

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В.В. Кузнецов

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

Учебное пособие
В двух частях
Часть 1

Владимир 2006

УДК 513.83
ББК 22.152
К89

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
Владимирского государственного университета
С.Г. Танкеев

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой геометрии
Владимирского государственного педагогического университета
С.Е. Степанов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Кузнецов, В. В.

К89 Элементы общей топологии : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. В. Кузнецов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 64 с.
ISBN 5-89368-669-1

Содержит лишь начальные основополагающие сведения о свойствах топологических пространств и непрерывных отображений. Прилагается достаточно обширный практический материал в виде примеров и упражнений. Углубление и расширение изложенных здесь положений предполагается осуществить во второй части пособия. Необходимость издания такого пособия вызывается потребностью выделить из труднообозримого материала современной литературы именно базовые факты и сосредоточить на них внимание читателя, опираясь на которые, можно уже переходить к изучению специальных направлений в топологии.

Предназначено студентам специальности 010101 – математика и в помощь слушателям спецкурса по общей топологии.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 513.83
ББК 22.152

ISBN 5-89368-669-1

© Владимирский государственный
университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора.....	3
§1. Метрические пространства.....	5
§2. Топологические пространства.....	10
§3. Окрестности точек. Точки прикосновения, внутренность и граница множества.....	16
§4. База и предбаза топологии. Аксиомы счетности.....	20
§5. Подпространство в топологических пространствах. Покрытия.....	24
§6. Всюду плотные множества. Сепарабельность. Множества первой и второй категорий.....	28
§7. Непрерывные отображения.....	33
§8. Операции над топологическими пространствами.....	42
§9. Некоторые из важнейших свойств топологических пространств: отделимость, связность, компактность.....	52
Библиографический список.....	63

ОТ АВТОРА

Содержание данного пособия составляет материал спецкурса по топологии, который автор предполагает читать для студентов-математиков во Владимирском государственном университете. Однако ввиду того что жесткие временные рамки курса лекций не позволяют в достаточно полной мере охватить изучаемый материал, автор счел целесообразным разбить это пособие на две части. Первая его часть предназначена для отработки содержания самого спецкурса, вторая же должна углубить этот материал и дополнить его новыми разделами. Эти разделы (теория фильтров, теория прямых и обратных спектров, метризуемое пространство, равномерные структуры и полнота, топологические и гладкие многообразия) придадут завершенность этой работе и создадут наиболее полное представление об основах топологии.

Автор настоятельно рекомендует читателю решить все упражнения, приведенные в конце каждого параграфа. Именно решение задач приводит к овладению топологическими методами и проявляет связь топологии с анализом и другими разделами математики.

§ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Прежде чем ввести в рассмотрение общее абстрактное понятие топологического пространства, мы рассмотрим более обозримое, исторически более реальное понятие метрического пространства, которое было введено в 1906 г. французским математиком М. Фреше и которое играет исключительно важную роль во всей математике и её приложениях.

Пусть X – непустое множество, а $\rho: X \times X \rightarrow R^+$ – отображение декартова произведения $X \times X$ в множество неотрицательных действительных чисел R^+ .

Определение 1. Отображение $\rho: X \times X \rightarrow R^+$ называется метрикой на X , если оно удовлетворяет следующим трем аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Определение 2. Множество X , на котором определена метрика ρ , называется метрическим пространством. При этом элементы множества X называются точками метрического пространства, а число $\rho(x, y)$ – расстоянием между x и y .

Метрика в одном и том же множестве может быть введена разными способами (см. пример 2).

Метрическое пространство, полученное путем наделения множества X метрикой ρ , будем обозначать символом (X, ρ) , или просто X .

Пример 1. Числовая прямая R^1 . Пусть X – множество всех вещественных чисел. Для любой пары элементов x, y из X положим: $\rho(x, y) = |x - y|$. Легко убедиться, что условия всех аксиом метрики выполняются (проверить).

Построенное здесь метрическое пространство называется числовой прямой и обозначается символом R^1 .

Пример 2. Многомерное числовое пространство R^n . Пусть X – множество всевозможных упорядоченных наборов, состоящих из n вещественных чисел вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для любых двух таких наборов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{положим} \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Предлагается проверить выполнение аксиом метрики.

Построенное здесь метрическое пространство (X, ρ) называется n -мерным числовым (евклидовым) пространством и обозначается символом R^n . В частности, пространства R^2 и R^3 можно интерпретировать соответственно как плоскость и трехмерное пространство, состоящее из точек, расстояние между которыми определяется как длина соединяющего их прямолинейного отрезка.

Замечание. В том же множестве X часто вводится и другая метрика ρ_0 по формуле $\rho_0(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$.

Пример 3. Дискретное метрическое пространство. Пусть X – произвольное непустое множество. Для элементов $x, y \in X$ положим $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$, и $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$. Нетрудно видеть, что $\rho(x, y)$ – метрика в X (проверить). Эта метрика называется дискретной, а метрическое пространство (X, ρ) – дискретным метрическим пространством.

Определение 3. Два метрических пространства (X, ρ) и (X', ρ') называются изометричными, если между элементами $x \in X$ и $x' \in X'$ имеется взаимно-однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$, при котором $\rho(x, y) = \rho'(x', y')$ для любых $x, y \in X$.

В теории метрических пространств изометрические пространства считаются неразличимыми. Например, числовые пространства R^1, R^2, R^3 мы потому и отождествляем с изометричными им геометрическими точечными пространствами соответственно с прямой, плоскостью и трехмерным точечным пространством.

Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство, a – его произвольно фиксированная точка и $r > 0$ – действительное число.

Определение 4. Открытым шаром радиуса r с центром в точке a называется множество $B(a, r)$, состоящее из всех таких точек $x \in X$, для которых $\rho(x, a) < r$. Множество $B(a, r)$ будем также называть окрестностью точки a радиуса r или её r -окрестностью.

Пусть A – подмножество в X и x_0 – его элемент.

Определение 5. Точка x_0 называется внутренней точкой A в метрическом пространстве (X, ρ) , если она обладает окрестностью некоторого радиуса, целиком содержащейся в A . Совокупность всех внутренних точек множества A называется внутренностью этого множества и обозначается символом $Int A$.

Определение 6. Множество A в метрическом пространстве называется открытым, если $Int A = A$.

Пусть τ – семейство всех открытых множеств метрического пространства (X, ρ) .

Предложение 1. Семейство τ обладает следующими свойствами:

- 1) само множество X , а также его пустое подмножество $\emptyset$ содержатся в τ ;
- 2) объединение любого множества подмножеств из X , являющихся элементами τ , также является элементом τ ;
- 3) пересечение конечного числа подмножеств семейства τ также служит элементом семейства τ .

Доказательство

Свойство 1 не нуждается в доказательстве в силу его очевидности. Докажем свойство 2. Пусть $\{A_i, i \in I\}$; где I – множество индексов произвольной мощности, некоторое множество открытых множеств из (X, ρ) и $A = \bigcup_i A_i$. Любая точка $a \in A$ содержится в некотором подмножестве A_i , причем вместе с некоторой своей окрестностью. Эта же окрестность точки a содержится и в A . Это означает, что A открыто, то есть служит элементом семейства τ .

Докажем свойство 3. Пусть $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ – подмножества семейства τ , и пусть $A = \bigcap_k A_k$. Для любого элемента $a \in A$ имеем $a \in A_k$ при всех k . При этом каждое множество A_k содержит некоторую окрестность точки a радиуса r_k . Пусть $r = \min_k r_k$. Тогда при каждом k r -окрестность точки a содержится в A_k , а значит, содержится в A . Следовательно, A открыто и утверждение доказано.

Отметим, что если (X, ρ) – метрическое пространство и A – подмножество в X , то в A , естественно, определяется метрика ρ_A по формуле

$\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$ для любых $x, y \in A$. Метрическое пространство (A, ρ_A) называется подпространством метрического пространства (X, ρ) , и говорят, что метрика ρ_A в множестве A индуцирована метрикой ρ из X .

Пусть A и B – два множества из (X, ρ) . Расстоянием $\rho(A, B)$ между множествами A и B назовем число $\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$. В частности, рас-

стояние $\rho(A, B)$ от точки a до множества B определяется по формуле: $\rho(a, B) = \inf_{y \in B} \rho(a, y)$. Диаметром множества A называют число:

$$\text{diam} A = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y).$$

Множество A называется ограниченным, если $\text{diam} A < \infty$.

Упражнения

Упражнение 1. Пусть $p \geq 1$ – фиксированное число. Рассмотрим множество l^p , образованное числовыми последовательностями $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Принимая во внимание тот известный факт, что для любых элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ из l^p выполнено соотношение:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

убедиться, что функция

$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ превращает множество l^p в метрическое пространство.

Примечание. Из пространств типа l^p особо важную роль в математике играет пространство l^2 , которое называют гильбертовым координатным пространством.

Упражнение 2. Пусть $C[a, b]$ – множество всех непрерывных числовых функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Покажите, что множество $C[a, b]$

оказывается метрическим пространством, если расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ определить по формуле

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Упражнение 3. Пусть $p \geq 1$ – фиксированное число. Рассмотрим множество X измеримых числовых функций $f(x)$, заданных на конечном или бесконечном интервале (a, b) , удовлетворяющих требованию $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$. Разобьем множество X на классы $F = \{f(x)\}$, каждый из которых состоит из всех таких функций, которые отличаются друг от друга только на множестве нулевой меры. Множество всех таких классов обозначим через L^p . Докажите, что в множестве L^p можно ввести метрику по

$$\text{формуле } \rho(F, G) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ где } f(x) \in F, g(x) \in G.$$

Указание. Использовать интегральное неравенство Минковского

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Упражнение 4. Пусть X – множество всех прямых в трехмерном пространстве, проходящих через фиксированную точку. Для каждой пары прямых l_1 и l_2 из множества X определим $\rho(l_1, l_2)$ как значение наименьшего из углов между этими прямыми. Докажите, что (X, ρ) – метрическое пространство.

Упражнение 5. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство, и пусть $\Phi = \{F\}$ – множество всех ограниченных замкнутых подмножеств F из X . Для элементов $F_1, F_2 \in \Phi$ определим $\bar{\rho}(F_1, F_2) = \sup_{x, y} \rho(x, y)$, где $x \in F_1, y \in F_2$. Докажите, что $\bar{\rho}$ – метрика в множестве Φ .

Упражнение 6.

1. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – произвольное отображение некоторого множества X в метрическое пространство (Y, ρ) . Пусть $\tilde{X} = \{\tilde{x}\}$, где $\tilde{x}$ – подмножества из X , являющиеся прообразами элементов из Y . Введите метрику $\tilde{\rho}$ в множестве $\tilde{X}$, при которой пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ было бы изометричным подпространству $A = f(X)$ пространства Y .

2. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – взаимнооднозначное отображение множества X на множество Y . Покажите, что, если в любом из этих двух множеств введена метрика, то и в другом можно ввести такую метрику, чтобы X было бы изометричным Y .

3. Введите на прямой линии метрику так, чтобы полученное метрическое пространство было бы изометричным конечному интервалу из R^1 .

4. Проективной прямой называют обычную прямую, дополненную одной точкой, называемой бесконечно удаленной и обозначаемой символом ∞ . Введите на проективной прямой метрику, в которой она окажется изометричной окружности.

§2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X – произвольное множество и пусть $\tau = \{U_i, i \in I\}$ – семейство его подмножеств, для которого множество индексов I имеет произвольную мощность и которое отвечает следующим аксиомам.

О.1. Все множество X и пустое подмножество $\emptyset$ содержатся в τ ;

О.2. Объединение любого семейства подмножеств, являющихся элементами τ , также является элементом τ ;

О.3. Пересечение конечного числа подмножеств, служащих элементами τ , также есть элемент τ .

Определение 1. Семейство τ подмножеств из X , отвечающие аксиомам О.1 – О.3 (аксиомы топологии), называется топологической структурой или просто топологией в X . Множество X , наделенное этой топологией, называется топологическим пространством, а подмножества, образу-

щие семейства τ , – открытыми множествами этого пространства. При этом, элементы из X называют точками пространства.

Для обозначения топологического пространства будем использовать символ (X, τ) или просто символ X .

Замечание. В одном и том же множестве X (которое называют носителем топологии) топологию можно вводить разными способами. Исключением является множество, состоящее из одной точки, на которой топология единственна.

Пример 1. Метрические пространства. Во всяком метрическом пространстве семейство τ всех открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологии О.1 – О.3 (§1, предложение 1). Следовательно, в каждом метрическом пространстве определена топология. Эта топология называется метрической. В частности, пространства R^n являются топологическими пространствами. Можно доказать, что две разные метрики в R^n , указанные в примере 2, §1, порождают одну и ту же топологию, которую называют естественной или евклидовой топологией.

Пример 2. Топология Зарисского. Пусть X – произвольное бесконечное множество и пусть τ , кроме самого множества X и подмножества $\emptyset$, включает в себя всякое подмножество U из X , дополнение которого CU конечно. Выполнение аксиом топологии проверяется без труда. Эту топологию в X называют топологией Зарисского.

Пример 3. Связное двоеточие. Пусть X – множество, состоящее из двух точек a и b . Семейство τ составим из трех подмножеств: самого X , пустого подмножества $\emptyset$ и одноточечного подмножества $\{a\}$. Это топологическое пространство называют связным двоеточием.

Пусть в множестве X введены две топологии: τ_1 и τ_2 . Говорят, что топология τ_1 слабее топологии τ_2 (а τ_2 сильнее τ_1), если семейство τ_1 включается в семейство τ_2 , то есть если каждое множество, открытое в топологии τ_1 , открыто также и в τ_2 . В этом случае также говорят, что топология τ_2 мажорирует топологию τ_1 (а топология τ_1 мажорируется топологией τ_2). При этом пишут: $\tau_1 \leq \tau_2$. Если одновременно выполнены два соотношения $\tau_1 \leq \tau_2$ и $\tau_2 \leq \tau_1$, то это означает совпадение топологий τ_1 и τ_2 . Кроме того, ясно, что из соотношений $\tau_1 \leq \tau_2$ и $\tau_2 \leq \tau_3$ следует, что $\tau_1 \leq \tau_3$. Тем самым в множестве X определено отношение частичного упорядочения (но не линейного упорядочения, поскольку не любые две топологии сравнимы).

Пример 4. В множестве всех действительных чисел топология Зарисского слабее обычной топологии числовой прямой (доказать).

Пример 5. Тривиальная топология. В любом множестве X можно рассмотреть топологию, в которой открыты только X и подмножество τ . Эта топология называется тривиальной. Если в множестве X больше одного элемента, то тривиальная топология в X слабее любой другой топологии в этом множестве.

Пример 6. Дискретная топология. Другим крайним случаем является так называемая дискретная топология множества X , в которой открытыми считаются все его подмножества. Ясно, что если в X существует какая-нибудь другая топология, то она слабее дискретной. Таким образом, в частично упорядоченном множестве всех топологий в множестве X существует минимальный элемент (тривиальная топология) и максимальный элемент (дискретная топология).

Понятие замкнутого множества двойственно понятию открытого. Множество M в топологическом пространстве X называется замкнутым, если его дополнение $CM = X \setminus M$ открыто в X .

