

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методическое пособие

Составитель: Новикова Н.А.

Владимир 2006

УДК 519(0.75)

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры Владимирского государственного
педагогического университета Соловьева О.А.

Кандидат технических наук, доцент Владимирского
государственного университета Орлов Ю.А.

Математические основы теории автоматического управления. Методическое пособие / Сост. Новикова Н. А. Владимир, 2006. 107с.

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом Министерства образования Российской Федерации по специальности 071800 "Мехатроника".

В методическом пособии изложены основы математического аппарата, используемого в теории автоматического управления. Приведены необходимые сведения из теории функций комплексного переменного, теории вычетов, преобразование Лапласа и преобразование Фурье. Изложение вопросов математики сопровождается рассмотрением основных задач теории автоматического управления.

Методическое пособие подготовлено для студентов специальности 071800 дневной формы обучения, а также ориентировано на студентов заочной формы обучения и студентов Центра профессионального образования инвалидов.

Ил.25. Библиогр.: 8 назв.

УДК 519.(075)

Владимирский государственный
университет, 2006

ВВЕДЕНИЕ

Квалификация современного специалиста по автоматическому управлению в значительной степени определяется уровнем его математических знаний, поскольку овладеть теорией автоматического управления и разработанными на ее основе методами проектирования автоматических систем невозможно без знаний математического аппарата. Курс высшей математики не в полной мере удовлетворяет требованиям подготовки специалистов, связанных задачами автоматического управления. В связи с этим в учебный план специальности 071800 «Мехатроника» наряду с общим курсом высшей математики введены дополнительные разделы.

Методические указания содержат некоторые разделы математического аппарата, знание которого необходимо студентам для последующего изучения курса «Теория автоматического управления» - основные элементы теории функций комплексного переменного и теории вычетов, преобразование Лапласа и преобразование Фурье. Изложение теоретического материала сопровождается примерами.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей, изучающих теорию систем автоматического управления.

1. Комплексные числа и функции комплексного переменного

1.1 Комплексные числа и действия над ними

Число $z = x + jy$, где x и y – любые действительные числа, а j – мнимая единица называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа считаются равными, если равны порознь их действительные и мнимые части, т. е. равенство

$$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2$$

равносильно двум равенствам:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости с одной стороны и всевозможными комплексными числами с другой. Для этого по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат мнимая. Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости, а каждой точке на плоскости – комплексное число (рис.1.1)

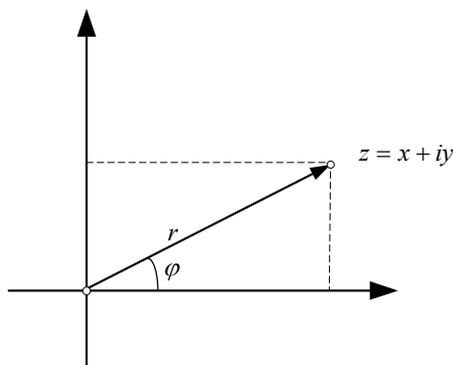


Рис. 1.1

Комплексные числа можно изображать и в виде векторов на плоскости («комплексной плоскости»). Проекция вектора, начало которого совмещено с началом координат, а конец с данной точкой, соответствуют действительной и мнимой частям комплексного числа. Действительные числа располагаются на действительной оси OX . Комплексные числа, действительные части которых равны нулю (чисто мнимые числа) изображаются в виде точек, лежащих на оси OY (мнимой оси). Положение точки, изображающей комплексное число можно определить с помощью полярных координат r и φ (рис.1.1), т.е. с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величине угла, образованного этим век-

тором с положительным направлением действительной оси. Числа r и φ называются соответственно модуль и аргумент комплексного числа и обозначаются $r = |z|$, $\varphi = \text{Arg}z$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Модулем мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части. Если $z = x + jy$, то

$$\begin{aligned} y &= r \sin \varphi = |z| \text{Arg}z; & x &= r \cos \varphi = |z| \cos \text{Arg}z, \\ |z| &= r = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{tg} \text{Arg}z = \text{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Величина $\text{Arg} z$ многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π . Главное значение величины $\text{Arg} z$ заключено в пределах $-\pi < \text{Arg} z < \pi$ и обозначается $\text{arg} z$.

Если z — действительное положительное число, то $\text{arg} z = 0$; если z — действительное отрицательное число, то $\text{arg} z = \pi$; если z — мнимое число с положительной мнимой частью, то $\text{arg} z = \frac{\pi}{2}$; если z — мнимое число с отрицательной мнимой частью, то $\text{arg} z = -\frac{\pi}{2}$. При $z = 0$ величина $\text{arg} z$ не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1.1) всякое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в так называемой тригонометрической форме:

$$z = x + jy = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (1.2)$$

С помощью формулы Эйлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ можно перейти от тригонометрической формы (1.2) к показательной

$$z = r e^{j\varphi}.$$

Два комплексных числа, имеющих одну и ту же действительную часть, а мнимые части, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, называются взаимно сопряженными. Число, сопряженное числу z , обозначается \bar{z} . Если $z = x + jy$, то $\bar{z} = x - jy$. Из этого определения следует, что если $w = \bar{z}$, то $z = \bar{w}$, и, следовательно, $\bar{\bar{z}} = z$.

Модули взаимно сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \text{Arg} z = -\text{Arg} \bar{z}.$$

Сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными, относительно действительной оси.

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов, с учетом того, что $j^2 = -1$ (следовательно, $j^3 = -j$; $j^4 = 1$; $j^5 = j$ и т.д.). При записи результата действий, произведенных над комплексными числами, следует разделить действительную часть от мнимой, т.е. собрать отдельно члены, не содержащие множителя j , и члены, содержащие этот множитель:

$$\begin{aligned}(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2), \\ (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}\quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел $(x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 + y^2$, иначе $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел также является действительным числом $(x + jy) + (x - jy) = 2x$, т.е. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т.е.

$$(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2).$$

Итак, при сложении и вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части. Если изобразить комплексные числа с помощью векторов, то их сложение и вычитание сводится к сложению или вычитанию векторов, изображающих эти числа (Рис. 1.2).

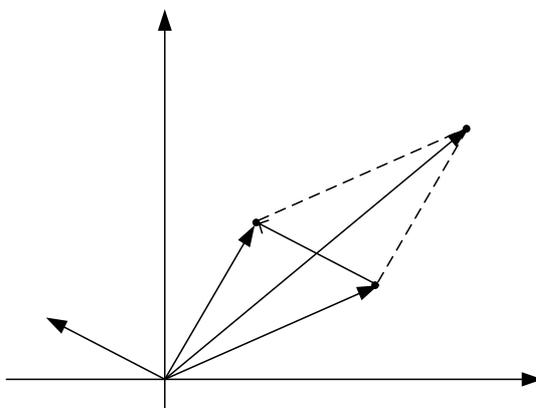


Рис. 1.2

Модуль комплексного числа равен длине соответствующего вектора, поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Применив это равенство несколько раз, получим

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

Знак равенства имеет место, когда векторы, изображающие числа z_1, z_2, \dots, z_n лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, т.е. когда $\arg z_1 = \arg z_2 = \dots = \arg z_n$. Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающие эти числа (рис. 1.2)

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Пусть z_1 - данное комплексное число (данная точка), ρ - данное действительное положительное число. Совокупность точек z , удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = \rho$, образует окружность с центром в точке z_1 радиуса ρ . Неравенство $|z - z_1| < \rho$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности (внутренность круга), а неравенство $|z - z_1| > \rho$ - множество точек лежащих вне окружности (внешность круга).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Используя свойства сопряженных чисел удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, в результате чего делитель станет действительным положительным числом, а затем произвести деление действительной и мнимой частей отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

При тригонометрической форме записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1); z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2),$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + \\ &+ j(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Вектор, изображающий произведение $z_1 \cdot z_2$ может быть получен из вектора, изображающего число z_1 , поворотом на угол φ_2 , образуемым вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора z_2 . (рис. 1.3).

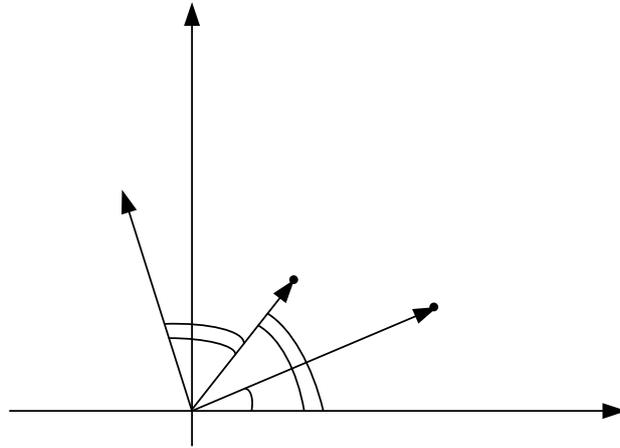


Рис. 1.3

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2),$$

приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$\text{т.е.} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

Из правила умножения следует правило возведения в целую положительную степень: если

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

$$\text{то} \quad z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

$$\text{т.е.} \quad |z^n| = |z|^n; \quad \text{Arg} z^n = n \text{Arg} z + 2k\pi,$$

где k - любое целое число ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Эти формулы справедливы и при целом отрицательном n , что следует из правила деления комплексных чисел.

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z - значит найти такое число $\omega = \sqrt[n]{z}$, n - я степень которого равна z . В соответствии с правилом возведения в степень имеем (при $z \neq 0$):

$$|\omega|^n = |z|, \quad n \operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Если обозначить

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \omega = \rho(\cos \theta + j \sin \theta), \text{ то получим}$$

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Т.к. r и ρ положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет ρ :

$$\rho = (\sqrt[n]{r}),$$

где скобки в правой и левой части обозначают, что берется арифметическое (действительное и положительное) значения корня. Из второго равенства находим

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

Тогда окончательно получим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + j \sin \varphi)} = (\sqrt[n]{r}) \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что имеется n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$, которые можно получить, полагая $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, несмотря на то, что k – любое целое число.

Действительно, два значения k , отличающиеся друг от друга на n , а значит и на любое кратное n число, дают при подстановке в (1.5) одно и то же значение, т.к. если $k' - k = n$, то

$$\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2(k' - k)\pi}{n} = 2\pi,$$

следовательно

$$\cos \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}; \sin \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Как следует из (1.5) все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $(\sqrt[n]{|z|})$. А т.к.

$$\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

(аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих значениям k и $k+1$ отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$), то точки соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $(\sqrt[n]{|z|})$ с центром в начале координат. Способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$ таков: из начала координат (рис.1.4), как

из центра, описывается окружность, радиус которой равен $(\sqrt[n]{|z|})$. Если $\arg z = \varphi$, то из начала координат проводится луч под углом $\frac{\varphi}{n}$ к положительному направлению действительной оси; на пересечении этого луча с окружностью находим точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (для $k=0$); вписав в окружность правильный n – угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, построим точки, соответствующие остальным значениям корня.

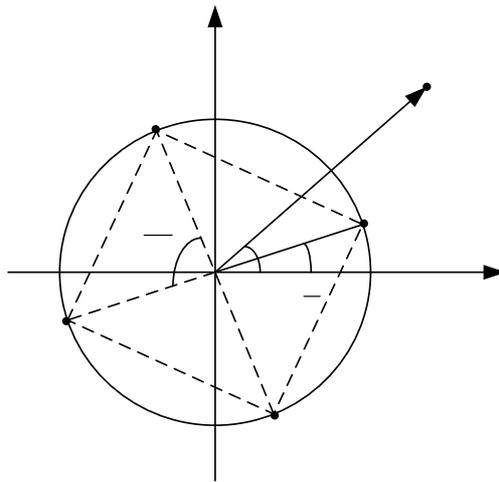


Рис. 1.4

Пример 1.1 Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$.

$\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8})(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + j \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3})$. При $k = 0, 1, 2$ получим

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + j\sqrt{3}, \\ -2, \\ 1 - j\sqrt{3}. \end{cases}$$

1.2 Последовательности комплексных чисел и функции комплексного переменного

Внутренность круга радиуса ρ с центром в данной точке z_0 , т.е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \rho$, называется ρ – окрестностью точки z_0 . Вообще, под окрестностью точки понимают не обязательно круговую область, а любую область, внутри которой лежит точка z_0 .

Число z_0 называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

если для любого положительного числа ε можно подобрать такое число N (N зависит от ε), что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.
Иначе говоря, равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ означает, что как бы мала ни была ε –

окрестность точки z_0 вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек этой последовательности, так как все точки z_n последовательности, начиная с номера $n = N$, попадут внутрь этой ε – окрестности.

Если $z_n = x_n + jy_n$ и $z_0 = x_0 + jy_0$, то, учитывая равенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

нетрудно заметить (непосредственно из определения), что существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Пусть последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ такова, что модули всех её членов, начиная с некоторого, становятся больше любого, сколь угодно большого положительного числа (т.е. как бы велико ни было положительное число M , к нему можно подобрать такое N , что $|z_n| > M$, при $n \geq N$). Тогда последовательность, очевидно, предела не имеет и в этом случае принято считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, и говорить, что предел последовательности бесконечен, а для его изображения дополнить плоскость точкой, которую называют бесконечно удаленной. Окрестностью бесконечно удаленной точки называют внешность круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R , а центр находится в точке $z = 0$, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $|z| > R$. Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга.

Сравнивая определения равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ с определением окрестности бесконечно удаленной точки, видно, что если предел последовательности бесконечен, то как бы «мала» ни была окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

за исключением конечного их числа (все точки z_n начиная с $n = N$) попадут внутрь этой окрестности.

Во многих случаях представляет интерес вопрос о том, существует ли конечный предел последовательности. Последовательность, имеющую конечный предел, называют сходящейся. Комплексную плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, называют расширенной плоскостью.

Определение функции комплексного переменного аналогично определению функции действительного переменного: на некотором множестве точек, изображающих значение комплексной переменной z , задана (определена) функция $w = f(z)$, если каждой точке z этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) значение w .

Например, функция $w = z^2$ однозначна и определена во всей плоскости, так как с помощью формулы, по которой производится возведение в степень комплексного числа, всякому комплексному числу z соответствует и при том только одно значение z^2 . Функция $w = \text{Arg}z$ многозначна и определена на всей плоскости за исключением точки $z = 0$.

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y , являющихся соответственно его действительной и мнимой частями ($z = x + jy$), а числу w однозначно соответствует пара действительных чисел u и v ($w = u + jv$), то зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z равносильна двум зависимостям :

$$u = u(x, y) \quad \text{и} \quad v = v(x, y), \quad (1.6)$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных переменных x и y .

Например, если $w = z^2$, то, полагая $z = x + jy$ и $w = u + jv$, получим

$$u + jv = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + 2jxy,$$

и, следовательно, равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Если значения переменной z изображать с помощью точек некоторой плоскости (плоскости z), а значения функции w с помощью точек другой плоскости (плоскости w), то функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z , в которых эта функция определена, и точками плоскости w . То есть функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w .

Обозначим через g множество точек плоскости z , на которых определена функция $w = f(z)$, а через G – множество тех точек плоскости w , на которые с помощью функции $w = f(z)$ отображаются точки множества g . Точки множества G называются образами соответствующих точек множества g при отображении $w = f(z)$, а точки множества g – прообразами соответствующих точек множества G . Выбрав какую-либо определенную точку множества G , найдем те точки множества g , которые отобразились в выбранную точку, то есть все прообразы выбранной точки. Таким образом, каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g . В соответствии с определением функции это будет означать, что на множестве G определена некоторая функция $z = \varphi(w)$, которую называют обратной по отношению к функции $w = f(z)$.

Если функция $w = f(z)$ однозначна, то каждой точке плоскости z , в которой функция определена, соответствует одна точка плоскости w . Пусть при этом некоторое множество точек g плоскости z отображается взаимно однозначно на некоторое множество G плоскости w , то есть функция $w = f(z)$ такова, что не только каждой точке множества g соответствует одна и только одна точка множества G , но и обратно каждой точке множества G , соответствует в точности одна точка множества g . Тогда функция $z = \varphi(w)$, определенная на множестве G и отображающая его на множество g , обратная по отношению к функции $w = f(z)$ также является однозначной. В этом случае говорят, что функция $w = f(z)$ однолистка на множестве g .

Пример 1.2 Функция $w = z^2$ осуществляет однозначное отображение внутренности круга g плоскости z с центром в начале координат и радиусом, равным 2 на внутренность круга G плоскости w с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Это отображение области g на область G однозначно, но не взаимнооднозначно. Действительно, функция $w = z^2$ однозначна и каждой точке z соответствует единственная точка w , но каждой точке w , лежащей внутри круга G , за исключением точки $w = 0$, соответствуют две точки круга g , симметричные относительно начала координат, так как если $z_1 = -z_2$ и $z_1^2 = w$, то $z_2^2 = z_1^2 = w$. Следовательно, функция $z = \sqrt{w}$, осуществляющая отображение области G на область g , обратная по отношению к функции $w = z^2$ многозначна (двузначна).

Пример 1.3 Функция $w = z^2$ отображает сектор g , точки которого определены неравенствами $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$; $|z| < 1$;

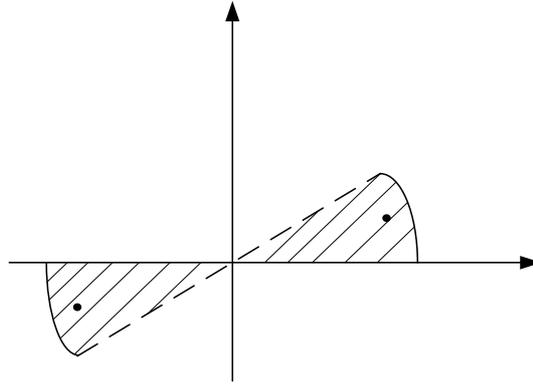


Рис.1.5

на сектор G (Рис. 1.6) $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, |w| < 1$

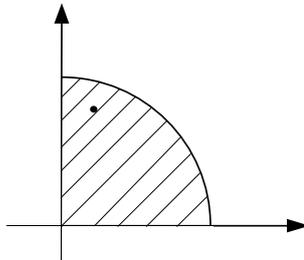


Рис.1.6

Это следует из того, что $\arg(z^2) = 2 \arg z$ и $|z^2| = |z|^2$. Это отображение взаимно однозначно, так как хотя функция $z = \sqrt{w}$, обратная по отношению к данной двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 ($z_2 = -z_1$), соответствующих точке w области G , лишь одна принадлежит области g .

Число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при z , стремящемся к z_0 : $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, если для любой сколь угодно малой ε -окрестности

точки w_0 , можно найти такую δ -окрестность точки z_0 , что для всех точек z этой δ -окрестности (кроме быть может самой точки z_0) соответствующие значения функции $f(z)$ будут изображаться точками ε -окрестности точки w_0 . Если z_0 и w_0 - конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ означает, что как бы мало ни было

положительное число ε , к нему можно подобрать такое положительное число δ , что для всех значений $z (z \neq z_0)$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Введенное определение предела функции ничем не отличается от определения предела функции действительного переменного, следовательно, все теоремы о пределах и бесконечно малых, доказываемые в курсе математического анализа остаются в силе для функции комплексного переменного. Функция $f(z)$ называется бесконечно малой в окрестности точки z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если функция $f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не только существует, но и равен значению функции $f(z)$ в точке z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

В соответствии с определением предела, это означает, что функции $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta,$$

следует, что

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$ (Δz -приращение независимой переменной, Δw -приращение функции), то последние неравенства заменяются соответственно неравенствами

$$|\Delta z| < \delta,$$

$$|\Delta w| < \varepsilon.$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w = f(z)$, определенной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в точке z_0 выполняется неравенство

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

Так как данное определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функции действительного переменного, то доказываемые в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного непрерывных функций, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функции комплексного переменного.

