

Владимирский государственный университет

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ**

Задачник

Владимир 2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Задачник

Электронное издание



Владимир 2026

ISBN 978-5-9984-2144-0

© Родина Л. И., 2026

УДК 519.21

ББК 22.17

Автор-составитель Л. И. Родина

Рецензенты:

Доктор педагогических наук, доцент
профессор кафедры математики
Национального исследовательского
технологического университета «МИСИС»

Н. Н. Яремко

Доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

А. В. Прохоров

Издаётся по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : задачник / авт.-сост. Л. И. Родина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2026. – 155 с. – ISBN 978-5-9984-2144-0. – Электрон. дан. (1,73 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит задачи по основным разделам курса «Теория вероятностей и математическая статистика», теоретический материал, необходимый для их решения, типичные примеры, а также варианты контрольных работ.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика, 02.03.01 – Математика и компьютерные науки, 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии, 02.03.03 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем. Может быть полезен при самостоятельной работе, а также при подготовке к экзаменам.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 6. Табл. 5. Библиогр.: 15 назв.

ISBN 978-5-9984-2144-0

© Родина Л. И., 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
§ 1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	6
§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	14
§ 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ.....	20
§ 4. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	25
§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА.....	32
§ 6. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.....	40
§ 7. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	48
§ 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	65
§ 9. МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	74
§ 10. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА	87
§ 11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	105

§ 12. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	125
§ 13. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ	138
ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.....	146
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	152
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	153

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник по курсу теории вероятностей и математической статистики содержит 13 параграфов, в каждом из которых приведен необходимый справочный материал для решения большинства задач, а также примеры по основным разделам курса. В издании представлены 20 заданий для индивидуальной домашней работы (по 30 вариантов в каждом), а также контрольные работы.

Задачник содержит как простые задачи, необходимые для начального понимания курса, так и более сложные, направленные на глубокое изучение предмета. Так, в задаче 14 содержатся варианты заданий повышенной сложности.

Изложение материала ведется на уровне, доступном читателю, знакомому с математикой на уровне обычного вузовского курса. Там, где используются более сложные понятия, приведены пояснения.

Часть задач взята из задачников [7; 9; 11; 12], учебников или монографий [1; 5; 13; 14]; приведено также большое число новых задач. Решение многих примеров сопровождается иллюстрациями, которые помогают читателям освоить основные вероятностные закономерности.

§ 1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С подробным теоретическим материалом по данному разделу можно познакомиться в учебниках и учебных пособиях [2, 3, 5, 8, 10, 13, 15]. Здесь приведены основные определения и формулы, необходимые для решения задач.

Рассмотрим некоторый эксперимент, все возможные исходы которого равны $\omega_1, \dots, \omega_N$. Примерами таких экспериментов могут быть подбрасывания одной или нескольких монет, подбрасывание игральной кости, извлечение шаров из ящика, покупка нескольких лотерейных билетов. Исходы эксперимента будем называть *элементарными событиями*, а их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ — конечным *множеством элементарных событий*. *Событием* называется любое подмножество A множества элементарных событий.

Припишем каждому элементарному исходу $\omega_1, \dots, \omega_N$ некоторый «вес», обозначим его $p(\omega_i)$ и назовем *вероятностью* исхода ω_i . Будем считать, что $p(\omega_i)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$ (неотрицательность),
- 2) $p(\omega_1) + \dots + p(\omega_N) = 1$ (нормированность).

Определение 1. *Вероятностью события A* называется сумма вероятностей элементарных исходов, составляющих это событие:

$$P(A) = \sum_{\{i: \omega_i \in A\}} p(\omega_i).$$

Обозначим через $A \cap B$ пересечение событий A и B , $A \cup B$ — объединение данных событий, \bar{A} — дополнение к событию A .

Свойства вероятностей.

- 1) $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$;
- 2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- 3) если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- 4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Классический способ определения вероятностей.

Существует много практических ситуаций, в которых из соображений симметрии все исходы эксперимента рассматривают как равновоз-

возможные. Поэтому, если пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, где $N = N(\Omega) < \infty$, то полагают

$$p(\omega_1) = \dots = p(\omega_N) = \frac{1}{N}.$$

Таким образом, вероятность любого события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где $N(A)$ — число элементарных событий, составляющих событие A , $N(\Omega)$ — число всех элементарных событий.

Пример 1. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

$$A = \{\text{сумма выпавших очков делится на 6}\},$$

$$B = \{\text{произведение выпавших очков равно 8}\},$$

$$C = \{\text{сумма выпавших очков больше, чем их произведение}\}.$$

Решение. Возможными исходами эксперимента являются пары чисел (i, j) , где i — число очков на первой кости, j — на второй, $i, j = 1, \dots, 6$. Все элементарные исходы удобно изобразить в виде следующей таблицы:

(1,1),	(1,2),	(1,3),	(1,4),	(1,4),	(1,5),	(1,6),
(2,1),,					(2,6),
(3,1),,					(4,6),
.....,						
(6,1),,					(6,6).

Из таблицы видно, что число всех элементарных исходов $N(\Omega) = 36$ (это можно посчитать и другим способом, например, так — если на первом кубике выпала «единица», то на втором может выпасть любое из шести чисел, если на первом кубике выпала «двойка», то на втором может выпасть также любое из шести чисел, и так далее). Перечислим все элементарные исходы, составляющие событие A : $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)$. Число этих исходов $N(A) = 6$, поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Событие B содержит два исхода $(2, 4), (4, 2)$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Исходы, благоприятные событию $C : (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$. Значит,

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}.$$

Как видно из этого примера, если число элементарных событий сравнительно небольшое, количество исходов, составляющих определенное событие и все пространство Ω , можно найти способом перебора. В общем случае нужно использовать формулы комбинаторного анализа. Рассмотрим основные случаи, необходимые для решения задач. С доказательством можно познакомиться в [9, 15].

Выбор с возвращением. Предположим, что имеется ящик, который содержит M шаров, занумерованных числами $1, 2, \dots, M$. Эксперимент состоит в извлечении из ящика n шаров, причем на каждом шаге извлеченный шар возвращается обратно. В этом случае каждая выборка из n шаров может быть записана в виде (a_1, \dots, a_n) , где a_i — номер шара, извлеченного на i -м шаге. Понятно, что каждое a_i может принимать любое из M значений $1, 2, \dots, M$. Принято различать два случая: *упорядоченные* выборки и *неупорядоченные*. В первом случае выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком следования этих элементов, считаются различными. Во втором случае порядок следования элементов не принимается во внимание и такие выборки считаются одинаковыми.

Для *упорядоченных* выборок число всех исходов $N(\Omega) = M^n$. Для *неупорядоченных* выборок число различных исходов

$$N(\Omega) = C_{M+n-1}^n,$$

где $C_n^k \doteq \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k , $n!$ — произведение натуральных чисел от 1 до n , $0! = 1$.

Выбор без возвращения. Пусть в ящике находятся M шаров и производится выборка объема n , причем $n \leq M$, поскольку извлеченные шары обратно не возвращаются. Для *упорядоченных* выборок без возвращения число всех возможных исходов

$$N(\Omega) = M(M-1) \dots (M-n+1).$$

Для этого числа используется обозначение $(M)_n$. Для *неупорядоченных* выборок $N(\Omega) = C_M^n$.

Размещение шаров по ящикам. Рассмотрим задачу о размещении n шаров по M ящикам, которые занумерованы числами $1, 2, \dots, M$. Данные шары могут быть *различимыми*, то есть отличаться друг от друга или *неразличимыми* (одинаковыми). Будем также различать размещение шаров с запретом (в ящике может находиться не более одного шара) и без запрета (в ящике может находиться любое число шаров).

Число различных размещений n *различимых* шаров без запрета по M ящикам равно M^n , число размещений n различимых шаров с запретом равно $(M)_n = M(M-1)\dots(M-n+1)$. Для *неразличимых* шаров число размещений без запрета равно C_{M+n-1}^n , а число размещений с запретом равно C_M^n .

Пример 2. В коробке лежат 3 красных и 5 синих фломастеров. Вася достал сразу два фломастера. Какое событие более вероятно: A — фломастеры одного цвета или B — фломастеры разных цветов?

Решение. В этом примере элементарными исходами являются неупорядоченные выборки без возвращения объема 2, поэтому число всех исходов $N(\Omega) = C_8^2 = 28$.

Событие A происходит в том случае, когда оба фломастера красные или оба синие, поэтому в A содержится

$$N(A) = C_3^2 + C_5^2 = 3 + 10 = 13$$

элементарных исходов. Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{13}{28}.$$

Событие B происходит, когда один из фломастеров красный, а другой — синий, в B содержится $N(B) = 3 \cdot 5 = 15$ элементарных исходов. Таким образом,

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{15}{28}.$$

Событие B более вероятно.

Пример 3. В классе 20 школьников, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отбирается 10 человек. Найти вероятность, что среди них ровно 5 отличников.

Решение. Исходами данного эксперимента являются неупорядоченные выборки без возвращения объема 10, поэтому число элементарных исходов $N(\Omega) = C_{20}^{10}$.

Рассмотрим событие A , состоящее в том, что среди отобранных наудачу 10 школьников ровно 5 отличников. Выберем 5 отличников из 8, это можно сделать C_8^5 способами. При этом, если мы выбрали определенную пятерку отличников, то остальных 5 школьников можно выбрать C_{12}^5 способами. Если выбрали других 5 школьников, остальных школьников также выбираем C_{12}^5 способами. Таким образом, число элементарных исходов, входящих в событие A , $N(A) = C_8^5 \cdot C_{12}^5$. Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_8^5 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^{10}}.$$

Пример 4. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 8 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 4 сильнейших команды. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{\text{все сильнейшие команды попадут в одну и ту же группу}\},$

$B = \{\text{одна сильнейшая команда попадет в одну группу, а три — в другую}\}.$

Решение. Общее число элементарных исходов в данном эксперименте равно числу неупорядоченных выборок без возвращения, состоящих из 8 команд, поэтому $N(\Omega) = C_{16}^8$. Чтобы все сильнейшие команды попали в одну и ту же группу, нужно, чтобы в выборку попали либо 4 сильнейших команды и 4 остальных, либо чтобы выборка не содержала ни одной сильнейшей команды. Следовательно, число элементарных исходов, входящих в событие A , есть

$$N(A) = C_4^4 \cdot C_{12}^4 + C_{12}^8 = 2C_{12}^4$$

и вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2C_{12}^4}{C_{16}^8}.$$

Найдем число элементарных исходов, входящих в событие B :

$$N(B) = C_4^1 \cdot C_{12}^7 + C_4^3 \cdot C_{12}^5 = 2 \cdot 4C_{12}^7.$$

Поэтому вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{8C_{12}^7}{C_{16}^8}.$$

Задача 1.

Варианты 1 – 30.

1. В коробке лежат 15 годных и 5 испорченных шурупов. Миша случайным образом достал 6 из них. Найти вероятность того, что у него оказалось хотя бы 5 годных шурупов.

2. В коробке лежат 4 красных, 4 желтых и 6 зеленых карандашей. Найти вероятность того, что два выбранных наудачу карандаша будут одного цвета.

3. Среди 12 лотерейных билетов ровно 3 выигрышных. Вася купил 2 билета. Какое событие более вероятно: «только 1 из этих билетов выигрышный» или «выигрышных билетов нет»?

4. В коробке 10 фломастеров, среди которых 8 новых и 2 исписанных. Найти вероятность того, что из трех одновременно взятых фломастеров 1) все новые, 2) только 2 новых.

5. В коробке лежат 4 красных, 5 синих и 5 зеленых карандашей. Чтобы сделать чертеж, Пете нужны карандаши хотя бы двух разных цветов. Найти вероятность, что он сможет сделать чертеж, если достанет случайным образом одновременно 1) два карандаша, 2) три карандаша.

6. Маша в случайном порядке расставила на полке тома пятитомника. Найти вероятность того, что

1) первые три тома стоят на своих местах;

2) первый и последний тома стоят на своих местах.

7. В классе 20 школьников, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отбирается 6 человек. Найти вероятность, что среди них 1) ровно 3 отличника; 2) хотя бы 3 отличника.

8. В студенческой группе 12 юношей и 8 девушек. Пять путевок в профилакторий, выделенных на группу, разыгрываются по жребию. Найти вероятность того, что

1) путевки получают 3 девушки и 2 юноши;

2) путевки получают только девушки.

9. Двенадцать шаров, среди которых 8 красных и 4 синих, случайным образом раскладываются в два ящика по 6 шаров в каждом. Найти вероятность того, что в обоих ящиках окажется по одинаковому числу синих шаров.

10. У мальчика в копилке лежат 3 монеты достоинством в 5 рублей и 4 монеты достоинством в 10 рублей. Он наудачу берет три из них.

Найти вероятность того, что он сможет купить конфету, которая стоит 25 рублей.

11. В классе 20 учеников, и среди них 8 девочек. Для дежурства случайным образом выбрали четырех учеников. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее двух девочек.

12. В коробке 25 шурупов, из которых 5 с дефектами. Найти вероятность того, что среди трех одновременно взятых наудачу шурупов
1) один с дефектом, 2) хотя бы один с дефектом.

13. Четыре тома энциклопедии расставили на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что

- 1) хотя бы один том не стоит на своем месте;
- 2) первый том стоит на своем месте.

14. Имеются три билета стоимостью по 500 рублей и пять билетов по 300 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, общая стоимость этих билетов не превышает 1100 рублей.

15. В экзаменационных билетах по теории вероятностей 30 вопросов, студент подготовил 20 из них. В билете студенту предлагаются три вопроса. Найти вероятность того, что в билете, который попался студенту, будут ровно два подготовленные им вопроса.

16. В коробке четыре синих карандаша, по два красных, желтых и зеленых. Найти вероятность того, что среди 6 взятых одновременно карандашей

- 1) три синих, два красных и один желтый;
- 2) карандаши только двух цветов.

17. Маша подбросила одновременно три игральные кости. Найти вероятность того, что

- 1) произведение выпавших очков равно 6;
- 2) сумма выпавших очков равна 6.

18. В экзаменационных билетах по теории вероятностей 30 теоретических вопросов, студент подготовил 20 из них. В билете студенту предлагаются три вопроса. Найти вероятность того, что билет, который попался студенту, будет полностью состоять из подготовленных им вопросов.

19. У Пети в копилке лежат 5 монет достоинством в 5 рублей и 5 монет достоинством в 10 рублей. Он наудачу берет четыре из них. Найти вероятность того, что он сможет купить батончик, который стоит

35 рублей.

20. В коробке 5 черных, 3 синих и 2 красных фломастера. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу одновременно фломастеров: 1) все фломастеры одного цвета, 2) хотя бы один черный.

21. Имеется 5 билетов стоимостью по 100 рублей, 3 билета по 300 рублей и 2 билета по 500 рублей. Найти вероятность того, что суммарная стоимость трех взятых наудачу билетов составляет 700 рублей.

22. В коробке четыре синих карандаша, по три красных и желтых. Найти вероятность того, что среди 6 взятых одновременно карандашей

1) два синих, два красных и два желтых;

2) нет красных карандашей.

23. Восемь томов расставлены наудачу на полке. Найти вероятность того, что пятый, шестой и седьмой тома окажутся поставленными рядом (не обязательно по порядку).

24. В коробке 5 черных, 3 синих и 2 красных фломастера. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу одновременно фломастеров: 1) все фломастеры разных цветов, 2) нет ни одного черного.

25. Игральная кость бросается три раза. Найти вероятность того, что 1) сумма выпавших очков равна пяти; 2) произведение очков равно двенадцати.

26. Десять томов расставлены наудачу на полке. Найти вероятность того, что пятый и шестой тома окажутся поставленными рядом (не обязательно по порядку).

27. В коробке лежат 4 красных, 3 белых и 3 черных шарика. Найти вероятность того, что три наудачу одновременно извлеченные шарика двух разных цветов.

28. В ящике 20 теннисных шаров, среди которых 8 новых и 12 использованных. Найти вероятность того, что среди трех наудачу извлеченных шаров хотя бы один новый.

29. В коробке 15 деталей, из них 8 синего цвета, остальные — зеленого. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу извлеченных деталей хотя бы три окажутся синими.

30. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Найти вероятность того, что среди трех наудачу выбранных учеников 1) три мальчика, 2) есть и мальчики, и девочки.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим случай, когда множество элементарных событий бесконечно, например, является совокупностью точек некоторого подмножества Ω в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Предполагаем, что множество Ω ограничено и его n -мерный объем $V(\Omega) > 0$.

Эксперимент состоит в том, что в пределы множества Ω «случайным образом» бросается точка X . Выражение «случайным образом» в данном случае означает, что все точки множества Ω равноправны в отношении попадания туда случайной точки X . Естественно предполагать, что вероятность попадания точки X в какое-то подмножество A пространства Ω пропорциональна n -мерному объему множества A .

Определение 1. Вероятность события A равна отношению объема множества A к объему всего пространства Ω :

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

Если Ω — ограниченное множество на плоскости, имеющее положительную площадь $S(\Omega)$, то

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

Если множество Ω расположено на прямой, то $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$, где $L(\Omega)$ — длина Ω .

Пример 1. Вася и Маша условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Элементарное событие ω определяется двумя переменными: x — момент прихода на встречу Васи, y — момент прихода Маши. Множеством элементарных событий является квадрат (рис. 1)

$$\Omega = \{(x, y) : 10 \leq x \leq 11, 10 \leq y \leq 11\}.$$

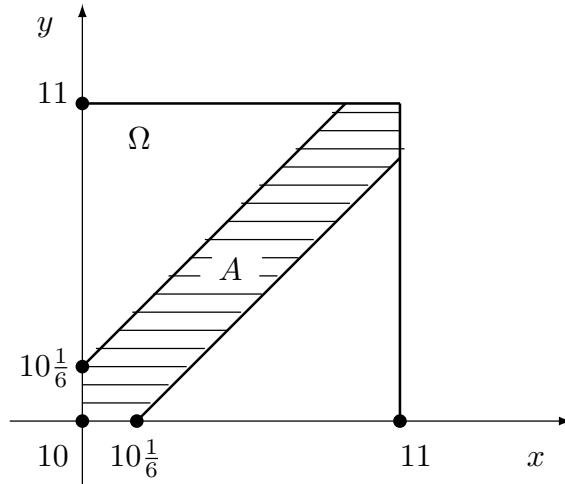


Рис. 1. Вероятность встречи равна отношению площадей множеств A и Ω

Обозначим через A событие, которое заключается в том, что встреча Васи и Маши произошла. Они встретятся, если их моменты прихода отличаются по абсолютной величине не более, чем на 10 минут, то есть на $1/6$ часа, поэтому

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{6} \right\} = \left\{ (x, y) \in \Omega : x - \frac{1}{6} \leq y \leq x + \frac{1}{6} \right\}.$$

Площадь множества A равна $11/36$, поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{11}{36}.$$

Пример 2. Случайная точка X равномерно распределена в квадрате $K = \{(x, y) : |x| + |y| \leq a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b , параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате K .

Решение. Множеством элементарных исходов является квадрат K , то есть $\Omega = K$ и $S(\Omega) = 2a^2$.

Внутри квадрата Ω построим квадрат A , стороны которого находятся на расстоянии $\frac{\sqrt{2}b}{2}$ от сторон исходного квадрата. Отметим, что если точка X находится на стороне квадрата A , то одна из вершин квадрата с центром X и сторонами длины b , параллельными осям координат, лежит на стороне квадрата K . Если точка X находится внутри квадрата A , то квадрат с центром X полностью содержится внутри квадрата K .

И наконец, если точка X попадает в полосу между двумя квадратами, то квадрат с центром X пересекает стороны квадрата K (рис. 2).

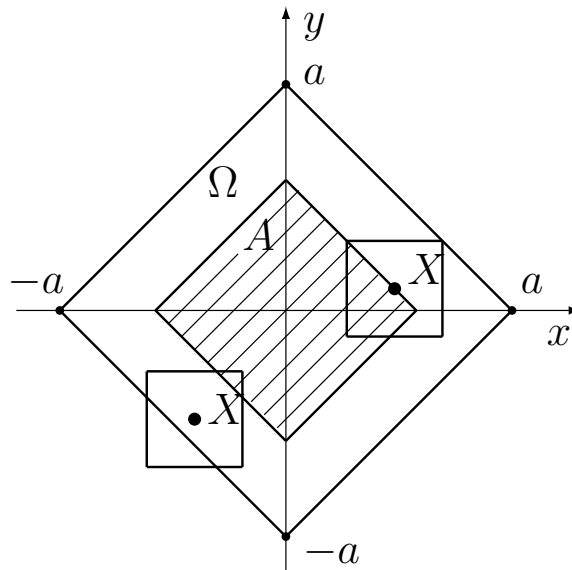


Рис. 2. Квадрат A является множеством благоприятных исходов

Таким образом, квадрат A является множеством благоприятных исходов. Длина стороны этого квадрата равна

$$\sqrt{2}a - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}b}{2} = \sqrt{2}(a - b),$$

поэтому, если $b < a$, то вероятность искомого события равна

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2(a - b)^2}{2a^2} = \frac{(a - b)^2}{a^2}.$$

Если $b \geq a$, то $P(A) = 0$.

Другие примеры решения задач по теме «геометрическое определение вероятностей» можно посмотреть в учебном пособии [9].

Задача 2.

Варианты 1 – 30.

1. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 4. Найти вероятность, что расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит 2, 5.

2. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 3. Найти вероятность, что расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит 4.

3. Случайная точка A имеет равномерное распределение в треугольнике со сторонами 3, 4 и 5. Найти вероятность, что расстояние от точки A до ближайшей стороны треугольника не превосходит 0,5.

4. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 2 и 4. Найти вероятность, что расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит 0,5.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что $y < x$ и $xy < 1$.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что $y < \sqrt{x}$ и $x + y < 1$.

7. В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.

8. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные корни.

9. На отрезок OA длиной 12 сантиметров наудачу поставлена точка B . Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую трех сантиметров.

10. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 2. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

11. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x, y) : |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины 2, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A .

12. Случайная точка X равномерно распределена в правильном треугольнике с вершинами $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 2\sqrt{3})$. Найти вероятность того, что квадрат с центром в точке X и сторонами длины 1, параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.

13. Случайная точка $X = (X_1, X_2)$ равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Найти вероятность того, что многочлен

$$f_{X_1, X_2}(x) = \frac{1}{3}x^3 - X_1^2x + X_2$$

имеет один корень.

14. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной 4, случайно бросается монета радиуса 1. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из треугольников паркета.

15. В равнобокой трапеции с основаниями 4 и 6 и высотой 5 случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до меньшего основания трапеции не превосходит 2.

16. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 4. Найти вероятности следующих событий:

1) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит 1;

2) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит 1.

17. На отрезке OA единичной длины случайным образом выбраны две точки B и C , причем B левее C . Найти вероятность того, что

$$|BC| < \min(|OB|, |CA|).$$

18. Случайная точка $X = (X_1, X_2)$ равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Найти вероятность того, что многочлен

$$f_{X_1, X_2}(x) = \frac{1}{3}x^3 - X_1^2x + X_2$$

имеет три корня.

19. На паркет, составленный из правильных шестиугольников со стороной 3, случайно бросается монета радиуса 1. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из шестиугольников паркета.

20. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что $y > x$ и $xy > 1$.

21. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что $y > \sqrt{x}$ и $x + y > 1$.

22. В равнобокую трапецию с боковыми сторонами длиной 2 и большим основанием длины 3 вписан круг. В трапецию случайным образом бросают точку. Найти вероятность, что она попадет в круг.

23. В равнобокой трапеции с основаниями 4 и 6 и высотой 5 случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до большего основания трапеции не превосходит 2.

24. В круг радиусом 5 вписана равнобокая трапеция с основаниями длиной 2 и 8. В круг случайным образом бросают точку. Найти вероятность, что она попадет в трапецию.

25. В круг радиусом 5 вписан прямоугольный треугольник, одна из сторон которого имеет длину 6. В круг случайным образом бросают точку. Найти вероятность, что она попадет в треугольник.

26. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 1. Найти вероятность, что

$$y > x \quad \text{и} \quad y < 4(x - x^2).$$

27. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что $|y - |x - 1|| \leq 0,5$.

28. Наудачу взяты два числа x и y , каждое из которых по модулю не превышает 3. Найти вероятность, что $y \geq ||x| - 1| - 1$.

29. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность того, что

$$y \leq x \quad \text{и} \quad y \leq 2x - x^2.$$

30. В равносторонний треугольник ABC со сторонами длиной 2 случайным образом брошена точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до вершины A треугольника больше 1.

Задача 3.

Варианты 1 – 30.

На интервале $(0, 1)$ наудачу берутся три точки: x, y, z . Найти вероятность того, что скалярное произведение вектора $a = (x, y, z)$ на вектор b будет:

a) больше единицы;

b) меньше двух.

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $b = (2, 3, 1)$. | 9. $b = (1, 2, 3)$. | 17. $b = (3, 4, 1)$. | 25. $b = (2, 3, 4)$. |
| 2. $b = (2, 1, 1)$. | 10. $b = (1, 2, 2)$. | 18. $b = (2, 4, 3)$. | 26. $b = (2, 4, 1)$. |
| 3. $b = (2, 3, 2)$. | 11. $b = (2, 3, 1)$. | 19. $b = (1, 2, 3)$. | 27. $b = (3, 4, 1)$. |
| 4. $b = (1, 2, 4)$. | 12. $b = (2, 1, 1)$. | 20. $b = (1, 2, 2)$. | 28. $b = (2, 4, 3)$. |
| 5. $b = (2, 4, 4)$. | 13. $b = (2, 3, 2)$. | 21. $b = (2, 3, 1)$. | 29. $b = (1, 2, 3)$. |
| 6. $b = (2, 4, 1)$. | 14. $b = (1, 2, 4)$. | 22. $b = (2, 1, 1)$. | 30. $b = (1, 2, 2)$. |
| 7. $b = (3, 4, 1)$. | 15. $b = (2, 3, 4)$. | 23. $b = (2, 3, 2)$. | |
| 8. $b = (2, 3, 3)$. | 16. $b = (2, 4, 1)$. | 24. $b = (1, 2, 4)$. | |

§ 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Определение 1. Пусть $P(B) > 0$. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B , определяется равенством

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

При классическом определении вероятностей $P(A|B) = \frac{N(AB)}{N(B)}$, где $N(AB)$ — число элементарных исходов, входящих одновременно в события A и B , $N(B)$ — число исходов, составляющих событие B . Для геометрического определения вероятностей

$$P(A|B) = \frac{V(AB)}{V(B)},$$

где $V(AB)$ — n -мерный объем пересечения событий A и B , $V(B)$ — объем события B .

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B);$$

в этом случае $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.

Определение 3. События A_1, \dots, A_n называются *независимыми (в совокупности)*, если для всех $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, где $k = 2, \dots, n$ выполнено равенство

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k}).$$

Пример 1. Рассмотрим семьи, имеющие двух детей. Найти вероятность того, что в семье оба ребенка мальчики, в предположении, что:

- старший ребенок — мальчик;

б) хотя бы один из детей — мальчик.

Решение. В этой задаче пространство элементарных событий состоит из четырех исходов: $\Omega = \{\text{ММ}, \text{МД}, \text{ДМ}, \text{ДД}\}$, где событие МД означает, что старший ребенок — мальчик, младший — девочка. Предполагается, что все исходы равновозможны, поэтому они имеют вероят-

ности, равные $1/4$. Рассмотрим следующие события:

$$A = \{\text{старший ребенок — мальчик}\},$$
$$B = \{\text{младший ребенок — мальчик}\}.$$

Тогда $A \cup B = \{\text{хотя бы один из детей — мальчик}\},$
 $AB = \{\text{оба ребенка — мальчики}\}.$

В пункте а) нужно найти условную вероятность $P(AB|A)$, в пункте б) — условную вероятность $P(AB|A \cup B)$. По определению условной вероятности находим

$$P(AB|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$
$$P(AB|A \cup B) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 6 очков, при условии, что на всех костях выпали грани с четным числом очков.

Решение. Рассмотрим события

$$A = \{\text{хотя бы на одной игральной кости выпадет «6»}\},$$
$$B = \{\text{на всех костях выпали грани с четным числом очков}\}.$$

В этой задаче проще сначала найти условную вероятность $P(\bar{A}|B)$. Дополнением к событию A является событие, которое заключается в том, что при бросании трех игральных костей ни на одной из них «6» не выпадет.