Пример 7. Всякое конечное (в частности одноточечное) множество M на числовой прямой или в каком-нибудь многомерном пространстве R^n замкнуто. Действительно, пусть $M = \{x_k, k = 1, 2, \dots, n\}$, и пусть $a \in CM$ – некоторый элемент. Если $r = \min_k \rho(a, x_k)$, то открытый шар $B(a, r)$ содержится в CM , поскольку он не содержит ни одной из точек x_k . Следовательно, множество CM открыто.

Пример 8. Пусть a – фиксированная точка в R^n и $r > 0$ – фиксированное число. Множество $\bar{B}(a, r) = \{x \mid \rho(x, a) \leq r\}$ замкнуто в R^n . Действительно, если $x_0 \notin \bar{B}(a, r)$ и $\rho(x_0, \bar{B}(a, r)) = \varepsilon$, то ε -окрестность точки a не пересекается с множеством $\bar{B}(a, r)$.

Множество $\bar{B}(a, r)$ мы будем называть замкнутым шаром радиуса r с центром в точке a . В частности, любой отрезок $[a, b]$ на числовой прямой есть замкнутое множество, он представляется как замкнутый шар, центром которого служит его средняя точка $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Пример 9. Множество Z всех целых чисел замкнуто на числовой прямой. Точно так же множество всех точек из R^n с целочисленными координатами замкнуто в R^n .

Пример 10. Любая прямая или кривая второго порядка в R^2 , равно как и плоскость или поверхность второго порядка в R^3 , представляет собой замкнутое множество точек в своем пространстве.

Замечание. Не всякое множество в топологическом пространстве можно отнести к классу открытых или замкнутых. Например, на числовой прямой всякий отрезок $[a, b]$ замкнут, всякий интервал (a, b) открыт, но полуинтервалы $[a, b)$ или $(a, b]$ нельзя отнести ни к открытым, ни к замкнутым множествам. Множество Q всех рациональных чисел в R^1 , равно как и множество всех иррациональных чисел $R^1 \setminus Q$, также не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

Семейство всех замкнутых подмножеств любого топологического пространства обладает следующими свойствами.

- F.1. Само пространство, а также его пустое подмножество замкнуты.
- F.2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
- F.3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Проверка этих свойств легко проводится, исходя из определения замкнутого множества с учетом следующих соотношений двойственности между операциями объединения и пересечения:

$$\begin{aligned} C \bigcup_i A_i &= \bigcap_i C A_i, \\ C \bigcap_i A_i &= \bigcup_i C A_i \end{aligned}$$

для любого семейства $\{A_i\}$ подмножеств некоторого множества.

Топологию в множестве X можно вводить не путем задания семейства открытых подмножеств, а путем задания семейства σ замкнутых подмножеств в нем. При этом нужно требовать, чтобы семейство σ удовлетворяло аксиомам F.1 – F.3. Ясно, что семейство τ , состоящее из дополнений к подмножествам семейства σ , будет удовлетворять аксиомам O.1 – O.3 и будет служить семейством открытых множеств в X .

Определение 2. Замыканием множества M в топологическом пространстве X назовем пересечение всех замкнутых подмножеств из X , содержащих M .

Замыкание множества M обозначается через $\overline{M}$.

Из определения следует, что $\overline{M}$ есть наименьшее из замкнутых множеств, содержащих M . Ясно, что $M \subset \overline{M}$, и, если M замкнуто, то $\overline{M} = M$. Легко проверить, что если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$ (свойство монотонности замыкания). Очевидно также, что $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (идемпотентность замыкания).

Докажем еще следующее важное свойство замыкания:

Предложение 1. Для любых подмножеств M и N топологического пространства выполнено соотношение

$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

Доказательство

Так как $M \cup N \subset \overline{M} \cup \overline{N}$, то $\overline{M \cup N} \subset \overline{\overline{M} \cup \overline{N}}$. Но в силу свойства F.3 множество $\overline{M} \cup \overline{N}$ замкнуто. Поэтому $\overline{\overline{M} \cup \overline{N}} = \overline{M} \cup \overline{N}$, и мы получаем включение $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$.

Докажем обратное включение. Так как $M \subset M \cup N$, и $N \subset M \cup N$, то $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ и $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Отсюда получаем $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Утверждение доказано.

Пример 11. Пусть M – открытый шар в R^n , то есть $M = B(a, r)$ для некоторого $a \in R^n$ и некоторого числа $r > 0$. Замыканием множества M служит замкнутый шар $\overline{B}(a, r)$ с тем же центром и того же радиуса. Действительно, если представить, что $\overline{M}$ не совпадает с $\overline{B}(a, r)$, а является меньшим множеством, то некоторая точка $x_0 \in \overline{B}(a, r)$ окажется элементом дополнения к $\overline{M}$. Поскольку множество $\overline{M}$ открыто, то x_0 – внутренняя точка этого множества. Но это противоречит тому, что окрестность точки x_0 любого радиуса должна содержать точки из M .

Пример 12. Замыкание множества Q всех рациональных чисел в пространстве R^1 совпадает с R^1 . Действительно, если представить, что множество $\overline{CQ}$ не пусто, то оно должно содержаться в множестве всех иррациональных чисел. Но никакое подмножество иррациональных чисел не может быть открытым, поскольку никакая его точка не является внутренней.

Пример 13. В бесконечном множестве, наделенном топологией Зарисского, замыкание любого бесконечного подмножества совпадает со всем пространством (доказать).

Упражнения

Упражнение 1. Перечислите все возможные топологии в множестве, состоящем из трех точек.

Упражнение 2.

1. Пусть ρ_1 и ρ_2 – две метрики в одном и том же множестве X и пусть существует постоянная $c > 0$, такая, что для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство $\rho_1(x_1, x_2) \leq c\rho_2(x_1, x_2)$. Докажите, что топология τ_2 , порожденная метрикой ρ_2 , мажорирует топологию τ_1 , порожденную метрикой ρ_1 .

2. Пусть для метрик ρ_1 и ρ_2 в множестве X существуют две постоянные c_1 и c_2 , для которых при любых x_1 и x_2 из X выполняются неравенства $c_1\rho_2(x_1, x_2) \leq \rho_1(x_1, x_2) \leq c_2\rho_2(x_1, x_2)$. Покажите, что метрики ρ_1 и ρ_2 порождают одну и ту же топологию (в этом случае метрики ρ_1 и ρ_2 называют эквивалентными).

3. Используя 2, покажите, что в R^n метрики ρ и ρ_0 (см. §1, пример 2) эквивалентны.

Упражнение 3. Пусть F и G – два множества в некотором топологическом пространстве, причем F замкнуто, а G открыто. Покажите, что множество $F \setminus G$ замкнуто, а множество $G \setminus F$ открыто.

Упражнение 4. Докажите, что, применяя к некоторому подмножеству в топологическом пространстве лишь операции замыкания и дополнения, можно получить не более, чем 14 различных подмножеств в этом пространстве. Привести пример, когда число этих подмножеств равно именно 14.

Упражнение 5. Пусть G и A – подмножества в некотором топологическом пространстве, причем G открыто, а A – произвольно. Докажите, что если $G \cap A = \emptyset$, то и $G \cap \overline{A} = \emptyset$.

Упражнение 6. Пусть A и B – произвольные подмножества в топологическом пространстве. Докажите, что $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Привести пример, когда эти множества не совпадают.

§ 3. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК. ТОЧКИ ПРИКОСНОВЕНИЯ, ВНУТРЕННОСТЬ И ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА

Определение 1. Множество U в топологическом пространстве X называется окрестностью точки x_0 , если оно содержит некоторое открытое множество, содержащее точку x_0 . Легко видеть, что любое надмножество каждой окрестности точки x_0 само является окрестностью этой точки. Любое открытое множество в X служит окрестностью каждой своей точки. В частности, само множество X и только оно служит окрестностью любой точки пространства. Пустое множество является единственным открытым множеством, не представляющим собой окрестности какой-нибудь точки.

Предложение 1. Множество U в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда оно служит окрестностью каждой своей точки.

Доказательство

Необходимость уже отмечалась и не требует доказательства. Докажем достаточность. Пусть множество U в пространстве X является окрестностью любой своей точки. Тогда для каждой точки $x \in U$ можно фиксировать открытую окрестность U_x , содержащуюся в U . Но тогда множество $V = \bigcup_x U_x$, будучи открытым в силу О.3, содержится в U и, поскольку содержит любую точку из U , содержит все U . Таким образом, $V = U$. Утверждение доказано.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой прикосновения множества M в топологическом пространстве, если для любой окрестности U этой точки $U \cap M \neq \emptyset$.

Предложение 2. Замыкание любого множества M в топологическом пространстве представляется как множество всех точек прикосновения множества M .

Доказательство

Пусть x_0 – точка прикосновения множества M . Предположим, что $x_0 \notin \bar{M}$. Но тогда $x_0 \in \overline{C\bar{M}}$. Будучи открытым, множество $\overline{C\bar{M}}$ служит окрестностью точки x_0 , которое не пересекается с $\bar{M}$ и тем более с M . Полученное противоречие означает, что все точки прикосновения множества M содержатся в $\bar{M}$. Предположим теперь, что некоторая точка $x_0 \in \bar{M}$ не яв-

ляется точкой прикосновения для M . Тогда можно найти открытую окрестность U точки x_0 , для которой $U \cap M = \emptyset$, и тогда замкнутое множество CU содержит M , но не содержит точку его замыкания x_0 , что невозможно. Следовательно, все точки из $\overline{M}$ служат точками прикосновения для M . Утверждение доказано.

Определение 3. Точка x_0 называется внутренней точкой множества M в топологическом пространстве, если M содержит эту точку вместе с некоторой ее окрестностью. Множество всех внутренних точек множества M называется внутренностью этого множества и обозначается символом $Int M$.

Как следует из предложения 1, равенство $M = Int M$ равносильно тому, что множество M открыто. Очевидно, что $Int M$ для любого множества M представляется как объединение всех открытых множеств, содержащихся в M , то есть является наибольшим из открытых множеств, содержащихся в M .

Легко проверить, что операция перехода от множеств к их внутренности обладает следующими свойствами:

- 1) если $M \subset N$, то $Int M \subset Int N$ (монотонность);
- 2) $Int(Int M) = Int M$ (идемпотентность);
- 3) $Int(M \cap N) = (Int M) \cap (Int N)$.

Пример 1. В пространстве R^1 внутренности множества всех рациональных чисел и множества всех иррациональных чисел пусты.

Пример 2. В пространстве Зарисского, если M имеет конечное дополнение или совпадает со всем пространством, то $Int M = M$, для всех остальных подмножеств $Int M = \emptyset$.

Между операциями перехода к внутренности и перехода к замыканию множества существуют следующие соотношения двойственности:

- 1) $\overline{CM} = Int CM$,
- 2) $CInt M = \overline{CM}$ (проверить).

Определение 4. Точка x_0 называется граничной точкой множества M в топологическом пространстве, если она служит точкой прикосновения как для множества M , так и для его дополнения CM . Совокупность всех граничных точек множества M называется его границей и обозначается через FrM .

Граница любого множества M представима в виде $FrM = \overline{M} \cap \overline{CM}$.

Будучи пересечением двух замкнутых множеств, множество FrM замкнуто. Имеет место еще такое представление: $FrM = \overline{M} \setminus IntM$.

Предложение 3. Множество M в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда оно не пересекается со своей границей.

Доказательство

Если M открыто, то дополнение CM замкнуто. Но тогда $FrM = \overline{M} \cap CM \subset CM$, и, значит, $M \cap FrM = \emptyset$.

С другой стороны соотношение $FrM = \overline{M} \setminus IntM$ означает, что FrM служит дополнением к $IntM$ в $\overline{M}$. И если $M \cap FrM = \emptyset$, то $M \subset IntM$. Утверждение доказано.

Предложение 4. Множество M в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит всю свою границу.

Доказательство

Если M замкнуто, то $M = \overline{M}$, и из того, что $FrM \subset \overline{M}$, следует, что $FrM \subset M$.

Наоборот, если $FrM \subset M$, то есть $\overline{M} \setminus IntM \subset M$, то тем более $\overline{M} \setminus M \subset M$. Но это может быть только тогда, когда $\overline{M} \setminus M = \emptyset$, то есть $M = \overline{M}$. Утверждение доказано.

Операция перехода от множеств к их границам не обладает, вообще говоря, свойствами непрерывности и идемпотентности, то есть если $M \subset N$, то не обязательно выполняется включение $FrM \subset FrN$ и не обязательно выполняется соотношение $Fr(FrM) = FrM$ (проверить это на примере, когда $M = Q$ – множество всех рациональных чисел в R^1 , а $N = R^1$).

Упражнения

Упражнение 1.

1. Докажите, что всякое открытое множество на числовой прямой R^1 представляется в виде объединения не более чем счетного числа открытых интервалов (не обязательно ограниченных).

2. В соответствии с 1 дайте описание структуры произвольного замкнутого множества в R^1 .

Упражнение 2. Пусть P – множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$, где a и b конечны. Покажите, что замыкание множества P совпадает со всем пространством.

Указание. Используйте известную теорему Вейерштрасса о возможности аппроксимации произвольной непрерывной на $[a, b]$ функции многочленами.

Упражнение 3. Точка x_0 множества M в топологическом пространстве называется изолированной точкой этого множества, если она обладает окрестностью, не содержащей других точек множества M . Точка x_0 называется предельной точкой множества M , если она является точкой прикосновения этого множества, но не является изолированной точкой в нем. Совокупность всех предельных точек множества M называется его производным множеством и обозначается через M' .

1. Докажите, что если все точки топологического пространства являются его изолированными точками, то топология в X дискретна.

2. Докажите, что для любого множества M в топологическом пространстве множество M' замкнуто.

Упражнение 4. Точка x_0 в топологическом пространстве называется пределом последовательности его точек x_n (пишут $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), если каж-

дая окрестность точки x_0 содержит все элементы этой последовательности за исключением конечного числа.

1. Докажите, что если M – множество в метрическом пространстве, то $\overline{M}$ – это множество тех и только тех точек, которые служат пределами некоторых последовательностей из M .

2. Укажите пример топологического пространства, для которого множество пределов любой последовательности совпадает со всем пространством.

3. Введем в некотором несчетном множестве X топологию, в котором открытыми объявляются те множества, дополнения которых не более чем счетны. Пусть $M = X \setminus \{x_0\}$, где x_0 – произвольно фиксированная точка. Докажите, что $x_0 \in \overline{M}$, но в то же время точка x_0 не служит пределом никакой последовательности точек из M .

Упражнение 5. Докажите, что, если M – подмножество в топологическом пространстве, то соотношение $FrM = \emptyset$ имеет место тогда и только тогда, когда M одновременно открыто и замкнуто.

§4. БАЗА И ПРЕДБАЗА ТОПОЛОГИИ. АКСИОМЫ СЧЕТНОСТИ

При задании топологии какого-нибудь пространства не обязательно описывать весь класс открытых множеств. Достаточно указать некоторую базовую систему этих множеств, которая однозначно определяет топологию.