Как показано ранее равенство $w = f(z)$, где $w = u + jv$, $z = x + jy$, равносильно системе равенств:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Если $z_0 = x_0 + jy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + j[v(x, y) - v(x_0, y_0)]$$

$$\text{и } |f(z) - f(z_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}.$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z следует, что если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , то выполняются неравенства

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

которые означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) . Таким образом, из непрерывности функции комплексного переменного следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных x и y . Справедливо и обратное утверждение: непрерывность функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

Основные свойства непрерывных функций комплексного переменного (аналогично функциям действительного переменного):

Пример 1.4 Определить является ли непрерывной функция $w = z^2$.

Имеем: $w = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$.

Тогда $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ - непрерывные функции аргументов x и y , следовательно, функция $f(z) = z^2$ непрерывна при любых z .

1.3 Основные трансцендентные функции

Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (1.7)$$

так же как и ряд с действительными числами, называется сходящимся, если существует конечный предел его конечной суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

при $n \rightarrow \infty$. Этот предел называется суммой ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (1.8)$$

членами которого являются действительные части членов ряда (1.7), так и ряд

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots, \quad (1.9)$$

составленный из мнимых частей членов ряда (1.7).

Если сходится ряд $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$, составленный из модулей комплексных чисел ряда (1.7), то ряд (1.7) также сходится и называется абсолютно сходящимся.

Определения суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы сходимости суммы, разности и произведения рядов не отличаются от соответствующих определений и теорем для рядов с действительными членами.

Показательная функция.

Если показатель степени является комплексным числом, определение степени a^z , вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрии определения тригонометрических функций $\sin z, \cos z, \operatorname{ctg} z$ не применимы при комплексных значениях z . Учитывая известные для действительных значений x разложения функций $e^x, \sin x, \cos x$ в степенные ряды, положим по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (1.10)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (1.11)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (1.12)$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и при том абсолютно при любом комплексном значении z .

Функции $e^z, \sin z, \cos z$ связаны между собой формулой Эйлера:

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z. \quad (1.13)$$

Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$, получим

$$e^{-jz} = \cos z - j \sin z \quad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) получим

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad (1.15)$$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}. \quad (1.16)$$

Формула Эйлера позволяет перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi}. \quad (1.17)$$

Если x_1 и x_2 действительные числа, то известно, что

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}.$$

Аналогично для комплексных чисел

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

справедливо для любых комплексных чисел z_1 и z_2 . В частности, если $z = x + jy$, где x и y – действительные числа, то

$$e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}.$$

С учетом (1.13)

$$e^{jy} = \cos y + j \sin y,$$

следовательно

$$e^z = e^x (\cos y + j \sin y). \quad (1.18)$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$ и одно из значений $\text{Arg} e^z$ равно y .

Равенство (1.18) позволяет вычислить значение показательной функции при любых комплексных значениях показателя.

Например,

$$1) e^{2-3j} = e^2 (\cos 3 - j \sin 3);$$

$$2) e^{\pi j} = -1;$$

$$3) e^{\frac{\pi}{2}j} = j.$$

Из равенства (1.18) следует, что функция e^z периодична и имеет период $2\pi j$:

$$e^{z+2\pi j} = e^z.$$

Действительно, если $z = x + jy$ то

$$e^{z+2\pi j} = e^x [\cos(y + 2\pi) + j(\sin y + 2\pi)] = e^x (\cos y + j \sin y) = e^z.$$

Тригонометрические функции.

Формула (1.18) позволяет вычислять значения показательной функции, а формулы (1.15) и (1.16) используют для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z .

Так как показательная функция имеет период $2\pi j$, правые части равенств (1.15) и (1.16) не изменятся при замене z на $z + 2\pi j$:

$$e^{j(z+2\pi j)} = e^{jz+2\pi j} = e^{jz},$$

$$e^{-j(z+2\pi)} = e^{-jz-2\pi j} = e^{-jz},$$

следовательно,

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

То есть определенные с помощью (1.15) и (1.16) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π .

Для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных z сохраняется основное связывающее их тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \right)^2 + \left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \right)^2 = \\ &= -\frac{e^{2jz} - 2 + e^{-2jz}}{4} + \frac{e^{2jz} + 2 + e^{-2jz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Сохраняются также и другие основные тригонометрические тождества:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

Функции tgz и $ctgz$ определяются с помощью равенств

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j(e^{jz} + e^{-jz})}, \quad (1.19)$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{j(e^{jz} + e^{-jz})}{e^{jz} - e^{-jz}}. \quad (1.20)$$

Гиперболические функции shz , chz , thz , $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Принимая во внимание (1.15), (1.16), (1.19) и (1.20) гиперболические функции легко можно выразить через тригонометрические:

$$shz = -j \sin jz, \quad chz = \cos jz,$$

$$thz = -jtgjz, \quad cthz = jctgjz.$$

Из этих тождеств следует, в частности, периодичность гиперболических функций, причем периоды shz и chz равным $2\pi j$, а thz и $cthz$ равны πj .

Пример 1.5 Найти: $\cos j$.

Принимая во внимание, что $\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$, получим

$$\cos j = \frac{e^{j^2} + e^{-j^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1,543.$$

то есть $\cos j$ - действительное число, большее 1, тогда как при x действительном всегда $|\cos x| \leq 1$.

Пример 1.6 Найти: $\sin(1 + 2j)$.

$$\sin(1 + 2j) = \sin 1 \cdot \cos 2j + \cos 1 \cdot \sin 2j;$$

$$\cos 2j = \frac{e^{2j^2} + e^{-2j^2}}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2};$$

$$\sin 2j = \frac{e^{-2} - e^2}{2j} = -j \frac{e^{-2} - e^2}{2};$$

$$\sin(1 + 2j) = \frac{e^{-2} + e^2}{2} \sin 1 - j \cos 1 \frac{e^{-2} - e^2}{2}$$

(аргумент под знаком \sin и \cos измеряется в радианах).

Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, то w называется логарифмом числа z и обозначается

$$w = \text{Ln}z.$$

Если $w = u + jv$, то из формулы (1.18) следует, что $|e^w| = e^u$ и $\text{Arg}e^w = v + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как в рассматриваемом случае $e^w = z$, то $e^u = |z|$ или

$$u = \ln|z|$$

($|z|$ - действительное положительное число и здесь имеется в виду обычное определение логарифма), и

$$v = \text{Arg}z.$$

Следовательно

$$\text{Ln}z = \ln|z| + j\text{Arg}z = \ln|z| + j\arg z + 2k\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.21)$$

Ввиду многозначности величины $\text{Arg}z$, логарифм является многозначной функцией (действительная часть определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π).

Символом $\ln z$ обозначают главное значение логарифма любого комплексного числа $\ln z = \ln|z| + j \arg z$.

Пример 1.7 Найти $\ln(-1)$ и $Ln(-1)$

Модуль числа -1 равен 1 , а главное значение аргумента равно π , следовательно

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi j = \pi j,$$

$$Ln(-1) = \pi j + 2k\pi j = (2k + 1)\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 1.8. Вычислить $\ln j$ и Lnj

$$|j| = 1, \quad \arg j = \frac{\pi}{2}, \quad \text{следовательно,}$$

$$\ln j = \ln 1 + \frac{\pi}{2} j = \frac{\pi}{2} j,$$

$$Lnj = \frac{\pi}{2} j + 2k\pi j = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 1.9 Найти $\ln(3 + 4j)$ и $Ln(3 + 4j)$.

$$|3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\arg(3 + 4j) = \arctg \frac{4}{3}, \quad \text{следовательно, } \ln(3 + 4j) = \ln 5 + j \arctg \frac{4}{3},$$

$$Ln(3 + 4j) = \ln 5 + j \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Свойства логарифмической функции комплексного переменного:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln z_1 + Ln z_2;$$

$$Ln \frac{z_1}{z_2} = Ln z_1 - Ln z_2;$$

$$Ln(z^n) = nLn z + 2k\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$Ln \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} Ln z.$$

Формула (1.18) служит для возведения в комплексную степень числа e . Чтобы перейти к определению возведения в степень любого комплексного числа отметим, что в силу определения логарифмической функции

$$e^{Lna} = a,$$

для любого комплексного a .

Для действительных a и z при $a \geq 0$, справедливо тождество

$$a^z = e^{zLna}.$$

Будем считать, что

$$a^z = e^{zLna} \quad (1.22)$$

для любых комплексных a и z , и тем самым определим a^z при любых комплексных a и z , где a, z – комплексные числа.

Равенство (21) многозначно в силу многозначности Lna . Его главным значением называют то, которое получается при подстановке в правую часть (1.22) $\ln a$ вместо Lna .

Пример 1.10 Найти j^j .

$$j^j = e^{jLnj} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}j + 2k\pi j\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Главное значение $j^j = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Пример 1.11 Найти: 2^{1+j} .

$$\begin{aligned} 2^{1+j} &= e^{(1+j)Ln2} = e^{(1+j)(\ln 2 + 2k\pi j)} = \\ &= e^{j(\ln 2 + 2k\pi) + (\ln 2 - 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi} (\cos \ln 2 + j \sin \ln 2) \\ &(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

2. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного

2.1 Производная

Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного совпадают с соответствующими определениями для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются на функции комплексного переменного.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного обладают многими дополнительными свойствами. Причина появления этих дополнительных свойств заключается в том, что условие для существования производной функции комплексного переменного является более ограниченным, чем условие существования производной функции действительного переменного.

Дадим независимому переменному $z = x + jy$ приращение $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$ и вычислим, вызванное этим приращением приращение Δw однозначной функции $w = f(z)$: $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w' , $\frac{dw}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$: $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Требование существования предела $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию $f(z)$ более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = \varphi(x)$ действительного переменного x . Так если функция $y = \varphi(x)$ имеет производную, то это значит, что существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x по двум направлениям: слева (при $\Delta x < 0$) и справа (при $\Delta x > 0$), и что пределы эти совпадают. Требование существования производной функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по любому пути, в частности по любому из бесконечного множества различных лучей, и совпадение всех этих пределов.

Пусть

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta z = \Delta x + j\Delta y,$$

тогда

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + j[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + j\Delta v,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y), \\ \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y). \end{aligned}$$

В этих обозначениях

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x + j\Delta y}. \quad (2.1)$$

Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке z , тогда предел (2.1) существует и не зависит от закона стремления к нулю $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$. В частности, при $\Delta z = \Delta x$, то есть при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по прямой параллельной оси OX (рис.2.1).

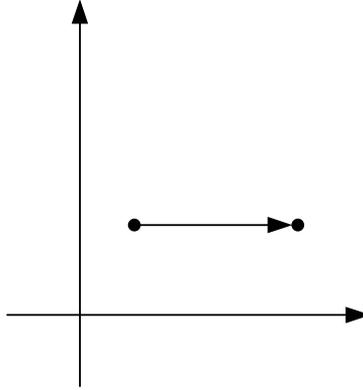


Рис.2.1

С учетом (2.1) получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + j \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2)$$

Выбрав $\Delta z = j\Delta y$, то есть точка $z + \Delta z$ стремится к точке z по прямой, параллельной оси OY (Рис. 2.2.), получим

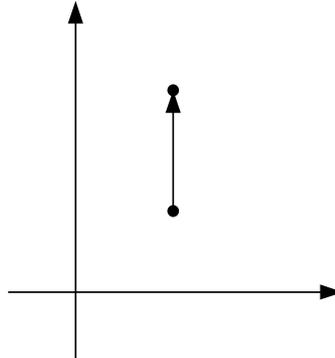


Рис. 2.2

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{j\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-j \frac{\Delta u}{\Delta y} + j \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, то из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4)$$

Условия (2.4) называются условиями Коши–Римана или условиями Даламбера–Эйлера и должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + jv$ имеет производную (дифференцируема). Эти условия при некоторых добавочных ограничениях не только необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z)$. Используя условия Коши–Римана, можем записать:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой ее окрестности, то она называется аналитической в данной точке.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется аналитической или голоморфной в этой области.

Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называются правильными. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, в которых $f(z)$ не определена) называются особыми точками.

Пример 2.1 Является ли функция $w = z^2$ аналитической?

Если $w = z^2$, то $u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$ и $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$ откуда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия (2.4) выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2.2 Является функция $w = e^z$ аналитической?

$$w = e^z; u + jv = e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y);$$

$$u = e^x \cos y; v = e^x \sin y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Коши–Римана выполнены в каждой точке, и функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 2.3 Является аналитической функция $w = \bar{z}$?

$$w = \bar{z}; u = x; v = -y; \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Следовательно, первое условие Коши–Римана не выполнено. Функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Пример 2.4 Является ли функция $w = z \cdot \operatorname{Re} z$ аналитической?

$$w = z \cdot \operatorname{Re} z = u + jv = (x + jy)x = x^2 + jxy$$

$$u = x^2; v = xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = x; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Условия (2.4) выполняются только в точках $x=0, y=0$. Следовательно, функция $z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$, и ни в какой точке не является аналитической.

Правила дифференцирования функции комплексного переменного:

1. Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций, то есть

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z).$$

2. Производная произведения двух функций равна произведению производной от первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

3. Производная дроби это дробь, числитель которой равен разности между произведением производной числителя на знаменатель и произведением производной знаменателя на числитель. Знаменатель производной равен квадрату знаменателя, то есть

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}.$$

4. Производная от сложной функции равна:

$$\{f[g(z)]\}'_{z=z_0} = f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0).$$

2.2 Гармонические функции

Многие задачи, встречающиеся в технике, приводят к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

называемого уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Действительная и мнимая части функции $f(z) = u + jv$, аналитической в некоторой области D , является в этой области решением уравнения Лапласа. Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое тождество по x , а второе по y и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференцируя первое тождество по y , а второе по x и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

называются гармоническими функциями. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Однако, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, функция $[u(x, y) + jv(x, y)]$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия Коши–Римана, как правило, не будут выполняться. Аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ можно получить, если произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, и подобрать другую так, чтобы удовлетворялись условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

То есть вторая функция определяется по ее двум частным производным, или что то же самое, по ее полному дифференциалу. Полный дифференциал определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого определяется своей действительной или мнимой частью.

Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, следовательно, являющиеся действительной или мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, называются сопряженными.

Пример 2.5 Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из условий Коши–Римана находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1; \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y. \quad (2.7)$$

Из (2.7) получим:

$$u = \int -4y dx = -4xy + \varphi(y), \quad (2.8)$$

где $\varphi(y)$ -пока произвольная функция. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем (2.8) по y и подставляем в (2.6)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1,$$

откуда $\varphi'(y) = -1, \varphi(y) = -y + c$. Следовательно, $u = -4xy - y + c$.

Окончательно получаем

$$w = u + jv = -4xy - y + c + j(2x^2 - 2y^2 + x) = \\ + 2j(x^2 - y^2 + 2jxy) + j(x + jy) + c = 2jz^2 + jz + c.$$

2.3 Интеграл от функции комплексного переменного

Предположим, что в плоскости z задана замкнутая или незамкнутая дуга C , которую будем считать гладкой или кусочно-гладкой. Дуга называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную, причем направление касательной непрерывно при движении точки по кривой. Дуга непрерывной кривой, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

Граничные точки кривой C обозначим z_0 и Z (Рис. 2.3). Если кривая замкнута, то $z_0 = Z$. Одну из точек, например, z_0 будем считать начальной, а другую – конечной. Таким образом, установим положительное направление на кривой C (на рис. – стрелка). Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна во всех точках дуги C .

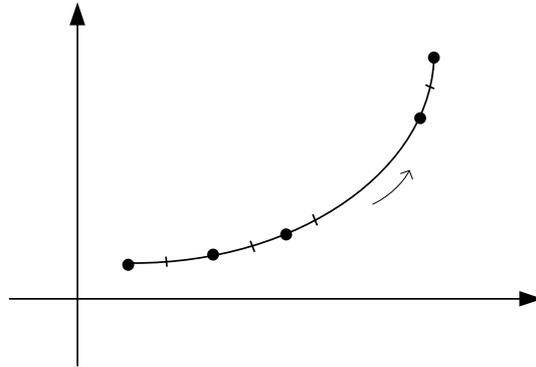


Рис. 2.3

Разобьем дугу C произвольным образом на n «элементарных дуг» и занумеруем деления точками $z_1, z_2, \dots, z_n = z$. Введем обозначения от начальной точки к конечной $z_1 - z_0 = \Delta z, z_2 - z_1 = \Delta z_2, \dots, z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$. Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k , а $|z_k|$ – длина этого вектора, то есть длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри, или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем по одной точке и обозначим эти точки a_1, a_2, \dots, a_n (точка a_k находится на элементарной дуге с концами в точках z_{k-1} и z_k).

Составим сумму:

$$f(a_1)\Delta z_1 + f(a_2)\Delta z_2 + \dots + f(a_n)\Delta z_n. \quad (2.9)$$

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \rightarrow \infty$ и длина наибольшей из элементарных дуг, стремится к нулю (то есть стремится к нулю максимальная из величин $|z_k|$) называется интегралом функции $f(z)$ по дуге C и обозначается

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max|z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(a_k) \Delta z_k \quad (2.10)$$

Основные свойства интеграла функции комплексного переменного

1. $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1 dz \pm \int_C f_2 dz$.
2. $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz$,

k – действительная или комплексная постоянная.

3. Если дуга \bar{C} геометрически совпадает с дугой C , но имеет противоположное направление, то

$$\int_{\bar{C}} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

так как при замене C на \bar{C} все множители Δz_k в правой части (2.10) изменяют знаки на противоположные.

4. Если дуга C состоит из дуг C_1, C_2, \dots, C_n (Рис. 2.4), то

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz .$$

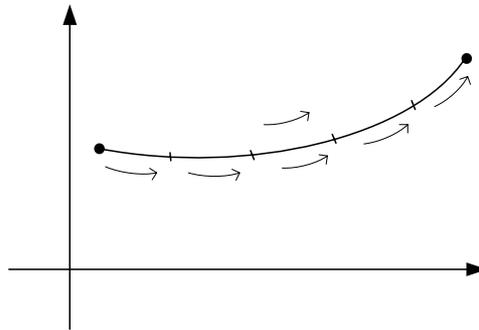


Рис. 2.4

$$5. \int_C dz = Z - z_0 ,$$

так как при $f(z) \equiv 1$, сумма в правой части (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = \\ &= z_n - z_0 = Z - z_0 . \end{aligned}$$

5. Если $|f(z)| < M$, во всех точках дуги C и длина дуги C равна l , то

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \cdot l .$$

Действительно

$$\left| \sum_{k=1}^n f(a_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(a_k)| \cdot |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq M \cdot l ,$$

так как сумма $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ равна длине ломаной, вписанной в дугу C , и поэтому не больше чем длина l дуги C .

Вычисление интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных. Пусть

$$f(z) = u + jv, \quad z = x + jy,$$

где u и v – функции переменных x и y : $u = u(x, y), v = v(x, y)$.

Тогда

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + j \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (2.11)$$

Так как подинтегральное выражение можно представить в виде: $f(z)dz = (u + jv)(dx + jdy) = udx - vdy + j(vdx + udy)$.

Если дуга C задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t) \quad \text{и} \quad y = y(t) \quad (2.12)$$

а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t = t_0$ и $t = T$:

$$z_0 = x(t_0) + jy(t_0), \quad Z = x(T) + jy(T),$$

то можно свести вычисление криволинейных интегралов в (2.11) к вычислению определенных интегралов с нижним пределом t_0 и верхним T (следует из правила вычисления криволинейного интегралов).

