Аффинные и евклидовы пространства

Н.И. Дубровин

УДК 517.53

ББК 22.151.4

Д 79

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и теории чисел

Владимирского государственного педагогического университета

В. Г. Журавлев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии

Владимирского государственного университета

С.Г. Танкеев

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Владимирского государственного университета

Дубровин, Н.И.

Аффинные и евклидовы пространства: учеб. пособие /Н.И. Дубровин; Владим. гос. ун-т. - Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – С.

ISBN 5-89368-675-6

Предназначено для студентов специальностей 010101 "Математика" 010501 (230401) "Прикладная математика и информатика", 0100503 "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем" для ознакомления с основами аффинной и евклидовой геометрии в многомерных пространствах. Является одной из глав годового курса "Алгебра и геометрия" и содержит только основные, фундаментальные определения и теоремы вплоть до темы "Квадрики". Рассчитан данный курс лекций на 16 аудиторных часов (8 лекций). Предполагается, что читатель (слушатель) знаком со стандартным курсом линейной алгебры, включающим помимо теории определителей и систем линейных уравнений и многомерные линейные пространства, а также операторы таких пространств.

Ил. 8

Библиогр.:5 назв.

.ISBN 5-89368-675-6 УДК 517.53

Введение

В этом пособии строятся начала геометрии Евклида в многомерных пространствах. При этом нам нет нужды вводить многочисленные аксиомы Евклида, коль скоро у нас уже есть такой мощный инструмент как линейные пространства. Аксиомы Евклида превращаются в легко проверяемые утверждения. Изложение разделено на две части. В первой части материал, посвященный аффинным пространствам, излагается без использования метрики. Далее, начиная с п. 7, предполагается наличие метрики и изложение доводится до классических теорем о треугольниках.

1. Аффинные пространства

1.1. Определение и примеры аффинных пространств

Определение. Пусть заданы непустое множество точек $\mathcal{A}$ и линейное пространство L над полем K. Предположим, что любым двум точкам $P, Q \in \mathcal{A}$ сопоставлен элемент (вектор) $\overrightarrow{PQ} \in L$, причем для любых трёх точек P, Q и R выполняется *равенство Шаля* (рис. 1). $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Кроме того, предположим, что для любой точки $P \in \mathcal{A}$ и элемента $\mathbf{a} \in L$ найдется единственная точка Q такая, что $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$.

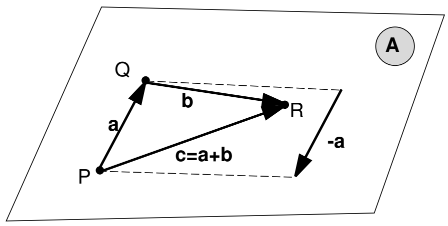

Рис. 1. Равенство Шаля

В этом случае $\mathcal{A}$ называется *аффинным пространством*, а L – *ассоциированным с ним линейным пространством.*

Получим первичные свойства аффинных

пространств.

А. *Для любой точки* P *вектор* $\overrightarrow{PP}$ *– нулевой.*

Действительно, $\overrightarrow{PP}+\overrightarrow{PP}=\overrightarrow{PP}$ согласно равенству Шаля, отсюда и следует результат.

Б. *Имеет место равенство* $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$ *для любых двух точек* P *и* Q.

Это соотношение следует из равенства $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PP}=\mathbf{0}$, верного в силу равенства Шаля и свойства А. Следующее свойство получается (n-2)-кратным применением равенства Шаля.

В. *Для любых точек* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *имеет место равенство*

$$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\ldots\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=\overrightarrow{P_1P_n}.$$

Примеры аффинных пространств

1. Евклидова плоскость или евклидово трехмерное пространство с ассоциированным пространством геометрических векторов.

2.Точечное пространство K^n_{aff} строк длины n. Ассоциированным линейным пространством будет пространство строк K^n длины n. Двум "точкам" $P=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ сопоставляется "вектор" $\overrightarrow{PQ}=(y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n)$. Обобщим этот пример.

3. Пусть L – линейное пространство. В качестве множества точек возьмем само линейное пространство: $\mathcal{A}:=L$. Превратим это множество в аффинное пространство, полагая $\overrightarrow{PQ}=Q-P$ для любых двух точек $P, Q\in L$. Без труда проверяются аксиомы аффинного пространства.

1.2. Сложение точки с вектором

Если $P\in\mathcal{A}$, а $\mathbf{a}\in L$, то под суммой $P+\mathbf{a}$ понимается та единственная точка Q, для которой $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{a}$. Из аксиом аффинного пространства следует, что если $P+\mathbf{a}=P+\mathbf{a}'$, то $\mathbf{a}=\mathbf{a}'$. Отметим ассоциативность операции сложения точки и вектора, вытекающую из равенства Шаля:

$$P+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(P+\mathbf{a})+\mathbf{b}.$$

Действительно, пусть $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{QR} = \mathbf{b}$. Тогда $(P + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = R$ по определению сложения точки и вектора, примененному дважды. Но

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

согласно правилу Шаля. Тогда $P + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = P + \overrightarrow{PR} = R$. Кроме того, отметим равенство $P + \mathbf{0} = P$ верное для любой точки. Докажем также соотношение

$$P + \mathbf{a} = Q + \mathbf{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Действительно, $Q + \mathbf{b} = (P + \overrightarrow{PQ}) + \mathbf{b} = P + (\overrightarrow{PQ} + \mathbf{b})$ в силу ассоциативности. Равенство $P + (\overrightarrow{PQ} + \mathbf{b}) = P + \mathbf{a}$ эквивалентно векторному равенству $\overrightarrow{PQ} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$, которое эквивалентно равенству $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1.3. Аффинные подпространства

В аффинном пространстве можно определить прямые, плоскости и, более общо, k-мерные аффинные подпространства.

Определение. Подмножество $\mathcal{B}$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется *(аффинным) подпространством*, если совокупность всех векторов $\overrightarrow{PQ}$, где точки P и Q пробегают $\mathcal{B}$, образуют линейное подпространство H и для любой точки $P \in \mathcal{B}$ и вектора $\mathbf{a} \in H$ точка $P + \mathbf{a}$ принадлежит $\mathcal{B}$. В этом случае говорят, что $\mathcal{B}$ *коллинеарно линейному подпространству* H. Если $\dim H = k$, то и *размерность аффинного подпространства* $\mathcal{B}$ считаем равной k. Записываем это так: $\dim \mathcal{B} = k$.

Пусть H – (линейное) подпространство в L и $R \in \mathcal{A}$. Тогда обозначим

$$R + H = \{R + \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in H\}.$$

Так как $\overrightarrow{R + \mathbf{a}, R + \mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, что следует из закона ассоциативности сложения точки и вектора, то множество $R+H$ будет аффинным подпространством, проходящим через точку R и коллинеарным H. Наоборот, если R – произвольная точка аффинного подпространства $\mathcal{B}$, которое коллинеарно линейному подпространству H, то $\mathcal{B} = R + H$.

Предложение 1. *Для линейных подпространств H, H' и двух точек P, P' равенство $P + H = P' + H'$ имеет место тогда и только тогда, когда подпространства H и H' совпадают, и $\overrightarrow{PP'} \in H$.*

Доказательство. Пусть имеет место равенство $P + H = P' + H'$. Тогда $P = P + \mathbf{0} = P' + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a} \in H'$. Аналогично, $P' = P + \mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{b} \in H$. Итак: $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{b} = -\mathbf{a} \in H \cap H'$. Если элемент $h \in H$ – произволен, то $P + h = P' + h'$ для некоторого $h' \in H'$, откуда $h = \overrightarrow{PP'} + h' \in H'$ (см. п. 1.2). Доказано включение $H \subseteq H'$. Обратное включение доказывается аналогично, и равенство $H = H'$ следует.

Обратно, если $H = H'$ и $\overrightarrow{PP'} \in H$, то

$$P + h = (P' + \overrightarrow{P'P}) + h = P' + (\overrightarrow{P'P} + h) \in P' + H'.$$

Доказано включение $P+H \subseteq P'+H'$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Ясно, что если $H = L$, то $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Другой крайний случай, когда $H = 0$. Тогда $\mathcal{B} = \{P\}$ – точка, аффинное подпространство наименьшей возможной нулевой размерности. Если же коразмерность H равна 1, т.е. $L = H + \mathbf{a}K$ для какого-либо вектора $\mathbf{a} \notin H$, то $\mathcal{B}$ называется *гиперплоскостью.*

2. Система координат

Считаем L конечномерным пространством размерности n.

В аффинном пространстве $\mathcal{A}$ можно определить систему координат. Пусть выбрана точка $O \in \mathcal{A}$ – *начало координат* и базис

$$\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$$

ассоциированного линейного пространства L. Назовем пару $(O, \mathcal{F})$ *системой координат аффинного пространства* $\mathcal{A}$. Для каждой точки P пространства $\mathcal{A}$ определим её *координаты* как координаты вектора $\overrightarrow{OP}$ относительно базиса $\mathcal{F}$. Тем самым P имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{f}_i.$$

Пусть $O', (\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \ldots, \mathbf{f}'_n)$ – другой аффинный базис. Как связаны координаты точки P в новом и старом базисах? Обозначим строку старых координат как $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а строка $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ задает новые координаты точки P. Через C обозначим матрицу перехода от старого базиса к новому. Найдем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – старые координаты нового начала координат. Тогда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ или $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'P}$, откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \ldots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 2. *На аффинном пространстве фиксируем систему координат* O; $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$. *Любое аффинное подпространство* $\mathcal{B}$ *задается совместной системой линейных уравнений:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Размерность подпространства $\mathcal{B}$ *равна* $n - r$, *где* r *– ранг матрицы системы (1). При этом линейное подпространство* H, *коллинеарное* $\mathcal{B}$ *задается однородной системой:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ – множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (1), а H – множество векторов, координаты которых удовлетворяют однородной системе (2). В разделе "Линейные пространства" отмечалось, что H – подпространство пространства L. Так как система (1) совместна, то найдется точка $P_0 \in \mathcal{B}$. Из линейности систем (1) и (2) следует, что общее решение неоднородной системы есть частное решение этой системы плюс общее решение однородной системы. Отсюда следует равенство $\mathcal{B} = P_0 + H$.

Обратно, любое аффинное подпространство может быть записано в виде $P_0 + H$, где $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – точка, а H – линейное подпространство в L. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ – базис в H. Обозначим через B_i – столбец координат вектора $\mathbf{b}_i$, а $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$. Тогда

$$X = \sum_{j=1}^{k} B_j t_j \tag{3}$$

– параметрическое задание линейного пространства H с параметрами $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Далее

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{k} B_j t_j \tag{4}$$

– *параметрическое уравнение аффинного подпространства* $P_0 + H$.

