

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А.В. БЕЛЕВИЧ, Н.С. ПРОВОРОВА

# СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

В двух частях

Часть 1. Алгоритмы МКЭ

Практикум

Владимир 2006

УДК 519.688  
ББК 22.193  
Б43

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
зав. кафедрой обработки металлов давлением  
Московского государственного института стали и сплавов  
(технологический университет)  
*Б.А. Романцев*

Кандидат технических наук, доцент  
Владимирского государственного университета  
*Л.Е. Кондратьева*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**Белевич, А. В.**

Б43 Системы конечно-элементного анализа. В2 ч. Ч. 1. Алгоритмы МКЭ :  
практикум / А. В. Белевич, Н. С. Проворова ; Владим. гос. ун-т. Вла-  
димир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 76 с. – ISBN 5-89368-653-5.

Разработан для студентов специальности 151001 “Технология машиностроения”  
дневной формы обучения в соответствии с государственным стандартом. Первая часть  
практикума посвящена вычислительным и практическим аспектам применения метода  
конечных элементов. Структура практикума, содержание практических занятий на-  
правлены на приобретение навыков инженерных расчетов и обеспечивают последова-  
тельное и углубленное ознакомление с алгоритмами метода конечных элементов. Тематика  
охватывает вопросы автоматического разбиения областей и построения сеток, локальной  
и глобальной аппроксимации, формирования и преобразования матриц системы  
уравнений, вычисления скалярных и векторных величин и сравнения результатов  
вычислений с аналитическим решением задач упругости. Используются научные про-  
граммы, разработанные в ВлГУ, а также современная программа Cosmos. Практикум  
может быть полезен при подготовке бакалавров, магистров и аспирантов.

Табл. 4. Ил. 20. Библиогр.: 13 назв.

УДК 519.688  
ББК 22.193

ISBN 5-89368-653-5

© Владимирский государственный  
университет, 2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Практическое занятие № 1. Построение сеток симплекс- элементов с помощью программы 2DMESH.....	6
Практическое занятие № 2. Вычисление температуры в элементе при двумерном переносе тепла.....	13
Практическое занятие № 3. Построение глобальной матрицы жесткости.....	21
Практическое занятие № 4. Исследование концентрации напряжений с помощью программы 2DMESH.....	28
Практическое занятие № 5. Расчет напряженного состояния в пластине в программе COSMOS/М.....	33
Практическое занятие № 6. Исследование тепловых деформаций детали с применением пакета COSMOS/М.....	40
Практическое занятие № 7. Анализ напряженного деформированного состояния в сечении трубы и оценка точности вычислений.....	44
Заключение.....	48
Приложение 1.....	51
Приложение 2.....	53
Приложение 3.....	57
Приложение 4.....	58
Приложение 5.....	61
Приложение 6.....	62
Приложение 7.....	64
Приложение 8.....	71
Библиографический список .....	73

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум разработан согласно учебному плану специальности 151001 как дополнение к курсу лекций «Системы конечно-элементного анализа», читаемому в ВлГУ с 2001 г.

Практикум направлен на приобретение навыков постановки расчетных задач теории упругости и теплопроводности, программирования на основе алгоритмов метода конечных элементов и вычисления параметров с использованием различных программ. Данной цели служит ознакомление с алгоритмами МКЭ, со структурой команд, с организацией вычислительного процесса, правилами выполнения расчетов в диалоговом режиме и анализа результатов вычислений.

Опыт внедрения в практику инженерных расчетов новых программных продуктов (САЕ-систем, пакетов Mathcad и Matlab) показал, что вопросы рационального выбора конечно-элементных схем и организации вычислений пока недостаточно освещены в специальной, а тем более учебной литературе. Многообразие и громоздкий характер интерфейсов программ (в основном англоязычных) также не способствуют поставленной цели, усложняя решение задач и затрудняя работу пользователя.

До последнего времени практические руководства, направленные на приобретение навыков численной реализации процедур МКЭ, выбор рациональных сеток элементов, правил организации вычислений с помощью разных программ, отсутствовали.

С учетом изложенного в практикуме отражены такие аспекты МКЭ, как автоматизация разбиения, выбор элементов и описание геометрии (занятие № 1), вычисления с помощью функций формы и формирование матриц МКЭ, локальная и глобальная аппроксимация, задание граничных условий (занятия № 2 – 3), разработка модели с использованием баз данных о свойствах материалов и расчетное моделирование эффекта концентрации напряжений (занятие № 4), вычисление температурных деформаций с помощью пакета Cosmos (занятия № 5 – 6), сравнение результатов расчетов МКЭ с аналитическим решением краевых задач, а также расчетов в пакете Cosmos/М и Mathcad (занятие № 7).

Предложенная структура практикума была сформирована на протяжении последних лет по мере накопления опыта решения задач вычислительной механики, разработки собственных научных программ и активного использования современных пакетов Promechanica, Cosmos, QForm2D. Составлению практикума предшествовало накопление опыта решения задач нестационарной теплопроводности, упругости и пластичности.

При выполнении практикума используются учебные версии научных программ МКЭ, разработанных ранее на кафедре технологии машиностроения. При разработке программ МКЭ были изучены вопросы оценки точности конечно-элементных схем, проверена сходимость, выполнено сравнение с сеточными методами решения дифференциальных уравнений теплопроводности.

Достоверность результатов вычислений с помощью применяемых программ проверена путем сравнения с известными аналитическими решениями задач механики, данными экспериментов и подтверждена практикой проектирования нового промышленного оборудования (прил. 8). Разработка новых программ и их проверка были выполнены при активном участии студентов и аспирантов.

Структура практикума и содержание занятий отражают точку зрения авторов на последовательность изучения МКЭ, совпадающую с точкой зрения, выработанной ранее в работах Л. Сегерлинда, Г. Я. Гуна. Книга ориентирует студентов на глубокое изучение прикладных аспектов МКЭ, необходимое при разработке математических моделей. Выполнение заданий практикума будет также способствовать приобретению навыков исследования и анализа деформаций, оценки эффекта концентрации напряжений, сравнения результатов расчетного моделирования напряжений с аналитическим решением задач теории упругости. Такие навыки будут полезны при выполнении курсового и дипломного проектирования, в последующей деятельности конструктора или технолога, а также при обучении в аспирантуре и магистратуре.

В настоящее время на кафедре выполняется работа по дальнейшему совершенствованию практикума с учетом возможностей версий программ SOLIDWORKS /COSMOS.

## Практическое занятие № 1

### ПОСТРОЕНИЕ СЕТОК СИМПЛЕКС-ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ 2DMESH

#### Цель работы

Подобрать параметры автоматического разбиения заданной области с отверстием и построить качественные сетки симплекс-элементов с помощью программы 2DMESH

#### Задания

1. Построить конечно-элементную модель области для поперечного сечения матрицы с прямоугольным отверстием и определить ее характерные параметры.

2. Построить конечно-элементную сетку поперечного сечения матрицы с каналом сложной формы с помощью процедуры геометрического моделирования по вариантам.

3. Получить конечно-элементную сетку плоской фигуры с помощью программы GRID.

4. Сохранить построенные сетки в виде файлов на жестком диске, включить их в отчет. Для каждой сетки указать способ разбиения, исходные данные и характерные параметры модели. Сделать заключение о пригодности сеток для выполнения счета на ЭВМ и оформить отчет.

#### Общие сведения

Анализ и решение проблемы механики сплошной среды по МКЭ всегда сводится к так называемому процессу "шаг за шагом" (*step by step process*), который имеет огромное практическое значение для использования ЭВМ в целях эффективного расчета. В этом процессе, который можно представить как универсальный алгоритм, выделяют шесть основных шагов, осуществляемых в виде следующей последовательности.

На 1-м этапе выполняют дискретизацию сплошной среды. Функции интерполяции выбирают на 2-м этапе. На 3-м этапе формируют матрицы уравнений для сетки конечных элементов. Ввод граничных условий выполняют на 4-м этапе. На 5-м этапе решают систему уравнений. Расчет нужных воздействий проводят на 6-м этапе.

Данный алгоритм положен в основу всех существующих конечно-элементных систем. Его используют также при разработке новых программ МКЭ.

Применение метода конечных элементов приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений. Число уравнений систем МКЭ равно числу неизвестных величин, вычисляемых в узлах области. Дискретизация заключается в разбиении модели на конечные элементы и нумерации узлов. Плохое или несовершенное разбиение будет приводить к ошибочным результатам, даже если остальные этапы метода осуществлялись с достаточной точностью [1].

Размерность системы зависит от решаемой задачи и может достигать в плоских задачах нескольких тысяч. Опыт решения плоских задач МКЭ на ЭВМ с доступными ресурсами показывает, что, применяя различные схемы разбиения на симплекс-элементы, решение систем уравнений указанного порядка и вычисление искомых параметров выполняют в обозримые сроки. При решении объемных задач число уравнений может составлять 50 – 200 тысяч. В данном случае время вычислений зависит от ресурсов ЭВМ и может исчисляться десятками часов. Вследствие этого дискретизация модели является одним из важнейших шагов в МКЭ.

В соответствии с требованиями к дискретизации на симплекс-элементы, изложенными в работе [1], элементы должны быть выбраны достаточно малыми, чтобы получить приемлемые результаты на выделенных локальных участках расчетной области. Указанные требования к разбиению модели следует учитывать, например, при вычислении температуры в деформирующем инструменте, соприкасающемся с нагретым металлом. Однако сгущение сетки элементов на локальных участках приводит к увеличению числа узлов и сопровождается увеличением времени вычислений. В то же время применение достаточно крупных элементов сокращает вычислительную работу. Чтобы избежать погрешностей, возникающих при

решении систем линейных алгебраических уравнений и с достаточной точностью аппроксимировать поле искоемых переменных в модели, рекомендуется использовать треугольные элементы с углами от 45 до 90°. Необходимо уменьшать размеры сетки там, где предполагаются большие градиенты искоемых величин.

С дискретизацией области тесно связана проблема нумерации узлов. Матрица системы уравнений является симметричной матрицей ленточного типа, то есть ненулевые элементы группируются в узкой ленте вокруг главной диагонали. Уменьшение ширины ленты снижает требуемый объем памяти для хранения элементов матрицы, сокращает время вычислений и повышает точность результатов. Ширина полуленты матрицы равна для плоских задач  $B = 2(m+1)$ , где  $m$  – максимальная разность между глобальными номерами узлов в элементе.

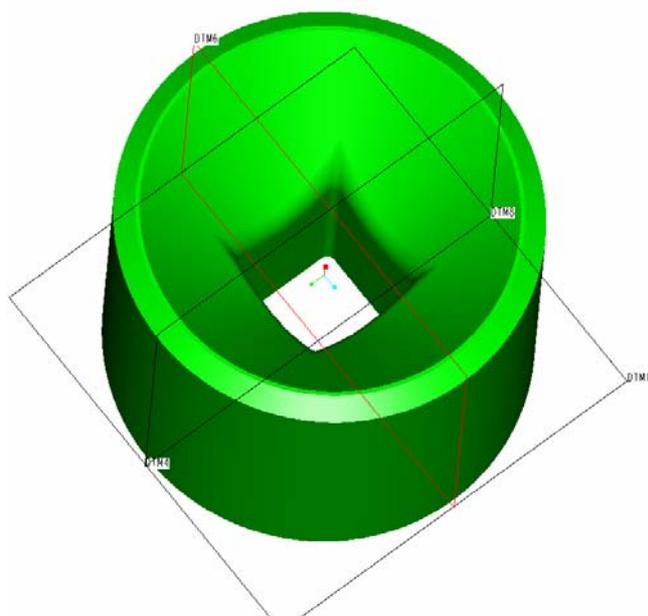


Рис. 1. Твёрдотельная модель прессовой матрицы с квадратным отверстием

Глобальные номера узлов в элементе должны быть такими, чтобы разность между любыми двумя из них была минимальной. Это уменьшает ширину ленты матрицы жесткости, что не только сокращает требуемый объем памяти и снижает время вычислений, но и повышает точность результатов.

Объект изучения в настоящей работе – прессовая матрица с заходным конусом и калибрующим каналом, представленная на рис. 1.

Проводя плоскость, перпендикулярную вертикальной оси, получают область, ограниченную наружным контуром в виде окружности и внутренним контуром, соответствующим форме отверстия матрицы (рис. 2).

При выполнении п. 1 заданий следует ознакомиться с внешним видом исследуемой области и размерами, проставленными на ее эскизе, а затем – с особенностями программы 2DMESH и способами разбиения облас-

ти на конечные элементы. Например, на рис. 2 приведена 1/4 часть модели, соответствующая сечению матрицы с прямоугольным отверстием.

В данной работе используются два способа автоматического разбиения на конечные элементы: радиальный и зональный. Оба названных способа реализованы с помощью разработанной для этой цели программы 2DMESH.

### Порядок проведения занятия

В соответствии с п. 1 заданий построить сетку на основе разбиения радиальным способом. Данный способ наиболее удобен и прост для численной реализации при дискретизации сечений тел вращения с внешним контуром в виде круга и сложным внутренним контуром. Для выполнения п. 1 заданий необходимо:

- ознакомиться с методикой подбора вводимых параметров.
- ввести параметры и построить сетку элементов.

В соответствии с разработанным алгоритмом для получения сетки конечных элементов в области на рис. 2 надо ввести восемь параметров. Интерфейс к задаче автоматического разбиения области на конечные элементы с обозначенными параметрами приведен на рис. 3. Значение каждого из названных параметров вводят с клавиатуры.

На втором этапе вводят следующие параметры:

- $\alpha$  – центральный угол, определяющий размеры сектора, град;
- $d$  – расстояние между соседними точками на линейных участках внутреннего контура, мм;
- $\beta$  – угол между соседними точками на криволинейных участках внутреннего контура, град;
- $r$  – радиус криволинейных участков внутреннего контура, мм;
- $x$  – определяет абсциссу внутреннего контура, мм;
- $y$  – определяет ординату внутреннего контура, мм;
- $R$  – радиус внешнего контура, мм;
- $N$  – число узлов в радиальном направлении.

Параметры  $\alpha$ ,  $r$ ,  $x$ ,  $y$  и  $R$  характеризуют геометрию области и являются заданными для решаемой задачи. Их значения устанавливают согласно выданному преподавателем варианту задания. Параметр  $\alpha$  прини-

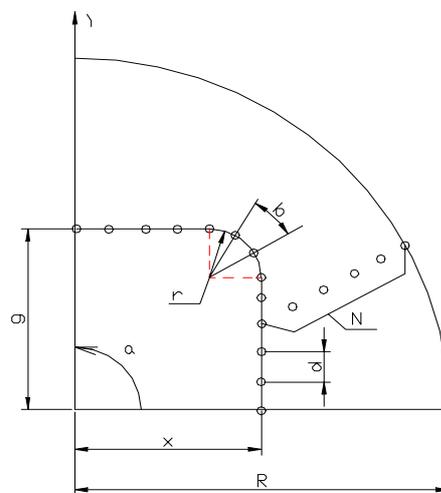


Рис. 2. Поперечное сечение матрицы с отверстием

мают самостоятельно в зависимости от числа осей симметрии внутреннего отверстия:  $\alpha = 360^\circ$  при несимметричном внутреннем контуре,  $\alpha = 180^\circ$  при наличии одной оси симметрии,  $\alpha = 90^\circ$  – в случае двух осей.

Параметры  $d, \beta, N$  являются искомыми параметрами модели (рис. 3). Их значения подбирают для каждой области опытным путем. Например, от величины угла  $\beta$  зависит число точек на участке внутреннего контура.

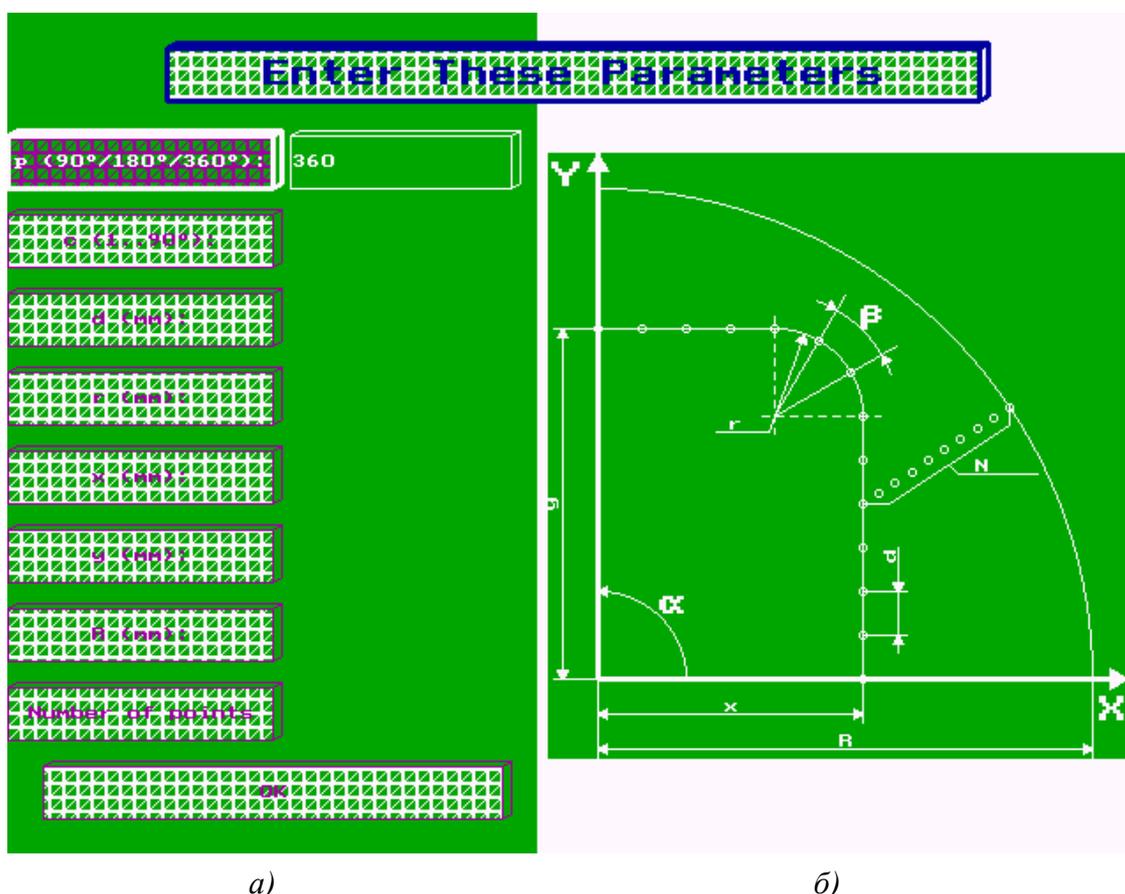


Рис. 3. Интерфейс задачи: *a* – обозначение вводимых параметров (столбец слева) и окна для вывода их значений для контроля (столбец справа); *б* – расчетная область

Подбор искоемых параметров начинают с выбора параметра  $d$ . В качестве первого приближения модели к заданной области рекомендуется принять  $d = 2$  мм. Затем путем последовательных расчетов подбирают два других параметра. Принимая во внимание масштаб сетки, выводимой на экран, величину  $d$  можно уточнять и вводить новое значение.

Опыт вычислений с помощью программы 2DMESH показывает, что при небольших значениях радиуса закругления  $r \approx 1 - 3$  мм и толщине стенки инструмента порядка 10 мм число точек на данном участке не должно превышать 3 – 4.