Так как уравнения (2.12) равносильны одному уравнению

$$z = z(t) \quad (2.13)$$

где $z(t) = x(t) + jy(t)$, то для вычисления $\int_C f(z)dz$ достаточно подставить в подинтегральную функцию вместо z $z(t)$ из (2.13), а вместо dz – дифференциал этой функции. Следовательно, интеграл по комплексному переменному можно вычислять пользуясь формулой

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^T f[z(t)]z'(t)dt \quad (2.14)$$

Пример 2.6 Вычислить интеграл $\int_C \operatorname{Re} z dz$;

где дуга C – отрезок прямой, соединяющий точку 0 с точкой $1 + j$.

Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1 + j$ в параметрической форме, имеет вид

$$x = t; \quad y = t,$$

а в комплексной форме

$$z = (1 + j)t,$$

где действительная переменная t изменяется от 0 до 1 . Находим далее

$$dz = (1 + j)dt.$$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 \operatorname{Re}[(1+j)t](1+j)dt = (1+t) \int_0^1 t dt = \\ = \frac{(1+j)}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1+j}{2}.$$

2.4 Теорема Коши.

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G , ограниченной замкнутым контуром C , а также в точках этого контура, то

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Доказательство теоремы проведем в дополнительном предположении о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в ограниченной им односвязной области. Используем равенство:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + j \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Покажем, что криволинейные интегралы второго рода $\int_C u dx - v dy$ и $\int_C u dy + v dx$ по замкнутому контуру равны нулю. Для равенства нулю криволинейных интегралов требуется, чтобы:

1. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имели непрерывные частные производные в области G ;

2. Всюду в области G выполнялись неравенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Первое условие выполняется в силу предположения о непрерывности производной $f'(z)$. Равенства (2.15) совпадают с условиями Коши–Римана и выполняются в области G , так как функция $f(z)$ по условию теоремы аналитическая в этой области. Таким образом, криволинейные интегралы $\int_C u dx - v dy = 0$ и $\int_C u dy + v dx = 0$, следовательно $\int_C f(z) dz \equiv 0$.

Можно доказать теорему Коши и без предположения о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в области, ограниченной данным контуром, однако, доказательство при этом осложнится.

Рассмотрим многосвязную область G , ограниченную внешним контуром C и внутренними контурами C_1 и C_2 (для определенности возьмем трехсвязную область Рис. 2.5).

Граница области состоит из внешнего контура C и двух внутренних контуров C_1 и C_2 . Соединим контуры C , C_1 , C_2 дугами γ_1 и γ_2 . Обозначим через Γ сложный замкнутый контур, состоящий из контуров C , C_1 , C_2 и дуг γ_1 и γ_2 . Область, ограниченная контуром Γ , будет односвязной и в силу теоремы Коши $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

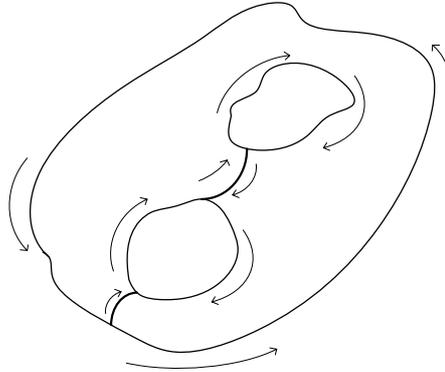


Рис. 2.5

Контур Γ будем обходить в таком направлении, при котором область G остается слева (положительное направление обхода). При этом обходе дуги γ_1 и γ_2 будут проходиться дважды в противоположных направлениях, в силу чего интегралы по каждой из дуг взаимно уничтожаются, и мы получим

$$\int_C f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Здесь внешний контур C обходится против часовой стрелки, а внутренние - по часовой стрелке. Получаем формулировку теоремы Коши для многосвязного контура. Изменив направление обхода внутренних контуров C_1 и C_2 , получим

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \quad (2.16)$$

где все контуры, как внутренние, так и внешний обходятся против часовой стрелки. Очевидно, что равенство (2.16) сохранится и в случае, если все контуры будут обходиться по часовой стрелке.

Теорема Коши для многосвязной области может быть сформулирована следующим образом: если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной замкнутой области G , то интеграл от этой функции по внешнему контуру, ограничивающему область, равен сумме интегралов по всем внутренним контурам (при этом все контуры обходят в одном направлении (либо по часовой стрелке, либо против))

В частности, если $f(z)$ аналитическая в кольце между замкнутыми контурами C_1 и C_2 и на самих этих контурах, то $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

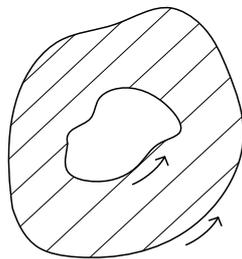


Рис. 2.6

Если интеграл от функции $f(z)$ по всему замкнутому контуру, расположенному в некоторой области G , равен нулю, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области G , зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги, и, следовательно, одинаков для всех дуг, имеющих общую начальную и конечную точки. Другими словами в этом случае интеграл не зависит от пути интегрирования.

Действительно, если дуги C_1 и C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку Z , то величина

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz \quad (2.17)$$

представляет собой интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру C , состоящему из дуги C_1 и дуги $\overline{C_2}$, геометрически совпадающей с дугой C_2 , но противоположной по направлению. Если интеграл равен нулю, то равна нулю и разность (2.17), откуда

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области G , то для любой дуги C (не замкнутой), принадлежащей G , интеграл от $f(z)$ по C зависит только от начальной z_0 и конечной Z точек дуги C , следовательно для этого интеграла можно использовать обозначение

$$\int_{z_0}^z f(z)dz. \quad (2.18)$$

Во избежании путаницы переменную интегрирования обозначают другой буквой (ξ), то есть обычно пользуются обозначением $\int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$.

Если зафиксировать точку z_0 , а z изменять в области G , то интеграл (2.18) будет функцией от z , обозначим эту функцию $F(z)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области G , содержащей точки z_0 и Z , причем величина z_0 - постоянна, а Z - изменяется, то в этой области функция

$$F(Z) = \int_{z_0}^Z f(z)dz \quad (2.19)$$

является аналитической и $\frac{dF(Z)}{dZ} = f(Z)$.

Функция $F(Z)$ называется первообразной для функции $f(Z)$, если $F'(Z) = f(Z)$.

Если две функции имеют в некоторой области одинаковые производные, то в этой области разность между этими функциями постоянна, то есть две первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянную величину.

Формула Ньютона – Лейбница.

Если функция $F(z)$ -некоторая первообразная от аналитической функции $f(z)$, то есть $F'(z) = f(z)$, то справедлива формула

$$\int_{z_0}^z f(z)dz = F(z) - F(z_0) \quad (2.20)$$

Эта формула совпадает с известной формулой Ньютона – Лейбница из интегрального исчисления, то есть контурный интеграл от аналитической функции в односвязной области равен приращению первообразной этой функции на пути интегрирования.

2.5 Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области G (односвязной или многосвязной) и C – граница области. Оказывается, что значения функции $f(z)$ в любой точке z области G можно вычислить, зная только значения $f(z)$ на границе C этой области по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \quad (2.21)$$

Здесь граница C обходится в положительном направлении (то есть так, что область G остается все время слева).

Интеграл в правой части (2.21) называется интегралом Коши, а сама формула носит название интегральной формулы Коши.

Для вычисления интеграла Коши нужно знать значения $f(\xi)$ функции $f(z)$ на границе C , отсюда и следует, что аналитическая в замкнутой области G функция, полностью определяется своими значениями на границе области. С помощью формулы Коши можно вычислять некоторые контурные интегралы по замкнутым контурам.

Пример 2.7 Вычислить $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2j)}$, где C – окружность радиусом 2, с центром в точке $3j$.

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z}$ – аналитична внутри круга, ограниченного окружностью C , поэтому применим интегральную формулу Коши (роль ζ – играет z , а роль z – число $2j$).

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2j)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z-2j} = 2\pi j f(2j) = 2\pi j \frac{e^{2j}}{2j} = \pi(\cos 2 + j \sin 2).$$

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать, что:

1. Производная аналитической функции, также является аналитической функцией, причем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \quad (2.22)$$

2. При любом целом положительном n

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}. \quad (2.23)$$

Из аналитичности функции в некоторой точке, то есть из существования первой производной данной функции в какой – либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а, следовательно, и аналитичность этих производных.

Пример 2.8 Вычислить $\int_C \frac{\cos z}{(z-j)^3} dz$, где C – замкнутый контур, обходящий точку j один раз.

Применяя формулу (2.23) к функции $f(z) = \cos z$, получим:

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-j)^2} dz = \frac{2\pi j}{2!} \left. \frac{d^2 \cos z}{dz^2} \right|_{z=j} = -\pi j \cos j.$$

Пример 2.9 Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, где C – окружность радиуса 1 с центром в точке j .

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+j)(z-j)};$$

$f(z) = \frac{1}{z+j}$ – аналитична в круге, ограниченном C , поэтому, приме-

няя интегральную формулу Коши, имеем

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_C \frac{dz}{(z+j)(z-j)} = 2\pi j f(j) = \frac{2\pi j}{j+j} = \pi.$$

3. Теория вычетов

3.1 Изолированные особые точки

Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называются правильными точками. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками (в частности точки, в которых функция не определена).

Особая точка $z = a$ называется изолированной, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек. То есть когда в некоторой окрестности точки $z = a$, $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z = a$.

Изолированная особая точка $z = a$ называется устранимой, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty$.

Изолированная особая точка $z = a$ называется полюсом, если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, то есть модуль $f(z)$ неограниченно возрастает при $z \rightarrow a$.

Если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$, то она является нулем

функции $\frac{1}{f(z)}$.

Изолированная особая точка называется существенно особой, если не существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Если $f(a)=0$, то точка a называется нулем функции $f(z)$ и $f(z)$ можно разложить в ряд $f(z)=c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots$.

Если $f(z)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\dots \quad (3.1)$$

то точка a называется нулем функции $f(z)$ порядка или кратности n . Разложение (3.1) можно записать в виде

$$f(z)=(z-a)^n \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+\dots$

Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a)=c_n \neq 0$.

Точка z называется полюсом порядка n функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\frac{1}{f(z)}$. В случае $n=1$ полюс называется простым. Точка $z=a$ тогда и только тогда является нулем порядка n

функции $\frac{1}{f(z)}$, когда $\frac{1}{f(z)}=(z-a)^n \varphi(z)$, где $\varphi(a) \neq 0$ (функция $\varphi(z)$ аналитична при $z=a$).

Если положить $\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$, то точка $z=a$ тогда и только тогда является полюсом порядка n функции $f(z)$, когда $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n},$$

где $\psi(z)$ также аналитична при $z=a$ и $\psi(a) \neq 0$.

Пример 3.1. Найти все особые точки функций и определить их тип:

1) $f(z)=\frac{e^z}{(z+2)^3}$ \rightarrow точка $z=-2$ - является полюсом третьего порядка для $f(z)$.

2) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2+4}$ \rightarrow так как $z^2+4=(z-2j)(z+2j)$, то точки $z=\pm 2j$ - полюсы первого порядка.

3) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

Так как $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$, то

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{z^n n!} + \dots$$

этот ряд сходится всюду кроме точки $z = 0$, то есть точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

3.2 Основная теорема о вычетах

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ ($a \neq \infty$) называется число $\frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) dz$, где C – достаточно малая окружность

$|z - a| = \rho$, такая, что в круге $|z - a| \leq \rho$ нет других особых точек, кроме точки $z = a$. В этом случае величина вычета не зависит от величины радиуса ρ .

Обозначают вычет функции $f(z)$ в точке $z = a$ следующим образом:

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a}$$

(начальные буквы французского слова *residu* – вычет).

Если a является правильной точкой функции $f(z)$, то вычет функции относительно правильной точки равен нулю (это следует, например, из теоремы Коши).

Если a – полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю. Для бесконечно удаленной точки $z = \infty$ вычет определяется формулой

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) dz,$$

где C – окружность достаточно большого радиуса, с центром в начале координат, обход которой производится по часовой стрелке (чтобы бесконечно удаленная точка оставалась слева).

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю. Так, например, $f(z) = \frac{1}{z}$ не имеет особенностей в точке $z = \infty$, но вычет $f(z)$ $\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\infty} = -1$.

Пусть C_0 - простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных точек a_1, a_2, \dots, a_n . Окружим эти точки, лежащие внутри C_0 , окружностями C_1, C_2, \dots, C_n (Рис.13) столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек. Тогда в силу теоремы Коши для составного контура, получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_0} f(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi j} \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки.

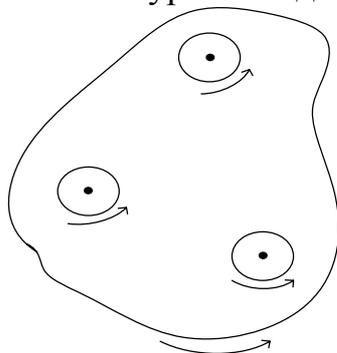


Рис. 3.1

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi j} \int_{C_0} f(z) dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции внутри контура C_0 :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a_k}.$$

3.3 Вычет относительно полюса

Если точка a является простым полюсом функции $f(z)$ то

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)].$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула. Пусть точка $z=a$ - простой полюс функции $f(z)$

и $f(z)$ представляет собой отношение двух функций $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

$f_1(z)$ и $f_2(z)$ - функции аналитические в точке $z=a$, причем для функции $f_2(z)$ точка a является нулем первого порядка, и $f_1(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z)}{z-a}} = \frac{f_1(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a}}.$$

Но так как $f_2(a) = 0$ в соответствии с определением производной то

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z-a} = f_2'(a).$$

Тогда окончательно получим

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Пример 3.2 Вычислить вычет $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z=2$.

Точка $z=2$ простой полюс $f(z)$, следовательно

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=2} = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{z^2}{z-2} \right] = 4.$$

Пример 3.3 Вычислить вычет $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ относительно $z=0$.

$$\operatorname{Res} \frac{1}{\sin z}|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \lim (z \cdot \frac{1}{\sin z}) = 1.$$

Пример 3.4 Вычислить $\operatorname{Res} \operatorname{ctgz}|_{z=0}$.

$\operatorname{ctgz} = \frac{\cos z}{\sin z}$. Точка $z=0$ является нулем первого порядка для функции

$$\sin z, \text{ тогда } \operatorname{Res} \operatorname{ctgz}|_{z=0} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

4. Операционное исчисление

4.1 Преобразование Лапласа

В настоящее время под операционным исчислением понимается совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих экономными и непосредственно ведущими к цели средствами получать решения линейных дифференциальных уравнений, а также разностных и некоторых типов интегральных уравнений [7].

Операционное исчисление нашло широкое применение в теории автоматического регулирования, где с его помощью производится анализ переходных и установившихся процессов в автоматических системах. Суще-

ность операционного метода заключается в следующем. Пусть задана некоторая функция $f(t)$ действительной переменной t , причем такая, что для нее существует преобразование Лапласа (L-преобразование)

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

т. е. интеграл в правой части этого равенства является сходящимся. Используя L-преобразование, можно каждой преобразуемой по Лапласу функции $f(t)$ (такие функции составляют класс функций, называемых «оригиналами») поставить в соответствие функцию $F(s)$ комплексной переменной s (при этом функция $F(s)$ называется «изображением» функции $f(t)$). Преобразование Лапласа обладает рядом замечательных свойств. Например, дифференцированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует операция умножения $F(s)$ на комплексную переменную s , а интегрированию оригинала $f(t)$ соответствует операция деления $F(s)$ на s . Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений более простыми операциями алгебры — соответственно умножением и делением изображения $F(s)$ на s . Это позволяет дифференциальное уравнение, записанное относительно искомой функции $f(t)$, заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение относительно изображения $F(s)$ — $L[f(t)]$. Решив это алгебраическое уравнение и найдя $F(s)$, мы получим изображение решения исходного дифференциального уравнения. Для определения самого решения можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа (L^{-1} -преобразованием), устанавливающим связь между изображением $F(s)$ и ему соответствующим оригиналом $f(t)$:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0$$

где $c = \operatorname{Re} s$.

Во многих случаях при нахождении решения $f(t)$ можно избежать непосредственного вычисления этого интеграла, воспользовавшись таблицей соответствий «оригинал - изображение», а также рассмотренными в настоящей главе способами определения оригинала по соответствующему изображению.

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления сводится, таким образом, к следующей наглядной схеме:



Далее рассмотрены основные свойства преобразования Лапласа, показано применение операционного исчисления для решения линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, а также рассмотрены некоторые приложения, операционного метода к анализу автоматических систем.

Интеграл Лапласа. Аналитичность изображения.

Рассмотрим функцию $f(t)$ вещественной переменной t , при этом будем предполагать выполненными следующие условия:

1) Функция $f(t)$ непрерывна для всех значений $t \geq 0$. Непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точками разрыва непрерывности первого рода, причем число этих точек должно быть конечным на любом интервале ограниченной длины.

2) Функция $f(t) = 0$ для значений $t < 0$.

3) Функция $f(t)$ имеет ограниченный порядок возрастания, т. е. можно указать такие постоянные числа $M > 0$ и $c_0 \geq 0$, при которых выполняется неравенство

$$f(t) < Me^{c_0 t} \quad (t > 0).$$

Число c_0 является *показателем роста* функции $f(t)$. Функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям 1-3, называется *оригиналом*. Многие функции, встречающиеся при описании процессов в автоматических системах, являются оригиналами. Например, оригиналами будут функции $\mathbf{1}(t)$, $A \sin \omega t \mathbf{1}(t)$, $A \cos \omega t \mathbf{1}(t)$, $t^n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $e^{\alpha t} \mathbf{1}(t)$, $e^{-\alpha t} \mathbf{1}(t)$ ($\alpha > 0$) и ряд других. Наличие в этих функциях множителя - ступенчатой единичной функ-

ции $1(t)$ - обеспечивает выполнение второго условия, т. е. обращение функции $f(t)$ в ноль при $t < 0$. С физической точки зрения это условие является вполне естественным. Действительно, в автоматических системах обычно представляют интерес процессы, начинающиеся с некоторого момента времени. Например, если функция $f(t)$ характеризует отклонение регулируемой величины происходящее при приложении к системе в момент $t = t_0$ возмущающего воздействия, то очевидно, что при $t < t_0$ $f(t) = 0$, так как реакция на возмущение не может возникнуть ранее момента времени приложения к системе самого возмущения. Этот момент времени может быть принят за нулевой момент, т. е. можно полагать, что $t_0 = 0$; тогда при $t < 0$ получим $f(t) = 0$. Условие 2 поэтому, естественно, учитывает начальные условия, в которых находится автоматическая система и не является обременительным с математической точки зрения. Как правило, условия 1 и 3 также выполняются для большинства функций $f(t)$, характеризующих процессы в автоматических системах.

Если хотя бы одно из условий 1 - 3 не выполняется, то функция $f(t)$ не будет являться оригиналом. Согласно условию 1 оригинал $f(t)$ не может обращаться в бесконечность при $0 \leq t < \infty$, поэтому не является оригиналами функции $\frac{1}{t}$, $\operatorname{tg} \omega t$. Не является оригиналом также функция e^{t^2} , поскольку для этой функции не выполнено условие 3: функция e^{t^2} при $t \rightarrow \infty$ возрастает быстрее, чем возрастает функция $e^{c_0 t}$.

Функция $F(s)$ комплексного переменного $s = c + j\omega$, определяемая равенством

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (4.1)$$

называется *изображением функции $f(t)$* по Лапласу. Интеграл в правой части равенства (1) называется *интегралом Лапласа*. Этот несобственный интеграл, по определению, равен

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f(t)e^{-st} dt, \quad (4.2)$$

причем $\varepsilon \rightarrow +0$ означает правый предельный переход.

С помощью интеграла Лапласа устанавливается соответствие между функцией $f(t)$ и её изображением $F(s)$. Процесс получения изображения

$F(s)$ по заданной функции $f(t)$ называется *преобразованием Лапласа*. Как видно из (4.1), это преобразование состоит в умножении $f(t)$ на e^{-st} и интегрировании по t получившегося произведения в пределах от 0 до ∞ .