Определение 1. Система β открытых множеств в топологическом пространстве X называется базой топологии этого пространства (или базой пространства), если каждое непустое открытое множество в X представляется в виде объединения некоторого семейства множеств из β .

Отметим, что множества, образующие базу, должны покрывать все X , то есть каждая точка $x \in X$ содержится в некотором $U \in \beta$.

Предложение 1. Для того, чтобы семейство β подмножеств топологического пространства X служило базой его топологии, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества U из X и каждой точки $x \in U$ существовало множество $V_x \in \beta$, содержащееся в U и содержащее в себе точку x .

Доказательство

Необходимость. Пусть β – база, U – открытое множество в X , и $x \in U$ – точка. Поскольку U представляется в виде объединения множеств из β , то среди множеств, образующих это объединение, найдется множество V_x , содержащее x . При этом $V \subset U$.

Достаточность. Возьмем произвольное открытое множество U в X . Если для каждого $x \in U$ найдено открытое множество $V_x \subset U$, для которого $x \in V_x$, то $U = \bigcup_x V_x$. Утверждение доказано.

Пример 1. На числовой прямой R^1 базой топологии служит система всевозможных открытых интервалов. Действительно, если U – открытое множество в R^1 , то для любой его точки x найдется число $\varepsilon > 0$, такое, что интервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset U$. Можно даже утверждать, что базой в R^1 служит семейство интервалов вида (r_1, r_2) , где r_1 и r_2 – рациональные числа.

Пример 2. Вообще, в произвольном метрическом пространстве семейство открытых шаров $B(a, r)$ для всевозможных точек a и произволь-

ных радиусов r образует базу. Можно также ограничиться шарами с рациональными радиусами.

Предложение 2. Пусть в множестве X задано семейство $\beta = \{V_i, i \in I\}$ подмножеств из X , отвечающее условиям:

- 1) $\bigcup_i V_i = X$;
- 2) для любого конечного набора $\{V_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ элементов из β в множестве индексов I существует подмножество I_1 , для которого выполнено соотношение $\bigcap_k V_k = \bigcup_{i \in I_1} V_i$.

Тогда семейство β служит базой некоторой топологии в X .

Доказательство

Нужно убедиться, что семейство τ , состоящее из пустого множества и всевозможных объединений множеств из β , удовлетворяет аксиомам топологии О.1 – О.3. Выполнение аксиом О.1 и О.2 очевидно. Проверку выполнения свойства О.3 достаточно провести для случая пересечения двух множеств.

Пусть $U = U_1 \cap U_2$, где U_1 и U_2 – произвольные множества из τ . При этом $U_1 = \bigcup_{i' \in I_1} V_{i'}$ и $U_2 = \bigcup_{i'' \in I_2} V_{i''}$, где $I_1, I_2 \in I$. Тогда $U = (\bigcup_{i' \in I_1} V_{i'}) \cap (\bigcup_{i'' \in I_2} V_{i''}) = \bigcup_{i', i''} (V_{i'} \cap V_{i''})$. В силу условия 2 $(V_{i'} \cap V_{i''}) \in \beta$. Следовательно, $U \in \tau$. Утверждение доказано.

Замечание. Обычно принимают такие условности: объединение пустого множества подмножеств из X равно $\emptyset$; пересечение пустого множества подмножеств из X равно X . Также условно считают, что пустое множество – это конечное множество. Мы будем впредь для упрощения формулировок также иногда пользоваться этими условностями. Так, при формулировке последнего предложения требование 1 к семейству β можно было бы исключить, считая, что оно вытекает из требования 2, когда множество элементов пересечения равно $\emptyset$.

Полезно следующее, как нетрудно видеть, равносильное утверждение.

Предложение 3. Пусть семейство $\beta = \{V_i, i \in I\}$ подмножеств в множестве X удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\bigcup_i V_i = X$;
- 2) если $V_1, V_2 \in \beta$ и $x \in V_1 \cap V_2$, то существует $W \in \beta$ такое, что $x \in W \subset V_1 \cap V_2$. Тогда семейство β служит базой некоторой топологии в X .

Определение 2. Семейство α подмножеств в топологическом пространстве X называется предбазой его топологии (или самого пространства), если множество всевозможных конечных пересечений подмножеств из α образует базу в X .

С помощью предложения 2 легко понять, что любое семейство подмножеств в X служит предбазой некоторой топологии в X , причем эта топология единственна. Эта топология оказывается слабой из всех таких топологий в X , в которых множества, образующие предбазу, открыты.

Пример 1. Пусть α – семейство всех прямых на плоскости. Ясно, что α служит предбазой для дискретной топологии в плоскости.

Пример 2. Пусть α – семейство подмножеств в координатной плоскости, представляющих собой «полосу» двух видов: $a < x < b$ и $c < y < d$. Семейство α служит предбазой обычной евклидовой топологии.

Определение 3. Базой (или локальной базой) в точке x топологического пространства X называется такое семейство β_x открытых окрестностей точки x , что каждая окрестность этой точки содержит в себе некоторую окрестность из семейства β_x .

Определение 4. Предбазой (или локальной предбазой) в точке x топологического пространства X называется такое семейство α_x открытых окрестностей точки x , что множество всевозможных конечных пересечений окрестностей из семейства α_x образует базу в точке x .

Определение 5. Топологическое пространство называется пространством со счетной базой или пространством, удовлетворяющим второй аксиоме счетности, если оно обладает базой, состоящей из не более чем счетного семейства открытых множеств.

Определение 6. Топологическое пространство называется пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, если каждая его точка обладает не более чем счетной локальной базой.

Ясно, что всякое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет также и первой аксиоме счетности. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 5. Пространство R^n служит примером пространства со счетной базой. Счетную базу образуют открытые шары рациональных радиусов с центрами в точках с рациональными координатами.

Пример 6. Примером пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, но не удовлетворяющего второй, служит несчетное пространство с дискретной топологией. Действительно, локальной базой в каждой точке x этого пространства служит одноточечное открытое множество $\{x\}$, и первая аксиома счетности выполняется. С другой стороны, всякая база пространства должна содержать все одноточечные множества (доказать). Следовательно, счетной базы нет.

Упражнения

Упражнение 1. Докажите, что система β открытых множеств топологического пространства X является базой в X в том и только том случае, когда для каждого $x \in X$ система $\beta(x)$, состоящая из элементов системы β , содержащих x , служит локальной базой пространства X в точке x .

Упражнение 2. Докажите, что в любом пространстве со счетной базой множество всех изолированных точек пространства не более чем счетно.

Упражнение 3. Докажите, что в любом пространстве со счетной базой любая система попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счетна.

Упражнение 4. Пусть в несчетном множестве X введена топология Зарисского. Докажите, что в полученном пространстве ни одна точка не имеет счетной локальной базы.

Упражнение 5. Докажите, что если в пространстве со счетной базой задана некоторая несчетная база β , то существует счетная подсистема β_0 системы β , являющаяся базой пространства.

Упражнение 6. Докажите, что если X – топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, и $M \subset X$ – некоторое подмножество, то для каждой точки $x_0 \in \overline{M}$ найдется последовательность $\{x_n\}$ элементов из M , для которой $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Упражнение 7. Введем на числовой прямой топологию τ , базой которой служит семейство β полуоткрытых интервалов вида $(a, b]$.

1. Докажите, что топология мажорирует обычную топологию числовой прямой R .

2. Докажите, что полуинтервалы, составляющие базу β , не только открыты, но и замкнуты.

3. Найдите множество в рассматриваемом пространстве, являющееся замкнутым, но не открытым.

4. Докажите, что никакая числовая строго убывающая последовательность не может сходиться в топологии τ .

5. Докажите, что прямая с топологией τ удовлетворяет первой, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Упражнение 8. Пусть X – круг в R^2 . Семейство α , состоящее из всех диаметров круга, будем считать предбазой топологии τ в X .

1. Дайте описание класса всех открытых множеств в топологии τ и покажите, что каждое открытое множество одновременно и замкнуто.

2. Покажите, что пространство (X, τ) удовлетворяет первой, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

§5. ПОДПРОСТРАНСТВО В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ. ПОКРЫТИЯ

Пусть (X, τ) – топологическое пространство и Y – подмножество в X . Топология τ порождает (или, как говорят, индуцирует) в Y топологию τ_Y , в которой множество V открыто тогда и только тогда, когда в X существует открытое множество U , для которого $U \cap Y = V$. Очевидно, что при этом множество N в τ_Y замкнуто в том и только в том случае, если в X существует замкнутое множество M , для которого $M \cap Y = N$.

Определение 1. Топологическое пространство (Y, τ_Y) называется подпространством топологического пространства (X, τ) .

Легко проверить, что индуцированная топология в подмножествах топологического пространства X обладает свойством транзитивности в следующем смысле: если $Z \subset Y \subset X$, то топология $(\tau_Y)_Z$, индуцированная в Z топологией τ_Y подпространства (Y, τ_Y) , совпадает с топологией τ_Z индуцированной в Z топологией τ пространства X .

Выполнение свойства транзитивности означает корректность определения индуцированной топологии.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если Y – подпространство в топологическом пространстве X , то, как следует из определения индуцированной топологии, каждое подмножество в Y , открытое или замкнутое в X , также открыто или соответственно замкнуто в Y . Обратное же, вообще говоря, неверно. Например, если X – числовая прямая, а $Y = [0, 1)$, то любой промежуток вида $[0, \alpha)$, где $0 < \alpha \leq 1$, открыт в Y , но не открыт в X ; а любой промежуток вида $[\alpha, 1)$, где $0 \leq \alpha < 1$, замкнут в Y , но не замкнут в X . Однако, если само Y открыто в X , то любое множество от-

крытое в Y , открыто и в X , а если Y замкнуто в X , то любое множество, замкнутое в Y , замкнуто и в X .

Если семейство $\{U_i, i \in I\}$ представляет собой базу или предбазу в топологическом пространстве X , то в подпространстве Y множества $\{U_i \cap Y\}$ образуют соответственно базу или предбазу.

Отметим еще, что если (X, ρ) – метрическое пространство, а (Y, ρ_Y) – его подпространство с индуцированной метрикой, и если τ – топология в X , порождаемая метрикой ρ , то индуцированная ею в Y топология τ_Y совпадает с топологией, индуцированной метрикой ρ_Y .

Определение 2. Покрытием топологического пространства X называется всякое семейство $\{U_i, i \in I\}$ подмножеств из X , которое покрывает X , то есть такое, что всякий элемент $x \in X$ содержится в некотором U_i .

Замечание. Если речь идет о покрытии некоторого подмножества A в X , то считается, что элементы покрытия суть подмножества из X , не обязательно содержащиеся в A .

Покрытие называется открытым или замкнутым в зависимости от того, открытыми или замкнутыми множествами в X являются элементы покрытия. Покрытие называется счетным, если оно состоит из счетного множества элементов; конечным, если оно состоит из конечного числа множеств; локально конечным, если каждая точка обладает окрестностью, имеющей непустые пересечения лишь с конечным числом элементов покрытия.

Говорят, что покрытие $\gamma = \{U_i, i \in I\}$ некоторого пространства вписано в покрытие $\delta = \{V_{i'}, i' \in I'\}$, если для каждого индекса $i \in I$ найдется $i' \in I'$, для которого $U_i \subset V_{i'}$, то покрытие γ называют подпокрытием покрытия δ .

Предложение 1. В каждое открытое покрытие δ топологического пространства X можно вписать покрытие γ , состоящее из элементов некоторой базы β пространства X .

Доказательство

Пусть $\delta = \{V_i, i \in I\}$. Построим для каждого i покрытия γ_i открытого множества V_i элементами базы β , содержащимися в V_i . Тогда $\gamma = \bigcup_i \gamma_i$. Утверждение доказано.

Теорема Ленделёфа. Если X – топологическое пространство со счетной базой, то из любого его открытого покрытия можно выбрать не более, чем счетное подпокрытие.

Доказательство

Пусть X – топологическое пространство со счетной базой β , и $\delta = \{V_i, i \in I\}$ – его открытое покрытие. Пусть $\gamma = \{U_n, n = 1, 2, \dots\}$ – покрытие, состоящее из элементов базы β , вписанное в δ . Тогда, выбрав для каждого n индекс $i(n) \in I$, при котором $U_n \subset V_{i(n)}$, мы получим не более, чем счетное подпокрытие $\delta' = \{V_{i(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ покрытия δ . Утверждение доказано.

Определение 3. Покрытие $\{U_i, i \in I\}$ топологического пространства X называется фундаментальным, если из того, что пересечение множества A с любым из множеств U_i открыто в U_i , следует, что A открыто в X .

Можно также использовать равносильное определение.

Определение 3'. Покрытие $\{U_i, i \in I\}$ топологического пространства X называется фундаментальным, если из того, что пересечение множества A с любым из множеств U_i замкнуто в U_i , следует, что A замкнуто в X .

Предложение 2. Если фундаментальное покрытие $\gamma = \{U_i, i \in I\}$ топологического пространства X вписано в покрытие $\delta = \{U_{i'}, i' \in I'\}$, то покрытие δ также фундаментально.

Доказательство

Пусть множество $A \subset X$ такое, что $A \cap V_{i'}$ открыто в $V_{i'}$ при каждом i' . Тогда для любого $i \in I$ найдем $i' \in I'$, при котором $U_i \subset V_{i'}$, и будем иметь: $A \cap U_i = (A \cap V_{i'}) \cap U_i$. Так как пересечение открытого множества из $V_{i'}$ с множеством U_i открыто в U_i , то получаем открытость в U_i пересечения $A \cap U_i$. Но тогда из фундаментальности покрытия γ заключаем, что множество A открыто в X . Это означает фундаментальность покрытия δ . Утверждение доказано.

Предложение 3. К фундаментальным покрытиям относятся открытые, конечные замкнутые и локально конечные замкнутые покрытия.

Доказательство

1. Пусть $\gamma = \{U_i, i \in I\}$ – открытое покрытие топологического пространства X . Тогда, если для некоторого множества $A \subset X$ имеем $A \cap U_i$

открыто в U_l , то это пересечение открыто и в X , в силу открытости U_l в X . Но $A = \bigcup_l (A \cap U_l)$. Таким образом, A представляется в виде объединения

открытых в X множеств, и, следовательно, само открыто. Фундаментальность открытого покрытия доказана.

2. Пусть $\gamma = \{U_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ – конечное замкнутое покрытие пространства X . Если для множества A имеем $A \cap U_k$ замкнуто в U_k , то это множество замкнуто также и в X . Тогда $A = \bigcup_k (A \cap U_k)$, и как объединение

конечного числа замкнутых множеств, A замкнуто. Фундаментальность конечных замкнутых покрытий доказана.