Так как $\operatorname{rang}(B_1, \ldots, B_k) = k$, то найдется ненулевой минор матрицы $(B_1, \ldots, B_k)$, имеющий размер $k \times k$. Можно считать, что он соответствует первым k строкам этой матрицы. Тогда параметры $t_1, \ldots, t_k$ можно выразить через $x_1, \ldots, x_k$ из первых k уравнений системы (4) и подставить в оставшиеся уравнения. Получим систему из $n-k$ уравнений, ранга $n - k$, задающую $\mathcal{B}$. □

Следствие 1. *Любое аффинное подпространство размерности k есть пересечение $n - k$ гиперплоскостей.*

Следствие 2. *Пересечение аффинных подпространств есть снова аффинное подпространство.*

Система (1), а значит и аффинное подпространство $\mathcal{B}$ задается расширенной матрицей (A, B), где $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$, а $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$ – столбец свободных членов. Пусть другая система с расширенной матрицей (A', B') задает аффинное подпространство $\mathcal{B}'$. При каких условиях на A, A', B, B' имеет место равенство? Ясно, что если матрицу (A', B') можно получить из матрицы (A, B) элементарными преобразованиями строк (это равносильно тому, что любая строка штиховой матрицы принадлежит линейному пространству, порожденному строками матрицы (A, B)), то $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Оказывается верно и обратное утверждение: *если $\mathcal{B}$ – подпространство пространства $\mathcal{B}'$, то матрица (A', B') получается из матрицы (A, B) элементарными преобразованиями строк.* Докажем это. Обозначим $r = \dim \mathcal{B}$. Тогда $n - r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, B)$ (учесть теорему Кронекера–Капелли). Составим систему, в которую входят все уравнения как нешриховой, так и штриховой системы. Ее расширенная матрица выглядит так: $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$. В виду включения $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ эта новая система имеет тоже самое множество решений, что и система (1), тем самым и ранг ее такой же:

$$n - r = \operatorname{rang}(A, B) = rang \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}.$$

Но ранг матрицы – это максимальное число линейно независимых строк. Следовательно, строки матрицы (A', B') линейно выражаются через строки матрицы (A, B). Утверждение доказано. Меняя местами (A, B) и (A', B') в приведенном выше рассуждении, получаем критерий:

Предложение 3. *Пусть аффинные подпространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ заданы системами линейных неоднородных уравнений с расширенными матрицами (A, B) и (A', B') соответственно. Тогда подпространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ совпадают в том и только том случае, когда матрицы (A, B) и (A', B') эквивалентны.*

Задачи

1. Найти систему координат в аффинном подпространстве, заданном системой линейных неоднородных уравнений

$$a) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -3, \\ 2x - y + 2z = -3, \\ 4x + 3y - 4z = -9; \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x + y - 2z + u = 2, \\ 2x - y - z + 3u = 5, \\ 3x - 3z + 4u = 7, \\ 4x + y - 5z + 3u = 9. \end{cases}$$

2. Написать формулы перехода от стандартной системы координат

плоскости к системе координат, в которой ось $O'x'$ – прямая $x+y=1$, а ось $O'y'$ – прямая $2x-y+13=0$.

3. *Аффинной оболочкой* подмножества аффинного пространства называется наименьшее аффинное подпространство, содержащее данное подмножество. Найти систему линейных неоднородных уравнений, задающую аффинную оболочку множества:

а) $P_1 = (2,3,1); P_2 = (4,1,2); P_3 = (0,2,1) \in K^3_{aff}$;

б) $P_1 = (-1,2,3,1); P_2 = (2,1,-2,0); P_3 = (1,3,1,1); P_4 = (3,-1,-5,-1)$;

в) $P_1 = (1,0,\ldots,0); P_2 = (0,1,0,\ldots,0); \ldots, P_n = (0,0,\ldots,1) \in K^n_{aff}$.

3. Аффинные отображения

Определение. Отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ над L в аффинное пространство $\mathcal{A}'$ над L' назовем *аффинным преобразованием*, если отображение $D\varphi : L \to L'$, сопоставляющее произвольному вектору $\overrightarrow{PQ}$ вектор $\overrightarrow{\varphi(P),\varphi(Q)}$ является линейным, т.е. обладает свойствами а) образ суммы векторов равен сумме образов, $D\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = D\varphi(\mathbf{a}) + D\varphi(\mathbf{b})$ и б) $D\varphi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda D\varphi(\mathbf{a})$ для любых $\mathbf{a},\mathbf{b} \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отображение $D\varphi$ называется *линейной частью* φ, или *дифференциалом.* Для него выполняется равенство $\varphi(P+\mathbf{a}) = \varphi(P) + D\varphi(\mathbf{a})$ для любых $P \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{a} \in L$. Отсюда следует, что для задания аффинного преобразования надо указать линейное преобразование $D\varphi : L \to L'$ и образ какой-либо точки.

Аффинное преобразование φ будет биекцией тогда и только тогда, когда $D\varphi$ – биекция, а тем самым и изоморфизм линейного пространства L на линейное пространство L'. В этом случае обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ будет также аффинным преобразованием с линейной частью равной $D\varphi^{-1} = (D\varphi)^{-1}$. Тогда φ называется *(аффинным) изоморфизмом.*

Композиция аффинных преобразований (изоморфизмов) снова будет аффинным преобразованием (изоморфизмом). Тождественное отображение $\mathrm{Id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является автоморфизмом, т.е. изоморфизмом на себя.

Примеры

Функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет аффинным преобразованием, если и только если она имеет вид $y = kx + b$. Изоморфизм (автоморфизм) получается тогда и только тогда, когда $k \neq 0$.

Более общо: отображение $\varphi : K^n_{aff} \to K^n_{aff}$ будет аффинным, если и только если оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

для некоторой $n \times n$-матрицы A. Это отображение будет автоморфизмом в точности тогда, когда матрица A невырождена.

Аффинное преобразование общего вида плоскости $\{(x, y)\}$ в прямую $\{z\}$ может рассматриваться как аффинно линейная функция двух переменных: $z = ax + by + c$. Оно не может быть изоморфизмом в виду несовпадения размерностей прямой и плоскости.

Теорема 4. *Любое аффинное n-мерное пространство изоморфно пространству строк K^n_{aff}.*

Изоморфизм устанавливается путем выбора какой-либо системы координат O; $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ и перевода точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в строку её координат $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n_{aff}$.

Рассмотрим несколько важных типов аффинных преобразований.

Параллельный перенос

Пусть $\mathbf{a} \in L$ – фиксированный вектор. Тогда преобразование $T_{\mathbf{a}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $T_{\mathbf{a}}(P) = P + \mathbf{a}$ для любой точки P будет аффинным автоморфизмом (т. е. изоморфизмом $\mathcal{A}$ на себя), который и называется *параллельным переносом на вектор* $\mathbf{a}$. Параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек.

В координатах параллельный перенос задается так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Гомотетия

Гомотетией с коэффициентом $k \in K \setminus \{0\}$ *и центром в точке* $O \in \mathcal{A}$ называется автоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, который переводит точку P в точку $O + k\overrightarrow{OP}$. Очевидно, что O – неподвижная точка. Если $k \neq 1$, то O единственная неподвижная точка гомотетии. Совокупность всех гомотетий с фиксированным центром является группой, изоморфной мультипликативной группе поля K. В базисе $O; (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ гомотетия с центром в точке O задается скалярной матрицей kE.

Проекция и симметрия вдоль подпространства

Пусть пространство L разложимо в прямую сумму подпространств H и W: $L = H \oplus W$, и $\mathcal{B} = O + H$ – аффинное подпространство в $\mathcal{A}$. Определим преобразование $\mathrm{pr} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, которое назовем *проекцией вдоль подпространства* W. Пусть $P \in \mathcal{A}$ – произвольная точка. Тогда

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

для единственных элементов $\mathbf{a} \in H$ и $\mathbf{b} \in W$. Точка Q – проекция точки P, находится тогда исходя из равенства $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}$ (рис. 2)

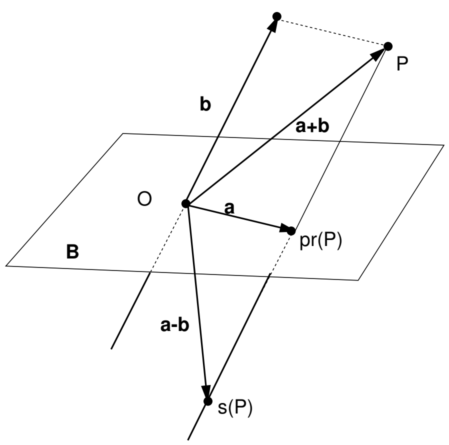

Рис. 2. Проекция и симметрия

Определим *симметрию* $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *относительно подпространства* $\mathcal{B}$ *вдоль линейного подпространства* W так, что $s(P)$ – точка, удовлетворяющая равенству $\overrightarrow{O\,s(P)} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (рис. 2). Симметрия будет автоморфизмом аффинного пространства, оставляющим подпространство $\mathcal{B}$ неподвижным.

Заметим, что проекция и симметрия не зависят от выбора точки O. Отметим также равенства $\mathrm{pr}^2 = \mathrm{pr}$ и $s^2 = \mathrm{Id}$ (идемпотентность и инволютивность соответственно), которым удовлетворяет любая проекция и симметрия. Выберем систему координат так, что $H = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k \rangle$, $W = \langle \mathbf{f}_{k+1}, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$. Тогда проекция и симметрия задаются в координатах так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots\cdot \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots\cdot \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \\ -x_{k+1} \\ \cdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

В заключении этого параграфа сформулируем **основную теорему аффинной геометрии** применительно к полю действительных чисел.

Теорема 5. (см. [1], § 2.6.3) *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная биекция аффинного пространства строк длины $n \geq 2$, переводящая прямую в прямую. Тогда φ – аффинное отображение.*

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 2$, разбив доказательство на четыре пункта.

1. Пусть $A = \varphi(0,0)$, $B = \varphi(1,0)$, $C = \varphi(0,1)$. Построим аффинный автоморфизм ψ переводящий точки A, B, C в $(0,0), (1,0), (0,1)$ соответственно. Тогда $\psi \circ \varphi$ оставляет неподвижными точки $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. При этом, композиция $\psi \circ \varphi$ удовлетворяет условию теоремы, коль скоро удовлетворяет этому условию φ и ψ по отдельности. Тогда достаточно доказать, что $\xi := \psi \circ \varphi$ – аффинный автоморфизм, ибо отображение $\varphi = \psi^{-1} \circ \xi$ будет таким же.

2. Отображение φ, удовлетворяющее условию теоремы, переводит параллельные прямые в параллельные прямые и точку пересечения двух прямых в точку пересечения образов этих прямых. В частности, если две пересекающиеся прямые переходят сами в себя под действием φ, то их точка пересечения неподвижна.

3. В силу первого пункта достаточно считать, что φ оставляет на месте точки $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Надо доказать, что тогда φ – тождествен-

ное отображение. Во-первых докажем, что все точки вида $\left(\frac{m}{2^p}, \frac{n}{2^q}\right)$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, а $p, q \geq 0$ – неподвижны. Это доказывается с помощью свойств, отмеченных во втором пункте. Например, докажем, что $\varphi(1,1) = (1,1)$. Имеем: прямые $\{(t,1)\}$, $\{(1,t)\}$ параллельны прямым $\{(t,0)\}$, $\{(0,t)\}$, которые переходят сами в себя. Отсюда следует, что и прямые $\{(t,0)\}$, $\{(0,t)\}$ переходят сами в себя коль скоро каждая из них имеет неподвижную точку. Тогда $\varphi(1,1) \in \{(t,0)\} \cap \{(0,t)\} = \{(1,1)\}$, т.е. $\varphi(1,1) = (1,1)$, что и требовалось. Дальнейший процесс построения неподвижных точек состоит из двух этапов: 1) через все полученные неподвижные точки проводим прямые параллельные ко всем уже построенным прямым, 2) всевозможные пересечения построенных прямых есть новое, увеличенное множество неподвижных точек.