Пересечением событий \bar{A} и B является событие, которое состоит в том, что на каждой игральной кости выпала «2» или «4», поэтому оно содержит 8 элементарных исходов, перечислим их:

$$(2, 2, 2), (2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2), (4, 4, 4), (4, 4, 2), (2, 4, 4), (4, 2, 4).$$

В событие B входит 27 элементарных исходов, поскольку на каждой из трех игральных костей может выпасть одна из цифр: 2, 4 или 6. Значит,

$$P(\bar{A}|B) = \frac{N(\bar{A}B)}{N(B)} = \frac{8}{27}. \text{ Следовательно,}$$

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Задача 4.

Варианты 1 – 30.

1. На полке стоят 10 учебников, 3 из которых нужны студенту для написания курсовой работы. Студент взял наудачу 3 учебника и оказалось, что среди них есть по крайней мере один нужный. Найти вероятность, что он взял два или три нужных учебника.

2. В отдел технического контроля поступила партия из 1000 аппаратов, среди которых находятся 4 бракованных. Известно, что из двух взятых наугад аппаратов хотя бы один стандартный. Найти вероятность того, что оба окажутся стандартными.

3. Брошены 3 игральные кости. Найти условную вероятность того, что появилась хотя бы одна пятерка, если известно, что сумма выпавших очков равна 11.

4. Брошены 3 игральные кости. Найти условную вероятность того, что появилась хотя бы одна тройка, если известно, что сумма выпавших очков равна 7.

5. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим события

$A = \{\text{на первой кости выпала тройка}\};$

$B = \{\text{на второй кости выпала четверка}\};$

$C = \{\text{сумма очков на обеих костях равна семи}\}.$

Найти пары независимых событий.

6. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим события

$A = \{\text{на первой кости выпала двойка}\};$

$B = \{\text{на второй кости выпала тройка}\};$

$C = \{\text{сумма очков на обеих костях равна пяти}\}.$

Найти пары независимых событий.

7. На полке в случайном порядке расставили тома пятитомника. Найти вероятность того, что все тома расставлены по порядку, при условии, что первый и последний тома стоят на своих местах.

8. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что

1) сумма цифр наудачу образованного с помощью карточек двузначного числа равна 9;

2) произведение цифр равно 25,
если известно, что это число кратно 5.

9. В студенческой группе 8 юношей и 8 девушек. Пять путевок в профилакторий, выделенных на группу, разыгрываются по жребию. Будут ли независимыми события:

- 1) путевку получит хотя бы один юноша;
- 2) путевку получит хотя бы одна девушка.

10. Десять изготовленных деталей, среди которых 4 бракованных, случайным образом раскладываются в 2 ящика по 5 деталей в каждом. Найти вероятность того, что в обоих ящиках окажется по одинаковому числу бракованных деталей, если известно, что в первом есть хотя бы одна бракованная деталь.

11. В кошельке лежат 4 монеты достоинством в 5 рублей и 4 монеты достоинством в 10 рублей. Наудачу берутся три монеты. Найти вероятность того, что этих монет достаточно для оплаты билета на автобус стоимостью 20 рублей, если известно, что среди них есть по крайней мере одна монета в 5 рублей.

12. На предприятии работают 15 сменных инженеров, из которых 3 женщины. В смену заняты 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене окажутся все мужчины, если известно, что там окажется не менее двух мужчин.

13. Тома пятитомника расставлены на полке в случайном порядке. Будут ли независимыми события:

- 1) первый стоит на своем месте;
- 2) последний том стоит на своем месте.

14. Тома пятитомника расставлены на полке в случайном порядке. Будут ли независимыми события:

- 1) первые два тома стоят на своем месте;
- 2) последние два тома стоят на своем месте.

15. Имеются три билета стоимостью по 50 рублей и пять билетов по 30 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все билеты имеют одинаковую стоимость, если известно, что общая стоимость билетов больше, чем 120 рублей.

16. Имеются три билета стоимостью по 50 рублей и пять билетов по 30 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что среди билетов есть билеты разной стоимости, если известно, что общая стоимость билетов не превышает 110 рублей.

17. Монета брошена 5 раз. Зависимы или независимы следующие

события: «при первом бросании появился герб» и «появилось ровно 3 герба»?

18. Монета брошена 5 раз. Зависимы или независимы следующие события: «при первом бросании появился герб» и «при последнем бросании появился герб»?

19. В ящике находится 6 белых и 4 красных мячей. Из ящика наудачу извлекаются 3 мяча. Зависимы или независимы события: «появилось хотя бы 2 красных мяча» и «все мячи разных цветов»?

20. Брошены 2 игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Являются ли независимыми события A — не выпало ни одной «единицы», B — выпала хотя бы одна «тройка»?

21. Имеется 5 билетов стоимостью по 10 рублей, 3 билета по 30 рублей и 2 билета по 50 рублей. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу билетов 1 билет за 10 рублей и 2 билета по 30 рублей, если суммарная стоимость этих билетов равна 70 рублей.

22. В ящике находится 6 белых и 4 красных мячей. Из ящика наудачу извлекаются 3 мяча. Зависимы или независимы события: «появилось хотя бы 2 белых мяча» и «все мячи одного цвета»?

23. Из колоды в 36 карт наудачу одновременно извлекаются две карты. Зависимы или независимы события: «появилась девятка и десятка» и «обе извлеченные карты одной масти»?

24. Из колоды в 36 карт наудачу одновременно извлекаются две карты. Зависимы или независимы события: «появились две десятки» и «извлеченные карты разных мастей»?

25. Игральная кость бросается три раза. Найти вероятность того, что произведение очков равно четырем, если известно, что сумма выпавших очков четная.

26. Игральная кость бросается три раза. Найти вероятность того, что произведение очков равно 12, если известно, что сумма выпавших очков нечетная.

27. 6 шаров случайным образом распределяются по 5 ящикам. Известно, что ровно два ящика остались пустыми. Найти условную вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

28. Шесть человек садятся в лифт на первом этаже 10-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на лю-

бом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах при условии, что на втором и третьем этаже никто не выходил.

29. В ящике 10 деталей, из них 5 окрашены в синий цвет и 5 — в красный. Найти вероятность того, что среди трех наудачу извлеченных деталей все окажутся окрашенными в красный цвет, если известно, что среди них есть по крайней мере одна красная деталь.

30. Брошены 2 игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Являются ли независимыми события A — выпала хотя бы одна «единица», B — выпала хотя бы одна «шестерка»?

§ 4. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Формулы сложения вероятностей.

Вероятность *объединения* событий A и B задается равенством

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события A и B несовместны, то есть $AB = \emptyset$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность *дополнения* к событию A находится по формуле

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность *объединения* событий A_1, \dots, A_n :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$$

Если события A_1, \dots, A_n несовместны, то

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Формулы умножения вероятностей.

Вероятность *пересечения* событий A и B в общем случае находится через условную вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad \text{или} \quad P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Формула умножения вероятностей для нескольких событий:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

Если события A_1, \dots, A_n — независимы, то

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \dots P(A_n).$$

Пример 1. Два стрелка, независимо один от другого, стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна $0,7$; для второго — $0,8$. Найти вероятность того, что при залпе в мишень попадет только один из стрелков.

Решение. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в мишень попадет только один из стрелков, также рассмотрим события $A_i = \{i\text{-й стрелок попадет}\}, i = 1, 2$. По условию $P(A_1) = 0,7$, $P(A_2) = 0,8$. Выразим событие A через события A_1 и A_2 :

$$A = A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2.$$

Так как события $A_1\bar{A}_2$ и \bar{A}_1A_2 несовместны, то

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2).$$

События A_1, A_2 независимы (по условию), поэтому независимы пары событий \bar{A}_1, A_2 и A_1, \bar{A}_2 . Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38.$$

Пример 2. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1 , для второго p_2 . Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие события:

$$C = \{\text{выиграет 1-й стрелок}\},$$

$$A_i = \{\text{1-й стрелок попал } i \text{ раз}\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$B_i = \{\text{2-й стрелок попал } i \text{ раз}\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Событие A произойдет, если у первого стрелка в мишени будет 2 пробоины, а у второго 0 или 1, или если у первого стрелка будет 1 пробоина, а у второго 0. Значит, вероятность события C равна вероятности суммы событий A_2B_0 , A_2B_1 и A_1B_0 . Поскольку любые события A_i и B_j , $i, j = 0, 1, 2$ независимы, то

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_2B_0) + P(A_2B_1) + P(A_1B_0) = \\ &= P(A_2)P(B_0) + P(A_2)P(B_1) + P(A_1)P(B_0) = \\ &= p_1^2(1 - p_2)^2 + 2p_1^2p_2(1 - p_2) + 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2)^2. \end{aligned}$$

Пример 3. В коробке лежат 2 белых и 4 черных шара. Два игрока по очереди вынимают из коробки по одному шару, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше достанет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Р е ш е н и е. Обозначим через A_i события, состоящие в том, что белый шар вынут из коробки при i -м испытании, $i = 1, \dots, 6$ (при нечетных номерах i первым игроком, при четных — вторым). Тогда дополнениями к этим событиям \bar{A}_i , $i = 1, \dots, 6$ являются события, состоящие в том, что из коробки при i -м испытании вынут черный шар.

Первый игрок может выиграть в следующих случаях: если он сразу достанет белый шар, то есть если произойдет событие A_1 ; если он достанет черный шар, второй игрок также достанет черный шар, потом первый достанет белый шар, при этом произойдет событие $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. Также первый игрок может выиграть, если произойдет $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5$. Вероятность $P(A_1) = \frac{1}{3}$, следующую вероятность находим по формуле умножения:

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2).$$

Если произошло событие \bar{A}_1 , в ящике осталось 2 белых и 3 черных шара, поэтому $P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{3}{5}$. При условии $\bar{A}_1\bar{A}_2$ в ящике осталось 2 белых и 2 черных шара, отсюда находим

$$P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{1}{2}, \quad P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично, по формуле умножения вероятностей² находим

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5) &= \\ &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_4|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)P(A_5|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Вероятность выигрыша первого игрока

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

Пример 4. Среди 25 билетов по теории вероятностей есть 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности событий:

- 1) $A_1 = \{\text{первый студент взял «хороший» билет}\};$
- 2) $A_2 = \{\text{второй студент взял «хороший» билет}\};$
- 3) $A_3 = \{\text{оба студента взяли «хорошие» билеты}\}.$

Решение. Число всех исходов $N(\Omega) = 25$, число благоприятных исходов для события A_1 равно числу «хороших» билетов, поэтому вероятность события A_1 находится по классическому определению вероятностей:

$$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}.$$

События A_1 и A_2 зависимы, потому что, если первый студент взял «хороший» билет, то у второго остается меньше шансов также взять «хороший» билет. Следовательно, если произошло событие A_1 , то для второго студента осталось 4 «хороших» билета, а всего осталось 24 билета, поэтому $P(A_2|A_1) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2A_1) + P(A_2\bar{A}_1) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{24} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$P(A_3) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{24} = \frac{1}{30}.$$

Другие примеры решения задач по теме «формулы сложения и умножения вероятностей» можно посмотреть в учебном пособии [9].

Задача 5.

Варианты 1 – 30.

1. Последовательно посланы четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятность приема не менее двух сигналов.

2. Вероятность выигрыша партии в волейбол одной из команд равна 0,6, а другой — 0,4, и не зависит от исхода предыдущих партий. Найти вероятность того, что из трех сыгранных партий одна из команд выиграет две партии подряд.

3. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым — 0,7, третьим — 0,6. Найти вероятность того, что в мишени будет ровно две пробоины.

4. Три школьника пытаются забросить в корзину баскетбольный мяч. Вероятность того, что первый забросит мяч — 0,7; второй — 0,8; третий — 0,9. Найти вероятность того, что мяч будет заброшен 1) только одним из них; 2) хотя бы одним из них.

5. В коробке лежат шурупы трех типов: 8 шурупов первого типа, 10 — второго и 6 — третьего типа. Найти вероятность того, что три выбранных наудачу шурупа будут одного типа.

6. Три школьника пытаются выполнить нормы ГТО. Вероятность того, что первый выполнит нормы — 0,8; второй — 0,7; третий — 0,6. Найти вероятность того, что нормы ГТО будут выполнены 1) только одним из них; 2) хотя бы одним из них.

7. Петя трижды пытается дозвониться до Маши. Вероятность того, что Маша ответит на первый звонок, равна 0,4, второй — 0,5, третий — 0,6. События, состоящие в том, что Маша ответит на данный звонок, независимы. Найти вероятность того, что Маша ответит хотя бы на один звонок.

8. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым — 0,7, третьим — 0,6. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы две пробоины.

9. В коробке лежат 4 красных и 6 синих карандашей. Два игрока по очереди вынимают из коробки по одному карандашу, не возвращая

их обратно. Выигрывает тот, кто раньше достанет красный карандаш. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

10. В коробке лежат 4 красных и 6 синих карандашей. Два игрока по очереди вынимают из коробки по одному карандашу, каждый раз возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше достанет красный карандаш. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

11. В коробке с елочными игрушками лежат 10 красных и 16 синих шаров. Два брата по очереди вынимают из коробки по одному шару и вешают этот шар на елку. Выигрывает тот, кто раньше достанет красный шар. Найти вероятность того, что выиграет старший брат, если он начал доставать шары первым.

12. В коробке лежат 3 красных, 4 синих и 5 желтых карандашей. Два игрока по очереди вынимают из коробки по одному карандашу, каждый раз возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше достанет желтый карандаш. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

13. Имеется коробка с 9 новыми теннисными мячами. Для игры берут 3 мяча и после игры кладут их обратно. При последующем выборе использованные мячи не отличаются от новых. Найти вероятность того, что после трех игр в коробке не останется новых мячей.

14. В экзаменационном билете 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй — 0,8, на третий вопрос — 0,7. Найти вероятность сдачи экзамена, если для этого студенту необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

15. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.

16. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если он ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

17. В люстре три лампочки, которые работают в течение года безотказно с вероятностями 0,9; 0,8 и 0,8. Найти вероятность того, что за год перегорит только одна лампочка.

18. В коробке с елочными игрушками лежат 8 красных и 10 синих шаров. Сначала старший брат достает из коробки один шар и вешают

этот шар на елку. Потом достает шар младший брат. Найти вероятности того, что: 1) младший брат достанет синий шар; 1) оба брата достанут красные шары.

19. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, равна 0,6, вторым — 0,5. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй — 3 выстрела. Найти вероятность того, что цель не будет поражена.

20. Среди 30 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Два покупателя по очереди берут по одному билету. Найти вероятности событий: 1) второму покупателю достанется выигрышный билет; 1) никто из покупателей не выиграет.

21. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна 0,63, а вероятность того, что они совместно не появятся, равна 0,03. Найти вероятности появления каждого события в отдельности.

22. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

23. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно с вероятностями 0,8; 0,75; 0,7. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя хотя бы один элемент.

24. Среди 100 лотерейных билетов есть 10 выигрышных. Два покупателя по очереди берут по одному билету. Найти вероятности событий: 1) второму покупателю достанется выигрышный билет; 1) выиграют оба покупателя.

25. Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может отказать в течение года. Вероятность безотказной работы в течение года для первого узла равна 0,8; для второго — 0,9; для третьего узла — 0,7. Найти вероятность того, что за год выйдет из строя не менее двух узлов.

26. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты проводятся последовательно до наступления события. Найти вероятность того, что придется производить пятый опыт.

27. В люстре 4 лампочки, две из которых работают в течение года безотказно с вероятностями 0,9, а две остальные с вероятностями 0,8. Найти вероятность того, что за год перегорит только одна лампочка.

28. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что:

- 1) двигатель заработает при третьем включении зажигания;
- 2) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

29. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно с вероятностями 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя только один элемент.

30. Вероятность того, что первый станок потребует наладки за смену, равна 0,15, второй — 0,1, третий — 0,12. Найти вероятность того, что за смену потребуют наладки не менее двух станков.

§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Определение 1. События A_1, \dots, A_n образуют *полную группу*, если выполнены следующие условия:

- 1) A_1, \dots, A_n несовместны, т. е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$;
- 2) $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$;
- 3) $P(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Формула полной вероятности.

Если A_1, \dots, A_n образуют полную группу, то вероятность события B находится по формуле:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k).$$

Формула Байеса.

Если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Пусть события A_1, \dots, A_n образуют полную группу, тогда

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Пример 1. В первом ящике находится 1 белый и 9 черных шаров, во втором — 5 белых и 1 черный шар. Из первого и второго ящика без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третий ящик. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьего ящика, окажется белым.

Решение. Обозначим через B событие, состоящее в том, что вынутый из третьего ящика шар белый. Рассмотрим следующие события:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{из 1-го и 2-го ящиков удалили по белому шару}\}, \\ A_2 &= \{\text{из 1-го ящика удалили белый шар, из 2-го — черный}\}, \\ A_3 &= \{\text{из 1-го ящика удалили черный шар, из 2-го — белый}\}, \\ A_4 &= \{\text{из 1-го и 2-го ящиков удалили по черному шару}\}. \end{aligned}$$

События A_1, \dots, A_4 образуют полную группу, поскольку они несовместны, имеют ненулевые вероятности и в сумме составляют все пространство Ω . Это означает, что данные события исчерпывают все возможные исходы эксперимента, который состоит в том, что из первого и второго ящика без возвращения удалили по одному шару. Найдем вероятности данных событий:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60}, & P(A_2) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}, \\ P(A_3) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{60}, & P(A_4) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60}. \end{aligned}$$

Если произошло событие A_1 , то в третьем ящике находятся 4 белых и 10 черных шаров; если произошло событие A_2 или событие A_3 , то в третьем ящике находятся 5 белых и 9 черных шаров; если произошло A_4 , то третий ящик содержит 6 белых и 8 черных шаров (рис. 3).

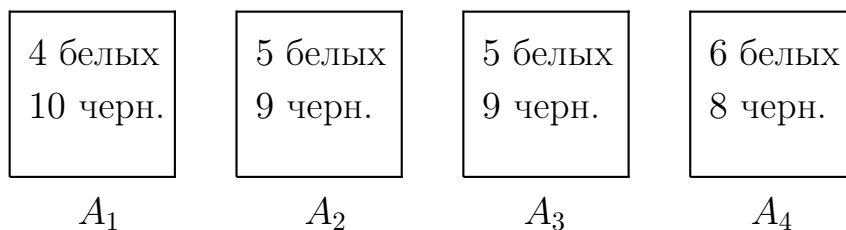


Рис. 3. Состав шаров в 3-м ящике при условии, что произошли события A_1, \dots, A_4

Найдем условные вероятности

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14}, \quad P(B|A_2) = \frac{5}{14}, \quad P(B|A_3) = \frac{5}{14}, \quad P(B|A_4) = \frac{6}{14}$$

и вероятность события B по формуле полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{5}{60} \cdot \frac{4}{14} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{45}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{9}{60} \cdot \frac{6}{14} = \frac{38}{105}.$$

Пример 2. Имеются три ящика с белыми и черными шарами, причем отношение числа белых шаров к числу черных равно p_1, p_2, p_3 для первого, второго и третьего ящиков соответственно. Наудачу (с вероятностью $1/3$) выбирается ящик и из него шар. Оказалось, что этот шар белый. Какова вероятность того, что шар был вынут из первого ящика?

Решение. Обозначим через B событие, состоящее в том, что вынутый шар белый, $A_i = \{\text{шар вынут из } i\text{-го ящика}\}$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку ящик выбирается наудачу, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Пусть n_i — число белых и m_i — число черных шаров в i -м ящике, тогда

$$P(B|A_i) = \frac{n_i}{n_i + m_i} = \frac{p_i}{p_i + 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

По формуле Байеса найдем

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\frac{p_1}{p_1 + 1}}{\frac{p_1}{p_1 + 1} + \frac{p_2}{p_2 + 1} + \frac{p_3}{p_3 + 1}}.$$

Пример 3. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, как $3 : 2$. Вероятность, что случайно проезжающая грузовая машина будет заправляться, равна $0,1$, для легковой машины эта вероятность равна $0,2$. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность, что это грузовой автомобиль.

Решение. Обозначим через B событие, состоящее в том, что машина будет заправляться; A_1 — проезжающая машина грузовая, A_2 — проезжающая машина легковая. Найдем

$$P(A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A_2) = \frac{2}{5}, \quad P(B|A_1) = 0,1, \quad P(B|A_2) = 0,2.$$

Следовательно,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0,14,$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = 0,43.$$

Пример 4. На складе монтажного цеха имеются электродвигатели трех заводов-изготовителей в количестве 19, 6 и 11 шт., которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями 0,85, 0,76 и 0,71 соответственно. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Решение. Рассмотрим следующие события:

B — двигатель работает безотказно до конца гарантийного срока;

A_i — рабочий возьмет двигатель из продукции i -го завода, $i = 1, 2, 3$.

События A_1, A_2, A_3 образуют полную группу, их вероятности

$$P(A_1) = \frac{19}{36} = 0,528, \quad P(A_2) = \frac{6}{36} = 0,167, \quad P(A_3) = \frac{11}{36} = 0,306.$$

Условные вероятности события B заданы по условию задачи:

$$P(B|A_1) = 0,85, \quad P(B|A_2) = 0,76, \quad P(B|A_3) = 0,71.$$

По формуле полной вероятности найдем

$$P(B) = \sum_{j=1}^3 P(A_j)P(B|A_j) = \frac{19}{36} \cdot 0,85 + \frac{6}{36} \cdot 0,76 + \frac{11}{36} \cdot 0,71 = 0,792.$$

По формуле Байеса найдем условные вероятности A_1, A_2, A_3 :

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,528 \cdot 0,85}{0,792} = 0,566;$$

$$P(A_2|B) = \frac{0,167 \cdot 0,76}{0,792} = 0,160;$$

$$P(A_3|B) = \frac{0,306 \cdot 0,71}{0,792} = 0,274.$$

Задача 6.

Варианты 1 – 30.

1. На склад поступила продукция трех фирм, выпускающих телефонные аппараты. Объемы продукции первой, второй и третьей фирм относятся как 3:5:4. Известно, что кнопочные аппараты среди продукции первой фирмы составляют в среднем 92%, второй — 90%, третьей — 85%. Найти вероятность того, что наудачу взятый аппарат, оказавшийся кнопочным, изготовлен второй фирмой.

2. Три группы студентов сдавали экзамен по математике. В первой группе успешно сдали 80% студентов, во второй — 75%, в третьей — 90%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент из этих групп сдал успешно экзамен, если численность первой группы в 1,5 раза больше численности второй и в 1,2 раза больше численности третьей группы.

3. В магазин поступают плащи с трех фабрик. Производительности фабрик относятся 2:5:3. Комбинированные плащи среди продукции составляют в среднем 97%, 96%, 98% соответственно. Наудачу выбранный плащ оказался комбинированным. С какой фабрики вероятнее всего он поступил?

4. В магазин поступили радиоприемники с трех заводов. Среди 50 приемников с первого завода 10 приемников первого класса, из 60 со второго завода 15 первого класса. Найти вероятность того, что наудачу взятый радиоприемник будет первого класса, если из 40 приемников с третьего завода 10 первого класса.

5. Среди реализуемых магазином магнитофонов 35% изготовлены на первом заводе, 25% — на втором и остальные — на третьем. Доля двухкассетных магнитофонов в продукции этих заводов составляет соответственно 85%, 75%, 90%. Найти вероятность того, что у случайного покупателя этого магазина купленный им двухкассетный магнитофон изготовлен на третьем заводе.

6. На первом станке изготовлено 20 деталей, из них 7 с дефектом, на втором 30 деталей, из них 4 с дефектом, на третьем — 50 деталей, из них 10 с дефектом. С общего конвейера взята наудачу деталь, оказавшаяся без дефекта. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

7. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительные оценки 20 из 30 студентов, во второй группе 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

8. На склад поступила продукция трех цехов в соотношении 2:5:3. Средний процент второсортных изделий для продукции первого цеха равен 3%, для второго — 2%, для третьего — 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие, оказавшееся второсортным, произведено первым цехом.

9. В магазин поступили часы с трех заводов: с первого — 40% часов, со второго — 45% и остальные часы с третьего завода. В продукции первого завода спешат 20% часов, второго — 30% и третьего — 10%. Найти вероятность того, что купленные в этом магазине часы спешат.

10. Партия транзисторов, среди которых 10% с дефектами, поступила на контроль. Упрощенная схема контроля такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект и с вероятностью 0,03 признает исправный транзистор дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор признан дефектным. Найти вероятность того, что на самом деле транзистор исправный.

11. При передаче сообщений «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 0,4 сообщений «точка» и $1/3$ сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

12. На радиолокатор с вероятностью 0,8 поступает полезный сигнал, с вероятностью 0,2 — сигнал с помехой. Полезный сигнал приемное устройство регистрирует с вероятностью 0,7, помеху — с вероятностью 0,3. Устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

13. Прибор состоит из двух последовательно включенных блоков. Надежность первого блока равна 0,9, второго — 0,8. Во время испытания зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказал только первый блок.

14. Нормальный режим функционирования робота зарегистрирован в 60% случаях работы, форсированный — в 30% случаях и недогруженный — в 10%. Его надежность при нормальном режиме равна 0,8, при форсированном — 0,6, при недогруженном — 0,9. Найти полную надежность робота.

15. В продажу поступили телевизоры от трех фирм. Продукция первой фирмы содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второй — 10% и третьей — 5%. Найти вероятность приобретения исправного телевизора, если в магазин поступило 30% телевизоров от первой фирмы, 20% от второй и 50% от третьей.

16. Система обнаружения самолета из-за помех может давать ложные показания с вероятностью 0,05, а при наличии цели система обнару-

живает ее с вероятностью 0,9. Вероятность появления цели в зоне обнаружения 0,25. Найти вероятность ложной тревоги.

17. По летящей цели производится три выстрела. Вероятность попадания в нее при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. При одном попадании цель будет сбита с вероятностью 0,3, при двух — 0,6, при трех попаданиях цель будет сбита наверняка. Найти вероятность того, что цель будет сбита.

18. На склад поступают детали с трех станков. Вероятность выпуска брака на первом станке равна 0,03, на втором — 0,02, на третьем — 0,01. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго, а третьего в два раза больше второго. Найти вероятность того, что:

- 1) наудачу взятая со склада деталь будет бракованной;
- 2) она произведена на втором станке.

19. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в пропорции 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний — 0,3, мелкий — 0,1. Найти вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее.

20. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-2 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-2, равны соответственно 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разладе автомата. Найти вероятность того, что он снабжен сигнализатором С-1.

21. Вступительные экзамены сдают 500 абитуриентов МТ факультета и 300 МС факультета. Вероятность успешной сдачи экзаменов на МТ равна 0,6, на МС — 0,7. Наудачу выбранный абитуриент успешно сдал экзамен. Найти вероятность, что он с МТ факультета.

22. Три токаря обрабатывают однотипные детали. Первый обрабатывает за смену 40 деталей, второй — 45, третий — 50. Вероятность получения брака при изготовлении одной детали для первого токаря равна 0,03, для второго — 0,05, для третьего — 0,02. Из общей выработки за смену наудачу выбрана деталь, оказавшаяся бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена первым токарем.

23. Из 45 однотипных деталей 10 изготовлены на первом станке-автомате, из них 2 нестандартные, 15 — на втором, из них одна нестан-

дартная, 20 — на третьем, из них три нестандартные. Все детали поступают на общий конвейер. Взятая наудачу с него деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

24. Имеются три партии компьютеров в количестве 25, 35 и 40 штук. Вероятность того, что компьютеры, поставляемые разными фирмами-производителями, проработают без ремонта заданное время, равны для этих партий соответственно 0,75; 0,82 и 0,9. Найти вероятность того, что наудачу выбранный компьютер

- 1) проработает без ремонта заданное время;
- 2) вышедший из строя компьютер из второй партии.

25. Экзамен по математике сдают 25 студентов физического факультета и 30 студентов химического факультета. Вероятность успешной сдачи экзаменов на физическом факультете равна 0,8, на химическом — 0,7. Наудачу выбранный студент успешно сдал экзамен. Какова вероятность того, что он с физического факультета.

26. Опытный образец, чтобы быть запущенным в серию, должен выдержать два испытания: первое с вероятностью 0,6 и второе — с вероятностью 0,7; при этом если образец не выдерживает второе испытание, то после восстановления образца оно проводится еще раз. Найти вероятность того, что образец выдержит испытания и будет запущен в серию.

27. В сборочный цех попадают детали с трех станков-автоматов, первый из которых дает 0,3% брака, второй — 0,1% и третий — 0,2%. Найти вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с автоматов поступило соответственно 500, 200 и 300 деталей.

28. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе положительную оценку получили 15 из 20 студентов, во второй — 20 из 25 и в третьей — 18 из 20. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа с положительной оценкой написана студентом третьей группы.