3. Пусть $\gamma = \{U_l, l \in I\}$ – локально конечное замкнутое покрытие пространства X , и пусть для некоторого множества A имеем замкнутость множества $A \cap U_l$ (в U_l , а, значит, и в X) при каждом l . Фиксируя для каждой точки $x \in X$ открытую окрестность V_x точки x , которая пересекается лишь с конечным числом элементов из γ , мы получим открытое покрытие $\delta = \{V_x, x \in X\}$ пространства X . При этом каждое из множеств V_x покрыто конечным числом замкнутых в V_x множеств $U \cap V_x$. Рассмотрим теперь множество $A \cap V_x$ при произвольном x :

$$A \cap V_x = (\bigcup_l (A \cap U_l)) \cap V_x = \bigcup_l (A \cap U_l \cap V_x).$$

В полученном объединении множеств лишь конечное число составляющих не пусто, и все они замкнуты в V_x . Но тогда и множество $A \cap V_x$ замкнуто в V_x . Из фундаментальности покрытия δ и из замкнутости в каждом V_x множеств $A \cap V_x$ заключаем, что A замкнуто. Таким образом, замкнутость A следует из замкнутости множеств $A \cap U_l$, что и доказывает утверждение.

Упражнения

Упражнение 1. Пусть X – топологическое пространство и Y – его подпространство. Через $Int_Y M$ и $Fr_Y M$ обозначим соответственно внутренность и границу некоторого множества $M \subset Y$ относительно пространства Y .

1. Докажите, что $Int_X M \subset Int_Y M$. Приведите пример, когда эти два множества не совпадают.

2. Докажите, что $Fr_Y M \subset Fr_X M$. Приведите пример, когда эти два множества не совпадают.

3. Приведите примеры, когда собственное подмножество M в Y открыто и замкнуто в Y , а в X открыто, но не замкнуто; или замкнуто, но не открыто; или не открыто, но и не замкнуто.

Упражнение 2. Покажите, что покрытие γ числовой прямой, рассматриваемой в обычной топологии, образуемой отрезками вида $[-a, a]$, фундаментально.

Указание. Рассмотрите локально конечное покрытие δ прямой, образованное отрезками вида $[n, n+1]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, и докажите, что из замкнутости пересечения некоторого множества $M \subset \mathbb{R}^1$ с каждым из элементов покрытия γ следует замкнутость его пересечения с каждым из элементов покрытия δ .

Упражнение 3. Докажите, что покрытие γ числовой прямой, образованное отрезками вида $[-a, a]$ (см. упражнение 2), будет также фундаментальным и в топологии, базу которой образуют полуоткрытые интервалы $(a, b]$ (см. упражнение 7, §4).

§ 6. ВСЮДУ ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ. МНОЖЕСТВА ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КАТЕГОРИЙ

Пусть A и B – множества в топологическом пространстве X .

Определение 1. Множество A называется всюду плотным (или просто плотным) в B , если $B \subset \overline{A}$.

Таким образом, A плотно в B , если каждая точка из B является точкой прикосновения для A . В частности, если A всюду плотно в X , то просто говорят, что A – всюду плотное множество. Если A плотно в B , а B плотно в C , то, очевидно, A плотно в C .

Если A плотно в открытом множестве U пространства X , то $U \subset \text{INT} \overline{A}$. Вместе с тем ясно, что A всегда плотно в $\text{INT} \overline{A}$. Это значит, что множество $\text{INT} \overline{A}$ – максимальное из открытых множеств, в которых A плотно.

Определение 2. Множество A в топологическом пространстве X называется нигде не плотным, если $\text{INT} \overline{A} = \emptyset$. Другими словами, множество A нигде не плотно, если в X нет такого открытого множества, в котором бы A было плотно.

Пример 1. Множество Q всех рациональных чисел в R^1 всюду плотно (как и множество $R^1 \setminus Q$ иррациональных чисел). Поэтому множество Q плотно в любом подмножестве из R^1 (например в множестве $R^1 \setminus Q$). Вообще, в R^n всюду плотно множество всех точек с рациональными координатами.

Пример 2. Примером нигде не плотного множества может служить прямая или какая-нибудь кривая второго порядка в R^2 .

Критерием нигде не плотного множества может служить следующее.

Предложение 1. Множество A в топологическом пространстве X нигде не плотно, если для любого непустого открытого множества U в X найдется непустое открытое подмножество $V \subset U$, свободное от точек из A .

Доказательство

Необходимость. Пусть A – нигде не плотное, а U – непустое открытое множество в пространстве X . Согласно определению 2, в U найдется точка $x_0 \notin \bar{A}$, а также найдется окрестность W точки x_0 , для которой $W \cap A = \emptyset$. Тогда в качестве искомого непустого открытого подмножества V в U , свободного от точек из A , можно взять множество $U \cap W$.

Достаточность. Предположим, что множество A в пространстве X таково, что в любом непустом открытом множестве U есть непустое открытое подмножество V , не пересекающееся с A . Допустим, что $INT \bar{A} \neq \emptyset$. Находим непустое открытое множество $V \subset INT \bar{A}$, для которого $V \cap A = \emptyset$, и сразу получаем противоречие. Действительно, для любой точки $x_0 \in V$ имеем, что, с одной стороны, $x_0 \in INT \bar{A}$, а с другой стороны, $x_0 \notin \bar{A}$. Утверждение доказано.

Определение 3. Топологическое пространство X называется сепарабельным, если оно обладает счетным всюду плотным множеством.

Пример 3. Пространство R^n сепарабельно, так как множество всех точек с рациональными координатами в этом пространстве всюду плотно.

Пример 4. Пусть c_0 – множество всевозможных сходящихся к нулю числовых последовательностей, наделенное метрикой ρ , в которой расстояние между элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ опре-

деляется по формуле $\rho(x, y) = \max_n |x_n - y_n|$. Пространство c_0 является сепарабельным топологическим пространством. Счетным всюду плотным множеством в c_0 оказывается множество F , образованное всевозможными финитными последовательностями рациональных чисел (финитной называется последовательность, в которой лишь конечное число членов отлично от нуля). В самом деле, если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ – произвольно фиксированный элемент из c_0 , а $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, то фиксируя номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, и подобрав для каждого $n = 1, 2, \dots, N$ рациональное число r_n , для которого будет выполнено неравенство $|x_n - r_n| < \varepsilon$, построим последовательность $y = (r_1, r_2, \dots, r_N, 0, 0, \dots)$. Ясно, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, и это значит, что в ε -окрестности точки x мы нашли точку $y \in F$, что означает плотность F в c_0 . При этом нетрудно видеть, что F счетно.

Пример 5. Примером несепарабельного пространства служит пространство m , образованное всевозможными ограниченными последовательностями вещественных чисел и наделенное метрикой ρ , в которой для элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ расстояние определяется формулой $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Действительно, пусть G – подмножество

во в m , элементами которого служат последовательности, состоящие из нулей и единиц. Как известно, G – несчетное множество и имеет мощность континуума. При этом для любых различных элементов x и y из G имеем $\rho(x, y) = 1$. Для каждой точки $x \in G$ рассмотрим открытый шар $B(x, \frac{1}{2})$.

Ясно, что никакие два таких шара не пересекаются. Если A какое-нибудь всюду плотное множество в m , то в каждый из этих шаров попадает, по крайней мере, одна точка из A . Поэтому A несчетно.

Предложение 2. Если топологическое пространство X обладает счетной базой, то оно сепарабельно.

Доказательство

Пусть $\beta = \{U_n, n = 1, 2, \dots\}$ – счетная база в X . Выберем из каждого U_n по одной точке $x_n \in U_n$. Докажем, что счетное множество $\{x_n\}$ плотно в X . Возьмем произвольно точку $x_0 \in X$ и произвольную окрестность V этой

точки. Найдется, по крайней мере, один элемент $U_n \in \beta$ такой, что $U_n \subset V$. Но тогда получим $x_n \in V$. Предложение доказано.

Замечание. Существуют сепарабельные топологические пространства, не обладающие счетной базой.

Теорема 1. Для того чтобы метрическое пространство было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало счетной базой.

Доказательство необходимости. Пусть X – метрическое пространство и $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – счетное всюду плотное множество в X . В §4 мы отмечали, что семейство $\beta = \{B(x, y)\}$ всевозможных открытых шаров с рациональными радиусами представляет собой базу в X . Покажем, что счетное подсемейство $\beta(A) = \{B(a_n, r)\}$, состоящее из тех шаров, центрами которых служат точки из A , также является базой в X . Пусть U – произвольное открытое множество в X и x_0 – любая его точка. Найдем рациональное число $r_0 > 0$, для которого $B(x_0, r) \subset U$, а затем в A выберем точку a_N , содержащуюся в $B(x_0, \frac{r}{2})$. Ясно, что шар $B(a_N, \frac{r}{2})$, являющийся элементом семейства $\beta(A)$, содержит точку x_0 и содержится в шаре $B(x_0, r)$, а, следовательно, в множестве U . Таким образом, семейство $\beta(A)$ удовлетворяет требованию предложения 1 § 4. Утверждение доказано.

Коснемся еще таких понятий, как множества первой и второй категорий.

Определение 4. Множество в топологическом пространстве, представляющееся в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств, называется множеством первой категории. Множество, не относящееся к классу множеств первой категории, называется множеством второй категории.

Множества первой категории называют еще «тощими» множествами. Они, как правило, занимают в пространстве несущественное место. Это позволяет пренебрегать этими множествами при решении многих задач. Множество второй категории – это более «массивное» множество. К ним обычно относятся множества с непустой внутренностью. Такие множества определяют основные свойства пространства, и ими уже нельзя пренебрегать.

Примером множества первой категории служит множество точек в R^n с рациональными координатами (оно является объединением счетного числа одноточечных множеств, которые нигде не плотны.) Множество то-

чек в R^n с иррациональными координатами уже, оказывается, представляет собой множество второй категории. Примером множества второй категории может также служить любое открытое множество в R^n .

Упражнения

Упражнение 1. Докажите, что конечное объединение нигде не плотных множеств нигде не плотно. Приведите пример счетного объединения нигде не плотных множеств, являющегося всюду плотным.

Упражнение 2. Докажите, что если пространство обладает базой мощности μ , то в нем существует всюду плотное множество мощности, не превышающей μ .

Упражнение 3. Докажите, что числовая прямая, наделенная топологией, базу которой составляют полуоткрытые интервалы вида $(a, b]$, может служить примером сепарабельного пространства, не обладающего счетной базой.

Упражнение 4. Докажите, что если множество M либо открыто, либо замкнуто, то его граница FrM нигде не плотна. Приведите пример множества, граница которого не является нигде не плотной.

Упражнение 5. Пусть X – топологическое пространство, A и B – его подмножества, причем $A \subset B$. Докажите, что:

1) если A – множество первой категории в подпространстве B , то оно будет также множеством первой категории и в X ;

2) если множество B открыто в X , и A – множество первой категории в X , то A есть множество первой категории из B .

Упражнение 6. Докажите, что для любого подмножества M пространства X равенство $FrM = M$ имеет место тогда и только тогда, когда M – замкнутое, нигде не плотное множество в X .

Упражнение 7. Укажите счетное всюду плотное множество в пространстве $C[a, b]$ (см. упражнение 2, §1) и тем самым докажите, что пространство $C[a, b]$ сепарабельно.

Упражнение 8. В множестве $X = \{x\}$, образованном всевозможными последовательностями натуральных чисел, введем метрику ρ , в которой $\rho(x, x) = 0$, а для различных элементов $x' = \{n_1', n_2', \dots, n_k', \dots\}$ и $x'' = \{n_1'', n_2'', \dots, n_k'', \dots\}$ положим $\rho(x', x'') = \frac{1}{l}$, где l – наименьший из номеров k , при которых $n_k' \neq n_k''$. Покажите, что полученное таким образом метрическое пространство (пространство Бэра) сепарабельно.

Упражнение 9. Пусть X – несчетное множество, наделенное топологией Зарисского. Докажите, что X сепарабельно, но не имеет счетной базы.

Упражнение 10. Докажите, что если множество M сепарабельного метрического пространства несчетно, то его производное множество M' (см. упражнение 3, §3) также несчетно.

§7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1. Пусть $X = (X, \tau_1)$ и $Y = (Y, \tau_2)$ – два топологических пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывным, если $f^{-1}(V) \in \tau_1$, для каждого $V \in \tau_2$, то есть если прообраз каждого открытого множества из Y открыт в X .

Можно использовать также и равносильное определение.

Определение 1'. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывным, если прообраз каждого замкнутого множества из Y замкнут в X .

Предложение 1. Для непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ одного топологического пространства в другое достаточно, чтобы прообраз каждого элемента некоторой предбазы пространства Y был открыт в X .

Пример 1. Если в множестве X определены две топологии τ_1 и τ_2 , причем τ_1 мажорирует τ_2 , то тождественное отображение $id: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ непрерывно. В частности, тождественное отображение топологического пространства самого на себя непрерывно.

Пример 2. Постоянное отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(x) = y_0$, где $x \in X$ – любая точка, а $y_0 \in Y$ – фиксированная точка, непрерывно.

Пример 3. Проектирование плоскости на прямую. Пусть $p: R^2 \rightarrow R^1$ – отображение, получаемое по формуле $p(x, y) = (x, 0)$, есть отображение плоскости R^2 на её одномерное подпространство, которое, естественно, отождествляется с R^1 . Прообразом каждого интервала (a, b) , множество которых образует базу в R^1 , служит «полоса», заключенная строго между прямыми $x = a$ и $x = b$, представляющая собой открытое множество в R^2 .

Пример 4. Пусть S^1 – окружность в евклидовой плоскости, которая относительно прямоугольной системы координат имеет параметрические уравнения: $x = \cos t$, $y = \sin t$. Топология плоскости индуцирует в окру-

ности топологию, в которой открытые дуги образуют базу. Отображение $f: R^1 \rightarrow S^1$, при котором $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, непрерывно, так как прообразом каждой открытой дуги окружности служит объединение семейства открытых интервалов в R^1 .

Предложение 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ – непрерывные отображения топологических пространств. Композиция $g \circ f: X \rightarrow Z$ этих отображений также представляет собой непрерывное отображение.

Это утверждение легко проверяется.

Пусть A и B – подмножества соответственно в множествах X и Y , и пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ таково, что $f(A) \subset B$. Тогда отображение f порождает отображение $A \rightarrow B$, которое мы будем называть сокращением отображения f и обозначать abf .

Предложение 3. Если A и B – подпространства соответственно топологических пространств X и Y , а непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ таково, что $f(A) \subset B$, то отображение $abf: A \rightarrow B$ непрерывно.

Это утверждение также очевидно.

В частности, сужение $f|_A: A \rightarrow Y$ отображения f на подпространство A непрерывно. Естественное отображение $A \rightarrow X$, которое называют вложением (или топологическим вложением), можно понимать как сужение тождественного отображения $id: X \rightarrow X$ и потому непрерывно. Отметим также, что непрерывность сокращения $abf: X \rightarrow f(X)$ отображения f на всё X не только следует из непрерывности f , но и сама влечет непрерывность f .

Из определения фундаментального покрытия топологического пространства легко следуют два следующих эквивалентных между собой утверждения.

Предложение 4. Пусть X и Y – два топологических пространства. Для непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ достаточно, чтобы было непрерывным сужение f на каждый элемент некоторого его фундаментального покрытия.