Символически преобразование Лапласа записывается в виде

$$L[f(t)] = F(s). \quad (4.3)$$

Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(s)$, то это соответствие часто записывают следующим образом:

$$f(t) \div F(s) \quad \text{или} \quad f(t) \div F(s).$$

Интеграл Лапласа будет сходящимся, если существует предел в правой части равенства (4.2).

Установим, для каких функций $f(t)$ существует интеграл (1); другими словами - какие функции $f(t)$ преобразуемы по Лапласу? Ответ на этот - вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1. *Если функция $f(t)$ является оригиналом, то эта функция преобразуема по Лапласу и ее изображение $F(s)$ определено в полуплоскости $Re\ s > c_0$, где c_0 - показатель роста функции $f(t)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы будет доказано, если окажется возможным показать, что интеграл в правой части равенства (1) сходится в части плоскости комплексного переменного s , для которой $Re\ s > c_0$.

Учитывая условие 3 существования оригинала, получаем оценку

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt < \int_0^{\infty} Me^{c_0 t} |e^{-st}| dt;$$

но $|e^{-st}| = |e^{-(c+j\omega)t}| = e^{-ct}$, поэтому

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| < M \int_0^{\infty} e^{-(c-c_0)t} dt = -M \frac{e^{-(c-c_0)t}}{c-c_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{c-c_0}. \quad (4.4)$$

Так как $M < \infty$, то при $c > c_0$ ($c = Re\ s$) интеграл Лапласа сходится.

Следовательно, функция $f(t)$, являющаяся оригиналом, преобразуема по Лапласу и ее изображение $F(s)$ определено в части плоскости комплексного переменного s , находящейся правее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей от нее на расстоянии c_0 (заштрихованная полуплоскость на рис. 3.1).

Из доказательства теоремы следует, что существует интеграл,

$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt$, т.е. интеграл Лапласа при $Re\ s > c_0$ является не только схо-

дящимся, но и абсолютно сходящимся интегралом. На этом основании число c_0 называют *абсциссой абсолютной сходимости* интеграла (4.1). Ее можно определить как нижнюю грань совокупности чисел c , для которой

интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)e^{-ct}| dt$ сходится.

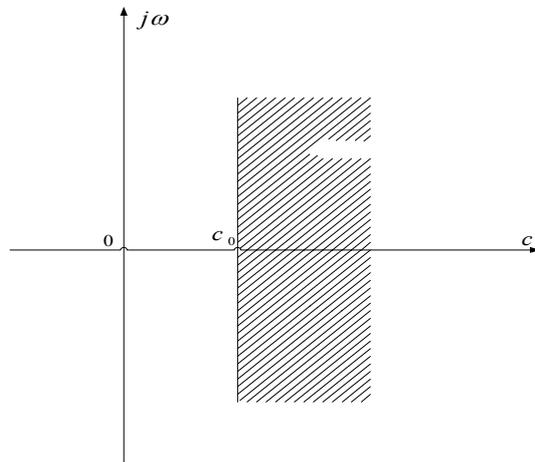


Рис. 4.1

Покажем теперь, что интеграл Лапласа при $Re s > c_0$ сходится равномерно. Имеем $|f(t)e^{-st}| < Me^{-(c-c_0)t}$ при $t \geq 0$ и при значениях s , для

которых $Re s > c_0$ и, кроме того, интеграл $\int_0^{\infty} Me^{-(c-c_0)t} dt$, как показано

выше, сходится; поэтому в соответствии с признаком равномерной сходимости несобственных интегралов интеграл Лапласа сходится равномерно относительно s при $Re s > c_0$. Отметим еще одно свойство изображения $F(s)$, вытекающее из теоремы 1. Из неравенства (4.4) получим, что при стремлении $Re s = c$ к $+\infty$ модуль интеграла Лапласа стремится к нулю. Следовательно, если функция $F(s)$ является изображением, то справедливо равенство

$$\lim_{Re s=c \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (4.5)$$

Следующая теорема устанавливает свойство изображения $F(s)$.

Теорема 2. *Изображение $F(s)$ оригинала $f(t)$ в полуплоскости, для которой $Re s > c_0$, где c_0 — показатель роста оригинала, является аналитической функцией.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Морера изображение $F(s)$ будет аналитической функцией в полуплоскости $Re s > c_0$, если, во-первых,

в этой полуплоскости функция $F(s)$ непрерывна и, во-вторых, ее интеграл вдоль любой замкнутой кривой, расположенной в этой полуплоскости, равен нулю.

Непрерывность $F(s)$ при $Re s > c_0$ вытекает из доказанной выше равномерной сходимости интеграла Лапласа в указанной полуплоскости относительно параметра s .

Проинтегрируем функцию $F(s)$ по какому-либо произвольному замкнутому контуру l , расположенному в полуплоскости $Re s > c_0$:

$$\int_l F(s) ds = \int_l \left\{ \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right\} ds.$$

Интеграл Лапласа при $Re s > c_0$ сходится равномерно, в этом случае, как известно можно изменить порядок интегрирования в правой части написанного равенства:

$$\int_l F(s) ds = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \int_l e^{-st} ds \right\} dt.$$

Подынтегральная функция во внутреннем интеграле является функцией аналитической, поэтому в соответствии с теоремой Коши внутренний интеграл равен нулю. Следовательно, выполнено и второе условие теоремы Морера.

Приведем примеры нахождения изображений.

Пример 4.1. Найти изображение единичной ступенчатой функции

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Учитывая равенство (1), при $Re s > 0$ имеем

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -e^{-st}/s \Big|_0^{\infty} = 1/s.$$

Следовательно, справедливо соответствие

$$1(t) \longleftrightarrow 1/s, \text{ или } L[1(t)] = 1/s. \quad (4.6)$$

Абсцисса абсолютной сходимости для функции $1(t)$ $c_0=0$. Изображение $1/s$ при $s=0$ имеет особую точку - полюс. При $Re s \leq 0$ интеграл Лапласа, вообще говоря, расходится, поэтому изображение определено в полуплоскости, для которой $Re s > 0$, в этой полуплоскости оно является аналитической функцией.

Пример 4.2. Найти изображение функции $f(t) = e^{\alpha t} 1(t)$, где α - действительное или комплексное число (на рис. 4.2 изображена усеченная экспонента при действительном $\alpha < 0$).

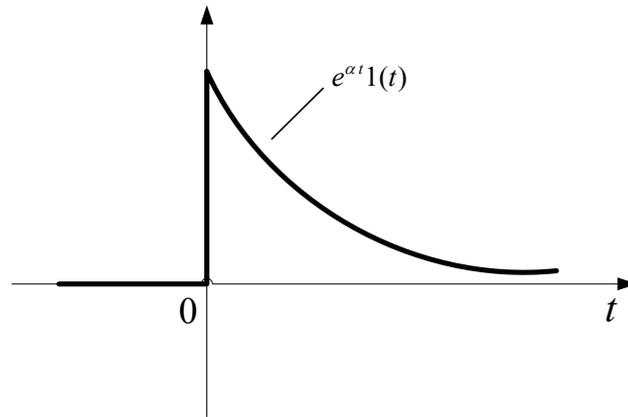


Рис.4.2

Имеем

$$L[e^{\alpha t} 1(t)] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt.$$

При $Re(s - \alpha) > 0$, т. е. при $Re s > Re \alpha$,

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{e^{(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Получили соответствие $e^{\alpha t} 1(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$, или

$$L[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (4.7)$$

Для рассматриваемой функции абсцисса абсолютной сходимости $c_0 = Re \alpha$. При $Re s > Re \alpha$ изображение $\frac{1}{s-\alpha}$ всюду определено и является аналитической функцией.

Наличие у функции $e^{\alpha t} 1(t)$ в последнем примере множителя $1(t)$ обеспечивает выполнение условия 2 существования оригинала. В дальнейшем будем полагать это условие выполненным и при записи функций, подлежащих преобразованию по Лапласу, опускать множитель $1(t)$. Например, соответствие (4.7) будем кратко записывать следующим образом:

$$L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha}.$$

При этом будем подразумевать, что преобразовывалась по Лапласу функция

$$e^{\alpha t} 1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Пример 4.3. Найти изображение функции $f(t) = t$. Интегрируя по частям, получаем при $Re\ s > 0$

$$L[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -te^{-st/s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -e^{-st/s^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2},$$

следовательно, $t \xleftarrow{\bullet} 1/s^2$, или $L[t] = 1/s^2$.

Повторным интегрированием по частям легко показать, что

$$L[t^n] = n!/s^{n+1}, \quad (4.8)$$

где $n \geq 0$ -целое число.

Интеграл вида (4.1) определяет одностороннее преобразование Лапласа. В некоторых случаях в теории автоматического регулирования используется *двустороннее преобразование Лапласа*, которое задается равенством

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (4.9)$$

причем здесь $f(t) \neq 0$ при $t < 0$

Для существования изображения (4.9) необходимо, чтобы интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$ был сходящимся. Этому требованию не удовлетворяют

многие функции, например функции $f(t) = const$, $f(t) = A \sin \omega t$,

$f(t) = A \cos \omega t$ и др.; поэтому применение двустороннего преобразования Лапласа в теории автоматического регулирования является ограниченным.

В дальнейшем под преобразованием Лапласа будем понимать именно одностороннее преобразование (4.1).

Формула обращения. Для перехода от изображения $F(s)$ к ему соответствующему оригиналу $f(t)$ необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа. В следующей теореме определяется аналитическое выражение оригинала через изображение.

Теорема 3. *Оригинал $f(t)$ в точках непрерывности определяется равенством*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (4.10)$$

где $F(s)$ — изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, а интеграл в правой части этого равенства понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds,$$

и берется вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости $Re s > c_0$.

Доказательство. Теорема будет доказана, если окажется возможным показать, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = f(t).$$

Принимая во внимание равенство (4.1), найдем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} ds.$$

Интеграл Лапласа, как показано выше, сходится при $Re s = c > c_0$ равномерно относительно параметра s , поэтому в правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования, при этом получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{s(t-\tau)} ds.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{s(t-\tau)} ds &= \frac{1}{t-\tau} e^{s(t-\tau)} \Big|_{c-j\omega}^{c+j\omega} = \frac{1}{t-\tau} \left[e^{(c+j\omega)(t-\tau)} - e^{(c-j\omega)(t-\tau)} \right] = \\ &= 2j e^{c(t-\tau)} \frac{\sin \omega(t-\tau)}{t-\tau}, \end{aligned}$$

то имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{c(t-\tau)} \frac{\sin \omega(t-\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Введем новую переменную $\tau - t = \xi$, кроме того, положим $f(t) e^{-ct} = \varphi(t)$, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds &= \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-t}^{\infty} f(\xi+t) e^{-c(\xi+t)} \frac{\sin \omega \xi}{\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega t}^{\infty} \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta, \end{aligned}$$

где $\eta = \omega \xi$, или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds &= \\ &= \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega t}^{\infty} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \frac{1}{\pi} f(t) \int_{-\omega t}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Рассмотрим пределы каждого из интегралов в правой части равенства (4.11) при $\omega \rightarrow \infty$. Как известно, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi$, поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} f(t) \int_{-\omega t}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = f(t). \quad (4.12)$$

Интеграл в первом слагаемом правой части равенства (4.11) представим в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-\omega t}^{\infty} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta &= \int_{-\omega t}^{\omega_0 t} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \int_{-\omega_0 t}^{\Omega} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \\ &+ \int_{\Omega}^{\infty} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Функция $f(t)$ является оригиналом, поэтому функция $\varphi(t)$ в интервале $(0, \infty)$ ограничена. Все три интеграла в правой части последнего равенства являются сходящимися, т. е. можно подобрать постоянные значения ω_0 и Ω настолько большими, что модули интегралов по интервалам

$(-\omega t, -\omega_0 t)$ (где $\omega > \omega_0$ произвольно) и (Ω, ∞) будут меньше всякого наперед заданного и сколь угодно малого положительного числа ε . Далее, значения t характеризуют собой точки непрерывности функции $f(t)$, т. е. при фиксированном η имеем $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) = \varphi(t)$; поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ модуль интеграла по интервалу $(\omega_0 t, \Omega)$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega t}^{\infty} \left[\varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = 0.$$

Из равенства (4.11) окончательно найдем

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) ds = f(t).$$

Формула (4.10) называется *формулой обращения*. С ее помощью устанавливается связь между изображением $F(s)$ и ему соответствующим оригиналом $f(t)$. Процесс получения оригинала по заданному изображению $F(s)$ представляет собой *обратное преобразование Лапласа*. Это преобразование состоит в умножении $F(s)$ на e^{st} , интегрировании, по s получившегося произведения вдоль прямой, параллельной мнимой оси, и делении интеграла на $2\pi j$. Символически обратное преобразование Лапласа записывают в виде

$$L^{-1} = [F(s)] = f(t) \quad (t > 0). \quad (4.13)$$

Условие $t > 0$ учитывает то обстоятельство, что оригинал $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Следует подчеркнуть, что формула (4.10) определяет оригинал только в точках его непрерывности. Однако оригинал $f(t)$ может иметь точки разрыва непрерывности первого рода. Методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 3, можно показать, что в точках t разрыва непрерывности оригинала имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]. \quad (4.14)$$

Следовательно, формула обращения определяет оригинал $f(t)$ по изображению $F(s)$ с точностью до значений в точках разрыва непрерывности. Оригиналу всегда соответствует единственное изображение, которое может быть определено по формуле (4.1), так как значения оригинала в точках разрыва непрерывности не изменяют вида изображения. Однако одно-

му и тому же изображению можно поставить в соответствие множество оригиналов, значения которых отличаются друг от друга лишь в точках разрыва непрерывности. Если оригинал $f(t)$ является дифференцируемой функцией всюду в интервале $0 < t < \infty$, то оригинал по заданному изображению определяется однозначно.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия, при выполнении которых функция $F(s)$ является изображением.

Теорема 4. Если функция $F(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c_0$, стремится к нулю при $|s| \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq c > c_0$ рав-

номерно относительно $\arg s$ и интеграл $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) ds$ абсолютно сходится,

то $F(t)$ является изображением функции $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$.

Данную теорему примем без доказательства.

Из теоремы 4 ясно, что не все функции $F(s)$ комплексного переменного s могут быть изображениями. В частности, не являются изображениями периодические функции, например, вида $e^{\alpha t}$, $\cos s$, $\sin s$, несмотря на то что эти функции являются аналитическими во всей плоскости s .

4.2 Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность преобразования. Теорема; используется при установлении соответствий «оригинал - изображение».

Теорема 1. Если функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ являются оригиналами и их изображения есть соответственно $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$ и если

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -величины независимые от t и s , то справедливы равенства

$$L \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(s), \quad (4.17)$$

$$L^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(s) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \quad (4.18)$$

Пример 4.4. Найти изображения по Лапласу функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $e^{-\alpha t} \sin \omega t$, $e^{-\alpha t} \cos \omega t$, где $\alpha > 0$ — вещественное число.

Определим изображение по Лапласу $\sin \omega t$ Принимая во внимание теорему 1, получаем

$$L[\sin \omega t] = L\left[\frac{e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j} \{L[e^{j\omega t}] - L[e^{-j\omega t}]\}$$

Учитывая соответствие (4.7), найдем далее

$$L[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.19)$$

Аналогично будем иметь

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.20)$$

Определим теперь изображение по Лапласу $e^{-\alpha t} \sin \omega t$:

$$L[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = L\left[e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j} \{L[e^{(-\alpha + j\omega)t}] - L[e^{-(\alpha + j\omega)t}]\}.$$

Принимая во внимание соответствие (4.7) получаем

$$L[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s + \alpha - j\omega} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$L[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (4.20)$$

Аналогично найдем

$$L[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (4.21)$$

2. Дифференцирование и интегрирование оригинала. Следующие теоремы устанавливают два важных свойства преобразования Лапласа.

Теорема 2. Если функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ являются оригиналами и $F(s)$ есть изображение оригинала $f(t)$, то справедливо равенство

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(+0), \quad (4.22)$$

где $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Доказательство. Изображение по Лапласу производной $f'(t)$, как следует из равенств (4.1) и (4.2), есть

$$L[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(+0)}{s}, \quad (4.24)$$

здесь

$$f^{-1}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau + f^{-1}(+0),$$

причем $f^{-1}(+0)$ - постоянная величина.

Доказательство. Покажем, что интеграл $\int_0^t f(t) dt$ является оригиналом.

Условия 1 и 2 существования оригинала, очевидно, для этого интеграла выполняются, так как они выполняются для функции $f(t)$. Проверим выполнение условия 3.

Имеем оценку

$$\left| \int_0^t f(t) dt \right| \leq \int_0^t |f(t)| dt < \int_0^t M e^{c_0 t} dt = \frac{M}{c_0} (e^{c_0 t} - 1) < M_1 e^{c_0 t}.$$

Следовательно, условие 3 также выполняется.

Убедимся теперь в справедливости равенства (4.24). Найдем изображение интеграла $\int_0^t f(\tau) d\tau$:

Изображение интеграла $\int_0^t f(\tau) d\tau$:

$$L \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_\varepsilon^T \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_\varepsilon^T \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \Big|_\varepsilon^T + \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \frac{1}{s} \int_\varepsilon^T f(t) e^{-st} dt.$$

Так $\left| e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < M_1 e^{(c_0 - c)t}$ ($t > 0, Re s = c > c_0$), то предел первого

слагаемого правой части равен нулю. Для второго слагаемого правой части найдем, согласно равенствам (4.1) и (4.2),

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \frac{1}{s} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s);$$

следовательно,

$$L \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (4.25)$$

Теперь, учитывая свойство линейности преобразования Лапласа, имеем

$$L \left[\int f(t) dt \right] = L \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] + L[f^{-1}(+0)].$$

Так как $L[f(+0)] = L[f(+0)1(t)] = \frac{f(+0)}{s}$, то окончательно получим

$$L[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(+0)}{s}. \quad (4.26)$$

Если положить что $f^{-1}(+0) = 0$, то из теоремы найдем, что *операции интегрирования оригинала соответствует операция деления изображения этого оригинала на комплексное число s* .

Распространим теорему на интегралы высших порядков. Пусть

$$f^{(-k)}(t) = \underbrace{\int \dots \int}_{k} f(t) (dt)^k,$$

тогда

$$\begin{aligned} L[f^{-2}(t)] &= \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{-1}(+0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(+0)}{s}, \\ L[f^{(-3)}(t)] &= \frac{F(s)}{s^3} + \frac{f^{-1}(+0)}{s^3} + \frac{f^{(-2)}(+0)}{s^2} + \frac{f^{(-3)}(+0)}{s}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

.....

$$L[f^{(-n)}(t)] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(+0)}{s^{n-k+1}}.$$

3. Смещение в области оригиналов и в области изображений. Изменение масштаба. Рассмотренные ниже теоремы позволяют образовывать новые соответствия «оригинал - изображение».

Теорема 4. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ - его изображение, то изображение смещенного оригинала $f(t-a)$, где a - положительное число, определяется равенством

$$L[f(t-a)] = e^{-as} F(s). \quad (4.28)$$

Здесь следует иметь в виду, что $f(t-a) = 0$ при $t < a$, так как оригинал $f(t) = 0$ при $t < 0$.

При обратном преобразовании Лапласа справедливо равенство

$$L^{-1}[e^{-as} F(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a, \\ f(t) & \text{при } t > a. \end{cases} \quad (4.29)$$

Пример 4.5. Найти изображение смещенного оригинала $(t-a)^2$ (рис. 4.3). По формуле (4.29), учитывая равенство (4.8), имеем

$$L[(t-a)^2] = e^{as} L[t^2] = e^{-as} \frac{2}{s^3}. \quad (4.30)$$

Пример 4.6. Определить изображение функции характеризующей бесконечный ступенчатый ход (рис. 4.4). $f(t) = A[1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \dots]$.