При более высоких значениях  $r$  (3 – 6 мм) стремятся к увеличению числа точек, задавая на криволинейном участке величину угла  $\beta$  от 10 до 18°. Величину  $N$  принимают на первом шаге, равной десяти.

Таким образом, на каждом шаге выполняют следующее: задаются значениями параметров  $d$ ,  $\beta$ ,  $N$  в первом приближении, осуществляют ввод параметров, результаты расчета в виде сетки выводят на экран и выполняют визуальную оценку качества сетки, при необходимости корректируют значения названных параметров и повторно рассчитывают. В результате за 4 – 5 сеансов повторных расчетов получают “хорошую” сетку симплекс-элементов.

Примером служит сетка конечных элементов на рис. 4. Сетка построена при  $\alpha = 360^\circ$ ,  $x = 40$  мм,  $y = 50$  мм;  $r = 8$  мм,  $R = 100$  мм. Характерные параметры модели:  $NE=2160$ ,  $NP = 1200$ ,  $B = 44$ .

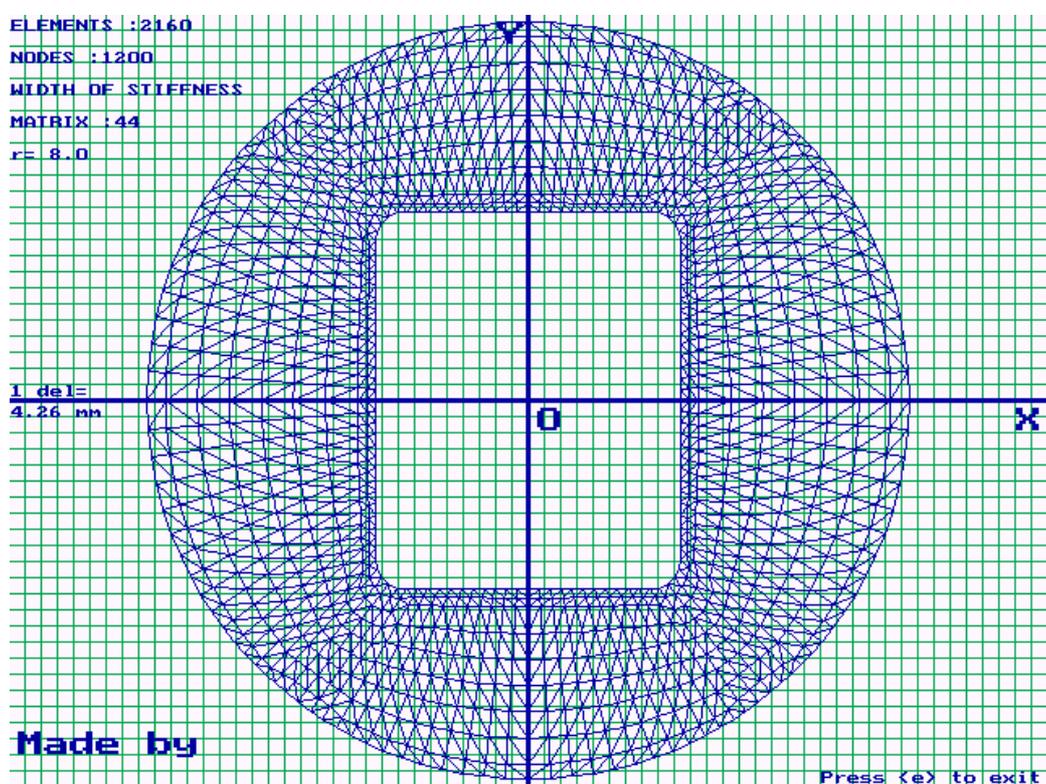


Рис. 4. Сетка симплекс-элементов на экране:  
параметры рациональной сетки:  $d = 2$  мм;  $\beta = 18^\circ$ ,  $N = 10$

## Методика ввода параметров в программе 2DMESH

1. Параметры вводят в любом порядке. Ввод каждого параметра заканчивают клавишей <enter>. После ввода всех параметров следует перевести курсор на строку <OK> и нажать <enter>.

2. При выполнении п. 3 заданий для получения сложного внутреннего контура следует воспользоваться процедурой геометрического моделирования. Инструкция по выполнению команд данного режима приведена в п. 3 прил. 1.

3. Для разбиения по 4-му пункту заданий применяют зональный способ. Данный способ основан на конструировании дискретной модели с помощью семейств четырехугольных зон с восемью узлами (квадратичных четырехугольников). В качестве последних могут рассматриваться прямоугольник, четырехугольник общего вида или треугольник (рис. 5). В последнем случае две стороны четырехугольника используют для задания одной стороны треугольной зоны. Инструкция по разбиению с помощью зонального способа приведена в п. 4 прил. 1.

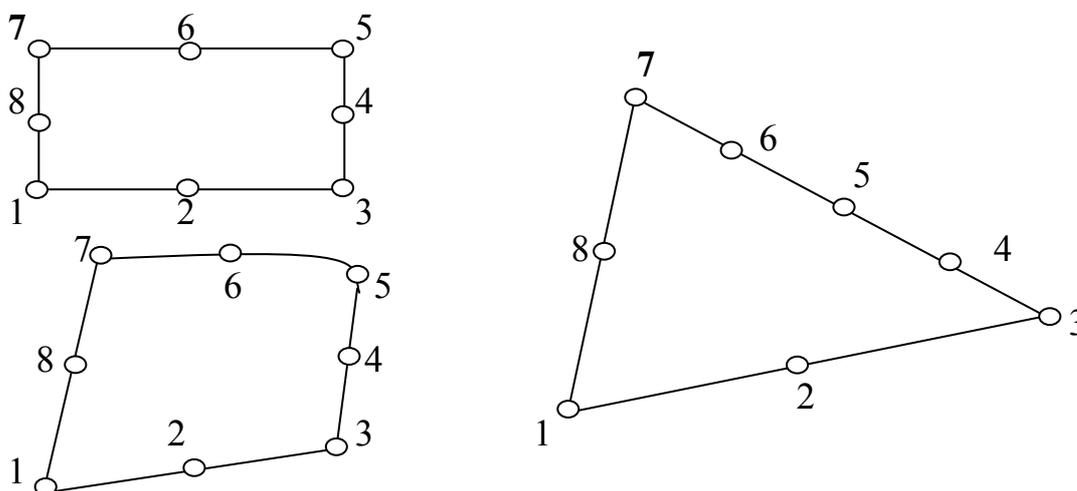


Рис. 5. Зоны, которые могут рассматриваться как четырехугольник

### Требования к отчету

1. В отчете следует указать название, цель, решаемые задачи.
2. Привести расчетные сетки, полученные разными методами, значения заданных и рациональных параметров, характерные параметры модели; изложить обоснование подобранных параметров с точки зрения пригодности сетки для расчетов.
3. Оформить текст отчета в редакторе Word на листах формата А4.

## Контрольные вопросы

1. К чему сводится дискретизация области?
2. Какие параметры вводят при работе с программой 2DMESH?
3. Из каких этапов состоит алгоритм метода конечных элементов?
4. С какой целью применяют неравномерные сетки?
5. Как используются четырехугольники в программе GRID?
6. В чем заключается методика подбора параметров модели при работе с программой 2DMESH?
7. В чем состоит понятие “хорошей” сетки?
8. Какие требования предъявляют к плоским симплекс-элементам?

## Практическое занятие № 2

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЭЛЕМЕНТЕ ПРИ ДВУМЕРНОМ ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА

#### Цель работы

Приобрести навыки вычисления температуры при конвективном теплообмене с использованием соотношений элемента,  $L$ -координат и интегральных формул.

#### Задания

1. Изучить постановку задачи и алгоритм формирования матриц элемента.
2. Сформировать матрицы элемента.
3. Составить программу в Matchcad и выполнить расчет температуры.

#### Общие сведения

Треугольный элемент с тремя узлами широко используется для решения двумерных задач теплопроводности. При вычислении температуры

для стационарных условий в литературе по МКЭ общепринятой является матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений:

$$[k]\{T\} = \{f\}, \quad (1)$$

где  $[k]$  – матрица теплопроводности;  $\{f\}$  – вектор-столбец правых частей системы (1).

Следуя [1], записывают матрицу теплопроводности элемента в виде:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS, \quad (2)$$

где  $[B^{(e)}]$  – матрица производных функций формы;  $[D]$  – матрица свойств материала;  $[N^{(e)}]$  – матрица функций формы;  $h$  – коэффициент передачи тепла конвекцией.

Вектор-столбец правой части системы определяют формулой

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty [N^{(e)}]^T dS, \quad (3)$$

где  $Q$  – источник тепла;  $T_\infty$  – температура окружающей среды,  $q$  – тепловой поток.

Функции формы для линейного треугольного элемента имеют вид

$$N_\beta = \frac{1}{2A} (a_\beta + b_\beta \cdot x + c_\beta \cdot y), \quad \beta = i, j, k, \quad (4)$$

где  $A$  – площадь элемента;  $x, y$  – координаты. Температура дается формулой:

$$T = [N_i N_j N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где  $T_i, T_j$  и  $T_k$  – значения температуры в узлах, последовательно проходящих от узла  $i$  в направлении, противоположном направлению движения стрелки.

Матрица градиентов  $[B]$  имеет вид

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрица свойств материала  $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  – коэффициенты теплопроводности материала.

С учетом транспонирования матрицы (6) и формулы (7) первое слагаемое в формуле (2) принимает вид

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \int_V \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV. \quad (8)$$

Предполагая толщину элемента единичной, заменяют  $dV$  на  $dA$ . Подынтегральное выражение в (8) постоянно и может быть вынесено за знак интеграла

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] \int_A dA = A[B]^T [D][B]. \quad (9)$$

После вычисления произведения матриц первый интеграл в формуле (2) имеет вид

$$[k^{(e)}] = \frac{K_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Второй интеграл  $\int_S h [N]^T [N] dS$  должен быть вычислен по поверхности.

Подставляя в матрицу  $[N]$  функции формы и выполняя матричное умножение, получаем

$$\int_S h [N]^T [N] dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS. \quad (11)$$

Функции формы зависят от  $x$  и  $y$ , поэтому произведения (8) не могут быть вынесены за знак интеграла. Кроме того, значение интеграла зависит от то-

го, на какой поверхности наблюдается конвективный теплообмен. Если, например, конвекции подвержена сторона между узлами  $i$  и  $j$  (рис. 1.), то  $N_k$  равно нулю вдоль этой стороны и интеграл сводится к следующему выражению:

$$\int_S h[N]^T [N] dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS \quad (12)$$

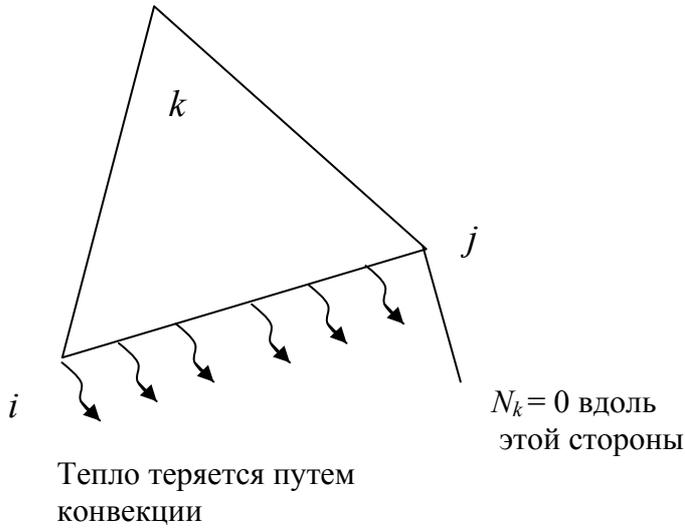


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Если предположить, что конвективный теплообмен имеет место на поверхности стороны элемента между узлами  $i$  и  $j$ , то в точках этой поверхности  $L_3 = N_k = 0$  и соотношение (12) примет вид

$$\int_S h[N]^T [N] dS = h \int_{L_{ij}} \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_2 L_2 & 0 \\ L_2 L_1 & L_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dL, \quad (13)$$

где  $dS = t dL$ , причем толщина  $t$  предполагается единичной. Два типа произведений входят в формулу (13): квадрат величины  $L_1^2$  или  $L_2^2$  и перекрестное произведение  $L_1 L_2$ .

Начиная с квадратных членов, получают запись:

$$\int_{L_{ij}} L_1^2 dL = \int_{L_{ij}} L_1^2 L_2^0 dL = \frac{2! \cdot 0!}{(2+0+1)!} L_{ij} = \frac{L_{ij}}{3}, \quad (14)$$

где  $L_{ij}$  – длина стороны между узлами  $i$  и  $j$ .

Интегрирование перекрестного произведения дает

$$\int_{L_{ij}} L_1 L_2 dL = \frac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} L_{ij} = \frac{L_{ij}}{6}. \quad (15)$$

Интегралы  $\int_{L_{ij}} L_2^2 dL$  и  $\int_{L_{ij}} L_1^2 dL$  равны между собой. Подстановка полученных результатов в формулу (13) приводит к записи

$$h \int_{L_{ij}} [N]^T [N] dL = \frac{hL_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Аналогичные соотношения получаются для стороны между узлами  $j$  и  $k$

$$\int_{L_{jk}} h[N]^T [N] dS = \frac{hL_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (17a)$$

и для стороны между узлами  $k$  и  $i$

$$\int_{L_{ik}} h[N]^T [N] dS = \frac{hL_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (17b)$$

Три интеграла в выражении для вектора нагрузки элемента также легко вычисляются, если воспользоваться  $L$ -координатами. Как показано в работе [1], для интеграла  $\int_V [N]^T Q dV$ , предполагают, что величина  $Q$  постоянна внутри элемента. Тогда будем иметь

$$Q \int_V [N]^T dV = Q \int_V \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} dV = \frac{QV}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Таким образом, тепло, генерируемое в элементе, распределяется поровну по трем узлам. Интегралы  $\int_{S_1} [N]^T q dS$  и  $\int_{S_2} [N]^T hT_\infty dS$  записываются в одинаковой форме

$$\int_S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS, \quad (19)$$

так что только один из них необходимо вычислить. Поскольку интеграл (16) поверхностный, его можно рассмотреть так же, как интеграл (11). Результаты зависят от того, на какой из сторон элемента происходит конвективный теплообмен, характеризуемый величиной  $h$ , или приток тепла за счет теплового потока  $q$ . Предполагая  $q$  постоянным по поверхности элемента, получают для интеграла три следующие формы записи:

$$q \int_S [N]^T dS = \begin{cases} \frac{qL_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \frac{qL_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \frac{qL_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{cases} . \quad (20a)$$

$$(20b)$$

Величина  $hT_\infty \int_S [N]^T q dS$  идентична (17) – (17б) с учетом замены  $q$  на  $hT_\infty$ .

Если тепловой поток или конвективный теплообмен наблюдаются на двух сторонах элемента, то поверхностный интеграл заменяют суммой интегралов по каждой из сторон. То же самое относится к интегралу (11).

В большинстве задач о переносе тепла интерес представляют значения температуры в узловых точках. Иногда бывает необходимо определять градиенты температуры. После того как определены узловые значения, градиенты температуры находят с помощью соотношения

$$\begin{Bmatrix} \frac{dT}{dx} \\ \frac{dT}{dy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

Пример, приведенный ниже, иллюстрирует применение полученных выше соотношений. Рассмотренный алгоритм численно реализован в виде

программы с помощью MathCad применительно к задаче о переносе тепла в отдельно взятом элементе.

Для указанного случая сформулирована задача: Дан элемент. Координаты его узлов  $X_i Y_i$ ,  $X_j Y_j$ ,  $X_k Y_k$  приведены на рис. 2. Указаны физические характеристики. Известно, что на сторонах  $ik$  и  $jk$  происходит конвективный теплообмен. При этом заданы следующие параметры: для стороны  $ik$   $h = 5 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$  и  $T_\infty = 40 \text{ }^\circ\text{С}$ ; для стороны  $jk$   $h = 5 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$  и  $T_\infty = 50 \text{ }^\circ\text{С}$

Требуется: составить матрицы элемента, предполагая толщину элемента единичной и вычислить температуру в узлах. Алгоритм решения данной задачи, основанный на формулах (1 – 18), приведён в прил. 2.

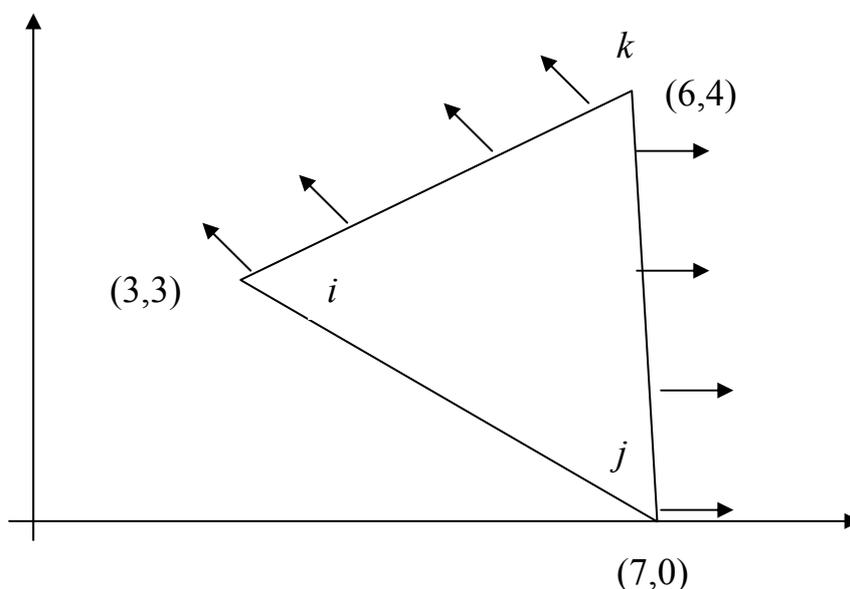


Рис. 2. Симплекс-элемент со схемой конвекции

### Порядок проведения занятия

1. При выполнении п. 1 заданий изучить формулировку задачи, условия расчета и алгоритм, приведённый в прил. 2, обратив внимание на физический смысл слагаемых в формулах (2) и (3).
2. Задание согласно п. 2 включает ввод текста программы и проверку.
3. В соответствии с п. 3 заданий вычисляют температуру без процедуры обращения матриц.

Ниже приведено описание этапов вычислений для рассмотренной задачи, соответствующее тексту программы из прил. 2.

1-й этап. В первых 5 строках осуществляется присвоение значений координат вершин симплекс-элемента.

2-й этап. Вычисление констант  $b$  и  $c$ .

3-й этап. Вычисление площади симплекс-элемента  $S$ .

4-й этап. Вычисление длин сторон  $L_{jk}$  ( $L_{23}$ ) и  $L_{ki}$  ( $L_{31}$ ).

5-й этап. Подставляя значения  $b$ ,  $c$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{xx}$  и  $A$  в формулу (10), значения  $h$  и  $L_{jk}$  в формулу (17а), значения  $h$  и  $L_{ki}$  в формулу (17б), а последние две формулы вместо второго слагаемого в формулу (10), вычисляют элементы матрицы  $R$  (см. текст программы в прил. 2);

6-й этап. Вычисляют составляющую вектора нагрузки элемента как сумму выражений (20а) и (20б), подставляя в них значения  $h$  и  $T_{\infty}$ . В тексте программы вектор нагрузки обозначен  $J$ .

7-й этап. Решение системы линейных уравнений выполняется с помощью процедуры обращения матрицы  $R$ . Результатом решения является матрица-столбец расчетных значений температуры в вершинах симплекс-элемента.

