

Министерство образования и науки Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра конструирования и технологии радиоэлектронных средств

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИЙ И
ТЕХПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Методические указания к лабораторным работам

Составитель
Е.Н. Талицкий

Владимир 2006

ВВЕДЕНИЕ

Важной, часто главной, задачей при проектировании конструкций или технологических процессов производства РЭС является нахождение оптимальных параметров, при которых выходной параметр (точность детали, длина электрических соединений и т.д.) имел максимальное или минимальное, т.е. экстремальное, значение. Этот процесс получил название оптимизации. Известен ряд методов оптимизации – Гаусса-Зейделя, градиентные методы, Бокса-Уилсона, Симплексный и другие [1]. В одних случаях, как, например, при методе производных, требуется значение аналитического выражения для выходного параметра (целевой функции), в других, если отсутствует математическая модель, необходимо проводить экспериментальный поиск.

В качестве примера математических моделей можно привести модели в виде полиномов, полученные на основе проведения активного факторного эксперимента [2: с. 81-84].

Квадратичная модель

$$y = 23,98 + 0,48x_1 - 0,91x_2 - 1,75x_1x_2 + 2,73x_1^2 + 3,06x_2^2,$$

где y – вязкость пропиточного лака,

x_1 – температура пропитки изоляции,

x_2 – процентное содержание основы лака, позволяет найти такие величины x_1 и x_2 , при которых вязкость лака минимальна и обеспечивает наилучшую пропитку изоляции.

Другим примером может быть математическая модель технологического процесса травления печатных плат, полученная методом полного факторного эксперимента [4]:

$$y = 17,04 + 1,81x_1 - 2,09x_2 + 1,71x_3 - 0,338x_1x_2 - 0,563x_1x_3 + 0,288x_1x_2x_3,$$

где y – концентрация меди в растворе после регенерации,

x_1 – концентрация меди в растворе после травления,

x_2 – время охлаждения раствора,

x_3 – температура охлаждения раствора.

В работе [4] приведены математические модели и других технологических операций, полученные методом ПФЭ и представленные в виде полинома:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Поэтому в настоящих методических указаниях рассматриваются методы оптимизации для процессов, описываемых такими математическими моделями.

Выходной параметр y в теории оптимизации называется критерием оптимизации или целевой функцией. Если математическое ожидание критерия оптимизации y есть функция от вектора x входных управляемых переменных (факторов), т. е.

$$M(y) = f(\bar{x}) = f(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (1)$$

где n – число факторов, то задача оптимизации сводится к отысканию таких значений факторов

$$\bar{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*), \quad (2)$$

при которых целевая функция достигает экстремума (максимума или минимума). Будем исходить из задачи нахождения максимума. Если на объект воздействуют аддитивные помехи ε (рис.1) то зависимость (1) выражает не функциональную, а регрессионную зависимость, которая в $(n + 1)$ - мерном пространстве n факторов $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ и целевой функции y образует поверхность отклика.

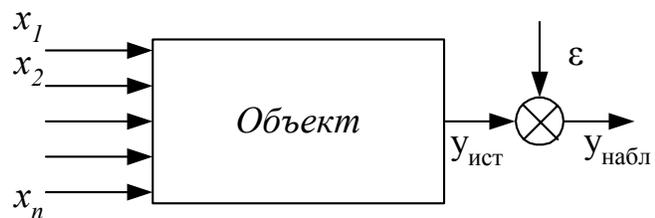


Рис. 1.

Для решения задачи оптимизации, т. е. для отыскания вектора (2), можно применить два принципиально различных подхода: 1) если известна или есть возможность найти n -факторную математическую модель для той части факторного пространства, где расположен экстремум функции отклика, то задачу оптимизации решают аналитическим или численным методом; 2) если математическое описание не получено по каким-либо причинам, то осуществляют экспериментальный поиск области оптимума.

Для решения задачи оптимизации, т. е. для отыскания вектора (2), можно применить два принципиально различных подхода: 1) если известна или есть возможность найти n -факторную математическую модель для той части факторного пространства, где расположен экстремум функции отклика, то задачу оптимизации решают аналитическим или численным методом; 2) если математическое описание не получено по каким-либо причинам, то осуществляют экспериментальный поиск области оптимума.

В первом случае используют известное из математического анализа свойство функций, имеющих экстремум: в точке экстремума (максимума или минимума) первая производная этой функции обращается в нуль. Если необходимо найти полную производную в n -факторном пространстве, то находят n частных производных по каждому из n факторов и получают систему из n уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{n-1}} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Решением системы (3) и является вектор (2). Назовем этот метод оптимизации **методом производных**. Однако во многих практических случаях аналитическая зависимость (1) неизвестна или ее нахождение представляет собой сложную задачу. Тогда, если имеется возможность одновременно наблюдать все n факторов и целевую функцию, задачу оптимизации проще решить с помощью второго подхода, т. е. с помощью экспериментального поиска. Для этого сначала осуществляют изучение характера поверхности отклика в районе первоначально выбранной точки факторного пространства (с помощью специально спланированных «пробных» опытов). Затем совершают «рабочее» движение в сторону экстремума, причем направление движения определяют по результатам пробных опытов. Такое движение может осуществляться путем ряда этапов, которые могут объединяться в «циклы» (последовательная процедура).

После выхода в район экстремума оптимальную точку можно уточнить одним из двух способов: 1) постановкой дополнительных, особым образом спланированных опытов; 2) получением математической модели второго или более высокого порядка и последующим решением системы уравнений (3). Второй из этих способов рассмотрен в работе [1]. В данной теме рассмотрено несколько основных методов поисковой оптимизации, они различаются способами постановки пробных опытов и определения направления движения к экстремуму, а также способами организации самого рабочего движения к экстремуму.

Задача надежного отыскания экстремума усложняется, если на объект воздействуют случайные помехи ε (рис.1). Здесь каждое j -е измеренное (наблюдавшееся) значение целевой функции $y_{j\text{набл}}$ оказывается суммой истинного ее значения $y_{j\text{ист}}$ и случайной помехи ε_j :

$$y_{j\text{набл}} = y_{j\text{ист}} + \varepsilon_j \quad (4)$$

Для повышения надежности результатов применяют специальные методы. Например, в каждой запланированной точке факторного пространства вы-

полняют по нескольку параллельных опытов. Кроме того, следует учитывать, что разные поисковые методы в равных условиях обладают различной помехоустойчивостью. Под помехоустойчивостью метода будем понимать его способность правильно оценивать направления рабочего движения, а также способность быстро и точно приводить рабочую точку в область экстремума, несмотря на наличие помех ε .

Если характеристики объекта изменяются, смещаются во времени (дрейф), то это создает дополнительные трудности и приходится создавать специальные планы эксперимента [1].

В условиях ограничений решение задачи поиска оптимума имеет ряд особенностей, которые рассмотрены также в [1].

Методические указания включают пять лабораторных работ и завершают цикл из трех методических указаний к лабораторным работам по дисциплине «Математические основы проектирования электронных средств». Предыдущие методические указания «Анализ точности электронных средств» и «Вероятностно-статистические методы при проектировании электронных средств» (составитель Е. Н. Талицкий) были изданы соответственно в 2002 и 2003 годах.

В основу настоящих методических указаний положен лабораторный практикум «Статистические методы в инженерных исследованиях» (тема 6) под редакцией Г. К. Круга [1]. Составителем внесены лишь небольшие изменения и дополнения, отражающие специфику специальности и специфику составления методических указаний принятых во Владимирском государственном университете. Во всех работах, ввиду ограниченности времени для проведения натурного эксперимента, он заменен вычислительным экспериментом.

Методические указания

Задание на подготовку к работе

1. Изучить метод оптимизации, используемый в лабораторной работе.
2. Подготовить таблицы для записи результатов.

Лабораторное задание

1. Получить у преподавателя исходные данные для расчета (значение коэффициентов полиномиальной модели; координаты начальной точки, интервал изменения параметров, точность определения экстремума и др.).

2. Определить оптимальные параметры и экстремум целевой функции методом производных.

3. Произвести движение к экстремуму при «ручном» расчете, отобразить это движение на контурном графике.

4. Повторить п. 3, используя компьютерную программу «ОПТИМ», MathCad или другие программы, при различных исходных данных (по указанию преподавателя).

5. Сравнить полученные результаты.

