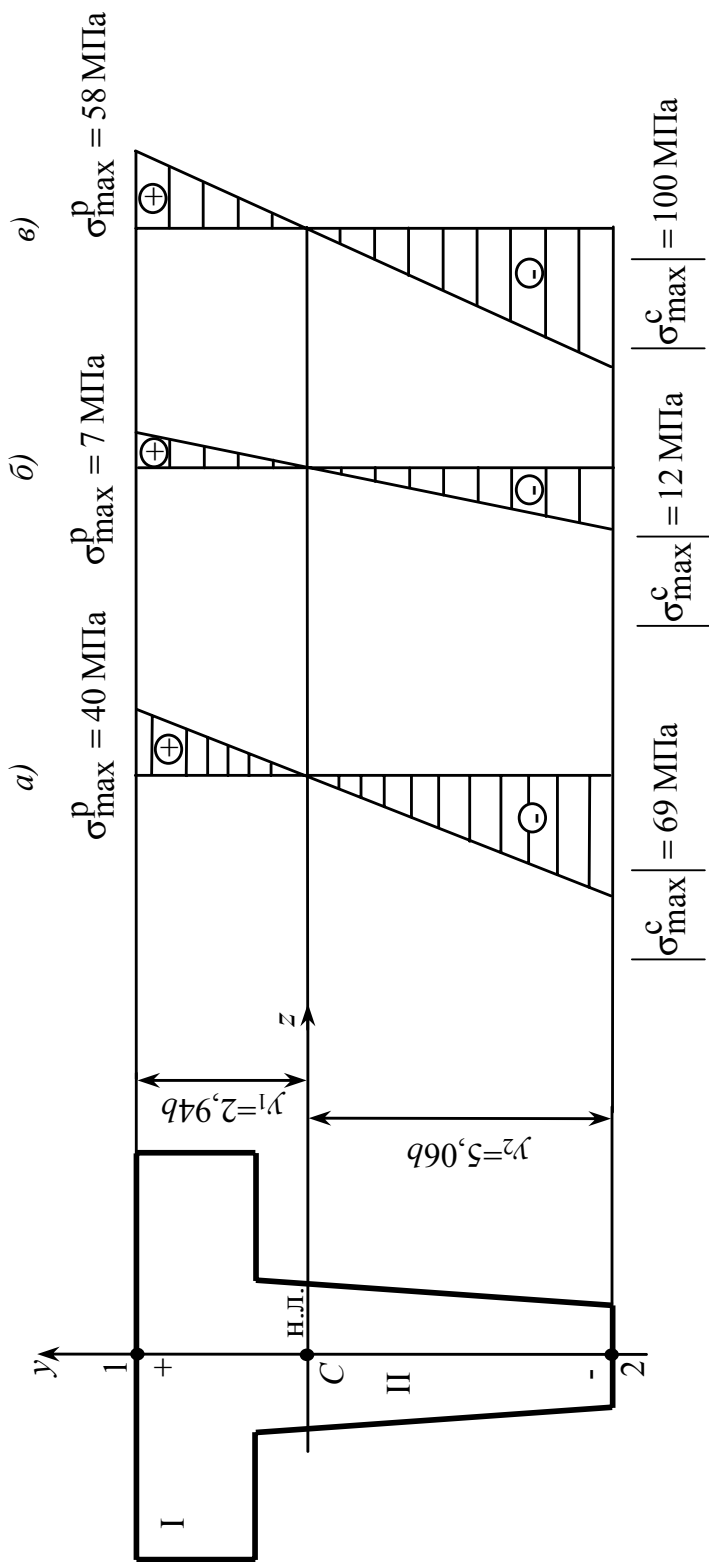


Рис. 30

Найдем наибольшее растягивающее напряжение:

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_2 = \frac{|M_{zA}|}{I_z} y_2 = \frac{21,6 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{171 (2,59 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$= 36,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36,8 \text{ МПа}$, условие прочности (1) выполняется, условие (2) также выполнено: $|\sigma_{\max}^c| = 21,4 \text{ МПа}$.