29. На складе телеателье 60 кинескопов, из которых 15 изготовлены первым заводом, 20 — вторым, остальные — третьим. Вероятность выпуска кинескопа высшего качества на первом заводе $\frac{2}{3}$, на втором — $\frac{3}{4}$, на третьем — $\frac{4}{5}$. Найти вероятность того, что наудачу взятый со склада кинескоп, оказавшийся высшего качества, изготовлен на третьем заводе.

30. Изделие проверяется одним из двух контролеров. Вероятность того, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,55, ко второму — 0,45. Вероятность того, что изделие признано стандартным первым контролером, равна 0,9, а вторым — 0,98. Изделие признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

§ 6. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим последовательность n испытаний, например, n подбрасываний монеты (монета не обязательно симметрична). Результат наблюдений запишем в виде упорядоченного набора (a_1, \dots, a_n) , где $a_i = 1$ в случае появления «герба» (назовем это «успехом») и $a_i = 0$ в случае появления «решетки» («неуспех»). Пространство всех элементарных исходов имеет следующую структуру:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n), a_i = 0, 1\}.$$

Припишем каждому элементарному событию $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ вероятность $p(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}$, где числа p и q неотрицательны и $p + q = 1$.

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где \mathfrak{A} — система всех подмножеств пространства Ω , $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \in \mathfrak{A}$, определяет вероятностную модель, отвечающую n независимым испытаниям с двумя исходами, которую называют *схемой Бернулли*.

Рассмотрим события

$$A_k = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n), a_1 + \dots + a_n = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

означающие, что в n испытаниях произойдет ровно k «успехов». Вероятность события A_k будем обозначать $P_n(k)$, она равна

$$P(A_k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Набор вероятностей $P(A_0), \dots, P(A_n)$ называется *биномиальным распределением*.

Наивероятнейшее число k_0 появления «успехов» в n испытаниях удовлетворяет неравенствам

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Если $np - q$ не является целым числом, то k_0 единственно. Если $np - q$ — целое число, то наивероятнейших значений два: $k_0^1 = np - q$ и $k_0^2 = np + p = k_0^1 + 1$.

Поскольку при больших n ($n > 20$) непосредственное использование формулы для вероятностей биномиального распределения сложно, то для приближенного вычисления $P_n(k)$ используют предельные теоремы: локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа и теорему Пуассона.

1. Локальная предельная теорема применяется, если надо вычислить вероятность $P_n(k)$ и $npq > 10$. Сначала найдем

$$\sigma = \sqrt{npq} \text{ и } x = \frac{k - np}{\sigma}.$$

Из таблицы или с помощью калькулятора находим приближенное значение функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Если $x < 0$, пользуемся четностью функции $\varphi(x)$. Вероятность $P_n(k)$ находится из приближенного равенства

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(k - np)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа применяется для приближенного нахождения сумм вероятностей $P_n(k)$. Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что событие A наступит число раз, не меньше k_1 и не больше k_2 , то есть

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Предполагаем, что число $k_2 - k_1$ достаточно велико. Вначале находим приближенные значения

$$\sigma = \sqrt{npq}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma}.$$

По таблице находим значения функции Лапласа

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad i = 1, 2,$$

учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная. Теорема Муавра–Лапласа утверждает, что

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

3. Теорема Пуассона применяется, если n велико, а npq мало (то есть $npq < 10$.) Это бывает в том случае, если вероятность p или q является достаточно маленьким числом. Пусть p мало (если q мало, можно понимать q как вероятность «успеха»). Найдем $\lambda = np$, тогда по теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться калькулятором или таблицей распределения Пуассона.

Пример 1. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника три партии из четырех или пять из восьми?

Решение. По условию, вероятность успеха в отдельно взятом испытании, $p = \frac{1}{2}$. Обозначим через $P_4(3)$ вероятность выиграть у равносильного противника три партии из четырех и через $P_8(5)$ вероятность выиграть пять партий из восьми, тогда

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 (1-p)^{4-3} = \frac{4!}{3! 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 (1-p)^3 = \frac{8!}{5! 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{56}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Таким образом, выполнено неравенство $P_4(3) > P_8(5)$, которое означает, что более вероятно выиграть у равносильного противника три партии из четырех, чем пять из восьми.

Пример 2. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

Решение. Найдем вероятность успеха p в одном испытании, которое заключается в бросании трех игральных костей. Число всех элементарных исходов в этом испытании равно 6^3 , благоприятным исходом является только один — это исход $(1, 1, 1)$, поэтому $p = \frac{1}{6^3}$. Всего проводится пять независимых испытаний, в которых должны произойти ровно

два успеха, следовательно,

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6^3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^3 = \frac{10(6^3 - 1)^3}{6^{15}}.$$

Пример 3. В единичный квадрат вписан круг. В квадрат случайным образом бросают 6 точек. Найти вероятность того, что 4 из них попадут в круг, а 2 не попадут.

Решение. Нужно найти вероятность, что из 6 независимых испытаний — бросаний точки в квадрат, произойдет ровно 4 «успеха» — попаданий этой точки в круг. Согласно геометрическому определению вероятностей, для одной точки вероятность попасть в круг равна отношению площадей этого круга и квадрата

$$p = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\pi}{4}.$$

Вероятность, что точка не попадает в круг, $q = 1 - \frac{\pi}{4}$, поэтому вероятность того, что в круг попадут ровно 4 точки, равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Пример 4. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие A происходит:

- а) точно 270 раз;
- б) не меньше чем 230 и не больше чем 270 раз;
- в) не меньше чем 270 раз.

Решение. Найдем $npq = 700 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 159,25 > 10$, поэтому можно применять локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа.

- а) Задано $n = 700$, $p = 0,35$, $k = 270$, тогда

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{159,25} \approx 12,6;$$

$$x \approx \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx \frac{25}{12,6} \approx 1,98.$$

Из таблицы для функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ найдем $\varphi(1,98) \approx 0,0562$, тогда вероятность, что событие A происходит ровно 270 раз, равна

$$P_{700}(270) \approx \frac{0,05618}{12,6} \approx 0,00446.$$

б) Для вычисления вероятности $P_{700}(230, 270)$ найдем

$$x_1 \approx \frac{230 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx -1,19, \quad x_2 \approx \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx \frac{25}{12,6} \approx 1,98.$$

Найдем приближенное значение вероятности, используя таблицу для функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} P_{700}(230, 270) &\approx \Phi(1,98) - \Phi(-1,19) = \Phi(1,98) + \Phi(1,19) \approx \\ &\approx 0,4761 + 0,3830 \approx 0,8591. \end{aligned}$$

в) Здесь $x_1 \approx 1,98$, $x_2 \approx \frac{700 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx 36,1$. Найдем

$$P_{700}(270, 700) \approx \Phi(36,1) - \Phi(1,98) \approx 0,5 - 0,4761 \approx 0,0239.$$

Пример 5. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $1/200$. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

- а) точно одно неправильное соединение;
- б) не больше чем 2 неправильных соединения;
- в) не меньше чем 3 неправильных соединения.

Решение. Здесь количество испытаний n велико, а npq мало, поэтому воспользуемся теоремой Пуассона.

а) Найдем $\lambda = np = 1$, тогда приближенное значение вероятности $P_{200}(1)$ равно $P_{200}(1) \approx e^{-1} \approx 0,3679$.

б) Найдем вероятность

$$\begin{aligned} P_{200}(0, 2) &= P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx \\ &\approx 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 \approx 0,9197. \end{aligned}$$

в) Найдем вероятность противоположного события, так как в этом случае нужно вычислять намного меньше слагаемых:

$$P_{200}(3, 200) = 1 - P_{200}(0, 2) \approx 1 - 0,9197 \approx 0,0803.$$

Задача 7.

Варианты 1 – 30.

1. Станок-автомат производит $2/3$ числа изделий первого сорта и $1/3$ — второго. Найти:

1) ряд распределения случайного числа первосортных изделий среди пяти отобранных изделий;

2) что является более вероятным: получить два первосортных изделия среди трех отобранных наудачу или три первосортных среди пяти наудачу отобранных?

2. Изделия, изготавливаемые на станке-автомате, в среднем имеют 20% изделий первого сорта. Найти вероятность того, что среди 5 изделий будет:

1) 4 изделия первого сорта;

2) хотя бы 4 изделия первого сорта.

3. При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20% — вторым и 10% — третьим. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, можно было утверждать, что доля первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали по абсолютной величине не более чем на 0,05.

4. При установившемся технологическом процессе станок-автомат производит 75% продукции высшего качества. Найти вероятность того, что в партии из 150 изделий окажется наивероятнейшее число изделий высшего качества.

5. По техническим условиям диаметр валиков, изготавливаемых на автоматическом станке, должен быть не менее 37,8 мм и не более 37,9 мм. Настроенный станок производит в среднем 98% валиков, удовлетворяющих предъявляемым требованиям. Определить вероятность того, что среди 900 изготовленных валиков будет бракованных: а) от 3% и более; б) менее 2%.

6. В большой серии испытаний 70% проб указывают на наличие и 30% на отсутствие загрязнения. Найти вероятность того, что при взятии 8 проб пять из них будут указывать на загрязнение.

7. Настроенный станок производит в среднем 80% валиков, диаметр которых укладывается в поле допуска. Найти вероятность того, что среди 100 валиков будет не менее 75 валиков, диаметр которых укладывается в поле допуска.

8. Передается код из 6 импульсов. Найти вероятность того, что не менее двух импульсов будут искажены, если искажения независимы и появляются с вероятностью 0,25.

9. Вероятность допущения дефекта при производстве механизма равна 0,4. Отобрано для контроля 500 механизмов. Найти величину наибольшего отклонения частоты изготовления механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

10. Среди деталей, изготавливаемых в цехе, в среднем 4% брака. Найти вероятность того, что среди 6 деталей, взятых на контроль:

- 1) две детали будут бракованными;
- 2) не более двух деталей будут бракованными;
- 3) бракованными окажутся от 2 до 4 деталей.

11. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при одном броске равна 0,4. Сколько нужно произвести бросков, чтобы наивероятнейшее число попаданий мяча в корзину оказалось равным 12?

12. При проверке качества изготовленных на заводе часов установлено, что в среднем 2% часов нуждаются в дополнительной регулировке. Проверяется качество 200 изготовленных часов. Найти вероятность того, что среди них 190 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке.

13. Многие ботаники делали опыты по скрещиванию желтого (гибридного) гороха. По гипотезе Менделя вероятность появления зеленого гороха в таких опытах равна $1/4$. Найти вероятность того, что при 35000 скрещиваниях зеленый горох будет получен от 8750 до 8900 раз.

14. При проверке качества микросхем установлено, что 95% из них служит не менее гарантированного срока в 2000 часов. Найти вероятность того, что в партии из 500 штук доля микросхем со сроком службы менее гарантированного будет отличаться от вероятности изготовления такой микросхемы не более, чем на 0,02.

15. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Найти вероятность того, что в партии из 2000 ламп:

- 1) число стандартных — не менее 101 штук;
- 2) число нестандартных — менее 201 штуки.

16. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

17. Вероятность попадания в «десятку» при одном выстреле равна 0,2. Найти наименьшее число независимых выстрелов, которые нужно

произвести, чтобы с вероятностью, не менее 0,9 попасть хотя бы раз в «десятку».

18. Батарея дала 14 выстрелов по военному объекту с вероятностью попадания в него, равной 0,2. Найти

- 1) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность;
- 2) вероятность разрушения объекта, если для этого требуется не менее 4 попаданий.

19. Имеется 100 приборов, работающих независимо друг от друга в одинаковых условиях и подключаемых к питанию с вероятностью 0,8 за период функционирования. Найти вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся подключенными к питанию от 70 до 86 приборов.

20. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна $\frac{2}{3}$, а отрицательной — $\frac{1}{3}$.

21. Установлено, что в среднем 0,5% шариков для шарикоподшипника оказываются бракованными. Найти вероятность того, что среди 10000 шариков бракованными окажутся: 1) 40 штук; 2) 50 штук; 3) 60 штук.

22. При проверке качества изготовленных на заводе часов установлено, что в среднем 98% их отвечает предъявляемым требованиям, а 2% нуждается в дополнительной регулировке. Проверяется качество 300 изготовленных часов. Если при этом среди них обнаружится 11 или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, то вся партия возвращается заводу для доработки. Найти вероятность того, что партия будет принята.

23. Вероятность пробоя одного конденсатора за время равна 0,2. Найти вероятность того, что за время из 100 конденсаторов, работающих независимо, выйдут из строя: 1) не менее 20 конденсаторов; 2) менее 28 конденсаторов; 3) от 14 до 26 конденсаторов.

24. Вероятность появления события в каждом из независимых повторных испытаний равна 0,8. Сколько испытаний нужно провести, чтобы событие появилось не менее 75 раз с вероятностью 0,9?

25. Вероятность изготовления деталей номинальных размеров равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажутся 50

деталей номинальных размеров.

26. Визуальное наблюдение искусственного спутника Земли (ИСЗ) возможно в данном пункте с вероятностью 0,1 (отсутствует облачность) каждый раз, когда он пролетает над этим пунктом. Сколько раз должен пролететь ИСЗ над пунктом наблюдения, чтобы с вероятностью не меньше 0,9975 (практически достоверно), удалось сделать над ним не менее пяти наблюдений?

27. Найти вероятность того, что на 243-километровой трассе переключение передач (событие А) произойдет 70 раз, если вероятность такого переключения на каждом километре трассы равна 0,25.

28. Вероятность появления события в каждом из n независимых повторных испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится при 100 испытаниях:

- 1) не менее 75 раз и не более 90 раз;
- 2) не менее 75 раз; 3) не более 74 раз.

29. Устройство состоит из 1000 независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) 0,002 вероятностью отказа каждого элемента за время T . Найти вероятность того, что за время T откажут три элемента.

30. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T . Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

§ 7. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ — конечное или счетное пространство элементарных исходов.

Определение 1. Любая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется (дискретной) *случайной величиной*, заданной на множестве Ω .

Например, если монету бросили 2 раза, то можем определить случайные величины ξ_1 — число выпавших гербов, ξ_2 — разность между числом гербов и числом решек.

Пусть $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принимает значения x_1, \dots, x_n . Обозначим через $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество значений этой случайной величины. Если ξ принимает счетное число значений, то $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Определение 2. Набор чисел $p_k = P(\xi = x_k)$, $x_k \in X$, называется *распределением вероятностей случайной величины ξ* .

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\},$$

определенная для любого $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины ξ* .

Случайная величина ξ называется *дискретной*, если ее множество значений X не более чем счетное. Дискретную случайную величину можно представить в виде суммы

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k), \quad \text{где } A_k = \{\omega : \xi = x_k\},$$

$I(A_k)$ — индикатор множества A_k . Если множество значений X — конечное, то случайная величина ξ называется *простой*.

ОСНОВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Вырожденное распределение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, сосредоточенное в точке a , если вероятность $P\{\xi = a\} = 1$. Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

2. Распределение Бернулли. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p , $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

3. Биномиальное распределение. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) , $0 < p < 1$, $n \geq 1$, если

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{k=1}^l C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & l \leq x < l+1, \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

4. Геометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p , $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. Распределение Пуассона. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ , $\lambda > 0$, если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Свойства функций распределения

Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_1, x_2, \dots из множества X .

- 1) $F(x)$ — ограниченная функция, $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) $F(x)$ — неубывающая функция, то есть, если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- 3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; кроме того, $F(x) = 0$, если $x < x_{min}$, $F(x) = 1$, если $x \geq x_{max}$.
- 4) $F(x)$ непрерывна справа ($F(x+0) = F(x)$) и кусочно-постоянная; $F(x)$ возрастает в точках $x_k \in X$ скачками величиной

$$p_k = P(\xi = x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0).$$

Пусть ξ_1, ξ_2 — случайные величины, принимающие значения в конечном (или счетном) множестве $X \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Случайные величины ξ_1, ξ_2 называются *независимыми*, если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ выполнено равенство

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = P(\xi_1 = x_1) \cdot P(\xi_2 = x_2).$$

Числовые характеристики случайных величин

Рассматриваем дискретные случайные величины, представимые в виде суммы

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k),$$

где $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$, $I(A_k)$ — индикатор множества A_k .

Определение 4. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k).$$

Определение 5. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Для дискретной случайной величины $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k)$ дисперсия равна

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 P(A_k).$$

Дисперсию также можно находить по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, где

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P(A_k).$$

Определение 6. Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Определение 7. Ковариацией случайных величин ξ и η называется число

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется отношение

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Со свойствами числовых характеристик дискретных случайных величин можно познакомиться в [2, 3, 5, 10, 13, 15].

Пример 1. Проводится 5 независимых подбрасываний монеты. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины ξ — числа гербов, появившихся при этих испытаниях.

Решение. Случайная величина ξ принимает значения $0, \dots, 5$. Можем рассматривать ξ как количество успехов в 5 независимых испытаниях с вероятностью успеха $p = 1/2$ в одном испытании, поэтому вероятности $P(\xi = k)$ находятся по формуле Бернулли:

$$P(\xi = k) = P_5(k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Получаем следующий закон распределения величины X :

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= P(\xi = 5) = \frac{1}{32}, \\ P(\xi = 1) &= P(\xi = 4) = \frac{5}{32}, \\ P(\xi = 2) &= P(\xi = 3) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Найдем функцию распределения ξ , пользуясь определением

$$F(x) = F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}.$$

Поскольку случайная величина ξ не может принимать значения, меньшие нуля, то $F(x) = 0$ при $x < 0$. Рассмотрим $0 \leq x < 1$. Для таких значений x неравенство $\xi \leq x$ выполняется, если $X = 0$, поэтому

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) = \frac{1}{32}.$$

Если $1 \leq x < 2$, то

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}.$$

Рассуждая аналогичным образом, находим функцию $F(x)$ для всех зна-

чений x :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/32, & 0 \leq x < 1, \\ 3/16, & 1 \leq x < 2, \\ 1/2, & 2 \leq x < 3, \\ 13/16, & 3 \leq x < 4, \\ 31/32, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

Пример 2. 1) Игральную кость подбросили один раз. Пусть ξ — число очков, выпавшее на этой кости. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ .

2) Эксперимент состоит в подбрасывании n игральных костей, ζ — сумма очков, выпавших на всех этих костях. Найти $M\zeta$, $D\zeta$ в случае $n = 2$, $n = 8$.

Решение. 1) Найдем распределение дискретной случайной величины ξ . Очевидно, что $P(\xi = 1) = \dots = P(\xi = 6) = \frac{1}{6}$. Тогда

$$M\xi = \sum_{k=1}^6 kP(\xi = k) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

Дисперсию удобнее находить по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, найдем сначала

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^6 k^2P(\xi = k) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6},$$

тогда

$$D\xi = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

2) Для $n = 2$ составим закон распределения величины ζ :

$$\begin{aligned} P(\zeta = 2) = P(\zeta = 12) &= \frac{1}{36}, & P(\zeta = 3) = P(\zeta = 11) &= \frac{2}{36}, \\ P(\zeta = 4) = P(\zeta = 10) &= \frac{3}{36}, & P(\zeta = 5) = P(\zeta = 9) &= \frac{4}{36}, \\ P(\zeta = 6) = P(\zeta = 8) &= \frac{5}{36}, & P(\zeta = 7) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(данные вероятности легко найти, если посмотреть на таблицу в примере 1 параграфа 1). Аналогично пункту 1) можно подсчитать, что

$$M\zeta = 7, \quad D\zeta = \frac{35}{6}.$$

Понятно, что для $n = 8$ такой способ вычисления числовых характеристик уже не годится. Представим ζ в виде суммы

$$\zeta = \xi_1 + \dots + \xi_8,$$

где через ξ_k обозначена случайная величина, равная числу очков, выпавших на k -ой игральной кости, $k = 1, \dots, 8$. Величины ξ_k имеют то же распределение, что и величина ξ из пункта 1), поэтому

$$M\zeta = M\xi_1 + \dots + M\xi_8 = 8M\xi = 28.$$

Поскольку случайные величины ξ_1, \dots, ξ_8 независимы, то

$$D\zeta = D\xi_1 + \dots + D\xi_8 = 8D\xi = \frac{70}{3}.$$

Пример 3. Три различных шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике, Y — число шаров в четвертом ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y , их ковариацию и корреляцию. Являются ли величины X и Y независимыми?

Решение. В данном эксперименте — размещении трех различных шаров по четырем ящикам, число всех возможных исходов равно $N(\Omega) = 4^3 = 64$. Случайные величины X и Y могут принимать значения $0, 1, 2, 3$, найдем совместные вероятности $P(X = i, Y = j)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Если $X = 0, Y = 0$, то все шары находятся во втором и третьем ящике, число таких исходов равно $2^3 = 8$, поэтому

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

Если $X = 1, Y = 0$, то два оставшихся шара раскладываем во второй и третий ящик, это можно сделать четырьмя способами, кроме того, шар для первого ящика выбираем тремя способами, поэтому

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{3 \cdot 4}{64} = \frac{3}{16}.$$

Пусть $X = 2, Y = 0$, тогда шары для первого ящика выбираем тремя способами, еще один шар нужно положить во второй или третий ящик,

это можно сделать двумя способами, следовательно,

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{3 \cdot 2}{64} = \frac{3}{32}.$$

Если $X = 3, Y = 0$, то существует всего один способ такого размещения, поэтому $P(X = 3, Y = 0) = \frac{1}{64}$.

Пусть $X = 1, Y = 1$, тогда в первый ящик мы кладем один шар тремя способами, в четвертый — один шар двумя способами и оставшийся шар размещаем по двум ящикам двумя способами, поэтому

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}.$$

Если $X = 2, Y = 1$, существуют три способа размещения шаров, следовательно,

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{64}.$$

Отметим, что все совместные вероятности в данной задаче обладают свойством симметрии, то есть

$$P(X = x, Y = y) = P(X = y, Y = x), \quad \text{где } x, y = 0, 1, 2, 3.$$

Кроме того, поскольку общее число шаров в первом и четвертом ящиках не превосходит трех, то $P(X = x, Y = y) = 0$, если $x + y \geq 4$. Все полученные совместные вероятности выписаны в таблице 1.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{27}{64}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	0	$\frac{27}{64}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0	0	$\frac{9}{64}$
3	$\frac{1}{64}$	0	0	0	$\frac{1}{64}$
	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

Табл. 1. Совместное распределение величин X и Y

В таблице также записаны суммы вероятностей по строкам и по столбцам. Например, сумма по первой строке равна вероятности того, что $X = 0$:

$$P(X = 0) = \sum_{y=0}^3 P(X = 0, Y = y) = \frac{27}{64}.$$

Сумма вероятностей второй строки равна $P(X = 1)$, и так далее. Таким образом, в правом столбце мы получили набор вероятностей для случайной величины X ; в нижней строке получили набор вероятностей для величины Y . Эти величины имеют одинаковое распределение, поэтому у них равные числовые характеристики:

$$\begin{aligned} MX = MY &= 0 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}. \\ MX^2 = MY^2 &= 0 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 4 \cdot \frac{9}{64} + 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}, \quad DY = \frac{9}{16}.$$

Произведение случайных величин X и Y может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, найдем соответствующие вероятности. Отметим, что равенство $XY = 0$ равносильно тому, что $X = 0$ или $Y = 0$, поэтому из таблицы находим:

$$P(XY = 0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{23}{32}.$$

Найдем следующие вероятности, также используя таблицу:

$$\begin{aligned} P(XY = 1) &= P(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{16}, \\ P(XY = 2) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32}, \\ P(XY = 3) &= P(XY = 4) = P(XY = 6) = P(XY = 9) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M(XY) &= 0 \cdot \frac{23}{32} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{3}{32} + 0 = \frac{3}{8}, \\ \text{Cov}(X, Y) &= M(XY) - MXMY = \frac{3}{8} - \frac{9}{16} = -\frac{3}{16}, \\ \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Случайные величины X и Y зависимы, поскольку

$$\frac{1}{8} = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{27^2}{64^2}.$$

Задача 8.

Варианты 1 – 30.

1. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения: $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,8$, $P(Y = 0,5) = 0,3$, $P(Y = 1) = 0,7$. Составить закон распределения произведения $X \cdot Y$ и построить функцию распределения этой случайной величины.

2. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения: $P(X = 4) = 0,2$, $P(X = 8) = 0,8$, $P(Y = 1) = 0,3$, $P(Y = 2) = 0,7$. Составить закон распределения частного X/Y и построить функцию распределения этой случайной величины.

3. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения: $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = 0,4$, $P(X = 2) = 0,4$, $P(Y = 0) = 0,5$, $P(Y = 1) = 0,5$. Составить закон распределения суммы $X + Y$ и построить функцию распределения этой случайной величины.

4. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения: $P(X = 2) = 0,4$, $P(X = 3) = 0,6$, $P(Y = 0) = 0,7$, $P(Y = 1) = 0,3$. Составить закон распределения разности $X - Y$ и построить функцию распределения этой случайной величины.

5. Распределение дискретной случайной величины X определяется формулами $P\{X = i\} = \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Найти распределение и построить функции распределения величин $X_1 = -X$, $X_2 = X - 2$.

6. Распределение дискретной случайной величины X определяется формулами $P\{X = i\} = \frac{1}{5}$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти распределение и построить функции распределения величин $X_1 = -X$, $X_2 = |X|$.

В вариантах 7 – 30 найти ряд распределения, выписать функцию распределения случайной величины X и построить график функции распределения.

7. Проводится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $0,4$. Случайная величина X — число появления события A в трех опытах.

8. Монета подбрасывается 5 раз. Случайная величина X — число

выпавших гербов.

9. Монета подбрасывается 6 раз. Случайная величина X — разность между числом выпавших гербов и решек.

10. Проводится 6 независимых бросаний игральной кости, в каждом из которых «шестерка» появляется с вероятностью $1/6$. Случайная величина X — числа появлений «6» в 6 опытах.

11. Баскетболист 5 раз бросает мяч в корзину, при каждом из бросков мяч у него может попасть в корзину с вероятностью $0,6$. Случайная величина X — числа попаданий в корзину при этих 5 бросках.

12. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет «3». Случайная величина X — количество понадобившихся для этого бросков.

13. Футболист 6 раз пытается забить мяч в ворота, при каждой попытке мяч у него может попасть в ворота с вероятностью $0,5$. Случайная величина X — число попаданий в ворота при этих 6 попытках.

14. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка $0,5$, для второго — $0,8$. Случайная величина X — разность между числом попаданий первого и второго стрелков.

15. Баскетболист может попасть мячом в корзину при одном броске с вероятностью $0,4$. Он бросает мяч в корзину до тех пор, пока не попадет. Случайная величина X — количество понадобившихся для этого бросков.

16. В ящике находятся 6 белых и 4 черных шара. Из ящика без возвращения достают 3 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров среди извлеченных.

17. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка $0,6$ для второго — $0,7$. Случайная величина X — суммарное число попаданий первого и второго стрелков.

18. В ящике находятся 5 белых и 3 черных шара. Из ящика без возвращения достают 3 шара. Случайная величина X равна числу черных шаров среди извлеченных.

19. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются по трем ящикам. Случайная величина X равна числу занятых ящиков.

20. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются

ся по трем ящикам. Случайная величина X равна числу шаров в первом ящике.

21. Среди 15 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Вася купил 3 билета. Случайная величина X равна количеству выигрышных билетов, которые ему удалось купить.

22. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются по трем ящикам. Случайная величина X равна суммарному числу шаров в первом и втором ящиках.

23. Четыре одинаковых шарика случайным образом раскладываются по четырем ящикам. Случайная величина X равна числу занятых ящиков.

24. Четыре одинаковых шарика случайным образом раскладываются по четырем ящикам. Случайная величина X равна числу шаров в первом ящике.

25. Два спортсмена играют 4 партии в теннис, в каждой из которых первый может выиграть с вероятностью 0,6, а второй — с вероятностью 0,4. Случайная величина X равна количеству выигранных партий для первого спортсмена.

26. Из колоды в 36 карт случайным образом достали 3 карты. Случайная величина X — число тузов среди извлеченных карт.

27. В ящике находится 20 годных и 5 дефектных шурупов. Случайным образом достали 4 шурупа. Случайная величина X — число годных шурупов среди извлеченных.

28. Среди 16 команд спортсменов есть 2 наиболее сильные. Эти команды делят на 2 подгруппы по 8 команд в каждой. Случайная величина X — число сильных команд в первой подгруппе.

29. В первом ящике 6 белых и 4 черных шара, во втором — 4 белых и 4 черных. Из первого во второй ящик случайным образом перекалывают два шара. После этого шары во втором ящике перемешивают и затем достают из него 2 шара. Случайная величина X — число белых шаров среди извлеченных.