Предложение 5. Пусть $\tau = \{U_i, i \in I\}$ – фундаментальное покрытие топологического пространства X , и $\{f_i, i \in I\}$ – семейство отображений $f_i: U_i \rightarrow Y$ в некоторое топологическое пространство Y , согласованное в том смысле, что если $x \in U_{i'} \cap U_{i''}$, то $f_{i'}(x) = f_{i''}(x)$. Тогда из непрерывности всех f_i следует непрерывность отображения $f: X \rightarrow Y$, определяемого формулой $f(x) = f_i(x)$, если $x \in U_i$.

Определение 2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для каждой окрестности U точки $y_0 = f(x_0) \in Y$ найдется такая окрестность V точки x_0 в X , что $f(V) \subset U$.

Очевидно, что отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

В определении 3 можно использовать меньший запас открытых множеств. Именно, пусть в X фиксирована некоторая локальная база $\beta(x_0)$ точки x_0 , а в Y – некоторая локальная предбаза $\alpha(y_0)$ для точки $y_0 = f(x_0)$. Тогда определение 3 имеет следующую равносильную перефразировку:

Определение 2'. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 , если прообраз каждого множества из предбазы $\alpha(y_0)$ содержит некоторое множество из базы $\beta(x_0)$.

В случае метрического пространства, используя локальные базы, состоящие из открытых шаров с центрами в рассматриваемой точке, мы приходим к привычному в анализе числовому определению непрерывного отображения в точке.

Определение 3. Для метрических пространств X и Y отображение $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для каждого $x \in X$, удаленного от x_0 меньше чем на δ , точка $f(x) \in Y$ удалена от точки $f(x_0)$ меньше, чем на ε .

Критерием непрерывности отображения может служить следующее.

Предложение 6. Отображение $f: X \rightarrow Y$, где X и Y – топологические пространства, непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого множества $M \subset X$ выполняется соотношение $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

Доказательство

Необходимость. Если отображение f непрерывно, то множество $f^{-1}(f(\overline{M}))$ замкнуто, и, поскольку содержит M , содержит и $\overline{M}$. Но тогда требуемое включение выполнено.

Достаточность. Пусть отображение f не является непрерывным. Тогда для некоторого $x \in X$ в пространстве Y найдется окрестность V точки $f(x)$, для которой какова бы ни была окрестность U точки x , $f(U) \not\subset V$. Если при этом в каждой окрестности U точки x выбрать по одной точке x_U , для которой $f(x_U) \notin V$, то для множества $M = \{x_U\}$, где U пробегает совокупность всех окрестностей точки x , точка x является точкой прикосновения.

В то же время $f(M) \cap V = \emptyset$ по построению. Таким образом, точка $f(x)$ об-
ладает окрестностью, не пересекающейся с $f(M)$, и, значит, не является
точкой прикосновения для этого множества. Но тогда множество $\overline{f(M)}$ не
содержит множество $f(\overline{M})$. Утверждение доказано.

Определение 4. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется от-
крытым, если образ каждого открытого множества из X открыт в Y , и замк-
нутым, если образ каждого замкнутого множества из X замкнут в Y .

Замечание. Ясно, что для открытости непрерывного отображения
достаточно, чтобы был открыт образ каждого множества из некоторой ба-
зы.

Очевидно, что тождественное отображение топологического про-
странства на себя одновременно и открыто, и замкнуто. Что же касается
отображения вложения подпространства A в пространство X , то оно откры-
то, если A открыто, и замкнуто, если A замкнуто в X .

Пример 5. Отображение проектирования $p: R^2 \rightarrow R^1$, рассмотренное
в примере 3, открыто, так как образом каждого открытого круга при этом
отображении служит открытый интервал. Однако это отображение не яв-
ляется замкнутым. Действительно, пусть M – множество точек гиперболы
 $y = \frac{1}{x}$ в множестве M замкнуто, но $p(M) = R^1 \setminus \{0\}$ – очевидно незамкнутое
множество.

Пример 6. Пусть A – подпространство в R^2 , определенное неравен-
ствами: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$, а $f: A \rightarrow R^1$ – сужение отображения
 $p: R^2 \rightarrow R^1$ на A .

Покажем, что f замкнуто. Пусть M – любое замкнутое множество в A ,
а $N = f(M)$. Пусть x_0 – точка прикосновения для N . Выбирая в каждом из
интервалов $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, образующих базу в точке x_0 в R^1 , по одной
точке $x_n \in N$, найдем в N последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0 . Для
каждого номера n в M выберем точку $a_n = (x_n, y_n)$. Ограниченное множе-
ство значений y_n имеет точку прикосновения $y_0 \in [0, 1]$. Но тогда точка
 $a_0 = (x_0, y_0)$ будет точкой прикосновения для множества элементов после-
довательности $\{a_n\}$. Значит $a_0 \in M$. А поскольку $f(a_0) = x_0$, то $x_0 \in N$.
Таким образом, множество N содержит все свои точки прикосновения и
поэтому замкнуто.

Отметим, что как свойство открытости, так и свойство замкнутости непрерывных отображений сохраняется при композиции (то есть композиция открытых отображений – открытое, а композиция замкнутых – замкнутое отображение). Приведем теперь одно полезное достаточное условие открытости отображения.

Предложение 7. Для того чтобы непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ было открытым, достаточно, чтобы для каждой пары точек $x \in X$ и $y \in Y$ таких, что $f(x) = y$, существовала открытая окрестность U_{xy} в точке y и непрерывное отображение $g_{xy}: U_{xy} \rightarrow X$, для которых композиция $f \circ g_{xy}: U_{xy} \rightarrow Y$ тождественна.

Доказательство

Нетрудно понять, что при выполнении условий предложения отображения g_{xy} взаимно однозначны и при этом отображения g_{xy}^{-1} непрерывны. Если V – открытое множество в X и $V_{xy} = V \cap g_{xy}(U_{xy})$, то $g_{xy}^{-1}(V_{xy})$ открыто в U_{xy} , а значит, и в Y . При этом $f(V) = \bigcup_{(x,y)} g_{xy}^{-1}(V_{xy})$ и как объединение открытых множеств это множество открыто. Утверждение доказано.

Пример 7. Пусть Z и W – два экземпляра комплексной плоскости, и $f: Z \rightarrow W$ – отображение $z \mapsto e^z$. Покажем, что f открыто. Имеем $f(Z) = W \setminus \{0\}$. Пусть $z \in Z$ и $w = f(z)$. В качестве окрестности U_{zw} точки w возьмем внутренность угла между лучами $\varphi = \arg w - \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \arg w + \frac{\pi}{2}$. Поскольку точка z представляется в виде $z = \ln|w| + i(\arg w + 2k_0\pi)$ для некоторого целого k_0 , то отображение $g_{zw}: U_{zw} \rightarrow Z$, отвечающее при соответствующей корректировке обозначений требованиям предложения 7, можно определить по формуле $g_{zw}(re^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2k_0\pi)$. Образом этого отображения будет открытая полоса между прямыми $y = \arg w - \frac{\pi}{2}$ и $y = \arg w + \frac{\pi}{2}$. Таким образом, открытость отображения f следует из предложения 7.

Определение 5. Для топологических пространств X и Y непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно. Пространства X и Y называются гомеоморфными, если существует хотя бы один гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$.

Гомеоморфизмы обладают следующими очевидными свойствами:

- 1) тождественное отображение $id: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм;
- 2) если $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, то обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ – также гомеоморфизм;
- 3) если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ – гомеоморфизмы, то композиция $g \circ f: X \rightarrow Z$ – тоже гомеоморфизм.

Таким образом, отношение гомеоморфизма топологических пространств обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности, и, следовательно, является отношением эквивалентности. Поэтому гомеоморфные топологические пространства считаются неразличимыми.

Пример 8. Открытый шар $B(0,1)$ (с центром в начальной точке O и радиуса 1) в R^n условимся обозначать через B^n , а его замыкание – через D^n . Имеет место гомеоморфизм $f: R^n \rightarrow B^n$ между пространствами R^n и B^n , который можно определить следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x \arctg|x|}{\pi|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{при}$$

Здесь и впредь для точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ используем обозначение $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Пример 9. Пусть I^n – n -мерный куб, то есть множество в R^n , координаты точек которого удовлетворяют системе неравенств:

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad \dots, \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

Условимся также обозначать через S^n n -мерную сферу, то есть границу $(n+1)$ -мерного шара. Имеют место гомеоморфизмы между I^n и D^n , между $INT I^n$ и B^n , между границей $Fr I^n$ и сферой S^{n-1} .

Все эти гомеоморфизмы могут быть получены по одной и той же формуле, задающей отображение $f: I^n \rightarrow D^n$:

$$f(x) = \frac{x - x_0}{\left| x^* - x_0 \right|},$$

где $x_0 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{2})$; x – произвольный элемент из I^n ; x^* – граничная точка куба I^n , для которой элементы $x^* - x_0$ и $x - x_0$ лежат на одном и том же центральном луче.

Пример 10. «Проколота» сфера $S^n \setminus \{e_1\}$ (множество в R^{n+1} , получающееся удалением из сферы S^n ее «северного полюса», то есть элемента $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$) гомеоморфна R^n . Построим искомый гомеоморфизм как композицию двух гомеоморфизмов g и h . Гомеоморфизм $g: R^n \rightarrow P^n$, где P^n – гиперплоскость в R^{n+1} , имеющая уравнение $x_1 = -1$, определяется формулой $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Гомеоморфизм $h: P^n \rightarrow S^n \setminus \{e_1\}$ устанавливаем с помощью стереографического проектирования из точки e_1 ; именно, если $x \in P^n$, то $h(x) \in S^n \setminus \{e_1\}$ – точка, лежащая на том же луче, идущем из точки e_1 , что и элемент x .

Определение 6. Ретракцией называется непрерывное отображение топологического пространства на свое подпространство, для которого сужение на это подпространство тождественно. Подмножество, на которое пространство может быть ретрагировано, называется его ретрактом.

Точка любого топологического пространства всегда является его ретрактом. Множество, состоящее из двух точек, уже не всегда может быть ретрактом. Например, если пространством служит отрезок числовой прямой, то никакое подпространство, состоящее из двух точек, не есть ретракт, поскольку не может быть непрерывной функцией на отрезке, имеющей только два значения.

Предложение 8. Подмножество A в топологическом пространстве X тогда и только тогда служит его ретрактом, когда всякое непрерывное отображение $A \rightarrow Y$ продолжается до непрерывного отображения $X \rightarrow Y$, каково бы ни было топологическое пространство Y .

Доказательство

Если $g : X \rightarrow A$ – ретракция и $f : A \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, то композиция $f \circ g$ есть непрерывное продолжение отображения f на всё X . Если, наоборот, мы знаем, что всякое непрерывное отображение $A \rightarrow Y$ продолжается до непрерывного отображения на всё X , то, в частности, тождественное отображение $id : A \rightarrow A$ также обладает таким продолжением, которое и будет ретракцией $X \rightarrow A$. Утверждение доказано.

Важный класс отображений топологических пространств образуют числовые функции на этих пространствах, то есть отображения вида $X \rightarrow R$ ($R = R^1$). Над функциями можно производить арифметические операции, причем такие операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям. Проверка этого факта не представляет труда.

Пример 11. Приведем пример непрерывной числовой функции на произвольном метрическом пространстве, играющем важную роль в топологии. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, и $A \subset X$ – произвольное множество в нем. Определим функцию $r(x)$ на X по формуле $r(x) = \rho(x, A)$. Докажем непрерывность этой функции.

Пусть x – произвольно фиксированная точка в X , $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $y \in X$ – любая точка, для которой $\rho(x, y) < \varepsilon$. Для любой точки $z \in A$ $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. В силу произвольного выбора z из последнего неравенства можно заключить, что $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$ или $r(x) - r(y) \leq \rho(x, y) < \varepsilon$. В этом неравенстве x и y можно поменять местами, в силу их равноправия, и мы получим $|r(x) - r(y)| < \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции r в точке x .

Отметим, что $r(x) = 0$, если и только если $x \in \bar{A}$ (для $x \in A$ это следует по определению функции r , а для $x \in \bar{A} \setminus A$ – по непрерывности.)

Упражнения

Упражнение 1. Докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ – две непрерывные числовые функции на топологическом пространстве X , то множество $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ открыто, а множество $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ замкнуто.

Упражнение 2. Докажите, что для непрерывности отображения $f : X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in X$ вообще необходимо, а в случае, когда простран-

ство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ из X , сходящейся к x_0 , последовательность образов $\{f(x_n)\}$ сходилась к точке $f(x_0)$.

Упражнение 3. Докажите, что любая непрерывная числовая функция на бесконечном множестве, наделенном топологией Зарисского, постоянна.

Упражнение 4. Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено одно из условий:

$$1) f^{-1}(\text{Int} B) \subset \text{Int} f^{-1}(B);$$

$$2) \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

Упражнение 5. Пусть Δ_f – множество точек разрыва отображения $f: X \rightarrow Y$. Докажите, что $\Delta_f = \bigcup [f^{-1}(V) \setminus \text{Int} f^{-1}(V)] = \bigcup [\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)]$, где V пробегает систему всех открытых, а F – систему всех замкнутых множеств пространства Y .

Упражнение 6. Докажите, что если отображение $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ открыто, то функция f имеет лишь конечное число экстремумов, причем в точках минимума она принимает значение 0, в точках максимума – значение 1, а в промежутках между соседними точками экстремумов она монотонна.

Упражнение 7. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется локальным гомеоморфизмом, если у каждой точки $x_0 \in X$ существует такая открытая окрестность U_0 , что сужение $f|_{U_0}$ есть гомеоморфизм на открытую окрестность V_0 точки $f(x_0)$. Докажите, что всякий локальный гомеоморфизм есть открытое отображение. Приведите пример отображения, удовлетворяющего условиям предложения 7, но не являющегося локальным гомеоморфизмом.

Упражнение 8. Рассматривая буквы русского алфавита как подпространства из R^2 , разбейте их на классы, в каждом из которых содержатся лишь гомеоморфные друг другу буквы.

Упражнение 9. Пусть $f: X \rightarrow (Y, \tau)$ – отображение некоторого множества X в топологическое пространство Y . В X можно ввести топологию σ , являющуюся слабой из всех таких топологий, в которых f непрерывно. Она называется прообразом топологии τ при отображении f . Опишите семейство открытых множеств в топологии σ . Как можно задать базу или предбазу в (X_0, σ) ?

Упражнение 10. Пусть задано семейство $\{f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I\}$ отображений произвольного множества X в топологические пространства Y_i . Топология σ в X , являющаяся слабейшей из всех топологий, в которых непрерывны все f_i , называется проективной, или инициальной.

1. Опишите класс всех открытых множеств в (X, σ) .
2. Докажите, что отображение $g : Z \rightarrow (X, \sigma)$ любого топологического пространства Z в том и только том случае непрерывно, когда каждая из композиций $f_i \circ g$ непрерывна.

Упражнение 11. Пусть $\{f_i : (Y_i, \tau_i) \rightarrow X, i \in I\}$ – некоторое семейство отображений топологических пространств Y_i в множество X . Введите в X так называемую индуктивную (или, еще говорят, финальную) топологию ω так, чтобы она была сильнейшей из всех таких топологий, при которых отображения f_i непрерывны. Докажите, что всякое отображение $g : (X, \omega) \rightarrow (Z, \tau)$ лишь тогда непрерывно, когда все композиции $g \circ f_i$ непрерывны.