б) Материал балки – дерево, $R_c = 12 \text{ МПа}$; $R_p = 8 \text{ МПа}$.

$$\frac{R_c}{R_p} = \frac{12}{8} = 1,5; \quad \frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{5,06}{2,94} = 1,72;$$

$\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} > \frac{R_c}{R_p}$, расчет ведем по условию прочности (2).

$$|\sigma_{\max}^c| = |\sigma_2| = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_{\max}^c \leq R_c, \text{ отсюда } \frac{|M_z|_{\max}}{171 b^4} 5,06 b \leq R_c.$$

Найдем размер b :

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{|M_z|_{\max} 5,06}{171 R_c}} = \sqrt[3]{\frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 5,06}{171 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 4,64 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,64 \text{ см}.$$

Определим напряжения в опасных точках поперечного сечения:

$$|\sigma_{\max}^c| = |\sigma_2| = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_2 = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 4,64 \cdot 10^{-2}}{171 (4,64 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$= 12 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_1 = \frac{|M_{zA}|}{I_z} y_1 = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 2,94 \cdot 4,64 \cdot 10^{-2}}{171 (4,64 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$= 7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7 \text{ МПа}$, условие прочности (1) выполнено.

Эпюра нормальных напряжений σ показана на рис. 30, б. Проверим выполнение условия прочности (1) в сечении A :

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_2 = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_2 = \frac{21,6 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 4,64 \cdot 10^{-2}}{171 (4,64 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$= 6,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,4 \text{ МПа}$, условие прочности (1) выполнено.

в) Материал балки – чугун, $R_{сж} = 100$ МПа; $R_p = 58$ МПа.

$$\frac{R_c}{R_p} = \frac{100}{58} = 1,72; \quad \frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{5,06}{2,94} = 1,72;$$

$$\frac{y_{\max}^c}{y_{\max}^p} = \frac{R_c}{R_p}, \text{ расчет ведем по условию прочности (1) или (2).}$$

Найдем размер b из условия прочности (1). Аналогично рассмотренным выше расчетам получим

$$b_p \geq \sqrt[3]{\frac{|M_z|_{\max} \cdot 2,94}{171R_p}} = \sqrt[3]{\frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 2,94}{171 \cdot 58 \cdot 10^6}} = 2,29 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,29 \text{ см}.$$

Найдем размер b из условия прочности (2):

$$b_c \geq \sqrt[3]{\frac{|M_z|_{\max} \cdot 5,06}{171R_c}} = \sqrt[3]{\frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 5,06}{171 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 2,29 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,29 \text{ см}.$$

Значения размера b получены одинаковые из обоих условий прочности. При этом размере b значения наибольших напряжений равны расчетным сопротивлениям:

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_1 = \frac{|M_z|_{\max} \cdot 2,94b}{171b^4} = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 2,94 \cdot 2,29 \cdot 10^{-2}}{171(2,29 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$$= 58 \cdot 10^6 \text{ Па} = 58 \text{ МПа};$$

$$|\sigma^c|_{\max} = |\sigma_2| = \frac{|M_z|_{\max} \cdot 5,06b}{171b^4} = \frac{40,5 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 2,29 \cdot 10^{-2}}{171(2,29 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$$= 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений σ показана на рис. 30, в. Проверим выполнение условия прочности (1) в сечении A :

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_2 = \frac{|M_{zA}| \cdot 5,06b}{171b^4} = \frac{21,6 \cdot 10^3 \cdot 5,06 \cdot 2,29 \cdot 10^{-2}}{171(2,29 \cdot 10^{-2})^4} =$$

$$= 53 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53 \text{ МПа}, \text{ условие прочности (1) выполнено.}$$

Определение размеров поперечного сечения хрупкой балки можно проводить, используя условия прочности (1) и (2) для сечений балки, в которых изгибающий момент M_z обоих знаков имеет наибольшее значение по модулю (в нашем примере сечения E и A).