30. В первой коробке лежат 5 красных и 5 синих карандашей, во второй — 4 синих и 4 зеленых. Из первой коробки во вторую случайным образом перекалывают два карандаша. После этого достают 2 карандаша из второй коробки. Случайная величина X — число синих карандашей среди извлеченных.

Задача 9.

Варианты 1 – 30.

В вариантах 1 – 25 найти распределение, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

1. В ящике находятся 6 белых и 4 черных шара. Из ящика без возвращения достают 3 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров среди извлеченных.

2. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,6 для второго — 0,7. Случайная величина X — суммарное число попаданий первого и второго стрелков.

3. В ящике находятся 5 белых и 3 черных шара. Из ящика без возвращения достают 3 шара. Случайная величина X равна числу черных шаров среди извлеченных.

4. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются по трем ящикам. Случайная величина X равна числу занятых ящиков.

5. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются по трем ящикам. Случайная величина X равна числу шаров в первом ящике.

6. Среди 15 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Вася купил 3 билета. Случайная величина X равна количеству выигрышных билетов, которые ему удалось купить.

7. Четыре шара разного цвета случайным образом раскладываются по трем ящикам. Случайная величина X равна суммарному числу шаров в первом и втором ящиках.

8. Четыре одинаковых шарика случайным образом раскладываются по четырем ящикам. Случайная величина X равна числу занятых ящиков.

9. Четыре одинаковых шарика случайным образом раскладываются по четырем ящикам. Случайная величина X равна числу шаров в первом ящике.

10. Два спортсмена играют 4 партии в теннис, в каждой из которых первый может выиграть с вероятностью 0,6, а второй — с вероятностью

0,4. Случайная величина X равна количеству выигранных партий для первого спортсмена.

11. Из колоды в 36 карт случайным образом достали 3 карты. Случайная величина X — число тузов среди извлеченных карт.

12. В ящике находится 20 годных и 5 дефектных шурупов. Случайным образом достали 4 шурупа. Случайная величина X — число годных шурупов среди извлеченных.

13. Среди 16 команд спортсменов есть 2 наиболее сильные. Эти команды делят на 2 подгруппы по 8 команд в каждой. Случайная величина X — число сильных команд в первой подгруппе.

14. В первом ящике 6 белых и 4 черных шара, во втором — 4 белых и 4 черных. Из первого во второй ящик случайным образом перекадывают два шара. После этого шары во втором ящике перемешивают и затем достают из него 2 шара. Случайная величина X — число белых шаров среди извлеченных.

15. В первой коробке лежат 5 красных и 5 синих карандашей, во второй — 4 синих и 4 зеленых. Из первой коробки во вторую случайным образом перекадывают два карандаша. После этого достают 2 карандаша из второй коробки. Случайная величина X — число синих карандашей среди извлеченных.

16. Проводится 6 независимых бросаний игральной кости, в каждом из которых «шестерка» появляется с вероятностью $1/6$. Случайная величина X — числа появлений «6» в 6 опытах.

17. Баскетболист 5 раз бросает мяч в корзину, при каждом из бросков мяч у него может попасть в корзину с вероятностью 0,6. Случайная величина X — числа попаданий в корзину при этих 5 бросках.

18. Проводится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Случайная величина X — число появления события A в трех опытах.

19. Монета подбрасывается 8 раз. Рассматривается случайная величина X — число выпавших гербов.

20. Монета подбрасывается 6 раз. Случайная величина X — разность между числом выпавших гербов и решек.

21. Проводится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,2. Случайная величина X — число появлений события \bar{A} , противоположного событию A в этих 5 опытах.

22. Событие A состоит в появлении двух гербов при бросании трех монет. Производится 4-кратное бросание трех монет. Случайная величина X — число появления события A при 4 испытаниях.

23. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,8. Случайная величина X равна суммарному количеству попаданий первого и второго стрелков.

24. Футболист 6 раз пытается забить мяч в ворота, при каждой попытке мяч у него может попасть в ворота с вероятностью 0,5. Случайная величина X — число попаданий в ворота при этих 6 попытках.

25. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,5, для второго — 0,8. Случайная величина X — разность между числом попаданий первого и второго стрелков.

26. Случайные величины X_1 и X_2 независимы, $MX_1 = 1$, $MX_2 = 2$, $DX_1 = 1$, $DX_2 = 4$. Найти математическое ожидание случайной величины $X_1^2 + 2X_2^2 - X_1X_2 - 4X_1 + 4$.

27. Случайные величины X_1 и X_2 независимы, $MX_1 = 3$, $MX_2 = 2$, $DX_1 = 1$, $DX_2 = 4$. Найти математическое ожидание случайной величины $(X_1 - X_2 + 1)^2$.

28. Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , которая равна наименьшему из очков, выпавших на двух игральные кости.

29. Дискретные независимые случайные величины X_1 и X_2 заданы законами распределения:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= 0,2, & P(X_1 = 2) &= 0,8, \\ P(X_2 = 0,5) &= 0,3, & P(X_2 = 1) &= 0,7. \end{aligned}$$

Найти математическое ожидание произведения $X_1 \cdot X_2$ двумя способами: 1) составив закон распределения $X_1 \cdot X_2$; 2) пользуясь свойствами математического ожидания.

30. Дискретные независимые случайные величины X_1 и X_2 заданы законами распределения:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= 0,4, & P(X_1 = 2) &= 0,6, \\ P(X_2 = 0,5) &= 0,7, & P(X_2 = 1) &= 0,3. \end{aligned}$$

Найти математическое ожидание суммы $X_1 + X_2$ двумя способами: 1) составив закон распределения $X_1 \cdot X_2$; 2) пользуясь свойствами математического ожидания.

Задача 10.

Варианты 1 – 30. Найти совместное распределение случайных величин X и Y , ковариацию и коэффициент корреляции этих величин. Являются ли величины X и Y независимыми?

1. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков на первой кости и Y — большее из двух выпавших чисел.

2. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — произведение выпавших очков.

3. Бросаются 3 игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — число «шестерок».

4. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — сумма выпавших очков.

5. Три шарика разного цвета случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Случайная величина X — число занятых ящиков, Y — число шаров в первом ящике.

6. Три одинаковых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Случайная величина X — число занятых ящиков, Y — число шаров в первом ящике.

7. Три шарика разного цвета случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике и Y — число шаров в четвертом ящике.

8. Три одинаковых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике и Y — число шаров в четвертом ящике.

9. В ящике находятся 4 белых, 4 красных и 2 черных шара. Из ящика без возвращения достают 2 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров среди извлеченных, Y — числу черных шаров.

10. В коробке лежат 2 желтых, 3 красных и 5 синих карандашей. Из коробки достают 2 карандаша (без возвращения). Случайная величина X равна числу красных карандашей среди извлеченных, Y — числу синих карандашей.

11. В коробке лежат 2 желтых, 2 красных и 4 синих карандашей.

Из коробки достают 3 карандаша (без возвращения). Случайная величина X равна числу красных карандашей среди извлеченных, Y — числу синих карандашей.

12. Подбросили 5 монет. Случайная величина X — число гербов на первой монете, Y — число гербов на всех 5 монетах.

13. Подбросили 5 монет. Случайная величина X — число гербов на первых двух монетах, Y — число гербов на всех 5 монетах.

14. Подбросили 5 монет. Случайная величина X — число гербов на первых трех монетах, Y — число гербов на всех 5 монетах.

15. Подбросили 4 монеты. Случайная величина X — число гербов на первых трех монетах, Y — число гербов на третьей и четвертой монетах.

16. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков на первой кости и Y — меньшее из двух выпавших чисел.

17. Бросаются две игральные кости. Пусть X — меньшее, Y — большее из двух выпавших очков.

18. Бросаются 2 игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — суммарное число «единиц» и «двоек».

19. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — суммарное число «единиц», «двоек» и «троек».

20. Четыре шарика разного цвета случайным образом раскладывают по трем ящикам. Случайная величина X — число занятых ящиков, Y — число шаров в первом ящике.

21. Четыре одинаковых шара случайным образом раскладывают по трем ящикам. Случайная величина X — число занятых ящиков, Y — число шаров в первом ящике.

22. Четыре шарика разного цвета случайным образом раскладывают по трем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике и Y — число шаров в четвертом ящике.

23. Четыре одинаковых шара случайным образом раскладывают по трем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике и Y — число шаров в четвертом ящике.

24. В ящике находятся 2 белых, 4 красных и 2 черных шара. Из ящика без возвращения достают 3 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров среди извлеченных, Y — числу черных шаров.

25. В коробке лежат 2 желтых, 3 красных и 2 синих карандаша. Из

коробки достают 3 карандаша (без возвращения). Случайная величина X равна числу желтых карандашей среди извлеченных, Y — числу синих карандашей.

26. В коробке лежат 2 желтых, 2 красных и 3 синих карандашей. Из коробки достают 3 карандаша (без возвращения). Случайная величина X равна числу красных карандашей среди извлеченных, Y — числу синих карандашей.

27. Подбросили 6 монет. Случайная величина X — число гербов на первой монете, Y — число гербов на всех 6 монетах.

28. Подбросили 6 монет. Случайная величина X — число гербов на первых двух монетах, Y — число гербов на всех 6 монетах.

29. Подбросили 6 монет. Случайная величина X — число гербов на первых трех монетах, Y — число гербов на всех 6 монетах.

30. Подбросили 5 монет. Случайная величина X — число гербов на первых трех монетах, Y — число гербов на первой и последней монетах.

§ 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ (см. определения в [15]).

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\},$$

определенная для любого $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины* ξ .

Свойства функций распределения.

- 1) $F(x)$ — неубывающая функция;
- 2) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- 3) $F(x)$ непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Случайная величина ξ называется **дискретной**, если ее множество значений не более чем счетное. Дискретная случайная величина

представима в виде суммы

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k),$$

где $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$, $I(A_k)$ — индикатор множества A_k . Функция распределения дискретной случайной величины кусочно-постоянная и равна

$$F_{\xi}(x) = \sum_{\{k: x_k \leq x\}} P(\xi = x_k).$$

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F_{\xi}(x)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$. Случайная величина ξ **абсолютно непрерывна**, если существует такая неотрицательная функция $f = f_{\xi}(x)$, называемая плотностью, что

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если задана функция распределения $F_{\xi}(x)$ случайной величины ξ , то плотность этой случайной величины $f_{\xi}(x)$ равна

$$f_{\xi}(x) = (F_{\xi}(x))'.$$

Плотность распределения любой случайной величины удовлетворяет равенству $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(t) dt = 1$.

Вероятность попадания случайной величины ξ на участок $(\alpha, \beta]$ выражается формулой

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha).$$

Если случайная величина ξ имеет плотность, то

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x) dx.$$

Кроме дискретных и абсолютно-непрерывных, существуют еще **сингулярные** функции распределения. Так называются непрерывные функции распределения, точки роста которых образуют множество нулевой меры Лебега.

ОСНОВНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Равномерное распределение. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, $a < b$, если плотность этой случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

2. Треугольное распределение (распределение Симпсона). Случайная величина ξ имеет треугольное распределение на отрезке $[a, b]$, если плотность этой случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

3. Показательное распределение. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

4. Нормальное распределение. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (m, σ) , $\sigma > 0$, если ее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

5. Распределение Коши. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами (α, λ) , $\lambda > 0$, если она имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ , заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, называется интеграл Лебега от \mathfrak{F} -измеримой функции $\xi = \xi(\omega)$ по мере P :

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega),$$

если данный интеграл Лебега существует.

Если ξ имеет плотность, то $M\xi$ может быть вычислено по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_k с вероятностями $p_k = P\{\xi = x_k\}$, то $M\xi = \sum_k x_k p_k$.

Если случайная величина $\zeta = g(\xi)$, то для вычисления $M\zeta$ можно применять формулы:

$$M\zeta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx,$$

$$M\zeta = Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Если случайная величина ξ имеет плотность $f_{\xi}(x)$, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_{\xi}(x) dx.$$

Дисперсию также можно вычислять по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, где

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx.$$

Пример 1. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию ξ .

Р е ш е н и е. Математическое ожидание случайной величины ξ находим из равенства

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Для вычисления данного интеграла разобьем область интегрирования на три промежутка, тогда

$$M\xi = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx + \int_0^{\infty} 0 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

Аналогично находим

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 0 + \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx + 0 = 3 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5},$$

следовательно, $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{3}{80}$.

Пример 2. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α . Найти вероятность того, что ξ примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Р е ш е н и е. Сначала найдем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \alpha \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Далее, поскольку ξ имеет показательное распределение, то

$$P\{\xi < M\xi\} = P\{\xi < 1/\alpha\} = F_{\xi}(1/\alpha) = 1 - e^{-\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 1 - e^{-1}.$$

Пример 3. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$; $\xi_1 = \cos \xi$, $\xi_2 = \sin \xi$. Найти $M\xi_1$, $M\xi_2$, $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$. Являются ли ξ_1 и ξ_2 независимыми?

Р е ш е н и е. Плотность $f_{\xi}(x)$ случайной величины ξ равна $\frac{1}{2\pi}$ при $x \in [0, 2\pi]$ и $f_{\xi}(x) = 0$ при $x \notin [0, 2\pi]$. Поскольку $\xi_1 = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x) = \cos x$, то

$$M\xi_1 = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0.$$

Аналогично находим

$$M\xi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$M\xi_1 \xi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Следовательно, ковариация данных случайных величин

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 \cdot M\xi_2 = 0.$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы, поскольку существуют борелевские множества B_1 и B_2 , для которых

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\} \neq P\{\xi_1 \in B_1\} \cdot P\{\xi_2 \in B_2\}.$$

Действительно, рассмотрим множества $B_1 = B_2 = (\sqrt{2}/2, 1]$. Найдем

$$P\{\xi_1 \in B_1\} = P\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \xi \leq 1\right\} = P\left\{-\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Последнее равенство следует из условия равномерного распределения случайной величины ξ на отрезке $[0, 2\pi]$. Также находим

$$P\{\xi_2 \in B_2\} = P\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \xi \leq 1\right\} = P\left\{\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{3\pi}{4}\right\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\} = P\left\{-\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < \xi < \frac{3\pi}{4}\right\} = P(\emptyset) = 0.$$

Задача 11.

Варианты 1 – 30. Найти постоянную C , функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить график функции распределения.

1. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 3)$ при $x \in [1, 5]$ и равна 0 для остальных x .

2. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 - 2)$ при $x \in [2, 6]$ и равна 0 для остальных x .

3. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [2, 4]$ и равна 0 для остальных x .

4. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 3)$ при $x \in [1, 5]$ и равна 0 для остальных x .

5. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + x)$ при $x \in [2, 4]$ и равна 0 для остальных x .

6. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x .

7. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 2)$ при $x \in [1, 4]$ и равна 0 для остальных x .

8. Плотность случайной величины X равна $f(x) = Cx^2$ при $x \in [2, 6]$ и равна 0 для остальных x .

9. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [-1, 1]$ и равна 0 для остальных x .

10. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 5)$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x .

11. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 2)$ при $x \in [2, 3]$ и равна 0 для остальных x .

12. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x^2 + 1)$ при $x \in [-1, 1]$ и равна 0 для остальных x .

13. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 1)$ при $x \in [4, 5]$ и равна 0 для остальных x .

14. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 - 2)$ при $x \in [1, 3]$ и равна 0 для остальных x .

15. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [-2, 2]$ и равна 0 для остальных x .

16. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 3)$ при $x \in [4, 5]$ и равна 0 для остальных x .

17. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + x)$ при $x \in [2, 3]$ и равна 0 для остальных x .

18. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [-2, 0]$ и равна 0 для остальных x .

19. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 6)$ при $x \in [3, 4]$ и равна 0 для остальных x .

20. Плотность случайной величины X равна $f(x) = Cx^2$ при $x \in [-1, 2]$ и равна 0 для остальных x .

21. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 2)$ при $x \in [-2, 2]$ и равна 0 для остальных x .

22. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x - 1)$ при $x \in [2, 3]$ и равна 0 для остальных x .

23. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 4)$ при $x \in [-4, 0]$ и равна 0 для остальных x .

24. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [-2, 1]$ и равна 0 для остальных x .

25. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 3)$ при $x \in [-3, 3]$ и равна 0 для остальных x .

26. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 2x)$ при $x \in [1, 3]$ и равна 0 для остальных x .

27. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [-3, 0]$ и равна 0 для остальных x .

28. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 5)$ при $x \in [-4, 0]$ и равна 0 для остальных x .

29. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + x)$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x .

30. Плотность случайной величины X равна $f(x) = Cx^2$ при $x \in [-1, 2]$ и равна 0 для остальных x .

Задача 12.

Варианты 1 – 30.

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = -2X + 3$.

2. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 2. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 1$.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 4. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = -X + 1$.

4. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x . Найти функцию распределения и математическое ожидание $Y = X + 2$.

5. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти плотность $Y = 4X$. Какое распределение имеет случайная величина Y ?

6. Плотность случайной величины X равна $f(x) = Cx^2$ при $x \in [1, 4]$ и равна 0 для остальных x . Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины $Y = 2X$.

7. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти плотность $Y = X + 4$. Какое распределение имеет случайная величина Y ?

8. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти плотность $Y = 4X$.

9. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти плотность $Y = X + 4$.

10. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти распределение $Y = 4X + 2$. Является ли Y нормально распределенной случайной величиной?

11. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти распределение $Y = -2X$. Является ли Y нормально распределенной случайной величиной?

12. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 2)$ при $x \in [2, 4]$ и равна 0 для остальных x . Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины $Y = X/2$.

13. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2, 1]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 1$.

14. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x . Найти плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 3X - 3$.

15. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 7]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X - 1$.

16. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-4, -1]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X + 1$.

17. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x . Найти плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = X + 3$.

18. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x . Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины $Y = X - 1$.

19. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[2, 5]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X - 1$.

20. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(2x + 3)$ при $x \in [1, 5]$ и равна 0 для остальных x . Найти постоянную C и функцию

распределения случайной величины $Y = 2X$.

21. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 1. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X + 2$.

22. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 3. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = 3X + 5$.

23. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x . Найти функцию распределения и математическое ожидание $Y = X - 3$.

24. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти функцию распределения и плотность $Y = 5X$. Какое распределение имеет случайная величина Y ?

25. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-4, 4]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 4$.

26. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти функцию распределения и плотность $Y = X - 4$. Какое распределение имеет случайная величина Y ?

27. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-3, 3]$. Найти функцию распределения и плотность $Y = 4X + 2$.

28. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + x)$ при $x \in [2, 4]$ и равна 0 для остальных x . Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины $Y = -X$.

29. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $(-2, 4)$. Найти распределение $Y = 2X + 2$. Является ли Y нормально распределенной случайной величиной?

30. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = X - 5$.

§ 9. МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определены случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то говорят, что задан *случай-*

ный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Определение 1. Функция

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\}$$

называется *многомерной функцией распределения* случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n или функцией распределения случайного вектора ξ .

Для двух случайных величин ξ_1, ξ_2 функция распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = F(x, y) = P\{\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y\}$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;
- 2) $F(+\infty, +\infty) = 1$;
- 3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 .
- 4) $F(x, y)$ — неубывающая функция переменных x и y .

Если величины ξ_1, ξ_2 имеют функцию распределения $F(x, y)$, то

$$\begin{aligned} P\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, a_2 < \xi_2 \leq b_2\} &= \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Определение 2. Плотностью совместного распределения $f(x, y)$ системы двух случайных величин (ξ_1, ξ_2) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Функция $f(x, y)$ неотрицательная и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию распределения $F(x, y)$ по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

Плотности распределения отдельных величин ξ_1 и ξ_2 выражаются через двумерную плотность $f(x, y)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Определение 3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любых борелевских множеств B_1, \dots, B_n имеет место равенство

$$P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \dots P\{\xi_n \in B_n\}.$$

Теорема 1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда их функция распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n),$$

где $F_i(x_i)$ — функции распределения величин $\xi_i, i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Предположим, что распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ абсолютно непрерывно. Тогда необходимым и достаточным условием независимости случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n служит соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n),$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ — совместная плотность распределения, а $f_i(x_i)$ — плотности распределения величин $\xi_i, i = 1, \dots, n$.

Пример 1. Внутри квадрата, ограниченного прямыми

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0, \quad y = \frac{\pi}{2},$$

плотность распределения двух случайных величин

$$f(x, y) = C \sin(x + y);$$

вне данного квадрата $f(x, y) = 0$. Найти: а) постоянную C ; б) функцию распределения системы; в) вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = 0, y = \frac{\pi}{4}$.

Решение. а) Для нахождения постоянной C воспользуемся равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \sin(x + y) dx dy &= -C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x \right) dx = \\ &= -C \sin \pi + C \sin \frac{\pi}{2} + C \sin \frac{\pi}{2} = 2C, \end{aligned}$$

следовательно, $C = 1/2$.

б) Найдем функцию распределения системы:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

При $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ функция распределения равна

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \sin(u+v) du dv = -\frac{1}{2} \int_0^x (\cos(u+y) - \cos u) du = \\ &= -\frac{1}{2} \sin(x+y) + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin y. \end{aligned}$$

На рис. 4 изображены области интегрирования при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y > \frac{\pi}{2}$ и при $x > \frac{\pi}{2}$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Таким образом, если $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y > \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u+v) du dv = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + 1);$$

если $x > \frac{\pi}{2}$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \sin(u+v) du dv = \frac{1}{2} (\sin y - \cos y + 1).$$

При $x > \frac{\pi}{2}$, $y > \frac{\pi}{2}$ областью интегрирования является исходный квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, поэтому $F(x, y) = 1$ при $x > \frac{\pi}{2}$, $y > \frac{\pi}{2}$. Если $x < 0$ или $y < 0$, то $F(x, y) = 0$.

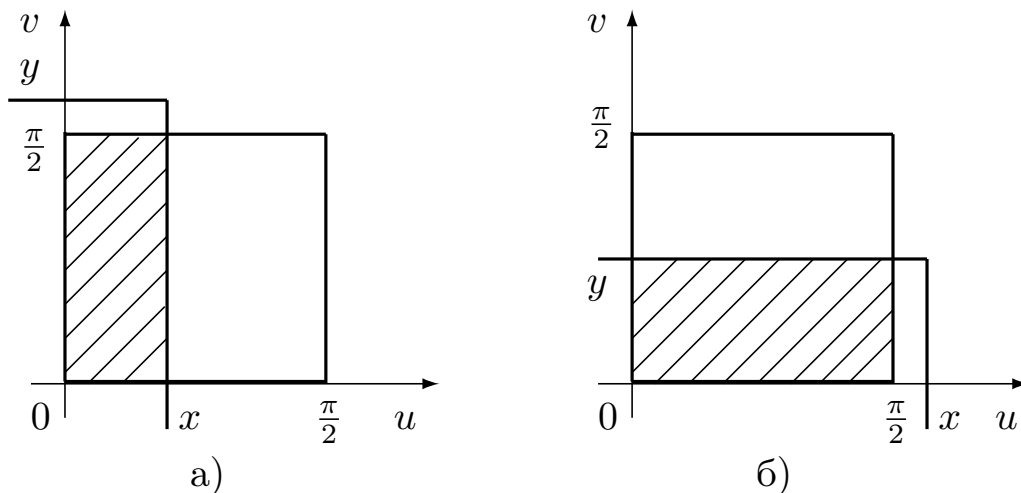


Рис. 4. Области интегрирования: а) при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y > \frac{\pi}{2}$,
б) при $x > \frac{\pi}{2}$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

в) Вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$, равна

$$F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата K с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Найти плотность совместного распределения $f(x, y)$ и плотности $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин ξ_1 и ξ_2 . Зависимы или независимы эти случайные величины?

Решение. Квадрат K изображен на рисунке 5. Длины сторон данного квадрата равны $\sqrt{2}$, его площадь равна 2, поэтому из равенства $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ следует, что совместная плотность

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K. \end{cases}$$

Стороны данного квадрата задаются уравнениями $y = 1 - x$, $y = x - 1$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$ при $x \in [-1, 0]$ (рис. 5).

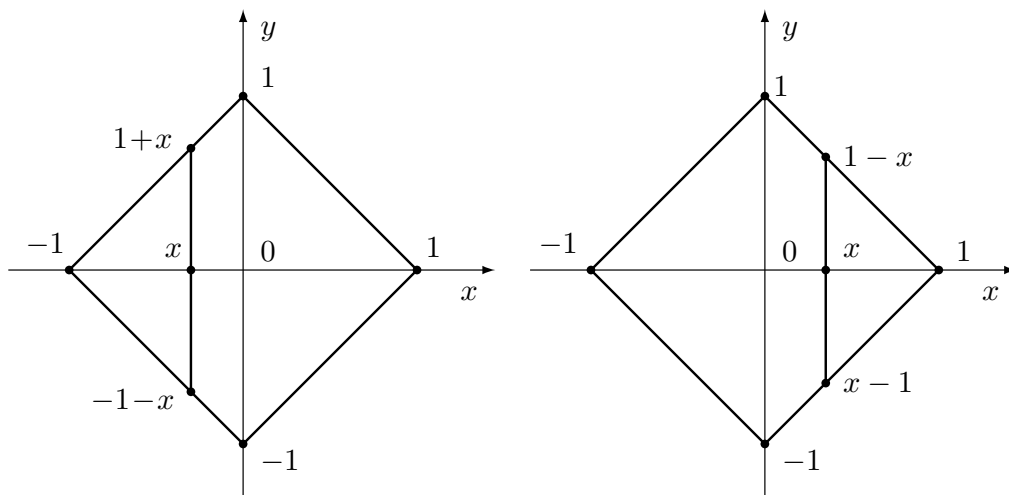


Рис. 5. Нахождение плотности $f_1(x)$ при $x \in [-1, 0]$ и при $x \in (0, 1]$

Для нахождения плотности $f_1(x)$ воспользуемся равенством

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ точка (x, y) не содержится в квадрате K , поэтому $f(x, y) = 0$ при данных значениях переменной x . Следовательно, $f_1(x) = 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Если $x \in [-1, 0]$, то $f(x, y) \neq 0$ при $y \in [-1 - x, 1 + x]$; если $x \in (0, 1]$, то $f(x, y) \neq 0$ при $y \in [x - 1, 1 - x]$ (см. рис. 5), то есть при каждом фиксированном x значение y меняется от нижней до верхней границы квадрата. Следовательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{1+x} dy = 1 + x, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{1-x} dy = 1 - x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина ξ_1 имеет треугольное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Аналогично находим плотность ξ_2 :

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

В случае наличия двумерной плотности $f(x, y)$ случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ (равенство понимается почти наверное относительно двумерной лебеговской меры). Рассмотрим $(x, y) \notin K$, но такие, что $|x| < 1$, $|y| < 1$. Для этих значений (x, y) двумерная плотность $f(x, y) = 0$, а произведение $f_1(x)f_2(y) \neq 0$, поэтому случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы.

Задача 13.

Варианты 1 – 30.

1. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{3}$, если известна функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \sin y \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти функцию распределения двумерной случайной величины и вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(\sqrt{3}, 1)$, $D(\sqrt{3}, 0)$.

3. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, плотность распределения двух случайных величин $f(x, y) = Cxy$; вне прямоугольника $f(x, y) = 0$. Найти

а) постоянную C ; б) функцию распределения системы.

4. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, плотность распределения двух случайных величин $f(x, y) = Cx^2y^2$; вне прямоугольника $f(x, y) = 0$. Найти

а) постоянную C ; б) функцию распределения системы.

5. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Найти распределение случайных величин ξ_1 и $\xi_1 + \xi_2$.

6. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Найти распределение случайной величины ξ_1 и $\xi_1 + \xi_2$.

7. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью совместного распределения $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{4}$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

8. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Найти плотность распределения и функцию распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) . Найти одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2 . Являются ли эти величины независимыми?

9. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

Найти коэффициент a . Установить, являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми. Найти одномерные плотности этих случайных величин.

10. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, центр

которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2.

11. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \left\{ (u, v) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1 - \frac{1}{2}u \right\}$. Найти плотность распределения $f_{\xi_1}(x)$ случайной величины ξ_1 .

12. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = \frac{2}{\pi(u^2 + v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geq 1$ и $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

13. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $F_{\xi_i}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, $i = 1, 2$. Найти $P\{|\xi_1 - \xi_2| \leq 1\}$.

14. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $F_{\xi_i}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, $i = 1, 2$. Найти $P\{\xi_1 \leq \xi_2 - 1\}$.

15. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Найти плотность совместного распределения $f(x, y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2 .

16. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 2)$. Найти плотность совместного распределения $f(x, y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2 .

17. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Найти плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$.

18. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 2)$. Найти плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$.

19. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{2}$, если известна функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \sin y \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

20. Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти функцию распределения двумерной случайной величины и вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник с вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$.

21. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, плотность распределения двух случайных величин $f(x, y) = Cxy$; вне прямоугольника $f(x, y) = 0$. Найти

а) постоянную C ; б) функцию распределения системы.

22. Внутри квадрата, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, плотность распределения двух случайных величин $f(x, y) = Cx^2y^2$; вне прямоугольника $f(x, y) = 0$. Найти

а) постоянную C ; б) функцию распределения системы.

23. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Найти распределение случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

24. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$. Найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$.

25. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью совместного распределения $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{4}$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Являются ли независимыми величины ξ_1 и ξ_2 ?

26. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью в треугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$. Найти плотность распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) и одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2 . Являются ли эти величины независимыми?

27. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью в треугольнике с вершинами $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Найти плотность распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) и одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

28. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

Найти постоянную a и вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 1.

29. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \left\{ (u, v) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1 - \frac{1}{2}u \right\}$. Найти плотность распределения $f_{\xi_2}(x)$ случайной величины ξ_2 .

30. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = \frac{2}{\pi(u^2 + v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geq 1$ и $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

Задача 14 (задачи повышенной сложности на разные темы).

Варианты 1 – 30.

1. В первом ряду театра 16 мест. В этот ряд рассаживаются произвольным образом 8 девочек и 8 мальчиков. Найти вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом.

2. В чулане 8 пар ботинок. Из них случайно выбираются 6 ботинок. Найти вероятность, что среди выбранных ботинок

- 1) отсутствуют парные;
- 2) имеется ровно одна комплектная пара;
- 3) имеется ровно две пары.

2. Пять студентов садятся в лифт на первом этаже 11-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что лифт остановился не более двух раз (если лифт остановился, то из него обязательно кто-то выходит).

3. Случайная точка X_1, X_2, X_3 имеет равномерное распределение в конусе K , основанием которого служит единичный круг в плоскости Oxy с центром в начале координат, а вершина конуса находится в точке $(0, 0, 3)$. Рассмотрим события $A = \{X_1^2 + X_2^2 \leq r^2\}$ и $B = \{X_3 \leq 3 - 3r\}$, где $0 < r < 1$. Найти вероятности событий A и B и доказать, что эти события зависимы при любом $0 < r < 1$.

4. При переливании крови надо учитывать группы крови больного и донора. Человеку, имеющему 4 группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населе-

ния 34% имеют первую, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь одного из двух случайно взятых доноров.

5. Во время второй мировой войны была разработана следующая методика исследования анализов крови. Предположим, что большому количеству N людей нужно сделать анализ крови. Это можно организовать двумя способами. При первом способе кровь каждого человека исследуется отдельно, и тогда потребуется N анализов. При втором способе кровь k человек смешивается, и анализируется смесь. Если результат анализа отрицательный, то этого одного анализа достаточно для k человек. Если же он положительный, то кровь каждого из k человек нужно исследовать отдельно, и тогда для k человек потребуется $k + 1$ анализов. Считаем, что вероятность положительного результата анализа одинаковая для каждого человека и что результаты анализов для различных людей стохастически независимы. Найти математическое ожидание числа X анализов при втором способе исследования, если $N = 1000$, $k = 4$, $p = 0,1$.

6. В прямоугольнике со сторонами длиной 2 и 3 случайным образом выбрали точку X_0 . Найти математическое ожидание расстояния от этой точки до ближайшей стороны прямоугольника.

7. Брошены три игральные кости. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots, X_6 равны количеству выпавших на этих костях «единиц», «двоек», \dots , «шестерок» соответственно. Найти дисперсии:

1) суммы $X_1 + X_2$, 2) суммы $X_1 + X_2 + \dots + X_6$.

8. Есть n шариков разного цвета, которые случайным образом раскладывают по двум коробкам. Пусть X — число шаров в первой коробке, Y — число шаров во второй. 1) Найти совместное распределение случайных величин X и Y и их коэффициент корреляции при $n = 5$. 2) Найти коэффициент корреляции X и Y для произвольного натурального n (ответ обосновать).

9. В ящике находится одинаковое количество белых, красных и синих шаров. Из ящика 3 раза с возвращением достают по одному шару. Пусть X — число белых шаров и Y — число красных шаров среди извлеченных. Найти совместное распределение X и Y и их коэффициент корреляции.

10. Среди 8 лотерейных билетов есть 2 выигрышных. Два чело-

века по очереди покупают каждый по 2 билета. Случайные величины X и Y равны количеству выигранных билетов у первого и второго покупателей. Найти совместное распределение X и Y и их коэффициент корреляции.

11. В 4 ячейках равновероятно последовательно размещаются частицы. Первую частицу положили во вторую ячейку. Случайная величина X равна числу занятых ячеек после добавления второй частицы, а Y равна числу занятых ячеек после добавления третьей частицы. Найти совместное распределение X и Y и их коэффициент корреляции.

12. Случайные величины X_1, X_2, \dots независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y_n = \sum_{i=1}^n |X_{i+1} - X_i|$.

13. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2, 8]$. Найти распределение $Y = -5X + 10$, ковариацию и корреляцию величин X и Y .

14. Случайная величина X принимает значения $0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \pi$ с одинаковыми вероятностями. Найти коэффициент корреляции случайных величин $Y = \sin X$ и $Z = \cos X$. Являются ли независимыми Y и Z ?

15. Два друга Петя и Вася купили себе телефоны разных фирм. Продавец утверждал, что время работы телефона Пети имеет показательное распределение с параметром 3, а время работы телефона Васи имеет показательное распределение с параметром 2. Найти вероятность того, что телефон Пети проработает дольше, чем телефон Васи.

16. На перекрестке стоит светофор, в котором две минуты горит зеленый свет и одну минуту красный (желтого света нет), затем снова две минуты горит зеленый свет и т. д. Машина подъезжает к перекрестку в случайный момент, не связанный с работой светофора. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины T — времени ожидания проезда перекрестка.

17. Случайные величины X, Y независимы, X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, Y принимает значения 0 и $1/2$ с одинаковыми вероятностями. Найти функцию распределения суммы $X + Y$.

18. Заданы независимые случайные величины X, Y, Z , X и Y имеют показательное распределение с параметрами 1 и 2, Z принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно. Найти функции рас-

пределения случайных величин:

1) $\max\{X, Y\}$; 2) $ZX + (1 - Z)Y$; 3) $ZX + (1 - Z)\max\{X, Y\}$.

19. Заданы независимые случайные величины X, Y, Z , X и Y имеют показательное распределение с параметром 1, Z принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно. Найти функции распределения случайных величин:

1) $\min\{X, Y\}$; 2) $ZX + (1 - Z)\min\{X, Y\}$.

20. Пусть X и Y — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функции распределения следующих случайных величин:

1) $\max\{2X, Y\}$; 2) $\min\{X^3, Y\}$.

21. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром 1. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Z = |Y - X|$.

22. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 5; 4, 5]$. Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = [X]$, которая равна целой части X .

23. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 5]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = |X - 2|$.

24. Случайная величина (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ и $(1, 1)$. Найти функцию распределения и математическое ожидание величины $Z = |Y - X|$.

25. Случайная точка (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника с вершинами $(0, 0), (0, 2)$ и $(2, 0)$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины Z — расстояния от точки (X, Y) до гипотенузы этого треугольника.

26. Случайная величина (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ и $(1, 1)$. Найти функцию распределения случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ и вероятность того, что $Z > 2/\sqrt{3}$.

27. Петя утверждает, что для его телефона количество звонков в час является случайной величиной X_1 , которая имеет распределение Пуассона с параметром $\delta > 0$, а Вася считает, что количество X_2 звонков на его телефон также имеет распределение Пуассона, но с параметром

μ , причем $\mu > \delta$. Доказать, что для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство $P(X_1 \leq k) > P(X_2 \leq k)$.

28. Плотность $f(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) равна Cxy , если (X, Y) содержится в квадрате с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$; $f(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти постоянную C и вероятность того, что $X + Y < 1$.

29. На складе одинаковое количество приборов 1 и 2 типа. Время работы приборов имеет показательное распределение, прибора 1 типа — с параметром 2, прибора 2 типа — с параметром 4. Рабочий случайным образом выбирает один прибор. Найти функцию распределения времени X работы выбранного прибора и вероятность того, что $X > \ln 4$.

30. На складе 20 приборов 1 типа и 30 приборов 2 типа. Время работы приборов 1 типа имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 5]$, приборов 2 типа — равномерное распределение на $[0, 10]$. Рабочий случайным образом выбирает один прибор. Найти функцию распределения и математическое ожидание времени работы выбранного им прибора.

§ 10. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

С подробным теоретическим материалом по данному разделу можно познакомиться в учебниках и учебных пособиях [5, 7, 13, 15]. Здесь приведены основные определения и формулы, необходимые для решения задач.

Определение цепи Маркова, уравнение Колмогорова–Чепмена, классификация состояний цепи Маркова по арифметическим свойствам переходных вероятностей.

Пусть ξ_0, ξ_1, \dots , — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ со значением в множестве $X = \{x_0, x_1, \dots\}$. Если выполнено условие

$$P\{\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}, \dots, \xi_0 = x_{i_0}\} = P\{\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}\}$$

(в предположении $P(\xi_n = x_{i_n}, \dots, \xi_0 = x_{i_0}) > 0$), то последовательность ξ_0, ξ_1, \dots называется *марковской цепью*.

Цепь Маркова ξ_0, ξ_1, \dots называется однородной, если для любых i, j вероятность $P(\xi_n = x_j | \xi_{n-1} = x_i) = p_{ij}$ не зависит от n . Будем рассматривать только однородные цепи Маркова. Матрица P с элементами p_{ij} называется матрицей вероятностей перехода за один шаг, эта матрица

является *стохастической*, то есть $p_{ij} \geq 0$ для любых i, j и $\sum_j p_{ij} = 1$.

Матрица $P^{(n)}$ с элементами $p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = x_j | \xi_0 = x_i)$ называется матрицей вероятностей перехода за n шагов. Для любых $n \geq 0, m \geq 0$ справедливо **уравнение Колмогорова–Чепмена**

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}.$$

Обозначим $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots)$ — распределение вероятностей цепи Маркова на n -м шаге: $p_i^{(n)} = P(\xi_n = x_i)$ ($p^{(0)}$ называется начальным распределением), тогда выполнены равенства

$$p^{(n+m)} = p^{(n)} P^m \quad \text{и} \quad p^{(n)} = p^{(0)} P^n.$$

Состояние x_i называется *несущественным*, если существуют такие состояние $x_j \in X$ и число m , что $p_{ij}^{(m)} > 0$, но $p_{ji}^{(n)} = 0$ для всех n , остальные состояния называются *существенными*. Состояние x_j достижимо из состояния x_i , если существует такое $m \geq 0$, что $p_{ij}^{(m)} > 0$. Состояния x_i и x_j называются *сообщающимися*, если x_j достижимо из x_i и x_i достижимо из x_j . Цепь Маркова, все состояния которой составляют один класс сообщающихся состояний, называется неразложимой.

Состояние x_j имеет *период* d , если d есть наибольший общий делитель чисел n таких, что $p_{jj}^{(n)} > 0$. Если $d = 1$, состояние называется *непериодическим*. В неразложимой цепи Маркова все состояния имеют одинаковый период, в частности, одновременно являются непериодическими.

Эргодическая теорема, предельные и стационарные распределения, классификация состояний цепи Маркова по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.

Пусть $f_{ii}^{(\ell)} = P_i\{\xi_\ell = x_i, \xi_d \neq x_i, 1 \leq d \leq \ell - 1\}$ — вероятность первого возвращения в состояние x_i ,

$$f_{ij}^{(\ell)} = P_i\{\xi_\ell = x_j, \xi_d \neq x_j, 1 \leq d \leq \ell - 1\}$$

для $x_i \neq x_j$ — вероятность первого попадания в состояние x_j в момент времени ℓ , когда $\xi_0 = x_i$. Тогда $f_{ij} = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{ij}^{(\ell)}$ — вероятность того, что система, находящаяся в начальный момент в состоянии x_i , рано или поздно попадет в состояние x_j . Состояние x_i называется *возвратным*, если $f_{ii} = 1$.

Однородная цепь Маркова называется *эргодической*, если пределы $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ существуют, не зависят от i , $\pi_j > 0$ и $\sum_j \pi_j = 1$.

Эргодическая теорема. Пусть $P = \{p_{ij}\}$ — матрица переходных вероятностей марковской цепи с конечным числом состояний $X = \{1, 2, \dots, N\}$.

1) Если существует n_0 такое, что $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$, то существуют числа π_1, \dots, π_N такие, что

$$\pi_j > 0, \quad \pi_1 + \dots + \pi_N = 1, \quad (1)$$

$$\pi_j^{(n)} \rightarrow \pi, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{для любого } i \in X. \quad (2)$$

2) Обратно, если существуют числа π_1, \dots, π_N , удовлетворяющие (1) и (2), то найдется n_0 такое, что $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$.

3) Числа π_1, \dots, π_N удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} p_{\alpha j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Стационарным распределением вероятностей для цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P называется любое неотрицательное решение системы (3), удовлетворяющее условию $\pi_1 + \dots + \pi_N = 1$.

Пример 1. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(3/4; 1/4)$. Найти:

- 1) распределение по состояниям в момент времени $n = 2$;
- 2) вероятность того, что в моменты $n = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 2, 2, 1;
- 3) стационарное распределение.

Решение. 1) Задано распределение по состояниям в момент времени $n = 0$: $p^{(0)} = (3/4; 1/4)$ и матрица P переходных вероятностей. Для нахождения распределения $p^{(2)}$ по состояниям в момент времени $n = 2$ воспользуемся равенством $p^{(2)} = p^{(0)} P^2$, тогда

$$p^{(2)} = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}; \frac{4}{5} \quad \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{17}{25} & \frac{8}{25} \\ \frac{16}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} = (0,67; 0,33).$$

2) Искомая вероятность равна произведению

$$p_1^{(0)} p_{12} p_{22} p_{21} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{125}.$$

3) Стационарное распределение находим из системы уравнений $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$, $j = 1, 2$, которая в данном случае имеет вид:

$$\pi_1 = \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{4}{5}\pi_2, \quad \pi_2 = \frac{2}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2.$$

Решением данной системы является вектор $(\pi_1, \pi_2) = (2/3, 1/3)$.

Пример 2. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова, найти все пары сообщающихся состояний.

Решение. Состояние 1 несущественное, потому что из первого состояния можно попасть в третье за один шаг ($p_{13}^{(1)} > 0$), но из третьего нельзя попасть обратно в первое ($p_{31}^{(n)} = 0$ для всех n). Остальные состояния являются существенными.

Состояние 3 достижимо из состояния 5, поскольку $p_{35}^{(1)} > 0$, состояние 5 также достижимо из 3, поэтому эти состояния сообщающиеся. Состояния 2 и 4 также сообщающиеся.

Пример 3. Точка движется по вершинам правильного треугольника, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из соседних вершин. Выписать матрицу переходных вероятностей. Указать возвратные и невозвратные состояния.

Решение. Занумеруем вершины треугольника цифрами 1, 2, 3 и выпишем матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $p_{11} = 0$, за один шаг нельзя попасть из состояния 1 в это же состояние, следовательно, $f_{11}^{(1)} = 0$. Найдем $f_{11}^{(2)}$ — вероятность первого возвращения в состояние 1 за два шага; заметим, что для этого нужно сначала за один шаг попасть в состояние 2, затем вернуться в 1, либо сначала за один шаг попасть в состояние 3 и затем вернуться в 1. Поэтому

$$f_{11}^{(2)} = p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = \frac{1}{2}.$$

В состояние 1 можно впервые вернуться за три шага следующим образом: за один шаг попасть в состояние 2, затем в 3 и далее вернуться в 1; либо за один шаг попасть в состояние 3, затем в 2 и вернуться в 1, следовательно,

$$f_{11}^{(3)} = p_{12}p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32}p_{21} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично найдем вероятности **первого** возвращения в состояние 1 за четное и нечетное число шагов:

$$f_{11}^{(2k)} = p_{12}(p_{23}p_{32})^{k-1}p_{21} + p_{13}(p_{32}p_{23})^{k-1}p_{31} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1},$$

$$f_{11}^{(2k+1)} = p_{12}(p_{23}p_{32})^{k-1}p_{23}p_{31} + p_{13}(p_{32}p_{23})^{k-1}p_{32}p_{21} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

где $k \geq 2$. Далее, по формуле суммы геометрической прогрессии найдем

$$f_{11} = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{11}^{(\ell)} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1} = 1,$$

следовательно, состояние 1 возвратно. В силу симметрии вероятности первого возвращения в состояние 2 и 3 будут равны соответствующим вероятностям для состояния 1, поэтому состояния 2 и 3 также возвратны.

Пример 4. В четырех ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещаются шары. Пусть S_n — число занятых ящиков после размещения n шаров. Найти матрицу переходных вероятностей. Является ли S_n эргодичной цепью Маркова?

Решение. Представим S_n в виде суммы

$$S_n = S_{n-1} + \nu_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где ν_n — случайная величина, равная 1, если шар с номером n попал в пустой ящик, и $\nu_n = 0$, если этот шар попал в занятый ящик. Отметим, что значение ν_n зависит только от S_{n-1} и не зависит от значений

S_0, \dots, S_{n-2} , поэтому последовательность S_n является цепью Маркова. Множеством состояний этой цепи Маркова является $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Если число занятых ящиков $S_n = 1$, то следующий шар попадает в занятый ящик с вероятностью $1/4$ и в пустой ящик с вероятностью $3/4$; если $S_n = 2$, то шар попадает в занятый или в пустой ящик с одинаковыми вероятностями. Рассуждая аналогично, находим матрицу переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что при добавлении новых шаров число занятых ящиков не может уменьшаться, поэтому при $i > j$ для всех n вероятности $p_{ij}^n = 0$ и последовательность S_n не является эргодической цепью Маркова.

Пример 5. Точка движется по вершинам правильного четырехугольника, занумерованных цифрами 1, 2, 3, 4, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из трех оставшихся вершин. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)}$.

Решение. Выпишем матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться, что цепь Маркова является эргодической, найдем матрицу

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, здесь $n_0 = 2$ и $\min_{i,j} p_{ij}^{(2)} = 2/9 > 0$. Следовательно, пределы

$$\pi_j \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

существуют, положительны и удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=1}^4 \pi_i p_{ij}, & j = 1, 2, 3, 4, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1. \end{cases}$$

Подставляя элементы p_{ij} матрицы P в систему, получаем

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2/3 + \pi_3/3 + \pi_4/3, \\ \pi_2 = \pi_1/3 + \pi_3/3 + \pi_4/3, \\ \pi_3 = \pi_1/3 + \pi_2/3 + \pi_4/3, \\ \pi_4 = \pi_1/3 + \pi_2/3 + \pi_3/3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1. \end{cases}$$

Решением системы является $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1/4$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)} = 1/4$.

Задача 15. (Уравнение Колмогорова–Чепмена, классификация состояний цепи Маркова по арифметическим свойствам переходных вероятностей.)

Варианты 1 – 30.

1. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0,7; 0,2; 0,1)$. Найти:

- 1) распределение по состояниям в момент времени $n = 2$;
- 2) вероятность того, что в моменты $n = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2.

2. Для Васи очень важно, будет завтра дождь или нет (если дождя не будет, то он сможет поехать в лес или на рыбалку). Поэтому все погодные условия он разделил на 2 состояния: 1 — нет дождя (ясная погода), 2 — дождь. Кроме того, он заметил следующую зависимость. Если сегодня ясная погода, то завтра она будет ясной с вероятностью 0,7; если же сегодня дождь, то завтра ожидается дождь с вероятностью 0,6. Пусть вероятность ясной погоды в пятницу равна 0,5. Найти:

1) вероятность того, что в субботу пойдет дождь;
 1) вероятность того, что три дня (пятница, суббота и воскресенье) будет ясная погода.

3. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, 2, 3, 4$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностью $1/3$ на один шаг вправо или, с вероятностью $2/3$ на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 4 , частица остается в них навсегда (поглощающие экраны). Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0; 0, 5; 0, 5; 0; 0)$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

4. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, 2, 3, 4$. Из любой внутренней точки частица передвигается с одинаковыми вероятностями на один шаг вправо или на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 4 , частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или 3 (отражающие экраны). Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 5; 0, 5; 0; 0; 0)$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

5. Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 5; 0, 5; 0; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

6. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P периодической, если

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}?$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 5; 0, 5; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

7. В трех ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть S_n — число ящиков, оставшихся пустыми после размещения n частиц ($n \geq 1$). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

8. В четырех ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть V_n — число ящиков, оказавшихся занятыми после размещения n частиц ($n \geq 1$). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

9. В коробке сначала лежали три красных карандаша. За 1 шаг из коробки случайным образом вынимают один карандаш и заменяют его новым, который — независимо от предыстории процесса — является красным с вероятностью $1/4$ или синим с вероятностью $3/4$. Обозначим через S_n число красных карандашей в коробке после n -го шага. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 1, n = 2$.

10. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть S_n — наибольшее из чисел, выпавших в первых n бросаниях. Известно, что $S_1 = 2$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

11. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть V_n — наименьшее из чисел, выпавших в первых n бросаниях. Известно, что $V_1 = 5$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

12. Точка двигается по вершинам пятиугольника, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из соседних вершин. Выписать матрицу переходных вероятностей. Будет ли данная цепь Маркова периодической? Пусть в начальный момент точка находится в вершине номер 1. Найти ее распределения по состояниям (вершинам) в моменты времени $n = 2, n = 3$.

13. В ящике первоначально находилось 4 новых мяча. Для игры

берут 1 мяч, а после игры возвращают его обратно. Пусть S_n — число новых мячей после n игр. Найти матрицу переходных вероятностей за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2$, $n = 3$.

14. В университете каждый студент имеет одну из трех оценок за экзамен по математике: 3, 4 или 5. Студенты, имеющие оценки 3, 4, 5, сохраняют свои оценки к следующей сессии с вероятностями $2/3$, $2/3$, $1/2$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями могут получить любую из двух других оценок. Найти распределение оценок в следующей сессии, если в данной сессии оценку 3 имело 30% студентов, 4 — 50%, 5 — 20%.

15. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A , B , C . Дети отцов, имеющих профессии A , B , C , сохраняют профессии отцов с вероятностями $1/2$, $2/3$, $1/3$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 20% жителей, B — 30% жителей, C — 50%.

16. (Задача про жадного электрика). В подъезде висят 3 лампочки. Каждая из них может перегореть в течении месяца с вероятностью 0,1, независимо от других ламп и предыстории процесса. В конце каждого месяца электрик производит обход и заменяет только одну из перегоревших ламп, если это необходимо. Пусть S_n — число работающих ламп в подъезде сразу после n -ой замены. Выписать матрицу вероятностей перехода за один шаг. Предположим, что в начале января горели все лампы. Найти распределение числа работающих ламп после второй замены (в начале марта).

17. Туристы готовились к походу и все погодные условия они разделил на 2 состояния: 1 — нет дождя (ясная погода), 2 — дождь. Кроме того, они заметил следующую зависимость. Если сегодня ясная погода, то завтра она будет ясной с вероятностью 0,7; если же сегодня дождь, то завтра ожидается дождь с вероятностью 0,8. Пусть вероятность ясной погоды в пятницу равна 0,3. Найти:

- 1) вероятность того, что в субботу будет ясная погода;
- 1) вероятность того, что три дня (пятница, суббота и воскресенье) будет идти дождь.

18. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, 5$. Из любой внутренней точки частица передвигается с одинаковыми вероятностями на один шаг вправо или на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 5 , частица остается в них навсегда (поглощающие экраны). В момент времени $n = 0$ частица находилась в состоянии 4 . Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

19. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, 5$. Из любой внутренней точки частица передвигается с одинаковыми вероятностями на один шаг вправо или на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 5 , частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или 4 (отражающие экраны). В момент времени $n = 0$ частица находилась в состоянии 4 . Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

20. Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 3; 0, 7; 0; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

21. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P периодической, если

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}?$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 8; 0, 2; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

22. В четырех ящиках последовательно независимо друг от друга

равновероятно размещают частицы. Пусть S_n — число ящиков, оставшихся пустыми после размещения n частиц ($n \geq 1$). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

23. В трех ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть V_n — число ящиков, оказавшихся занятыми после размещения n частиц ($n \geq 1$). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

24. В коробке сначала лежали два красных карандаша и один синий. За 1 шаг из коробки случайным образом вынимают один карандаш и заменяют его новым, который — независимо от предыстории процесса — является красным с вероятностью $1/3$ или синим с вероятностью $2/3$. Обозначим через S_n число красных карандашей в коробке после n -го шага. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 1, n = 2$.

25. Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 5; 0, 5; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

26. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P периодической, если

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}?$$

Пусть распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0, 8; 0, 2; 0; 0)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

27. Точка двигается по вершинам шестиугольника, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из соседних вершин. Выписать матрицу переходных вероятностей. Будет ли данная цепь Маркова периодической? Пусть в начальный момент точка находится в вершине номер 1. Найти распределения по состояниям (вершинам) в моменты времени $n = 2, n = 3$.

28. В ящике первоначально находилось 5 новых мячей. Для игры берут 1 мяч, а после игры возвращают его обратно. Пусть S_n — число новых мячей после n игр. Найти матрицу переходных вероятностей за один шаг и распределения по состояниям в моменты времени $n = 2, n = 3$.

29. В университете каждый студент имеет одну из трех оценок за экзамен по математике: 3, 4 или 5. Студенты, имеющие оценки 3, 4, сохраняют свои оценки к следующей сессии с вероятностями $2/3$ или могут получить оценки, большие на 1. Студенты, имеющие оценку 5, сохраняют свои оценки вероятностями $3/4$ или могут получить оценку 4. Найти распределение оценок в следующей сессии, если в данной сессии оценку 3 имело 20% студентов, 4 — 50%, 5 — 30%.

30. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B, C . Дети отцов, имеющих профессии A, B, C , сохраняют профессии отцов с вероятностями $1/3, 2/3, 1/2$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 40% жителей, B — 10% жителей, C — 50%.

Задача 16. (Эргодическая теорема, стационарные распределения, классификация состояний цепи Маркова по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.)

Варианты 1 – 30.

1. Указать возвратные и невозвратные состояния цепи Маркова с

матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать, что все состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода P возвратны, если:

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. В коробке первоначально находились 4 новых маркера. Для занятия берут случайным образом 1 маркер, пишут им на доске, а после занятия возвращают его обратно. Пусть S_n — число новых маркеров после n занятий. Найти матрицу переходных вероятностей за один шаг, указать возвратные и невозвратные состояния.

4. У Пети в левом кармане сначала было 2 монеты по 1 рублю, а в правом — 2 монеты по 50 копеек. Он случайным образом достает из каждого кармана по 1 монете и перекладывает их в другой карман. Пусть S_n — число 50-копеечных монет в левом кармане после n перекладываний. Найти матрицу переходных вероятностей, указать возвратные и невозвратные состояния.

5. В 4 ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещаются шары. Пусть V_n — число занятых ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

6. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова за один шаг имеет вид:

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарное распределение.

7. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

$$1) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Найти стационарные распределения цепей Маркова, если они существуют.

8. В подъезде висят 4 лампочки. Каждая из них может перегореть в течении месяца с вероятностью 0,1, независимо от других. В конце каждого месяца электрик производит обход и заменяет только одну из перегоревших ламп, если это необходимо. Пусть S_n — число работающих ламп в подъезде сразу после n -ой замены. Выписать матрицу вероятностей перехода за один шаг. Найти предельное и стационарное распределения, если они существуют.

9. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

$$1) P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Найти стационарные распределения цепей Маркова, если они существуют.

10. Пусть цепь Маркова имеет два состояния. Показать, что имеет место один из следующих трех случаев:

1) цепь эргодична; 2) состояния не сообщаются; 3) матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Пусть ξ_0, ξ_1, \dots — цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\{p_{ij}\}$ и стационарным распределением π_j . Показать, что если $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$ и $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$, то $p_{12} = p_{23} = p_{31}$ и $p_{13} = p_{21} = p_{32}$.

12. Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани равновероятно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится при $t \rightarrow \infty$ вероятность того, что при t -м перекладывании кость окажется на грани "б" если сначала она находилась в этом же положении?