4. Доказано, что $\varphi\left(\frac{m}{2^p}, \frac{n}{2^q}\right) = \left(\frac{m}{2^p}, \frac{n}{2^q}\right)$. Но любая точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ есть предел таких дробно-двоичных точек. Остается воспользоваться непрерывностью отображения φ. $\square$

Замечание. Теорема 5 остается справедливой, если опустить требование непрерывности отображения φ. Это следует из того факта, что поле действительных чисел не допускает никаких автоморфизмов, кроме тождественного.

Задачи

1. Доказать, что аффинное отображение переводит аффинное подпространство в аффинное подпространство.

2. Описать в координатах x, y, z симметрию и проекцию на плоскость $x + y + z = 3$ вдоль прямой а) $x = y = z$; б) Ox. Спроектировать единичный куб $[0,1]^3$ на эту плоскость вдоль прямой $x = y = z$.

3. Найти аффинное преобразование $f : K^n_{aff} \to K^m_{aff}$, переводящее одно множество в другое:

а) $n = m = 1$; $f(2) = -4, f(3) = 0$;

б) $n = 2, m = 1; f(1,1) = 0, f(3,-1) = 4, f(-2,0) = 2$;

в) $n = m = 2$; $f(A) = A' \, f(B) = B'$, $f(C) = C'$,

где $A(0,0); B(1,0); B(0,1); A'(1,3), B'(3,2), C'(3,5)$.

4. Описать группу аффинных автоморфизмов плоскости, оставляющих треугольник с вершинами $A(0,0); B(1,0); B(0,1)$ на месте.

5. Описать группу аффинных автоморфизмов пространства, оставляющих куб с вершинами (α,β,γ) $(\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\})$ на месте.

6. Рассмотрим поле $\mathbb{Q}(\pi)$, порожденное всеми рациональными числами и числом π. Это подполе поля действительных чисел. Известно, что число π трансцендентное, поэтому $\mathbb{Q}(\pi)$ изоморфно полю рациональных функций с одной переменной с рациональными коэффициентами. Пусть $\nu:\mathbb{Q}(\pi)\to\mathbb{Q}(\pi)$ – не тождественный автоморфизм, например переводящий π в $\pi+1$. Тогда отображение $\varphi(x,y)=(\nu(x),\nu(y))$ будет биекцией аффинной плоскости над полем $\mathbb{Q}(\pi)$, переводящей любую прямую в прямую, но не будет аффинным отображением.

7. Доказать, что аффинным преобразованием любую окружность можно перевести в единичную окружность $x^2+y^2=1$.

8. Доказать, что непустые кривые второго порядка на плоскости $\mathbb{R}^2_{aff}$ с точностью до аффинного автоморфизма исчерпываются следующими: 1) единичная окружность $x^2+y^2=1$; 2) "единичная" гипербола $x^2-y^2=1$; 3) парабола $y=x^2$; 4) точка $x^2+y^2=0$; 5) пара скрещивающихся прямых $x^2-y^2=0$; 6) пара параллельных прямых $x^2=1$; 7) двойная прямая $x^2=0$.

9. Доказать, что параллельный перенос и гомотетия обладают свойством: образ подпространства коллинеарен праобразу. Доказать, что только эти аффинные преобразования из всех аффинных автоморфизмов обладают таким свойством.

10. Пусть $p:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ – автоморфизм такой, что $p^2=p$. Доказать, что p – проекция.

11. Пусть $s:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ – автоморфизм такой, что $s^2=Id$. Доказать, что s – симметрия.

4. Расположение аффинных подпространств в пространстве

Определения. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – два аффинных подпространства, коллинеарные линейным подпространствам H_1 и H_2 соответственно. Они называются *параллельными*, если не имеют общих точек, и либо $H_1 \subseteq H_2$, либо $H_2 \subseteq H_1$. Если же $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ и H_1, H_2 не сравнимы в смысле включения, то подпространства $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ называются *скрещивающимися.*

Два аффинных подпространства называются *коллинеарными*, если либо одно из них содержится в другом, либо они параллельны. По другому это можно сформулировать так: семейство аффинных подпространств $\mathcal{B}_i = P_i + H_i$ $(i \in I)$ *коллинеарны*, если линейные подпространства H_i линейно упорядочены по включению. Коллинеарность есть отношение эквивалентности в отличие от отношения параллельности.

На примере четырехмерного куба в $\mathbb{R}^4$ (рис. 3) поясним эти определения.

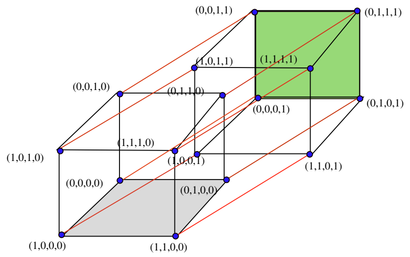

Рис. 3. Четырехмерный куб

Прямые $\{(t, 0, 0, 0)\}$ и $\{(t, 0, 0, 1)\}$ параллельны, а прямые $\{(t, 0, 0, 0)\}$ и $\{(1, 0, t, 0)\}$ скрещиваются. Плоскости $\{(u, v, 0, 0)\}$ и $\{(u, v, 1, 0)\}$ параллельны, а закрашенные плоскости $\{(u, v, 0, 0)\}$ и $\{(0, u, v, 1)\}$ скрещиваются (в трехмерном пространстве плоскости скрещиваться не могут). Плоскость $\{(u, v, 0, 0)\}$ и трехмерное пространство $\{(u, v, w, 1)\}$ параллельны.

4.1. Прямая

В этом параграфе рассматриваются аффинные свойства прямой. Прямая – это аффинное подпространство размерности 1, и тем самым она имеет вид $\ell = R + \mathbf{v}K$, где ненулевой вектор $\mathbf{v}$ *коллинеарен прямой* ℓ.

Пусть $\mathcal{A}$ – аффинное пространство с базисом $O, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Выберем точку P с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и ненулевой вектор $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{f}_i$. Тогда точка Q с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит прямой $\ell = P + \mathbf{v}K$ в том и только том случае, когда

$$x_i = x_i^0 + v_i t \quad (1 \le i \le n), \qquad t \in K. \tag{5}$$

Мы получили *параметрическое уравнение прямой в пространстве.*

Исключая параметр t, приходим к *каноническому уравнению прямой* ℓ:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{v_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{v_n}. \tag{6}$$

Если заданы две несовпадающие точки $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ на прямой ℓ, то в качестве вектора $\mathbf{v}$ можно взять $\overrightarrow{PQ}$. Тогда каноническое уравнение прямой ℓ будет иметь вид

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее предложение.

Предложение 6. *Через две различные точки аффинного пространства проходит единственная прямая.*

Договоримся для системы элементов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ линейного пространства L писать $\operatorname{rang}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\} = m$, если размерность подпространства $\mathbf{a}_1 K + \ldots + \mathbf{a}_k K$ равна m. Это число совпадет с рангом матрицы, строки которой являются координатами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ в некотором базисе.

Теорема 7 (расположение двух прямых). *Пусть даны две прямые $\ell = P + \mathbf{v}K$ и $\ell' = P' + \mathbf{v}'K$.*

- *Прямые ℓ и ℓ' совпадают тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\} = 1$.*
- *Прямые ℓ и ℓ' параллельны в том и только том случае, когда $\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = 1 < \operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\}$.*
- *Прямые ℓ и ℓ' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = \operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\} = 2$.*
- *Прямые ℓ и ℓ' скрещиваются тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\} = 3$.*

Доказательство. В первом утверждении часть "и только тогда" ясна. Наоборот, если $\operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\} = 1$, то $\overrightarrow{PP'} = t\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v} = s\mathbf{v}'$ для некоторых $s, t \in K$. Если $Q \in \ell$ – произвольная точка, то $\overrightarrow{PQ} = x\mathbf{v}$ для подходящего $x \in K$, и $\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} = -t\mathbf{v}' + xs\mathbf{v}' = (xs - t)\mathbf{v}'$. Отсюда следует, что $Q \in \ell'$. Доказано, что прямая ℓ – подмножество прямой ℓ'. Из этого вытекает совпадение прямых ℓ и ℓ'.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $(x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0)$ – координаты точек P и P', а $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$ – координаты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ соответственно. Произвольная точка прямой ℓ имеет координаты $x_i + v_i t$, а прямой ℓ' – $x_i' + v_i' s$ (t и s – параметры4 $(1 \le i \le n)$) Пересечение $\ell \cap \ell'$ находится как решение системы $x_i + v_i t = x_i' + v_i' s$ или $v_i t - v_i' s = x_i' - x_i$. Применяя к этой системе теорему Кронекера–Капелли и считая ранги матриц по столбцам, а не по строкам, как ранее, получим, что *прямые ℓ и ℓ' не пересекаются ровно в том случае, когда* $\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} < \operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\}$.

Докажем теперь второе утверждение. Если выполнено неравенство

$$\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = 1 < \operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\},$$

то прямые не имеют общих точек, и, кроме того, $\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}'$, откуда следует совпадение ассоциированных линейных пространств. Параллельность прямых доказана. Наоборот, если прямые параллельны, то $\mathbf{v}K = \mathbf{v}'K$, откуда следует равенство $\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = 1$. Применяя отмеченное выше утверждение в обратном направлении, получаем искомое неравенство.

Докажем четвертое утверждение. Если $\operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\}$ равен трем, то $\operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = 2$. Следовательно, прямые ℓ и ℓ' не пересекаются и пространства $\mathbf{v}K$, $\mathbf{v}'K$ с ними ассоциированные не упорядочены линейно. По определению это значит, что прямые ℓ и ℓ' скрещиваются.

Третье утверждение вытекает из предыдущих, если учесть, что во всех случаях имеют место неравенства

$$1 \le \operatorname{rang}\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \le \operatorname{rang}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \overrightarrow{PP'}\right\} \le 3.$$

□

На соотношение (6) можно посмотреть как на совместную систему линейных уравнений с матрицей, имеющей ранг $n - 1$. В связи с этим, *об-*

щим уравнением прямой в аффинном пространстве $\mathcal{A}$ с фиксированным базисом $O, \mathcal{F}$ назовем совместную систему вида (1) с матрицей $A = (a_{ij})$ ранга $n-1$. В частности, на аффинной плоскости с координатами x, y – общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By + C = 0 \quad (\text{либо } A \neq 0,\ \text{либо } B \neq 0). \tag{8}$$

В аффинном пространстве с координатами x, y, z общее уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad \text{где } \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{9}$$

Эта система заведомо совместна.

Задачи

1. Написать каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точки $(1,1,1,1,1)$ и $(1,2,1,2,1)$ пространства K^5_{aff}.

2. Пусть q – число элементов поля K (например, $K = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ и q – простое число). Сколько различных прямых имеет пространство K^n_{aff}?

3. Нарисовать плоскость над полем из трех элементов ($K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) как 3×3-таблицу из девяти точек. Отметить на ней все прямые. Рассмотреть те из них, которые не параллельны координатным осям; увидеть связь с методом раскрытия определителя 3×3. Решить такую же задачу для поля $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (более общо, для поля $K = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$).