При этом рассматриваются оба положения сечения, при которых часть I (см. рис. 30) располагается сначала вверху, а затем внизу. Из условий прочности получают несколько значений размера b . После расчета выполняется анализ результатов и выбирается рациональное положение поперечного сечения и его размеры, при которых выполняются условия прочности в опасных сечениях балки и обеспечивается экономия расхода материала, т. е. размер b наименьший.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Образец оформления титульного листа

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра «Сопротивление материалов»

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ (КУРСОВАЯ) РАБОТА

№

по _____

(название курса)

(название расчетно-проектировочной (курсовой) работы)

Вариант _____

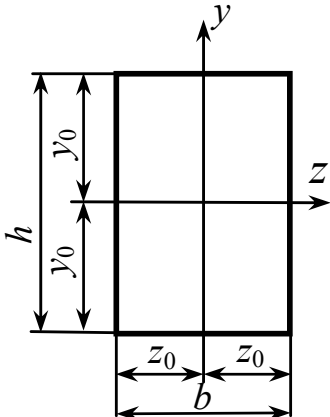
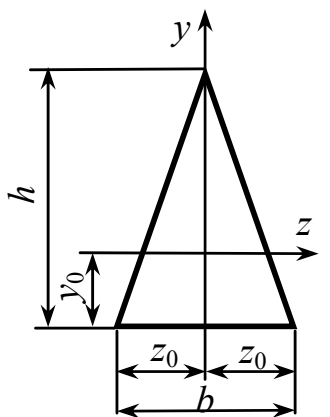
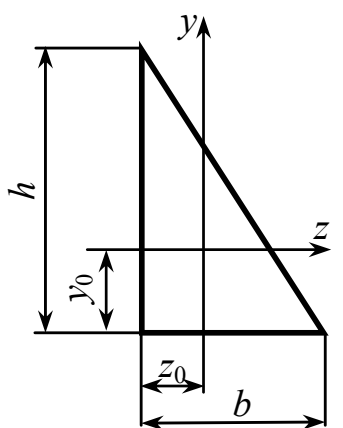
Выполнил: _____
(Ф.И.О.)

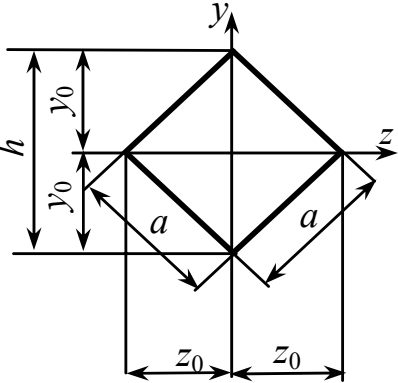
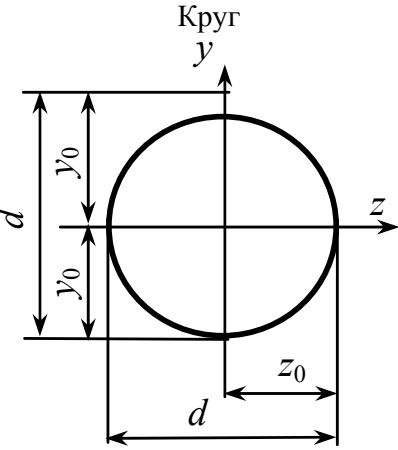

гр. _____

Принял: _____
(Ф.И.О. преподавателя)

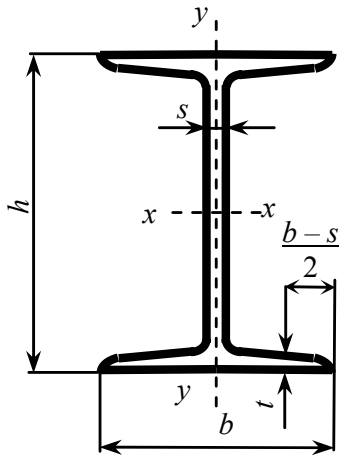
Владимир 200_ г.

Геометрические характеристики некоторых фигур

Фигура	A	z_0	y_0	J_z	J_y	$ J_{zy} $
<p>Прямоугольник</p> 	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0
<p>Равнобедренный треугольник</p> 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$	0
<p>Прямоугольный треугольник</p> 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$\frac{b^2h^2}{72}$

Фигура	A	z_0	y_0	J_z	J_y	$ J_{zy} $
<p>Квадрат</p> 	a^2	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$	0
<p>Круг</p> 	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	0
<p>Полукруг</p> 	$\frac{\pi \cdot r^2}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx$ $\approx 0,1098r^4$	$\frac{\pi \cdot r^4}{8}$	0