Содержание отчета

1. Цель и задачи работы.
2. Исходные данные.
3. Результаты «ручного» расчета.
4. Контурный график движения к экстремуму.
5. Результаты оптимизации с использованием компьютерной программы.
6. Сравнение результатов, выводы.

Лабораторная работа № 1.

МЕТОД ГАУССА-ЗАЙДЕЛЯ

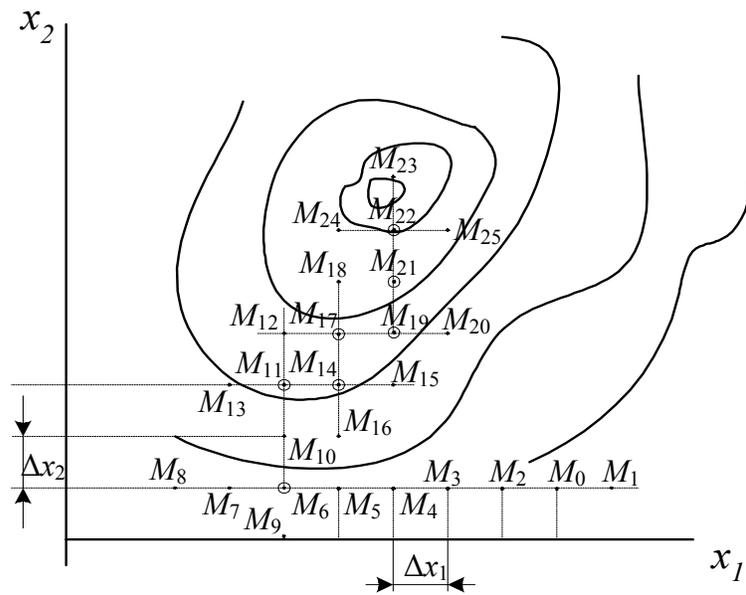
Теоретические сведения

Метод Гаусса — Зайделя предусматривает поочередное нахождение частных экстремумов целевой функции по каждому фактору x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). При этом на каждом i -м этапе стабилизируют $n - 1$ факторов и варьируют только один i -й фактор. Графическая интерпретация метода дана на рис. 1.1, где на плоскости двух факторов x_1, x_2 изображена функция отклика y топографическим способом с помощью замкнутых линий постоянного уровня этой оптимизируемой выходной функции. Эти линии на рис. 1.1 соответствуют некоторым относительным величинам, однако, как указывалось выше, форма функции отклика до начала исследования обычно неизвестна. Путь движения обозначен точками M . Задачу поиска максимума методом Гаусса-Зайделя решают в несколько этапов, объединенных в циклы. Рассмотрим процедуру метода с иллюстрацией двухфакторного примера.

1 этап. Выбирают основную (начальную, базовую) точку (на рис. 1.1 это точка M_0), обычно она соответствует номинальному режиму ведения технологического процесса $\bar{x}_0 = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$.

Иногда эту точку выбирают в центре области, которую желательно исследовать, либо в центре области ограничений, если они имеются. При таком выборе базовой точки все направления оказываются равноправными, а это важно в случае, когда заведомо ничего неизвестно о том, где, хотя бы примерно, расположен экстремум.

2. Выбирают интервал (ступень) варьирования Δx_1 (рис. 1.1) по фактору x_1 . Очевидно, что ступень варьирования не должна быть слишком малой,



иначе движение к экстремуму окажется замедленным. Кроме того, на интервале варьирования Δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) изменение целевой функции Δy должно быть существенно большим, чем погрешность ее измерения δy (не менее чем в 5-10 раз).

3. Определяют координаты пробных точек M_1 и M_2 :

$$\begin{aligned}\bar{x}(M_1) &= (x_{10} + \Delta x_1; x_{20}; \dots; x_{n0}) \\ \bar{x}(M_2) &= (x_{10} - \Delta x_1; x_{20}; \dots; x_{n0}).\end{aligned}\tag{1.1}$$

4. В точках M_1 и M_2 ставят пробные опыты (для повышения точности результатов могут выполняться параллельные опыты) измеряют отклики $y(M_1)$ и $y(M_2)$.

5. Сравнивают полученные отклики, и если

$$y(M_2) > y(M_1)\tag{1.2}$$

(как на рис. 1.1), то совершают рабочее движение на один рабочий шаг Δx_1 по направлению $\overline{M_0 M_2}$ в точку M_3 .

6. Аналогичные шаги продолжают в том же направлении до тех пор, пока на каком-то k -м шаге не окажется, что

$$y(M_k) < y(M_{k-1})\tag{1.3}$$

т.е. значение отклика в очередной, k -й рабочей точке станет уменьшаться, - это послужит признаком достижения частного экстремума. За частный экстремум принимают $(k - 1)$ -ю точку с откликом $y(M_{k-1})$. На рис. 1.1 это точка M_6 .

II этап. Его проводят в том же порядке, что и I этап, с той лишь разницей, что стабилизируют все факторы, кроме x_2 . За новую базовую точку принимают точку с координатами

$$\bar{x}(M_{k-1}) = (x_{10} \pm \Delta x_1 \cdot (k - 2); x_{20}; \dots; x_{n0}),\tag{1.4}$$

а x_2 варьируют на выбранную по аналогичным условиям величину интервала варьирования Δx_2 . По достижении частного экстремума по фактору x_2 точку нового частного экстремума принимают за новую базовую точку. На рис. 1.1 это точка M . Если начало движения из точки M_0 сразу совпало с возрастанием y , то в равенстве (1.4) вместо $k - 1$ берут $k - 2$.

Первый цикл продвижения к экстремуму заканчивается n -м этапом, на котором стабилизируют все факторы, кроме x . Для него выбирают ступень варьирования Δx_n и совершают пробное, а затем рабочее движение до достижения частного экстремума по фактору x_n . Если экстремум не достигнут, то выполняют второй цикл поиска.

Второй цикл, как и первый, начинается с I этапа, на котором варьируют фактор x_1 при стабилизации остальных x ($i \neq 1$), затем последовательно выполняют n этапов по каждому из n факторов.

Поисковое шаговое достижение к экстремуму заканчивают по достижении такой точки факторного пространства, при движении из которой в любую сторону по всем n факторным осям x_i , в положительном или отрицательном направлениях значения отклика оказываются меньшими. Такую точку принимают за экстремум (максимум).

Достоинства метода Гаусса-Зайделя: 1) очевидная простота стратегии и наглядность; 2) высокая помехозащищенность в смысле выбора направления движения.

Недостатки: 1) путь к главному экстремуму оказывается обычно долгим, особенно при большом числе n факторов; 2) в условиях крупного промышленного производства оказывается трудным заставить $n - 1$ фактор на длительное время; 3) если поверхность отклика имеет сложную форму (узкие гребни, овраг и т. п.), то использование метода может привести к ложному ответу на вопрос о месте расположения экстремума; 4) метод не дает информации о взаимодействиях факторов.

Исторически метод Гаусса-Зайделя известен как первый из рассматриваемых. В настоящее время он иногда применяется при машинном эксперименте.

Лабораторная работа № 2

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Теоретические сведения

Градиентные методы имеют несколько разновидностей, различающихся правилами выбора ступеней варьирования и рабочих шагов на каждом этапе движения к экстремуму. Сущность стратегии всех этих разновидностей состоит в том, что на каждом этапе вокруг очередной базовой точки организуют пробные эксперименты, по результатам которых оценивают новое направление градиента, после чего в этом направлении совершают один рабочий шаг. Напомним, что вектор-градиент в n -факторном пространстве определяется соотношением

$$\text{grad } y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \bar{x}_1^0 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \bar{x}_2^0 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \bar{x}_n^0, \quad (2.1)$$

где \bar{x}_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$) - единичные направляющие векторы (орты, расположенные вдоль факторных осей); $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ - частная производная целевой функции по i -му фактору. Пробные опыты (по два в точках, расположенных на прямых, параллельных каждой факторной оси и проходящих через базовую точку) проводят с целью получить приближенные оценки частных производных. Рассмотрим две разновидности градиентных методов.

Метод градиента (обычный) осуществляется по следующей процедуре.

1. Выбирают начальную (базовую) точку $\bar{x}_0 = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$ по правилам, изложенным в л.р.№1. На рис. 2.1 это точка L_0 .