4. Исследовать взаимное расположение прямых

$$\ell: \ \frac{x-1}{a} = \frac{y-a}{2} = \frac{z}{1}; \quad \ell': \ \frac{x+a}{2} = \frac{y+1}{a} = \frac{z}{1}$$

в зависимости от параметра a. Ответ: при $a \neq -1, 2$ скрещиваются, при $a = -1$ пересекаются, при $a = 2$ параллельны

5. Найти уравнение прямой, симметричной прямой $x = 2y = 3z = 4u$ относительно гиперплоскости $x + y + z + u = 0$ вдоль оси Ox.

4.2. Гиперплоскости

Общее уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве с координатами $O, x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + B = 0, \tag{10}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$ одновременно не равны 0. В частности, уравнение плоскости в трехмерном пространстве с координатами x, y, z имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{где } (A, B, C) \neq (0, 0, 0). \tag{11}$$

Теорема 8. *Пусть заданы две гиперплоскости*

$$\begin{array}{ll} \tau: & A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + B = 0, \\ \tau': & A'_1x_1 + A'_2x_2 + \ldots + A'_nx_n + B' = 0. \end{array} \tag{12}$$

Тогда

- *гиперплоскости τ и τ' совпадают тогда и только тогда, когда*
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ A'_1 & \ldots & A'_n & B' \end{pmatrix} = 1;$$
- *гиперплоскости τ и τ' параллельны в том и только том случае, если*
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ A'_1 & \ldots & A'_n \end{pmatrix} < \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ A'_1 & \ldots & A'_n & B' \end{pmatrix}; \tag{13}$$
- *прямая (6) лежит в плоскости τ, если и только, если*
$$\begin{cases} A_1x_1^0 + \ldots + A_nx_n^0 + B = 0; \\ A_1v_1 + \ldots + A_nv_n = 0; \end{cases} \tag{14}$$
- *прямая (6) параллельна гиперплоскости τ в том и только том случае, если*
$$\begin{cases} A_1x_1^0 + \ldots + A_nx_n^0 + B \neq 0; \\ A_1v_1 + \ldots + A_nv_n = 0; \end{cases}$$

- *никакое аффинное подпространство не может скрещиваться с гиперплоскостью*

Доказательство. В силу предложения 3 равенство $\tau = \tau'$ равносильно эквивалентности строк $(A_1', \ldots, A_n', B')$ и $(A_1, \ldots, A_n, B)$, т.е. их пропорциональности. Отсюда следует первое утверждение.

Докажем второе утверждение. Пусть $\tau \parallel \tau'$. Тогда система (12) несовместна и в этом случае ранг матрицы этой системы меньше ранга расширенной матрицы, что и т.д. Наоборот, если выполнено (13), то система (12) несовместна, поэтому $\tau \cap \tau' = \emptyset$. Обозначим через H и H' линейные подпространства, коллинеарные гиперплоскостям τ и τ' соответственно. Они задаются уравнениями

$$H:\ A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0, \quad H':\ A_1'x_1 + A_2'x_2 + \ldots + A_n'x_n = 0.$$

Но в силу неравенства (13), ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ A_1' & \ldots & A_n' \end{pmatrix}$ равен 1, поэтому $H = H'$. Доказано, что $\tau \| \tau'$.

Прямая (6) лежит в плоскости τ в том и только том случае, когда точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $(x_1^0 + v_1, \ldots, x_n^0 + v_n)$ принадлежат ей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i^0 + B = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i^0 + v_i) + B = 0.$$

Эта система эквивалентна, в свою очередь, системе (14).

Прямая (6) параллельна плоскости τ, тогда и только тогда, когда точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ не принадлежит τ, т.е. $\sum A_i x_i^0 + B \neq 0$, а вектор $(v_1, \ldots, v_n)$ принадлежит подпространству $H:\ \sum A_i x_i = 0$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $\mathcal{B}$ – аффинное подпространство коллинеарное линейному подпространству H. Обозначим через T линейное $n-1$-мерное подпространство пространства H, заданное уравнением $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 0$ и коллинеарное гиперплоскости τ. Если $H \subseteq T$, то $\mathcal{B}$ и τ не могут скрещиваться. Пусть H не лежит в T. Тогда $H + T = L$. Возьмем $P \in \tau$ и $Q \in \mathcal{B}$. Разложим $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \in H$ и $\mathbf{b} \in T$. Тогда $Q = P + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, откуда $P + \mathbf{b} = Q + (-\mathbf{a})$. Эта точка принадлежит как τ так и $\mathcal{B}$. Следовательно, τ и $\mathcal{B}$ скрещиваться не могут. $\square$

Следующее утверждение в случае, когда аффинное пространство – плоскость называется пятым постулатом Евклида.

Следствие. *Через любую точку аффинного пространства, не лежащую на гиперплоскости τ, можно провести гиперплоскость и причем только одну, параллельную данной.*

Если $\tau : A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B = 0$ и $Q(x_1^*, \ldots, x_n^*) \notin \tau$, то искомая гиперплоскость имеет уравнение $A_1(x_1 - x_1^*) + \ldots + A_n(x_n - x_n^*) = 0$.

Задачи

1. Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ – два аффинных подпространства таких, что наименьшее подпространство, содержащее их обоих, совпадает с $\mathcal{A}$. Тогда подпространства $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ не могут скрещиваться.

2. Составить уравнение трехмерной плоскости в пятимерном пространстве, проходящей через точку $M(0, 1, -1, 3, 4)$ и параллельной трехмерной плоскости $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_5$.

3. Исследовать взаимное расположение двух двумерных плоскостей в пятимерном пространстве $\tau : x_1 = x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = x_5$; и $\rho : x_1 = 2 + u$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3 + 2v$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5 + u + v$.

4.3. Плоскости в трехмерном пространстве

Пусть $\mathcal{A}$ – трехмерное аффинное пространство с координатами x, y, z. Рассмотрим различные способы задания плоскости в пространстве $\mathcal{A}$.

а) Пусть $\mathbf{a}(p, q, r)$, $\mathbf{b}(p', q', r')$ два неколлинеарных вектора, и $P(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит пространству $\mathcal{A}$. Тогда общее уравнение плоскости, проходящей через точку P и коллинеарной векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

б) Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ – три точки пространства, не лежащие на одной прямой. Тогда общее уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Второй случай сводится к первому, если в качестве векторов взять $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Отсутствие коллинеарности этих векторов в точности означает, что три точки A, B, C не лежат на одной прямой. Наоборот, первый случай сводится ко второму, если наряду с точкой P рассмотреть точки $P+\mathbf{a}$ и $P+\mathbf{b}$. Непосредственной подстановкой координат точек A, B, C в уравнение (16) проверяется, что они удовлетворяют данному уравнению. С другой стороны, оба уравнения (15) и (16) аффинно линейны, т.е. имеют вид $ax+by+cz+d=0$. Остается доказать, что $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ для одного из них, – первого. Так как

$$(a,b,c,) = \left(\begin{vmatrix} q & r \\ q' & r' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p & r \\ p' & r' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \right),$$

то зануление этой тройки означает пропорциональность строк (p,q,r), (p',q',r'), что эквивалентно коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Предложение 9. *Три плоскости $A_i x + B_i y + C_i + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это утверждение есть прямое следствие правила Крамара.

5. Барицентрические координаты

В линейном пространстве имеются операции сложения векторов и умножения векторов на элементы поля K. В п. 1.1 была определена операция сложения точки аффинного пространства с вектором. Можно было бы даже определить разность двух точек A и B как $B - A := \overrightarrow{AB}$. Однако сумма двух точек не определена. В общем случае сумме двух точек аффинного пространства нельзя придать разумного смысла. Однако, если

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ – набор элементов поля K такой, что $\sum_{i=0}^m x_i = 1$, то для любых точек $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{A}$ можно определить *барицентрическую комбинацию*

$$P = x_0 P_0 + x_1 P_1 + \ldots + x_m P_m \tag{17}$$

как такую точку P, что

$$\overrightarrow{OP} = x_0 \overrightarrow{OP_0} + x_1 \overrightarrow{OP_1} + \ldots + x_m \overrightarrow{OP_m} \tag{18}$$

для какой-либо точки $O \in \mathcal{A}$. Покажем прежде всего, что здесь фразу "для какой-либо точки O" можно заменить на "для любой точки O", т.е. докажем, что если имеет место равенство (18) для точки O, то подобное равенство будет справедливо и для любой другой точки O':

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{OP_i} = (\sum_{i=0}^m x_i) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{OP_i} =$$

$$= \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=0}^m x_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{O'P_i}.$$

Взяв в качестве O точку P_0 и учитывая, что $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{0}$, а $P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}$, получим

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^m \overrightarrow{P_0P_i}. \tag{19}$$

Пример. Пусть (P_i, m_i) – система точечных масс в физическом пространстве (P_i – точка, $m_i \geq 0$ – ее масса, $0 \leq i \leq m$). Тогда центр тяжести этой системы есть не что иное как барицентрическая комбинация $\sum_{i=0}^m \frac{m_i}{M} P_i$, где $M = \sum_{i=0}^m m_i$– масса всей системы.

Если фиксировать точки $P_0, P_1, \ldots, P_m$, то всевозможные барицентрические комбинации $x_0 P_0 + x_1 P_1 + \ldots + x_m P_m$ образуют *аффинное подпространство, порожденное множеством этих точек.* Действительно, вектор $\overrightarrow{PQ}$ с началом $P = x_0 P_0 + x_1 P_1 + \ldots + x_m P_m$ и концом $Q = x'_0 P_0 + x'_1 P_1 + \ldots + x'_m P_m$ равен

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^m x'_i \overrightarrow{OP_i} - \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=0}^m (x'_i - x_i) \overrightarrow{OP_i}.$$

Видим, что совокупность таких векторов совпадает с множеством линейных комбинаций $\sum_{i=0}^{m} t_i \overrightarrow{OP_i}$, где $\sum_{i=0}^{m} t_i = 0$ и образует линейное подпространство. Обозначим аффинное подпространство, порожденное множеством точек T через $\mathrm{Aff}(T)$. По определению это есть наименьшее аффинное подпространство в $\mathcal{A}$, содержащее множество T. В случае, когда $T = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$, из доказанного выше следует, что

$$\mathrm{Aff}\,\{P_0, P_1, \ldots, P_m\} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} x_i P_i \mid x_i \in K,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Определение. Точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$ называются *барицентрической системой координат*, или *репером*, если для любой точки $P \in \mathcal{A}$ найдутся единственные коэффициенты $x_i \in K$ $(0 \le i \le n)$ с условием $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$ и такие, что $P = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i$. В этом случае $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются *барицентрическими координатами точки* P.

Предложение 10. *Точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$ будут барицентрической системой координат тогда и только тогда, когда $P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ – система координат аффинного пространства $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Если вектора $\overrightarrow{P_0, P_i}$ линейно зависимы, то найдется ненулевой набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0, P_i} = \mathbf{0}$. Обозначая $x_0 = 1 - \sum x_i$, получаем

$$P_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + \ldots + 0 \cdot P_n; \quad P_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i$$

– два различных представления точки P_0. Следовательно, набор точек $P_0, P_1, \ldots, P_n$ не является барицентрической системой координат.