Имеем

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= AL[1(t)] + AL[1(t-\tau)] + AL[1(t-2\tau)] + \dots = \\ &= \frac{A}{s} + e^{-\tau s} \frac{A}{s} + e^{-2\tau s} \frac{A}{s} + \dots = \frac{1}{s} \cdot \frac{A}{1 - e^{-s\tau}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

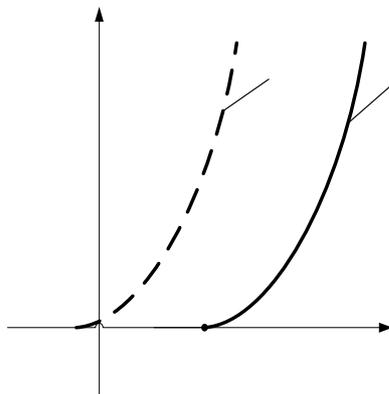


Рис.4.3

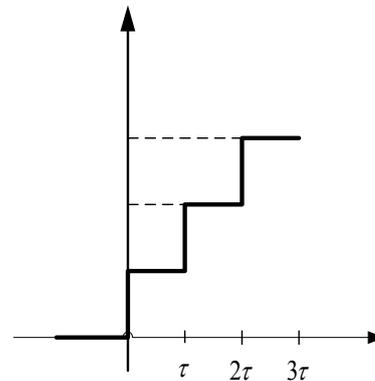


Рис.4.4

Воспользовавшись теоремой (4), получим формулу, удобную для определения изображений кусочно-непрерывных оригиналов общего вида

Предположим, что требуется определить изображение $F(s)$ оригинала $f(t)$ (рис. 4.5), определяемого равенством

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 \\ g(t) & \text{при } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{при } t > t_2 \end{cases} \quad (4.32)$$

Изображение функции $g(t)$ обозначим $G(s)$. Найдем изображение смещенной функции $g(t + \tau)$. Пусть это изображение есть $G_\tau(s)$, тогда в соответствии с формулой (4.29) получим:

$$L^{-1}[e^{-st_1} G_{t_1}(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ g(t + t_1 - t_1) = g(t) & \text{при } t > t_1, \end{cases}$$

$$L^{-1}[e^{-st_2} G_{t_2}(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_2, \\ g(t + t_2 - t_2) = g(t) & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь, учитывая равенство (4.32)

$$L^{-1}[e^{-st_1} G_{t_1}(s)] - L^{-1}[e^{-st_2} G_{t_2}(s)] = f(t).$$

Следовательно, изображение кусочно-непрерывно функции $f(t)$ определяется выражением

$$F(s) = e^{-st_1} G_{t_1}(s) - e^{-st_2} G_{t_2}(s). \quad (4.33)$$

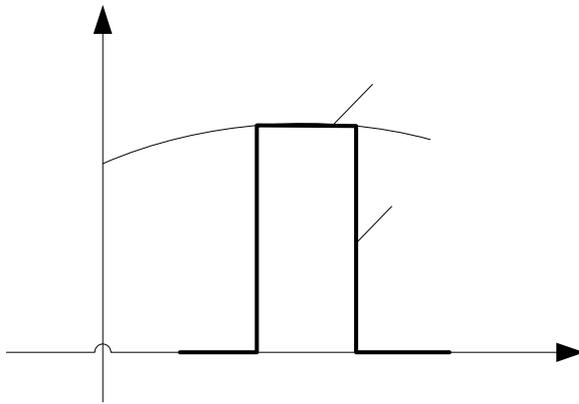


Рис 4.5

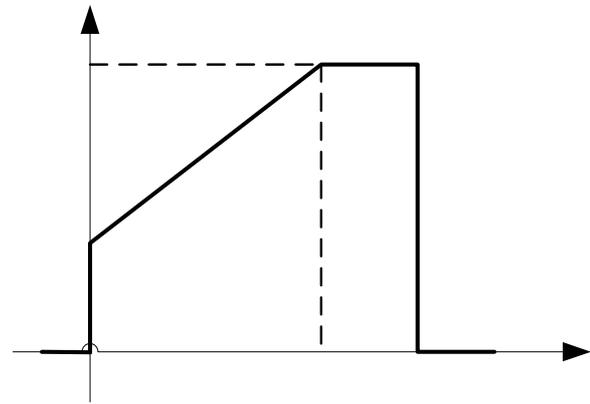


Рис.4.6

Пример 4.7 Найти изображение оригинала $f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{при } t < t_2 \\ at_2 + b & \text{при } t_2 < t < t_3 \\ 0 & \text{при } t > t_3 \end{cases}$$

график которого изображен на рис. 4.6.

Пусть $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_1(t) = \begin{cases} at + b & \text{при } t < t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2, \end{cases} \text{ и } f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_2, \\ at_2 + b & \text{при } t_2 < t < t_3, \\ 0 & \text{при } t > t_3. \end{cases}$$

Определим изображение функции $f_1(t)$, воспользовавшись формулой (4.33). Для этой функции

$$g(t+\tau) = a(t+\tau) + b, \text{ следовательно,}$$

$$G_\tau(s) = L[a(t+\tau) + b] = a/s^2 + a\tau/s + b/s.$$

Так как

$$\tau = t_1 = 0 \text{ и } \tau = t_2, \text{ то } G_{t_1}(s) = a/s^2 + b/s, \quad G_{t_2}(s) = a/s^2 + at_2/s + b/s.$$

По формуле (4.33) найдем

$$L[f_1(t)] = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + e^{-st_2} (a/s^2 + at_2/s + b/s).$$

Определим теперь изображение функции $f_2(t)$:

$$L[f_2(t)] = L[(at_2 + b) (1(t - t_2) - 1(t - t_3))] = (at_2 + b) \frac{e^{-t_2s} - e^{-t_3s}}{s}.$$

Просуммировав $L[f_1(t)]$ и $L[f_2(t)]$, изображение функции $f(t)$ получим в виде

$$L[f(t)] = \frac{1}{s} \left[\frac{a}{s} + b + e^{-st_2} \left(\frac{a}{s} + 2at_2 + 2b \right) - e^{-t_3s} (at_2 + b) \right].$$

Пример 4.8. Определить изображение функции (рис. 4.7)

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Имеем: $g(t) = \sin \omega t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/\omega$, т. е.

$$G_{t_1}(s) = L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$G_{t_2}(s) = L\left[\sin \omega \left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)\right] = L[-\sin \omega t] = -\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

По формуле (4.33) найдем

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + e^{-\frac{\pi}{\omega}s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s} \right).$$

Формула (4.33) позволяет построить изображение периодической функции. Пусть $\varphi(t)$ - периодическая функция с периодом T , пусть, кроме того, функция $f(t)$ совпадает с функцией $\varphi(t)$ в интервале $(0, T)$ и равна нулю вне этого интервала. Изображение $F(s)$ функции $f(t)$ определяет формула (4.33), причем в этом случае $t_1=0, t_2=T$, т. е.

$$G_{t_1}(s) = L[\varphi(t)] = \Phi(s), \quad G_{t_2}(s) = L[\varphi(t+T)] = \Phi(s),$$

так как из условия периодичности $\varphi(t) = \varphi(t+T)$. Подставляя выражения $G_{t_1}(s)$ и $G_{t_2}(s)$ в формулу (4.33), найдем изображение $\Phi(s)$ периодической функции $\varphi(t)$:

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}. \quad (4.34)$$

Пример 4.9. Найти изображение периодической с периодом $\frac{\pi}{\omega}$ функции (рис. 4.8):

$$\varphi(t) = |\sin \omega t| = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ -\sin \omega t & \text{при } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Изображение $F(s)$ функции

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega}, \end{cases}$$

совпадающей с функцией $\varphi(t)$ в интервале $(0, T)$ и равной нулю вне этого интервала, было определено в примере 4.5. Подставляя $F(s)$ из указанного примера в формулу (4.34), получаем искомое изображение

$$\Phi(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}.$$

Теорема 5. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ - его изображение и если a - любое комплексное число, то справедливо равенство

$$L[e^{at} f(t)] = F(s - a). \quad (4.35)$$

Из этой теоремы следует, что умножение оригинала на экспоненциальную функцию приводит к смещению особых точек и нулей его изображения.

Заметим, что если соответствие $L[f(t)] = F(s)$ справедливо в полуплоскости $Re s = c > c_0$, то соответствие (4.35) имеет смысл при $Re (s + a) > c_0$, т. е. при $Re s > c_0 - Re a$.

Пример 4.10. Найти изображение функций $e^{-at} \cos \omega t$, $e^{-at} \sin \omega t$.

Учитывая равенства $L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, из теоремы 5

получим, что

$$L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad (4.36)$$

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (4.37)$$

Пример 4.11. Определить, изображение функции $e^{-at} t^n$.

По формуле (4.8) имели $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, поэтому, принимая во внимание равенство (4.35), найдем, что

$$L[e^{-at} t^n] = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}. \quad (4.38)$$

Теорема 6. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ - его изображение и если a - вещественное положительное число, то справедливо равенство

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as). \quad (4.39)$$

Формула (4.39) характеризует изменение изображения оригинала, если в оригинале изменяется масштаб аргумента.

Пример 4.12. Найти изображение функции $\sin a\omega t$ ($a > 0$).

Учитывая теорему 6, из равенства $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ получаем, что

$$L[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_1(s - \omega) F_2(\omega) d\omega.$$

4. Дифференцирование и интегрирование изображений. Рассмотрим две теоремы, которые аналогичны теоремам о дифференцировании и интегрировании оригинала.

Теорема 9, Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ - его изображение, то справедливо равенство

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s). \quad (4.45)$$

Доказательство. Функция

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

является аналитической при $Re s = c > c_0$, поэтому ее можно дифференцировать по s , а так как интеграл Лапласа сходится при $Re s = c > c_0$ равномерно относительно параметра s , то допустимо дифференцирование под знаком интеграла. Производя дифференцирование, получим

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} ds = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} f(t)e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = -L[tf(t)],$$

поэтому

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s).$$

Таким образом, операции дифференцирования изображения по s соответствует операция умножения оригинала на t с изменением знака на обратный. Справедлива и общая формула

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{(ds)^n} F(s). \quad (4.46)$$

Пример 4.13. Из соответствия $\cos \omega t \sim \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ можно получить с помощью формулы (4.45) новое соответствие:

$$t \cos \omega t \sim -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = -\frac{s^2 + \omega^2 - 2s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

т. е.

$$L[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (4.47)$$

Теорема 10. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ -его изображение и если интеграл $\int_0^{\infty} F(s) ds$ сходится, то справедливо равенство

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds; \quad (4.48)$$

здесь

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} F(s) ds$$

и контур интегрирования расположен в части плоскости, где функция $F(s)$ является аналитической.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_s^{\infty} F(s) ds$, где путь интегрирования лежит в части плоскости комплексного переменного s , в которой функция $F(s)$ аналитична, т. е. при $Re s = c > c_0$. Принимая во внимание выражение (4.1), получим

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ds = \int_0^{\infty} f(t) \int_s^{\infty} e^{-st} ds dt.$$

Здесь мы изменили порядок интегрирования, что возможно благодаря равномерной сходимости внутреннего интеграла относительно s . Так как

$$\int_s^{\infty} e^{-st} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} e^{-st} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{t} \right]_s^{s_1} = \frac{e^{-st}}{t}, \quad \text{то}$$

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt, \quad \text{т.е. } L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds.$$

Из теоремы следует, что операции деления оригинала на t соответствует операция интегрирования изображения по контуру в пределах от s до ∞ . Важным при этом является условие существования интеграла $\int_s^{\infty} F(s) ds$.

Если, например, $f(t)=1(t)$, т. е. $F(s)=1/s$, то

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \frac{ds}{s} = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} \frac{ds}{s} = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \ln s_1 - \ln s.$$

Так как $\lim_{s_1 \rightarrow \infty} \ln s_1 = \infty$, то интеграл $\int_s^\infty F(s) ds$ в этом случае не существует, т. е. применять формулу (4.48) к функции $\frac{1}{t}$ нельзя. Этот результат совпадает со сделанным ранее заключением, что функция $\frac{1}{t}$ не является оригиналом.

Пример 4.14 Определить изображение функции $\frac{\sin \omega t}{t}$.

Справедливо соответствие $\sin \omega t \sim \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Применим к этому соответствию формулу (4.48):

$$L\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega} \Big|_s^{s_1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega}.$$

Получили новое соответствие

$$\frac{\sin \omega t}{t} \sim \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega}.$$

5. Начальное и предельное значения оригинала. Следующие две теоремы позволяют по виду изображения судить о поведении оригинала при $t = 0$ и при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 11. Если функции $f(t)$ и $f'(t)$ являются оригиналами и $*F(s)$ -изображение оригинала $f(t)$, то при существовании предела $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$

справедливо равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t), \quad (4.49)$$

причем $s \rightarrow \infty$ по такому пути, что $\operatorname{Re} s = c$ неограниченно возрастает.

Доказательство. В соответствии с формулой (4.22) изображение производной $f'(t)$ дается равенством

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(+0).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу по s ; пусть $s \rightarrow \infty$ таким образом, что $\operatorname{Re} s = c$ неограниченно возрастает. Так как всякое изображение (см. равенство (4.5)), в том числе и изображение производной, при указанном предельном переходе стремится к нулю, то получим равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(+0) = 0.$$

Но $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$, поэтому

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Пример 4.15. Найти начальное значение оригинала $f(t)$, если его изображение $F(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$.

По формуле (4.49) получим $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{(s + \alpha)^2} = 0$. Этот результат можно проверить, непосредственно используя соответствие (см.

равенство (4.38)) $te^{-\alpha t} \sim \frac{1}{(s + \alpha)^2}$:

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} te^{-\alpha t} = 0.$$

Формула (4.49) может быть использована, если известно, что $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$

существует (при этом само значение $f(t)$ неизвестно).

В большинстве задач теории автоматического регулирования существование предела $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ свидетельствует и о существовании предела

$\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$. Однако можно указать отдельные примеры, когда подобное заключение будет неверным.

Теорема 12. Если функции $f(t)$ и $f'(t)$ являются оригиналами, $F(s)$ - изображение оригинала $f(t)$ и если $sF(s)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси, то справедливо равенство

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (4.50)$$

Доказательство. Справедливо равенство (4.22):

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(+0).$$

Пусть $s \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+0).$$

Интеграл в левой части равенства сходится равномерно относительно s , поэтому возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+0).$$

Из аналитичности функции $sF(s)$ при $Re s = c > 0$ следует, что производная $f'(t)$ является функцией, убывающей по показательному закону; при этом интеграл в левой части последнего равенства существует. Имеем

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^t f'(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0).$$

Сравнивая последние два равенства, получим, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Пример 4.16 Определить с помощью формулы (4.50) предельное значение оригинала, если его изображение $F(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$ ($\alpha > 0$ - действительное число).

Функция $sF(s) = \frac{s}{(s + \alpha)^2}$ является аналитической в правой полу-

плоскости и на мнимой оси. По формуле (50) найдем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(s + \alpha)^2} = 0.$$

6. Вторая независимая переменная. При определении новых соответствий «оригинал - изображение» оказываются полезными следующие формулы:

$$L_t \left[\lim_{a \rightarrow a_0} f(t, a) \right] = \lim_{a \rightarrow a_0} F(s, a), \quad (4.51)$$

$$L_t \left[\frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(s, a), \quad (4.52)$$

$$L_t \left[\int_{a_0}^a f(t, a) da \right] = \int_{a_0}^a F(s, a) da. \quad (4.53)$$

Здесь $f(t, a)$ - функция, преобразуемая по Лапласу относительно переменной t ; $F(s, a)$ -ее изображение; a - переменная, не зависящая от t и s .

Из формул (4.51) - (4.53) следует, что соответствие $f(t, a) \sim F(s, a)$ не нарушится, если в левой и правой его частях выполнять операции предельного перехода, дифференцирования и интегрирования относительно второй независимой переменной a . При этом предполагается, что пределы, производные и интегралы, указанные в равенствах, существуют. Справедливость формул (4.51) - (4.53) вытекает из основного соотношения $L_t[f(t, a)] = F(s, a)$ в результате поочередного применения к нему операций предельного перехода, дифференцирования и интегрирования.

Пример 4.17. Найти изображение дельта-функции $\delta(t)$ (импульсной функции первого порядка).

Так как

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a}$$

то по формуле (51) получим

$$L[\delta(t)] = L_t \left[\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} L_t \left[\frac{1(t) - 1(t-a)}{a} \right].$$

Используя формулы (4.16) и (4.28), найдем

$$L[\delta(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-as}}{sa}.$$

Справа мы имеем неопределенность вида $0/0$, раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, получим изображение дельта-функции

$$L[\delta(t)] = 1. \quad (4.54)$$

Изображение смещенной дельта-функции $\delta(t-a)$ определяется равенством

$$L[\delta(t-a)] = e^{-as}. \quad (4.55)$$

Найдем изображение производной от дельта-функции $\delta'(t)$ - импульсивной функции второго порядка. Так как

$$\delta'(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 2 \cdot 1(t-a) + 1(t-2a)}{a^2},$$

то, учитывая формулы (4.16), (4.28) и (4.51), получаем

$$L[\delta'(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} L_t \left[\frac{1(t) - 2 \cdot 1(t-a) + 1(t-2a)}{a^2} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-as} + e^{2as}}{a^2 s}.$$

После двукратного применения правила Лопиталья получим

$$L[\delta'(t)] = s. \quad (4.56)$$

Изображение импульсивной функции порядка n будет

$$L[\delta^{(n-1)}(t)] = s^{n-1}. \quad (4.57)$$

Заметим, что функция $F(s)=1, s, \dots, s^{n-1}$ не стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$, поэтому их можно считать изображениями лишь условно. Эта условность является следствием той условности, которая отмечалась выше при введении дельта-функции.

Пример 4.18 Применить формулу (4.52) к соответствию

$$\cos \omega t \sim \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Из формулы (4.52) следует, что соответствие не нарушится если его продифференцировать слева и справа по независимой переменной ω :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \omega t \sim \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \omega t = -t \sin \omega t$, $\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$, то получим

новое соответствие

$$t \sin \omega t \sim \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (4.58)$$

Пример 4.19. Применить формулу (4.53) к соответствию

$$\cos \omega t \sim \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Проинтегрируем это соответствие слева и справа по переменной ω :

$$\int_0^{\omega} \cos \omega t d\omega \sim \int_0^{\omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} d\omega, \quad \int_0^{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{\sin \omega t}{t} \Big|_0^{\omega} = \frac{\sin \omega t}{t},$$

$$\int_0^{\omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} d\omega = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{s} \Big|_0^{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{s} = \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega}.$$

Получили соответствие

$$\frac{\sin \omega t}{t} \sim \operatorname{arctg} \frac{s}{\omega},$$

известное также из примера 4.13.

5. Преобразование Фурье

5.1 Свойства преобразования Фурье

Прямое и обратное преобразования. Совокупность операций, позволяющих по заданной функции $f(t)$ находить ей соответствующую спектральную характеристику $F(j\omega)$, называется преобразованием Фурье.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) видно, что преобразование Фурье состоит в умножении функции $f(t)$ на множитель $e^{-j\omega t}$ и интегрировании произведения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Символически формулу (1) будем записывать в виде

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(j\omega) \quad (5.2)$$

Интеграл в правой части равенства (5.1), как и выше, понимаем в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Равенство (1) устанавливает связь между функцией $f(t)$, аргументом которой служит время t , и ей соответствующей комплексной функцией $F(j\omega)$, имеющей в качестве аргумента частоту ω .