Результат расчетов сравнивают с вектором-столбцом узловых значений температуры, полученных в прил. 2.

4. Согласно п. 4 заданий необходимо выполнить расчет с учетом варианта задания и исходных данных, приведенных в табл. П2, прил. 2. Для ее решения следует изменить существующую программу. С этой целью следует присвоить параметрам  $h$ ,  $T_{\infty}$ , а также координатам узлов вершин треугольника их значения из табл. П2, прил. 2. Далее, повторяя действия 5-го этапа, в зависимости от заданных условий конвекции следует выбрать необходимые формулы (16) – (17б), соответствующие второму интегралу в формуле (10), и включить их в программу. В формулы, реализуемые на 6-м этапе, также внести изменения, соответствующие обозначению сторон треугольника, участвующих в конвекции. После внесения изменений в имеющуюся программу выполнить ее отладку и вычисление температуры.

## Требования к отчету

В отчете указать цель, задание, расчетную схему с исходными данными, новый текст программы в Mathcad, результаты расчетов и выводы.

## Контрольные вопросы

1. В чем состоит физический смысл слагаемых в формулах (2) и (3)?
2. Какие размерные характеристики имеют элементы матриц  $[B]$  и  $[D]$ ?
3. С какой целью в соотношениях (11) – (19) используются матрицы  $[N]$  и  $[L]$ ?
4. По каким причинам искомое решение задачи является приближенным?
5. По отношению к какому решению температурной задачи следует рассматривать погрешность вычисления температуры ?
6. От каких факторов зависит точность вычисления температуры?
7. Какие изменения следует внести в существующую программу при изменении условий расчета?
8. Какие методы и алгоритмы Mathcad используются для решения системы линейных алгебраических уравнений? В чем их особенности?

## Практическое занятие № 3

### ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ

#### Цель работы

Изучить алгоритмы метода конечных элементов

#### Задания

1. Для заданной сетки элементов составить систему интерполяционных уравнений, записанных в сокращенной форме.
2. Построить глобальную матрицу жесткости прямым методом.

3. Изучить алгоритмы преобразования матриц и решения системы линейных алгебраических уравнений.
4. Составить блок-схему вычислений для реализации алгоритмов МКЭ с помощью ЭВМ.

### Общие сведения

При формировании вычислительных процедур МКЭ следующий шаг после формирования матриц для одного элемента (см. задания к работе № 2) – это вывод системы уравнений для области в целом. Для этого необходимо включить каждый элемент в рассматриваемую область, другими словами, выразить интерполяционные уравнения для каждого используемого элемента через глобальные координаты и глобальные узловые значения. Следуя работе [1], эту задачу рассмотрим на примере уравнений для скалярных величин. Первая задача состоит в построении функции  $\varphi$  в дискретизованной области (рис.1).

Последовательность операций, связанных с включением отдельных элементов в рассматриваемую область, состоит в решении двух задач. На первом этапе рассмотрим задачу построения интерполяционного полинома, записанного для произвольного элемента

$$\varphi = [N] \{ \Phi \} = \left[ N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, N_k^{(e)}, \dots, N_r^{(e)} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \cdot \\ \Phi_r \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где  $r$  – число узлов элемента, верхний индекс  $(e)$  означает произвольный элемент.

Как и в работе [1], воспользуемся примером простой области, состоящей из пяти элементов (см. рис.1). Узлы пронумерованы от единицы до шести. Величины  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$  и  $\Phi_6$  представляют собой глобальные степени свободы. Координаты узлов  $(X_\beta, Y_\beta), \beta=1, 2, \dots, 6$  предполагаются известными. Номера элементов записаны в круглых скобках.

Решение задачи для области на рис. 1.

Обозначая  $i$ -й узел в каждом элементе (на рис. 1 звездочка) и обходя элементы от  $i$  к  $j$  против часовой стрелки, записывают следующие равенства для элементов всего ансамбля в виде таблицы.

Запись глобальных номеров узлов

Номер элемента	Глобальные номера узлов		
	$i$	$j$	$k$
1	2	3	1
2	3	2	4
3	5	3	4
4	6	3	5
5	1	3	6

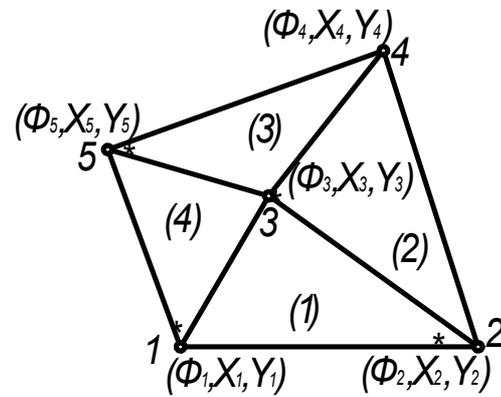


Рис. 1. Функции  $\Phi$  в дискретизированной области

С помощью соотношений, записанных в таблице, осуществляют включение элементов в область, так как они ставят в соответствие индексы  $i, j, k$  элемента глобальным номерам узлов. Легко видеть, что все данные соотношения одного типа, а их задание фиксирует координаты узлов элемента в глобальной системе координат.

Подставляя значения индексов из таблицы в формулу (1), получают следующую совокупность уравнений для элементов:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(1)} &= N_2^{(1)} \Phi_2 + N_3^{(1)} \Phi_3 + N_1^{(1)} \Phi_1, \\
 \varphi^{(2)} &= N_3^{(2)} \Phi_3 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_4^{(1)} \Phi_4, \\
 \varphi^{(3)} &= N_5^{(3)} \Phi_5 + N_3^{(1)} \Phi_3 + N_4^{(1)} \Phi_4, \\
 \varphi^{(4)} &= N_6^{(1)} \Phi_6 + N_3^{(1)} \Phi_3 + N_5^{(1)} \Phi_5, \\
 \varphi^{(5)} &= N_1^{(5)} \Phi_1 + N_3^{(5)} \Phi_3 + N_6^{(5)} \Phi_6,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $N_2^{(1)}, N_3^{(2)}, N_5^{(3)}, N_6^{(4)}, N_1^{(5)}$  – функции формы, являющиеся множителями при узловых значениях, определяются подстановкой числовых значений  $i, j, k$  в уравнения для функций формы.

Несмотря на то что глобальный номер каждого узла является общим для смежных элементов, функции формы, записанные в виде

$$N_k^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} \left[ a_k^{(e)} + b_k^{(e)}x + c_k^{(e)}y \right], \quad (3)$$

где  $k$  – глобальный номер узла, при текущем значении  $k$  и разных значениях  $i$  будут отличаться.

С помощью уравнений (2) конечные элементы объединяются в ансамбль. При этом интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты, вводимые вместо произвольных  $i, j, k$ . В работе [1] показано, что каждое уравнение в системе (2) содержит глобальные узловые значения, хотя относится к конкретному конечному элементу. Расширенная форма записи этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \cdot \Phi_1 + N_2^{(1)} \cdot \Phi_2 + N_3^{(1)} \cdot \Phi_3 + 0 \cdot \Phi_4 + 0 \cdot \Phi_5 + 0 \cdot \Phi_6, \\ \varphi^{(2)} &= 0 \cdot \Phi_1 + N_2^{(2)} \cdot \Phi_2 + N_3^{(2)} \cdot \Phi_3 + N_4^{(2)} \cdot \Phi_4 + 0 \cdot \Phi_5 + 0 \cdot \Phi_6, \\ \varphi^{(3)} &= 0 \cdot \Phi_1 + 0 \cdot \Phi_2 + N_3^{(3)} \cdot \Phi_3 + N_4^{(3)} \cdot \Phi_4 + N_5^{(3)} \cdot \Phi_5 + 0 \cdot \Phi_6, \\ \varphi^{(4)} &= 0 \cdot \Phi_1 + 0 \cdot \Phi_2 + N_3^{(4)} \cdot \Phi_3 + 0 \cdot \Phi_4 + N_5^{(4)} \cdot \Phi_5 + N_6^{(4)} \cdot \Phi_6, \\ \varphi^{(5)} &= N_1^{(5)} \cdot \Phi_1 + 0 \cdot \Phi_2 + N_3^{(5)} \cdot \Phi_3 + 0 \cdot \Phi_4 + 0 \cdot \Phi_5 + N_6^{(5)} \cdot \Phi_6. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(4)} \\ \varphi^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} & N_4^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(3)} & N_4^{(3)} & N_5^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} & N_6^{(4)} \\ N_1^{(5)} & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & N_6^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Сокращенная форма интерполяционных уравнений используется, когда осуществляется машинная реализация метода. Расширенная форма имеет некоторое преимущество, когда рассматривается процесс минимизации, который связан с дифференцированием матриц элементов. Альтернативой формулы (5) является уравнение, которое получается объединением уравнений для отдельных элементов; последнее уравнение определяет область в целом. Суммируя уравнения для отдельных элементов, получаем:

$$\varphi = \sum_{e=1}^E \varphi^{(e)}, \quad (6)$$

где  $E$  – число элементов.

Метод построения глобальной матрицы жесткости сложением матриц жесткости элементов неэффективен при использовании цифровой вычислительной техники, т.к. при сложении матриц жесткости элементов необходимо запоминать как матрицы отдельных элементов, так и матрицу [K], что перегружает оперативную память.

В эффективных программах процедура построения глобальной матрицы жесткости использует сокращенную форму матриц элементов  $[N^{(e)}]$  при получении уравнений для элемента. Такой метод известен как метод «прямой жесткости». Применение этого метода исключает необходимость хранения больших матриц элементов, содержащих всего несколько отличных от нуля коэффициентов.

Сущность метода состоит в следующем. На первом шаге рассматривают матрицу  $[N^{(e)}]$  для конкретного элемента. Все глобальные степени свободы  $\varphi$ , которые не относятся к этому элементу, исключаются из рассмотрения. Элементу с  $m$  степенями свободы соответствует матрица  $m \times m$ . Функции формы записываются в соответствии с порядком следования индексов  $i, j, k$  начиная с узла  $i$  в направлении против часовой стрелки.

На втором шаге производится расширение и переформировка матрицы жесткости элемента. Строкам и столбцам матрицы элемента приписываются номера глобальных степеней свободы. После этого компоненты матрицы рассылаются в соответствующие ячейки глобальной матрицы жесткости и выполняют их суммирование. После завершения цикла по всем элементам глобальная матрица жесткости представляет собой точную матрицу жесткости [K].

Рассмотрим, например, элемент (3) на рис. 2, для  $\varphi^{(3)}$ , для которого имеем:

$$\varphi^{(3)} = 0 \cdot \Phi_1 + N_2^{(3)} \cdot \Phi_2 + 0 \cdot \Phi_3 + N_4^{(3)} \cdot \Phi_4 + N_5^{(3)} \cdot \Phi_5 + 0 \cdot \Phi_6 \quad (7)$$

Этому элементу соответствуют узлы 2, 5 и 4 и глобальные степени свободы  $\Phi_2$ ,  $\Phi_5$  и  $\Phi_4$ . После упорядочения функций формы в направлении против часовой стрелки начиная от узла  $i$  последнее соотношение в сокращенном виде записывается как

$$\varphi^{(3)} = N_2^{(3)} \cdot \Phi_2 + N_5^{(3)} \cdot \Phi_5 + N_4^{(3)} \cdot \Phi_4. \quad (8)$$

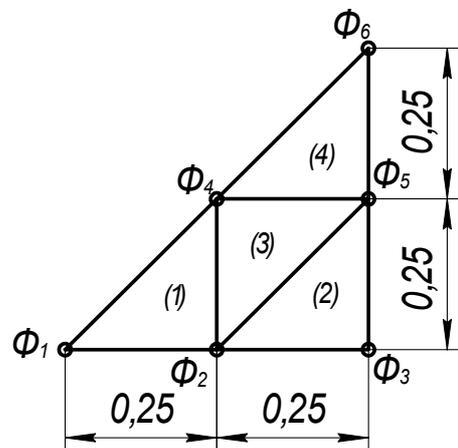


Рис. 2. Разбиение области на элементы

Матрица градиентов имеет вид

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A^{(3)}} \begin{bmatrix} b_2^{(3)} & b_5^{(3)} & b_4^{(3)} \\ c_2^{(3)} & c_5^{(3)} & c_4^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = [B^{(3)}] \cdot \{\Phi^{(3)}\}. \quad (9)$$

Значения коэффициентов  $b_\beta^{(3)}$  и  $c_\beta^{(3)}$  могут быть вычислены, если заданы координаты узлов элемента с помощью формул, приведенных в прил. 4.

Для рассмотренного примера элементы матрицы  $[B]$  в формуле (9) равны  $b_2^{(3)} = 0$ ;  $b_5^{(3)} = 4$ ;  $b_4^{(3)} = -4$ ;  $c_2^{(3)} = -4$ ;  $c_5^{(3)} = 0$ ;  $c_4^{(3)} = 4$ . После подстановки этих значений в  $[B^{(3)}]$  соотношение (9) примет вид

$$\{g\} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя  $[B^{(3)}]$  в сокращенной форме и выполняя умножение и интегрирование, получаем:

	1	2	3	4	5	6
1						
2		$\textcircled{1/2}$		$\triangle -1/2$	0	
3						
4		-1/2		1	$\square -1/2$	
5		$\triangle \hat{0}$		-1/2	-1/2	
6						

Рис. 3. Рассылка элементов матрицы  $[k^{(3)}]$  в ячейки глобальной матрицы жесткости

$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1,0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Выражение (11) соответствует сокращенной матрице (матрице элемента). Расширение и переформирование данной матрицы жесткости показано на рис. 3.

Таким образом, в результате составлена матрица размером  $3 \times 3$ , потому что этому элементу соответствуют три глобальные степени жесткости.

Метод прямой жесткости построения глобальной матрицы жесткости очень важный алгоритм реализации метода конечных элементов на ЭВМ, потому что он значительно сокращает загрузку запоминающего устройства. В частности, он исключает необходимость запоминания больших мат-

риц элементов, которые содержат всего несколько ненулевых коэффициентов. Число строк и число столбцов сокращенной матрицы жесткости элемента равны числу степеней свободы элемента.

### **Порядок проведения занятия**

1. Изучить последовательность записи соотношений метода прямой жесткости.
2. Для заданной области с параметрами, приведенными в таблице, из прил. 3 сформировать таблицу соответствия индексов узлов с глобальными номерами (по аналогии с приведенной таблицей).
3. Для каждого элемента заданной области вычислить коэффициенты матрицы  $[B]$ , элементы матриц  $[k^{(e)}]$  и получить запись расширенной матрицы жесткости.
4. Приписать столбцам и строкам матриц номера глобальных степеней свободы и составить таблицу с рассылкой элементов матриц конечных элементов в ячейки глобальной матрицы жесткости.

### **Требования к отчету**

В отчете необходимо указать цель занятия, изображение сеточной области с обозначением номеров узлов и элементов, сокращенную форму глобальной матрицы и таблицу с ячейками глобальной матрицы.

### **Контрольные вопросы**

1. К чему сводится построение матрицы жесткости?
2. Что такое метод “прямой жесткости”? Какие преимущества он имеет?
3. Как рассылается компонент локальной матрицы жесткости в ячейки глобальной матрицы?
4. Какие действия включает операция, выполняемая для каждого элемента?
5. Что относится к конкретной информации об элементе?
6. В связи с чем выполняется модификация сформированной системы линейных алгебраических уравнений? В чем она заключается?
7. Что такое ленточная матрица? Положительно определенная матрица?

## Практическое занятие № 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ 2DMESH

#### Цель занятия

Установить рациональные значения параметров детали на основе анализа концентрации напряжений

#### Задания

1. Выполнить расчеты напряжений в детали с вырезом и подобрать допустимую радиальную нагрузку.
2. Выполнить расчеты напряжений и установить предельное значение радиуса закругления в углу отверстия

#### Общие сведения

Расчет напряжений на контуре отверстий имеет большое значение для проектирования тяжело нагруженных прессовых матриц и ответственных деталей. Например, по вычисленным значениям напряжений в углах канала прессовых матриц подбирают рациональные значения параметров конструкций: толщину стенки и радиус закругления в углах отверстия (рис. 1).

Важность этой задачи для практики подтверждается случаями преждевременного разрушения и повышенным износом матриц в углах канала под действием радиальных нагрузок. Одной из причин служит концентрация напряжений в инструменте – повышенный уровень напряжений на локальных участках поверхности.

Как и в работах [4, 5], объект исследований – область, соответствующая выделенному поперечному сечению прессовой матрицы, находящемуся под действием радиальной нагрузки. По условию задачи по внутреннему контуру детали задано равномерное распределение нагрузки  $p$ . За критерий выбора параметров инструмента принято сравнение максимального расчетного значения интенсивности напряжений с заданным условным пределом текучести материала.

При выполнении задания используется учебно-исследовательская программа *FEM(2DMESH)*, составленная на основе алгоритмов метода ко-

нечных элементов. Расчеты с использованием данной программы позволили количественно оценить максимальный уровень напряжений в углу канала и установить возможность перехода материала в этой точке в пластическое состояние.

Разработанное конечно-элементное ядро программы состоит из нескольких блоков, в которых реализованы алгоритмы МКЭ из прил. 4.

Последовательность реализации алгоритмов соответствует этапам, рассмотренным в практическом занятии № 1. Результатом вычислений является два массива значений перемещений  $U_x$  и  $U_y$ , относящихся к узлам сетки элементов.

Программа снабжена базами данных физико-механических свойств инструментальных материалов. Достоинство разработанной программы заключается в простоте интерфейса при минимально необходимом числе клавиш. Хотя ввод данных осуществляется в диалоговом режиме, такие процедуры МКЭ, как описание элемента с учетом его типа, описание геометрии области, разбиение на элементы, задание граничных условий полностью автоматизированы и не «видны» пользователю. Все физико-механические характеристики материала вводятся в автоматическом режиме в зависимости от выбранной марки стали или сплава.

В программе предусмотрена также возможность решения задачи для плосконапряженного и плоскодеформированного состояния.

Анализ поля интенсивности напряжений в области, установление максимального значения и его вывод также осуществляются в автоматическом режиме. Все необходимые сведения для выполнения работы и результаты вычислений выводятся на экран в виде таблицы.

Данные особенности обеспечивают удобство работы с программой и многократное повторение расчетов при выполнении занятия. Это позволяет решать расчетно-исследовательские задачи по рациональному выбору параметров.

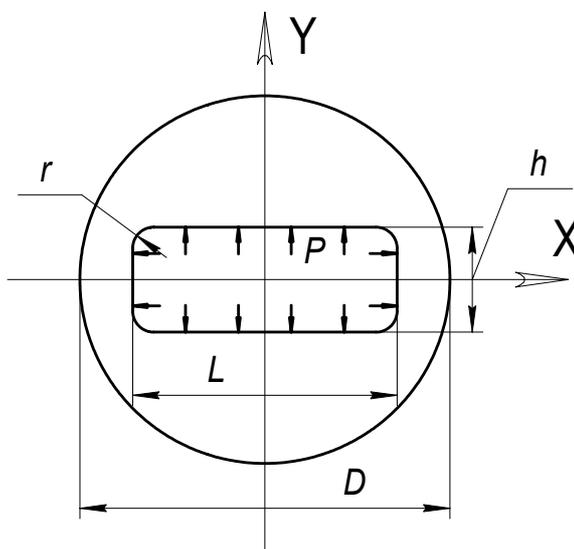


Рис. 1. Схема нагружки в сечении матрицы при прессовании

## Последовательность проведения занятия

В соответствии с предложенной методикой п. 1 задания следует выполнять в виде последовательности следующих этапов.