Наоборот, если вектора $\overrightarrow{P_0, P_i}$ образуют базис, то для любой точки $P \in \mathcal{A}$ найдутся единственные коэффициенты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такие, что $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0, P_i}$. Обозначая $x_0 = 1 - \sum x_i$, получаем, что разложение $P = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i$ есть единственное возможное представление. □

Теорема 11. *Пусть $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – аффинное преобразование. Тогда для любых точек $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{A}$ и любых коэффициентов $x_0, x_1, \ldots, x_m$ из поля K таких, что $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$, выполняется равенство*

$$f\left(\sum_{i=0}^{m} x_i P_i\right) = \sum_{i=0}^{m} x_i f(P_i). \qquad (20)$$

Наоборот, если $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – отображение такое, что для любых трех точек P_0, P_1, P_2 и любых коэффициентов $x_0, x_1, x_2 \in K$ таких, что $x_0 + x_1 + x_2 = 1$, выполняется равенство

$$f(x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2) = x_0f(P_0) + x_1f(P_1) + x_2f(P_2),$$

то f – аффинное преобразование.

Доказательство. Докажем утверждение "наоборот". Фиксируем точку $O \in \mathcal{A}$ и для произвольного вектора $\mathbf{a} \in L$ определим отображение $Df : L \to L'$ так, что

$$Df(\mathbf{a}) = \overrightarrow{f(O)f(O+\mathbf{a})}.$$

Это равенство эквивалентно следующему: $f(O + \mathbf{a}) = f(O) + Df(\mathbf{a})$. Докажем, что Df – линейное отображение. Возьмем для этого $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ и $x_1, x_2 \in K$. Положим $x_0 = 1 - x_1 - x_2$. Тогда по условию

$$f(x_0O + x_1(O + \mathbf{a}) + x_2(O + \mathbf{b})) = x_0f(O) + x_1f(O + \mathbf{a}) + x_2f(O + \mathbf{b})$$

Учитывая, что

$$x_0O + x_1(O+\mathbf{a}) + x_2(O+\mathbf{b}) = O + (x_0\overrightarrow{OO} + x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}) = O + (x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b})$$

и применяя определение отображения Df, переписываем последнее равенство эквивалентным образом:

$$f(O) + Df(x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}) = x_0f(O) + x_1(f(O) + Df(\mathbf{a})) + x_2(f(O) + Df(\mathbf{b}).$$

По определению взвешенного среднего, правая часть здесь может быть переписана так $f(O)+(x_1Df(\mathbf{a})+x_2Df(\mathbf{b}))$. Тогда имеет место равенство

$$f(O) + Df(x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}) = f(O) + (x_1Df(\mathbf{a}) + x_2Df(\mathbf{b})).$$

откуда получаем, что $Df(x_1\mathbf{a}+x_2\mathbf{b}) = x_1Df(\mathbf{a})+x_2Df(\mathbf{b})$ и линейность Df следует.

Докажем теперь, что $f(O' + \mathbf{a}) = f(O') + Df(\mathbf{a})$ для любой точки $O' \in \mathcal{A}$ (и для любого вектора $\mathbf{a}$):

$$f(O' + \mathbf{a}) = f(O + (\overrightarrow{O'O} + \mathbf{a})) = f(O) + Df(\overrightarrow{O'O} + \mathbf{a}) =$$

$$= f(O)+(Df(\overrightarrow{O'O})+Df(\mathbf{a})) = (f(O)+Df(\overrightarrow{O'O}))+Df(\mathbf{a}) = f(O')+Df(\mathbf{a})$$

$\square$

Задачи

1. Найти центр тяжести системы материальных точек $A(2, -1, 3)$, $B(7, 6, 1)$, $C(9, 0, -5)$, $D(-3, 4, 1)$ расположенных в пространстве и имеющими веса $m_A = 12$кг, $m_B = 6$кг, $m_C = 4$кг, $m_D = 3$кг.

2. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной на плоскости замкнутой ломаной $A_1(0, 0)$, $A_2(6, 0)$, $A_3(6, 4)$, $A_4(10, 4)$, $A_5(10, 6)$, $A_6(4, 6)$, $A_7(4, 2)$, $A_8(0, 2)$, A_1.

3. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ – репер в аффинном пространстве $\mathcal{A}$, и $Q_0, Q_1, ..$ Q_n – семейство точек в аффинном пространстве $\mathcal{A}'$. Существует и при том только единственное аффинное преобразование $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, переводящее P_i в Q_i для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

6. Многоугольники. Теорема Дезарга

Для двух разных точек A, B аффинного пространства будем обозначать через AB прямую, проходящую через эти точки. Очевидно, что выполняется равенство $AB = BA$.

На множестве строк $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ точек аффинного пространства, введем отношение эквивалентности, считая строку $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ эквивалентной строке $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$, если строка $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$ получается из строки $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ применением циклической перестановки и (или) записью строки в обратном порядке. Например, строка из трех букв эквивалентна строке, полученной из этих же букв любой перестановкой. Для четырех букв это уже не так:

$$(A, B, C, D) \sim (D, C, B, A) \sim (C, B, A, D) \sim (B, A, D, C) \nsim (B, A, C, D).$$

Класс эквивалентности по только что определенному отношению обозначим $\square(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ и назовем *m-угольником.* Прямые A_iA_{i+1} для $i = 1, \ldots, m - 1$, а также прямую A_mA_1 будем называть *сторонами m-угольника* $\square(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Множество сторон не меняется при циклической замене и при "переворачивании" строки вершин:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m) \to (A_2, \ldots, A_m, A_1);$$

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m) \to (A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1).$$

Отсюда следует корректность определения сторон m-угольника.

Если $m = 3$, то класс эквивалентности обозначаем $\triangle ABC$ и называем *треугольником.* Из определения эквивалентности следует, что

$$\triangle ABC = \triangle BAC = \triangle ACB = \triangle BCA = \triangle CAB = \triangle CBA.$$

Треугольник *вырожден*, если его вершины лежат на одной прямой; в противном случае треугольник *невырожден*, или *собственный.*

Два многоугольника $\square(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ и $\square(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$ *аффинно равны*, если существует аффинное преобразование пространства, переводящее вершину A_i в вершину $A'_{\rho(i)}$, где ρ – допустимая перестановка, т.е. перестановка, при которой $\square(A'_1, A'_2, \ldots, A'_i) = \square(A'_{\rho(1)}, \ldots, A'_{\rho(n)})$.

Предложение 12. *Любые два невырожденных треугольника аффинно равны.*

Пусть $M = 1/2A + 1/2B$ – барицентр вершин A и B, а точка $N = = 1/2B + 1/2C$ – барицентр вершин B и C треугольника ABC. Прямую MN назовем *средней линией треугольника.*

Предложение 13. *Для средней линии имеет место равенство* $2\overrightarrow{MN} = = \overrightarrow{AC}$*. Если треугольник* ABC *не вырожден, то средняя линия* MN *параллельна основанию* AC*.*

Теорема 14. *Пусть в треугольниках* ABC *и* $A'B'C'$ *стороны* AB, BC, AC *коллинеарны сторонам* $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$*. Тогда прямые* AA', BB', CC' *либо коллинеарны, либо пересекаются в одной точке (рис. 4)*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A'C'} = \mu\mathbf{b}$, как следует из условия. Достаточно считать $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимыми, иначе утверждение теоремы тривиально. Далее: $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{B'C'} = = \lambda\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}$. Из коллинеарности этой пары и линейной независимости $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ следует, что $\lambda = \mu$. Тогда $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Предположим, что AA' и BB' пересекаются в одной точке O. Пусть

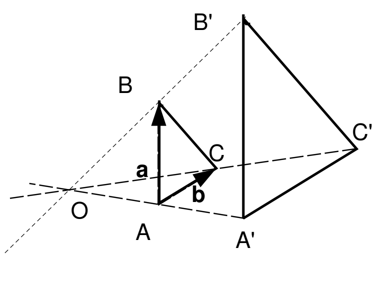

Рис. 4. Теорема Дезарга

$\overrightarrow{OA'} = \nu\overrightarrow{OA}$. Можно считать, что и $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны $\overrightarrow{OA}$, иначе заключение теоремы снова тривиально. Так вектор $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \mathbf{a}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OB'} = \nu\overrightarrow{OA} + \lambda\mathbf{b}$, то $\nu = \lambda$. Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\mathbf{b} = \lambda(\overrightarrow{OA} + \mathbf{b}) = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \lambda\overrightarrow{OC}.$$

Тем самым прямая CC' проходит через точку O.

Задачи

1. Сколько разных пятиугольников можно сопоставить пяти различным точкам?

2. Параллелограмм $ABCD$ – это четырехугольник, у которого противоположные стороны AB и CD, а также BC и AD параллельны. Доказать, что тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. При аффинном изоморфизме параллелограмм переходит в параллелограмм. Доказать также, что для плоскости параллелограмм может быть приведен к единичному квадрату $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ аффинным преобразованием. Следовательно, ромб не отличим от параллелограмма в аффинной геометрии.

7. Евклидовы точечные пространства

Далее рассматриваются аффинные пространства над полем действительных чисел.

7.1. Отрезки и выпуклые множества

Пусть A и B – точки аффинного пространства. *Отрезком* $[AB]$ назовем множество точек $C = tA + (1-t)B$, где $0 \leq t \leq 1$. Ясно, что отрезок $[A, B]$ лежит на прямой AB. Отрезок $[A, B]$ равен отрезку $[A', B']$ в том и только том случае, когда множества $\{A, B\}$ и $\{A', B'\}$ совпадают. Точки A и B называются *концами отрезка.* Не исключается совпадение концов отрезка – $A = B$, это в точности тот случай, когда отрезок $[A, B]$ состоит из одной точки. Если точка C принадлежит отрезку $[A, B]$ и не совпадает с его концами, то говорим, что *точка C лежит между A и B.*

Предложение 15. *Для любых попарно различных трех точек, принадлежащих прямой, ровно одна точка лежит между другими.*

Доказательство. Пусть точки A, B, C попарно различны и лежат на прямой ℓ. Отсюда следует, что вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ для какого-либо $\lambda \in \mathbb{R}$. Число λ не может быть нулем, так как $A \neq B$ и не может быть равно 1, так как $B \neq C$. Если $\lambda = -k < 0$, то $\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$, откуда следует, что $A = \frac{1}{1+k}B + \frac{k}{1+k}C$, и тем самым $A \in [B, C]$. Если $0 < \lambda < 1$, то точка $B = (1-\lambda)A + \lambda C$ принадлежит отрезку $[A, C]$. В третьем, оставшемся случае $\lambda > 1$ можно исходить из равенства $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}$ и доказать, что точка C лежит между A и B. Приведенные рассуждения можно обратить, т.е. если, например, точка A лежит между точками B и C, то обязательно $\lambda < 0$, и аналогично для двух оставшихся случаев. Это показывает, что только одна точка из A, B, C находится между двумя другими. $\square$

Подмножество D аффинного пространства над полем $\mathbb{R}$ назовем *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $P, Q \in D$ этому подмножеству принадлежит и весь отрезок $[PQ]$. Из этого определения следует, что пересечение выпуклых множеств снова будет выпуклым и тем самым для любого подмножества F аффинного пространства существует наименьшее выпуклое множество, содержащее F. Назовем его *выпуклой оболочкой множества* F и обозначим $[F]$. Для двух точек A, B выпуклая оболочка совпадает с отрезком $[A, B]$.