Пример 5.1. Найти спектральную характеристику функции $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, причем $\alpha > 0$ — действительное число.

Заданная функция на всей оси $0t$ кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема, вследствие чего она преобразуема по Фурье. Имеем

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{2}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\alpha + j\omega},$$

т.е.

$$\mathfrak{F}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{2}{\alpha + j\omega}.$$

Покажем, что интеграл (5.1) сходится абсолютно и равномерно относительно ω . Действительно, получим следующую оценку, учитывая равенство:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = M.$$

Так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-j\omega t}| dt$ сходится, то интеграл (5.1) сходится абсолютно, а так как $|f(t)e^{-j\omega t}| = |f(t)|$ и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ сходится, то в соответствии с признаком равномерной сходимости несобственных интегралов, интеграл (5.1) сходится равномерно относительно ω .

Формула интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.3)$$

позволяет по известной функции $F(j\omega)$ определить ей соответствующую функцию $f(t)$; на этом основании формулу (5.3) называют *обратным преобразованием Фурье*. Символически это преобразование можно записать в виде

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t). \quad (5.4)$$

Интеграл в правой части равенства (5.4) также следует рассматривать в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Нетрудно показать, что если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$ абсолютно сходится, то интеграл в правой части равенства (5.3) сходится равномерно относительно t . В самом деле, справедлива оценка

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega) e^{j\omega t}| d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| d\omega.$$

Так как $|F(j\omega) e^{j\omega t}| = |F(j\omega)|$ и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| d\omega$ по условию сходится, то интеграл (5.3) сходится равномерно относительно t .

В ряде задач автоматического регулирования функция $f(t)$ характеризует процесс, имеющий место лишь начиная с некоторого времени t , который можно принять за нулевой. В этом случае $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и формула (5.1) принимает вид

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5.5)$$

или символически

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(j\omega) \quad (t > 0). \quad (5.6)$$

Интеграл в правой части формулы (5.5) следует определять с помощью предельной операции

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$ означает правый предельный переход. В дальнейшем операция предельного перехода будет предполагаться выполненной.

Преобразование, определяемое формулой (5.5), называется *прямым односторонним преобразованием Фурье*.

Обратное преобразование Фурье, соответствующее прямому одностороннему преобразованию, остается двусторонним по переменной ω и дается равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (t > 0), \quad (5.7)$$

где $F(j\omega)$ определяется формулой (5.5), или символически

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) \quad (t > 0). \quad (5.8)$$

При $t=0$ значение правой части равенства (5.7) равно $\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$; при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

Если функция $F(j\omega)$ удовлетворяет условию леммы Жордана, то в формуле (5.7) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} s F(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_k} \quad (t > 0),$$

где ω_k - особые точки функции $F(j\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости плоскости ω . В этом случае

$$f(t) = j \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} s F(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_k} \quad (t > 0). \quad (5.9)$$

Очевидно, что одностороннему преобразованию Фурье могут быть подвергнуты те функции $f(t)$, которые в любом интервале, заключенном в пределах $0 \leq t < \infty$, удовлетворяют условиям Дирихле, и интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ существует.

Пример 5.2. Найти спектральную характеристику функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } (t > 0), \\ 0 & \text{при } (t < 0), \end{cases}$$

причем $\alpha > 0$.

Данная функция удовлетворяет условиям применимости преобразования Фурье. Из формулы (5.5) получим

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

т.е.

$$\mathfrak{F}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (t > 0).$$

Пример 5.3. Найти функцию $f(t)$ при $t \geq 0$, если спектральная характеристика этой функции $F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$.

Функция $F(j\omega) = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\omega + \frac{\alpha}{j}}$ имеет в верхней полуплоскости единст-

венную особую точку $\omega = \omega_1 = -\frac{\alpha}{j} = j\alpha$.

Следовательно, принимая во внимание формулу (5.9), получим

$$f(t) = j \operatorname{Res} \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\omega - j\alpha} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_1} = \lim_{\omega \rightarrow +j\alpha} (\omega - j\alpha) \frac{1}{\omega - j\alpha} e^{j\omega t} = e^{-\alpha t} \quad (t > 0);$$

при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$; при $t = 0$ $f(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} e^{-\alpha t} = \frac{1}{2}$.

Спектральные характеристики суммы, производной и интеграла. Рассмотрим основные теоремы, относящиеся к преобразованию Фурье.

Теорема 1. Если функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральными характеристиками являются соответственно $F_1(j\omega), F_2(j\omega), \dots, F_n(j\omega)$ и если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - величины, не зависящие от t и ω , то справедливы следующие равенства:

$$\mathfrak{F}\left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega), \quad (5.10)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega)\right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \quad (5.11)$$

Доказательство. По формуле (5.1) найдем

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, а множитель, не зависящий от переменной интегрирования, можно выносить за знак интеграла, то

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega).$$

Аналогично получим, используя формулу (5.3),

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega)\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает линейность преобразования Фурье, т.е. показывает, что линейной комбинации функций соответствует линейная комбинация спектральных характеристик этих функций.

Пример 5.4. Найти спектральную характеристику функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} + e^{-\beta t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Принимая во внимание доказанную теорему и результат примера 5.2, найдем

$$\mathfrak{F}\{e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}\} = \mathfrak{F}\{e^{-\alpha t}\} + \mathfrak{F}\{e^{-\beta t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\beta + j\omega} \quad (t > 0).$$

Теорема 2. Если функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ преобразуемы по Фурье и $f(t)$ имеет спектральную характеристику $F(j\omega)$, то спектральная характеристика производной

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = j\omega F(j\omega). \quad (5.12)$$

Доказательство. Преобразование по Фурье производной определяется равенством

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем правую часть этого выражения по частям, тогда

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Так как функция $f(t)$ преобразуема по Фурье, то

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} f(t) = 0, \text{ откуда } f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Замечая, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$, найдем

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = j\omega F(j\omega).$$

Теорема доказана.

Используя n -кратное интегрирование по частям, можно показать, что спектральная характеристика абсолютно интегрируемой в интервале $(-\infty, \infty)$ производной $f^{(n)}(t)$ определяется равенством

$$\mathfrak{F}\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n F(j\omega), \quad (5.13)$$

если

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)).$$

Легко убедиться, что при одностороннем преобразовании Фурье спектральная характеристика производной

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = j\omega F(j\omega) - f(+0),$$

где $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Теорема 3. Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F(j\omega)$ - ее спектральная характеристика и если $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$, то спектральная характеристика интеграла

интеграла $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \quad (5.15)$$

Доказательство. Найдем преобразование по Фурье интеграла

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right) e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем интеграл в правой части этого равенства по частям. Тогда

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Так как по условию теоремы $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = 0$ (это справедливо, например, для нечетной функции $f(t)$), то первое слагаемое правой части обращается в нуль, и мы имеем

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} F(j\omega).$$

Теорема доказана.

Теорему можно распространить и на интегралы кратности n . Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(dt)^n = 0,$$

то справедливо равенство $\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t f(\tau)(d\tau)^n\right\} = \frac{1}{(j\omega)^n} \cdot F(j\omega)$.

При одностороннем преобразовании Фурье находится спектральная характеристика интеграла $\int_0^t f(\tau)d\tau$. Нетрудно убедиться, что если спра-

ведливо равенство $\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau = 0$,

$$\mathfrak{F}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \quad (5.17)$$

Из последних двух теорем видно, что спектральная характеристика производной может быть получена умножением, а спектральная характеристика интеграла — делением спектральной характеристики функции $f(t)$ на $j\omega$.

Спектральная характеристика смещенной функции. Смещение спектральной характеристики. Сжатие и растяжение функции. Пусть задана функция $f(t - a)$, которая отличается от функции $f(t)$ тем, что первая смещена (запаздывает) по отношению ко второй на время a (рис. 5.1)

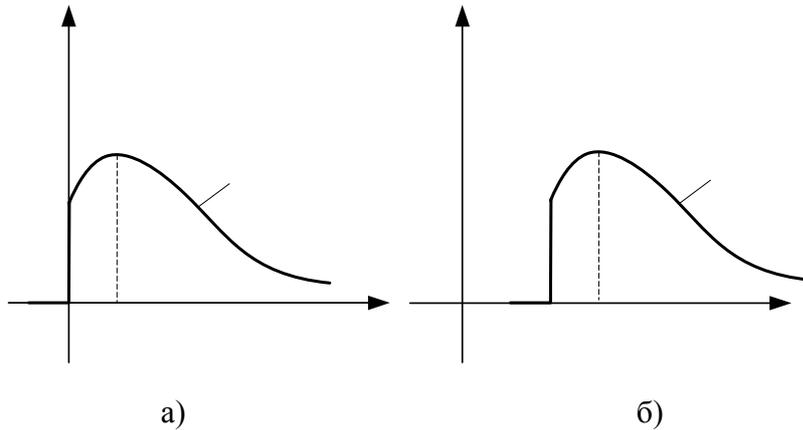


Рис. 5.1

Спектральная характеристика смещенной функции $f(t - a)$ может быть определена с помощью следующей теоремы:

Теорема 4. Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F(j\omega)$ — ее спектральная характеристика, то спектральная характеристика смещенной функции $f(t - a)$, где a — положительное число, есть

$$\mathfrak{T}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a} F(j\omega). \quad (5.18)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используем равенство

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Введем новую переменную $t = \tau + a$; тогда

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-j\omega(t-a)} dt.$$

Умножая это равенство слева и справа на $e^{-j\omega a}$ (a считаем не зависящим от t), найдем

$$e^{j\omega a} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-j\omega t} dt.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{j\omega t} dt = \mathfrak{T}\{f(t - a)\},$$

поэтому

$$\mathfrak{T}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a} F(j\omega).$$

Теорема доказана.

t1

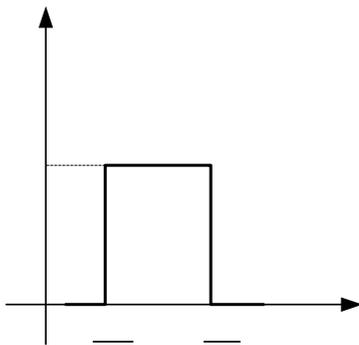
Заменяя a на $-a$, получим спектральную характеристику функции $f(t+a)$, «опережающей» функцию $f(t)$:

$$\mathfrak{F}\{f(t+a)\} = e^{j\omega a} F(j\omega). \quad (5.19)$$

Пример 5.5 Найти спектральную характеристику смещенного импульса высотой A_u и длительностью τ_u (рис. 5.2). Заданный импульс

$$f_1(t) = \begin{cases} A_u & \text{при } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{3\tau_u}{2}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{\tau_u}{2} \text{ и } t > \frac{3\tau_u}{2}. \end{cases}$$

Функция $f_1(t)$ является запаздывающей на время τ_u по отношению к функции $f(t)$. Следовательно, ее спектральная характеристика определяется формулой (5.18), где нужно положить $a = \tau_u$. Так как спектральная характеристика несмещенной функции



$$F(j\omega) = \frac{2A_u}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_u}{2}, \text{ то}$$

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = e^{-j\omega\tau_u} \frac{2A_u}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_u}{2}.$$

Рис. 5.2

Теорема 5 Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F(j\omega)$ — ее спектральная характеристика, то

$$\mathfrak{F}\{e^{-jat} f(t)\} = F(j(\omega + a)), \quad (5.20)$$

где a — любое вещественное неотрицательное число.

Доказательство. Используя формулу преобразования Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

найдем

$$\mathfrak{F}\{e^{-jat} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega+a)t} dt = F(j(\omega + a)).$$

Теорема доказана.

Заменив a на $-a$, получим еще одну формулу

$$\mathfrak{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega - a)). \quad (5.21)$$

Пример 5.6 Определить, какая функция имеет спектральную характеристику, равную

$$\frac{1}{\alpha + j(\omega + a)},$$

где $a > 0$ - вещественное число.

Обозначим $\frac{1}{\alpha + j(\omega + a)}$ через $F(j(\omega + a))$. Несмещенная спектральная характеристика $F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$, как видно из примера 5.1, соответствует функции $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$

Тогда, учитывая формулу (5.20), получим, что спектральной характеристике $F(j(\omega + a))$ соответствует функция

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-(\alpha + ja)t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Пусть задана функция $f(t)$ и ее спектральная характеристика есть $F(j\omega)$. Разделим аргумент функции t на некоторое положительное число a , независимое от t и ω . Графики функций $f\left(\frac{t}{a}\right)$ относительно переменной t отличаются друг от друга при различных значениях a . На рис. 5.3 приведены, например, графики функций $f\left(\frac{t}{a}\right) = e^{-0,5\frac{t}{a}} \cos \pi \frac{t}{a}$ для значений $a = 0,5; 1;$
 2. Если $a > 1$, то график функции $f\left(\frac{t}{a}\right)$ растянут вдоль оси Ot относительно графика функции $f\left(\frac{t}{a}\right)$, у которой $a=1$. Если же $a < 1$ то график будет, наоборот, сжат.

Следующая теорема устанавливает, как изменяется спектральная характеристика функции $f(t)$ в результате растяжения (сжатия) графика этой функции вдоль оси времени.

Теорема 6. Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье, $F(j\omega)$ — ее спектральная характеристика и a — положительное вещественное число, то справедливо равенство

$$\mathfrak{F}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(ja\omega). \quad (5.22)$$

Доказательство. Используя в формуле преобразования Фурье вместо обозначения переменной ω обозначение ω , получим

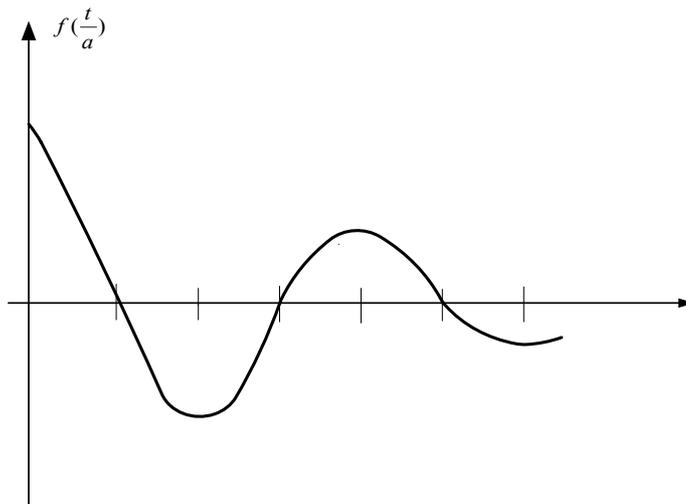
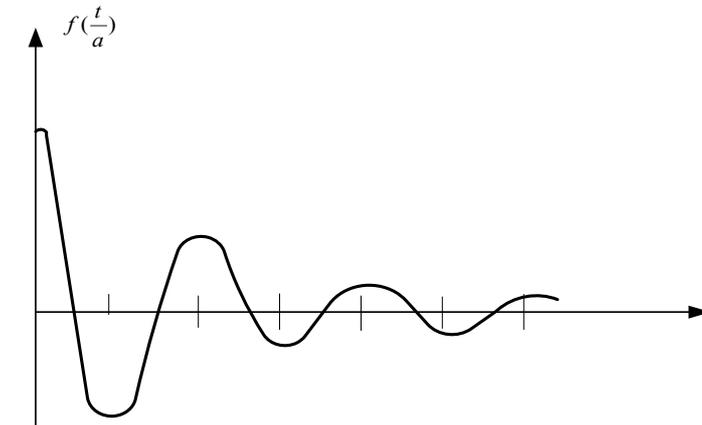
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Умножим и разделим τ на a и введем новые переменные $t = \tau a$ и $\omega = \frac{\omega}{a}$, тогда

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\tau a}{a}\right) e^{-j\omega\frac{\tau a}{a}} \frac{d\tau a}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt,$$

или
$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt = aF(ja\omega).$$

Теорема доказана.



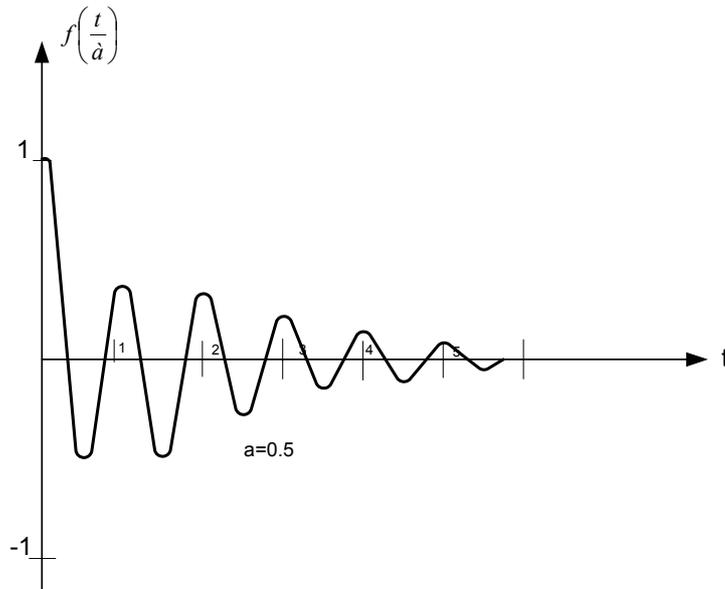


Рис.5.3

Из формулы (5.22) видно, что при растяжении (сжатии) в a раз графика функции $f(t)$ вдоль оси времени график модуля спектральной характеристики $|F(j\omega)|$, во-первых, сжимается (растягивается) вдоль оси частот в a раз и, во-вторых, увеличиваются (уменьшаются) в a раз его значения. Следовательно, чем короче импульс, тем шире график модуля его спектральной характеристики. Бесконечно короткий импульс имеет бесконечно широкий график модуля $|F(j\omega)|$.

Теорема Парсеваля. Следующая теорема позволяет сделать вывод о распределении энергии по гармоникам непериодического сигнала.

Теорема 7. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$,

причем интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)d\omega$, $\int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)d\omega$ сходятся абсолютно, то спра-

ведливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(-j\omega)d\omega. \quad (5.23)$$

Доказательство. Для функции $f_1(t)$ напомним представление в виде интеграла Фурье

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Обе части этого равенства умножим на $f_2(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

Так как по условию теоремы интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)d\omega$ сходится абсолютно, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ сходится равномерно относительно t .

В этом случае в правой части последнего равенства можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{j\omega t} dt = F_2(-j\omega),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(-j\omega)d\omega.$$

Теорема доказана.

Утверждение, записываемое в виде равенства (5.23), носит название *теоремы Парсеваля*. Теорема позволяет находить интеграл в бесконечных пределах от произведения двух функций, оперируя лишь со спектральными характеристиками этих функций. Если $f_1(t)$ характеризует, например, мгновенное значение напряжения, а $f_2(t)$ -мгновенное значение тока в электрической цепи, то произведение $f_1(t) f_2(t)$ есть мгновенная мощность, а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt$ - энергия. Таким образом, зная спектральные характеристики $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$ соответственно напряжения и тока, можно с помощью формулы (5.23) вычислить энергию, выделяемую током за время $-\infty < t < \infty$.