На первом этапе следует составить расчетную схему для детали с вырезом, ознакомиться с интерфейсом программы, запустить программу, ввести исходные данные из методического примера и выполнить расчет. Изучить таблицу исходных данных и расчетных параметров, выводимую на экран в результате расчета.

На втором этапе повторить расчеты при значениях  $p$ , равных 50, 100, 150 МПа и в каждом случае запомнить максимальное значение интенсивности напряжений.

На третьем этапе по вычисленным значениям интенсивности напряжений  $T$ , выведенным на экран, построить график зависимости  $T(p)$ . Найти на графике положение точки, соответствующей заданному значению условного предела текучести материала  $\sigma_{02}$ . Найти, как показано на графике (рис. 3), предельное значение давления  $p_{\text{пред}}$ , соответствующее выделенной точке. Дальнейшие расчеты выполнять при найденном значении  $p_{\text{пред}}$ .

При выполнении п. 2 заданий сделать повторные расчеты согласно варианту задания из табл. П2. Повторить расчеты по п. 1, подобрать  $p_{\text{пред}}$

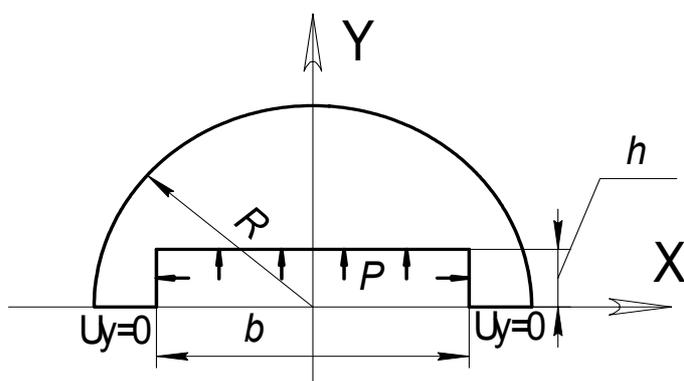


Рис. 2. Схема к постановке задачи:

$$R = 70 \text{ мм}, b = 80 \text{ мм}, h = 15 \text{ мм},$$

$$P = 100 \text{ МПа}, t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

и выполнить расчеты, задавая значения радиуса  $r$  на интервале значений из табл. П2. Построить график зависимости интенсивности касательных напряжений от радиуса закругления.

### Методический пример

Втулка из стали P18 с прямоугольным отверстием нагружена внутренним давлением  $p$ . Для области на рис. 2 определить предельное давление, при котором металл мож-

но считать упругой средой. Условие перехода в пластическое состояние записано в прил. 4.

На первом шаге составлена схема к постановке задачи (см. рис. 2). На схеме показаны участки границы с заданными граничными условиями в перемещениях и напряжениях.

На втором шаге выполнены расчеты детали из алюминия. Выполнено три варианта расчета с данными при  $p = 50$  МПа,  $p = 100$  МПа,  $p = 150$  МПа;  $t = 20$  °С. По расчетным максимальным значениям интенсивности напряжений построен график, представленный на рис. 3.

Согласно данным табл. ПЗ, прил. 4 условный предел текучести для алюминия  $\sigma_{02} = 180$  МПа. По графику на рис. 3 легко установить, что искомое предельное значение давления  $p_{\text{пред}} = 49,3$  МПа.

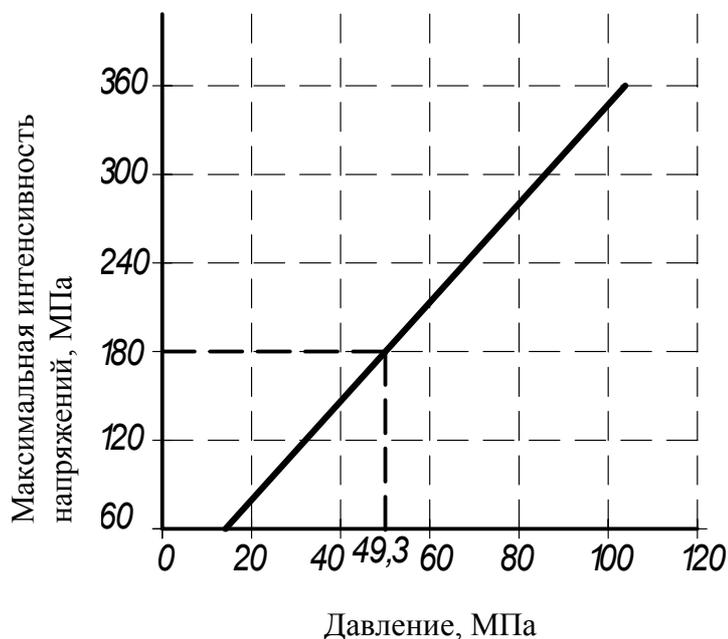


Рис. 3. Зависимость максимального значения интенсивности напряжений от давления на контуре отверстий: предельное давление, при котором не возникает пластических деформаций,  $p_{\text{пред}} = 49,3$  МПа

### Методические рекомендации по работе с программой 2DMESH

1. Построить зависимость  $\sigma_i = f(P)$ . Убедиться, что она линейна. Определить  $p_{\text{пред}}$ , при котором материал переходит в пластическое состояние ( $\sigma_i = \sigma_{02}$ ), где  $\sigma_{02}$  – предел текучести материала.

2. Для выполнения последовательности действий воспользоваться главным меню и его опциями:

2.1. Главное меню имеет вид

МАТЕРИАЛ  
РАСЧЕТ  
ПРОТОКОЛ  
ВЫХОД

2.2. Содержание опций главного меню

МАТЕРИАЛ: выбор материала, ввод физико-механических параметров материала нажатием клавиши <ENTER> и <ESC>.

РАСЧЕТ: выполняется расчет (см. формулы, приведенные в прил. 4).

ПРОТОКОЛ: выводятся на экран результаты расчета, для выхода – клавиша <ESC>.

2.3. Содержание опции РАСЧЕТ: вводятся параметры задачи согласно схеме на рис. 2.

диаметр  $D$ , мм;  
величина  $L$ , мм;  
величина  $h$ , мм;  
внутренний радиус  $r$ , мм;  
внутреннее давление  $P$ , МПа;  
температура  $t$ , °С;  
плоское напряжение;  
плоская деформация.

Вначале вводятся данные  $D$ ,  $L$ ,  $h$ ,  $P$ ,  $t$ . Чтобы изменить какую-либо из этих величин, надо перевести курсор на соответствующую строку, затем нажать клавишу <e>, затем ввести данные и завершить ввод клавишей <enter>. Чтобы выбрать тип модели, надо перевести курсор на соответствующую строку и нажать клавишу <enter>, что одновременно закрывает это меню и начинает расчет.

### Оформление отчета

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Теория.
4. Результаты расчетов: таблицы данных и графики построенных зависимостей.

## **Контрольные вопросы**

1. Что представляет собой метод конечных элементов? Область его применения.
2. В чем преимущества и недостатки метода конечных элементов?
3. Назовите основные этапы алгоритма метода конечных элементов.
4. Какие граничные условия вводятся для расчета напряженно-деформированного состояния в сечении матрицы?
5. Какие параметры нужно знать, чтобы оценить переход металла в пластическое состояние?

## **Практическое занятие № 5**

### **РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИНЕ В ПРОГРАММЕ COSMOS/M**

#### **Цель занятия**

Выполнить расчеты в COSMOS/M прямоугольной пластины, нагруженной силой в своей плоскости.

#### **Задания**

1. Изучить операторы программы, составить таблицу исходных данных задачи и расчетную схему.
2. Выполнить расчет и построить график изменения результирующих перемещений вдоль одной из сторон пластины.
3. Для заданного варианта пластины с вырезами составить программу, выполнить расчет и анализ перемещений.
4. Дать количественную оценку прочности пластины.

#### **Общие сведения**

COSMOS/M – это построенная по модульному принципу автономная система анализа методом конечных элементов (МКЭ). Она включает модули для решения линейных и нелинейных, статических и динамических

задач анализа механических конструкций, а также задач теплопроводности и механики жидкости. Все задачи в COSMOS/M решаются с помощью метода конечных элементов, который является современным и широко распространенным средством решения математических задач техники и физики.

В COSMOS/M для двумерного случая реализованы алгоритмы МКЭ вычисления составляющих перемещений  $u_x$  и  $u_y$  в узлах области, дискретизированной с помощью конечных элементов.

После решения системы линейных алгебраических уравнений

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}, \quad (1)$$

где  $[K]$  – глобальная матрица жесткости,  $\{U\}$  – вектор составляющих узловых перемещений,  $\{F\}$  – вектор нагрузок.

Дальнейшие вычисления выполняются на основе двух важных соотношений механики сплошных сред: закона Гука

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} - [D] \cdot \{\varepsilon_0\}, \quad (2)$$

где  $\{\sigma\}$  – матрица-строка напряжений  $\{\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}\}$ ,  $[D]$  – матрица упругих характеристик материала,  $\{\varepsilon\}$  – матрица-строка деформаций  $\{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy}\}$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  – вектор начальных деформаций и соотношений связи между деформациями и перемещениями.

Последние соотношения, записанные для плоской деформации, имеют вид:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3)$$

Общая форма этих соотношений согласно [1] имеет вид

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\}, \quad (4)$$

где  $[B]$  – матрица, получаемая дифференцированием матрицы функций формы  $[N]$ . Значения коэффициентов матрицы  $[B]$  зависят от вида используемого элемента и от типа рассматриваемой задачи.

В COSMOS/M реализованы H- и P-методы модификации сетки, позволяющие автоматически получать заданный уровень точности результатов. При правильном использовании МКЭ может достаточно точно предсказать поведение моделируемого объекта и тем самым уменьшить затраты на создание надежных конструкций.

Приведенная ниже программа соответствует случаю статического нагружения стальной пластины размерами  $0,6 \times 2$  мм, силой  $F = 200\,000$  Н, как показано на рис. 1. Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . На данном рисунке изображены контур области, вектор силы и условия в перемещениях, соответствующие закреплению пластины.

Ниже приведен фрагмент программы, соответствующий этапу разбиения области на конечные элементы в программе COSMOS/M.

```
PLANE,Z,0,1,
VIEW,0,0,1,
SF4CORD,1,10,10,0,10,50,0,55,50,0,55,10,0,
M_SF,1,1,1,4,5,10,1,2.5.
```

Сеточная область, соответствующая разбиению с помощью данной программы, приведена на рис. 2.

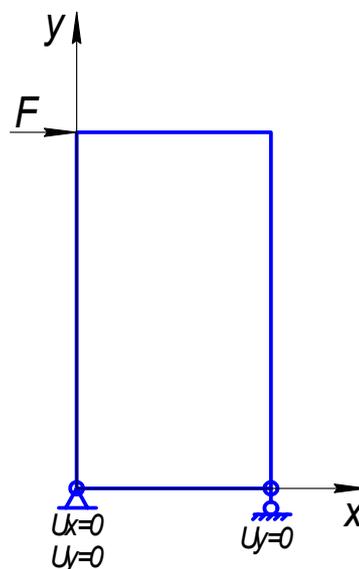
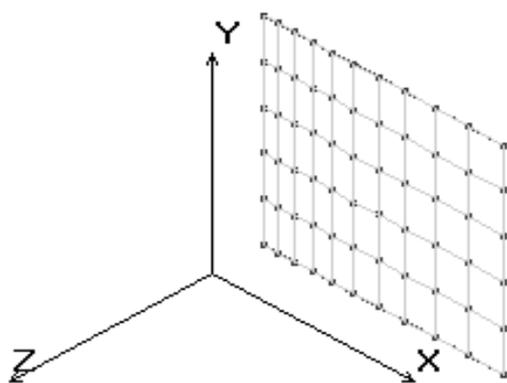
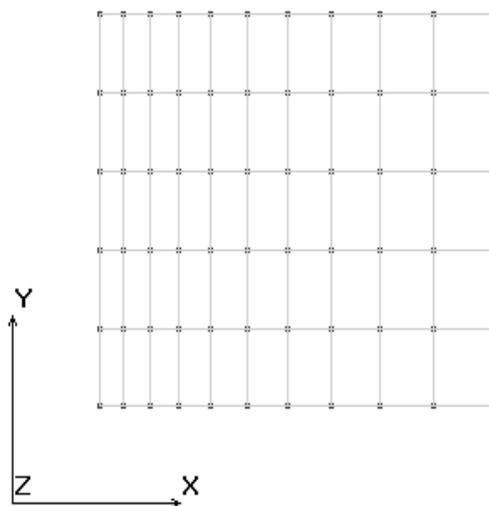


Рис. 1. Расчетная область со схемой ее нагружения и закрепления



а)



б)

Рис. 2. Сеточная область с выделенными узлами: а – пространственное положение сетки, б – проекция на плоскость XOY

Нижеприведенный фрагмент программы расчета пластины объединяет команды ввода геометрических параметров, генерации сеток, ввода физико-механических характеристик и задания граничных условий задачи.

```
EGROUP,1,PLANE2D,0,1,0,0,0,0,0,0,
MPROP,1,EX,2E11,
MPROP,1,NUXY,0.3,
MPROP,1,EY,2E11,
RCONST,1,1,1,2,5,0,
PT,1,0,0,0,
PT,2,0.6,0,0,
PT,3,0,2,0,
PT,4,0.6,2,0,
SF4PT,1,1,2,4,3,0,
M_SF,1,1,1,4,100,100,1,1,
DPT,1,UY,0,2,1,
DPT,1,UX,0,1,1,
FPT,3,FX,20000,3,1,
R_STATIC
```

### Операторы, используемые при составлении программы

1. Команда **EGROUPE** определяет тип конечного элемента: **PLANE2D** двумерная 4- или 8-узловая пластина.
2. Команда **MPROP** определяет механические и тепловые свойства материала:  
**EX** модуль упругости в направлении  $X$ ,  
**EY** модуль упругости в направлении  $Y$ ,  
**NUXY** коэффициент Пуассона.  $Y$ -деформация, обусловленная  $X$  напряжением.
3. Команда **RCONST** определяет геометрические свойства элемента (вещественные константы) для заданной группы элементов.
4. Команда **PT** определяет координаты ключевых точек в текущей активной системе координат.

5. Команда **SF4PT** определяет четырехстороннюю поверхность по четырем ранее определенным ключевым точкам. Точки соединяются прямыми линиями.

6. Команда **M\_SF** создает конечноэлементную сетку для элементов типа PLANE2D на заданном наборе поверхностей. Эта команда создает конечноэлементную сетку на поверхности 1 из четырехузловых элементов. На каждой главной стороне по 100 элементов, а узлы разделены однородными промежутками.

7. Команда **DPT** определяет нулевые или ненулевые начальные смещения (граничные условия) точек в текущей координатной системе. Эта команда определяет нулевое начальное перемещение по  $X$  и по  $Y$ .

8. Команда **FPT** определяет сосредоточенные силы в заданных точках в текущей системе координат. Эта команда определяет силу, величиной в 20 000 единиц, направленную по оси  $X$  для узлов 1, 2 и 3.

9. Команда **R\_STATIC** запускает на решение статический анализ в соответствии с выбранным типом нагрузок. После успешного запуска эта команда автоматически вызывает программу вычисления перемещений STAR и программу вычисления напряжений STRESS.

### **Порядок проведения занятия и работа с программой**

При выполнении п. 1 заданий изучить назначение команд и структуру программы; составить расчетную схему с указанием силы, условий закрепления и параметров физико-механических свойств материала.

Расчет согласно п. 2 заданий выполняют в виде последовательности этапов:

Для выполнения п. 3 получить задание с эскизом области у преподавателя.

Этап 1-й. В меню «Пуск» – все программы – найти COSMOS/M 2.6 – GeoStar 256K – запустить программу.

Этап 2-й. В появившемся окне, в директории COSMOS/M – Working, дать название новой задаче «plastina». Это имя будет являться общим для всех файлов, относящихся к этой задаче. Все вводимые пользователем команды GeoStar сохраняет в той же хронологической последовательности в специальном сессионном файле с расширением \*.ses. Этот файл можно редактировать и запускать вновь на расчет. Перед началом работы убедит-

тес, что директория COSMOS/M – Working пуста. Для этого перед запуском COSMOS/M 2.6, нужно открыть Windows/Total Commander, найти нужную директорию и очистить её.

Этап 3-й. После создания файла с новой задачей в нижнем окне COSMOS/M 2.6 в командной строке нужно ввести программу, набор каждой строки заканчивается нажатием клавиши Enter. После ввода оператора R\_STATIC программа автоматически запускается на решение.

Этап 4-й. Для просмотра результатов: верхнее меню Results (Результаты) – Plot (Показать) – Displacement (Перемещения).

Этап 5-й. Построение графика: Results – Plot – Path Graph. В появившейся таблице необходимо отметить номера узлов в интересующей вас области. Номер последнего узла должен повторяться дважды.

Этап 6-й. Для сохранения результатов расчета в виде картинki найти иконки в левом меню:

- Background color (белый цвет фона),
- Clear screen,
- Draw axis (черный цвет осей),
- Results – Plot – Displacement,
- Results – Setup – Color/Value Range – Continue – Black – ОК,
- Верхнее меню File – Save Image File – название файла – картинку обвести прямоугольной рамкой.

При выполнении п. 3 заданий следует внести необходимые изменения в текст программы с учетом вариантов задания и размеров пластины, приведенных в таблице. Данные о материале пластин и его физико-механических свойствах приведены в прил. 5. После уточнения данных задачи следует повторить пп. 2 – 4 заданий по изложенной выше методике.

Для оценки прочности необходимо:

- вывести на экран цветовую диаграмму интенсивности напряжений;
- выявить участки и точки с наиболее высоким уровнем их значений;
- сравнить максимальные значения интенсивности напряжений со значениями  $\sigma_{02}$  и  $\sigma_b$  из прил 5.

На рис. 3 приведены результаты вычисления результирующих перемещений. График на рис. 3, а отражает изменение  $u_r$  (мм) вдоль участка границы. Цветовое изображение на рис. 3, б соответствует полю перемещений в пластине.