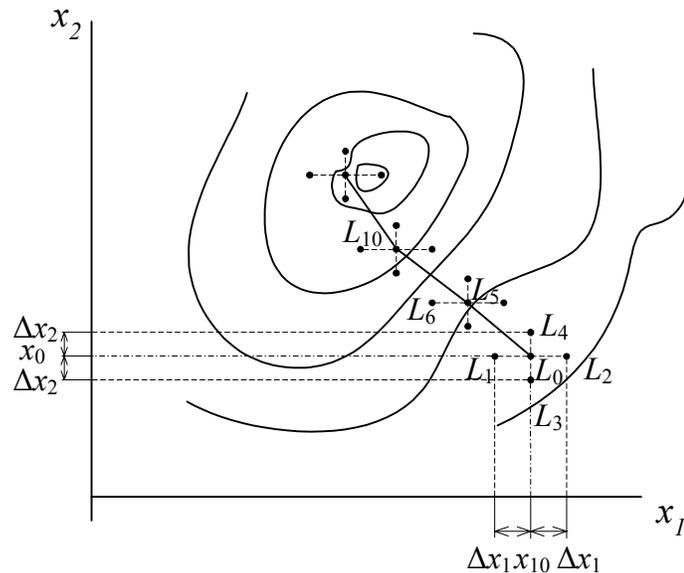


Рис. 2.1

2. Выбирают интервал варьирования Δx_i по каждому из факторов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), пользуясь уже известными правилами.

3. Определяют координаты пробных точек (рис. 2.1). Например, вдоль направления, параллельного факторной оси x_1 , ими являются точки L_1, L_2 с координатами

$$\begin{aligned}\bar{x}(L_1) &= (x_{10} - \Delta x_1; x_{20}; \dots; x_{n0}) \\ \bar{x}(L_2) &= (x_{10} + \Delta x_2; x_{20}; \dots; x_{n0})\end{aligned}\tag{2.2}$$

т. е. варьируют один фактор x_1 при стабилизации остальных факторов на базовом уровне. Аналогично вычисляют координаты пробных точек вдоль направлений, параллельных остальным факторным осям x_2, x_3, \dots, x_n . В пробных точках ставят опыты и получают значения целевой функции y .

4. По результатам пробных опытов вычисляют оценки составляющих вектор-градиента в точке L_0 для каждого i -го фактора:

$$\text{grad } y(L_0)|_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta y|_{x_i}}{2\Delta x_i} = \hat{a}_i,\tag{2.3}$$

В частности, для фактора x_1 по результатам опытов в точках L_1 и L_2 вычисление выполняют по формуле:

$$\text{grad } y(L_0)|_{x_1} \approx \frac{\Delta y|_{x_1}}{2\Delta x_1} = \frac{y(L_2) - y(L_1)}{x_1(L_2) - x_1(L_1)} = \hat{a}_1.\tag{2.4}$$

Как известно, частные производные являются коэффициентами a_i ($i = 1, 2, \dots, n; i \neq 0$) уравнения плоскости, касательной к поверхности отклика в точке L_0 :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\tag{2.5}$$

Оценки \hat{a}_i коэффициентов получают по формуле (2.4).

5. Находят координаты рабочей точки на направлении градиента. Для этого выбирают параметр рабочего шага $\rho_{\text{гр}}$ и вычисляют координаты первой рабочей точки по всем факторным осям x_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$x_{i1} = x_{i0} + \rho_{\text{гр}}\hat{a}_{i0}.\tag{2.6}$$

На рис. 2.1 первой рабочей точкой является точка L_5 . Чтобы из основной точки L_0 попасть в точку L_5 , от L_0 откладывают в масштабе отрезки, равные $\rho_{\text{гр}}\hat{a}_1$ и $\rho_{\text{гр}}\hat{a}_2$, причем если $\hat{a}_i < 0$, то по соответствующему фактору отрезок откладывают в отрицательном направлении от точки L_0 , т.е. для фактора x_1 - влево от точки L_0 , а для фактора x_2 — вниз от точки L_0 . Если $\hat{a}_i > 0$, то отрезки $\rho_{\text{гр}}\hat{a}_i$ откладывают в положительном направлении от основной точки.

6. Первую рабочую точку принимают за новую базовую точку и вокруг нее организуют новые пробные опыты для оценивания нового направления градиента, после чего совершают новый рабочий шаг (на рис. 2.1 - в точку L_{10}). В общем случае в каждой k -й рабочей точке по результатам пробных опытов вокруг нее получают оценки составляющих градиента \hat{a}_i и совершают $(k + 1)$ -й рабочий шаг ($k = 1, 2, \dots$) в точку с координатами

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \rho_{\text{гр}} \hat{a}_{ik}. \quad (2.7)$$

7. Рабочее движение производят до тех пор, пока на очередном шаге все составляющие градиента не станут пренебрежимо малыми, т. е. все $\hat{a}_{i,k+1} \approx 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho_{\text{гр}} \hat{a}_{i,k+1} < 1. \quad (2.8)$$

Если по результатам пробных опытов в $(k + 1)$ -й рабочей точке выполняется условие (2.8), то движение к экстремуму прекращают и эту рабочую точку принимают за точку экстремума.

Достоинства метода градиента: 1) достаточная простота стратегии; 2) повышенная по сравнению с методом Гаусса-Зайделя скорость движения к экстремуму (эффективность).

Недостатки: 1) большая чуткость к помехам ε в отношении выбора направления рабочего движения; 2) в случаях, когда поверхность отклика имеет сложную форму, метод градиента может не привести к истинному экстремуму; 3) если поверхность отклика достаточно пологая, то в условиях помех метод мало эффективен в смысле точности выхода к экстремуму; 4) как и метод Гаусса-Зайделя, метод градиента не дает информации о взаимодействиях факторов (взаимодействия характеризуют степень кривизны поверхности отклика).

Метод Кифера-Вольфовица отличается от описанного выше обычного метода градиента тем, что если в первом из них размеры интервалов варьирования Δx_i при постановке пробных опытов и параметр $\rho_{\text{гр}}$ рабочего шага остаются неизменными на любом рабочем шаге, то в рассматриваемом методе Δx_{ik} и $\rho_{\text{гр}k}$ выбирают в зависимости от номера k рабочего шага:

$$\Delta x_{ik} = \frac{\Delta x_{i0}}{k^\gamma}, \quad \rho_{\text{гр}k} = \frac{\rho_{\text{гр}0}}{k}, \quad (2.9)$$

где Δx_{i0} - начальный интервал варьирования в основной точке L_0 ; $\rho_{\text{гр}0}$ — начальное значение параметра рабочего шага; k - номер рабочего шага ($k = 1, 2, \dots$); γ - постоянная степень, обычно выбираемая в пределах $0 < \gamma < 0,5$. Чаше всего полагают $\gamma = 0,25$.

Если в методе градиента фактический размер k -го рабочего шага уменьшается только из-за уменьшения градиента, т. е. крутизны наклона по-

верхности отклика, при приближении к области экстремума, то в методе Кифера-Вольфовица фактический размер рабочего шага уменьшается, как мы видели, и в прямой зависимости от номера этого шага.

Достоинством метода Кифера-Вольфовица по сравнению с немодифицированным методом является его повышенная точность отыскания экстремальной точки, если поверхность отклика достаточно крутая, а экстремум находится от базовой точки не слишком далеко. *Недостатком* этого метода является его низкая эффективность в условиях пологих поверхностей отклика. При очень пологих поверхностях отклика метод Кифера-Вольфовица вообще не приводит к цели: рабочие шаги становятся сравнимыми с погрешностями измерения до достижения экстремума. Остальные достоинства и недостатки, а также вся процедура работы такие же, как и в методе градиента.

Лабораторная работа № 3

МЕТОД КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ (МЕТОД БОКСА-УИЛСОНА)

Теоретические сведения

Метод крутого восхождения предложен Дж. Боксом и К. Уилсоном как синтез лучших черт градиентных методов и метода Гаусса-Зайделя, причем пробные опыты для выяснения направления движения также выполняют по-особому - методом ПФЭ (илиДФЭ).