Получим формулу (5.23) в несколько ином виде. Пусть

$$F_1(j\omega) = |F_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)}, \quad F_2(-j\omega) = |F_2(-j\omega)|e^{j\varphi_2(-\omega)},$$

где

$$\varphi_1(\omega) = \arg F_1(j\omega), \quad \varphi_2(-\omega) = \arg F_2(-j\omega);$$

тогда

$$F_1(j\omega)F_2(-j\omega) = |F_1(j\omega)||F_2(j\omega)|[\cos\varphi_1(\omega) + j\sin\varphi_1(\omega)] \times \\ \times [\cos\varphi_2(\omega) - j\sin\varphi_2(\omega)],$$

так как модуль $|F_2(j\omega)|$ является четной, а аргумент $\varphi_2(\omega)$ — нечетной функцией относительно переменной ω . Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(j\omega)||F_2(j\omega)| \times \\ \times [\cos\varphi_1(\omega)\cos\varphi_2(\omega) + \sin\varphi_1(\omega)\sin\varphi_2(\omega)]d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(j\omega)| \times \\ \times |F_2(j\omega)|[\sin\varphi_1(\omega)\cos\varphi_2(\omega) - \cos\varphi_1(\omega)\sin\varphi_2(\omega)]d\omega.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль, так как под знаком интеграла находится нечетная функция относительно ω . Подынтегральная функция под знаком первого интеграла, наоборот, четная. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(-j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_1(j\omega)||F_2(j\omega)| \times \\ \times \cos[\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]d\omega$$

и формулу (5.23) можно записать в вещественной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_1(j\omega)||F_2(j\omega)| \cos[\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]d\omega \quad (5.24)$$

Если положить $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, то $F_1(j\omega) = F_2(j\omega) = F(j\omega)$, и соотношение (5.24) превращается в равенство, называемое *формулой Парсеваля*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (5.25)$$

Применительно к задачам электрических цепей $f(t)$ можно рассматривать как функцию, характеризующую изменение тока. Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$ является энергией, выделяемой током за время $-\infty < t < \infty$ в цепи с единичным сопротивлением. Формула (5.25) в некотором смысле

аналогична формуле, определяющей среднюю мощность сигнала. Величина $\frac{1}{\pi}|F(j\omega)|^2 d\omega$ является энергией, выделяемой гармониками функции $f(t)$, частоты которых расположены в полосе частот $d\omega$, содержащей частоту ω .

Функция $\frac{1}{\pi}|F(j\omega)|$, как показано ранее, представляет собой относительную амплитуду гармоник представления функции $f(t)$ в виде интеграла Фурье. Функция $|F(j\omega)|^2$ характеризует распределение энергии по частотам этих гармоник и может быть названа *энергетической спектральной характеристикой* непериодической функции $f(t)$.

Умножение спектральных характеристик. Спектральная характеристика произведения двух функций. Пусть заданы две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, определенные в интервале $-\infty < t < \infty$. Введем новую функцию

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (5.26)$$

которую назовем *сверткой* функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Символически свертка $f(t)$ обозначается

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (5.27)$$

и читается так: функция $f_1(t)$, свернутая с функцией $f_2(t)$.

Для получения свертки следует, как видно из (5.26), в функциях $f_1(t)$ и $f_2(t)$ заменить переменную t на τ ; затем в функции $f_1(\tau)$ аргумент τ заменить на $-\tau$; сместить функцию $f_1(-\tau)$ на величину t , т. е. образовать функцию $f_1(t-\tau)$; перемножить функции $f_1(t-\tau)$ и $f_2(\tau)$, а затем проинтегрировать получившееся произведение в интервале $(-\infty < \tau < \infty)$. Совокупность этих операций называется *свертыванием* функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Основные свойства свертки функций

Свойство 1. Свертывание обладает свойством коммутативности, т.е.

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t). \quad (5.28)$$

Доказательство. Требуется показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau.$$

Сделаем в первом интеграле подстановку $t-\tau = \eta$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} f_1(\eta)f_2(t-\eta)d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\eta)f_1(\eta)d\eta,$$

следовательно, равенство (5.28) справедливо.

Свойство коммутативности свертки имеет своим аналогом свойство коммутативности умножения двух чисел a и b , в силу которого $ab = ba$.

Если имеются три числа a , b и c , то операция умножения этих чисел обладает, как известно, свойством ассоциативности, т. е. $(ab)c = a(bc)$. Аналогичное свойство имеет и операция свертывания.

Свойство 2. Свертывание обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]. \quad (5.29)$$

Доказательство. Положим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = g(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)f_3(\tau)d\tau = h(t).$$

Свойство (5.29) будет доказано, если удастся установить справедливость равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f_3(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (30)$$

В правую часть очевидного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f_3(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau-\eta)f_2(\eta)d\eta \right] f_3(\tau)d\tau$$

введем новую переменную $\gamma = \eta + \tau$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f_3(\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma)f_2(\gamma-\tau)d\gamma \right] f_3(\tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\gamma-\tau)f_3(\tau)d\tau \right] d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma)h(\gamma)d\gamma. \end{aligned}$$

Так как значение интеграла не зависит от наименования переменной интегрирования, то правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства (5.30), что и доказывает свойство ассоциативности.

Свойство 3. Свертывание обладает свойством дистрибутивности относительно сложения, т. е.

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t). \quad (5.31)$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)[f_2(\tau) + f_3(\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_3(\tau)d\tau.$$

Следовательно, равенство (5.31) справедливо.

Дистрибутивность свертки является аналогом дистрибутивности произведения чисел; т. е.

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Таким образом, свертка имеет те же свойства, что и произведение чисел.

Если функции $f_1(t)=0$ при $t<0$, $f_2(t)=0$ при $t<0$, то $f_2(\tau)=0$ при $\tau<0$, $f_1(-\tau)=0$ при $\tau>0$ и $f_1(t-\tau)=0$ при $\tau>t$. В этом случае свертка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяется равенством

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \quad (5.32)$$

Символическая запись (5.27) операции свертывания при этом не изменяется.

Следующая теорема позволяет найти спектральную характеристику свертки двух функций.

Теорема 8. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$, то спектральная характеристика свертки определяется равенством

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega). \quad (5.33)$$

Доказательство. По условию теоремы функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье; поэтому интеграл $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ также преобразуем по Фурье. Найдем спектральную характеристику $\mathfrak{F}\{f(t)\}$. Имеем в соответствии с равенством (5.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $t-\tau = \eta$, тогда

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta\right]e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Так как по условию теоремы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = F_1(j\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = F_2(j\omega),$$

то

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, как следствие, получим, что обратное преобразование Фурье произведения $F_1(j\omega)F_2(j\omega)$ спектральных характеристик определяется равенством

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(j\omega)F_2(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (5.34)$$

Если $f_1(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $f_2(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то формулы (5.33) и (5.34) соответственно приобретают вид

$$\mathfrak{F}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (5.35)$$

и

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(j\omega)F_2(j\omega)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (5.36)$$

Докажем теперь теорему, позволяющую определять спектральные характеристики произведения двух функций.

Теорема 9. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$, то спектральная характеристика произведения $f_1(t)f_2(t)$ дается равенством

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega-w))F_2(jw)dw, \quad (5.37)$$

Доказательство. По теореме Парсеваля имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(jw)G(-jw)dw;$$

здесь обозначено

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Пусть функция $g(t)$ определена в виде $g(t) = f_1(t)e^{-j\omega t}$. Тогда в соответствии с равенством (5.20) имеем:

$$G(j\omega) = F_1(j(\omega + \omega));$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)G(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)F_1(j(\omega - \omega)) d\omega$$

или

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)g(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega - \omega))F_2(j\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Интеграл в правой части равенства (5.37) является сверткой спектральных характеристик $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$.

Из последних двух теорем следует, что спектральная характеристика свертки равна произведению спектральных характеристик $F_1(j\omega) F_2(j\omega)$ свертываемых функций, а свертка спектральных характеристик соответствует произведению функций $f_1(t) f_2(t)$.

5.2 Спектральные характеристики некоторых функций

1. Единичная ступенчатая функция. Дельта-функция.

В качестве воздействия, прикладываемого к автоматической системе, часто рассматривается воздействие вида

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Функция $1(t)$ называется *единичной ступенчатой функцией*, а функция

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau \end{cases} \quad (5.39)$$

— *смещенной единичной ступенчатой функцией* (рис. 5.4).

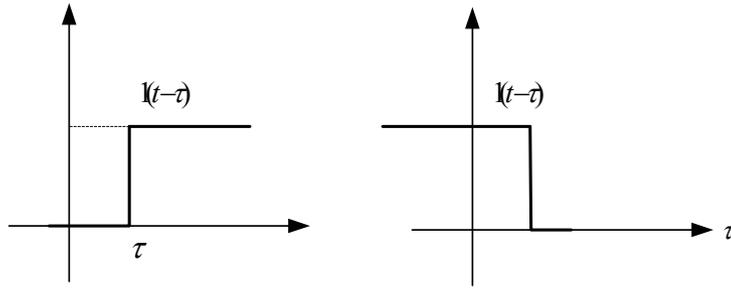


Рис. 5.4

Из представления (5.38) следует, что единичная ступенчатая функция имеет при $t=0$ разрыв непрерывности первого рода, причем значение функции в точке разрыва не определено. Однако единичным ступенчатым функциям в ряде случаев приписывают при $t=0$ вполне определенные значения; наиболее часто встречаются функции следующего вида:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

Выбор того или иного значения единичной ступенчатой функции при $t=0$ связан с особенностями решаемой задачи. Например, представление (5.40) (рис.5.5а) удобно в том случае, когда рассматривают функцию $1(t)$ как предел при $\lambda \rightarrow \infty$ последовательности непрерывных функций

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t, \quad (5.43)$$

где λ является параметром (рис. 5.5 б), т. е. $1(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda)$.

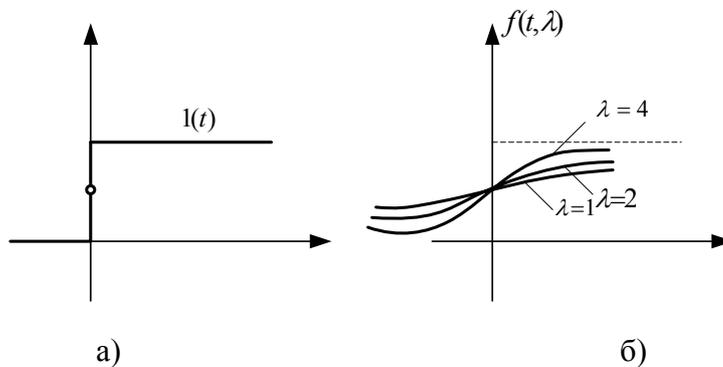


Рис. 5.5

При этом следует принимать во внимание лишь главные значения многозначной функции (5.43), т. е. значения, принадлежащие интервалу — $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\lambda t < \frac{\pi}{2}$. Последовательность непрерывных функций

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda t}} \quad (5.44)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ также имеет своим пределом функцию (5.40). Если в качестве последовательности непрерывных функций принять последовательность

$$f(t, \lambda) = a e^{-\lambda t} \quad (0 < a < 1), \quad (5.45)$$

то предел этой последовательности

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При $t = 0$ предел последовательности (5.45) равен a , т. е. значение функции $\mathbf{1}(t)$ при $t = 0$ может быть любым, принадлежащим интервалу $0 < a < 1$.

Таким образом, различные аппроксимирующие последовательности непрерывных функций приводят к различным значениям функции $\mathbf{1}(t)$ при $t = 0$.

К категории особых функций относится дельта-функция Дирака, называемая также импульсивной функцией первого порядка. Дельта-функция определяется равенством

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (5.46)$$

причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.47)$$

Условия (5.46) и (5.47) оказываются несовместимыми, если рассматривать их с позиций классического математического анализа, и поэтому дельта-функция не является «функцией» в обычном смысле. Однако в классе обобщенных функций дельта-функция занимает равноправное место.

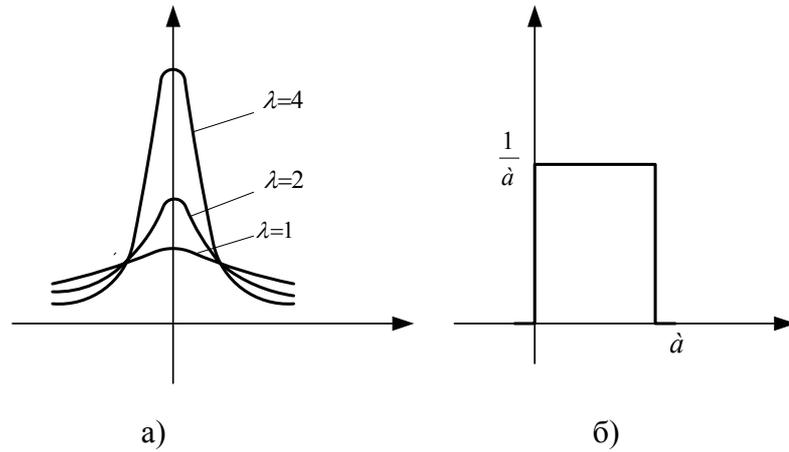


Рис. 5.6

Дельта-функция обычно рассматривается как предел последовательностей дельта-образных гладких (имеющих производные любого порядка) функций. Например, последовательность функций

$$f_{\delta}(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}, \quad (5.48)$$

являющихся производными по t (рис. 5.6,а) от гладких функций последовательности (5.43), является дельта-образной последовательностью, так как предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\delta}(t, \lambda) = \delta(t).$$

В самом деле, при $t \neq 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = 0,$$

при $t=0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi} = \infty,$$

причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 t^2} \cdot \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1.$$

Следовательно, функция, определяемая как предел последовательности функций (5.48) при $\lambda \rightarrow \infty$, является дельта-функцией, т. е. последовательность (5.48) представляет собой дельта-образную последовательность. При таком определении дельта-функции она является четной функцией.

Нетрудно убедиться, что производные по t от последовательностей гладких функций (5.44) и (5.45) также являются дельта-образными последовательностями.

Дельта-функция может аппроксимироваться и разрывными функциями. Например, последовательность функций

$$f_{\delta}(t, a) = \frac{1(t) - 1(t - a)}{a}, \quad (5.49)$$

характеризующих импульсы высотой $\frac{1}{a}$ и длительностью a (рис. 5.6,б) при $a \rightarrow 0$ сходится к дельта-функции, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_{\delta}(t, a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - a)}{a}.$$

Смещенная дельта-функция $\delta(t - \tau)$ определяется равенством

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau, \\ \infty & \text{при } t = \tau, \end{cases} \quad (5.50)$$

при этом интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (5.51)$$

Функцию $\delta(t - \tau)$ следует понимать как предел при $\lambda \rightarrow \infty$ смещенных дельта-образных последовательностей, например последовательностей гладких функций вида

$$f_{\delta}(t - \tau, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi [1 + \lambda^2 (t - \tau)^2]}, \quad (5.52)$$

т. е. $\delta(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\delta}(t - \tau, \lambda).$

Выше было отмечено, что гладкие дельта-образные последовательности образуются в результате дифференцирования последовательностей гладких функций, сходящихся к единичной ступенчатой функции; поэтому дельта-функцию $\delta(t - \tau)$ можно считать производной по t от единичной ступенчатой функции $1(t - \tau)$, т. е.

$$\delta(t - \tau) = 1'(t - \tau). \quad (5.53)$$

Таким образом, понятие дельта-функции оказывается плодотворным при распространении операции дифференцирования на разрывные функции.

Если выполнить дифференцирование по t дельта-образной последовательности, то получим последовательность, сходящуюся к производной

от дельта-функции. Например, дифференцируя выражение (5.52), получим последовательность $f'_\delta(t - \tau, \lambda) = -\frac{2\lambda^3(t - \tau)}{\pi[1 + \lambda^2(t - \tau)^2]^2}$. Тогда производная от дельта-функции по аргументу t будет $\delta'(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f'_\delta(t - \tau, \lambda)$.

На рис. 5.7 приведены графики функций $f'_\delta(t - \tau, \lambda)$ для различных значений параметра λ при $\tau=0$.

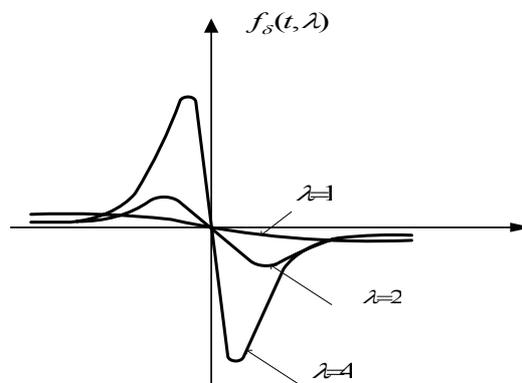


Рис. 5.7

Первую производную от дельта функции называют также *импульсивной функцией второго порядка*.

Производная порядка n от дельта-функции

$$\delta^{(n)}(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\delta^{(n)}(t - \tau, \lambda) \quad (5.54)$$

может быть названа импульсивной функцией $n+1$ порядка.

Рассмотрим важное свойство дельта-функции. Пусть функция $f(t)$ непрерывна и ограничена в интервале $-\infty < t < \infty$, тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt = f(\tau). \quad (5.55)$$

Действительно, подынтегральная функция согласно равенству (5.50) равна нулю при $t \neq \tau$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt = \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} f(t)\delta(t - \tau)dt.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ - произвольно малая величина. При $t = \tau$ функция $f(t)$ имеет значение $f(\tau)$ и может быть вынесена за знак интеграла при интегрировании в бесконечно малой окрестности точки $t = \tau$, тогда получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = f(\tau),$$

следовательно, соотношение (5.55) является справедливым. Это соотношение определяет так называемое «*фильтрующее*» или «*выхватывающее*» свойство дельта-функции.

Пусть $f(t) = g'(t)$ тогда вместо равенства (5.55) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\delta(t-\tau)dt = g'(\tau).$$

Проинтегрируем интеграл в левой части равенства по частям. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\delta(t-\tau)dt &= g(t)\delta(t-\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta'(t-\tau)dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta'(t-\tau)dt, \end{aligned}$$

так как произведение $g(t)\delta(t-\tau)$ обращается в ноль при $t = \pm\infty$. Следовательно,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta'(t-\tau)dt = g'(\tau)$$

или, сменив наименование функции $g(t)$ на $f(t)$, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-\tau)dt = -f'(\tau). \quad (5.56)$$

Аналогичным образом можно показать справедливость соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-\tau)dt = (-1)^n f^{(n)}(\tau), \quad (5.57)$$

если функция $f(t)$ имеет непрерывные производные до n -го порядка в интервале $-\infty < t < \infty$.

Определим теперь спектральные характеристики единичной ступенчатой функции. Единичная ступенчатая функция $1(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, и поэтому преобразование Фурье для такой функции не существует. Однако, используя понятие дельта-

функции, можно построить спектральную характеристику и для функции $1(t)$. Покажем, что ее спектральная характеристика определяется равенством

$$\mathfrak{F}\{1(t)\} = F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (5.58)$$

Подставляя $F(j\omega)$ в формулу обратного преобразования Фурье и учитывая фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2}. \quad (5.59)$$

Учитывая лемму Жордана и основанные на этой лемме способы вычисления несобственных интегралов, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = j\pi \quad \text{при } t > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = -j\pi \quad \text{при } t < 0.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot j\pi + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{при } t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot (-j\pi) + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Таким образом, обратное преобразование Фурье функции $F(j\omega)$ приводит к единичной ступенчатой функции, и поэтому правая часть равенства (5.59) является спектральной характеристикой функции $1(t)$.