Упражнение 12. Докажите, что всякая метрика $\rho : X \times X \rightarrow R$ в множестве X есть непрерывное отображение.

Упражнение 13. Докажите, что всякое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству конечного диаметра.

Упражнение 14. Пусть A и B – два замкнутых непересекающихся множества в метрическом пространстве X . Постройте непрерывную функцию f на X , для которой $f(A) = 0$, $f(B) = 1$, а при $x \notin (A \cup B)$ должно выполняться неравенство $0 < f(x) < 1$.

§ 8. ОПЕРАЦИИ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Имеется ряд конструктивных приемов, с помощью которых, исходя из одних топологических пространств, получаем другие. Рассмотрим здесь некоторые из важных типов таких конструкций, а именно: прямое произведение пространств, фактор-пространства, склейка пространств.

Пусть (X, τ_1) , (Y, τ_2) – два топологических пространства. Декартовым произведением множеств X и Y называют множество $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$. Введем в этом множестве топологию, базу которой образуют множества вида $U \times V = \{(x, y) | x \in U, y \in V\}$, где $U \in \tau_1$,

$V \in \tau_2$ – произвольные открытые множества из топологических пространств X и Y соответственно. Чтобы убедиться, что семейство $\beta = \{U \times V\}$ может служить базой топологии, достаточно проверить выполнение условий предложения 2, § 4. Но условие 1 этого предложения выполнено, так как $X \times Y \in \beta$. А условие 2 также выполняется, поскольку, если $U_1 \times V_1 \in \beta$ и $U_2 \times V_2 \in \beta$, то $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \beta$.

Определение 1. Топология в множестве $X \times Y$, базой которой служит семейство $\beta = \{(U \times V) | U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$ называется прямым произведением топологий τ_1 и τ_2 и обозначается символом $\tau_1 \times \tau_2$. Топологическое пространство $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ называется прямым (топологическим) произведением пространств X и Y .

Замечание. Если β_1 – база в X , а β_2 – база в Y , то семейство $\beta_1 \times \beta_2 = \{(U \times V) | U \in \beta_1, V \in \beta_2\}$ также образует базу топологии $\tau_1 \times \tau_2$ (Проверьте!).

Аналогичным образом можно определить прямое произведение любого конечного числа топологических пространств $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$, введя в декартовом произведении множеств $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ топологию, базу которой представляет собой семейство $\beta = \{(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n) | U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2, \dots, U_n \in \tau_n\}$.

Пример 1. Пространство R^n можно представить как прямое произведение n экземпляров числовой прямой $R = R^1$: $R^n = R \times R \times \dots \times R$.

Пример 2. Открытым (замкнутым) n -мерным кирпичом называют прямое произведение n конечных интервалов (отрезков) числовой прямой. Куб I^n представляется в виде: $I^n = I \times I \times \dots \times I$ (n раз), где $I = [0, 1]$.

Пример 3. Двумерный тор T^2 (поверхность баранки), рассматриваемый как подпространство в пространстве R^3 гомеоморфен прямому произведению двух окружностей (то есть одномерных сфер S^1): $T^2 = S^1 \times S^1$. Прямое произведение n экземпляров окружности называется n -мерным тором (обозначается символом T^n). Его можно рассматривать как подпространство в пространстве R^{n+1} .

Пример 4. Для любого топологического пространства X цилиндром над X называют прямое произведение $X \times I$. Множества $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ называются соответственно нижним и верхним основаниями цилиндра. Очевидно, что оба основания являются ретрактами в $X \times I$. При этом рет-

рациями служат проекции, определяемые соответствиями: $(x, t) \mapsto (x, 0)$ и $(x, t) \mapsto (x, 1)$, $(x \in X, t \in I)$.

Пусть X и Y – произвольные топологические пространства. Рассмотрим отображения $p: X \times Y \rightarrow X$ и $q: X \times Y \rightarrow Y$, определяемые формулами $p(x, y) = x$; $q(x, y) = y$. Отображения p и q называют отображениями проектирования, или просто проекциями пространства $X \times Y$ на его составляющие X и Y .

Предложение 1. Отображения p и q непрерывны и открыты.

Доказательство

Проверим утверждение для p . Если U – открытое множество в X , то $p^{-1}(U) = U \times Y$ – открытое множество. Это означает непрерывность p . Если же W – произвольное открытое множество в $X \times Y$, то $U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$

для некоторого множества индексов I и для некоторых наборов открытых множеств $U_i \subset X$ и $V_i \subset Y$. Но тогда $p(U) = \bigcup_i p(U_i \times V_i) = \bigcup_i U_i$. Таким об-

разом, множество $p(U)$ открыто, что означает открытость отображения p . Утверждение доказано.

Пусть теперь $f: Z \rightarrow X \times Y$ – отображение некоторого пространства Z в пространстве $X \times Y$. Композиции $f_x = p \circ f$ и $f_y = q \circ f$ назовем компонентами отображения f .

Предложение 2. Отображение $f: Z \rightarrow X \times Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда его компоненты f_x и f_y непрерывны.

Доказательство

Необходимость очевидна, так как композиция непрерывных отображений непрерывна.

Достаточность. Пусть $f_x: Z \rightarrow X$ и $f_y: Z \rightarrow Y$ – непрерывные отображения. Если $U \subset X$ и $V \subset Y$ – открытые множества, то $f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)) = f^{-1}(p^{-1}(U)) \cap f^{-1}(q^{-1}(V)) = f_x^{-1}(U) \cap f_y^{-1}(V)$. Таким образом, множество $f^{-1}(U \times V)$ открыто. Но поскольку множества вида $(U \times V)$, где U и V – открытые множества соответственно в X и Y , составляют базу в $X \times Y$, то в силу предложения 1 отображение f непрерывно. Утверждение доказано.

Отметим, что любая пара отображений $\varphi: Z \rightarrow X$ и $\psi: Z \rightarrow Y$ определяет однозначно отображение $f: Z \rightarrow X \times Y$ по формуле

$f(z) = (\varphi(z), \psi(z))$. При этом отображения φ и ψ совпадают с компонентами отображения f , предложение 2 допускает следующую перефразировку.

Предложение 2'. Отображения $\varphi: Z \rightarrow X$ и $\psi: Z \rightarrow Y$ тогда и только тогда определяют непрерывное отображение $f: Z \rightarrow X \times Y$, когда они сами непрерывны.

Следует отметить, что всё сказанное выше о прямом произведении двух пространств легко перефразируется и остается справедливым для прямого произведения нескольких пространств. В топологическом произведении $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ определена и непрерывна проекция $p_i: (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \rightarrow X_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Задание непрерывного отображения $f: Z \rightarrow (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ равносильно заданию семейства непрерывных отображений $\varphi_i: Z \rightarrow X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые связываются с f формулой $\varphi_i = p_i \circ f$ и называются его компонентами.

Предложение 3. Пусть X и Y – топологические пространства и $A \subset X$, $B \subset Y$ – произвольные множества. В пространстве $X \times Y$ выполнено соотношение: $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Доказательство

Поскольку $\overline{A} \times Y = p^{-1}(\overline{A})$ и $X \times \overline{B} = q^{-1}(\overline{B})$ – замкнутые множества в $X \times Y$ (в силу непрерывности проекций p и q) и $\overline{A} \times \overline{B} = (\overline{A} \times Y) \cap (X \times \overline{B})$, то множество $\overline{A} \times \overline{B}$ замкнуто. Покажем, что подмножество $A \times B$ плотно в $\overline{A} \times \overline{B}$.

Пусть $(x_0, y_0) \in \overline{A} \times \overline{B}$ – произвольная точка, и W – любая ее окрестность. В силу предложения 1 §4 существуют такие открытые множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, для которых $x_0 \in U$ и $y_0 \in V$, $U \times V \subset W$. Но окрестность U точки x_0 содержит хотя бы одну точку $x' \in A$, а окрестность точки y_0 – хотя бы одну точку $y' \in B$. Значит окрестность $U \times V$ точки (x_0, y_0) , а следовательно, и окрестность W содержит точку $(x', y') \in A \times B$. Это и означает плотность множества $A \times B$ в $\overline{A} \times \overline{B}$, откуда и следует равенство $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Предложение доказано.

Следствие 1. Множество $A \times B$ тогда и только тогда замкнуто в $X \times Y$, когда A замкнуто в X и B замкнуто в Y .

Следствие 2. В пространстве $X \times Y$ множество $A \times B$ тогда и только тогда всюду плотно, когда A плотно в X и B плотно в Y .

Рассматривается также прямое (топологическое) произведение любого семейства пространств $\{X_i \mid i \in I\}$. При этом в декартовом произведе-

нии $\prod_{i \in I} X_i$ этих множеств, то есть в множестве всевозможных наборов $\{x_i \mid x_i \in X_i\}, i \in I$, вводится топология, базой которой служит семейство всевозможных подмножеств вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i = X_i$ для всех i , кроме конечного числа, для конечного же числа индексов i множества U_i могут быть произвольными открытыми подмножествами в X_i .

Пример 5. Обобщением пространства R^n является пространство $R^\infty = \prod_{n \in N} R_n$, где $R_n = R^1$ при каждом n . Это пространство называется пространством Фреше. Обобщением n -мерного куба служит так называемый гильбертов кирпич $I^\infty = \prod_{n \in N} I_n$, где $I_n = I$ при всех n .

Легко проверить, что все сказанное выше о прямом произведении двух или нескольких пространств обобщается на случай прямого произведения любого семейства пространств. В частности важно, что задание непрерывного отображения $f: Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ равносильно заданию семейства непрерывных отображений $\varphi_i: Z \rightarrow X_i$, для которых выполнены соотношения: $\varphi_i = p_i \circ f$, где p_i – проекция прямого произведения пространств на его i -ю компоненту.

Перейдем теперь к изучению операции факторизации топологических пространств. Напомним, что если множество A разбито на непересекающиеся подмножества $M_i, i \in I$, то в A можно ввести отношение эквивалентности R , так что $a R b$ (читаем: a эквивалентно b по отношению R), если $a \in M_i$ и $b \in M_i$ для одного и того же индекса i . При этом множества M_i называются классами эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности называется фактор-множеством множества A по эквивалентности R и обозначается A/R , а отображение $\pi: A \rightarrow A/R$, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ класс эквивалентности $\overset{\circ}{a}$, содержащий a , называют фактор-отображением по R .

Пусть (X, τ) – топологическое пространство, и R – некоторое отношение эквивалентности в множестве X . В множестве X/R введем топологию, в которой семейство τ/R открытых множеств образуют множества V , для которых фактор-прообразы $\pi^{-1}(V)$ открыты в X . Топология τ/R в множестве X/R называется фактор-топологией топологии τ по эквивалентности R . Эта

топология является сильнейшей из всех таких топологий, в которых фактор-отображение π непрерывно.

Определение 2. Топологическое пространство $(X/R, \tau/R)$, полученное путем введения в фактор-множестве X/R фактор-топологии τ/R , называется фактор-пространством пространства X по отношению эквивалентности R .

Имеет место легко проверяемое предложение 4.

Предложение 4. Открытыми (замкнутыми) в X/R множествами являются те и только те множества, которые служат образами открытых (замкнутых) насыщенных множеств при фактор-отображении $\pi: X \rightarrow X/R$ (насыщенность множества A означает, что $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$).

Операция факторизации множеств обладает свойством транзитивности. Именно, если в множестве X/R ввести некоторое отношение эквивалентности S , то каждый S -класс эквивалентности состоит из некоторого семейства R -классов эквивалентности множества X . Объединения классов, составляющих это семейство, образуют классы новой эквивалентности в X , и это новое отношение эквивалентности мы обозначим через T . Выполняется соотношение $(X/R)/S = X/T$. При этом фактор-отображение $\pi_T: X \rightarrow X/T$ представляется композицией фактор-отображений $\pi_R: X \rightarrow X/R$ и $\pi_S: X/R \rightarrow (X/R)/S$, то есть $\pi_T = \pi_S \circ \pi_R$. Оказывается, что для топологического пространства X отмеченное здесь совпадение фактор-множеств можно понимать как гомеоморфизм фактор-пространств.

Действительно, пусть W – открытое множество в X/T . Тогда множество $U = \pi_T^{-1}(W)$ в X открыто и насыщено относительно T и, тем более, относительно R . Открытое в силу предложения 4, множество $V = \pi_R(U)$ в X/R будет, очевидно, насыщенным относительно S . Отсюда следует, что множество $W = \pi_S(V)$ открыто в $(X/R)/S$. Наоборот, если W открыто в $(X/R)/S$, то множество $U = \pi_R^{-1}(\pi_S^{-1}(W))$ в X открыто и насыщено относительно T . Поэтому множество $W = \pi_T(U)$ открыто в X/T . Тем самым и установлен гомеоморфизм между X/T и $(X/R)/S$.

Важный случай представляет собой факторизация топологического пространства, определяемая непрерывным отображением. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторые отображения. В множестве X при этом определяется отношение эквивалентности R , при котором $x_1 R x_2$, если $f(x_1) = f(x_2)$. Определено также отображение $h_f: X/R \rightarrow Y$, при котором $h_f(\overset{\circ}{x}) = f(\overset{\circ}{x})$, где $\overset{\circ}{x} \in X/R$ –

произвольный элемент, а x – любой представитель R -класса эквивалентности $\overset{\circ}{x}$. Отображение h_f инъективно, в то время как отображение $\pi: X \rightarrow X/R$ сюръективно. Отображение $f: X \rightarrow Y$ представляется в виде композиции $f = h_f \circ \pi$. Это представление отображения f называют его разложением на сюръективное и инъективное отображения.

Предложение 5. Если X и Y – топологические пространства, то отображение f непрерывно одновременно с отображением h_f .

Доказательство

Требуется лишь убедиться, что из непрерывности f следует непрерывность h_f . Пусть W – открытое множество в Y , и $V = h_f^{-1}(W)$, $U = f^{-1}(W)$. Из непрерывности f следует, что U открыто, а поскольку $\pi^{-1}(V) = U$, то по определению фактор-топологии и V открыто. Это означает непрерывность отображения h_f . Предложение доказано.

Если в X задано отношение эквивалентности R , то отображение $f: X \rightarrow Y$ будем называть согласованным с эквивалентностью R , если из соотношения $x_1 R x_2$ следует, что $f(x_1) = f(x_2)$.

Предложение 6. Если непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ согласовано с эквивалентностью R в пространстве X , то существует непрерывное отображение $g: X/R \rightarrow Y$, для которого $f = g \circ \pi_R$.

Доказательство

Разложим отображение f на сюръективную и инъективную составляющие: $f = h_f \circ \pi_T$, где под T понимается отношение эквивалентности в X , порожденное отображением f . Далее заметим, что поскольку каждый R -класс эквивалентности в X содержится в некотором T -классе эквивалентности, то имеем отображение $\phi: X/R \rightarrow X/T$, которое порождает в X/R отношение эквивалентности S , для которой фактор-множество (X/R) фактор S естественно отождествляется с фактор-множеством X/T , причем $\pi_T = \pi_S \circ \pi_R$. Тогда, как было показано выше, фактор-пространства X/T и (X/R) фактор S гомеоморфны, и отображение π_T представляется как композиция непрерывных отображений π_R и π_S . Теперь имеем $f = h_f \circ \pi_S \circ \pi_R$, и, обозначив отображение $h_f \circ \pi_S$ через g , получаем $f = g \circ \pi_R$. Предложение доказано.