Теорема 16. *Выпуклая оболочка системы точек $A_1, ..., A_m$ совпадает с множеством*

$$[A_1, ..., A_m] = \left\{ t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m \mid t_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}.$$

Доказательство. Ясно, что $A_i \in [A_1, ..., A_m]$ для любого i. Пусть

$$P = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m;\ D = t'_1A_1 + t'_2A_2 + \ldots + t'_mA_m$$

– две точки из множества $[A_1, ..., A_m]$. Возьмем произвольную точку $C = \lambda P + (1-\lambda)Q$ на отрезке $[P, Q]$. Тогда

$$C = \sum_{i=1}^{m} (\lambda t_i + (1-\lambda)t'_i)\, A_i \in [A_1, ..., A_m].$$

Доказано, что множество $[A_1, ..., A_m]$ выпукло. Пусть теперь D – какое-либо выпуклое множество, содержащее точки $A_1, ..., A_m$. Индукцией, по количеству ненулевых слагаемых в сумме $P = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m$ докажем, что $P \in D$. Для одного ненулевого слагаемого, точка P совпадает с одной из A_i и утверждение следует из условия $A_i \in D$. Пусть $t_1, t_2 > 0$. Рассмотрим точку $A_{12} = \frac{t_1}{t_1+t_2}A_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}A_2$, принадлежащую отрезку $[A_1, A_2]$ а, значит, и множеству D. Имеем

$$P = (t_1 + t_2)A_{12} + t_3A_3 + \ldots + t_mA_m.$$

Применяя индукционное предположение, получаем, что $P \in D$. Аналогично разбирается случай, когда $t_i, t_j > 0$ для каких-либо двух разных индексов i, j. Доказана минимальность выпуклого множества $[A_1, ..., A_m]$.

7.2. Определение евклидова пространства

Определение. *Евклидовым (точечным) пространством называется аффинное пространство с ассоциированным евклидовым линейным пространством.* Аффинное отображение f одного евклидова пространства в другое называется *изометрией*, если дифференциал Df сохраняет скалярное произведение. Изометричное отображение евклидова пространства на само себя называется иначе *движением*. Движение называется собственным, если определитель матрицы, задающей дифференциал этого движения, положителен.

Пусть D_1, D_2 – подмножества евклидовых пространств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ соответственно. Эти подмножества называются *изометричными*, если существует изометрия $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ такая, что $\varphi(D_1) = D_2$. Если речь идет об одном пространстве ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$), то изометричные подмножества называют *конгруэнтными* или, допуская вольность, равными.

Теорема 17. *Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ – подпространства евклидовых пространств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ одинаковой размерности. Любая изометрия $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ продолжается до изометрии $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. В частности, все евклидовы точечные пространства размерности n изометричны.*

Это утверждение является прямым следствием процесса ортогонализации Шмидта евклидова линейного пространства.

Так как все евклидовы линейные пространства фиксированной размерности n изоморфны пространству строк $\mathbb{R}^n$ с стандартным скалярным произведением

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i,$$

то любое евклидово точечное пространство изометрично пространству строк, которое будем обозначать $\mathbb{E}^n$. В случае $n = 2$ говорим о *евклидовой плоскости*, а в случае $n = 3$ говорим о *евклидовом пространстве.*

Оказывается, что свойство отображения сохранять расстояния является столь жестким, что оно автоматически влечет аффинную линейность.

Предложение 18. *Отображение $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, сохраняющее расстояние, будет движением.*

Доказательство. Пусть $\varphi(O) = P$. Совершая движение – параллельный перенос на вектор $-\overrightarrow{OP}$, сведем утверждение к случаю $\varphi(O) = O$. Из формулы $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$ следует, что отображение $D\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O\varphi(P)}$ сохраняет скалярное произведение. Пусть $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ – ортонормированный базис. Тогда и $\mathbf{g}_i = D\varphi(\mathbf{f}_i)$ также будет ортонормированным базисом. Пусть $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i$ – произвольный вектор. Разложим образ $D\varphi(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{g}_i$ по новому базису. Тогда

$$x_i = D\varphi(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{g}_i = D\varphi(\mathbf{a}) \cdot D\varphi(\mathbf{f}_i) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_i = a_i,$$

откуда следует формула $D\varphi(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{g}_i$ и тем самым следует линейность отображения $D\varphi$. □

Систему координат $O, \mathcal{F}$ евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ такую, что $\mathcal{F}$ – ортонормированный базис ассоциированного линейного пространства, называют также *декартовой системой координат.* Далее предполагаем, что $x_1, \ldots, x_n$ – декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. *Расстояние между двумя точками P и Q евклидова пространства* определим как длину вектора $\overrightarrow{PQ}$

$$d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2}.$$

Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – декартовы координаты точек P и Q, то

$$d(P,Q)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

Для точек P и Q, отличных от точки R, определим *угол* $\angle POQ$ как число из отрезка $[0, \pi]$ такое, что

$$\cos \angle POQ = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right| \left|\overrightarrow{OQ}\right|}.$$

В евклидовом пространстве выполнены все аксиомы евклидовой геометрии, значит, в нём возможны все геометрические построения.

Ортогональная проекция и симметрия

Пусть $L = H \oplus H^{\perp}$ – прямое разложение в сумму подпространства H и его ортогонального дополнения. Предположим нам дано аффинное подпространство $\mathcal{B}$, коллинеарное H. Тогда проекцию $\mathbb{E}^n$ на $\mathcal{B}$ вдоль $H^{\perp}$ назовем *(ортогональной) проекцией на подпространство* $\mathcal{B}$. Аналогично, симметрию $\mathbb{E}^n$ относительно $\mathcal{B}$ вдоль $H^{\perp}$ назовем *(ортогональной) симметрией относительно* $\mathcal{B}$. Следующее утверждение следует из координатной записи симметрии.

Предложение 19. *Симметрия относительно пространства четной коразмерности является собственным движением. Симметрия относительно пространства нечетной коразмерности является несобственным движением.*

Поворот вокруг оси

Пусть $\ell = O + \mathbf{a}\mathbb{R}$ – прямая в евклидовом пространстве, а ψ – ортогональное преобразование линейного подпространства $(\mathbf{a}\mathbb{R})^{\perp}$. Возьмем произвольную точку P и разложим вектор $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. Построим точку Q такую, что $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}t + \psi(\mathbf{v})$. Тогда *поворотом пространства* $\mathbb{E}^n$ *относительно прямой* ℓ *на движение* ψ *ортогональной гиперплоскости* назовем преобразование $R_{\ell,\psi}$, переводящее точку P в Q (рис. 5).

Предложение 20. *Поворот* $R_{\ell,\psi}$ *является движением евклидова пространства. Оно будет собственным в том и только том случае, когда* ψ *– собственное движение.*

Предложение 21. *Пусть* $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{E}^n$, *и* $\mathbf{v}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *– ненулевой вектор. Тогда*

$$\tau: \quad A_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + A_n(x_n - x_n^0) = 0$$

– уравнение гиперплоскости, проходящей через точку P *и перпендикулярной вектору* $\mathbf{v}$.

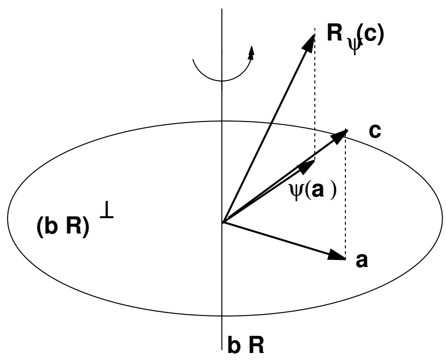

Рис. 5. Поворот вокруг оси

Действительно, если обозначить через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координаты произвольной точки Q, то

$$Q \in \tau \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \sum_i A_i(x_i - x_i^0) = 0.$$

Как следствие доказанного результата получаем, что

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

– уравнение прямой на евклидовой плоскости, проходящей через точку $P(x_0, y_0)$ *и перпендикулярной ненулевому вектору* $A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$. Аналогично,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– уравнение плоскости в трехмерном пространстве, проходящей через точку $P(x_0, y_0, z_0)$ *и перпендикулярной ненулевому вектору* $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$.

8. Расстояние между подпространствами

Если даны два непустых подмножества евклидова пространства, то *расстояние* между ними – это точная нижняя грань всех длин $|PQ|$, где P – пробегает первое подмножество, а Q пробегает второе подмножество.

Теорема 22. *Расстояние от точки* $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *до гиперплоскости* $\tau : A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B = 0$ *равно длине перпендикуляра, опущенного из точки* P *на гиперплоскость и вычисляется по следующей формуле:*

$$d(P,\tau) = \frac{\left|A_1x_1^0 + \ldots + A_nx_n^0 + B\right|}{\sqrt{A_1^2 + \ldots + A_n^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $Q \in \tau$ есть ортогональная проекция точки P на гиперплоскость τ (см. рис. 6). Обозначим через $\mathbf{a}$ вектор с координатами $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Он перпендикулярен гиперплоскости τ, и поэтому вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен $\overrightarrow{QP}$, т.е. $\overrightarrow{QP} = t\mathbf{a}^0$ для некоторого числа t. Здесь $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ – орт вектора $\mathbf{a}$. Тогда имеет место соотношение

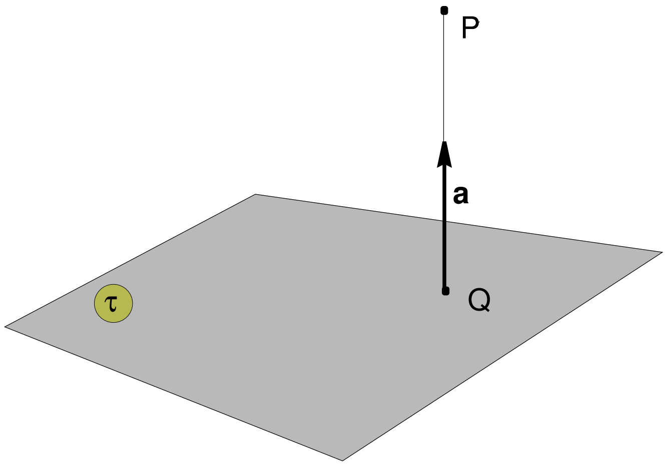

Рис. 6. Расстояние от точки до гиперплоскости

$$t^2 = |QP|^2 = \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} \cdot (t\mathbf{a}^0) = \frac{t\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{QP}}{|\mathbf{a}|}. \qquad (21)$$

Но $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{QP} = \sum A_i(x_i^0 - z_i) = \sum A_i x_i + B$, где z_i – координаты точки Q. Приравнивая модули левой и правой части в соотношении (21), а затем сокращая на $|t|$, получим $d(P,\tau) = |t| = \frac{\left|\sum A_i x_i^0 + B\right|}{|\mathbf{a}|}$, что и требовалось доказать.