Отметим, что отделяя в выражении (5.59) действительные и мнимые части, получим представление единичной ступенчатой функции в виде интеграла Фурье

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2}. \quad (5.60)$$

Для смещенной единичной ступенчатой функции (5.39) найдем, учитывая равенство (5.58) и теорему 4 в 5.1, следующую спектральную характеристику:

$$\mathfrak{F}\{1(t - \tau)\} = F(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right). \quad (5.61)$$

Определим спектральную характеристику дельта-функции (5.46). Получим, принимая во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, что

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (5.62)$$

Спектральная характеристика смещенной дельта-функции будет

$$\mathfrak{F}\{\delta(t - \tau)\} = F(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (5.63)$$

Из последних двух равенств видно, что модуль спектральной характеристики дельта-функции $|F(j\omega)|$ равен единице (рис. 5.9). Отсюда следует, что амплитуды гармоник представления дельта-функции в виде интеграла Фурье равны на всем диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$. Найдем спектральную характеристику суммы двух дельта-функций $\delta(t - \tau)$ и $\delta(t + \tau)$ (рис. 5.10,а):

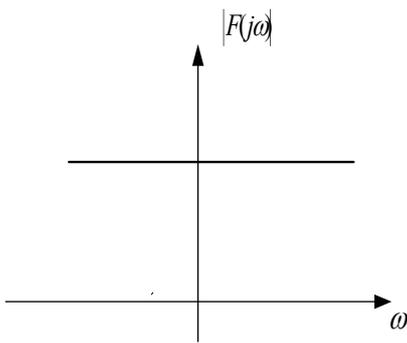


Рис. 5.9

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\delta(t - \tau) + \delta(t + \tau)\} &= F(j\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - \tau) + \delta(t + \tau)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau} = 2 \cos \omega\tau, \end{aligned}$$

т. е. в этом случае спектральной характеристикой является косиноида (рис. 5.10,б).

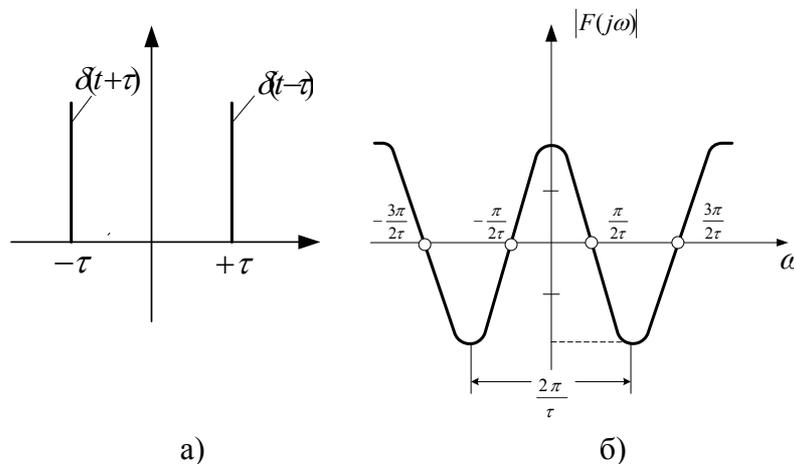


Рис. 5.10

Следует заметить, что полученные соотношения имеют чисто формальный характер, так как дельта-функция не является обычной функцией. Строгое обоснование этих формул может быть дано лишь с привлечением теории обобщенных функций, поскольку дельта-функция может рассматриваться как один из примеров обобщенных функций.

2. Гармонические колебания

Пусть задана косинусоидальная функция

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t \quad (5.64)$$

с амплитудой A_1 и частотой ω_1 . Амплитудный спектр этой функции состоит из двух отрезков высотой A_1 при частотах $\omega = \pm\omega_1$; для других значений частоты ω значения амплитудного спектра равны нулю (рис. 5.11).

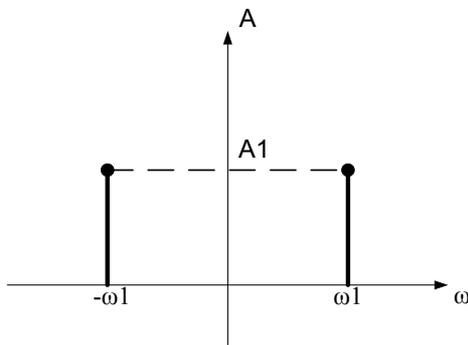


Рис. 5.11

Косинусоида не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости на интервале $(-\infty, \infty)$, поэтому формула

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

не может быть непосредственно исполь-

зована для определения спектральной характеристики функции (5.64). Однако введенное выше понятие дельта-функции позволяет расширить область применимости этой формулы и, в частности, определить спектральную характеристику периодической функции.

Покажем, что спектральная характеристика косинусоиды будет

$$F(j\omega) = \pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (5.65)$$

Для этого подставим в формулу (5.26) обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.66)$$

выражение (5.65):

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \pi A_1 \delta(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega = A_1 \operatorname{Re} e^{j\omega_1 t}.$$

Здесь мы использовали свойство (5.55) дельта-функции, причем точка $\omega = \omega_1$ расположена внутри интервала $(0, \infty)$, а $\delta(\omega + \omega_1) = 0$ при $\omega > 0$. Следовательно, с учетом формулы Эйлера найдем

$$f(t) = A_1 \operatorname{Re} [\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t] = A_1 \cos \omega_1 t,$$

т. е. обратное преобразование Фурье спектральной характеристики (5.65) дает косинусоиду (5.64). Итак, показали, что

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\pi A_1[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]\} = A_1 \cos \omega_1 t \quad (5.67)$$

и, как следствие, получаем, что спектральная характеристика косинусоиды (рис. 5.12)

$$\mathfrak{F}\{A_1 \cos \omega_1 t\} = F(j\omega) = \pi A_1[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (5.68)$$

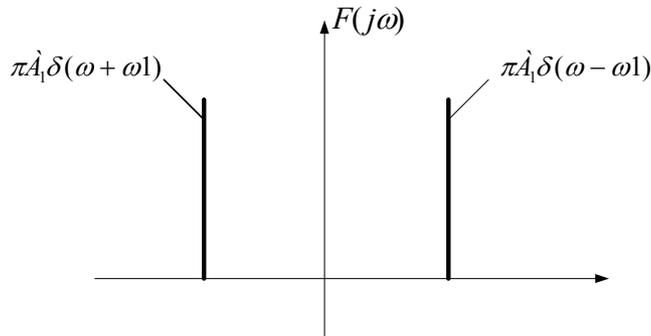


Рис.5.12

Равенство (5.65) может быть доказано также с помощью предельного перехода. Найдем предварительно спектральную характеристику произведения $e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t$, где $\lambda > 0$ — некоторый параметр:

$$\mathfrak{F}\{e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t\} = F(j\omega, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt.$$

Множитель $e^{-\lambda|t|}$ обеспечивает сходимость интеграла в интервале $(-\infty, \infty)$; имеем:

$$\begin{aligned} F(j\omega, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt = \\ &= A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt - j A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \sin \omega t dt = \\ &= 2 A_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt. \end{aligned}$$

В этом равенстве мы приняли во внимание, что произведение $e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t$ является четной, а произведение $e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \sin \omega t$ - нечетной функцией относительно аргумента t . Так как

$$\cos \omega_1 t \cos \omega t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 - \omega) + \cos(\omega_1 + \omega)],$$

то

$$\begin{aligned}
F(j\omega, \lambda) &= A_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [\cos(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega_1 + \omega)t] dt = \\
&= A_1 \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega + \omega_1)^2} \right]. \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Найдем теперь интеграл

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1 \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega + \omega_1)^2} \right] d\omega = \\
&= A_1 \left[\operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_1}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \operatorname{arctg} \frac{\omega + \omega_1}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] = 2\pi A_1.
\end{aligned}$$

После предельного перехода получим:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) &= \infty, & \lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) &= \infty, \\
\omega = \omega_1 & & \omega = -\omega_1 & \\
\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) &= 0 \quad \text{при} \quad \omega \neq \pm \omega_1,
\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) d\omega = 2\pi A_1.$$

Сравнивая полученные выражения со свойствами дельта-функции (5.49) и (5.50), найдем, что при $\lambda \rightarrow 0$ спектральная характеристика $F(j\omega, \lambda)$ имеет характер суммы двух смещенных дельта-функций, т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) = F(j\omega) = \pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)].$$

Следовательно, равенство (5.65) является справедливым.

Пусть теперь задана периодическая функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t. \tag{5.69}$$

Ее спектральная характеристика

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F} \{ A_k \cos k\omega_1 t \} = \\
&= \pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\delta(\omega - k\omega_1) + \delta(\omega + k\omega_1)], \tag{5.70}
\end{aligned}$$

т. е. равна сумме дельта-функций, смещенных по оси ω на величину $\pm k\omega_1$.

Спектральная характеристика синусоиды

$$f(t) = A_1 \sin \omega_1 t \quad (5.71)$$

есть

$$F(j\omega) = \frac{A_1 \pi}{j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)], \quad (5.72)$$

ее модуль

$$|F(j\omega)| = A_1 \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (5.73)$$

Спектральная характеристика периодической функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega_1 t \quad (5.74)$$

определяется равенством

$$F(j\omega) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\delta(\omega - k\omega_1) - \delta(\omega + k\omega_1)]. \quad (5.75)$$

5.3 Спектральные характеристики, зависящие от времени

Введем понятие *текущей спектральной характеристики*, которую определим следующим образом:

$$F_t(j\omega) = \int_0^t f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.76)$$

Текущая спектральная характеристика позволяет со спектральной точки зрения описать свойства и историю развития реально существующего и наблюдаемого физического процесса. В самом деле, если функция $f(t)$ характеризует некоторый процесс, начинающийся в известный момент времени, который может быть принят за нулевой, то в формуле преобразования Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

необходимо положить $f(t)=0$ при $-\infty < t < 0$, другими словами, следует перенести нижний предел интегрирования из $-\infty$ в 0. Вид функции $f(t)$ может быть точно установлен лишь в интервале наблюдения $(0, t)$, поэтому интегрирование надо производить в пределах от 0 до t , а не от 0 до ∞ , так как после окончания наблюдения за процессом вид функции $f(t)$ в общем неизвестен. Подобные соображения приводят к формуле (5.76).

Из формулы (5.76) видно, что текущая спектральная характеристика зависит не только от частоты ω , но и от времени окончания наблюдения t .

Значение времени t может соответствовать также моменту окончания самого физического процесса. Факт зависимости $F_t(\omega)$ как от ω , так и от t позволяет наглядно устанавливать связь между изменением во времени физического процесса и ему соответствующим изменением характера разложения этого процесса на сумму гармонических составляющих.

Пример 5.6. Определить текущую спектральную характеристику синусоиды $f(t) = A_1 \sin \omega_1 t$

Имеем

$$F_t(j\omega) = \int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем правую часть этого равенства по частям; тогда

$$\begin{aligned} F_t(j\omega) &= -A_1 e^{-j\omega t} \frac{1}{\omega_1} \cos \omega_1 t \Big|_0^t - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t dt = \\ &= -A_1 \frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t + \frac{A_1}{\omega_1} - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t dt = \\ &= -A_1 \frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t + \frac{A_1}{\omega_1} - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \left[\frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t \Big|_0^t + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t dt \right] = -A_1 e^{-j\omega t} \frac{\cos \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{A_1}{\omega_1} - \\ &\quad - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1^2} e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt = \frac{A_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \left[1 - e^{-j\omega t} \left(\cos \omega_1 t + j \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \frac{1}{\omega_1},$$

и искомая текущая спектральная характеристика

$$F_t(j\omega) = A_1 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[1 - e^{-j\omega t} \left(\cos \omega_1 t + j \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]. \quad (5.77)$$

Обозначим через n число полу периодов синусоиды, считая их с момента возникновения процесса, и рассмотрим $F_t(\omega)$ для дискретных мо-

ментов времени $t = n \frac{T}{2} = n \frac{\pi}{\omega_1}$, причем $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ - период синусоиды. Так как $\sin n\pi = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, то для дискретных моментов времени вместо (5.77) получим

$$F_t(j\omega) = A_1 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[1 - (-1)^n e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}} \right]. \quad (5.78)$$

Найдем модуль текущей спектральной характеристики:

$$\begin{aligned} |F_t(j\omega)| &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \left| 1 - (-1)^n [\cos \omega t - j \sin \omega t] \right| = \\ &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \sqrt{[1 - (-1)^n \cos \omega t]^2 + \sin^2 \omega t} = \\ &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \sqrt{2 - 2(-1)^n \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\sin \frac{\chi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \chi}{2}}, \quad \cos \frac{\chi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \chi}{2}},$$

поэтому

$$|F_t(j\omega)| = \frac{2A_1}{\omega_1} \left| \sin n \frac{\pi \omega}{2 \omega_1} \right| \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right|, \quad (5.79)$$

если n - четное, и

$$|F_t(j\omega)| = \frac{2A_1}{\omega_1} \frac{\left| \cos n \frac{\pi \omega}{2 \omega_1} \right|}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right|}, \quad (5.80)$$

если n - нечетное.

При $\omega = \omega_1$ значение $|F_t(j\omega)|$ становится неопределенным. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. Если n - четное, то

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} |F_t(j\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{2A_1}{\omega_1} = \frac{1}{\left| -\frac{2\omega}{\omega_1^2} \right|} \pi \frac{n}{2\omega_1} \left| \cos \pi \frac{n \omega}{2 \omega_1} \right| = \\ &= A_1 \frac{\pi n}{2 \omega_1} = A_1 \frac{t}{2} = A_1 n \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично для n нечетного:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} |F_t(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{2A_1}{\omega_1} \frac{1}{\left| -\frac{2\omega}{\omega_1^2} \right|} \pi \frac{n}{2\omega_1} \left| -\sin \pi \frac{n \omega}{2 \omega_1} \right| = A_1 n \frac{T}{4}.$$

Следовательно, модуль текущей спектральной характеристики $|F_t(j\omega)|$ при $\omega = \omega_1$ возрастает при увеличении числа полупериодов n по линейному закону. С увеличением числа n все более увеличивается максимум модуля спектральной характеристики на частоте $\omega = \omega_1$.

При $n = \infty$ периодичность функции $f(t)$ проявляется наиболее полно; в этом случае график $|F_t(j\omega)|$ представляет собой смещенную дельта-функцию $\delta\left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1\right)$. При $n=1$ недостаточно признаков, свидетельствующих о возможной периодичности функции $f(t)$, следствием этого является отсутствие на графике $|F_t(j\omega)|$ максимумов, в том числе и на частоте $\omega = \omega_1$.

Таким образом, по характеру текущей спектральной характеристики $|F_t(j\omega)|$ можно сделать Суждения о поведении функции $f(t)$ при изменении времени t .

Рассмотрим еще один вид спектральной характеристики, зависящей от времени - *мгновенную спектральную характеристику*, которую определим с помощью формулы

$$F_T(j\omega, t) = \int_{t-T}^t f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (T>0). \quad (5.81)$$

В этой формуле интегрирование производится в отличие от формулы (5.76) не во всем интервале наблюдения за процессом $(0, t)$, а лишь начиная с момента времени $t - T$. Этот момент времени предшествует текущему моменту времени t и удален от него на время T . Необходимость введения понятия мгновенной спектральной характеристики связана с целесообразностью иметь спектральную характеристику, которая отражала бы не всю историю процесса $f(t)$ начиная с момента его возникновения, а учитывала бы лишь свойства этого процесса во временном интервале, непосредственно примыкающем к данному моменту наблюдения за процессом. Так как значение T может быть выбрано сколь угодно малым, то мгновенная спектральная характеристика позволяет выявить особенности процесса в данный момент времени t .

Найдем связь между спектральными характеристиками $F_t(j\omega)$ и $F_T(j\omega, t)$. Формулу (5.81) перепишем в виде

$$F_T(j\omega, t) = \int_0^t f(t)e^{-j\omega t} dt - \int_0^{t-T} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Правая часть этого равенства представляет собой разность двух текущих спектральных характеристик для функции $f(t)$. Обозначим эту разность через $\Delta F_t(j\omega)$, тогда

$$F_T(j\omega, t) = \Delta F_t(j\omega), \quad \text{или} \quad \frac{F_T(j\omega, t)}{T} = \frac{\Delta F_t(j\omega)}{T}.$$

Если выбрано значение T достаточно малым, то будет справедлива приближенная формула

$$F_T(j\omega, t) \approx T \frac{\partial F_t(j\omega)}{\partial t}. \quad (5.82)$$

5.4 Связь преобразований Фурье и Лапласа.

Формула (4.1) прямого преобразования Лапласа может рассматриваться как результат определенным образом построенного обобщения одностороннего преобразования Фурье. Пусть, например, функция $f(t)$ удов-

летворяет условиям Дирихле в интервале $0 \leq t < \infty$, причем $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Как известно, преобразование Фурье может быть применено к функциям $f(t)$, для которых интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ существует (условие абсолютной интегрируемости). Этому условию не удовлетворяют многие функции, используемые при анализе процессов в автоматических системах, например функции $1(t)$, $A \sin \omega t$, $A \cos \omega t$, $e^{\alpha t}$ (при действительном $\alpha > 0$), t и др. Для того чтобы иметь возможность подобную функцию $f(t)$ преобразовать по Фурье, предварительно ее надо умножить на множитель e^{-ct} , где вещественное число $c > c_0$ выбрано таким образом, чтобы интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt \quad (5.83)$$

был сходящимся. Значение c_0 для каждой функции $f(t)$ является вполне определенным. Используя формулу прямого одностороннего преобразования

Фурье $F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, будем преобразовывать по Фурье не функцию $f(t)$, а функцию $f(t) e^{-ct}$, удовлетворяющую условиям применения

этого преобразования:

$$F(c, j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt. \quad (5.84)$$

Введя новую комплексную переменную $s = c + j\omega$, получаем

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$. Это выражение представляет собой формулу (4.1) прямого преобразования Лапласа.

Таким образом, преобразование Лапласа является результатом расширения преобразования Фурье на функции, которые, удовлетворяя условиям Дирихле в интервале $0 \leq t < \infty$, не удовлетворяют в этом интервале условию абсолютной интегрируемости.

Функция $F(j\omega)$ частоты ω названа спектральной характеристикой функции $f(t)$. Аналогичным образом функция $F(s)$ комплексной перемен-

ной s является спектральной характеристикой убывающей функции времени $f(t)e^{-ct}$.

Рассмотрим теперь формулу обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega.$$

Заменив в левой и правой частях этого равенства $f(t)$ на $f(t)e^{-ct}$, получим

$$f(t)e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt \right) d\omega. \text{ Учитывая, что } s = c + j\omega,$$

$$d\omega = ds/j, \text{ найдем } f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \text{ Это равенство, как видно из}$$

(4.9), является формулой обратного преобразования Лапласа.

Таким образом, обратное преобразование Лапласа может рассматриваться как развитие обратного преобразования Фурье.

Представление функции в виде интеграла Фурье соответствует представлению функции в виде суммы бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами, причем частоты гармоник отличаются друг от друга бесконечно мало. Аналогично этому, представление функции $f(t)$ в виде интеграла (4.10) соответствует представлению этой функции в виде бесконечно большого числа бесконечно малых составляющих, являющихся колебаниями с бесконечно малыми амплитудами, затухающими по экспоненциальному закону.

Библиографический список

1. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексной переменной. М., «Наука», 1970.
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в примерах и задачах. М., «Высшая школа», 1971.
3. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. М., «Высшая школа», 1971.
4. Жевержеев В.Ф., Кольницкий Л.А. Специальный курс математики для ВТУЗов., М., «Высшая школа», 1970.

5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М., «Наука», 1970.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. «Наука», 1967.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, 1961.
8. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Комплексные числа и функции комплексного переменного.....	4
1.1 Комплексные числа и действия над ними.....	4
1.2. Последовательности комплексных чисел и функции комплексного переменного.....	10
1.3 Основные трансцендентные функции	16
2. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного.....	22
2.1 Производная	22
2.2 Гармонические функции	26
2.3 Интеграл от функции комплексного переменного.....	28
2.4 Теорема Коши.	32
2.5 Интегральная формула Коши	35
3. Теория вычетов.....	37
3.1 Изолированные особые точки	37
3.1 Основная теорема о вычетах	39
4. Операционное исчисление.....	41
4.1 Преобразование Лапласа.....	41
4.2 Свойства преобразования Лапласа.....	53
5. Преобразование Фурье.....	70
5.1 Свойства преобразования Фурье.....	70
5.2 Спектральные характеристики некоторых функций.....	88
5.3 Спектральные характеристики, зависящие от времени.....	100
5.4 Связь преобразований Фурье и Лапласа.....	105
Библиографический список.....	107