13. В университете каждый студент имеет одну из трех оценок за

экзамен по математике: 3, 4 или 5. Студенты, имеющие оценки 3, 4, 5, сохраняют свои оценки к следующей сессии с вероятностями $2/3$, $2/3$, $1/2$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями могут получить любую из двух других оценок. Найти предельное распределение по оценкам (если бы студенты учились вечно).

14. В университете каждый студент имеет одну из трех оценок за экзамен по математике: 3, 4 или 5. Студенты, имеющие оценки 3, 4, сохраняют свои оценки к следующей сессии с вероятностями $2/3$ или могут получить оценки, большие на 1. Студенты, имеющие оценку 5, сохраняют свои оценки вероятностями $3/4$ или могут получить оценку 4. Найти предельное распределение по оценкам (если бы студенты учились вечно).

15. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B, C . Дети отцов, имеющих профессии A, B, C , сохраняют профессии отцов с вероятностями $1/2, 2/3, 1/3$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти:

1) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растет;

2) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

16. В 5 ящиках последовательно независимо друг от друга равномерно размещаются шары. Пусть S_n — число пустых ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

17. В 5 ящиках последовательно независимо друг от друга равномерно размещаются шары. Пусть V_n — число занятых ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

18. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

$$1) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}?$$

Найти стационарные распределения цепей Маркова, если они су-

ществуют.

19. В подъезде висят 3 лампочки. Каждая из них может перегореть в течении месяца с вероятностью 0,1, независимо от других. В конце каждого месяца электрик производит обход и заменяет только одну из перегоревших ламп, если это необходимо. Пусть S_n — число работающих ламп в подъезде сразу после n -ой замены. Выписать матрицу вероятностей перехода за один шаг. Найти предельное и стационарное распределения, если они существуют.

20. В гирлянде сначала было 4 желтых лампочки. Если лампочка перегорает, то ее заменяют новой, которая — независимо от предыстории процесса — является красной или желтой с одинаковыми вероятностями. Обозначим через S_n число желтых лампочек в гирлянде после n -ой замены. Выписать матрицу вероятностей перехода за один шаг. Найти предельное и стационарное распределения, если они существуют.

21. У Маши есть две коробки с елочными шарами. В первой коробке сначала было 2 красных шара и 1 желтый, а во второй — 1 красный и 2 синих. Она случайным образом достает из каждой коробки по одному шару и перекладывает их в другую коробку. Пусть S_n — число красных шаров в первой коробке после n перекладываний. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Является ли S_n эргодичной цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

22. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

$$1) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}?$$

Найти стационарные распределения цепей Маркова, если они существуют.

23. В коробке первоначально находились 5 новых маркера. Для занятия берут случайным образом 1 маркер, пишут им на доске, а после занятия возвращают его обратно. Пусть S_n — число новых маркеров после n занятий, $n \geq 1$. Найти матрицу переходных вероятностей за один шаг. Является ли цепь Маркова эргодической? Найти стационарное распределение, если оно существует.

24. В 4 ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещаются шары. Пусть S_n — число пустых ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

25. Частица случайным образом двигается на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, 4$. Из любой внутренней точки частица передвигается с одинаковыми вероятностями на один шаг вправо или на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 4 , частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или 4 (отражающие экраны). Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Найти стационарное распределение, если оно существует.

26. В коробке сначала лежали два красных карандаша и один синий. За 1 шаг из коробки случайным образом вынимают один карандаш и заменяют его новым, который — независимо от предыстории процесса — является красным с вероятностью $1/3$ или синим с вероятностью $2/3$. Обозначим через S_n число красных карандашей в коробке после n -го шага. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Найти стационарное распределение, если оно существует.

27. Частица случайным образом двигается на прямой по целочисленным точкам $0, 1, 2, 3, 4$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностями $1/3$ на один шаг вправо, на один шаг влево или остается в той же точке. Попадая в точки 0 и 4 , частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или 3 (отражающие экраны). Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

28. У Васи есть две коробки с елочными шарами. В первой коробке сначала было 3 красных шара, а во второй — 1 красный и 2 синих. Он случайным образом достает из каждой коробки по одному шару и перекладывает их в другую коробку. Пусть S_n — число красных шаров в первой коробке после n перекладываний. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Является ли S_n эргодической цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение?

29. В гирлянде сначала было три желтых лампочки. Если лампоч-

ка перегорает, то ее заменяют новой, которая — независимо от предыстории процесса — является красной, желтой или синей с одинаковыми вероятностями. Обозначим через S_n число желтых лампочек в гирлянде после n -ой замены. Выписать матрицу вероятностей перехода за один шаг. Найти стационарное распределения, если оно существует.

30. Частица случайным образом двигается на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, 5$. Из любой внутренней точки частица передвигается с одинаковыми вероятностями на один шаг вправо или на один шаг влево. Попадая в точки 0 и 5 , частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или 4 (отражающие экраны). Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодичной цепью Маркова? Найти стационарное распределения, если оно существует.

§ 11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Математическая статистика — раздел прикладной математики, занимающийся созданием методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов. С подробным теоретическим материалом по данному разделу можно познакомиться в учебниках и учебных пособиях [3–6, 8, 10]. Приведем основные определения и утверждения.

Совокупность всех объектов, подчиненных данному признаку, называется *генеральной совокупностью*. На практике, как правило, обследование всех объектов генеральной совокупности не производится в силу излишней трудоемкости такого процесса. Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которые и подвергают изучению.

Определение 1. *Выборочной совокупностью* (или выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов. Объемом совокупности — выборочной или генеральной называют число объектов этой совокупности.

Будем обозначать: N — объем генеральной совокупности, n — объ-

ем выборки, d — долю выборки в процентах. Тогда

$$n = \frac{dN}{100\%}.$$

Например, пусть $N = 30$, $d = 20\%$, тогда $n = 6$. Но какие именно элементы нужно выбирать в выборку? Для выбора элементов можно воспользоваться таблицей случайных чисел или генератором случайных чисел, например, <https://randstuff.ru/number>.

Генератор выдал такие случайные числа (у вас они, скорее всего, будут другими):

$$5, 9, 12, 14, 16, 24.$$

Элементы с этими номерами и будут образовывать выборку.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз и

$$n_1 + \dots + n_k = n.$$

Определение 2. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*.

Числа наблюдений n_i называются частотами, а их отношения к объему выборки

$$\frac{n_i}{n} = w_i$$

— относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот, расположенных в порядке возрастания.

Числовые характеристики выборки.

Медианой Me называют варианту, которая делит поровну вариационный ряд. Если вариационный ряд содержит нечетное число вариантов, то медиана равна варианту, расположенной в середине ряда. Если же число вариантов четное, то медиана совпадает со средним арифметическим двух вариантов, расположенных в середине ряда.

Модой Mo называют варианту, которая имеет максимальную частоту в вариационном ряду.

Для характеристики степени разброса вариант признака используют *показатели вариации*. Один из самых простых показателей — разность между наибольшей и наименьшей вариантами

$$z = x_{max} - x_{min}$$

называется *размахом выборки*.

Графическое представление статистической совокупности.

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения — полигон частот, кумулятивную кривую и гистограмму. Они помогают лучше представить себе характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Полигоном частот называется ломаная линия, вершинами которой являются точки $(x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$, определяемые элементами статистического ряда.

Кумулятивная кривая — это кривая накопленных частот (или относительных частот), то есть ломаная линия, вершинами которой являются точки

$$(x_1, n_1), (x_1, n_1 + n_2), \dots, (x_k, n_1 + \dots + n_k).$$

Для группированной выборки обычно строится гистограмма частот. Пусть k — количество интервалов группировки, h_1, \dots, h_k — длины интервалов, n_i^* — частота i -го интервала, $i = 1, \dots, k$.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах длины h_i так, что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте i -го интервала n_i^* . Высоты прямоугольников равны n_i^*/h_i , $i = 1, \dots, k$.

Площадь гистограммы частот равна объему выборки n . Иногда вместо полигона и гистограммы частот строятся полигон и гистограмма относительных частот, построение которых отличается тем, что по оси ординат откладываются относительные частоты.

Эмпирическая функция распределения.

Определение 3. *Эмпирической функцией распределения* (функцией распределения выборки) называют функцию, которая каждому значению x ставит в соответствие сумму относительных частот вариант вы-

борки, меньших x :

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

Свойства эмпирической функции распределения:

1. Ограниченность: $0 \leq F^*(x) \leq 1$.
2. $F^*(x)$ — неубывающая функция, то есть, если $x_1 < x_2$, то $F^*(x_1) \leq F^*(x_2)$.
3. Пусть x_{min} — наименьшая варианта, x_{max} — наибольшая варианта. Тогда $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_{min}$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_{max}$.

Пример 1.

Проводилось исследование питьевой воды на наличие вредных примесей железа. Получили следующие значения показателя (мг/л):

$$x_i : 0.15, 0.14, 0.16, 0.18, 0.15, 0.17, 0.14, 0.16, 0.17, 0.12, \\ 0.16, 0.15, 0.18, 0.15, 0.13, 0.15, 0.18, 0.17, 0.16, 0.13.$$

Записать вариационный ряд и статистическое распределение элементов выборки. Найти размах выборки, моду и медиану. Построить эмпирическую функцию распределения для статистического ряда.

Решение. Выпишем вариационный ряд (последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке):

$$0.12, 0.13, 0.13, 0.14, 0.14, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, \\ 0.16, 0.16, 0.16, 0.16, 0.17, 0.17, 0.17, 0.18, 0.18, 0.18.$$

Видно, что наибольшей вариантой является $x_{max} = 0.18$, наименьшей — $x_{min} = 0.12$. Найдем размах выборки —

$$z = x_{max} - x_{min} = 0.18 - 0.12 = 0.06.$$

Максимальную частоту в вариационном ряду имеет варианта 0.15 (встречается пять раз), поэтому $Mo = 0.15$.

В данном примере число вариантов четное, поэтому медиана равна среднему арифметическому вариант x_{10} и x_{11} , расположенных в середине ряда —

$$Me = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = 0.155.$$

Статистическое распределение частот и относительных частот удобно записывать в виде таблицы (см. таблицу 2):

x_i	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	Σ
n_i	1	2	2	5	4	3	3	20
w_i	0.05	0.10	0.10	0.25	0.20	0.15	0.15	1

Табл. 2. Распределение частот и относительных частот

Напомним, что через x_i мы обозначаем выборочные значения (варианты), n_i — частоты, $\frac{n_i}{n} = w_i$ — относительные частоты. В последнем столбике таблицы записаны суммы значений каждой строки. Так, число 20 является суммой частот и равно объему выборки, 1 является суммой всех относительных частот.

x_i	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	Σ
n_i	1	2	2	5	4	3	3	20
w_i	0.05	0.10	0.10	0.25	0.20	0.15	0.15	1
Σw_i	0.05	0.15	0.25	0.50	0.70	0.85	1	

Табл. 3. Таблица для построения функции распределения

Для построения эмпирической функции распределения добавим в таблицу 2 строчку, в которой запишем накопленные относительные частоты Σw_i . Она получается следующим образом — в первую клетку переписываем число 0.05 (относительную частоту варианты 0.12), во второй записываем сумму относительных частот 0.05 и 0.10, в третьей клетке — сумму первых трех относительных частот и так далее (см. таблицу 3).

Эмпирическую функцию распределения будем находить из определения

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n} = \sum_{x_i < x} w_i.$$

Если $x \leq 0.12$, то в таблице нет вариантов, для которых $x_i < x$, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \leq 0.12$. Если $0.12 < x \leq 0.13$, то

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} w_i = w_1 = 0.05;$$

если $0.13 < x \leq 0.14$, то

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} w_i = w_1 + w_2 = 0.05 + 0.10 = 0.15.$$

Далее, рассматривая $0.14 < x \leq 0.15$, получаем

$$F^*(x) = w_1 + w_2 + w_3 = 0.25.$$

Рассуждая таким же образом, видим, что дальнейшие значения функции $F^*(x)$ совпадают с накопленными относительными частотами (которые записаны в последней строке таблицы):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.12, \\ 0.05, & 0.12 < x \leq 0.13, \\ 0.15, & 0.13 < x \leq 0.14, \\ 0.25, & 0.14 < x \leq 0.15, \\ 0.50, & 0.15 < x \leq 0.16, \\ 0.70, & 0.16 < x \leq 0.17, \\ 0.85, & 0.17 < x \leq 0.18, \\ 1, & x > 0.18. \end{cases}$$

Несложно проверить, что функция $F^*(x)$ удовлетворяет всем свойствам эмпирических функций распределения.

Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки.

Пусть требуется оценить неизвестный количественный признак X генеральной совокупности. При этом обычно имеются лишь данные выборки x_1, \dots, x_n , полученные в результате n наблюдений. Рассматриваем x_1, \dots, x_n , как значения независимых случайных величин X_1, \dots, X_n .

Статистической оценкой θ_* неизвестного параметра θ генеральной совокупности называют функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ от выборочных значений. Точечной называют статистическую оценку θ_* , которая определяется одним числом. *Несмещенной* называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, то есть $M\theta_* = \theta$.

Несмещенной оценкой генеральной средней \bar{x}_g является *выборочная*

средняя $\bar{x}_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$. Выборочная дисперсия

$$D_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_v)^2$$

является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Более удобная формула для вычисления выборочной дисперсии —

$$D_v = \overline{x_v^2} - (\bar{x}_v)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит *исправленная выборочная дисперсия*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_v = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_v)^2.$$

Кроме дисперсии, для характеристики рассеяния значений признака используют *среднее квадратическое отклонение* $\sigma_v = \sqrt{D_v}$.

Продолжение примера 1.

Найти \bar{x}_v , D_v , S^2 для статистического распределения выборки, представленного в таблице 4.

x_i	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	Σ
n_i	1	2	2	5	4	3	3	20

Табл. 4. Статистическое распределение выборки

Решение. При нахождении выборочной средней учитываем, что каждая варианта x_i умножается на соответствующую ей частоту n_i :

$$\bar{x}_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{0.12 + 0.26 + 0.28 + 0.75 + 0.64 + 0.51 + 0.54}{20} = 0.155.$$

Для вычисления дисперсии сначала найдем среднее значение $\overline{x_v^2}$:

$$\overline{x_v^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = \frac{0.0144 + 0.0338 + \dots + 0.0972}{20} = \frac{0.4862}{20} = 0.02431.$$

$$D_v = \overline{x_v^2} - (\overline{x_v})^2 = 0.02431 - 0.155^2 = 0.000258.$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_v = \frac{20}{19} D_v \approx 0.000272.$$

Интервальные оценки параметров распределения.

Значения \overline{x}_v , D_v , S^2 являются оценками параметров генеральной совокупности, выражающимися одним числом. Они зависят от объема выборки и могут сильно отличаться от истинной величины оцениваемого параметра, то есть приводят в некоторых случаях к грубым «ошибкам». Это вызывает необходимость оценивать точность и надежность полученных по выборке точечных оценок, что производится при помощи интервальных оценок.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр с заданной вероятностью.

Оценкой генеральной средней $a = \overline{x}_g$ какого-либо количественного признака генеральной совокупности служит выборочная средняя \overline{x}_v . Очевидно, что \overline{x}_v тем точнее, чем меньше величина отклонения $|\overline{x}_v - a|$. Иначе говоря, если выбрать $\delta > 0$ и записать неравенство

$$|\overline{x}_v - a| < \delta, \tag{4}$$

то \overline{x}_v тем точнее будет оценивать $a = \overline{x}_g$, чем меньше δ . Число δ называют *точностью оценки*.

В силу случайности вариант, попадающих в выборку, говорить о выполнении неравенства (4) можно лишь с некоторой вероятностью γ , которая называется *надежностью*, или *доверительной вероятностью* то есть

$$P(|\overline{x}_v - a| < \delta) = \gamma.$$

Расписывая неравенство с модулем, получаем

$$P(\overline{x}_v - \delta < a < \overline{x}_v + \delta) = \gamma.$$

Эту запись следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\overline{x}_v - \delta, \overline{x}_v + \delta)$ включает в себе (покрывает) неизвестное генеральное среднее $a = \overline{x}_g$, равна γ , а сам интервал $(\overline{x}_v - \delta, \overline{x}_v + \delta)$ называется *доверительным интервалом*.

Представляет интерес вычисление доверительных интервалов для оценки математического ожидания и дисперсии количественного признака X генеральной совокупности, распределенного по нормальному закону, для оценки неизвестной вероятности появления события в генеральной совокупности.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания.

Первый случай. Если заранее известна величина среднего квадратического отклонения генеральной совокупности σ , то оценка генеральной средней $a = \bar{x}_g$ (доверительный интервал) имеет вид

$$\bar{x}_v - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_v + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Здесь \bar{x}_v — выборочная средняя, n — объем выборки, значение t находится по таблице Лапласа из условия $2F(t) = \gamma$ с заранее выбранной доверительной вероятностью (надежностью) γ .

Второй случай. Если среднее квадратическое отклонение исследуемого признака заранее неизвестно, то используется его выборочная оценка — выборочное среднее квадратическое отклонение σ_v , определяемое по данным выборки. В этом случае доверительный интервал для оценки математического ожидания имеет вид

$$\bar{x}_v - t_\gamma \cdot \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_v + t_\gamma \cdot \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}}, \quad (5)$$

где t_γ — величина, определяемая по таблице Стьюдента при заданном объеме выборки n и доверительной вероятности γ .

Пример 2.

Построить доверительный интервал для среднего значения показателя примесей железа с надежностью $\gamma = 0.95$. Для $n = 20$ наблюдений получены значения $\bar{x}_v = 0.155$, $\sigma_v = 0.016$ (мг/л).

Решение. Формулу (5) удобно переписать в следующем виде —

$$\bar{x}_v - \delta < a < \bar{x}_v + \delta, \quad \delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}}.$$

По таблице Стьюдента, учитывая, что $\gamma = 0.95$, $n = 20$, найдем $t_\gamma = 2.093$, тогда

$$\delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} = 2.093 \cdot \frac{0.016}{\sqrt{20}} \approx 0.0075.$$

Вычислим доверительный интервал —

$$0.155 - 0.0075 < a < 0.155 + 0.0075,$$

$$0.1475 < a < 0.1625.$$

Отметим, что полученный интервал $(0.1475, 0.1625)$ включает в себе неизвестное генеральное среднее $a = \bar{x}_g$, с вероятностью $\gamma = 0.95$ (в среднем в 95 случаях из 100).

Доверительный интервал для оценки дисперсии.

Доверительный интервал для оценки неизвестной дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности можно найти следующим образом —

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_1, k}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_2, k}^2},$$

где S^2 — исправленная выборочная дисперсия, $\chi_{\alpha_1, k}^2, \chi_{\alpha_2, k}^2$ — критические значения распределения «хи-квадрат», вычисленные при

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2}, \quad k = n-1. \quad (6)$$

Пример 3.

Построить доверительный интервал для дисперсии примесей железа с надежностью $\gamma = 0.95$, если $n = 20$, $S^2 = 0.000272 = 2.72 \cdot 10^{-4}$.

Решение. По формуле (6) найдем

$$\alpha_1 = 0.025, \quad \alpha_2 = 0.975, \quad k = 19;$$

далее найдем критические значения распределения «хи-квадрат»: $\chi_{0.025, 19}^2 = 32.9$, $\chi_{0.975, 19}^2 = 8.91$ и проведем вычисления для определения границ доверительного интервала:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_1, k}^2} = \frac{19 \cdot 2.72 \cdot 10^{-4}}{32.9} = 1.57 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_2, k}^2} = \frac{19 \cdot 2.72 \cdot 10^{-4}}{8.91} = 5.8 \cdot 10^{-4}.$$

Получили доверительный интервал для дисперсии примесей железа

$$1.57 \cdot 10^{-4} < \sigma^2 < 5.8 \cdot 10^{-4}$$

и доверительный интервал для квадратического отклонения

$$0.0126 < \sigma < 0.0241.$$

Данные интервалы включают в себе неизвестную дисперсию σ^2 и неизвестное квадратическое отклонение σ генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0.95$.

Доверительный интервал для оценки неизвестной вероятности события генеральной совокупности.

Проводятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Ставится задача нахождения доверительного интервала для оценки вероятности p события A с надежностью γ , если в n испытаниях событие A появилось m раз.

Пусть $w = \frac{m}{n}$ — относительная частота события, t_γ — величина, определяемая по *таблице Лапласа* из $2F(t_\gamma) = \gamma$. Тогда доверительный интервал определяется неравенством

$$w - t_\gamma \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} < p < w + t_\gamma \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

Например, пусть $\gamma = 0.95$, $n = 300$, $m = 75$. Находим

$$w = 0.25, \quad t_\gamma = 1.96, \quad \delta = 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{300}} = 0.049.$$

Вычисляем доверительный интервал:

$$0.25 - 0.049 < p < 0.25 + 0.049, \quad 0.201 < p < 0.299.$$

Задача 17.

Варианты 1 – 30.

Представьте данные в виде вариационного ряда. Постройте полигон частот и кумулятивную кривую. Найдите выборочную среднюю, моду, медиану и выборочную дисперсию.

1. Рассматривается генеральная совокупность значений, равных объемам ежедневных плавов на металлургическом предприятии (в тоннах). Для вычисления контрольных параметров работы предприятия получена выборка значений за 20 дней:

$$x_i : 115, 135, 113, 108, 111, 119, 124, 139, 153, 110, \\ 119, 121, 131, 149, 116, 108, 94, 120, 132, 110.$$

2. Для контроля прочности древесины получены выборочные значения предела прочности при сжатии для 20 образцов (в МПа):

$$x_i : 53, 48, 53, 58, 51, 59, 54, 49, 53, 50, \\ 49, 51, 42, 49, 46, 48, 44, 52, 56, 50.$$

3. Для проверки качества продукции получено 20 выборочных значений жирности молока (в процентах).

$$x_i : 2, 9; 3, 2; 3, 9; 3, 5; 3, 7; 2, 8; 3, 5; 3, 8; 3, 2; 3, 4; \\ 2, 7; 3, 2; 3, 8; 3, 2; 2, 9; 3, 5; 3, 4; 3, 0; 2, 9; 3, 0.$$

4. Абитуриенты подали заявления на специальность «физика», количество набранных баллов у них составляет

$$x_i : 265, 255, 270, 268, 250, 259, 264, 268, 252, 280, \\ 279, 271, 261, 249, 266, 268, 269, 255, 270, 281.$$

5. Для контроля твердости черных металлов получены выборочные значения твердости для 20 образцов (в числах Бриннеля):

$$x_i : 142, 148, 143, 148, 145, 150, 144, 149, 145, 140, \\ 145, 148, 144, 149, 146, 148, 150, 142, 146, 151.$$

6. Девушки 16-17 лет сдавали нормативы ГТО по бегу на 100 метров, получены следующие результаты (в секундах):

$$x_i : 16.2, 16.8, 17.3, 16.8, 15.5, 15.7, 16.4, 16.9, \\ 17.5, 18.0, 15.5, 16.8, 18.4, 16.9, 15.6, 18.2.$$

7. Юноши 18-19 лет сдавали нормативы ГТО по бегу на 100 метров, получены следующие результаты (в секундах):

$$x_i : 14.2, 14.8, 15.3, 14.8, 13.5, 13.7, 14.4, 13.9, \\ 15.5, 13.0, 14.5, 14.8, 15.4, 14.9, 13.6, 13.2.$$

8. Для определения всхожести семян моркови проведено 18 опытов. В каждом из этих опытов сажали 100 семечек и подсчитывали, сколько из них проросло:

$$x_i : 93, 88, 78, 95, 96, 84, 79, 85, 90, \\ 82, 91, 84, 89, 86, 78, 84, 82, 86.$$

9. Для определения всхожести семян подсолнуха проведено 20 опытов. В каждом из этих опытов сажали 50 семечек и подсчитывали, сколько из них проросло:

$$x_i : 43, 38, 48, 45, 36, 44, 39, 45, 40, \\ 42, 41, 34, 39, 36, 38, 44, 42, 36.$$

10. Девушки 20-24 лет сдавали нормативы ГТО по бегу на 2 километра, получены следующие результаты (в минутах):

$$x_i : 11.2, 12.8, 13.3, 12.8, 11.5, 11.7, 10.4, 10.9, \\ 12.5, 13.0, 13.5, 11.8, 12.4, 12.9, 13.6, 12.2.$$

11. Для контроля качества продукции проведено выборочное обследование, при котором измерялся вес 18 батонов хлеба, получены следующие результаты (в граммах):

$$x_i : 345, 352, 346, 350, 354, 360, 342, 353, 345, \\ 340, 335, 338, 358, 349, 348, 352, 361, 332.$$

12. Для контроля качества продукции проведено выборочное обследование, при котором измерялся вес 16 шоколадных батончиков, получены следующие результаты (в граммах):

$$x_i : 85, 82, 76, 75, 84, 76, 82, 83, 75, 84, 85, 78, 78, 79, 81, 82.$$

13. В Калининградской области на Куршской косе есть ловушки для поимки и кольцевания различных птиц. Специалисты измерили вес скворцов, которые попались в ловушку (в граммах):

$$x_i : 65, 72, 66, 75, 74, 76, 82, 73, 76, 84, \\ 85, 78, 68, 79, 91, 72, 82, 68, 75, 74.$$

14. В Калининградской области на Куршской косе есть ловушки для поимки и кольцевания различных птиц. Специалисты измерили вес дроздов, которые попались в ловушку (в граммах):

$$x_i : 85, 92, 86, 95, 94, 86, 92, 93, 86, 104, \\ 95, 98, 88, 99, 101, 92, 82, 98, 95, 94.$$

15. В течение 20 дней Вася добирается до университета на одном и том же автобусе, который по расписанию должен приехать на его остановку в 08:15. При этом, 5 дней автобус приходит вовремя, а в остальные

15 дней время его опоздания составляет x_i минут, где

$$x_i : 5, 2, 6, 1, 4, 2, 2, 3, 6, 3, 1, 2, 2, 1, 5.$$

16. В 2025 году урожайность пшеницы в различных хозяйствах России составила x_i центнеров с гектара, где

$$x_i : 28, 32, 30, 29, 28, 32, 29, 30, 31, 31, 28, 29, 29, 31, 27.$$

17. В 2025 году урожайность картофеля в различных хозяйствах России составила x_i центнеров с гектара, где

$$x_i : 180, 165, 160, 190, 200, 195, 155, 180, 175, 190, 180, 205, 190, 185, 160.$$

(показатели сильно меняются в зависимости от сорта, климатических условий и состава почвы).