От градиентных методов здесь воспринято выполнение рабочего движения вдоль вектор-градиента, определенного в районе исходной (базовой) точки, а от метода Гаусса-Зайделя взят принцип продвижения не на один рабочий шаг (как в методе градиента), а до достижения частного экстремума функции отклика на направлении градиента, без его корректировки на каждом рабочем шаге. Проведение пробных опытов методом ПФЭ (илиДФЭ)

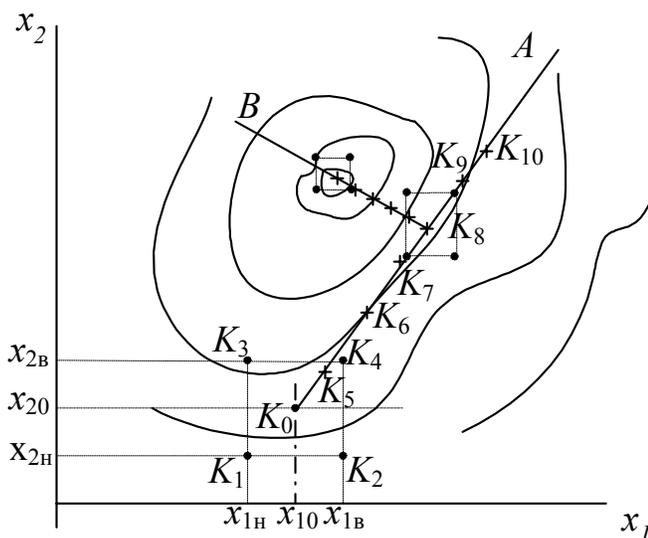


Рис. 3.1

позволяет более точно оценивать направление градиента, чем при традиционном методе градиента. Действительно, из сравнения рис. 2.1 и рис. 3.1 и исходя из расчетной формулы для оценок \hat{a}_i коэффициентов в методе градиента и в методе крутого восхождения можно заключить, что при числе факторов $n = 2$ количество точек для пробных опытов в обоих методах равно 4, т. е. одинаково. Но если каждую оценку \hat{a}_i в методе градиента получают по результатам опытов лишь в двух пробных точках (при любом числе n факторов), то в методе крутого восхождения — по результатам опытов во всех четырех пробных точках (в общем случае — во всех 2^n или 2^{n-p} пробных точках). Проведение пробных опытов методом ПФЭ (илиДФЭ) позволяет также получать информацию о взаимодействиях факторов и достаточно просто осуществлять статистическую проверку результатов расчетов.

На первом цикле метода крутого восхождения используется следующая процедура:

1. Выбирают основную (начальную, нулевую) точку K_0 (рис. 3.1). Правила ее выбора прежние.

2. Выбирают интервал варьирования Δx_i для каждого фактора x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Правила выбора Δx_i - изложены выше.

3. Определяют координаты пробных точек для нижнего и верхнего уровней варьирования факторов x_i по правилам ПФЭ

$$x_{iН} = x_{i0} - \Delta x_i, \quad x_{iВ} = x_{i0} + \Delta x_i \quad (3.1)$$

и составляют ортогональную матрицу планирования ПФЭ или ДФЭ, для чего факторы нормируют по формуле

$$z_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i. \quad (3.2)$$

Затем выбирают число m серий параллельных опытов, порядок проведения опытов в сериях рандомизируют с помощью таблицы случайных чисел (см. Приложение П2) и в этом порядке выполняют наблюдения отклика в точках ПФЭ и ДФЭ (на рис. 4.1 это K_1, K_2, K_4, K_4).

4. По результатам ПФЭ (или ДФЭ) вычисляют оценки коэффициентов нормированного уравнения регрессии первого порядка

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 z_1 + \hat{a}_2 z_2 + \dots + \hat{a}_n z_n. \quad (3.3)$$

Например, если уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

то, изменяя матрицу ПФЭ 2^2 (табл. 3.1), получим

$$\hat{a}_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad (3.4)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}, \quad (3.5)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4}. \quad (3.6)$$

Матрица ПФЭ 2^2

Таблица 3.1

| N | x_1 | x_2 | Y |
|-----|-------|-------|-------|
| 1 | + | + | y_1 |
| 2 | + | - | y_2 |
| 3 | - | + | y_3 |
| 4 | - | - | y_4 |

Затем производят статистическую проверку значимости коэффициентов \hat{a}_i , для чего нужно рассчитать их критическое значение:

$$\hat{a}_{кр} = t_{кр} s\{\hat{a}_i\}, \quad (3.7)$$

где $t_{кр} = t_{табл} \{v_{зн}; q\}$, выбираемое из таблицы (Приложение П1) при числе степеней свободы $v_{зн} = N(m - 1)$ и принятом уровне значимости q .

5. Вычисляют расчетные i -е составляющие рабочих шагов в реальном масштабе:

$$\lambda_i = \hat{a}_i \Delta x_i. \quad (3.8)$$

Максимальное по модулю из всех $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ принимают за базовое $\lambda_{баз}$.

6. Получают практические (округленные) i -е составляющие рабочих шагов $\lambda_{iокр}^0$ для продвижения вдоль направления градиента (на рис. 3.1 это луч K_0A), для чего округляют (или изменяют) $\lambda_{баз}$ до удобного $\lambda_{баз.окр}$ и пропорционально этому округляют (или изменяют) остальные λ_i до $\lambda_{iокр} (i = 1, 2, \dots, n)$. Округление λ_i производят по формуле

$$\lambda_{iокр} = (\lambda_{баз.окр} / \lambda_{баз}) \lambda_i \quad (3.9)$$

до удобного значения либо с учетом погрешностей измерения по каждому фактору x_i . Знаки $\lambda_{iокр}$ должны соответствовать знакам оценок \hat{a}_i коэффициентов. Если отыскивается минимум, то знаки $\lambda_{iокр}$ должны быть противоположны знакам \hat{a}_i .

7. Вычисляют координаты k -х рабочих точек ($k = 1, 2, \dots$) на направлении градиента (на рис. 3.1 это точки $K_5 - K_{10}$) в реальном масштабе:

$$x_{ik} = x_{i0} + k\lambda_{iокр}; \quad (3.10)$$

в них последовательно выполняют мысленные и проверочные (реальные) опыты. Размер λ_i обычно выбирают так, чтобы первая рабочая точка ($k = 1$) не выходила за границы области ПФЭ.

Мысленные опыты заключаются в получении предсказанных (расчетных) значений отклик \hat{y} по полученному линейному уравнению (3.3). Они позволяют: 1) сокращать объем реальных опытов, т. е. увеличивать скорость продвижения к экстремуму; 2) иметь представление, насколько хорошо уравнение (3) аппроксимирует реальную поверхность

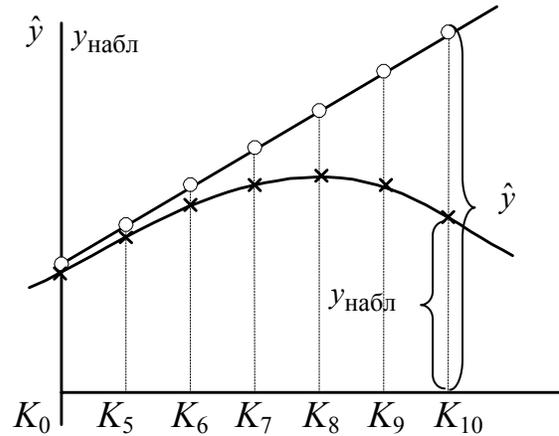


Рис. 3.2

отклика (рис. 3.2), т. е. насколько расчетные значения \hat{y}_k отличаются от результатов наблюдавшихся значений $y_k_{набл}$ в реальных опытах; 3) оценивать правильность выбора размера составляющих практического рабочего шага ($\lambda_{iокр}$):

если за число шагов $k = 3$ достигается и превышает максимально возможное расчетное значение целевой функции (определяемое из физических свойств и ограничений, существующих для объекта), то $\lambda_{i \text{ окр}}$ нужно уменьшить; если же число k слишком большое, то $\lambda_{i \text{ окр}}$ следует увеличить либо реже ставить реальные опыты.

Реальные (проверочные) опыты в начале движения из базовой точки вдоль направления градиента ставят через 2 - 4 мысленных опыта, а при уменьшении приращений наблюдавшихся значений отклика $y_{\text{набл}}$ в каждом последующем реализованном опыте по сравнению с предыдущим в рабочих точках проверочные опыты ставят чаще, вблизи же частного экстремума выполняют на каждом шаге. Рабочее движение продолжают, пока не будет достигнут частный экстремум на направлении градиента (на рис. 3.1 это точка K_8). Признаком достижения частного экстремума является уменьшение отклика в последующих проверочных опытах.