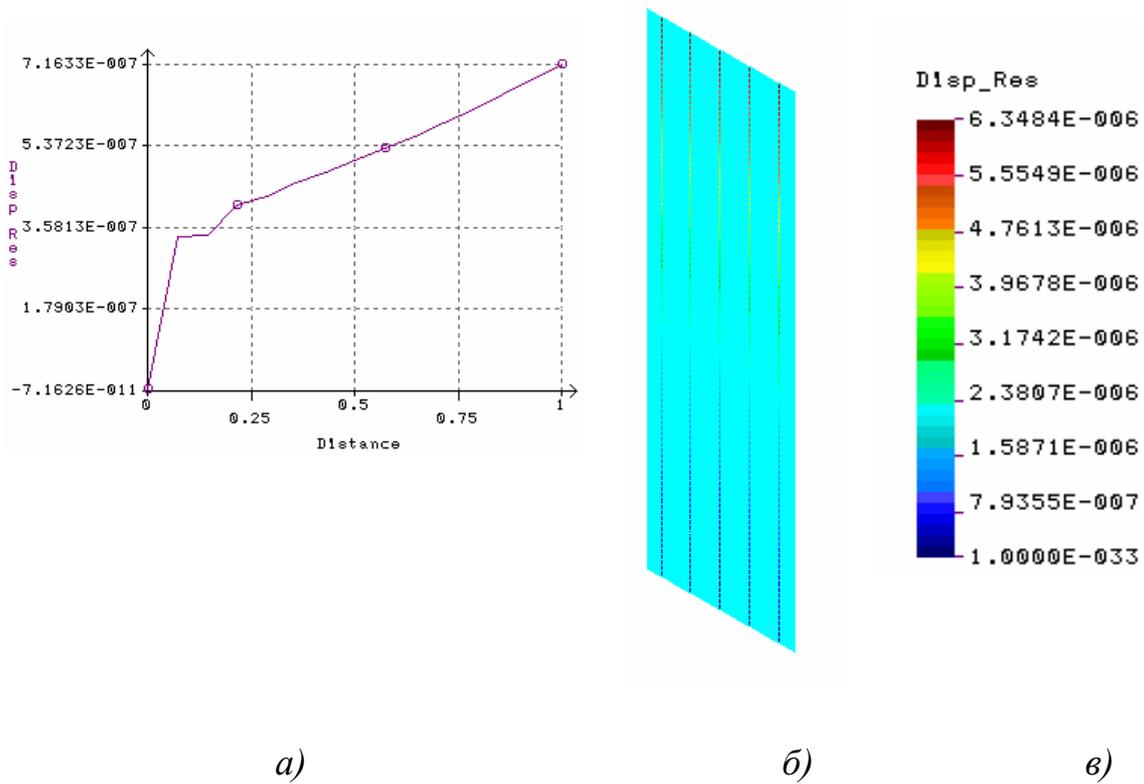


Рис. 3. Результирующие перемещения в пластине:  
*a* – график перемещений на участке границы, *б* – изображение поля перемещений в плоскости пластины, *в* – цветовая шкала значений  $u_x$ .

#### Варианты задания

№ п/п	Размер пластины, мм	Сила $F$ , Н
1	2,5×5	50000
2	1×3	10000
3	2×2,5	5000
4	1,5×2	17000
5	3×6	70000
6	0,5×2	20000
7	2×4	60000
8	1,5×3	60000
9	2,5×4	55000
10	0,3×1,8	10000

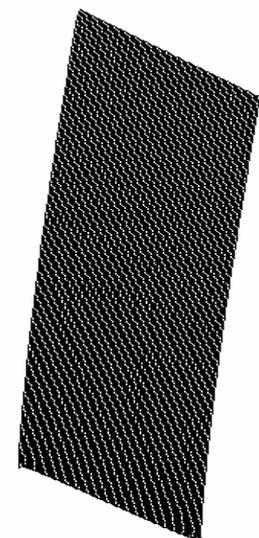


Рис. 4. Деформированная пластина

## **Методические рекомендации**

Расчеты следует выполнять в два этапа. На первом этапе выполнить расчет пластины на рис. 4 с помощью приведенной программы. Второй расчет выполнять после внесения изменений в программу и создания нового файла .ses. Данные для расчетов см. в прил. 5.

### **Требования к отчету**

В отчете следует указать цель, задание и результаты выполнения расчетов согласно пп. 2 – 4 заданий. Для каждого варианта в отчете следует поместить:

- расчетную схему к постановке задачи (см. рис. 1);
- исходные данные задачи;
- графики и рисунки согласно рис. 3.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие методы генерации сеток существуют в GEOSTAR?
2. Дайте краткое описание геометрических объектов, используемых в GEOSTAR.
3. Какие системы координат могут использоваться при создании геометрических объектов?
4. Какие методы просмотра результатов расчета существуют в GEOSTAR?

## **Практическое занятие № 6**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЕТАЛИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА COSMOS/M**

#### **Цель занятия**

Изучить влияние температуры нагрева на деформированное состояние детали

#### **Задания**

1. Изучить структуру команд для вычисления деформаций при нагреве.
2. Составить .ses файл и подготовить исходные данные для вычисления перемещений, деформаций и напряжений в детали «втулка».
3. Выполнить расчеты при изменении параметров задачи.
4. Построить графики и изучить зависимость радиальных перемещений на наружной и внутренней поверхностях от температуры нагрева.

## Общие сведения

Во многих случаях конструирования необходимо получать количественные оценки упругих деформаций деталей, связанных с их нагревом. Такую возможность обеспечивает моделирование напряжений с помощью пакета COSMOS/M.

При составлении программы расчета исходят из того, что напряжения в упругом теле в соответствии с законом Р. Гука связаны с деформацией с помощью формулы, матричная форма которой имеет вид

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (1)$$

где  $[D]$  – матрица упругих характеристик (в случае одномерного тела  $[D] = E$ , где  $E$  – модуль упругости);  $\{\varepsilon_0\}$  – начальная деформация, связанная с тепловым расширением  $\alpha \Delta T$ , где  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\Delta T$  – отклонение температуры от некоторого равновесного значения.

Как показано в работе [1], интеграл, определяющий вектор нагрузки в случае деформации тела от действия только тепловых нагрузок, совпадает с интегралом, связанным с тепловым расширением

$$\{f\} = - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV, \quad (2)$$

где  $[B]^T$  – транспонированная матрица производных функций формы в формулах связи деформаций с перемещениями.

В случае одномерного тела указанная формула имеет вид

$$-\frac{\alpha EA(\Delta T)}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_0^L dx = \alpha EA(\Delta T) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где  $L$  – длина элемента,  $A$  – площадь элемента.

Вектор начальных деформаций в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

в случае плоской деформации

$$\{\varepsilon_0\} = (1 + \mu) \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Интеграл, связанный с тепловым расширением, в случае плоского тела описывается как

$$-\int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV = [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} tA, \quad (6)$$

где  $t$  – толщина тела.

С учетом матричного произведения формула (6) для случая плоских напряжений приводится к виду

$$[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} tA = -\frac{\alpha EA(\Delta T)}{2(1-\mu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

При анализе деформаций трехмерных конструкций с учетом действия нагрева слагаемое в формуле вектора нагрузки также записывают [1] в виде интеграла, ответственного за тепловое расширение

$$\frac{\alpha EV(\Delta T)}{(1-2\mu)} [B]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Вектор-столбец, связанный с тепловым расширением в осесимметричных задачах имеет вид

$$f^{(e)} = \frac{\alpha EV(\Delta T)}{(1-2\mu)} [\bar{B}]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 2\pi \bar{r} A, \quad (9)$$

где черта над  $\overline{B}$  указывает на приближенное значение,  $\bar{r}$  – соответствует среднему значению, обозначение остальных параметров совпадает с обозначениями в формулах (2) – (8).

### Порядок проведения занятия

1. Варианты конструкции детали «втулка» с параметрами  $D$  – наружный диаметр (мм) и  $a$  – толщина стенки (мм), приведены в таблице.

2. Для выполнения п. 3 необходимо при заданном варианте составить новый .ses файл для каждого варианта из таблицы, составить четыре .ses файла поочередно и выполнить четыре расчета при заданных температурах, используя следующую программу и прил. 6:

```
PT,1,0,0,0
PTGEN,1,1,1,1,0,D,0,0,
CREXTR,2,2,1,X,a,
SFSWEEP,1,1,1,Y,180,2,
VLEXTR,1,2,1,Y,0.04,
EGROUP,1,SOLID,0,1,0,0,0,0,0,0,
MPROP,1,EX,2E11,
MPROP,1,NUXY,.3,
MPROP,1,ALPX,13E-6,
M_VL,1,2,1,8,2,16,6,1,1,1,
NMERGE,1,64000,1,0.0001,0,1,0,
DSF,1,UY,0,2,1,
DSF,4,UZ,0,10,6,
DCR,14,UX,0,14,1,
NTVL,1, $\Delta\theta$ ,2,1,
A_STATIC,T,0,0,1E006,1E+010,0,0,0,0,0,0,0,0,
R_STATIC
```

3. Согласно варианту и данным из таблицы в структуру заданной программы внести следующие изменения:

– изменить параметры  $a$  (м) и  $D$  (м), входящие в команды

**CREXTR,2,2,1,X,a,**  
**PTGEN,1,1,1,1,0,0,D,0,0,**

– внести изменения температуры в команду **NTVL,1, $\Delta\theta$ ,2,1**, путем изменения параметра  $\Delta\theta$ . Для каждого варианта конструкции кольца расчеты выполнять при  $\Delta\theta=10, 50, 100, 150$  °С.

4. При расчете для каждого варианта получить на экране изображение поля радиальных перемещений (рис. 1), установить и запомнить значения  $u_x$  в точках на наружной и внутренней поверхностях.

5. По установленным значениям построить два графика перемещений от температуры нагрева по аналогии с рис. 2.

#### Варианты заданий и исходные данные для расчетов

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$D$ , мм	50	50	50	70	70	70	60	100	100	100	100	150	150
$a$ , мм	5	10	15	10	15	20	5	10	15	20	30	10	20

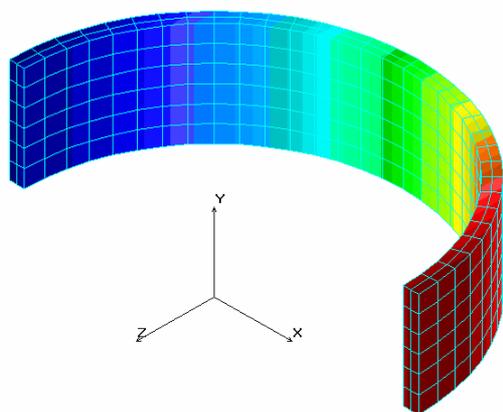


Рис. 1. Схема перемещений  $u_x$

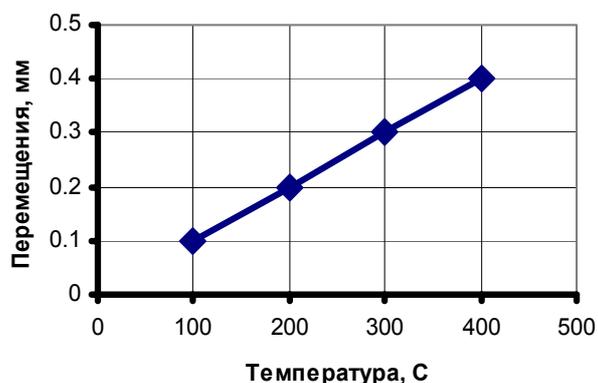


Рис. 2. График зависимости перемещений  $u_x$

### Практическое занятие № 7

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В СЕЧЕНИИ ТРУБЫ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

### Цель работы

Изучить влияние условий нагружения на деформированное состояние трубы и получить количественную оценку точности вычислений.

## Задания

1. Вычислить радиальные перемещения и напряжения с помощью аналитических формул; построить графики их изменения по толщине.
2. Вычислить радиальные упругие перемещения и напряжения в сечении трубы под действием радиальных нагрузок с помощью программы COSMOS/M; построить графики их изменения по толщине.
3. Сравнить графики и сделать заключение о погрешности приближенных значений по сравнению с аналитическим решением.
4. Выполнить расчет в COSMOS/M при данных, указанных в программе Mathcad, и сравнить одноименные графики напряжений.

### Постановка задачи

Изучить напряженно-деформированное состояние трубы в условиях плоского деформированного состояния. Схема, соответствующая постановке задачи, приведена на рисунке .

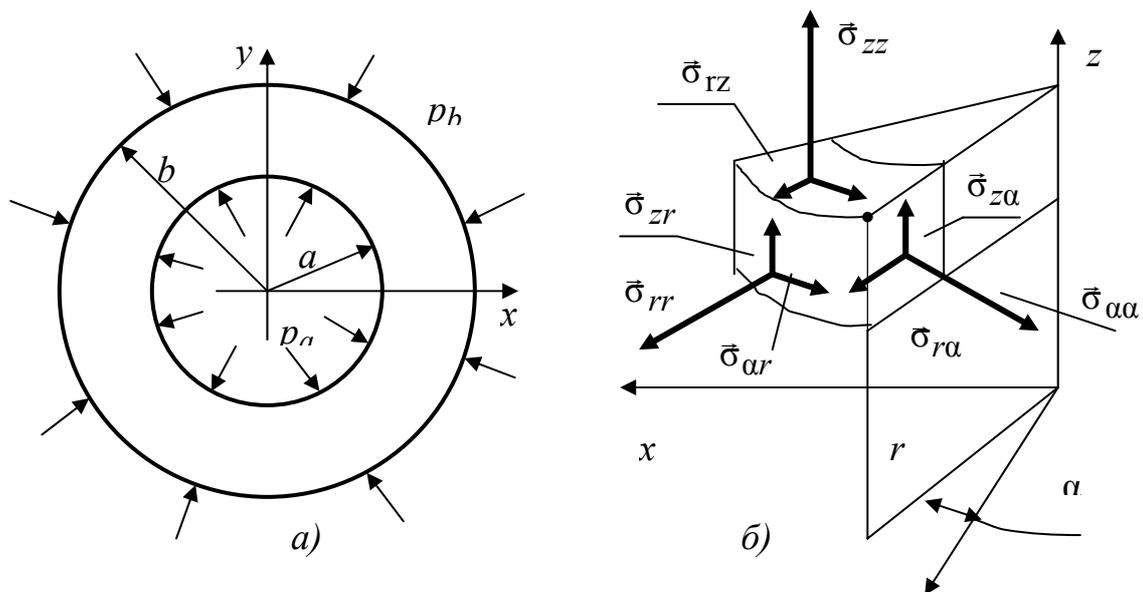


Схема к постановке задачи:  
 $a$  – действия сил;  $b$  – напряжения в точке

### Алгоритм вычислений на основе аналитического решения

Используем цилиндрическую систему координат (рис. б). Координатные линии  $r$ ,  $\alpha$ ,  $z$  направлены соответственно по радиусу трубы, в окружном направлении и вдоль трубы. Так как деформированное состояние

плоское, а нагрузка распределена равномерно по контуру, то напряженно-деформированное состояние является осесимметричным. При этом напряжения не зависят от координаты  $\alpha$ , а меридиальные сечения тела  $\alpha = \text{const}$  не смещаются друг относительно друга.

Так как  $\sigma_{r\alpha} = \sigma_{\alpha r} = 0$ , отличны от нуля только нормальные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{rr}$ . Из трех компонент вектора перемещений  $\vec{u}$  две ( $\vec{u}_\alpha$  и  $\vec{u}_z$ ) равны нулю, а  $\vec{u}_r$  зависит только от координаты  $r$ . Следовательно, точки трубы перемещаются в радиальных направлениях. Соотношение между внутренним  $p_a$  и наружным  $p_b$  давлениями полагаем таким, что внутренний  $a$  и наружный  $b$  радиусы трубы увеличиваются.

Система уравнений состоит из одного уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} = 0, \quad (1)$$

соотношений между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad (2)$$

уравнений состояния (в главных осях тензора напряжений)

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 2G\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\theta, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta, \quad (3)$$

где  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}$  – относительное изменение объема,  $\lambda = 2\mu G / (1 - 2\mu)$ .

Воспользуемся формулами решения задачи в перемещениях, приведенными в работе [4]. Формулы напряжений, соответствующие данному решению, имеют вид

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad (6)$$

Упругие перемещения вычисляются по формуле

$$u_r = \frac{r}{2(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{1}{2Gr} \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \quad (6)$$

Примеры расчетов с помощью данных формул и графики распределения перемещений и напряжений приведены в работах (4) и (7).

### Порядок выполнения расчетов в программе COSMOS/M

1. Задачу согласно п. 1 заданий следует выполнять в 2 этапа.

На первом этапе рекомендуется составить программу в Mathcad вычисления параметров по формулам (4) – (6). Для удобства отладки и проверки программы необходимо решить приведенную задачу и вычислить параметры перемещений  $u_r$  и напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{zz}$  с исходными данными, заимствованными из работы [4]:  $a = 100$  мм,  $b = 200$  мм,  $p_a = 200$  МПа,  $p_b = 100$  МПа,  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu = 0,28$ .

На втором этапе повторить решение задачи с исходными данными, приведенными в прил. 5. Ознакомиться с графиками компонентов напряжений и перемещений по сечению трубы, полученных в результате расчетов по формулам (4) – (6) и в результате расчетов *методом конечных элементов* (МКЭ), приведенных в работах [4, 6].

Варианты исходных данных к заданию № 7

Номер варианта	$b$ , мм	$a$ , мм	$p_b$ , МПа	$p_a$ , МПа
1	80	60	100	50
2	90	60	100	50
3	50	30	100	50
4	40	20	100	50
5	30	10	100	50
6	20	10	100	0
7	18	15	50	0

Окончание таблицы

Номер варианта	$b$ , мм	$a$ , мм	$p_b$ , МПа	$p_a$ , МПа
8	20	12	30	10
9	100	80	20	10
10	160	100	20	0
11	180	100	0	20
12	100	50	0	30
13	120	50	0	40
14	70	50	0	50
15	10	8	0	60
16	20	14	50	100

2. Согласно 2 п. задание выполнить в три этапа.

На первом этапе:

– подготовить исходные данные, совпадающие с исходными данными для варианта из таблицы и прил. 5;

– обосновать расчетную схему, определить граничные условия, составить программу с использованием команд, принятых в пакете COSMOS/M; представить программу в виде файла .ses;

– выполнить расчеты и построить график изменения составляющих напряжений и радиального перемещения по толщине кольца.

На втором этапе:

– выполнить расчет напряжений в программе COSMOS/M при изменении числа элементов от 50 до 1000;

– сделать вывод о влиянии числа элементов на погрешность вычислений относительно аналитического решения.

На третьем этапе:

– выполнить расчет при исходных данных, указанных в программе, составленной в Mathcad и приведенной в прил. 7;

– построить графики составляющих напряжений и сравнить их с одноименными графиками, приведенными в программе из прил. 7.

### **Требования к отчету**

В отчете следует привести расчетную схему с указанием граничных условий, текст программы в COSMOS/M, графики распределения перемещений и составляющих напряжений по толщине в результате вычислений с помощью точного и приближенного решения задачи. Перечислить факторы и условия, влияющие на погрешность результатов вычислений на основе МКЭ по сравнению с аналитическим решением для заданного варианта расчета.

Следует поместить графики распределения напряжений и результаты их сравнения с одноименными графиками, полученными в Mathcad. (см. прил. 7). Объяснить возможные причины отклонения одноименных кривых.

### **Контрольные вопросы**

1. Почему приведенные формулы называют аналитическим решением?
2. Из каких составляющих складывается погрешность вычислений при выполнении вычислений?
3. В чем влияние числа элементов на результаты решения задачи МКЭ?
4. Правомерно ли утверждение, что для повышения прочности трубы нужно увеличивать толщину ее стенки? Существует ли предел?
5. На каком участке сечения и при каком условии может произойти переход от упругих деформаций материала к пластическим?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнение первой части практикума позволяет закрепить знания основ метода конечных элементов и выработать понимание его возможностей. В итоге выполнения заданий студенты приобретают навыки расчетного моделирования и исследования процесса передачи тепла, анализа напряжений и деформаций. Знание этих вопросов позволит перейти на более высокий уровень использования МКЭ в инженерных расчетах с применением современных программных продуктов и подготовить к разработке математических моделей, что будет отражено во второй части книги.

Таким образом, изучение материала практикума позволит существенно углубить анализ работы материалов под нагрузками и тем самым повысить научный уровень проектирования при выполнении курсовых и дипломных проектов. Применение такого подхода окажется, несомненно, полезным в последующей деятельности конструктора или технолога, а также при обучении в аспирантуре и магистратуре.