18. 15 предприятий производит один и тот же вид продукции. При этом себестоимость x_i производства 1 изделия на предприятиях различна (измеряется в рублях):

$$x_i : 110, 115, 100, 140, 105, 135, 115, 120, 125, 100, 130, 105, 140, 125, 90.$$

19. Проводилась проверка загрязнения воздуха на наличие диоксида азота (источники загрязнения: автомобильный транспорт, ТЭЦ и предприятия металлургии). Получили следующие значения показателя ($\text{мг}/\text{м}^3$):

$$x_i : 0.08, 0.09, 0.10, 0.07, 0.06, 0.09, 0.09, 0.11, \\ 0.07, 0.05, 0.08, 0.06, 0.10, 0.06, 0.06.$$

20. Проводилась проверка загрязнения воздуха на наличие бензапирена (источники загрязнения: автомобильный транспорт, промышленные предприятия, ТЭЦ, табачный дым, горящие свалки). Получили следующие значения показателя ($\text{мг}/\text{м}^3$):

$$x_i : 0.05, 0.04, 0.06, 0.07, 0.05, 0.07, 0.04, 0.06, \\ 0.07, 0.05, 0.03, 0.04, 0.08, 0.04, 0.06.$$

21. Стоимость 1 литра бензина АИ-95 на 16 различных автозаправочных станциях в марте 2025 (в рублях):

$$x_i : 61.4, 61.3, 61.2, 61.4, 59.4, 62.3, 61.2, 61.3, \\ 61.5, 61.8, 60.4, 61.3, 60.9, 60.7, 61.2, 61.4.$$

22. С целью определения средней продолжительности поездки населения на работу проведено выборочное обследование. Получены следующие значения (в минутах):

$$x_i : 30, 45, 50, 40, 65, 35, 25, 30, 50, 40, 35, 15, 25, 35, 20.$$

23. С целью улучшения работы транспорта проведено выборочное обследование. Подсчитывалось количество пассажиров, которые садятся на конечной остановке в автобус №88 в 8 часов утра в будние дни. Получены следующие значения:

$$x_i : 32, 40, 31, 34, 35, 45, 28, 37, 41, 40, 35, 38, 45, 36, 42.$$

24. Для контроля качества продукции проведено выборочное обследование, при котором измерялось содержание жира в 16 партиях сыра, получены следующие результаты (в процентах):

$$x_i : 45, 42, 46, 45, 44, 46, 42, 43, 45, 44, 45, 48, 48, 49, 41, 42.$$

25. Драма «Елки-палки» признана одним из худших российских фильмом в 2024 году. Четырнадцать зрителям, сумевшим досмотреть фильм до конца, было предложено оценить его по 100-бальной шкале. Получены следующие результаты (в баллах):

$$x_i : 10, 15, 20, 12, 18, 10, 5, 10, 18, 20, 25, 15, 20, 30.$$

26. В тридесятом царстве провели опрос среди 20 грамотных респондентов с целью оценить рейтинг царя по 100-бальной шкале. Получены следующие результаты (в баллах):

$$x_i : 60, 75, 80, 65, 70, 80, 55, 45, 70, 50, 55, 85, 60, 70, 65, 50, 70, 60, 35, 45.$$

27. На ихтиологической станции проводится сбор биологического материала по видовому и размерно-возрастному составу промысловых рыб. Получили следующие значения длины атлантической сельди (в сантиметрах):

$$x_i : 30, 25, 28, 31, 27, 28, 33, 28, 27, 25, 27, 28, 30, 32, 24, 25, 27, 26, 29, 30.$$

28. На ихтиологической станции проводится сбор биологического материала по видовому и размерно-возрастному составу промысловых

рыб. Получили следующие значения веса атлантической сельди (в граммах):

$$x_i : 320, 270, 285, 310, 275, 280, 325, 290, 305, 250, \\ 270, 285, 300, 315, 330, 260, 270, 265, 290, 305.$$

29. Проводилось исследование питьевой воды на наличие вредных примесей железа. Получили следующие значения показателя (мг/л):

$$x_i : 0.15, 0.14, 0.16, 0.17, 0.15, 0.17, 0.14, 0.16, \\ 0.17, 0.15, 0.13, 0.14, 0.18, 0.14, 0.16.$$

30. Проводилось исследование питьевой воды на наличие вредных примесей марганца. Получены значения показателя (мг/л):

$$x_i : 0.05, 0.04, 0.06, 0.03, 0.05, 0.06, 0.04, 0.06, \\ 0.04, 0.05, 0.03, 0.04, 0.05, 0.04, 0.06.$$

Задача 18.

Варианты 1 – 30.

Используйте выборочные значения, приведенные в задаче 17 соответствующего варианта. Во всех задачах предполагается, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

1. 1) Найти интервальную оценку среднего объема ежедневных плавков на металлургическом предприятии для генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 15$.

2) Найти доверительный интервал для вероятности выполнения плана на предприятии с доверительной вероятностью 0.99 (план считается выполненным, если объем ежедневных плавков не менее 115).

2. 1) Найти интервальную оценку предела прочности древесины для генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал для вероятности того, что предела прочности древесины не менее 50 МПа с доверительной вероятностью 0.95.

3. 1) Найти интервальную оценку жирности молока (в процентах) для генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал для вероятности того, что жирность молока не менее 3.2 процента с доверительной вероятностью 0.95.

4. 1) Найти интервальную оценку для среднего балла генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 12$.

2) Найти доверительный интервал для вероятности того, что абитуриент поступит на эту специальность с доверительной вероятностью 0.95 (проходной балл — 260).

5. 1) Найти интервальную оценку для твердости черных металлов в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с надежностью 0.95 для вероятности того, что твердость металла больше, чем 145 (в числах Бриннеля).

6. 1) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии результатов в беге на 100 метров с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной средней.

2) Найти доверительный интервал для вероятности сдать нормы ГТО по данному показателю на золотой или серебряный значок с доверительной вероятностью 0.99 (для того, чтобы сдать этот показатель на золотой или серебряный значок, нужно, чтобы результат в беге на 100 метров не превосходил 16,9 секунд).

7. 1) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии результатов в беге на 100 метров с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной средней.

2) Найти доверительный интервал для вероятности сдать нормы ГТО по данному показателю с доверительной вероятностью 0.95 (для того, чтобы сдать этот показатель, нужно, чтобы результат в беге на 100 метров не превосходил 14,8 секунд).

8. Найдите 95% доверительный интервал: 1) для количества проросших семян моркови в одном опыте для всей генеральной совокупности; 2) для показателя всхожести во всей генеральной совокупности (показатель всхожести определяется отношением количества проросших семян к количеству посаженных).

9. Найдите доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.99: 1) для количества проросших семян подсолнуха в одном опыте для всей генеральной совокупности; 2) для показателя всхожести во всей генеральной совокупности (показатель всхожести определяется отношением количества проросших семян к количеству посаженных).

10. 1) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии результатов в беге на 2 километра с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной средней, которая равна 11.9 минут.

2) Найти доверительный интервал для вероятности сдать нормы ГТО по данному показателю с доверительной вероятностью 0.99 (для того, чтобы сдать этот показатель, нужно, чтобы результат в беге на 2 километра не превосходил 13, 25 минут).

11. 1) Найти интервальную оценку для среднего веса батона в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 6.8$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии веса батонов с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной средней, которая равна 348 грамм.

12. 1) Найти интервальную оценку для среднего веса шоколадного батончика в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 2.2$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии веса шоколадных батончиков с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной средней, которая равна 80 грамм.

13. 1) Найти интервальную оценку для среднего веса скворцов в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии веса скворцов с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной средней.

14. 1) Найти интервальную оценку для среднего веса дроздов в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии веса дроздов с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной средней.

15. 1) Найти интервальную оценку времени опоздания автобуса для генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma =$

0.95 при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал для вероятности того, что автобус опоздает не более, чем на 3 минуты, с доверительной вероятностью 0.95.

16. 1) Найти интервальную оценку для средней урожайности пшеницы в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии урожайности пшеницы с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной средней.

17. 1) Найти интервальную оценку для средней урожайности картофеля в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии урожайности картофеля с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной средней.

18. 1) Найти интервальную оценку для средней себестоимости производства изделия в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 9.8$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии себестоимости с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной средней, которая равна 126 рублей.

19. 1) Найти интервальную оценку для среднего значения показателя загрязнения воздуха в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии показателя загрязнения воздуха с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной средней.

20. 1) Найти интервальную оценку для среднего значения показателя загрязнения воздуха в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.95 для вероятности того, что показатель загрязнения воздуха бензапи-

реном меньше, чем предельно допустимый показатель, равный $0,06 \text{ мг/м}^3$.

21. 1) Найти интервальную оценку для средней стоимости 1 литра бензина в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 1.8$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии стоимости 1 литра бензина с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной средней, которая равна 61.2 рублей.

22. 1) Найти интервальную оценку для среднего значения времени поездки на работу в городе N по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.95 для вероятности того, что время поездки на работу в этом городе меньше 30 минут.

23. 1) Найти интервальную оценку для среднего количества пассажиров в автобусе №88 в 8 часов утра по по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.95 для вероятности того, что количество пассажиров в это время больше 40.

24. 1) Найти интервальную оценку для среднего содержание жира в товаре из всей генеральной совокупности по по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.95 для вероятности того, что содержание жира в образцах сыра из всей генеральной совокупности больше 45 процентов.

25. 1) Найти интервальную оценку для среднего балла в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии баллов за фильм с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной средней.

26. 1) Найти интервальную оценку для среднего рейтинга в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии рейтингов с надежностью $\gamma = 0.99$ при неизвестной генеральной средней.

27. 1) Найти интервальную оценку для генерального среднего зна-

чения длины атлантической сельди по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с надежностью 0.95 для вероятности того, что длина сельди больше 25 сантиметров.

28. 1) Найти интервальную оценку для генерального среднего значения веса атлантической сельди по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при неизвестной генеральной дисперсии.

2) Найти доверительный интервал с надежностью 0.95 для вероятности того, что вес сельди меньше 300 грамм.

29. 1) Найти интервальную оценку для среднего значения показателя примесей железа в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 0.02$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии показателя примесей железа с надежностью $\gamma = 0.95$ при известной генеральной средней, которая равна 0.15 мг/л.

30. 1) Найти интервальную оценку для среднего значения показателя примесей марганца в генеральной совокупности по выборочному среднему с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной дисперсии, $\sigma = 0.01$.

2) Найти интервальную оценку для генеральной дисперсии показателя примесей марганца с надежностью $\gamma = 0.99$ при известной генеральной средней, которая равна 0.04 мг/л.

§ 12. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистические гипотезы. Отыскание критических областей.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений, например:

- 1) генеральная совокупность имеет нормальное распределение;
- 2) дисперсии двух нормально распределенных генеральных совокупностей равны между собой.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу, обычно ее обо-

значают H_0 . Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой. Например, H_0 : мат. ожидание нормального распределения $a = 10$, H_1 : $a \neq 10$.

В итоге статистической проверки в двух случаях может быть принято неправильное решение:

Ошибка первого рода — отвергнута правильная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода обозначают α и называют уровнем значимости. Обычно выбирают $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$.

Ошибка второго рода — принята неправильная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода обозначают β .

Например, работу металлодетектора можем рассматривать как работу прибора по проверке гипотезы H_0 : у проходящего через металлодетектор нет оружия. Ошибка первого рода (ложная тревога) — задержать человека, у которого нет оружия, но могут быть мелкие металлические предметы (ключи, монеты, пуговицы). Ошибка второго рода — пропустить человека с оружием. Повышение чувствительности прибора приводит к увеличению ошибки первого рода.

Статистическим критерием называют случайную величину K , распределение которой известно и которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, для гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей применяется статистический критерий K — отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$K = F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

K является случайной величиной, потому что в разных опытах принимает различные значения, она распределена по закону Фишера.

Наблюдаемым значением критерия K (будем обозначать K_n) называют значение критерия, вычисленное по данным выборок. Например, если $S_1^2 = 20$, $S_2^2 = 10$, то $K_n = F_n = 2$.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 отвергают; будем обозначать ее W . *Областью принятия гипотезы* называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 принимают. Обозначаем O .

Основной принцип проверки гипотез — если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области — гипотезу отвергают, если

K_n принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.

Правосторонняя критическая область. Находим из таблицы критическую точку k_0 так, чтобы при условии справедливости H_0 выполнялось равенство

$$P(K > k_0) = \alpha.$$

При $K_n > k_0$ гипотеза H_0 может оказаться верной, и отвергая H_0 , совершаем ошибку первого рода с вероятностью α . *Левосторонняя критическая область.* Находим из таблицы критическую точку k_0 так, чтобы при условии справедливости H_0 выполнялось

$$P(K < k_0) = \alpha.$$

Двусторонняя критическая область. Находим критические точки k_1 и k_2 , чтобы при условии справедливости H_0 выполнялось

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha.$$

Если распределение K симметрично относительно нуля, то $k_1 = -k_2$ и k_2 находится из условия

$$P(K > k_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Гипотезы о равенстве средних.

Предположим, что проводятся две серии однотипных экспериментов, причем условия проведения экспериментов в этих сериях отличаются. Вопрос — если между вычисленными выборочными средними имеются различия, то будут ли они случайными или сказалась разница в условиях проведения эксперимента?

Пусть есть две выборки x_1, x_2, \dots, x_{n_1} и y_1, y_2, \dots, y_{n_2} объемом n_1 и n_2 из различных генеральных совокупностей. Предполагаем, что генеральные совокупности имеют нормальное распределение с параметрами (m_1, σ_1) и (m_2, σ_2) соответственно.

I. Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях.

Предполагается, что дисперсии генеральных совокупностей σ_1^2 и σ_2^2 известны. Рассматриваем гипотезу H_0 о равенстве средних m_1 и m_2 этих генеральных совокупностей:

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2.$$

Выбираем уровень значимости α , находим \bar{m}_1 и \bar{m}_2 — выборочные средние:

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad \bar{m}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i.$$

Для проверки гипотезы H_0 используется критерий

$$U = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

В случае справедливости H_0 критерий U имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Критическое значение k_0 находим из равенства

$$F(k_0) = 1 - \alpha,$$

где $F(x)$ — удвоенная функция Лапласа. Тогда область принятия гипотезы $O = (-k_0, k_0)$, критическая область

$$W = (-\infty, -k_0) \cup (k_0, +\infty).$$

II. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных дисперсиях.

Здесь предполагаем, что дисперсии генеральных совокупностей неизвестны, но равны между собой: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. В этом случае критерий U равен

$$U = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}.$$

Но этим критерием не можем пользоваться, потому что σ^2 неизвестно. Для оценки σ^2 можно воспользоваться любой из исправленных выборочных дисперсий:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{m}_1)^2 \quad \text{или} \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{m}_2)^2,$$

но более точной оценкой является их среднее арифметическое

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\bar{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\bar{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Получился критерий

$$T = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}.$$

Критерий T при верной гипотезе H_0 имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, критическая точка k_0 находится из условия

$$P(|T| < k_0) = 1 - \alpha.$$

Область принятия гипотезы $O = (-k_0, k_0)$, критическая область $W = (-\infty, -k_0) \cup (k_0, +\infty)$.

Пример 1. Сравниваются цены на молоко в г. Владимир (x_i) и г. Челябинск (y_i):

$$x_i : 53, 50, 48, 46, 56, 56, 52, 47,$$

$$y_i : 59, 63, 65, 58, 62, 68.$$

Задача — при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу

$$H_0 : m_2 = m_1 + 10, \quad H_1 : m_2 \neq m_1 + 10.$$

Решение. Найдем размеры выборок $n_1 = 8$, $n_2 = 6$, тогда

$$k = n_1 + n_2 - 2 = 12.$$

По таблице Стьюдента находим $k_0 = 2.18$. Вычисляем

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= 51, \quad \bar{m}_2 = 62.5, \quad \bar{\sigma}_1^2 = 15.14, \quad \bar{\sigma}_2^2 = 13.9, \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{(n_1 - 1)\bar{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\bar{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{7 \cdot 15.14 + 5 \cdot 13.9}{12} \approx 14.6. \end{aligned}$$

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$T_n = \frac{\bar{m}_1 + 10 - \bar{m}_2}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{-1,5}{\sqrt{14,6 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right)}} \approx -0.73.$$

Получилось, что $|T_n| < k_0 = 2,18$, то есть T_n содержится в области принятия гипотезы $O = (-k_0, k_0)$; поэтому гипотезу H_0 принимаем.

Гипотезы о равенстве дисперсий.

I. Гипотеза о равенстве дисперсий при неизвестных средних.

Пусть есть две выборки x_1, x_2, \dots, x_{n_1} и y_1, y_2, \dots, y_{n_2} объемом n_1 и n_2 из различных нормально распределенных генеральных совокупностей, средние значения которых неизвестны. Задан уровень значимости α . Проверяем гипотезу

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Найдем исправленные выборочные дисперсии:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{m}_1)^2, \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{m}_2)^2,$$

обозначим через $\bar{\sigma}_{max}^2$ и $\bar{\sigma}_{min}^2$ наибольшую и наименьшую из исправленных выборочных дисперсий:

$$\bar{\sigma}_{max}^2 = \max(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2), \quad \bar{\sigma}_{min}^2 = \min(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2).$$

Составляем критерий

$$F = \frac{\bar{\sigma}_{max}^2}{\bar{\sigma}_{min}^2}.$$

Найдем критическую точку распределения Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы

$$c = F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}.$$

Гипотезу H_0 принимают, если $F < c$.

Если проверяется гипотеза

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

то $c = F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$ и H_0 также принимают, если $F < c$.

II. Гипотеза о равенстве дисперсий при известных средних.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_{n_1} и y_1, y_2, \dots, y_{n_2} — две выборки из различных нормально распределенных генеральных совокупностей, средние значения которых известны и равны m_1 и m_2 . Задан уровень значимости α .

Проверяем гипотезу

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Здесь выборочные дисперсии находятся следующим образом:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2, \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - m_2)^2.$$

Составляем критерий

$$F = \frac{\bar{\sigma}_{max}^2}{\bar{\sigma}_{min}^2}$$

и находим критическую точку распределения Фишера $c = F_{n_1, n_2, \alpha/2}$. Гипотезу H_0 принимают, если $F < c$.

Если проверяется гипотеза

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

то $c = F_{n_1, n_2, \alpha}$ и H_0 также принимают, если $F < c$.

Пример 2. Пусть x_1, \dots, x_{30} и y_1, \dots, y_{20} — цена 1 литра молока в г. Москве и г. Владимире. Проверить утверждение — разброс цен на молоко в этих городах одинаковый при альтернативной гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. По выборкам нашли стандартные отклонения $\bar{\sigma}_1 = 5,8$, $\bar{\sigma}_2 = 4,2$, также известны m_1 , m_2 и $\alpha = 0,02$.

Решение. Проверяем гипотезу

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Здесь известны $n_1 = 30$, $n_2 = 20$, вычислим наблюдаемое значение критерия

$$F_n^* = \frac{5,8^2}{4,2^2} = \frac{33,64}{17,64} \approx 1,907.$$

По таблице Фишера находим $c_2 = F(30, 20; 0,01) = 2,778$. Получилось, что $F^* < c_2$, поэтому гипотезу H_0 принимаем.

Гипотеза о равенстве относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события.

Пусть по достаточно большому числу n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления некоторого события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота $\frac{m}{n}$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность p этого события равна гипотетической вероятности p_0 :

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p \neq p_0.$$

Вычисляем наблюдаемое значение критерия

$$U_n = \frac{|m/n - p_0| \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

и по таблице функции Лапласа находим критическую точку из равенства

$$F(k_0) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Если $|U_n| < k_0$, то нулевую гипотезу принимают.

Пример 3. Игральную кость бросили 100 раз. Количество появившихся «шестерок» получилось равным 16. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ нужно проверить нулевую гипотезу

$$H_0 : p = \frac{1}{6}, \quad H_1 : p \neq \frac{1}{6}.$$

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия

$$U_n = \frac{|0,16 - 0,167| \sqrt{100}}{\sqrt{5/36}} \approx 0,188.$$

Здесь $F(k_0) = 0,475$, по таблице Лапласа нашли $k_0 = 1,96$. Так как $|U_n| < k_0$, то нулевую гипотезу принимаем.

Задача 19.

Варианты 1 – 30.

Во всех задачах предполагается, что выборки производятся из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y .

1. Ученики одного класса занимались по обычной программе, другого — по экспериментальной, $n_1 = 20$, $n_2 = 25$. После написания экзамена оказалось, что для первого класса средний балл $\bar{m}_1 = 72$ при квадратическом отклонении $\bar{\sigma}_1 = 9$ баллов, для второго класса $\bar{m}_2 = 75$, $\bar{\sigma}_2 = 6$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 4 балла.

2. Производятся выборки размеров $n_1 = 12$, $n_2 = 15$ из двух генеральных совокупностей. Вычислены выборочные дисперсии $\bar{\sigma}_1^2 = 11,41$; $\bar{\sigma}_2^2 = 6,52$. На уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

3. Производятся выборки размеров $n_1 = 60$, $n_2 = 50$ из двух генеральных совокупностей. Вычислены выборочные средние $\bar{x} = 1250$; $\bar{y} = 1275$, известны дисперсии генеральных совокупностей: $\sigma_1^2 = 120$, $\sigma_2^2 = 100$. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : m_1 = m_2$ о равенстве средних генеральных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1 : m_1 \neq m_2$.

4. Производятся выборки

$$x_i : 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8, 8 \quad \text{и} \quad y_i : 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 9$$

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

5. Производятся выборки

$$x_i : 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6 \text{ и } y_i : 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7$$

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ при условии равенства генеральных дисперсий проверить гипотезу $H_0 : m_1 = m_2$ о равенстве средних генеральных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1 : m_1 \neq m_2$.

6. Для 23 учеников одного класса средний балл за ЕГЭ равен $\bar{m}_1 = 85$, квадратическое отклонение $\bar{\sigma}_1 = 11$ баллов, а для 25 учеников другого класса средний $\bar{m}_2 = 75$, $\bar{\sigma}_2 = 18$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

7. Ученики одного класса занимались по обычной программе, другого — по экспериментальной, $n_1 = 18$, $n_2 = 25$. После написания ЕГЭ оказалось, что для первого класса средний балл $\bar{m}_1 = 82$ при квадратическом отклонении $\bar{\sigma}_1 = 12$ баллов, для второго класса $\bar{m}_2 = 75$, $\bar{\sigma}_2 = 9$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 6 баллов.

8. Производятся выборки

$$x_i : 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6 \text{ и } y_i : 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7$$

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

9. Ученики одного класса занимались по обычной программе, другого — по экспериментальной, $n_1 = 18$, $n_2 = 25$. После написания ЕГЭ оказалось, что для первого класса средний балл $\bar{m}_1 = 82$ при квадратическом отклонении $\bar{\sigma}_1 = 12$ баллов, для второго класса $\bar{m}_2 = 85$, $\bar{\sigma}_2 = 9$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средние результаты не отличаются.

10. Производятся выборки

$$x_i : 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7 \text{ и } y_i : 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 10$$

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

11. Сравниваются два теодолита, каждый из которых имеет заданное стандартом среднеквадратическое отклонение $0,3^0$. Произведено соответственно 25 и 50 измерений первым и вторым теодолитом, вычислены выборочные средние $\bar{x} = 9,79^0$, $\bar{y} = 9,60^0$. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ выяснить, отличаются ли эти теодолиты.

12. В результате анализа дистиллята на двух параллельно работающих колоннах получены следующие данные о содержании бензола:

Колонна № 1: 94.0, 95.0, 95.0, 97.0, 94.0, 97.5, 98.0.

Колонна № 2: 99.0, 97.0, 95.0, 98.0, 95.0.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средние значения содержания бензола в дистилляте этих колонн не отличаются.

13. Пробы из очень чистого железа, полученные двумя различными методами, имели следующие точки плавления:

A : 1493, 1519, 1518, 1512, 1512, 1514, 1489, 1508, 1508, 1494.

B : 1509, 1494, 1512, 1483, 1507, 1491.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что оба метода дают железо, имеющее одну и ту же точку плавления.

14. Было изобретено новое лекарство, которое, предположительно, можно использовать при болезнях сердца. Первой группе собак вводили лекарство, а второй плацебо (физиологический раствор). После этого было измерено среднее артериальное давление в первой (x_i) и второй группах (y_i в мм. рт. ст.):

x_i : 73, 81, 103, 88, 130, 106, 106, 111, 122, 108, 99,

y_i : 156, 171, 103, 133, 102, 129, 120, 110, 112, 130, 105.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что лекарство не влияет на среднее артериальное давление. Предполагаем, что дисперсии генеральных совокупностей равны.

15. Было изобретено новое лекарство, которое, предположительно, можно использовать при болезнях сердца. Первой группе собак вводили лекарство, а второй плацебо (физиологический раствор). После этого был измерен диаметр коронарной артерии в первой (x_i) и второй группах (y_i в мм.):

$x_i : 2.5, 1.7, 1.5, 2.5, 1.4, 1.9, 2.3, 2.0, 2.6, 2.4, 2.2,$

$y_i : 2.5, 2.2, 2.4, 2.0, 2.1, 1.8, 2.4, 2.3, 2.8, 2.6, 1.9.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что лекарство не влияет на диаметр коронарной артерии. Предполагаем, что дисперсии генеральных совокупностей равны.

16. Имеются результаты измерения ростов взрослых представителей двух этнических групп (в см.):

$x_i : 166, 171, 173, 169, 174, 183, 175, 170, 168, 181,$

$y_i : 180, 175, 172, 174, 168, 175, 176, 169, 182, 179.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что рост первой и второй групп не отличаются.

17. Имеются результаты измерения времени забега на дистанцию 30 метров для мальчиков 1 класса двух школ, причем первая школа является спортивной, а вторая — «обычной» (в секундах):

$x_i : 6.2, 6.1, 5.9, 6.4, 6.6, 6.4, 6.5, 6.8, 6.8, 6.3,$

$y_i : 6.8, 6.5, 6.9, 6.3, 6.6, 6.8, 7.4, 7.2, 6.8, 6.7.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что результаты в первой школе на 0.5 секунд лучше, чем во второй.

18. Имеются результаты измерения времени забега на дистанцию 30 метров для девочек 3 класса двух школ, причем первая школа является спортивной, а вторая — «обычной» (в секундах):

$x_i : 6.2, 6.5, 6.9, 6.4, 6.6, 6.4, 6.5, 6.8, 6.8, 7.3,$

$y_i : 6.8, 6.5, 7.2, 6.5, 6.6, 6.9, 7.4, 7.1, 6.8, 6.7.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что результаты в первой школе на 0.5 секунд лучше, чем во второй.

19. Имеются результаты измерения ростов взрослых представителей двух этнических групп (в см.):

$x_i : 166, 171, 167, 169, 170, 173, 175, 165, 168, 171,$

$y_i : 180, 175, 172, 174, 168, 175, 176, 169, 182, 179.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средний рост в первой группе на 5 сантиметров меньше, чем во второй.

20. Для 25 учеников одного класса средний балл за ЕГЭ равен $\bar{m}_1 = 65$, квадратическое отклонение $\bar{\sigma}_1 = 11$ баллов, а для 23 учеников другого класса средний балл $\bar{m}_2 = 71$, $\bar{\sigma}_2 = 15$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

21. Ученики одного класса занимались по обычной программе, другого — по программе с углубленным изучением математики, $n_1 = 21$, $n_2 = 25$. После написания ЕГЭ оказалось, что для первого класса средний балл $\bar{m}_1 = 62$ при квадратическом отклонении $\bar{\sigma}_1 = 12$ баллов, для второго класса $\bar{m}_2 = 75$, $\bar{\sigma}_2 = 9$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 10 баллов.

22. Имеются результаты измерения урожайности пшеницы в первой группе хозяйств (x_i центнеров с гектара, здесь применяли старые методы удобрения), и во второй группе хозяйств (y_i центнеров с гектара, применяли новые методы удобрения):

$x_i : 28, 32, 30, 29, 28, 32, 29, 30, 31, 31, 28, 29,$

$y_i : 30, 33, 31, 28, 29, 34, 30, 29, 30, 32, 29, 30.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средние значения урожайности в двух группах не отличаются.

23. Имеются результаты измерения урожайности картофеля в первой группе хозяйств (x_i центнеров с гектара, здесь применяли старые методы удобрения), и во второй группе хозяйств (y_i центнеров с гектара, применяли новые методы удобрения):

$x_i : 180, 140, 150, 180, 165, 160, 175, 170, 155, 180,$

$y_i : 195, 155, 180, 175, 190, 180, 205, 190, 185, 160, 180, 165.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 10 центнеров с гектара.

24. Мальчики 9 класса сдавали нормативы ГТО по бегу на 100 метров, получены следующие результаты для учащихся из спортивной школы (x_i , в секундах) и учащихся из обычной школы (y_i , в секундах):

$x_i : 14.2, 14.8, 15.3, 14.8, 13.5, 13.7, 14.4, 13.9, 15.5, 13.0,$

$y_i : 14.7, 15.4, 14.9, 15.5, 15.0, 15.5, 14.8, 15.9, 14.9, 15.6, 15.2.$

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 1 секунду.

25. Испытывается новое лекарство, которое можно будет использовать при лечении гипертонии. Первой группе собак вводили лекарство, а второй плацебо (физиологический раствор). После этого было измерено среднее артериальное давление в первой (x_i) и второй группах (y_i в мм. рт. ст.):

$x_i : 83, 91, 103, 98, 130, 106, 106, 111, 122, 108, 109,$

y_i : 156, 171, 103, 133, 102, 129, 120, 110, 112, 130, 105.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что лекарство не влияет на среднее артериальное давление. Предполагаем, что дисперсии генеральных совокупностей равны.

26. На двух ихтиологических станциях получили следующие значения длины атлантической сельди в сантиметрах (x_i для первой станции и y_i — для второй):

x_i : 30, 25, 28, 31, 27, 28, 33, 28, 27, 25, 27, 28,

y_i : 28, 31, 29, 28, 33, 28, 32, 25, 27, 28.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средние значения длины сельди на двух станциях не отличаются.

27. Психолог сравнивает баллы у 10 учеников «4-А» класса по третьему, математическому, тесту Векслера (x_i) баллы по тому же тесту у 12 учеников «4-Б» класса (y_i):

x_i : 8, 20, 18, 10, 16, 10, 14, 14, 16, 8,

y_i : 10, 18, 18, 10, 16, 10, 8, 14, 16, 6, 8, 12.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что средние значения баллов по данному тесту не отличаются.