Приведем некоторые примеры топологических пространств, представляющих интерес в топологии и конструирующиеся как факторпространства самых простых топологических пространств.

Пример 6. Фактор-пространства квадрата. Пусть $I^2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ – квадрат, расположенный в координатной плоскости Oxy . Через R_1 обозначим отношение эквивалентности в множестве I^2 , при котором в классе эквивалентности каждой из точек (x, y) , для которых $0 < x < 1$, является одноточечным (состоит лишь из самой точки), а класс эквивалентности для каждой из точек вида $(0, y)$ содержит две точки: $(0, y)$ и $(1, y)$. Таким образом, в квадрате отождествляются (склеиваются одна с другой) соответствующие точки двух противоположных сторон. Нетрудно понять, что полученное при этом пространство I^2 / R_1 гомеоморфно цилиндру, построенному над окружностью. Через R_2 обозначим эквивалентность, при которой пространство I^2 / R_2 также получается парным отождествлением точек, лежащих на двух противоположных сторонах квадрата. Но теперь каждая точка вида $(0, y)$ склеивается с точкой $(1, 1-y)$. Попросту говоря, квадрат «перекручивается» так, чтобы верхняя точка правой стороны квадрата заняла положение ее нижней точки, а нижняя – положение верхней, а затем происходит склеивание точек левой и правой сторон квадрата, оказавшихся на одной высоте. Полученное факторпространство называется листом Мёбиуса. Для эквивалентности R_3 в I^2 , в которой отождествляются соответствующие точки вертикальных сторон, то есть точки вида $(0, y)$ с точками вида $(1, y)$, а также соответствующие точки горизонтальных сторон, то есть точки вида $(x, 0)$ с точками вида $(x, 1)$, факторпространство I^2 / R_3 гомеоморфно тору T^2 . Пусть далее R_4 – эквивалентность в I^2 , при которой отождествляются точки вида $(0, y)$ с точками вида $(1, 1-y)$, а точки вида $(x, 0)$ – с точками вида $(x, 1)$. Факторпространство I^2 / R_4 называется бутылкой Клейна. Пусть, наконец, R_5 – отношение эквивалентности в I^2 , при которой точки вида $(0, y)$ отождествляются с точками вида $(1, 1-y)$, а точки $(x, 0)$ – с точками $(1-x, 1)$. Факторпространство I^2 / R_5 называется проективной плоскостью.

Пример 7. Проективную плоскость можно реализовать и другими способами. Во-первых, отметим, что квадрат в предыдущем примере можно заменить кругом или полусферой и на ограничивающей окружности склеить диаметрально противоположные точки. Ясно также, что вместо полусферы можно взять полную сферу и каждую ее точку отождествить с

диаметрально противоположной точкой. Наконец, можно вместо сферы взять множество $R^3 \setminus \{0\}$, получаемое из трехмерного пространства R^3 удалением точки O , в котором отождествляются все точки, лежащие на одной прямой, проходящие через точку O . Вводя аналогичными способами эквивалентности в n -мерном кубе I^n , в n -мерном шаре D^n , в n -мерной сфере S^n или в множестве $R^{n+1} \setminus \{0\}$ и беря фактор-пространство каждого из этих пространств по введенной эквивалентности, мы во всех этих случаях получим гомеоморфные пространства, то есть с топологической точки зрения одно и то же пространство, которое называют n -мерным проективным пространством (мы будем обозначать его через P^n).

Пусть X и Y – топологические пространства, такие, что множества X и Y не пересекаются. Введем в объединении $X \cup Y$ топологию, в которой совокупность открытых множеств образуют множества вида $U \cup V$, где $U \subset X$, $V \subset Y$ – открытые множества. Определенное таким образом топологическое пространство называют суммой пространств X и Y и обозначают $X \cup Y$. Пусть A – некоторое подмножество в X и $f: A \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Введем в $X \cup Y$ эквивалентность R , в которой $aRf(a)$ для каждого $a \in A$, а классы эквивалентности для всех точек множества $(X \cup Y) \setminus A \cup f(A)$ одноточечны.

Определение 3. Фактор-пространство $(X \cup Y)/R$ называют пространством, полученным склеиванием X и Y , определяемым отображением f . (Обозначается $X \cup_f Y$).

Пример 8. Пусть X и Y – два круга, ограниченных окружностями S_1 и S_2 соответственно, и $f: S_1 \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, осуществляющее взаимно однозначное наложение S_1 на S_2 . Очевидно, что $X \cup_f Y$ гомеоморфно сфере S^2 .

Пример 9. Пусть S – сфера с двумя дырами, ограниченными окружностями S_1 и S_2 , а Y – цилиндр $S \times [0;1]$, построенный над окружностью S . Пусть $f: (S_1 \cup S_2) \rightarrow Y$ таково, что S_1 взаимно однозначно отображается на окружность $S \times \{0\}$, а S_2 – также взаимно однозначно на окружность $S \times \{1\}$. Пространство $X \cup_f Y$, получаемое здесь, называют сферой с ручкой.

Упражнения

Упражнение 1. Докажите, что множество $R^n \setminus \{0\}$ гомеоморфно прямому произведению $S^{n-1} \times R^1$.

Упражнение 2. Докажите, что если X и Y – произвольные топологические пространства, $A \subset X$ и $B \subset Y$ – их произвольные подмножества, то выполняются соотношения:

$$1) \operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int}A \times \operatorname{Int}B;$$

$$2) \operatorname{Fr}(A \times B) = \left[(\operatorname{Fr}A) \times \overline{B} \right] \cup \left[\overline{A} \times (\operatorname{Fr}B) \right].$$

Упражнение 3. Докажите, что в топологическом произведении $\prod_{i \in I} X_i$ множества вида $U = \prod_{i \in I} U_i$, где U_i – открытое множество в X_i , не обязательно открыто. Опишите случаи, когда множества U такого типа открыты.

Упражнение 4. Докажите, что произведение $\prod_n X_n$ не более чем счетного семейства топологических пространств удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только том случае, когда этим свойством обладает каждое из множеств X_n .

Упражнение 5. Докажите, что произведение $\prod_n X_n$ не более чем счетного семейства топологических пространств сепарабельно, когда таковым является каждое из топологических пространств X_n .

Упражнение 6. Пусть $X = \prod_{i \in I} X_i$ – топологическое произведение пространств X_i , и пусть K – некоторое подмножество в I . Докажите, что отображение $X \rightarrow \prod_{i \in K} X_i$, определяемое семейством проекций $X \rightarrow X_i, i \in K$ – открытое сюръективное отображение.

Упражнение 7. Докажите, что если A – ретракт для X , а B – ретракт для Y , то $A \times B$ – ретракт для $X \times Y$.

Упражнение 8. Докажите, что в топологическом произведении $\prod_{i \in I} X_i$ каждое из подпространств X_i является ретрактом.

Упражнение 9. Докажите, что топологическое произведение $\prod_{i \in I} X_i$ обладает счетной базой тогда и только тогда, когда все X_i обладают счетной базой, причем топология во всех X_i , кроме счетного их множества, тривиальна.

Упражнение 10. Пусть R и S – отношения эквивалентности в пространствах X и Y соответственно и пусть непрерывное отображение

$f: X \rightarrow Y$ согласовано с отношениями R и S , то есть из эквивалентности элементов $x_1, x_2 \in X$ по R следует эквивалентность $f(x_1)$ и $f(x_2)$ по S . Докажите, что получаемое при этом естественное отображение $f^*: X/R \rightarrow Y/S$ непрерывно.

Упражнение 11. Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ непрерывно и сюръективно, а $h: X/R \rightarrow Y/S$ – факторизация отображения f , то h является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

- 1) f – образ всякого открытого и насыщенного по R множества из X открыт в Y ;
- 2) образ всякого замкнутого и насыщенного по R множества из X замкнут в Y .

Упражнение 12. Докажите, что, отождествив в цилиндре $S^1 \times I$ точку $(z, 0)$ с точкой $(z, 1)$ для каждого $z \in S^1$, получим пространство, гомеоморфное тору T^2 ; если же отождествить точку $(z, 0)$ с точкой $(z^{-1}, 1)$, то получим пространство, гомеоморфное бутылке Клейна (через z^{-1} обозначается точка, диаметрально противоположная к z).

Упражнение 13. Докажите, что пространство, полученное путем склеивания границ листа Мебиуса и круга, гомеоморфно проективной плоскости.

Упражнение 14. Пусть $X = B^n$, $A = \text{Fr} B^n = S^{n-1}$, $Y = \{y_0\}$, $f: S^{n-1} \rightarrow \{y_0\}$. Докажите, что склеенное пространство гомеоморфно сфере S^n , то есть что приклеивание к одноточечному множеству n -мерного шара по его границе дает пространство, гомеоморфное S^n .

§ 9. НЕКОТОРЫЕ ИЗ ВАЖНЕЙШИХ СВОЙСТВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ: ОТДЕЛИМОСТЬ, СВЯЗНОСТЬ, КОМПАКТНОСТЬ

Чтобы из класса всевозможных топологических пространств выделить класс пространств, обладающих свойствами, близкими с какой-то точки зрения к привычным свойствам пространства R^n , требуют, чтобы пространства удовлетворяли той или иной из так называемых аксиом отделимости. Наиболее употребительной из этих аксиом является вторая аксиома отделимости.

Аксиома T_2 (вторая аксиома отделимости). Любые две точки пространства обладают непересекающимися окрестностями.

Определение 1. Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2 , называются отделимыми, или хаусдорфовыми. Топология этих пространств называется отделимой, или хаусдорфовой.

Примерами хаусдорфовых пространств служат все метрические пространства и, в частности, пространства R^n .

Отметим, что в хаусдорфовом пространстве X каждое одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто. Действительно, из аксиомы T_2 сразу следует, что любая точка множества $X \setminus \{x\}$ является внутренней, и значит, это множество открыто.

Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Каждый ретракт в хаусдорфовом пространстве есть замкнутое множество.

Доказательство

Пусть A – ретракт в хаусдорфовом пространстве X , и $h: X \rightarrow A$ – ретракция. Возьмем произвольную точку b в X , не содержащуюся в A . Поскольку $h(b) \in A$, то точки b и $h(b)$ различны. Выберем окрестность U_1 точки b и окрестность V точки $h(b)$ так, чтобы $U_1 \cap V = \emptyset$. Затем найдем окрестность U_2 точки b , для которой $h(U_2) \subset V$, что возможно в силу непрерывности h . Далее, пусть $U = U_1 \cap U_2$. Окрестность U точки b обладает теми свойствами, что $U \cap V = \emptyset$ и $h(U) \subset V$. Из этих свойств множества U можно заключить, что для любого $x \in U$ $h(x) \neq x$. Но это значит, что $U \cap A = \emptyset$. Таким образом, мы показали, что точка b обладает окрестностью, не пересекающейся с A . Это означает, что b не является точкой прикосновения для A и что все точки прикосновения множества A содержатся в A . Утверждение доказано.

Для двух хаусдорфовых пространств имеет место следующий простой факт.

Предложение 2. Прямое произведение любого семейства хаусдорфовых пространств – хаусдорфово пространство.

Доказательство

Проведем для случая произведения $X \times Y$ двух пространств, предоставляя общий случай читателю.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – две различные точки из $X \times Y$. При этом $x_1 \neq x_2$ либо $y_1 \neq y_2$. Если, например, $x_1 \neq x_2$, то выберем в X открытые непересекающиеся окрестности U и V точек x_1 и x_2 соответственно. Тогда множества $U \times Y$ и $V \times Y$ оказываются открытыми непересекающимися окрестностями соответственно точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Утверждение доказано.

Если X и Y – топологические пространства и $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, то множество $F = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}$ в пространстве $X \times Y$ называется графиком отображения f . Легко видеть, что соответствие $x \mapsto (x, f(x))$ определяет гомеоморфизм $h_f: X \rightarrow F$. В самом деле, во-первых, ясно, что h_f взаимнооднозначно; во-вторых, поскольку компонентами отображения h_f служат непрерывные отображения $id: X \rightarrow X$ и $y = f(x)$, то h_f непрерывно; в-третьих, поскольку $h_f^{-1}: F \rightarrow X$ есть сужение проекции $p: X \times Y \rightarrow X$, то и h_f^{-1} непрерывно.

Предложение 3. Если пространства X и Y хаусдорфовы, то график непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ замкнуты в $X \times Y$.

Доказательство

В силу предложения 1 достаточно убедиться в том, что F – ретракт в $X \times Y$. А это, в свою очередь, вытекает из предложения 8 §7, поскольку, если $\varphi: F \rightarrow Z$ – непрерывное отображение, то композиция $g = \varphi \circ h_f \circ p: X \times Y \rightarrow Z$ на подпространстве F совпадает с φ . Предложение доказано.

Отметим еще, что если R – отношение эквивалентности в топологическом пространстве, то для хаусдорфовости пространства X/R необходима замкнутость каждого класса эквивалентности в X . Это ясно, так как в хаусдорфовом пространстве X/R одноточечные множества замкнуты, а, значит, и их фактор-прообразы замкнуты.

Необходимое и достаточное условие хаусдорфовости фактор-пространства дает следующее.

Предложение 4. Для того чтобы фактор-пространство X/R топологического пространства X по отношению эквивалентности R было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух различных

классов эквивалентности в X существовали два непересекающихся открытых насыщенных множества, содержащих по одному из этих классов.

Доказательство предоставляем читателю в виде легкого упражнения.

Остановимся теперь еще на одном важном свойстве топологических пространств – свойстве связности.

Определение 2. Топологическое пространство называется связным, если оно не может быть представлено в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых или, что равносильно, замкнутых множеств. В противном случае пространство называется несвязным.

Можно также перефразировать определение связности.

Определение 2'. Топологическое пространство называется связным, если в нем нет одновременно открытого и замкнутого множества, кроме пустого и самого пространства.

Пример 9. Тривиальным примером связного пространства служит одноточечное пространство, а несвязного – пространство с дискретной топологией, состоящей более чем из одной точки.

Пример 10. Примерами несвязных топологических пространств могут служить:

1) подпространство в R^n , представляющее собой объединение некоторого семейства попарно непересекающихся n -мерных шаров, состоящих более чем из одного элемента;

2) подпространство в R^n , получающееся удалением из него $(n-1)$ -мерного подпространства (в частности, прямая с удаленной точкой).

Нетривиальный пример связного пространства рассматривается в следующем утверждении.

Теорема 1. Числовая прямая $R = R^1$ является связным топологическим пространством.