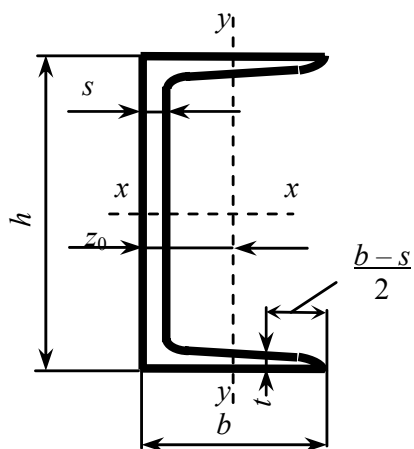
**Двутавры стальные горячекатаные
(ГОСТ 8239-89)**



- h - высота двутавра
- b - ширина полки
- s - толщина стенки
- t - средняя толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- W - момент сопротивления
- S - статический момент полусечения
- i - радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

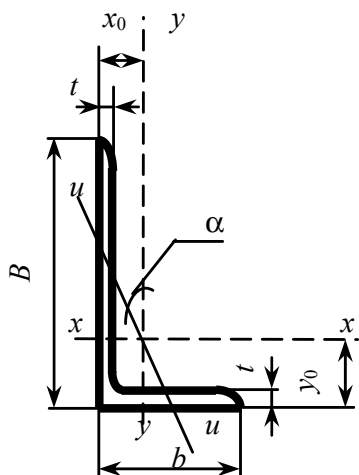
**Швеллеры стальные горячекатаные
(ГОСТ 8240-89)**



- h - высота швеллера
- b - ширина полки
- s - толщина стенки
- t - средняя толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- W - момент сопротивления
- S - статический момент полусечения
- i - радиус инерции
- z_0 - расстояние от оси y до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	5,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

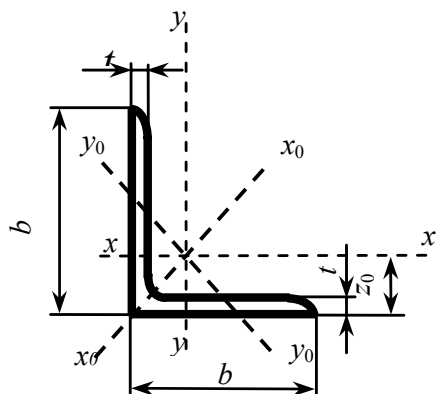
**Уголки стальные горячекатаные
неравнополочные (ГОСТ 8510-86)**



- B - ширина большей полки
- b - ширина меньшей полки
- t - толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- i - радиус инерции
- α - угол наклона главной центральной оси
- I_{xy} - центробежный момент инерции
- x_0, y_0 - расстояние от центра тяжести до наружных граней полоч

Номер уголка	Масса, 1 м, кг	Размер, мм			A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	$I_{u \min}$, см ⁴	$i_{u \min}$, см	tg α	$ I_{xy} $, см ⁴	x_0 , см	y_0 , см
		B	b	t											
5/3,2	2,40	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,70	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,70			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11,0	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,80	4,01
	12,6			8	16,0	256	4,0	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18,0	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	213	2,28	5,23
	23,6			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,50
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

**Уголки стальные горячекатаные равнополочные
(ГОСТ 8509-86)**



b - ширина полки
 t - толщина полки
 A - площадь поперечного сечения
 I - момент инерции
 i - радиус инерции
 I_{xy} - центробежный момент инерции
 z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размер, мм		A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см	$ I_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,90
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3,0

Окончание прил. 6

Номер уголка	Масса l м, кг	Размер, мм		A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см	$ I_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22,0	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,40
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
	27,0		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34,0		14	43,6	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. *Писаренко, Г. С.* Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка [и др.] ; под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Выща шк., 1986. – 775 с.
3. *Миролубов, И. Н.* Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский [и др.]. – М. : Высш. шк., 1985. – 399 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Задание 1. Определение геометрических характеристик поперечных сечений стержня.....	4
Задание 2. Определение внутренних усилий.....	18
Задание 3. Расчет ступенчатого стержня.....	35
Задание 4. Расчет балки на прочность и жесткость.....	42
<i>Приложения.....</i>	<i>78</i>
<i>Библиографический список.....</i>	<i>86</i>

Учебное издание

КИСЛОВ Валентин Михайлович
КОНДРАТЬЕВА Людмила Евгеньевна
БУРЛАКОВА Алла Михайловна
и др.

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Практикум

Часть 1

Подписано в печать 10.06.09.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,11. Тираж 300 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87