8. Точку частного экстремума на первоначальном направлении градиента (на рис. 3.1 это точка K_8 на луче K_0A) принимают за новую нулевую точку и организуют второй цикл крутого восхождения. Порядок работы на втором цикле тот же, что и на первом. Различие состоит в том, что интервалы варьирования при постановке пробных опытов (ПФЭ) и размер рабочих шагов в связи с приближением к экстремуму и увеличением кривизны поверхности отклика обычно выбирают меньшими, чем на первом цикле. В случае необходимости выполняют *третий цикл* крутого восхождения.

9. Поисковое рабочее движение прекращают по достижении области экстремума. Признаком достижения экстремума является статистическая незначимость оценок \hat{a}_i коэффициентов при членах первого порядка, вычисленных по результатам ПФЭ (ДФЭ) вокруг очередной нулевой точки.

Достоинства метода крутого восхождения: 1) высокая помехозащищенность (помехоустойчивость) в смысле точности оценивания составляющих градиента: если в градиентных методах каждая составляющая \mathcal{E}_i оценивается лишь по двум точкам факторного пространства, то в ПФЭ, который в методе крутого восхождения используется для этой цели, каждый коэффициент \mathcal{E}_i , оценивается по всем $N = 2^n$ точкам; 2) высокая эффективность в смысле скорости движения к экстремуму; по сравнению с методом Гаусса-Зайделя она выше за счет продвижения по градиенту, а по сравнению с градиентными - за счет исключения пробных опытов на каждом рабочем шаге и за счет мысленных опытов; 3) пробные опыты, выполняемые методом ПФЭ, позволяют получать информацию об оценках \hat{a}_{i_i} коэффициентов при взаимодействиях факторов $z_i \cdot z_l$, характеризующих кривизну поверхностного отклика:

увеличение \hat{a}_{ii} при уменьшении \hat{a}_i обычно характеризует приближение к экстремуму; 4) ПФЭ с применением параллельных опытов позволяет достаточно просто осуществлять надежную статистическую интерпретацию результатов; 5) метод наиболее эффективен из всех известных при пологих поверхностях отклика.

Недостатком рассмотренного метода является несколько большая, чем в предыдущих методах, сложность планирования пробных опытов, требующая одновременного варьирования сразу всех факторов относительно базовой точки, и меньшая оперативность по сравнению с симплексным методом (см. ниже) в условиях дрейфующих объектов.

Лабораторная работа № 4

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Теоретические сведения

Симплексом называют выпуклую фигуру (или тело), образованную $n + 1$ вершинами в пространстве n факторов, причем эти $n + 1$ вершин не принадлежат одновременно ни одному из подпространств из $n - 1$ факторов. В пространстве одного фактора ($n = 1$) симплексом служит отрезок установленного размера, при $n = 2$ — треугольник, при $n = 3$ — тетраэдр. При $n \geq 4$ привычным образом интерпретировать симплекс невозможно.

Симплексный метод позволяет совмещать пробные опыты для определения направления движения с рабочим движением по поверхности отклика к области оптимума. Основная идея симплексного метода состоит в следующем. Если во всех $n + 1$ вершинах симплекса поставить опыты и измерить отклик, то (при не слишком большом уровне шумов) по величине отклика в вершинах можно судить, в каком направлении следует двигаться, чтобы приблизиться к экстремуму.

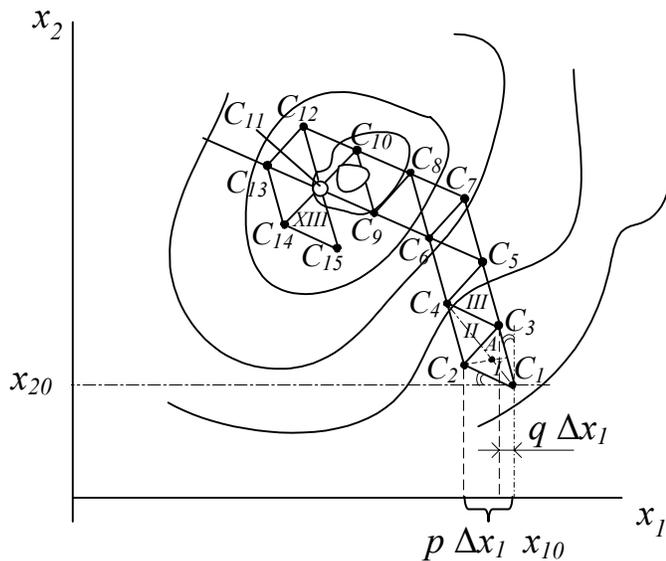


Рис. 4.1

Рассмотрим это на примере двухфакторного пространства (рис. 4.1). Допустим, что на основе некоторых соображений (о них говорится ниже) построен начальный симплекс I с вершинами C_1, C_2, C_3 и в них измерен отклик y . Если уровень шума не слишком велик, то, очевидно, отклик в точке C_1 является наименьшим по сравнению с откликами в вершинах C_2 и C_3 . Тогда можно полагать, что максимум лежит приблизительно в направлении луча, проведенного из вершины C_1 через центр A симплекса. В соответствии с этим предположением при применении симплексного метода продвижение к экстремуму совершается путем зеркального отражения вершины с минимальным значением отклика через противолежащую сторону (или грань) симплекса.

Таким образом, новый симплекс II образуется путем постановки опыта всего лишь в одной новой точке C_4 (рис. 4.1). После получения наблюдаемого значения отклика в точке C_4 снова сравнивают величины откликов в вершинах симплекса II , выбирают новую вершину с минимальным откликом и вновь отражают ее относительно противоположащей стороны, образуют симплекс III и т. д., пока симплекс не совершит полный оборот относительно одной из вершин. Путь движения к максимуму показан на рис. 4.1.

Порядок работы при использовании симплексного метода состоит в следующем:

1. По уже известным правилам выбирают начальную точку C_1 а также интервалы варьирования Δx_i для всех факторов ($i = 1, 2, \dots, n$).

2. Выбирают безразмерную величину $\rho_{\text{сим}}$ стороны (или ребра) симплекса в относительных единицах по отношению к интервалам варьирования Δx_i наиболее просто выбрать $\rho_{\text{сим}} = 1$. Стремятся, чтобы в безразмерных единицах стороны симплекса были равны (регулярный симплекс).

3. Вычисляют координаты остальных вершин начального симплекса. Обычно для этого используют следующее правило. Через начальную точку C_1 проводят осевые линии, параллельные координатным осям, и выбирают квадрант, в котором, по предположениям, должен располагаться экстремум целевой функции. В начальную точку помещают вершину симплекса C_1 а сам симплекс I располагают так, чтобы его стороны образовали с осевыми линиями равные углы, отмеченные на рис. 4.1 двойными дужками. При таком расположении начального симплекса координаты его вершин определяют с помощью матрицы (табл. 1), в которой даны координаты вершин $(n + 1)$ -мерного симплекса в n -факторном пространстве.

Безразмерные относительные величины p и q при таком расположении симплекса определяют по формулам

$$p = \frac{1}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1), \quad q = \frac{1}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1). \quad (4.1)$$

На рис. 4.1 показаны размеры $p\Delta x_i$ и $q\Delta x_i$ для случая $\rho_{\text{сим}} = 1$. Если принимают $\rho_{\text{сим}} \neq 1$, то Δx_i умножают еще на $\rho_{\text{сим}}$. Знаки Δx_i зависят от номера квадранта, в котором расположен начальный симплекс. Для $n = 2$ имеем $p \approx 0,966$, $q \approx 0,259$.