Фиксируем далее гиперплоскость $\tau : A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B = 0$. Как следует из теоремы 22, модуль величины $A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B$ пропорционален расстоянию от точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до гиперплоскости τ. Знак этой величины также имеет геометрический смысл. Обозначим

$$\mathcal{A}_+ = \{P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{A} \,|\, A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B > 0\};$$

$$\mathcal{A}_- = \{P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{A} \,|\, A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + B < 0\}.$$

Теорема 23. *Подмножества $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$ и гиперплоскость τ разбивают евклидово пространство $\mathbb{E}^n$. Каждое из этих множеств выпукло. Если $P \in \mathcal{A}_+$, $Q \in \mathcal{A}_-$, то отрезок PQ пересекает гиперплоскость τ.*

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – координаты точек P и Q соответственно. Тогда $(a_1 t + b_1(1-t), \ldots, a_n t + b_n(1-t))$ при $t \in [0,1]$ – координаты произвольной точки отрезка PQ. Так как

$$\sum_i A_i(a_i t + b_i(1-t)) + B = (\sum_i A_i a_i + B)t + (\sum_i A_i b_i + B)(1-t),$$

то утверждения о выпуклости множеств $\mathcal{A}_+$ и $\mathcal{A}_-$ становятся очевидными. Если же $P \in \mathcal{A}_+$, а $Q \in \mathcal{A}_-$, то $p := \sum A_i a_i + B > 0$ и $q := -(\sum A_i b_i + B) > 0$. Тогда при $t = \frac{q}{p+q} \in [0,1]$ получаем точку из отрезка PQ, принадлежащую гиперплоскости τ. □

9. Угол между подпространствами

Выберем точку O и ненулевой вектор $\mathbf{a}$. Подмножество

$$m = \{O + \mathbf{a} \cdot t \mid t \geq 0\}$$

прямой $O + \mathbf{a}\mathbb{R}$ назовем *лучем с началом в точке O и направляющим вектором* $\mathbf{a}$. Пусть m_1, m_2, m_3 – три луча с началом в одной точке O и с направляющими векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Скажем, что луч m_2 *лежит между лучами m_1 и m_3*, если имеет место равенство $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3$ для каких-либо неотрицательных чисел λ и μ. Заметим, что из трех попарно различных лучей с общей вершиной не обязательно один лежит между двумя другими (приведите пример). Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – два ненулевых вектора евклидова линейного пространства. Обозначим через $\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *(неориентированный) угол между векторами* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как число $\arccos \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$. Если m_1, m_2 – два луча с направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, то *неориенти-*

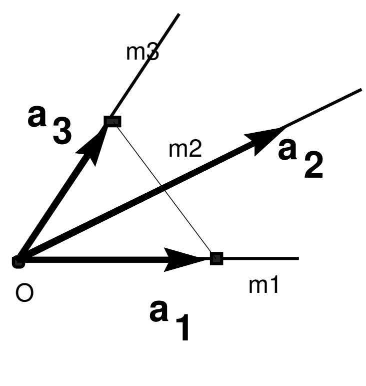

Рис. 7. Угол между лучами

рованным углом между лучами m_1 *и* m_2 считаем угол $\angle m_1, m_2$ по определению равны $\angle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Ясно, что эта величина не зависит от выбора направляющих векторов.

Предложение 24. *Если луч* m_2 *лежит между лучами* m_1 *и* m_3*, то все три луча лежат в одной плоскости, и имеет место равенство:*

$$\angle m_1, m_3 = \angle m_1, m_2 + \angle m_2, m_3. \tag{22}$$

Доказательство. Можно считать, что $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_3| = 1$ (рис. 7). Обозначим $z = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3$. Эта величина в силу единичности векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ совпадет с $\cos(\angle m_1, m_3)$. Пусть $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3$ для некоторых $\lambda, \mu \geq 0$. Тогда

$$\cos(\angle m_1, m_2) = \frac{\mathbf{a}_1(\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3)}{|\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3|} = \frac{\lambda + \mu z}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu z}};$$

$$\cos(\angle m_2, m_3) = \frac{\mathbf{a}_3(\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3)}{|\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3|} = \frac{\lambda z + \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu z}}.$$

Равенство (22) эквивалентно следующему:

$$\cos(\angle m_1, m_3) = \cos(\angle m_1, m_2)\cos(\angle m_2, m_3) - \sin(\angle m_1, m_2)\sin(\angle m_2, m_3),$$

а оно, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$z(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu z) = (\lambda + \mu z)(\lambda z + \mu) -$$
$$- \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu z - (\lambda + \mu z)^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu z - (\lambda z + \mu)^2)}.$$

Выражение под квадратным корнем упрощается так: $(\mu^2 - \mu^2 z^2)(\lambda^2 - \lambda^2 z^2)$. Тогда, перенося этот квадратный корень в левую часть, все остальное – в правую часть и возводя в квадрат, получаем

$$(\mu^2 - \mu^2 z^2)(\lambda^2 - \lambda^2 z^2) = (\lambda\mu - \lambda\mu z^2)^2.$$

Если $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, то это равенство очевидно. Иначе, сокращая его на $\lambda^2\mu^2$, сводим также к очевидному равенству: $(1 - z^2)(1 - z^2) = (1 - z^2)^2$ $\square$

Угол между коллинеарными подпространствами по определению равен нулю. Угол между не коллинеарными подпространствами H_1, H_2 евклидова линейного пространства определим как наименьший из углов

$\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ пробегает подпространство $H_1 \cap (H_1 \cap H_2)^{\perp}$, а $\mathbf{b}$ пробегает подпространство $H_2 \cap (H_1 \cap H_2)^{\perp}$. Его значения принадлежат отрезку $[0, \pi/2]$. *Угол между аффинными подпространствами* $P_1 + H_1$ *и* $P_2 + H_2$ по определению равен углу между ассоциированными с ними линейными подпространствами H_1 и H_2 (рис. 8). В частности, если этот угол равен $\pi/2$, то такие подпространства назовем *перпендикулярными*.

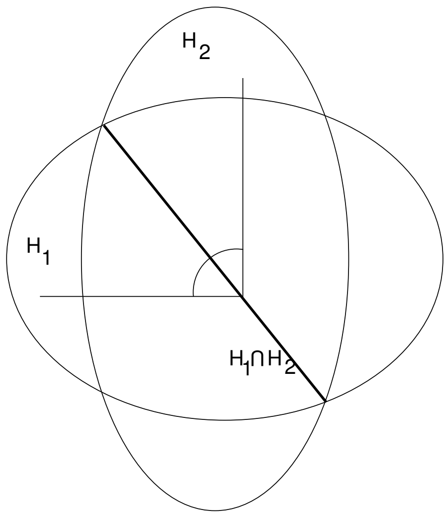

Рис. 8. Угол между подпространствами

Теорема 25. *Угол между прямой и подпространством, не перпендикулярным этой прямой, равен углу между этой прямой и ее ортогональной проекцией на заданное подпространство.*

Доказательство. Это утверждение сводится к линейным евклидовым пространствам. Пусть H_1 одномерное подпространство, порожденное единичным вектором $\mathbf{a}$, а H – какое-либо подпространство. Рассмотрим ортогональную проекцию $\mathbf{b} \in H$ вектора $\mathbf{a}$ на H. Выберем произвольный вектор $\mathbf{c} \in H$. Тогда

$$\cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ba}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{bb}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{b}|,$$

так как $\mathbf{a} - \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$. Далее

$$\cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{ca}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{c}(\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{cb}}{|\mathbf{c}|}$$

по той же причине. Но $|\mathbf{b}| \geq \frac{\mathbf{cb}}{|\mathbf{c}|}$, ибо это эквивалентно неравенству Коши–Буняковского $|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \geq \mathbf{cb}$. Следовательно, $\cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $\angle \mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \angle \mathbf{a}, \mathbf{c}$. $\square$

Следствие. *Угол между прямой* ℓ*, коллинеарной вектору* $\mathbf{v}$ *с координатами* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$*, и гиперплоскостью* $\tau : \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B = 0$

находится из соотношения

$$\angle(\ell,\tau) = \arcsin\frac{|\sum_{i=1}^{n} A_i v_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sum_{i=1}^{n} A_i^2}}.$$

Задачи

1. Доказать, что следующие условия для лучей m_i с общим началом O направляющими векторами $\mathbf{a}_i$ $(i = 1,2,3)$ эквивалентны:

а) для любых двух точек $P \in m_1, Q \in m_3$ отрезок PQ пересекает m_2;

б) найдутся две точки $P \in m_1$ и $Q \in m_3$, отличные от их общего начала и такие, что отрезок PQ пересекает m_2; в) луч m_2 лежит между лучами m_1 и $_3$.

2. Доказать, что равенство $|PR| = |PQ| + |QR|$ имеет место тогда и только тогда, когда точка Q принадлежит отрезку PR. Аналогично равенство $\angle m_1, m_3 = \angle m_1, m_2 + \angle m_2, m_3$ для трех лучей с общим началом имеет место тогда и только тогда, когда луч m_2 лежит между лучами m_1 и m_3.

3. Найти углы между гранями 4-мерного симплекса $x+y+z+t \le 1$, $x,y,z,t \ge 0$. Черырехмерный симплекс в $\mathbb{R}^4$ задается как множество $\{(x,y,z,t) \mid 0 \le x,y,z,t;\ x+y+z+t \le 1\}$. Нарисовать 4-мерный симплекс.

9.1. Ориентированные углы

Пусть L – евклидово двумерное линейное пространство с фиксированным базисом. Фиксация базиса означает выбор одной из двух возможных ориентации плоскости. Для любой упорядоченной пары векторов $(\mathbf{a}(a_1,a_2), \mathbf{b}(b_1,b_2))$ обозначим через $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ определитель матрицы, составленной из координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Скажем, что пара $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ориентирована положительно, если $\Delta > 0$ и ориентирована отрицательно, если $\Delta < 0$. Если же $\Delta = 0$, то вектора $\mathbf{a},\mathbf{b}$ коллинеарны, и пара $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ориентации не имеет.

Определение. *Ориентированным углом между ненулевым вектором*

$\mathbf{a}$ *и ненулевым вектором* $\mathbf{b}$ назовем величину

$$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \begin{cases} (\angle\mathbf{a},\mathbf{b}) + 2\pi\mathbb{Z}, & \text{если } \Delta \geq 0; \\ -(\angle\mathbf{a},\mathbf{b}) + 2\pi\mathbb{Z}, & \text{если } \Delta < 0 \end{cases}.$$

Как видно из этого определения, ориентированный угол – элемент аддитивной группы $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, геометрически представляющую из себя окружность. Отметим некоторые свойства ориентированного угла

А. Имеет место равенство $(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}}) = -(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$.