В связи с быстрым развитием средств вычислительной техники и средств программирования происходит непрерывное развитие метода конечных элементов. Во второй части практикума будут рассмотрены задачи и методика вычисления напряжений и температуры в конструкциях с применением современных программ, отвечающих идеологии CAD/CAM/CAE. Авторы выполняют постоянную работу по дальнейшему совершенствованию практикума, накапливая собственный опыт решения сложных конструкторских и технологических задач с помощью современных пакетов программ инженерного анализа SolidWorks/Cosmos и других. Характерным примером развития такого подхода являются расчетные картины моделирования напряженно-деформированного состояния тяжелонагруженной станины шаропрокатного стана, приведенные в прил. 8.

**Инструкция по работе с программой 2DMESH**

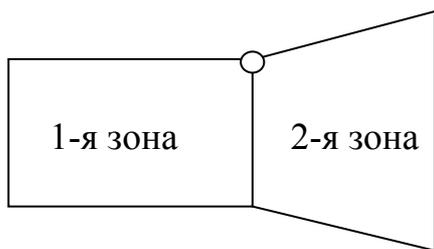
1. Диалог с пользователем реализован в виде графического меню.
2. Ключи программы СЕТКА вызываются из меню командами Radial или GRID

3. Процедура геометрического моделирования позволяет получить внутренний контур сечения канала матрицы сложной формы с помощью следующих ключей:

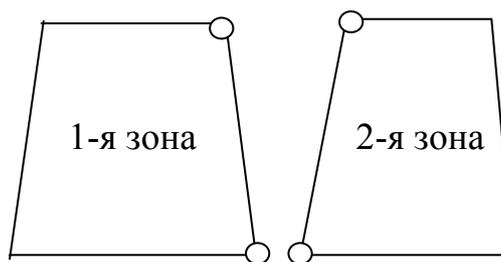
<n>ext – переход к следующему узлу;

<↑>, <↓>, <←>, <→> – изменение координат узла.

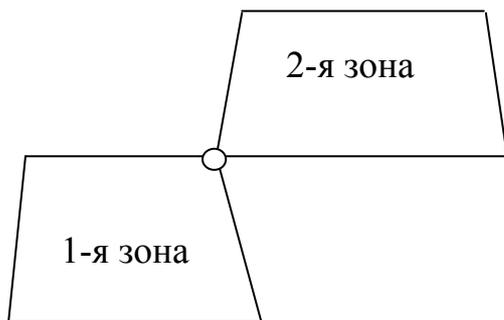
4. Программа GRID (вызывается из меню командой Zone GRID) предлагает случайным образом одну из нескольких областей для дискретизации. Чтобы получить сетку, необходимо выполнить 2 этапа: разбить области на зоны (1-й этап) и ввести количество строк и столбцов для зон (2-й этап). Схема к выполнению п. 4 приведена на рис. П1.



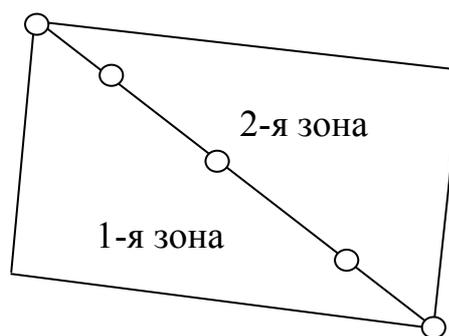
**ТАК МОЖНО**



**ТАК МОЖНО**



**ТАК НЕЛЬЗЯ**



**ТАК НЕЛЬЗЯ**

Рис. П1. Примеры взаимного расположения зон

Чтобы разбить область на зоны на первом этапе нужно зафиксировать 8 точек для каждой зоны. Для этого служит ключ <f>. Фиксация вы-

полняется против часовой стрелки. Текущая точка (выделяется белым) может находиться в одном из трех режимов:

а) переход между точками с помощью ключей  $\langle \uparrow \rangle$ ,  $\langle \downarrow \rangle$ ;

б) перемещение по прямой между соседними точками (ключи  $\langle \uparrow \rangle$ ,  $\langle \downarrow \rangle$ ), вход в режим  $\langle g \rangle$ ,  $\langle l \rangle$ ,  $\langle \text{enter} \rangle$  – движение к следующей точке,  $\langle g \rangle$ ,  $\langle - \rangle$ ,  $\langle l \rangle$ ,  $\langle \text{enter} \rangle$  – движение к предыдущей точке, выход из режима  $\langle e \rangle$  – к конечной точке,  $\langle b \rangle$  – к начальной точке;

в) свободный режим – точка может двигаться куда угодно в пределах экрана с помощью ключей  $\langle \uparrow \rangle$ ,  $\langle \downarrow \rangle$ ,  $\langle \leftarrow \rangle$ ,  $\langle \rightarrow \rangle$ ,

вход в режим  $\langle i \rangle$ ,

выход из режима  $\langle r \rangle$ .

Чтобы закончить этап, нужно нажать  $\langle \text{enter} \rangle$ . Это возможно только в режиме а).

На втором этапе зона выделяется цветом. Так же выделяется цветом первая точка, поэтому можно определить направление строк и столбцов. Ввод заканчивается  $\langle \text{enter} \rangle$ .

Точки в каждой зоне нумеруются слева направо, сверху вниз. Уже пронумерованные точки пропускаются. Для достижения минимального значения следует придерживаться общего правила: начинать с самой верхней зоны и затем двигаться вниз и направо. Каждая вновь вводимая зона должна иметь одну общую сторону с одной из уже заданных зон или не иметь ни одной (но не две общие стороны с одной зоной или общий узел) (рис. П1).

Таблица П1

### Варианты и исходные данные для построения сеток

Вариант	R, мм	x, мм	y, мм	r, мм	Вариант	R, мм	x, мм	y, мм	r, мм
1	50	35	10	5	10	50	35	10	5
2	50	30	30	4	11	50	30	30	4
3	45	30	8	6	12	60	30	8	6
4	45	25	18	5	13	55	25	18	5
5	45	7	30	3	14	30	7	16	4
6	30	17	6	3	15	35	17	6	3
7	30	15	7	3	16	45	15	7	3
8	15	5	4	3	17	80	15	50	6
9	18	7	4	3	18	80	60	12	5

**Перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции**

**Условие задачи.** Дан элемент, который использован для дискретизации сплошной среды. По двум поверхностям этого элемента происходит конвективный теплообмен. На основе размеров элемента и физических характеристик требуется составить матрицы элемента, предполагая его толщину единичной.

**Алгоритмы вычисления матриц**

Матрица теплопроводности элемента имеет вид

$$\begin{aligned}
 [k^{(e)}] = & \frac{K_{xx}}{4A} \begin{pmatrix} b_i \cdot b_i & b_i \cdot b_j & b_i \cdot b_k \\ b_i \cdot b_j & b_j \cdot b_j & b_j \cdot b_k \\ b_i \cdot b_k & b_j \cdot b_k & b_k \cdot b_k \end{pmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{pmatrix} c_i \cdot c_i & c_i \cdot c_j & c_i \cdot c_k \\ c_i \cdot c_j & c_j \cdot c_j & c_j \cdot c_k \\ c_i \cdot c_k & c_j \cdot c_k & c_k \cdot c_k \end{pmatrix} + \\
 & + \frac{hL_{jk}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{hL_{jk}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  – коэффициент теплопроводности [Вт/(см·К)].

Константы  $b$  и  $c$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 b_i &= Y_j - Y_k, \\
 b_j &= Y_k - Y_i, \\
 b_k &= Y_i - Y_j, \\
 c_i &= X_k - X_j, \\
 c_j &= X_i - X_k, \\
 c_k &= X_j - X_i.
 \end{aligned}$$

Удвоенная площадь элемента

$$2A = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{pmatrix}.$$

Длины сторон  $L_{jk}$  и  $L_{ki}$  равны

$$L_{jk} = \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2};$$

$$L_{ki} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}.$$

Вектор нагрузки элемента  $\{f^{(e)}\}$  представляет собой сумму двух поверхностных интегралов по каждой из сторон, где происходит конвективный теплообмен

$$f^{(e)} = \frac{hT_{jk}L_{jk}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{hT_{ki}L_{ki}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $h$  – коэффициент теплообмена [Вт/(см·К)];  $T_{jk}$ ,  $T_{ki}$  – температура окружающей среды.

### Программа в Mathcad к практическому занятию № 2

Исходные данные (см. рис. 1):  $K_{xx} = K_{yy} = 30$  [Вт/(см·К)],  $h = 5$  [Вт/(см·К)],  $T_{jk} = 50$ ,  $T_{ki} = 40$ ,  $i$  (3; 3),  $j$  (7; 0),  $k$  (6; 4).

#### Решение

1. Для удобства вычислений принимаем

$$\begin{array}{lll} i := 1 & j := 1 & k := 1 \\ X_i = X_1 & X_j = X_2 & X_k = X_3 \\ X_1 := 3 & X_2 := 7 & X_3 := 6 \\ Y_1 := 3 & Y_2 := 0 & Y_3 := 4. \end{array}$$

2. Вычисление переменных  $b$  и  $c$ :

$$\begin{array}{ll} b_i = Y_j - Y_k & b_1 := Y_2 - Y_3 \\ & b_1 = -4 \\ b_j = Y_k - Y_i & b_2 := Y_3 - Y_1 \\ & b_2 = 1 \\ b_k = Y_i - Y_j & b_3 := Y_1 - Y_2 \\ & b_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
c_i &= X_k - X_j & c_1 &:= X_3 - X_2 \\
& & c_1 &= -1 \\
c_j &= X_i - X_k & c_2 &:= X_1 - X_3 \\
& & c_2 &= -3 \\
c_k &= X_j - X_i & c_3 &:= X_2 - X_1 \\
& & c_3 &= 4
\end{aligned}$$

3. Вычисление удвоенной площади элемента  $2A = S$

$$\begin{aligned}
S &:= \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{pmatrix} \\
S &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad |S| \rightarrow 13 \\
A &:= \frac{|S|}{2} \quad A = 6,5.
\end{aligned}$$

4. Вычисление длины сторон элемента  $L_{jk}$  и  $L_{ki}$ :

$$\begin{aligned}
L_{jk} &= \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2}; & L_{ki} &= \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}; \\
L_{23} &= \sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2}; & L_{31} &= \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2}; \\
L_{23} &= 4,123; & L_{31} &= 3,162.
\end{aligned}$$

5. Формирование матрицы теплопроводности элемента

$$xx := 1, \quad yy := 1, \quad K_{xx} := 30, \quad K_{yy} := 30, \quad h := 5, \quad |k^{(e)}| = R$$

$$\begin{aligned}
[R] &= \frac{K_{xx}}{4A} \begin{pmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_3 \\ b_1 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_3 \\ b_1 \cdot b_3 & b_2 \cdot b_3 & b_3 \cdot b_3 \end{pmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{pmatrix} c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot c_3 \\ c_1 \cdot c_2 & c_2 \cdot c_2 & c_2 \cdot c_3 \\ c_1 \cdot c_3 & c_2 \cdot c_3 & c_3 \cdot c_3 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{hL_{23}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{hL_{31}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
R &= \begin{pmatrix} 24.886 & -1.154 & -15.826 \\ -1.154 & 18.41 & -6.949 \\ -15.826 & -6.949 & 40.988 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6. Формирование вектора нагрузки элемента  $\{f^{(e)}\}$ :

$$f^{(e)} = \frac{h\Gamma_{jk}L_{jk}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h\Gamma_{ki}L_{ki}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Обозначаем  $f^{(e)} = j$ ,  $\frac{h\Gamma_{jk}L_{jk}}{2} = C$ ,  $\frac{h\Gamma_{ki}L_{ki}}{2} = E$ ,

$$jk := 1 \qquad ki := 1$$

$$\Gamma_{jk} := 50 \qquad \Gamma_{ki} := 40$$

$$C := \frac{h\Gamma_{jk}L_{23}}{2}, \qquad E := \frac{h\Gamma_{ki}L_{31}}{2},$$

$$C = 412.311 \qquad E = 316.228$$

$$J := C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления вектор-столбец имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 316.228 \\ 412.311 \\ 728.538 \end{pmatrix}.$$

Получена система матричных уравнений относительно узловых значений температуры [K]  $\{T\} = \{f\}$ :

7. Решение данной системы уравнений путем обращения матриц:

Так как  $\{f^{(e)}\} = j$ ,  $\{k^{(e)}\} = R$  то:

$$J := \begin{pmatrix} 316.228 \\ 412.311 \\ 728.538 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 24.886 & -1.154 & -15.826 \\ -1.154 & 18.41 & -6.949 \\ -15.826 & -6.949 & 40.988 \end{pmatrix}$$

$$T := R^{-1}J.$$

Результат вычисления

$$T = \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 40 \\ 40.002 \\ 40.001 \end{pmatrix}$$

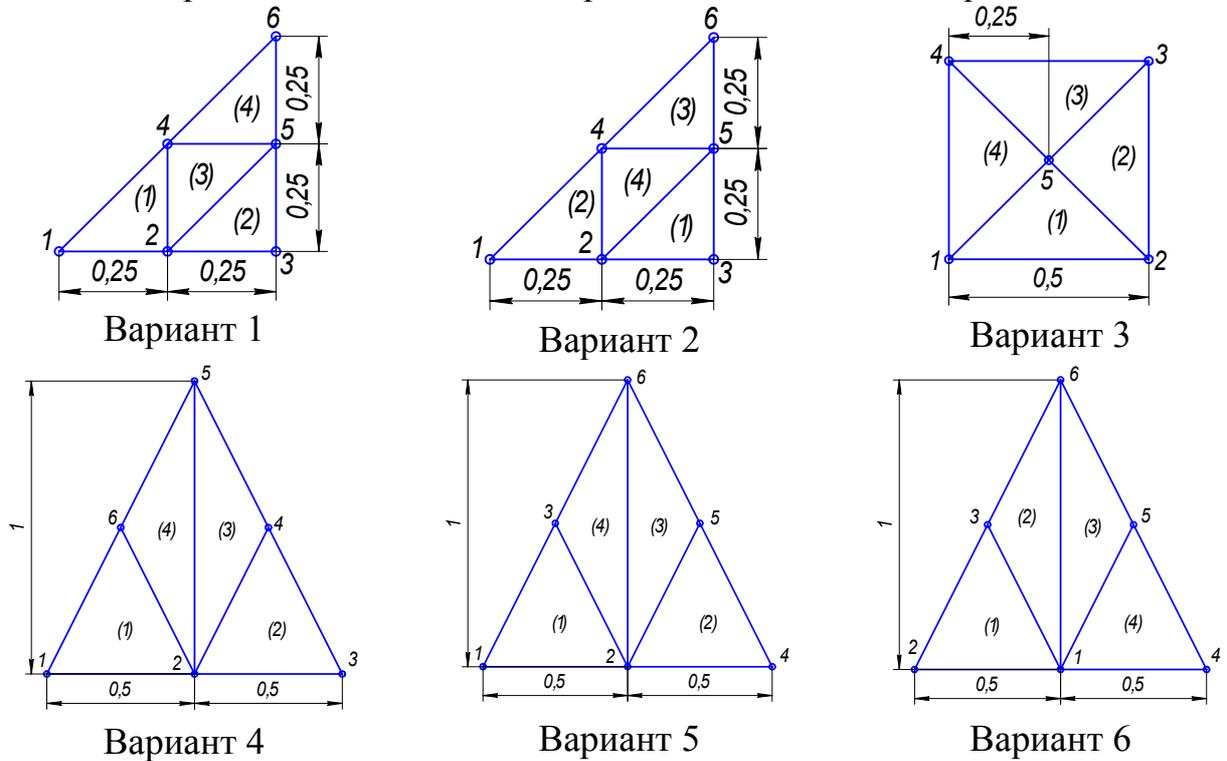
## Таблица П 2

### Варианты заданий и условия задачи для треугольного элемента

Номер варианта	Координаты узлов, см						Коэффициенты, Вт/см <sup>2</sup> ·С		Параметры конвекции для					
	<i>ij</i>		<i>jk</i>		<i>ik</i>									
	$X_i$	$Y_i$	$X_j$	$Y_j$	$X_k$	$Y_k$	$K_{xx}$	$K_{yy}$	$h$	$T_\infty$	$h$	$T_\infty$	$h$	$T_\infty$
1	1	1	8	1	2	16	30	30	5	50	-	-	-	-
2	4	0	4	7	1	4	30	30	5	50	5	50	-	-
3	1	1	8	4	7	16	30	30	-	-	5	40	5	50
4	3	5	6	1	9	7	30	30	5	40	5	40	5	40
5	7	9	0	9	4	1	30	30	4	100	-	-	5	50
6	11	1	15	6	9	5	30	30	-	-	5	50	-	-
7	4	0	4	4	1	4	30	30	-	-	-	-	5	-
8	1	1	8	1	2	16	10	10	5	50	-	-	-	100
9	1	1	8	1	2	16	20	20	5	50	-	-	-	-
10	1	1	8	1	2	16	30	30	1	50	-	-	-	-
11	1	1	8	1	2	16	30	30	2	50	-	-	-	-
12	1	1	8	1	2	16	30	30	3	50	-	-	-	-
13	1	1	8	1	2	16	30	30	4	50	-	-	-	-
14	7	9	1	6	4	1	20	20	5	40	-	-	4	50
15	6	2	9	7	0	7	35	35	4	100	-	-	5	90

## Приложение 3

### Варианты заданий для построения глобальной матрицы жесткости



Алгоритмы МКЭ при расчете напряжений [1]

Интерполяционные функции для расчета напряжений

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y], \quad (1)$$

где  $a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$ ,  $b_i = Y_j - Y_k$ ,  $c_i = X_k - X_j$ ;

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y], \quad (2)$$

где  $a_j = X_k Y_i - X_i Y_k$ ,  $b_j = Y_k - Y_i$ ,  $c_j = X_i - X_k$ ;

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y], \quad (3)$$

где  $a_k = X_i Y_j - X_j Y_i$ ,  $b_k = Y_i - Y_j$ ,  $c_k = X_j - X_i$ ;

Матрица жесткости для элемента

$$k^{(e)} = \int_V [B]^T [D] [B] dV. \quad (4)$$

Матрица свойств для плоскодеформированного состояния:

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{vmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Формула вычисления матрицы градиентов для плосконапряженного состояния:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{vmatrix} \quad (6)$$

Формулы для вычисления элементов матрицы градиентов

$$\begin{aligned}
 b_i &= Y_i - Y_k \\
 b_j &= Y_k - Y_i \\
 b_k &= Y_i - Y_j \\
 c_i &= X_k - X_j \\
 c_j &= X_i - X_k \\
 c_k &= X_j - X_i
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Формула нахождения площади элемента А

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
 \tag{8}$$

Матрица жесткости для всего объема

$$[k] = \sum_{i=1}^{NE} \int_V [B]^T [D] [B] dV.
 \tag{9}$$

Интеграл поверхностных нагрузок имеет вид

$$\int_s N^T \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \end{vmatrix} dS,
 \tag{10}$$

где  $s$  – площадь элемента,  $p_x, p_y$  – интенсивности поверхностной нагрузки

Формула вычисления деформаций (для плосконапряженного состояния):

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = Bq = B \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}.
 \tag{11}$$

Формула вычисления напряжений (для плосконапряженного состояния)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D(\varepsilon - \varepsilon_0).
 \tag{12}$$

Главные напряжения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \sigma_3 = 0. \quad (13)$$

Формула для нахождения интенсивности напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (14)$$

За критерий перехода металла в пластическое состояние принято условие  $\sigma_i > \sigma_{0,2}$ , где  $\sigma_{0,2}$  – условный предел текучести.