Таблица 4.1

| Факторы x_i | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_i | ... | x_n |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----|----------------------|-----|----------------------|
| Вершина C_1 | x_{10} | x_{20} | x_{30} | ... | x_{i0} | ... | x_{n0} |
| » C_2 | $x_{10}+p\Delta x_1$ | $x_{10}+q\Delta x_2$ | $x_{10}+q\Delta x_3$ | ... | $x_{i0}+q\Delta x_i$ | ... | $x_{n0}+q\Delta x_n$ |
| » C_3 | $x_{10}+q\Delta x_1$ | $x_{10}+p\Delta x_2$ | $x_{10}+q\Delta x_3$ | ... | $x_{i0}+q\Delta x_i$ | ... | $x_{n0}+q\Delta x_n$ |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| Вершина C_{i+1} | $x_{10}+q\Delta x_1$ | $x_{10}+q\Delta x_2$ | $x_{10}+q\Delta x_3$ | ... | $x_{i0}+q\Delta x_i$ | ... | $x_{n0}+q\Delta x_n$ |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| . | . | . | . | ... | . | ... | . |
| Вершина C_{n+1} | $x_{10}+q\Delta x_1$ | $x_{10}+q\Delta x_2$ | $x_{10}+q\Delta x_3$ | ... | $x_{i0}+q\Delta x_i$ | ... | $x_{n0}+q\Delta x_n$ |

4. В вершинах симплекса выполняют наблюдения отклика и сравнивают по величине; выбирают вершину с минимальным откликом и отражают ее относительно противолежащей стороны или грани; находят вершину следующего симплекса II , n вершин которого одновременно являются и вершинами предыдущего симплекса I . Координаты отраженной вершины вычисляют по формуле

$$x_{il,k+1} = \frac{2}{n}(x_{i1k} + x_{i2k}) \pm x_{ilk}, \quad (4.2)$$

где i - номер фактора ($i = 1, 2, \dots, n$); l - номер вершины k -го симплекса, где обнаружен минимальный отклик; $k + 1$ - номер последующего симплекса, содержащего отраженную вершину (ей условно присваивают тот же номер l); n - число факторов.

Если минимальный отклик оказался сразу в двух вершинах, то вопрос, какую из них отражать, решают произвольно, например, с помощью подбрасывания монеты.

5. Ставят эксперимент в отраженной вершине нового симплекса и отклик в ней сравнивают с откликами в остальных n вершинах, а затем снова выбирают вершину с минимальным откликом и отражают ее через противолежащую сторону (или грань) симплекса. Если в новой вершине $(k + 1)$ -го симплекса отклик оказался опять минимальным, то возвращаются к k -му симплексу и отражают вторую по минимальности вершину. Если это явление повторяется, то отражают третью по минимальности вершину и т. д.

6. Эксперимент продолжают до тех пор, пока симплекс не совершит полный оборот вокруг одной из вершин. На рис. 4.1 это вершина C_{11} . Оче-

видно, что точность нахождения точки экстремума зависит от двух причин: размера симплекса и влияния помех. Для уточнения положения экстремальной точки статического объекта в последних симплексах рекомендуется ставить параллельные опыты, чтобы снизить влияние помех, а также выполнить опыт в середине того симплекса, в вершинах которого отклик оказался максимальным по сравнению с остальными симплексами.

Достоинства симплексного метода: 1) достаточно высокая помехоустойчивость в смысле выбора направления движения к экстремуму; 2) изучение поверхности отклика сочетается с одновременным рабочим движением к экстремуму; 3) при оптимально выбранном размере симплекса обеспечивается высокая скорость выхода к области экстремума; 4) высокая оперативность, позволяющая рекомендовать симплексный метод особенно для непрерывной оптимизации объектов с дрейфующим экстремумом.

Недостатки: 1) относительно высокая сложность вычисления координат вершин симплекса, однако при наличии ЭЦВМ этот недостаток легко преодолевается; 2) метод не позволяет непосредственно получать математическое описание изучаемого участка поверхности отклика, как, например, в методе Бокса-Уилсона; 3) в условиях пологих поверхностей отклика симплексный метод дает менее точное решение, чем метод крутого восхождения.

Лабораторная работа № 5

МЕТОД СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Теоретические сведения

Основная идея метода случайного поиска заключается в том, что точку каждого пробного опыта для изучения поверхности отклика в районе базовой (начальной) точки выбирают случайным образом (отсюда и название метода). Несмотря на произвольность выбора пробной точки, алгоритм случайного поиска позволяет последовательно приближаться к экстремальной области. Опыты производят в исходной (начальной) точке и в случайно выбранной пробной точке, измерения отклика в них сравнивают и, если ищется максимум, совершают рабочий шаг в направлении возрастания целевой функции. Новую рабочую точку принимают за новую начальную и снова выбирают пробную точку случайным образом. Обычно длина рабочего шага превышает интервал варьирования между нулевой и пробной точкой. Иллюстрация метода дана на рис. 5.1.

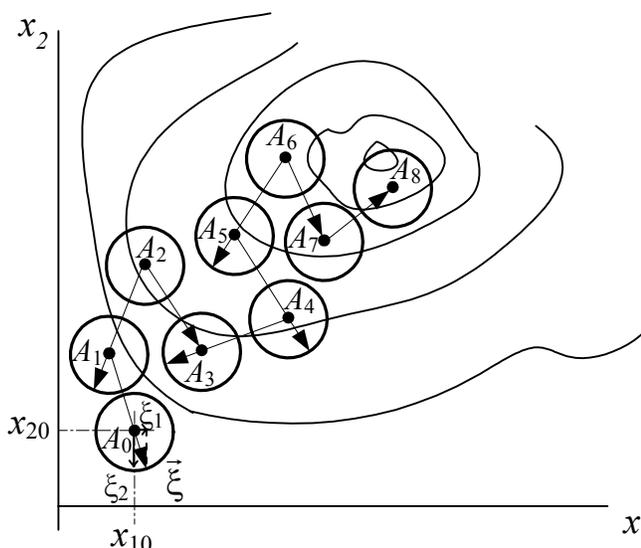


Рис. 5.1

Порядок работы при использовании метода случайного поиска состоит в следующем:

1. Выбирают начальную точку, и размер случайного вектора E такого, что $|\xi| = \rho_{\text{сл.п.}}$. Так как $\rho_{\text{сл.п.}}$ должен быть безразмерной величиной, то сначала переходят к нормированному факторному пространству, причем за нормированные единицы варьирования принимают некоторые условные интервалы варьирования Δx_i по каждому фактору x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). За такие условные интервалы варьирования могут быть приняты, например, абсолютные погрешности измерения δx_i по каждому i -му фактору или более крупные отрезки.

2. Определяют все n составляющих случайного вектора $\vec{\xi}$, началом которого служит нулевая точка (на рис. 5.1 точка A_0), а конец вектора $\vec{\xi}$ равномерно распределен по окружности (или сфере) с радиусом $\rho_{\text{сл.п}}$ и центром в нулевой точке. Для этого используют таблицу равномерно распределенных случайных чисел (приложение П2). Пусть, например, принято $\rho_{\text{сл.п}} = 15$. В таблице случайных чисел случайным образом выбирают начало отсчета и находят первое попавшееся число из интервала $(0,15)$, скажем 5 (оно находится в 6-м столбце и 9-й строке). Это и есть первая составляющая вектора $\vec{\xi}$, т.е. ξ_1 . Знак перед ξ_1 устанавливают также с помощью таблицы случайных чисел. Если перед числом 5 в столбце стоит число четное (в данном случае это 02), то перед ξ_1 ставят плюс, т. е. $\xi_1 = +5$. Если бы перед числом 5 было нечетное число, то перед ξ_1 стоял бы минус.

В том случае, когда число факторов $n = 2$, вторая составляющая оценивается однозначно по теореме Пифагора:

$$\xi_2 = \pm \sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2}. \quad (5.1)$$

Знак перед ξ_2 устанавливают также по таблице случайных чисел: если после числа 5 в столбце стоит нечетное число (в данном случае это 03), то ставят минус, т.е. $\xi_2 = \sqrt{15^2 - 5^2} = -14$. Если бы после числа 5 было четное число, то перед ξ_2 стоял бы плюс.

Пусть в общем случае имеется n факторов; тогда после выбора ξ_1 продолжают выбирать из той же таблицы $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}$, используя условие

$$|\xi_{k+1}| \leq \sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_k^2}$$

(где $k = 1, 2, \dots, n - 2$) и устанавливая их знаки по предыдущему случайному числу. Последнюю составляющую ξ_n определяют однозначно по теореме Пифагора:

$$\xi_n = \pm \sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_{n-1}^2}; \quad (5.2)$$

знак ξ_n устанавливают по числу, следующему в таблице за ξ_{n-1} . Составляющую ξ_i откладывают от начальной точки A_0 (в соответствии с присвоенным ей знаком) в отрицательном или положительном направлении от начальной точки параллельно своей факторной оси x_i . В данном примере $\xi_1 = +5$, $\xi_2 = -14$, поэтому на рис. 6 составляющая ξ_1 отложена вправо, а ξ_2 - вниз.