Доказательство

Предположим противное. Пусть R несвязно. Тогда существуют два таких открытых непустых множества $A \subset R$ и $B \subset R$, для которых $A \cup B = R$ и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $a \in A$ и $b \in B$ – две произвольно выбранные точки. Пусть для определенности $a < b$. Введем еще в рассмотрение множество $C = \{x \mid x \in A, x < b\}$. Будучи ограниченным сверху, множество C имеет точную верхнюю грань c . При этом должно быть выполнено одно из двух соотношений: $c \in A$ или $c \in B$. Предположим, что выполнено первое из этих соотношений. Но множество A открыто в R , и так как множество всевозможных интервалов образует базу в R , то по предложению 2 в §4 существует интервал U , для которого $c \in U \subset A$. В интервале U найдется

точка $d > C$ и поскольку $d \in C$, то мы получили противоречие с тем, что $c = \sup C$. Это означает, что $c \notin A$. Следовательно, $c \in B$. Но B открыто, и, значит, в нем содержится интервал V с центром в точке c . Пусть $e \in V$ – такая точка, что $e < c$. Тогда ε -окрестность точки c для $\varepsilon = c - e$ не содержит точек A и, тем более, точек C . Это снова противоречит тому, что $c = \sup C$. Итак, точка c не может содержаться ни в A , ни в B , а следовательно, допущение о несвязности множества R ведет к противоречию. Теорема доказана.

Предложение 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение и X связно. Тогда подпространство $f(X)$ в Y связно.

Доказательство

Предположим противное. Тогда пространство $Z = f(X)$ разбивается на непустые открытые подмножества A и B , для которых $A \cap B = \emptyset$. Но при этом мы получаем, что множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ – непересекающиеся непустые открытые подмножества в X , объединение которых совпадает с X . Это противоречит тому, что X связно. Утверждение доказано.

Следствие 1. Если одно из двух гомеоморфных пространств связно, то и другое связно. Отметим, что свойства топологических пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются топологическими инвариантами. Таким образом, связность пространства – топологический инвариант.

Следствие 2. Всякий интервал на числовой прямой представляет собой связное пространство.

Следствие 3. Фактор-пространство связного топологического пространства по некоторой эквивалентности связно.

Предложение 6. Если множество A всюду плотно в топологическом пространстве X и A как подпространство в X связно, то X тоже связно.

Доказательство

Предположим, что это не так, и пусть пространство X разбито на два непустых непересекающихся замкнутых множества Y и Z . Но тогда множество $B = Y \cap A$ должно быть плотно в Y , и множество $C = Z \cap A$ плотно в Z . Это значит, что множества B и C , на которые разбилось множество A , непусты, причем они замкнуты в подпространстве A . Но это противоречит связности A . Предложение доказано.

Следствие. Любой отрезок и любой полуинтервал на числовой прямой является связным пространством.

Предложение 7. Пространство, получаемое путем склеивания двух связных пространств, связно.

Доказательство

Действительно, склейка двух пространств X и Y происходит путем факторизации суммы пространств $X \cup Y$ по некоторому отношению эквивалентности R . Обозначим склеенное пространство через $Z: Z = (X \cup Y)/R$. Пусть $X_1 = \pi(X)$ и $Y_1 = \pi(Y)$, где $\pi: (X \cup Y) \rightarrow Z$ – фактор-отображение. В силу непрерывности π подпространства X_1 и Y_1 пространства Z связны и имеют непустое пересечение. При этом $Z = X_1 \cup Y_1$. Если допустить, что пространство Z разделено на два непустых открытых множества, то, по крайней мере, одно из подпространств X_1 и Y_1 разделится на два пустых открытых множества, что невозможно. Теорема доказана.

Предложение 8. Топологическое произведение $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ связных пространств связно.

Доказательство приведем для двух сомножителей, после чего общий случай будет легко доказываться индуктивным методом. Пусть X и Y – связные топологические пространства. Предположим, что пространство $X \times Y$ несвязно и разбито на два непустых открытых множества A и B , для которых $A \cap B = \emptyset$. Выберем в A точку (x_0, y_0) и пусть $X_1 = X \times \{y_0\}$. Поскольку подпространство X_1 гомеоморфно X , оно не может быть разбито на два непустых открытых непересекающихся множества, и, следовательно, не может одновременно пересекаться и с A , и с B . Но так как X_1 содержит одну точку из A , то $X_1 \subset A$. Теперь возьмем произвольную точку $(x, y) \in X \times Y$ и рассмотрим подпространство $Y_1 = \{x\} \times Y$. Связное подпространство Y_1 пересекается с X_1 в точке $(x, y_0) \in A$, из чего делаем вывод, что $Y_1 \subset A$. Таким образом, любая точка пространства $X \times Y$ содержится в A , $B = \emptyset$. Отсюда следует связность $X \times Y$. Утверждение доказано.

Теперь на основе теоремы 1, а также следовавших предложений мы можем указать достаточно широкий круг пространств, обладающих свойством связности. К ним относятся: пространство R^n , n -мерный куб, D^n , n -мерная сфера S^n , проективное пространство P^n , тор T^n , а также лист Мебиуса, бутылка Клейна, сфера с ручками и т.д.

Уделим, наконец, внимание еще одному важнейшему классу топологических пространств, а именно свойству компактности.

Определение 3. Топологическое пространство X называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Ясно, что если некоторое подпространство Y пространства X компактно, то это означает, что из любого покрытия открытыми в X множествами пространства Y можно выбрать конечное подпокрытие.

Компактное хаусдорфово пространство обычно называют компактом.

Пример 11. Из известной теоремы Бореля-Лебега, заключающейся в том, что любое покрытие отрезка числовой оси интервалами содержит конечное подпокрытие, следует, что отрезок представляет собой компакт.

Пример 12. Пространство с дискретной топологией компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного числа точек.

Предложение 9. Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство

Пусть Y – компакт в хаусдорфовом пространстве X , и пусть x_0 – любая точка из $X \setminus Y$. Для каждой точки $y \in Y$ можно фиксировать открытую окрестность U_y точки x , и открытую окрестность V_y точки y такие, что $U_y \cap V_y = \emptyset$. При этом семейство $\{V_y \mid y \in Y\}$ представляет собой покрытие компакта Y открытыми множествами из X . Оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{y_k} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$. Тогда множества $U = \bigcap_k U_{y_k}$ и $V = \bigcup_k V_{y_k}$ не пересекаются, причем $Y \subset V$. Таким образом, найдена окрестность U точки x_0 , не содержащая точек из Y , что и доказывает утверждение.

Предложение 10. Замкнутое подпространство Y компактного пространства X компактно.

Доказательство

Пусть $\{U_i \mid i \in I\}$ – некоторое открытое покрытие множества Y . Добавим к нему еще открытое множество $U_0 = X \setminus Y$. Тогда получим открытое покрытие пространства X . Из него выберем конечное подпокрытие и удалим из этого подпокрытия множество U_0 , если оно еще сохранилось. Оставшееся семейство открытых множеств будет являться конечным подпокрытием покрытия $\{U_i\}$ множества Y . Утверждение доказано.

Предложение 11. Образ компактного пространства при непрерывном отображении компактен.

Доказательство

Пусть X – компактное пространство, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение в произвольное топологическое пространство Y и $\{U_i | i \in I\}$ – открытое покрытие множества $f(X)$. Ясно, что семейство множеств $V_i = f^{-1}(U_i)$ образует открытое покрытие пространства X . Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{V_k | k = 1, 2, \dots, n\}$. Тогда множества $U_k = f(V_k)$ в Y образуют конечное подпокрытие покрытия $\{U_i\}$ множества $f(X)$, что и доказывает утверждение.

Предложение 12. Взаимнооднозначное непрерывное отображение f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y есть гомеоморфизм.

Доказательство

Достаточно доказать, что отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно или равносильно, что отображение f открыто. Пусть U – открытое множество в X . Тогда множество $F = X \setminus U$ замкнуто и, следовательно, компактно (предложение 10). При этом множество $E = f(F)$ компактно (предложение 11) и замкнуто в Y (предложение 9). А поэтому множество $f(U) = Y \setminus E$ открыто, что и доказывает утверждение.

Предложение 13. Компактное метрическое пространство обладает счетной базой.

Доказательство

Ясно, что для каждого натурального n компактное метрическое пространство X можно покрыть конечным числом открытых шаров радиуса $1/n$. Счетную базу в X образуют тогда объединения конечных пересечений этих открытых шаров. Утверждение доказано.

Предложение 14. Компактное метрическое пространство ограничено.

Доказательство

Пусть X – метрический компакт, и пусть $\gamma = \{B(x_k, 1) | k = 1, 2, \dots, n\}$ – его конечное открытое покрытие шарами радиуса 1 с центрами в точках x_k . Пусть $R = \max_{k', k''} \rho(x_{k'}, x_{k''})$, где каждый из индексов k' и k'' пробегает значение $1, 2, \dots, n$. Если теперь $x, y \in X$ и $x \in B(x_{k'}, 1)$, а $y \in B(x_{k''}, 1)$, то $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_{k'}) + \rho(x_{k'}, x_{k''}) + \rho(x_{k''}, y) \leq R + 2$. Утверждение доказано.

Предложение 15. Всякая непрерывная функция $f: X \rightarrow R$, определенная на компактном топологическом пространстве X , ограничена и достигает своего наибольшего и своего наименьшего значений.

Доказательство

Пусть $F \subset R$ – множество значений функции. Так как F компактно, то оно ограничено и замкнуто. Из замкнутости F следует, что оно содержит все свои точки прикосновения. В частности F содержит точки $a = \inf f(x)$ и $b = \sup f(x)$. Предложение доказано.

Предложение 16. Каждый n -мерный куб $Q \subset R^n$ является компактом.

Доказательство

Пусть γ – открытое покрытие куба Q . Предположим, что оно не содержит никакого конечного подпокрытия. Куб Q может быть очевидно разбит на 2^n кубов с вдвое меньшей стороной, и среди них должен быть куб Q_1 , который также не покрывается конечным числом элементов из γ . Затем мы возьмем аналогичное разбиение куба Q_1 и найдем среди 2^n более мелких кубов куб Q_2 , не покрываемый конечным числом элементов из γ . Продолжая этот процесс, мы найдем последовательность кубов $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, каждый из которых вложен в предыдущий, имеет по сравнению с ним, вдвое меньшую сторону и никакой из них не покрывается конечным числом множеств семейства γ . Но кубы этой последовательности имеют общую точку q , содержащуюся в некотором элементе $U \in \gamma$. Вместе с q в множестве U должен содержаться и некоторый куб Q_n с достаточно малой стороной. Получающееся противоречие доказывает несостоятельность предположения, что γ не содержит конечного подпокрытия куба Q . Утверждение доказано.

Предложение 17. Каждое ограниченное замкнутое множество в R^n компактно.

Доказательство очевидно, так как всякое ограниченное замкнутое множество в R^n можно заключить в некоторый куб, который компактен.

Упражнения

Упражнение 1. Докажите, что бесконечное множество, наделенное топологией Зариского, не является хаусдорфовым пространством.

Упражнение 2. Докажите, что никакая последовательность в хаусдорфовом пространстве не может иметь более одного предела.

Упражнение 3. Докажите, что если x_0 – предельная точка, для некоторого подмножества M хаусдорфова пространства, то любая окрестность этой точки содержит бесконечное число точек из M .

Упражнение 4. Докажите, что пространство X является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда в пространстве $X \times X$ замкнута диагональ $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Упражнение 5. Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ – два непрерывных отображения топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y , то множество $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X .

Упражнение 6. Докажите, что график каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, где Y – хаусдорфово пространство, замкнуто в пространстве $X \times Y$.

Упражнение 7. Докажите, что необходимым и достаточным условием хаусдорфовости пространства X служит существование для любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ некоторого хаусдорфова пространства Y и непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, для которых $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Упражнение 8. Докажите, что пространство X является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in X$ пересечение ее замкнутых окрестностей равно $\{x_0\}$.

Упражнение 9. Докажите, что хаусдорфовость пространства равносильна тому, что каждая его точка имеет замкнутую окрестность, не содержащую любую другую заранее заданную точку.

Упражнение 10. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве любая конечная система точек обладает попарно непересекающимися окрестностями.

Упражнение 11. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение пространства X в хаусдорфово пространство Y , а R_f – эквивалентность в X , порожденная этим отображением. Докажите, что фактор-пространство X/R_f есть хаусдорфово пространство.

Упражнение 12. Прямая R является связным некомпактным пространством. Удаление из R какой-нибудь точки приводит к образованию несвязного пространства M , гомеоморфного объединению двух непересекающихся прямых. Укажите, каким способом можно, присоединив к M снова одну точку, получить связный компакт.

Упражнение 13. Покажите, что бесконечное множество, наделенное топологией Зариского, компактно.

Упражнение 14. Система множеств называется центрированной, если каждая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение. Докажите, что для компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.

Упражнение 15. Система $\mathcal{F}$ непустых подмножеств множества X называется фильтром в X , если она замкнута относительно конечных пересечений своих элементов и если надмножество любого множества системы $\mathcal{F}$ содержится в $\mathcal{F}$. Точка x_0 в топологическом пространстве X называется точкой прикосновения фильтра $\mathcal{F}$, если $x_0 \in \overline{F}$ для каждого $F \in \mathcal{F}$. Докажите, что в компактном пространстве всякий фильтр имеет точку прикосновения.

Упражнение 16. Покажите, что в компактном пространстве множества $\{x_n\}$ элементов любой последовательности имеет хотя бы одну предельную точку.

Упражнение 17. Докажите следующее обобщение теоремы Кантора о равномерной непрерывности: всякая непрерывная функция на метрическом компакте равномерно непрерывна, то есть если $f: X \rightarrow R$ – числовая функция на метрическом компакте (X, ρ) , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ следует: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Упражнение 18. Докажите компактность прямого произведения двух или нескольких компактных пространств.

Упражнение 19. Докажите, что если A и B – два замкнутых непересекающихся компактных множества в хаусдорфовом пространстве, то они обладают непересекающимися окрестностями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров, П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию : учеб. пособие для студентов мат. спец. вузов / П. С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 367 с.
2. *Александров, П. С.* Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности / П. С. Александров, Б. А. Пасынков. – М. : Наука, 1973. – 575 с.
3. *Александрян, Р. А.* Общая топология : учеб. пособие для мат. спец. вузов / Р. А. Александрян, Э. А. Мерзаханян. – М. : Высш. шк., 1979. – 336 с.
4. *Архангельский, А. В.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях / А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. – М. : Наука, 1974. – 424 с.
5. *Болтянский, В. Г.* Наглядная топология / В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович ; под ред. С. П. Новикова. – М. : Наука, 1982. – 148 с.
6. *Куратовский, К.* Топология : в 2 т. / К. Куратовский. – М. : Мир, 1966 – 1969. – 1219 с.
7. *Рохлин, В. А.* Начальный курс топологии. Геометрические главы / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. – М. : Наука, 1977. – 488 с.
8. *Фоменко, А. Т.* Наглядная геометрия и топология: математические образы в реальном мире / А. Т. Фоменко. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ: Черо, 1989. – 221 с.

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Владимир Васильевич

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

Учебное пособие

Часть 1

Редактор Л.В. Пукова

Технический редактор Н. В. Тупицына

Корректор В.В. Гурова

Компьютерная верстка С.В. Павлухиной

ЛР № 020275. Подписано в печать 05.04.06.

Формат 60х84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,95. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.