Таблица ПЗ

Исходные данные для расчетов в программе 2DMESH

Номер варианта	Материал	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$D$ , мм	$L$ , мм	$h$ , мм	$r$ , мм	Режим
1	P18	475	60	15	6	1	Пл. напр.
2	38ХНЗМФА	1150	60	15	6	2	Пл. деф.
3	5Х2МНФ	1150	60	15	6	3	Пл. напр.
4	4ХСМФ	1330	60	20	8	1	Пл. деф.
5	3Х2В8Ф	1440	60	20	8	2	Пл. напр.
6	40Х	800	60	20	8	3	Пл. деф.
7	25ХГСА	850	60	30	15	1	Пл. напр.
8	40ХНМА	850	60	30	15	2	Пл. деф.
9	30ХНЗА	850	80	30	12	1	Пл. напр.
10	30ХГСА	850	80	30	12	2	Пл. деф.
11	18ХГТ	420	80	30	12	3	Пл. напр.
12	Алюминий	180	80	40	14	1	Пл. деф.
13	12Х18Н10Т	270	80	40	14	2	Пл. напр.
14	12Х18Н9Т	280	80	40	14	3	Пл. деф.
15	P18	475	80	50	20	1	Пл. напр.
16	38ХНЗМФА	1150	80	50	20	2	Пл. деф.
17	5Х2МНФ	1150	100	50	16	1	Пл. напр.
18	4ХСМФ	1330	100	50	16	2	Пл. деф.

Окончание табл. ПЗ

Номер варианта	Материал	$\sigma_{02}$ , МПа	$D$ , мм	$L$ , мм	$h$ , мм	$r$ , мм	Режим
19	3Х2В8Ф	1440	100	50	16	3	Пл. напр.
20	40Х	800	100	60	20	1	Пл. деф.
21	25ХГСА	850	100	60	20	2	Пл. напр.
22	40ХНМА	850	100	60	20	3	Пл. деф.
23	30ХН3А	850	100	70	25	1	Пл. напр.
24	30ХГСА	850	100	70	25	2	Пл. деф.
25	18ХГТ	420	100	70	25	3	Пл. напр.

## Приложение 5

Варианты заданий, исходные данные о свойствах материала к занятию № 5

Номер варианта	Марки сталей и сплавов	$\sigma_{02}$ , МПа	$\sigma_b$ , МПа	Модуль упругости $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\mu$
1	Сталь 30	300	500	200 – 210	0,28 – 0,31
2	Сталь 45	360	610		
3	65Г	440	750		
4	15ГС	350	500	200 – 210	0,28 – 0,31
5	40Х	800	1000-1050		
6	30ХГНА	850 – 950	1100		
7	30ХГСА	1200 – 1300	1500 – 1650		
8	30ХНА	750	900 – 950		
9	40ХЛ	400 – 500	650	190 – 200	0,3
10	20МЛ	250 – 315	450 – 500		
11	АМГ6	170	340	72 – 72,5	0,31 – 0,33
12	АД31Т	80	170		
13	Д16Т	350	480		
14	МЛЗ	55	180	42	0,34
15	Л90 – твердая	–	450 – 470	102 – 115	–
16	– мягкая	–	240 – 260		
17	ЛО90	250	280		
18	ЛС59-1	150	340	145	–
19	мельхиор	–	400		

**Описание команд и обозначение параметров**

**PT, 1, 0, 0, 0** определяет ключевую точку 1, имеющую следующие координаты относительно текущей активной системы координат:  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

**PTGEN, 1, 1, 1, 1, 0, 0.072, 0, 0** генерирует одну или множество ключевых точек из существующих моделей перемещением или вращением в текущей системе координат.

**CREXTR, 2, 2, 1, X, 0.0058** создает новые линии – следов движения точки 2 вдоль оси  $X$  текущей системы координат на длину 0,0058 единиц.

**SFSWEEP, 1, 1, 1, Y, 180, 2** генерирует новую поверхность, получаемую как следы вращения линий 1 вокруг оси  $Y$  текущей системы координат на 180 градусов.

**VLEXTR, 1, 2, 1, Y, 0.04**, генерирует новые объемы при движении поверхностей 1 и 2 в  $Y$  направлении текущей системы координат на длину 0,04 единицы.

**EGROUP, 1, SOLID, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0** определяет элемент тип SOLID (трехмерный объемный элемент) для группы элементов 1.

**MPROP, 1, EX, 2E11** определяет величину модуля упругости в направлении  $X$ , равной  $2E - 11$  для первого набора свойств.

**MPROP, 1, NUXY, 0.3** определяет величину коэффициента Пуассона  $Y$  деформация, обусловленная  $X$  напряжением, равной 0,3 для первого набора свойств.

**MPROP, 1, ALFX, 13E - 6** определяет величину коэффициента теплового расширения в направлении  $X$ , равной  $13E - 6$  для первого набора свойств.

**M\_VL, 1, 2, 1, 8, 2, 16, 6, 1, 1, 1** создает конечно-элементную сетку из восьми узловых объемных элементов. Вдоль каждого первого главного ребра 2 элемента, вдоль второго – 16, вдоль третьего – 6, узлы разделены однородными промежутками. Генерируемые элементы отображаются на экране.

**NMERGE, 1, 64000, 1, 0.0001, 0, 1, 0** вызывает слияние совпадающих узлов. Узлы с номерами 1 – 64000 будут слиты, если для любой пары из них координаты окажутся внутри области 0,0001.

**DSF, 1, UY, 0, 2, 1** определяет начальные  $Y$  – смещение величиной 0 для всех узлов лежащих на поверхностях 1 и 2 с шагом 1.

**DSF, 4, UZ, 0, 10, 6** определяет начальные  $Z$  – смещение величиной 0 для всех узлов, лежащих на поверхностях 4 – 10 с шагом 6.

**DCR, 14, UX, 0,14,1** определяют нулевые  $X$  – смещения для всех узлов, лежащих на линии 14 с шагом 1.

**NTVL, 1, 50, 2, 1** определяет значения температурных нагрузок во всех точках тела.

**A\_STATIC, T, 0, 0, 1E006, 1E+010, 0, 0, 0, 0, 0, 0** определяет тип нагрузок, задаваемых в линейном статическом анализе. В нашем случае  $T$  – термические нагрузки.

**R\_STATIC** запускает на решение статический анализ в соответствии с выбранным типом нагрузок в команде **A\_STATIC**.

Таблица П4

Температурный коэффициент линейного расширения сталей и сплавов

Ва- риант	Марки сталей и сплавов	Температура, °С				
		100	200	300	400	500
1	Сталь 30	12,9	14,5	15,8	15,8	16,7
2	Сталь 45	11,59	12,32	13,09	13,71	14,18
3	65Г	11,11	11,9	12,9	13,5	-
4	X18H9T	16,6	17,0	17,6	18,0	18,3
5	40X	13,4	13,5	-	14,8	-
6	30XГСА	7,6 (50К)	9,4(100К)	-	-	-
7	30XH3M	11,8	13,0	14,0	14,7	-
8	30X	12,45	13,0	13,4	13,75	14,5
9	АМГ6	20 – 100 (23,9)	20 – 200 (24,8)	20 – 300 (25,9)	-	-
10	Д16Т	20 – 100 (22,7)	20 – 200 (23,4)	20 – 300 (24,8)	-	-
11	МЛ4	20 – 100 (26,4)	200 – 300 (28,3)	-	-	-
12	Л90	20 – 100 (14,4)	20 – 300 (18,2)	-	-	-
13	ЛО90	20 – 100 (18,4)	-	-	-	-
14	ЛС9-1	-200(13,9)	-100(18,3)	20(20,6)	-	-
15	МНЖМЦ30-1-1	25 – 300 (16)	-	-	-	-

Примечание. Приведены значения истинного ТКЛР  $\alpha$ ,  $10^{-6}$  при данной температуре  $T$  или среднего ТКЛР  $\alpha$ ,  $10^{-6} C^{-1}$  в интервале температуры  $\Delta T$  [11].

### Последовательность этапов МКЭ

Произвольная система уравнений должна быть преобразована в систему линейных алгебраических уравнений, имеющих матричный вид:

$$[f] = [K]\{u\}, \quad (1)$$

где  $[f]$  – вектор правых частей уравнений,  $[u]$  – вектор неизвестных,  $[K]$  – симметричная матрица коэффициентов при неизвестных.

В упругой задаче теории упругости уравнение представляет собой запись закона Гука в обобщенной форме.

Последовательность основных этапов имеет следующий вид:

1. Упругое тело разбивается на элементы. Объемное тело на тетраэдры или параллелепипеды. Плоское тело – на треугольники и прямоугольники.
2. Для каждого элемента составляется матрица жесткости  $K$  с использованием функции формы. Функция формы представляет собой способ аппроксимации неизвестной функции перемещений  $u$ .
3. Матрицы жесткости элементов объединяются в единую матрицу жесткости для всего тела.
4. Решая приведенную выше систему уравнений, находим узловые перемещения  $u$ .
5. С помощью уравнений теории упругости вычисляют деформации и напряжения в узловых точках тела.

### *Методический пример 1*

В данном примере решается плоская задача теории упругости в программе Mathcad [12]. Кольцо, рассмотренное в работе [12], нагружено двумя силами и имеет две оси симметрии. Для повышения точности расчетов рассмотрена одна четвертая часть кольца. На осях симметрии должны вы-

полняться граничные условия равенства нулю перемещений, перпендикулярных осям симметрии. Например, из фрагмента приведенной программы (см. также [12]) видно, что сетка имеет 66 узлов и 100 конечных элементов.

В приведенном фрагменте осуществляется задание параметров, характеризующих модель МКЭ и условия задачи упругости.

Матрица индексов:

NN – число элементов    nr – число узлов в ряду  
 нф – число рядов в столбце

NN := 100    nr := 11    нф := 6    ORIGIN := 1

```

MIU :=
  ie1 ← 1
  for j ∈ 1 .. нф - 1
    for i ∈ 1 .. nr
      ie1 ← 2 (nr - 1) (j - 1) + 2i - 1
      ie2 ← 2 (nr - 1) (j - 1) + 2i
      MIUie1,1 ← nrj + i + 1
      MIUie1,2 ← nrj + 1
      MIUie1,3 ← nr (j - 1) + i
      MIUie2,1 ← nr (j - 1) + i + 1
      MIUie2,2 ← nrj + i + 1
      MIUie2,3 ← nr (j - 1) + 1
    break if ie1 = NN - 1
  MIU
  
```

	1	2	3
1	13	12	1
2	2	13	1
3	14	12	2
4	3	14	2
5	15	12	3
6	4	15	3
7	16	12	4
8	5	16	4
9	17	12	5
10	6	17	5
11	18	12	6
12	7	18	6
13	19	12	7
14	8	19	7
15	20	12	8
16	9	20	8

Число узлов:                      Число элементов:  
 NU := max (MIU)            NE := rows (MIU)  
 NU = 66                            NE = 100

Ввод координат (расчет ведем для двух радиусов колец):

r<sub>1</sub> := 100 mm    r<sub>2</sub> := 50 mm    t := 5,7 mm    φ<sub>1</sub> := 90 deg    φ<sub>2</sub> := 0 deg  
 Z<sub>0</sub> := 0 mm    Y<sub>0</sub> := 0 mm

$$\Delta r := \frac{(r_2 - r_1)}{nr - 1} \quad \Delta \phi := \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{n\phi - 1} \quad r_1 := r_1 + \Delta r (i - 1) \quad \phi_j := \phi_1 + \phi_2 (j - 1)$$

$$Z_{nr(j-1)} := r_i \cdot \cos(\phi_j) + z_0 \quad y_{nr(j-1)} + i := r_i \cdot \cos(\phi_j) + y_0$$

$$I := 1 \dots NU$$

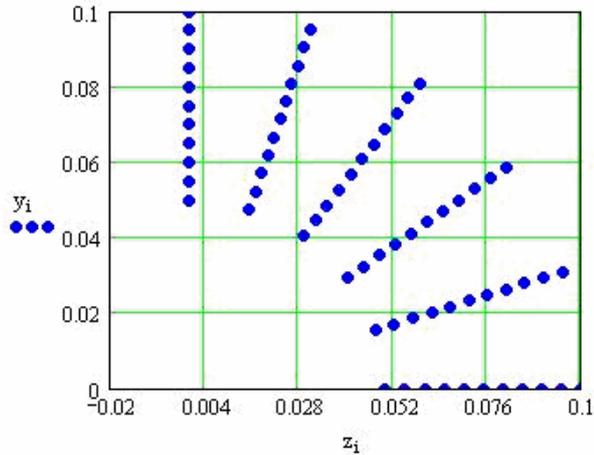


Рис. П2

Ввод граничных условий в перемещениях:

$$g := 0 \quad ii := 1nr \quad g_{ii} := 2 \cdot ii - 1 \quad \Delta g_{ii} := 0 \text{ mm}$$

$$g_{ii + nr} := nr (n\phi - 1) 2 + 2ii \quad \Delta g_{ii + nr} := 0 \text{ mm}$$

$$z^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ m}$$

$$y^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 0.1 & 0.095 & 0.09 & 0.085 & 0.08 & 0.075 & 0.07 & 0.065 & 0.06 & 0.055 \\ \hline \end{array} \text{ m}$$

Номера заданных перемещений

$$g^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta g^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ m}$$

$$i := 1.. \text{rows}(z) \quad j := 1.. \text{rows}(g) \quad \text{Coord}_{i,1} := i \quad gu_{j,1} := j$$

$$\text{Coord}^{\langle 2 \rangle} := y \frac{1}{\text{mm}} \quad \text{Coord}^{\langle 3 \rangle} := z \frac{1}{\text{mm}} \quad gu^{\langle 2 \rangle} := g \quad gu^{\langle 3 \rangle} := \Delta g \frac{1}{\text{mm}}$$

Характеристики материала:  $E := 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \text{Pa}$   $\mu := 0,3$

NDS := 1 плоское деформированное состояние      NDS := 0 плоское напряженное состояние

С помощью программы из работы [12] в отличие от рассмотренного в ней примера выполнены расчеты кольца при новых значениях внешнего и внутреннего радиусов. Остальные параметры были сохранены неизменными. Например, на рис. П3 изображен график интенсивности напряжений и деформаций для кольца с радиусами  $r_1 = 30$  мм;  $r_2 = 15$  мм, на рис. П4 для кольца с радиусами  $r_1 = 100$  мм,  $r_2 = 50$  мм. Сравнение одноименных графиков на данных рисунках показывает, что при увеличении размеров кольца в данном диапазоне значений наблюдается снижение уровня напряжений в вертикальном сечении.

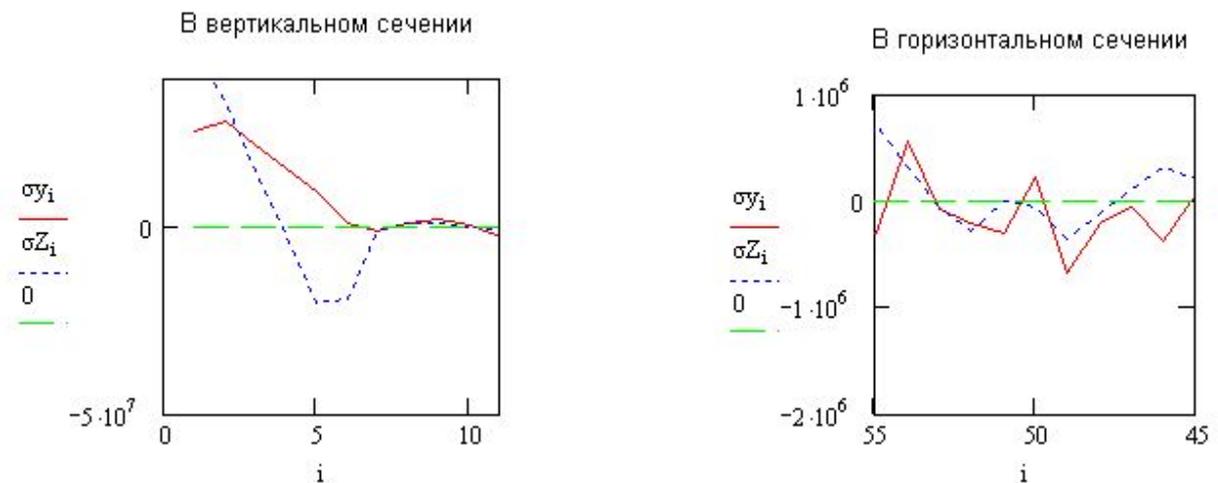


Рис. П3. График интенсивности напряжений и деформаций в узлах кольца с радиусами  $r_1 = 30$  мм;  $r_2 = 15$  мм

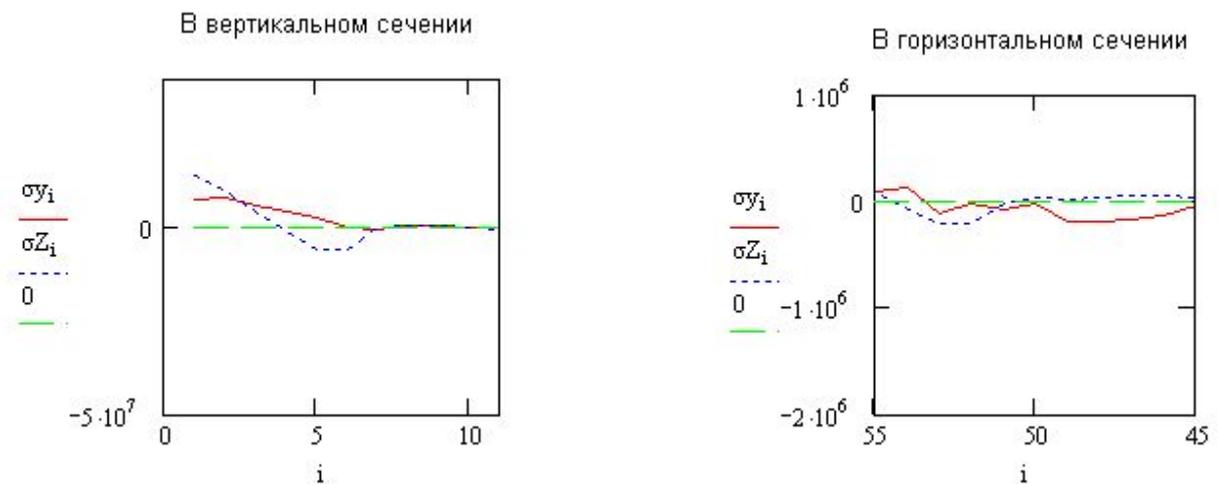


Рис. П4. График интенсивности напряжений и деформаций в узлах кольца с радиусами  $r_1 = 100$  мм;  $r_2 = 50$  мм

Для дальнейшего изучения программы из работы [12] были изменены модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ . Результаты расчетов представлены в виде графиков на рис. П5 и рис. П6.

Расчеты показали, что внесение изменений в программу приводит к искажению формы графиков. Это подтверждается колебательным характером изменения напряжений в горизонтальном сечении и указывает на нарушение вычислительного процесса. Причину следует связать с потерей устойчивости решения.