3. В начальной точке A_0 и в точке, служащей концом вектора $\vec{\xi}$, выполняют пробные опыты, полученные значения отклика сравнивают. Если отклик в исходной точке меньше, чем в конце вектора $\vec{\xi}$, то совершают рабочий шаг по направлению этого вектора, а если, наоборот, в начальной точке A_n

отклик больше, чем в конце вектора $\vec{\xi}$, то рабочий шаг делают в противоположном направлении. Размер рабочего шага $a_{\text{сл.п}}$ обычно выбирают из условия

$$a_{\text{сл.п}} \geq \rho_{\text{сл.п}}. \quad (5.3)$$

В данном примере рабочий шаг совершен в точку A_1 (рис. 5.1).

4. Точку A_1 принимают за новую начальную точку и снова определяют составляющие нового случайного вектора (по уже описанной процедуре).

5. Если после k -го рабочего шага пробные опыты в очередной базовой точке и в конце пробного вектора $\vec{\xi}_k$, дадут равные значения отклика, то направление рабочего шага выбирают случайно - вдоль или против направления вектора $\vec{\xi}_k$. Если на k -м шаге отклики в новой базовой точке и в пробной точке конца вектора $\vec{\xi}$ меньше, чем отклик в старой базовой точке на $(k - 1)$ -м шаге, то возвращаются в $(k - 1)$ -ю начальную точку и выбирают другое случайное направление вектора $\vec{\xi}_{k-1}$.

6. Критерием выхода к экстремуму является тот факт, что во все стороны от очередной базовой точки, т. е. в любой точке окружности или сферы с центром в этой базовой точке, отклик оказывается меньшим, чем в достигнутой базовой точке. В этом случае случайные пробные точки следует дополнить *регулярно выбранными*, чтобы окружность или сфера оказалась достаточно хорошо обследованной. В случае необходимости и при наличии возможности для этого ставят параллельные опыты.

Достоинства метода случайного поиска: 1) выбор случайного вектора $\vec{\xi}$ для выполнения пробного опыта не зависит от случайных помех ε и формы поверхности отклика; 2) простота алгоритма, позволяющая легко реализовать его в машинном эксперименте; 3) возможность простого введения в алгоритм поиска операции самообучения, которая существенно повышает эффективность метода; 4) метод особенно эффективен для оптимизации многофакторных объектов в условиях большого числа ограничений, что особенно важно при проектировании новых объектов; 5) с ростом числа n факторов эффективность метода возрастает.

Недостатки: 1) в общем случае направление рабочих шагов не является оптимальным; 2) при отсутствии программ самообучения метод существенно менее эффективен, чем методы крутой восхождения и симплексный; 3) малая эффективность в условиях пологих поверхностей отклика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Относительно рассмотренных выше методов поиска экстремума можно сделать несколько общих замечаний.

1. На точность выхода в область экстремума влияют помехи ϵ , поэтому при приближении к экстремуму в случае статистического объекта рекомендуется выполнять параллельные опыты в намеченных точках факторного пространства (пробных и рабочих), что позволит точнее выделить приращения отклика в условиях помех, т. е. повысить точность нахождения экстремума.

2. Эффективность каждого из рассмотренных методов зависит от конкретных условий, в частности от формы поверхности отклика: плавности (узкие гребни, овраги и т. д.). Искусство инженера-исследователя состоит в том, чтобы правильно подобрать метод поиска, наиболее подходящий для конкретных условий (форма поверхности отклика, уровень шумов, применение компьютера и др.).

3. Если поверхность отклика имеет несколько экстремумов, то ни один из перечисленных методов не дает гарантии в том, что достигнут глобальный, а не локальный экстремум. Для уверенного нахождения глобального (т. е. главного, самого большого экстремума во всей области возможного изменения факторов) рекомендуется применять многократный поиск, причем каждый раз его следует начинать из различных участков факторного пространства. Если имеется возможность получить математическое описание высших порядков для всей области допустимых значений или локальные математические описания, охватывающие всю эту область, то это может надежно решить вопрос, является ли найденный экстремум в действительности глобальным или лишь локальным.

4. На большинстве реальных объектов имеются ограничения, и в этих условиях применение методов поиска имеет свои особенности, о которых пойдет речь в следующем параграфе.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача оптимизации?
2. Какими подходами можно решить задачу оптимизации?
3. Что общего у всех методов экспериментального поиска экстремума?
4. В чем заключается основная идея и процедура метода Гаусса-Зайделя?
5. В чем заключается основная идея и процедура обычного метода градиентов?
6. В чем заключается идея и процедура метода Кифера-Вольфовица?
7. В чем заключается идея и процедура метода крутого восхождения?
8. В чем заключается идея и процедура симплексного метода?
9. В чем заключается идея и процедура случайного поиска?
10. Каковы достоинства и недостатки поисковых методов?
11. Что служит критерием достижения экстремума в упомянутых поисковых методах?
12. В чем состоит роль мысленных опытов и как они проводятся?
13. Как выполняется статистический анализ результатов в методе крутого восхождения?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение III

Двухсторонние пределы для величины $t_{кр}$ в значимости от числа ν

степеней свободы и от уровня значимости q - вероятности

$P\{|t| > |t_{кр}|\}$ – для t -распределения Стьюдента

| $\nu \backslash q$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,002 | 0,001 |
|--------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| | | | | | | | | |
|----|-------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | 3,077 | 6,313 | 12,706 | 31,820 | 63,656 | 127,656 | 318,308 | 636,619 |
| 2 | 1,885 | 2,920 | 4,302 | 6,964 | 9,924 | 14,089 | 22,327 | 31,599 |
| 3 | 6377 | 3534 | 3,182 | 4,540 | 5,840 | 7,458 | 10,214 | 12,924 |
| 4 | 5332 | 1318 | 2,776 | 3,746 | 4,604 | 5,597 | 7,173 | 8,610 |
| 5 | 4759 | 0150 | 5706 | 3649 | 0321 | 4,773 | 5,893 | 6,869 |
| 6 | 1,439 | 1,943 | 2,446 | 3,142 | 3,707 | 4,316 | 5,207 | 5,958 |
| 7 | 4149 | 8946 | 3646 | 2,998 | 4995 | 0293 | 4,785 | 4079 |
| 8 | 3968 | 8595 | 3060 | 8965 | 3554 | 3,832 | 5008 | 0413 |
| 9 | 3830 | 8331 | 2622 | 8214 | 2498 | 6897 | 2968 | 4,780 |
| 10 | 3720 | 8125 | 2281 | 7638 | 1693 | 5814 | 1437 | 5869 |
| 11 | 1,393 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,105 | 3,496 | 4,024 | 4,437 |
| 12 | 3562 | 7823 | 1788 | 6810 | 0545 | 4284 | 3,929 | 3178 |
| 13 | 3502 | 7709 | 1604 | 6503 | 0123 | 3725 | 8520 | 2208 |
| 14 | 3450 | 7613 | 1448 | 6245 | 2,976 | 3257 | 7874 | 1405 |
| 15 | 3406 | 7530 | 1314 | 6025 | 9467 | 2860 | 7328 | 0728 |
| 16 | 1,336 | 1,746 | 2,119 | 2,583 | 2,920 | 3,252 | 3,686 | 4,015 |
| 17 | 3334 | 7396 | 1098 | 5668 | 8982 | 2224 | 6458 | 3,965 |
| 18 | 3304 | 7341 | 1009 | 5514 | 8784 | 1966 | 6105 | 9216 |
| 19 | 3277 | 7291 | 0930 | 5395 | 8609 | 1737 | 5794 | 8834 |
| 20 | 3253 | 7247 | 0860 | 5280 | 8453 | 1534 | 5518 | 8495 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,079 | 2,517 | 2,831 | 3,135 | 3,527 | 3,819 |
| 22 | 3212 | 7167 | 0739 | 5083 | 8188 | 1188 | 5050 | 7921 |
| 23 | 3195 | 7139 | 0687 | 4999 | 8073 | 1040 | 4850 | 7676 |
| 24 | 3178 | 7109 | 0639 | 4922 | 7969 | 0905 | 4668 | 7454 |
| 25 | 3163 | 7081 | 0595 | 4851 | 7874 | 0782 | 4502 | 7251 |