Действительно, если $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0$, то $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{a}) < 0$. Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}} = -\angle\mathbf{b},\mathbf{a} + 2\pi\mathbb{Z} = -(\angle\mathbf{a},\mathbf{b} + 2\pi\mathbb{Z}) = -\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Аналогично разбирается случай $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$. Если $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$, то либо 1) $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, либо 2) $\mathbf{b} = -\lambda\mathbf{a}$, где $\lambda > 0$. В первом случае

$$\widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}} = \angle\mathbf{b},\mathbf{a} + 2\pi\mathbb{Z} = 2\pi\mathbb{Z} = -(\angle\mathbf{a},\mathbf{b} + 2\pi\mathbb{Z}) = -\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Во втором случае,

$$\widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}} = \angle\mathbf{b},\mathbf{a} + 2\pi\mathbb{Z} = \pi + 2\pi\mathbb{Z} = -\pi + 2\pi\mathbb{Z} = -(\angle\mathbf{a},\mathbf{b} + 2\pi\mathbb{Z}) = -\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Б. Имеет место равенство $\widehat{\mathbf{a},(-\mathbf{b})} = \widehat{(-\mathbf{a}),\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \pi$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \angle\mathbf{a},\mathbf{b}$. Тогда

$$\angle\mathbf{a},(-\mathbf{b}) = \arccos\frac{-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \pi - \varphi.$$

Если $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0$, то, во-первых, $\Delta(\mathbf{a},-\mathbf{b}) < 0$, а, во-вторых,

$$\widehat{\mathbf{a},-\mathbf{b}} = -\angle\mathbf{a},(-\mathbf{b}) +_2 \pi\mathbb{Z} = -(\pi - \varphi) + 2\pi\mathbb{Z} =$$

$$= -\pi + \varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \pi + (\varphi + 2\pi\mathbb{Z}) = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Если же $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$, то $\Delta(\mathbf{a},-\mathbf{b}) > 0$ и

$$\widehat{\mathbf{a},-\mathbf{b}} = \angle\mathbf{a},(-\mathbf{b}) + 2\pi\mathbb{Z} = (\pi - \varphi) + 2\pi\mathbb{Z} = \pi - (\varphi + 2\pi\mathbb{Z}) = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Осталось рассмотреть два случая: 1) $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ и 2) $\mathbf{b} = -\lambda\mathbf{a}$, где $\lambda > 0$. В первом случае $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 2\pi\mathbb{Z}$ и $\widehat{\mathbf{a},-\mathbf{b}} = \pi + 2\pi\mathbb{Z} = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$. Во втором случае, $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ и $\widehat{\mathbf{a},-\mathbf{b}} = 2\pi\mathbb{Z} = \pi + (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$.

Второе равенство свойства Б следует из первого с применением свойства А:

$$\widehat{-\mathbf{a},\mathbf{b}} = -\widehat{\mathbf{a},-\mathbf{a}} = -(\pi + \widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}}) = -\pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

$\square$

Теорема 26. *Для любых трех ненулевых векторов на плоскости имеет место равенство*

$$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}) = (\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) + (\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}).$$

Доказательство. Три вектора на плоскости линейно зависимы. Рассмотрим все возможные случаи линейной зависимости.

Случай 1 (основной). $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}$, где $\lambda, \mu \geq 0$.

Тогда $\mathbf{b}$ лежит между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ и согласно предложению 24 имеет место равенство $\angle\mathbf{a},\mathbf{c} = \angle\mathbf{a},\mathbf{b} + \angle\mathbf{b},\mathbf{c}$. Рассмотрим два подслучая

а) $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{c}) > 0$. Тогда $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) \geq 0$ и $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) \geq 0$. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 + \mu c_1 & \lambda a_2 + \mu c_2 \end{vmatrix} = \mu \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}} = \angle\mathbf{a},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z} = \angle\mathbf{a},\mathbf{b} + \angle\mathbf{b},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z} =$$

$$= (\angle\mathbf{a},\mathbf{b} + 2\pi\mathbb{Z}) + (\angle\mathbf{b},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z}) = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}.$$

б) $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{c}) < 0$. Тогда $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq 0$ и $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) \leq 0$. Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}} = -\angle\mathbf{a},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z} =$$

$$= (-\angle\mathbf{a},\mathbf{b} + 2\pi\mathbb{Z}) + (-\angle\mathbf{b},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z}) = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}.$$

Заметим, что если $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$, то $\mu = 0$, $\lambda > 0$, и равенство $-\angle\mathbf{a},\mathbf{b}+$ $+2\pi\mathbb{Z} = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ все равно имеет место. Аналогично, если $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$, то равенство $-\angle\mathbf{b},\mathbf{c} + 2\pi\mathbb{Z} = \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}$ сохраняется.

Случай 2: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{c}$, где $\lambda, \mu \geq 0$.

Если $\lambda = 0$, то $\mathbf{b} = -\mu\mathbf{c}$, $\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ и $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{a},(-\mathbf{c})}$. Утверждение тогда вытекает из свойства Б. Иначе, $\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{b} + \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{c}$ и мы вправе применить случай 1: $\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}} + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}$. Перенося $\widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}}$ в левую часть и меняя знак одновременно с изменением порядка векторов (свойство А), получаем:

$$\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} - \widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}},$$

что и требуется доказать.

Случай 3: $\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}$, где $\lambda, \mu \geq 0$ аналогичен случаю 2.

Случай 4: $\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{c}$, где $\lambda, \mu > 0$.

Тогда вектор $-\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ лежит между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Применяя основной случай 1, получаем

$$\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}} = \widehat{\mathbf{a},-\mathbf{b}} + \widehat{(-\mathbf{b}),\mathbf{c}} = \pi + \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \pi + \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}$$

ибо $\pi + \pi = 0 \pmod{2\pi}$. □

10. Треугольники

В этом параграфе основное поле есть поле действительных чисел. Из определения многоугольника вытекает, что треугольник ΔABC – это множество из трех точек $\{A, B, C\}$. Эти точки называются *вершинами треугольника*, а отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ называются *сторонами треугольника* ΔABC. Напомним, что два треугольника конгруэнтны, или равны, если существует движение евклидова пространства, переводящее вершины одного треугольника в вершины второго треугольника. Очевидно, что тогда это же движение переводит стороны первого треугольника в стороны второго треугольника. Если вершины A, B, C попарно различны, определены углы треугольника

$$\angle A = \angle BAC, \quad \angle B = \angle ABC, \quad \angle C = \angle ACB.$$

Теорема 27. *Сумма углов в треугольнике равна π.*

Доказательство. Случай 1. Один из углов, скажем, угол $\angle B$ равен π.

Тогда $\overrightarrow{BA} = -\lambda\overrightarrow{BC}$ для некоторого положительного числа λ. Отсюда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (1+\lambda)\overrightarrow{AB}$ и поэтому $\angle A = 0$. Аналогично, $\angle C = 0$. Получаем: $\angle A + \angle B + \angle C = 0 + \pi + 0 = \pi$, что и требовалось установить.

Случай 2. Ни один из углов треугольника не равен π.

Обозначим $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$. Тогда, применяя свойство Б из п. 9.1, получаем

$$\angle A + \angle B + \angle C + 2\pi\mathbb{Z} = (\widehat{\mathbf{a}, -\mathbf{c}}) + (\widehat{\mathbf{c}, -\mathbf{b}}) + (\widehat{\mathbf{b}, -\mathbf{a}}) =$$

$$= \pi + (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) + \pi + (\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{b}}) + \pi + (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}}) = 3\pi + (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}}) = \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Это значит, что $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + 2\pi k$ для некоторого целого k. Учитывая, что значения углов треугольника лежат в полуинтервале $[0, \pi)$, получаем равенство $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$. □

Теорема 28 (косинусов). *Пусть в треугольнике ΔABC вершины попарно различны. Тогда*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos \angle A.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из соотношения

$$|BC|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 =$$

$$= |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC| \cos \angle A.$$

□

Треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов равен $\pi/2$.

Следствие (теорема Пифагора). *Пусть $\angle A = \pi/2$. Тогда квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов –*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2.$$

Теорема 29 (признаки равенства треугольников). *Невырожденные треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ равны в каждом из следующих случаев:*

- $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $\angle A = \angle A'$;
- $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|AC| = |A'C'|$;
- $|AB| = |A'B'|$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

Доказательство. Обозначим через τ (τ') плоскость, проходящую через точки A, B, C (A', B', C'). Выберем в плоскости τ ортонормированный репер $A, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ так, что A – начало координат, $\mathbf{f}_1$ есть орт вектора $\overrightarrow{AB}$, а точка $A + \mathbf{f}_2$ лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка C. Выберем аналогичный репер $A', \mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2$ в плоскости τ'. Обозначим через $\kappa : \tau \to \tau'$ изометрию, такую, что $\kappa(A) = A'$, $D\kappa(\mathbf{f}_i) = \mathbf{f}'_i$ ($i = 1, 2$). Продолжим κ до движения всего пространства (если размерность пространства больше или равна 3, то продолжение можно выбрать среди собственных движений). Так как $\overrightarrow{AB} = |AB|\,\mathbf{f}_1$ и $|AB| = |A'B'|$ во всех трех случаях, то $\kappa(B) = B'$. Тогда доказательство теоремы сводится к случаю, когда все точки A, B, C, A', B', C' лежат в одной плоскости, причем $A = A'$, $B = B'$ и точки C и C' лежат по одну сторону от прямой AB.

Доказываем теперь первый признак. Из равенства углов $\angle A = \angle A'$ и предложения 24 следует, что лучи с вершиной в точке A, порождаемые векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC'}$, совпадают. Тем самым имеет место равенство $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AC'}$ с положительным коэффициентом λ. Но так как $|AC| = |AC'|$, то $\lambda = 1$ и $C = C'$.

Доказываем второй признак. Снова имеем совпадение лучей и равенство $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AC'}$ с положительным коэффициентом λ. Но, аналогично, имеем равенство $\overrightarrow{BC} = \mu\overrightarrow{BC'}$ с положительным коэффициентом μ. Вычитаем из первого равенства второе:

$$\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AC'} - \mu\overrightarrow{BC'}.$$

В силу невырожденности треугольника $\Delta ABC'$ вектора $\overrightarrow{AC'}$ и $\overrightarrow{BC'}$ линейно независимы и поэтому из последнего равенства следует, что $\lambda = \mu = 1$. Это дает совпадение $C = C'$.

Доказываем третий признак. Из условия и теоремы косинусов вытекает, что $\cos\angle CAB = (|AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2)/2\,|AC|\,|AB|$ в треугольнике ΔABC совпадает с косинусом этого угла $\angle C'A'B'$ в треугольнике $\Delta A'B'C'$. Тогда и углы совпадают: $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Остается применить первый признак. $\square$

Задачи

1. Объемом прямоугольного параллелепипеда в $\mathbb{E}^n$, заданного неравенствами $a_i \le x_i \le b_i$, называется произведение $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Учитывая, что объем есть аддитивная величина, найти объем стандартного симплекса, заданного неравенствами $x_i \ge 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i \le 1$.

2. Найти объем n-мерного шара $\sum_{i=1}^n x_i^2 \le R^2$ и площадь $(n-1)$-мерной сферы $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$ радиуса R.

3. Доказать, что в треугольнике высоты (биссектрисы, срединные перпендикуляры) пересекаются в одной точке.

4. Задать n-мерный правильный полиэдр (тело с $n+1$ вершиной, у которого все попарные расстояния между вершинами совпадают). Вычислить его характеристики – число k-мерных граней, объем полиэдра и "площадь" полной поверхности.

Библиографический список

[1] *Дубровин, Н.И.* Конспект лекций по алгебре/ Н.И. Дубровин. – Владимир: ВлГТУ, 1997 – 56с.

[2] *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру/ А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1977 – 496с.

[3] *Кострикин, А.И.* Линейная алгебра и геометрия/ А.И. Кострикин, Ю.И. Манин – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 279с.

[4] *Постников, М.М.* Лекции по геометрии/ М.М. Постников. – Изд.2-е. – М.: Наука, 1986. – 325с.

[5] *Берже, М* Геометрия. В 2х т. Т. 1,2/ М. Берже. – М.: Мир, 1984. – Т1– 287с, Т2 – 304с.

Оглавление