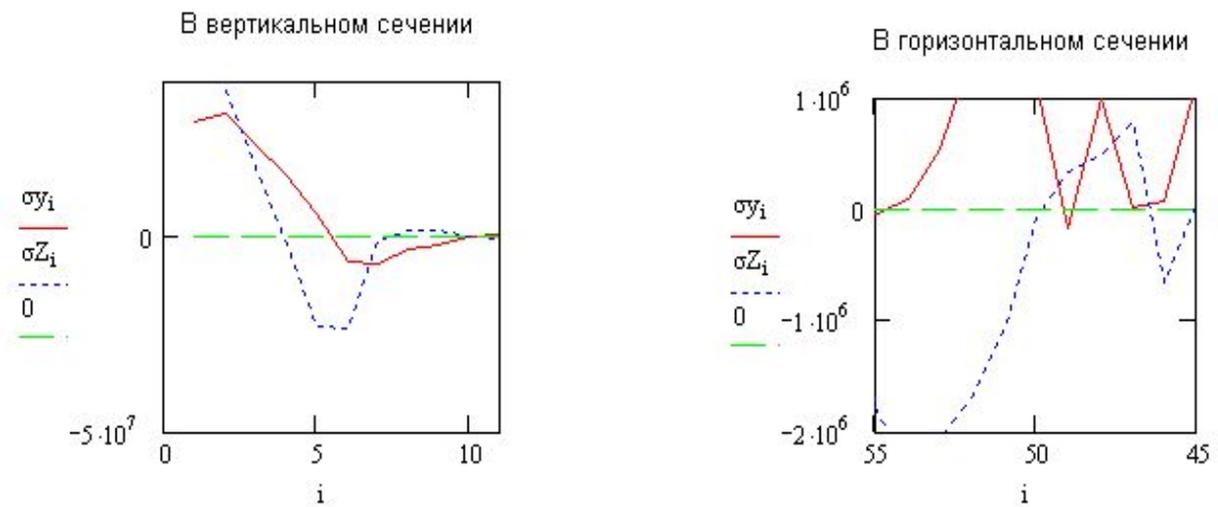


Рис. П5. График интенсивности напряжений и деформаций в узлах кольца при  $E = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6$  Па;  $\mu = 0,4$

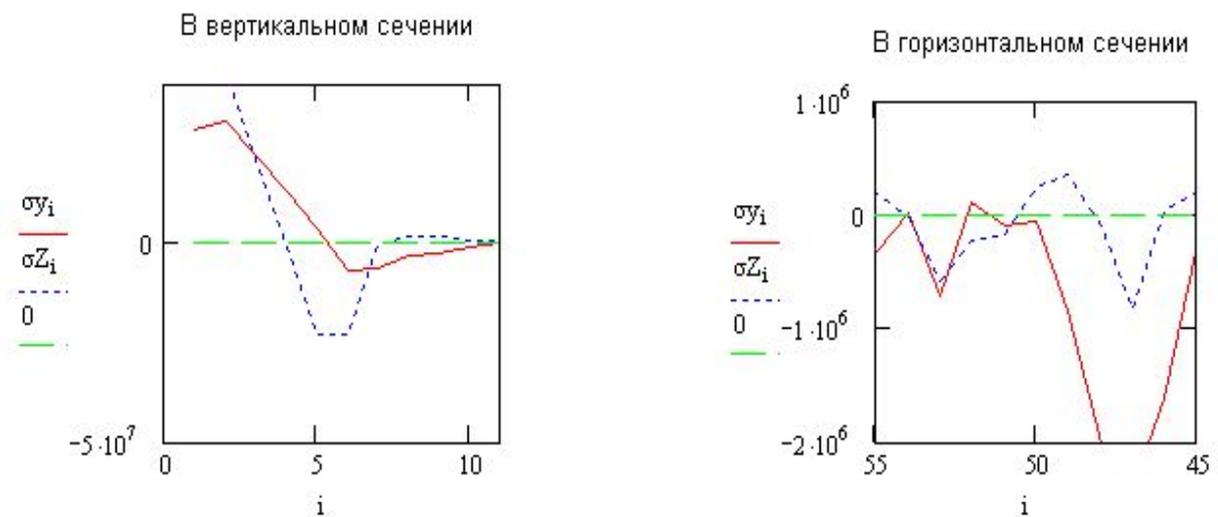


Рис. П6. График интенсивности напряжений и деформаций в узлах кольца с при  $E = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6$  Па;  $\mu = 0,45$

## *Методический пример 2*

### *Программа для пакета COSMOS/M*

В этом примере решается та же плоская задача теории упругости, что и в методическом примере 1. Данные задачи:  $r_1 = 100$  мм,  $r_2 = 50$  мм,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu = 0,3$ ,  $P = 1$  кН.

Для выполнения данного примера составлена следующая программа:

```
VIEW,0,0,1,0          CRARC,4,5,3,1,0.1
PLANE,Z,0,1          CT,1,0,0.002,4,1,4,2,3,0
PT,1,0,0,0          RG,1,1,1,0
PT,2,0.05,0,0       EGROUP,1,TRIANG,0,1,0,0,0,0,0,0
PT,3,0.1,0,0        RCONST,1,1,1,2,0.01,0
PT,4,0,0.05,0       MPROP,1,EX,2000000000000
PT,5,0,0.1,0        MPROP,1,NUXY,0.3
CRLINE,1,4,5        MA_RG,1,1,1,3,1,0
CRLINE,2,2,3        DCR,1,UX,0,1,1,
CRARC,3,4,2,1,0.05  DCR,2,UY,0,2,1,
CRARC,4,5,3,3,0.1   FPT,5,FY,-500,5,1
CRDEL,4,4,1         C* R_STATIC
```

#### Описание команд программы

**VIEW,0,0,1,0** определяет направление линии взгляда, относительно которой будет строиться изображение на экране.

**PLANE,Z,0,1** определяет плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей  $x$ - $y$ ,  $y$ - $z$ ,  $z$ - $x$ .

**CRLINE,1,4,5** определяет линию между двумя точками.

**CRARC,3,4,2,1,0.05** определяет дугу окружности, используя три точки.

**CRDEL,4,4,1** уничтожает указанные линии.

**CT,1,0,0.002,4,1,4,2,3,0** определяет контур однородной плотности, используя заданные линии.

**RG,1,1,1,0** создает область, определяемую одним внешним контуром и до 19 внутренними контурами.

**RCONST,1,1,1,2,0.01,0** определяет геометрические свойства элементов.

**MA\_RG,1,1,1,3,1,0** создает конечно-элементную сетку, состоящую из трехузловых треугольных элементов.

**FPT,5,FY,-500,5,1** задает значение приложенной силы в узле.

Описание нерассмотренных команд см. в прил. 6.

С помощью приведенной программы выполнены расчеты напряжений в кольце с размерами  $r_1 = 50$  мм,  $r_2 = 100$  мм. Параметры свойств материала приняты такими же, как и в программе на Mathcad. На рис. П7.6 приведены расчетные графики интенсивности напряжений в горизонтальном и вертикальном сечениях, которые сравнивали с рис. П7.

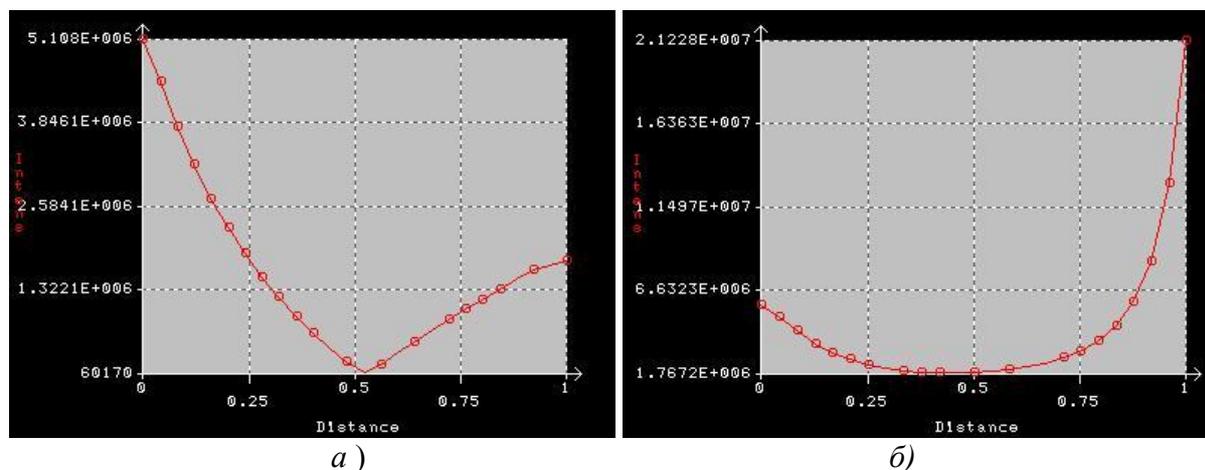
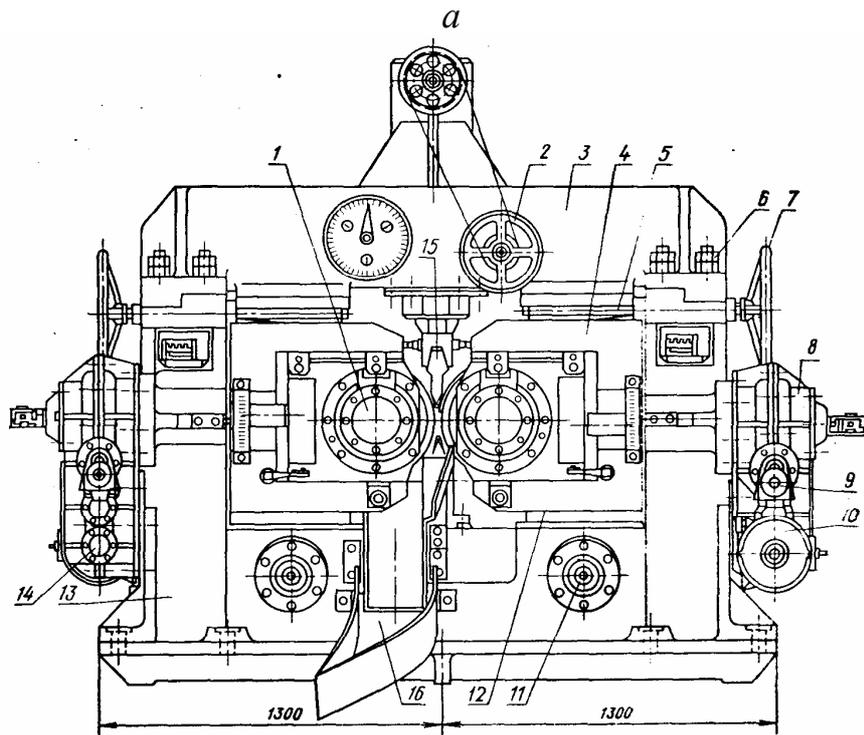
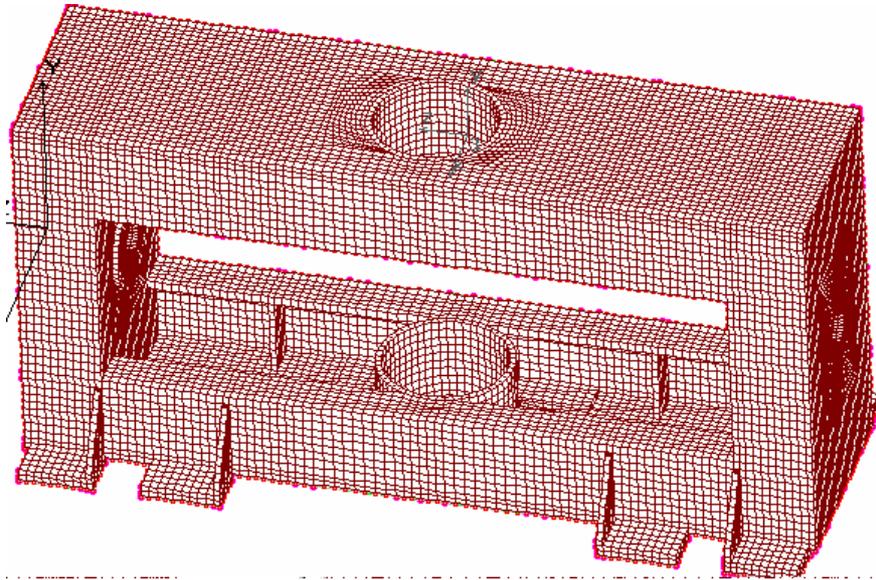


Рис. П7 Распределение интенсивности напряжений по толщине стенки:

*a* – в горизонтальном сечении, *б* – в вертикальном сечении

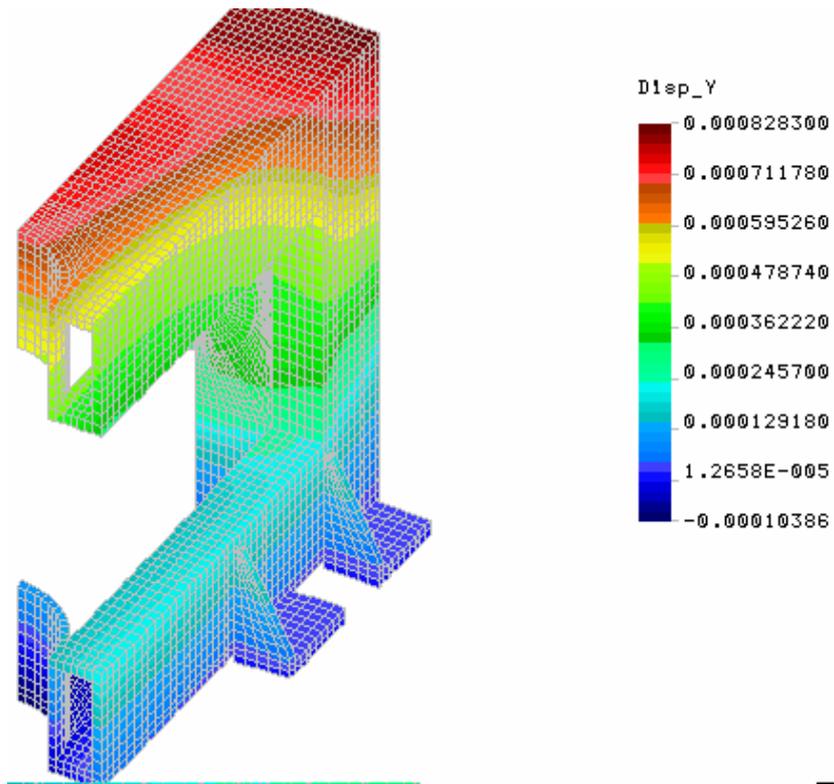
Совпадение графиков на рис. П7 с данными метода фотоупругости позволяет считать результаты вычислений в COSMOS достоверными. Расчеты показали, что отмеченные выше недостатки вычислений МКЭ в Mathcad [12] при программировании в COSMOS отсутствуют. К другим преимуществам программы в COSMOS относятся ее универсальность и удобство работы с ней.

Примеры практического применения МКЭ при исследовании, проектировании и разработке новых технологий

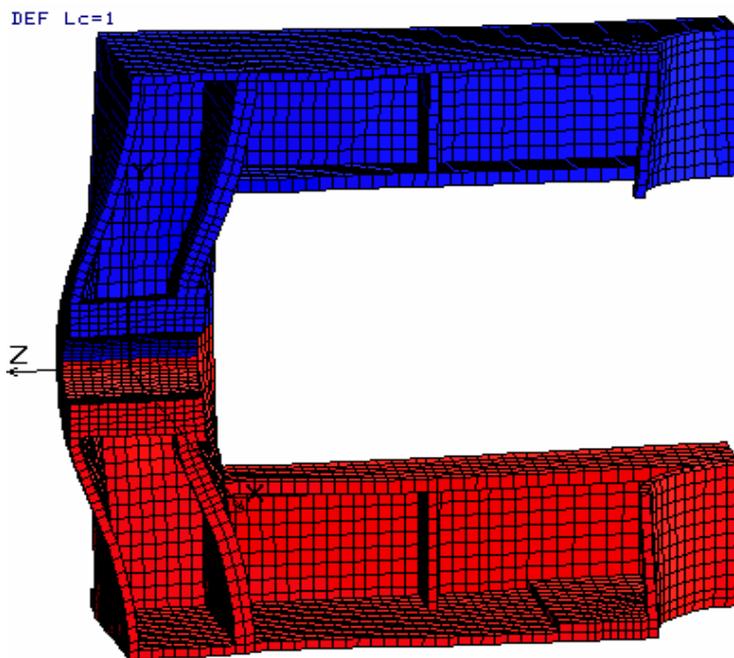


б

Рис. П8. Исследование и разработка рациональной конструкции рабочей клетки стана для прокатки шаров; а – трехмерное изображение станины с сеткой конечных элементов на поверхности; б – новый стан для прокатки шаров (изготовлен и введен в эксплуатацию в 2002 г. )



a)



б)

Рис. П9. Расчетные картины деформированного состояния станины под действием нагрузок: *a* – цветное изображение поля перемещений; *б* – деформация станины

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
2. Гунн, Г. Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением : учеб. пособие для вузов / Г. Я. Гунн. – М. : Металлургия, 1983. – 352 с.
3. Кислов, В. М. Определение физических и геометрических параметров конструкций на основе метода конечных элементов : учеб. пособие / В. М. Кислов. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1994. – 88 с. – ISBN 5-230-04763-1.
4. Методические указания и задачи по технологической механике. Вычисление напряжений / сост. А. В. Белевич ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 76 с.
5. Белевич, А. В. Основы технологической механики : текст лекций / А. В. Белевич. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – 96 с. – ISBN 5-89368-125-8.
6. Расчет деталей двигателей внутреннего сгорания методом конечных элементов : метод. указания к практ. занятиям. Ч. 1 / сост. В. Б. Петров ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – 39 с.
7. Расчет деталей двигателей внутреннего сгорания методом конечных элементов : метод. указания к практ. занятиям. Ч. 2. / сост. В. Б. Петров и А. Б. Иванченко ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 64 с.
8. Белевич, А. В. Анализ полей локальных параметров с применением конечно-элементных систем / А. В. Белевич, П. В. Гольцов, Д. М. Бабин // Производственные технологии и качество продукции : материалы междунар. науч.-техн. конф. – М. : Новые технологии, 2003. – С. 243 – 248. – ISBN 5-94694-008-2.

9. Белевич, А. В. Моделирование напряжений в плоских сечениях прессовых матриц с глубокими вырезами методом конечных элементов / А. В. Белевич // Изв. вузов. Сер. ЧМ. – 2000. – № 1. – С. 25 – 27.
10. Белевич, А. В. Моделирование напряжений в сечениях прессовых матриц с учетом температурного и конструкционного факторов / А. В. Белевич // Изв. вузов. Сер. ЧМ. – 2001. – № 1. – С. 24 – 27.
11. Бабичев, Н. А. Физические величины : справ. / А. П. Бабичев [и др.] ; под ред. И. С. Григорьева и Е. З. Мейлихова. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с. – ISBN 5-283-04013-5.
12. Макаров, Е. Инженерные расчеты в Mathcad : учеб. курс. – СПб. : Питер, 2003. – 448 с. – ISBN 5-94723-530-7.
13. Белевич, А. В. Исследование технологических и конструктивных параметров рабочих клеток винтовой прокатки с помощью современных конечно-элементных программ / А. В. Белевич, А. В. Гончарук, Е. В. Даева, Б. А. Романцев // Изв. вузов. Сер. ЧМ. – 2002. – № 9. – С. 32 – 35.

Учебное издание

Белевич Александр Викторович  
Проворова Наталья Сергеевна

СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

Ч. 1. АЛГОРИТМЫ МКЭ

Практикум

Редактор А.П. Володина  
Технический редактор Н. В. Тупицына  
Корректор Е.В. Афанасьева  
Компьютерная верстка С.В. Павлухиной

ЛР № 020275. Подписано в печать 17.03.06.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.  
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,63. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.