Таблица равномерно распределенных случайных чисел в интервале от 0 до 99

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 09 | 73 | 25 | 33 | 76 | 52 | 01 | 35 | 86 | 34 | 67 | 35 | 48 | 76 | 80 | 95 | 90 | 91 | 17 |
| 37 | 54 | 20 | 48 | 05 | 64 | 89 | 47 | 42 | 96 | 24 | 80 | 52 | 40 | 37 | 20 | 63 | 61 | 04 | 02 |
| 08 | 42 | 26 | 89 | 53 | 19 | 64 | 50 | 93 | 03 | 23 | 20 | 90 | 25 | 60 | 15 | 95 | 33 | 47 | 64 |
| 99 | 01 | 90 | 25 | 29 | 09 | 37 | 67 | 07 | 15 | 38 | 31 | 13 | 11 | 65 | 88 | 67 | 67 | 43 | 97 |
| 12 | 80 | 79 | 99 | 70 | 80 | 15 | 73 | 61 | 47 | 64 | 03 | 23 | 66 | 53 | 98 | 95 | 11 | 68 | 77 |
| 66 | 06 | 57 | 47 | 17 | 34 | 07 | 27 | 68 | 50 | 36 | 69 | 73 | 61 | 70 | 65 | 81 | 33 | 98 | 85 |
| 31 | 06 | 01 | 08 | 05 | 45 | 57 | 18 | 24 | 06 | 35 | 30 | 34 | 26 | 14 | 86 | 79 | 90 | 74 | 39 |
| 85 | 26 | 97 | 76 | 02 | 02 | 05 | 16 | 56 | 92 | 68 | 66 | 57 | 48 | 18 | 73 | 05 | 38 | 52 | 47 |
| 63 | 57 | 33 | 21 | 35 | 05 | 32 | 54 | 70 | 48 | 90 | 55 | 35 | 75 | 48 | 28 | 46 | 82 | 87 | 09 |
| 73 | 79 | 64 | 57 | 53 | 03 | 52 | 96 | 47 | 78 | 35 | 80 | 83 | 42 | 82 | 60 | 93 | 52 | 03 | 44 |
| 98 | 52 | 01 | 77 | 67 | 14 | 90 | 56 | 86 | 07 | 22 | 10 | 94 | 05 | 58 | 60 | 97 | 09 | 34 | 33 |
| 11 | 80 | 50 | 54 | 31 | 39 | 80 | 82 | 77 | 32 | 50 | 72 | 56 | 82 | 48 | 29 | 40 | 52 | 42 | 01 |
| 83 | 45 | 20 | 96 | 34 | 06 | 28 | 89 | 80 | 83 | 18 | 74 | 67 | 00 | 78 | 18 | 47 | 54 | 06 | 10 |
| 88 | 68 | 54 | 02 | 00 | 86 | 50 | 75 | 84 | 01 | 36 | 76 | 66 | 79 | 51 | 90 | 36 | 47 | 64 | 93 |
| 99 | 59 | 46 | 73 | 48 | 37 | 51 | 76 | 49 | 69 | 91 | 82 | 60 | 89 | 28 | 93 | 78 | 56 | 13 | 68 |
| 65 | 48 | 11 | 76 | 74 | 17 | 46 | 85 | 09 | 50 | 58 | 04 | 77 | 69 | 74 | 73 | 03 | 95 | 71 | 86 |
| 80 | 12 | 43 | 56 | 35 | 17 | 72 | 70 | 70 | 15 | 45 | 31 | 82 | 23 | 74 | 21 | 11 | 57 | 82 | 53 |
| 74 | 35 | 09 | 98 | 17 | 77 | 45 | 27 | 72 | 14 | 43 | 23 | 60 | 02 | 10 | 45 | 52 | 16 | 42 | 37 |
| 69 | 91 | 62 | 68 | 03 | 66 | 25 | 22 | 91 | 48 | 36 | 93 | 68 | 72 | 03 | 76 | 62 | 11 | 39 | 90 |
| 09 | 89 | 32 | 05 | 05 | 14 | 22 | 56 | 85 | 14 | 46 | 42 | 75 | 67 | 88 | 96 | 29 | 77 | 88 | 22 |
| 91 | 49 | 91 | 45 | 23 | 68 | 47 | 92 | 76 | 86 | 46 | 16 | 28 | 35 | 54 | 94 | 75 | 08 | 99 | 23 |
| 80 | 33 | 69 | 45 | 98 | 26 | 94 | 03 | 68 | 58 | 70 | 29 | 73 | 41 | 35 | 53 | 14 | 03 | 33 | 40 |
| 44 | 10 | 48 | 19 | 49 | 85 | 15 | 74 | 79 | 54 | 32 | 97 | 92 | 65 | 75 | 57 | 60 | 04 | 08 | 21 |
| 12 | 55 | 07 | 37 | 42 | 11 | 10 | 22 | 20 | 40 | 12 | 86 | 07 | 46 | 97 | 96 | 64 | 48 | 94 | 39 |
| 63 | 60 | 64 | 93 | 29 | 16 | 50 | 53 | 44 | 84 | 40 | 21 | 95 | 25 | 63 | 43 | 65 | 17 | 70 | 82 |
| 61 | 19 | 69 | 04 | 46 | 26 | 45 | 74 | 77 | 74 | 61 | 92 | 43 | 37 | 29 | 65 | 39 | 45 | 95 | 93 |
| 15 | 47 | 44 | 52 | 66 | 95 | 27 | 07 | 99 | 53 | 59 | 36 | 78 | 38 | 48 | 82 | 39 | 61 | 01 | 18 |
| 94 | 55 | 72 | 85 | 73 | 67 | 89 | 75 | 43 | 87 | 54 | 62 | 24 | 44 | 31 | 91 | 19 | 04 | 25 | 92 |
| 42 | 48 | 11 | 62 | 13 | 97 | 34 | 40 | 87 | 21 | 16 | 86 | 84 | 87 | 67 | 03 | 07 | 11 | 20 | 59 |
| 23 | 52 | 37 | 83 | 18 | 73 | 20 | 88 | 98 | 37 | 68 | 93 | 69 | 14 | 16 | 26 | 25 | 22 | 96 | 63 |
| 04 | 49 | 35 | 24 | 94 | 75 | 24 | 63 | 38 | 24 | 45 | 86 | 25 | 10 | 25 | 61 | 96 | 27 | 93 | 35 |
| 00 | 54 | 99 | 76 | 54 | 64 | 05 | 18 | 81 | 69 | 96 | 11 | 96 | 38 | 96 | 54 | 69 | 28 | 23 | 91 |
| 35 | 96 | 31 | 53 | 07 | 26 | 89 | 30 | 93 | 64 | 33 | 35 | 13 | 54 | 52 | 77 | 97 | 45 | 00 | 24 |
| 59 | 80 | 80 | 83 | 91 | 45 | 42 | 72 | 68 | 42 | 83 | 60 | 94 | 97 | 00 | 13 | 02 | 12 | 48 | 92 |
| 46 | 05 | 88 | 52 | 36 | 01 | 39 | 09 | 22 | 86 | 77 | 28 | 14 | 40 | 77 | 93 | 91 | 08 | 36 | 47 |
| 32 | 17 | 90 | 05 | 97 | 89 | 37 | 92 | 52 | 41 | 05 | 56 | 70 | 70 | 07 | 86 | 74 | 31 | 71 | 57 |

Библиографический список

1. Статистические методы в инженерных исследованиях(лабораторный практикум): Учеб. Пособие / Бородюк В.П. и др.; Под ред. Г.К. Круга. – М.: Высш. Шк., 1983. – 216 с.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий –М.: Наука, 1976 - с.
3. Львович Я.Е., Фролов В.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учебн. пособие для вузов.-М.: Радио и связь, 1986.
4. Савровский Д.С. Салихджанова Р.М.-Ф., Толстых С.Д. Планирование экстремальных экспериментов при оптимизации технологических процессов РЭА.-М.: МИРЭА, 1985

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение..... | 2 |
| Методические указания..... | 6 |
| <i>Лабораторная работа № 1. Метод Гаусса-Зейделя.....</i> | <i>7</i> |
| <i>Лабораторная работа № 2. Градиентные методы.....</i> | <i>10</i> |
| <i>Лабораторная работа № 3. Метод крутого восхождения (Метод Бокса- Уилсона).....</i> | <i>14</i> |
| <i>Лабораторная работа № 4. Симплексный метод.....</i> | <i>19</i> |
| <i>Лабораторная работа № 5. Метод случайного поиска.....</i> | <i>23</i> |
| Заключение | 26 |
| Контрольные вопросы..... | 27 |
| Приложение..... | 28 |
| Библиографический список..... | 30 |