28. 10 школьникам 4 класса и 10 школьникам 6 класса были даны тесты на наглядно-образное мышление. Измерялось время решения заданий тестов для учеников 4 класса и учеников 6 класса в секундах:

x_i : 31, 42, 43, 44, 38, 45, 49, 49, 54, 34,

y_i : 27, 37, 37, 38, 37, 45, 39, 37, 45, 43.

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что среднее различие результатов составляет 8 секунд.

29. Производятся выборки

x_i : 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7 и y_i : 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

30. Производятся выборки

x_i : 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 10 и y_i : 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8

из двух генеральных совокупностей. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

§ 13. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

Линейная модель парной регрессии.

Предположим, что есть набор значений двух переменных x_i и y_i , $i = 1, \dots, n$. Можно изобразить пары (x_i, y_i) точками на декартовой плоскости Oxy (рис. 6).

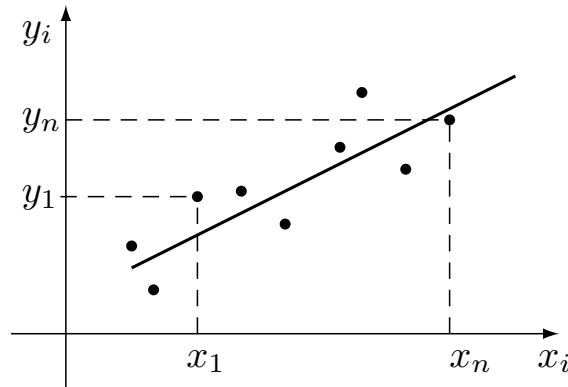


Рис. 6. Модель парной линейной регрессии

Такое изображение называется *полем корреляции* или *диаграммой рассеяния*. По расположению эмпирических точек (x_i, y_i) можно предполагать наличие линейной корреляционной зависимости между переменными X и Y .

Уравнение линейной регрессии записывают в виде линейного уравнения

$$\frac{y - \bar{y}}{S_y} = r \frac{x - \bar{x}}{S_x}$$

или в следующем виде —

$$y = r \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}. \quad (7)$$

Здесь \bar{x} и \bar{y} — выборочные средние для первой и второй выборок соответственно,

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

— выборочные квадратические отклонения, число

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n S_x S_y} \quad (8)$$

является коэффициентом корреляции Пирсона.

Понятие корреляционной зависимости.

Если две характеристики имеют тенденцию изменяться совместно так, что создается возможность предсказать величину одной из них по значению другой, то говорят, что эти характеристики *коррелируют друг с другом*.

Коэффициент корреляции Пирсона можно находить по формуле (8) или по равносильной ей формуле —

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Коэффициент корреляции принимает значение на отрезке $[-1, 1]$. Чем ближе $|r|$ к единице, тем теснее связь. При $|r| = 1$ корреляционная связь представляет линейную функциональную зависимость. При этом все наблюдаемые значения (x_i, y_i) располагаются на прямой линии на диаграмме рассеяния. При $r = 0$ линейная корреляционная связь отсутствует.

Статистическая значимость коэффициента корреляции.

Предположим, что генеральная совокупность имеет большой объем и ее полное исследование невозможно или нецелесообразно. Произведем выборку из этой совокупности и найдем для нее выборочный коэффициент корреляции r . Если окажется, что его значение близко к 1 или -1 , то можно сделать предположение о наличии сильной линейной связи между двумя признаками. При попытке распространить этот результат на генеральную совокупность возникает вопрос — является ли выявленная зависимость верной и для нее или полученный результат случайный и характерен только для отдельной выборки? Для решения вопроса нужно проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции ρ генеральной совокупности:

H_0 : $\rho = 0$ (в генеральной совокупности нет зависимости, выборочная зависимость случайная);

H_1 : $\rho \neq 0$ (установленная зависимость справедлива для генеральной совокупности).

Принятие решения будет основано на специальном критерии, кото-

рый вычисляется по выборочному коэффициенту корреляции r и объему выборки n :

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}.$$

Критические значения находим по таблице распределения Стьюдента для двусторонней гипотезы при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n - 2$. Критическая область задается условием $|t| > t_{\alpha/2}$. Если значение критерия попадает в критическую область, то основная гипотеза отвергается.

Пример 1.

На ихтиологической станции получены значения длины атлантической сельди в сантиметрах (x_i) и веса в граммах (y_i) (см. таблицу 5).

x_i	32	33	28	35	26	27	31	28
y_i	325	330	295	340	285	300	315	290

Табл. 5. Пары значений x_i и y_i

Найти коэффициент корреляции Пирсона, построить уравнение регрессии. Проверить статистическую значимость коэффициента корреляции Пирсона для $\alpha = 0.01$.

Решение. Найдем выборочные средние $\bar{x} = 30$, $\bar{y} = 310$. Для вычисления коэффициента корреляции можно сначала произвести вспомогательные вычисления:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 72, \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 2900,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 445.$$

Далее найдем выборочные квадратические отклонения $S_x \approx 2.683$, $S_y \approx 17.029$ и коэффициент корреляции —

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n S_x S_y} \approx 0.974.$$

Выше уже проделаны все предварительные вычисления, для построения уравнения регрессии используем формулу (7) :

$$y = 6.18x + 124.6.$$

Проверим гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции ρ генеральной совокупности:

$$H_0 : \rho = 0, \quad \rho \neq 0.$$

По выборочному коэффициенту корреляции $r = 0.974$ и объему выборки $n = 8$ вычислим значение критерия

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.974 \cdot \sqrt{\frac{6}{0.051}} \approx 10.565.$$

По таблице распределения Стьюдента для двусторонней гипотезы при уровне значимости $\alpha = 0.01$ и числе степеней свободы $k = 6$ находим критическое значение $t_{\alpha/2} = 1.94$. Значение критерия $t = 10.565$ попадает в критическую область $|t| > 1.94$, поэтому основная гипотеза отвергается. Вывод — зависимость между длиной атлантической сельди в сантиметрах и ее весом в граммах является значимой, ее можно распространить на совокупность всех рыб данного вида.

Задача 20.

Варианты 1 – 30.

Найти коэффициент корреляции Пирсона, построить диаграмму рассеяния и уравнение линейной регрессии. Проверить статистическую значимость коэффициента корреляции Пирсона для $\alpha = 0.01$.

1. Получены выборочные значения роста x_i (в см.) и веса y_i (в кг.) для 10 мужчин:

$$\begin{aligned} x_i : 180, 172, 173, 169, 174, 174, 175, 170, 168, 182, \\ y_i : 102, 95, 83, 85, 76, 78, 65, 68, 75, 82. \end{aligned}$$

2. Получены выборочные значения x_i (число пропущенных занятий) и y_i (число баллов на экзамене) для 10 студентов:

$$\begin{aligned} x_i : 2, 1, 3, 9, 7, 4, 5, 0, 1, 0, \\ y_i : 72, 90, 83, 25, 16, 58, 68, 85, 82, 90. \end{aligned}$$

3. Получены выборочные значения роста x_i (в см.) и веса y_i (в кг.) для 10 женщин:

$$x_i : 170, 162, 163, 169, 174, 164, 165, 170, 168, 162, \\ y_i : 82, 65, 73, 65, 66, 68, 60, 58, 75, 52.$$

4. Получены выборочные значения веса 1 посадочной картофелины x_i (в гр.) и количеством выросших из нее клубней y_i для 10 наблюдений:

$$x_i : 70, 65, 55, 90, 75, 60, 65, 50, 80, 65, \\ y_i : 8, 6, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 7, 5.$$

5. Получены выборочные значения веса x_i (в кг.) и длины y_i (в см.) для 10 новорожденных детей:

$$x_i : 3, 2; 3, 5; 3, 2; 3, 9; 3, 7; 4, 2; 3, 5; 4, 8; 2, 8; 3, 6; \\ y_i : 48, 50, 51, 53, 50, 54, 50, 52, 49, 52.$$

6. Исследуется зависимость между высотой (x_i , см.) и весом капусты (y_i , кг.). Для 10 растений получены выборочные значения

$$x_i : 25, 27, 27, 28, 30, 33, 33, 33, 35, 38, \\ y_i : 1.5, 2.0, 2.3, 3.2, 2.5, 3.0, 3.3, 3.2, 2.5, 3.0.$$

7. Исследуется зависимость между высотой растения (x_i , см.) и его урожайностью (y_i , кг.). Для 10 растений получены выборочные значения

$$x_i : 62, 64, 64, 68, 73, 75, 75, 78, 84, 90, \\ y_i : 1.3, 1.2, 1.5, 1.3, 1.6, 1.8, 1.3, 1.6, 2.5, 2.1.$$

8. Исследуется зависимость между длиной верхней части корнеплода (x_i , см.) и его весом (y_i , г.). Для 10 растений получены выборочные значения

$$x_i : 22, 24, 24, 28, 23, 25, 25, 28, 34, 32, \\ y_i : 130, 120, 150, 130, 160, 180, 140, 160, 250, 210.$$

9. Пусть X — число пожаров за 2024 год по различным районам N -ской области, Y — количество пожарных машин в этом районе. Получены следующие выборочные значения:

$$x_i : 262, 264, 314, 268, 273, 275, 275, 378, 484, 490, \\ y_i : 50, 40, 55, 35, 60, 49, 34, 66, 52, 38.$$

10. Исследуется зависимость между заработной платой рабочих (x_i , тыс. руб.) и общим стажем работы (y_i , лет). Для 12 рабочих

$$x_i : 65, 70, 73, 82, 85, 90, 93, 102, 115, 120, 123, 132, \\ y_i : 1, 1, 2, 5, 3, 3, 6, 4, 8, 15, 9, 12.$$

11. Исследуется зависимость между доходом на 1 человека (x_i , тыс. руб.) и числом детей в семье (y_i). Для 12 семей

$$x_i : 45, 56, 58, 62, 63, 65, 70, 81, 85, 90, 105, 120, \\ y_i : 4, 5, 3, 2, 2, 3, 2, 0, 1, 1, 0, 0.$$

12. Психолог сравнивает баллы у 10 учеников по третьему, математическому, тесту Векслера (x_i) и оценки по алгебре (y_i):

$$x_i : 8, 18, 18, 10, 16, 10, 8, 14, 16, 6, \\ y_i : 2, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 2.$$

13. Психолог проводит исследование интеллекта у 12 учеников 9 класса, используя «Школьный тест умственного развития» (ШТУР), получили ранговые значения $x_i : 6, 7, 4, 5, 9, 12, 2.5, 2.5, 10, 8, 11, 1$. Одновременно с этим он просит учителя математики провести ранжирование этих же учеников по показателям умственного развития — получили значения $y_i : 5, 10, 8, 4, 6, 8, 2, 3, 8, 11, 12, 1$.

14. Психолог проводит исследование интеллекта у 12 учеников 9 класса, используя «Школьный тест умственного развития» (ШТУР), получили ранговые значения $x_i : 6, 7, 4, 5, 9, 12, 2.5, 2.5, 10, 8, 11, 1$. Одновременно с этим он просит учительницу литературы провести ранжирование этих же учеников по показателям умственного развития — получили значения $y_i : 5, 8, 7, 11, 3, 6, 11, 11, 1, 3, 3, 9$.

15. 10 школьникам были даны два теста — на наглядно-образное и вербальное мышление. Измерялось время решения заданий первого и второго тестов в секундах:

$$x_i : 19, 32, 33, 44, 28, 35, 39, 39, 44, 24, \\ y_i : 17, 7, 17, 28, 27, 31, 20, 17, 35, 43.$$

16. Проводилось исследование питьевой воды на наличие вредных примесей железа (x_i) и марганца (y_i). Получили следующие значения показателей (мг/л):

$$x_i : 0.14, 0.16, 0.17, 0.15, 0.17, 0.13, 0.14, 0.18, 0.14, 0.16, \\ y_i : 0.05, 0.04, 0.06, 0.03, 0.06, 0.03, 0.04, 0.06, 0.04, 0.05.$$

17. На ихтиологической станции проводится сбор биологического материала по видовому и размерно-возрастному составу промысловых рыб. Получили следующие значения длины атлантической сельди в сантиметрах (x_i) и веса в граммах (y_i):

$$x_i : 30, 25, 28, 31, 27, 28, 33, 28, 27, 25, 27, 28, \\ y_i : 320, 270, 285, 310, 275, 280, 325, 290, 280, 250, 270, 285.$$

18. Проводилась проверка загрязнения воздуха на наличие диоксида азота (x_i) и бензапирена (y_i). Получили следующие значения показателя ($\text{мг}/\text{м}^3$):

$$x_i : 0.06, 0.09, 0.09, 0.11, 0.07, 0.05, 0.08, 0.06, 0.10, 0.06, \\ y_i : 0.04, 0.07, 0.06, 0.06, 0.05, 0.03, 0.06, 0.04, 0.08, 0.05.$$

19. В 2025 году урожайность пшеницы в различных хозяйствах России составила x_i , а урожайность картофеля — y_i центнеров с гектара:

$$x_i : 28, 32, 30, 29, 28, 32, 29, 30, 31, 31, 28, 29, 29, 31, 27, \\ y_i : 160, 175, 170, 180, 175, 195, 155, 180, 175, 190, 180, 205, 190, 185, 160.$$

20. Девушки сдавали нормативы ГТО по бегу на 100 метров (x_i , в секундах) и на 2 километра (y_i , в минутах):

$$x_i : 16.2, 16.8, 17.3, 16.8, 15.5, 15.7, 16.4, 16.9, 17.5, 18.0, \\ y_i : 11.2, 12.8, 13.3, 12.8, 11.5, 11.7, 12.4, 11.9, 12.5, 13.0.$$

21. Юноши сдавали нормативы ГТО по бегу на 100 метров (x_i , в секундах) и на 3 километра (y_i , в минутах):

$$x_i : 14.2, 14.8, 15.3, 14.8, 13.5, 13.7, 14.4, 13.8, 15.5, 13.0, \\ y_i : 14.4, 13.8, 13.5, 12.8, 13.6, 14.7, 14.2, 12.9, 14.6, 14.0.$$

22. Получены выборочные значения роста x_i (в см.) и веса y_i (в кг.) для 10 мужчин:

$$x_i : 182, 174, 175, 169, 173, 174, 175, 178, 168, 182, \\ y_i : 110, 95, 86, 85, 76, 78, 65, 68, 75, 92.$$

23. Получены выборочные значения x_i (количество пропущенных занятий) и y_i (число баллов на экзамене) для 12 студентов:

$$x_i : 2, 1, 3, 9, 7, 4, 5, 0, 1, 0, 6, 4, \\ y_i : 62, 90, 83, 25, 16, 58, 68, 85, 82, 90, 35, 82.$$

24. Получены выборочные значения роста x_i (в см.) и веса y_i (в кг.) для 10 женщин:

$$x_i : 167, 166, 163, 169, 177, 164, 167, 174, 168, 162, \\ y_i : 82, 67, 73, 65, 68, 75, 60, 59, 77, 56.$$

25. Получены выборочные значения веса 1 посадочной картофелины x_i (в гр.) и количеством выросших из нее клубней y_i для 10 наблюдений:

$$x_i : 70, 65, 75, 90, 85, 90, 65, 60, 80, 60, \\ y_i : 8, 6, 7, 8, 7, 5, 6, 5, 7, 4.$$

26. Получены выборочные значения веса x_i (в кг.) и длины y_i (в см.) для 10 новорожденных детей:

$$x_i : 3, 2; 3, 5; 3, 2; 2, 9; 3, 7; 4, 2; 3, 5; 4, 4; 2, 8; 3, 6; \\ y_i : 48, 50, 51, 48, 50, 54, 50, 51, 49, 52.$$

27. Исследуется зависимость между высотой (x_i , см.) и весом капусты (y_i , кг.). Для 10 растений получены выборочные значения:

$$x_i = 35, 37, 37, 38, 40, 43, 43, 43, 45, 48, \\ y_i = 2.5, 2.0, 2.3, 3.2, 2.5, 3.0, 3.3, 3.2, 3.5, 3.7.$$

28. Исследуется зависимость между высотой растения (x_i , см.) и его урожайностью (y_i , кг.). Для 10 растений получены выборочные значения:

$$x_i = 82, 84, 84, 88, 93, 95, 95, 98, 104, 110, \\ y_i = 1.3, 1.2, 1.6, 1.4, 1.7, 1.8, 1.5, 1.6, 2.6, 2.4.$$

29. Исследуется зависимость между длиной верхней части корня плода (x_i , см.) и его весом (y_i , г.). Для 10 растений получены выборочные значения:

$$x_i = 32, 34, 34, 38, 33, 35, 35, 38, 44, 42, \\ y_i = 230, 220, 250, 230, 260, 280, 240, 260, 300, 310.$$

30. 10 школьникам были даны два теста — на наглядно-образное и вербальное мышление. Измерялось время решения заданий первого и второго тестов в секундах:

$$x_i = 31, 42, 43, 44, 38, 45, 49, 49, 54, 34, \\ y_i = 27, 17, 27, 38, 37, 41, 30, 27, 45, 53.$$

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1.

Вариант 1.

1. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что при трех выстрелах он хотя бы раз поразит мишень?

2. На единичном отрезке случайным образом выбираются две точки A и B . Найти вероятность, что расстояние между ними больше $1/2$.

3. Монета брошена 6 раз. Зависимы или независимы следующие события: «на первых двух местах появились гербы» и «появилось ровно 4 герба»?

4. В одном ящике находятся 1 белый и 2 черных шара, в другом — 2 белых и 3 черных. В третий ящик кладут 2 шара, случайно выбранных из первого и 2 шара, случайно выбранных из второго. Какова вероятность, что шар, извлеченный из третьего ящика, будет белым?

5. Вероятность появления синего колокольчика при скрещивании белых и синих колокольчиков в одном опыте равна 0,6. Найти вероятность того, что в 300 опытах появится от 180 до 200 синих колокольчиков.

Вариант 2.

1. Колода карт из 36 листов делится наугад на две равные пачки по 18 листов. Найти вероятность того, что в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре.

2. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность, что y меньше, чем x^2 , но больше x .

3. Брошены 2 игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Проверить, являются ли независимыми события A — выпала ровно одна «6», B — выпала ровно одна «1».

4. В ящик, содержащий 8 исправных изделий, добавлено 2 изделия, взятых со склада. Известно, что доля бракованных изделий на складе равна 5 процентам. Найти вероятность того, что взятое из пополненного ящика изделие не будет бракованным.

5. Вероятность выпуска стандартной электролампы равна 0,9. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных будет не менее 1790 штук?

Вариант 3.

1. Из карточек азбуки составлено слово «МАТЕМАТИКА». Затем из этих 10 карточек по схеме случайного выбора без возвращения отобрано 3 карточки. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «КИТ».

2. На паркет, составленный из равносторонних треугольников с длиной стороны 6, случайным образом бросается монета радиусом 1. Найти вероятность, что монета не пересечет ни одну из сторон треугольников.

3. Монета брошена 6 раз. Зависимы или независимы события: «появилось нечетное число гербов» и «появились 5 или 6 гербов»?

4. В ящике находится 8 новых теннисных мячей и 5 игранных. Из ящика наудачу вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наудачу два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

5. Вероятность всхожести хранящегося на складе зерна равна 0,8. Отбираются первые попавшиеся 200 зерен. Требуется определить вероятность, что среди них число всхожих зерен окажется от 140 до 170 штук.

Вариант 4.

1. В ящике 10 белых и 9 черных шаров. Из ящика вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: «шары одного цвета» или «шары разных цветов»?

2. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 случайным образом выбирается точка. Найти вероятность, что расстояние от этой точки до гипотенузы не превосходит 1.

3. Брошены 2 игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Проверить, являются ли независимыми события A — не выпало ни одной «6», B — не выпало ни одной «1».

4. Из 10 студентов 3 подготовлены к экзамену отлично, 4 — хорошо и 3 — посредственно. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов в билетах, хорошо подготовленный — на 15, посредственно — на 10. Вызванный наугад студент ответил на два произвольно заданных вопроса. Найти вероятность, что он подготовлен отлично.

5. Из ящика, содержащего 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти вероятность того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

Контрольная работа № 2.

Вариант 1.

1. Бросается пять игральных костей. Пусть случайная величина X равна количеству нечетных чисел, выпавших на этих костях. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию X .

2. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x . Найти функцию распределения и вероятность $P\{X \in [0, 8; 1, 2]\}$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины из задачи 2.

4. Случайные величины X_1, X_2, X_3 имеют показательное распределение с параметром 4. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 + X_2 - X_3$.

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-4, -1]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = -X + 1$.

Вариант 2.

1. Три пассажира случайным образом рассаживаются в поезд, состоящий из четырех вагонов. Пусть случайная величина X равна числу занятых вагонов. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию X .

2. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x + 1$ при $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и равна 0 для остальных x . Найти функцию распределения и $P\{X \in [-0, 2; 0, 5]\}$.

3. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[-2, 1]$. Выписать ее функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

4. Случайная величина X_1 имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 3]$, X_2 — показательное с параметром $a > 0$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 - X_2$.

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = -X + 2$.

Вариант 3.

1. Проводится 5 независимых испытаний, каждое из которых состоит в подбрасывании двух монет. Пусть случайная величина X равна количеству пар гербов, появившихся при 5 испытаниях. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию X .

2. Плотность случайной величины X равна $f(x) = C(x + 3)$ при $x \in [1, 2]$ и равна нулю для остальных x . Найти постоянную C , функцию распределения и вероятность $P\{X \in [1; 1, 2]\}$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины из задачи 2.

4. Случайные величины X_1, X_2, X_3 имеют равномерное распределение на отрезке $[1, 3]$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 5]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = -2X$.

Вариант 4.

1. Четыре неразличимых шара случайным образом раскладываются по трем ящикам. Пусть случайная величина X равна числу шаров в первом ящике. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию X .

2. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x$ при $x \in [0, 1]$ и равна нулю для остальных x . Найти функцию распределения и вероятность $P\{X \in [0, 5; 0, 8]\}$.

3. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 2]$. Выписать ее функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

4. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 - X_2$, если X_1 равномерно распределена на отрезке $[-2, 1]$, а X_2 имеет показательное распределение с параметром 5.

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 2. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = 2X - 1$.

Контрольная работа № 3.

Вариант 1.

1. Задана матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ и распределение по состояниям в начальный момент времени: $(0,5; 0,5)$. Найти распределение по состояниям в моменты времени $n = 1$ и $n = 2$.

2. Проведено выборочное обследование рабочих автозавода. Средняя заработная плата в выборке из 100 человек составила 62 520 рублей при среднем квадратическом отклонении 228 рублей. Установить с вероятностью 0,95 предел, в котором находится средняя заработная плата для всей генеральной совокупности.

3. Найти коэффициент корреляции Пирсона для выборочных значений $x_i : 2, 3, 4, 4, 5, 8, 10, 12$ и $y_i : 10, 9, 8, 5, 6, 6, 11, 7$.

4. Пусть X и Y — нормально распределенные генеральные совокупности, из которых производятся выборки размеров $n_1 = 12$, $n_2 = 15$. Вычислены выборочные дисперсии $\bar{\sigma}_1^2 = 11,41$; $\bar{\sigma}_2^2 = 6,52$. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Вариант 2.

1. Задана матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ и распределение по состояниям в начальный момент времени: $(1; 0)$. Найти матрицу P^2 и распределение по состояниям в моменты времени $n = 2$.

2. Для проверки качества продукции получены выборочные значения $x_i : 3, 2; 3, 5; 3, 6; 3, 5; 3, 3; 3, 0; 2, 9; 3, 0$ — жирность молока (в процентах). Установить с вероятностью 0,95 предел, в котором находится средний процент жирности молока в данной партии товара.

3. Построить диаграмму рассеяния для выборочных значений $x_i : 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8$ и $y_i : 9, 9, 8, 5, 6, 6, 8, 6, 4$. По диаграмме сделать вывод о знаке коэффициента корреляции Пирсона.

4. Пусть X и Y — нормально распределенные генеральные совокупности, из которых производятся выборки размеров $n_1 = 60$, $n_2 = 50$. Вычислены выборочные средние $\bar{x} = 1250$; $\bar{y} = 1275$, известны дисперсии генеральных совокупностей: $\sigma_1^2 = 120$, $\sigma_2^2 = 100$. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : m_1 = m_2$ о равенстве средних генеральных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Вариант 3.

1. Задана матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $(0,4; 0,6)$. Найти распределение по состояниям в момент времени $n = 2$.

2. Проведено выборочное обследование рабочих предприятия. Средняя заработная плата в выборке из 81 человека составила 71 240 рублей при среднем квадратическом отклонении 140 рублей. Установить с вероятностью 0,95 предел, в котором находится средняя заработная плата для всей генеральной совокупности.

3. Найти коэффициент корреляции Пирсона для выборочных значений $x_i : 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8$ и $y_i : 9, 9, 8, 5, 6, 6, 8, 6, 4$.

4. Для 23 учеников одного класса средний балл за ЕГЭ равен $\bar{m}_1 = 85$, квадратическое отклонение $\bar{\sigma}_1 = 11$ баллов, а для 25 учеников другого класса средний $\bar{m}_2 = 75$, $\bar{\sigma}_2 = 18$ баллов. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Вариант 4.

1. Задана матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$. Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определено вектором $(1; 0)$. Найти матрицу P^2 и распределение по состояниям в моменты времени $n = 2$.

2. Получены выборочные значения $x_i : 9, 3; 9, 2; 8, 8; 5, 3; 8, 7; 9, 0; 9, 5; 9, 4$ — жирность творога (в процентах). Установить с вероятностью 0,95 предел, в котором находится средний процент жирности в данной партии товара.

3. Найти уравнение регрессии для выборочных значений

$$x_i : 2, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 10 \quad \text{и} \quad y_i : 12, 10, 8, 5, 6, 6, 8, 6.$$

4. Пусть X и Y — нормально распределенные генеральные совокупности, из которых производятся выборки размеров $n_1 = 24$, $n_2 = 25$. Вычислены выборочные средние $\bar{x} = 250$; $\bar{y} = 265$, известны дисперсии генеральных совокупностей: $\sigma_1^2 = 120$, $\sigma_2^2 = 100$. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : m_1 = m_2$ о равенстве средних генеральных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1 : m_1 \neq m_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика – науки, имеющие огромное прикладное значение. С их помощью описываются многие процессы, происходящие в биологии, экономике, психологии, социологии и многих других областях.

Цель задачника – формирование у читателей основных понятий и положений теории вероятностей и математической статистики, а также навыков их применения при решении различных задач естествознания и гуманитарных наук. В издании приведены задачи по основным разделам курса теории вероятностей (классическое и геометрическое определения вероятностей, формулы вычисления вероятностей, схема Бернулли, функции распределения дискретных и непрерывных случайных величин, цепи Маркова), а также задачи по математической статистике, для решения которых студенты должны освоить методы анализа данных, такие как выборочный метод анализа, проверка статистических гипотез и корреляционный анализ.

Задачник содержит большое количество разобранных примеров, что может быть полезно при изучении дисциплины «Теории вероятностей и математическая статистика». Представленные задачи для самостоятельного решения необходимы не только обучающимся, но также могут пригодиться преподавателям при проведении занятий и подготовке контрольных работ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. – ISBN 5-7695-1054-4.

2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей: Учебник. / Б. В. Гнеденко. – Изд. 8-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с. – ISBN 5-354-01091-8.

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 10-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 479 с.: ил. – ISBN 5-06-004214-6.

4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.: ил. – ISBN 5-06-004212-X.

5. Дерр, В. Я. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Я. Дерр. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 596 с. : ил. – ISBN 978-5-8114-6515-6.

6. Ермолаев, О. Ю. Математическая статистика для психологов: Учебник / О. Ю. Ермолаев. – 2-е изд., испр. – М.: Московский психологосоциальный институт: Флинта, 2003. – 336 с. – ISBN 5-89349-361-3.

7. Зубков А. Н., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1989. – 320 с. – ISBN 5-02-013949-1.

8. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИДАНА, 2010. – 551 с. – ISBN 978-5-238-01270-4.

9. Мастерков, Ю. В., Родина, Л. И. Теория вероятностей. Примеры и задачи. Учебное пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. – 132 с. – ISBN 978-5-4312-0186-8.

10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 2-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с. – ISBN 978-5-8112-2966-6.

11. Прохоров, А. В., Ушаков, В. Г., Ушаков, Н. Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: Учебное пособие. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

12. Родина, Л. И. Основы теории вероятностей. Примеры и задачи : учеб. пособие / Л. И. Родина, Л. А. Буланкина, Ю. А. Кастэн ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 143 с. – ISBN 978-5-9984-1162-5.

13. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528 с., ил.

14. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 738 с., ил.

15. Ширяев, А. Н. Вероятность : учебное пособие для вузов по спец. «Математика», «Прикладная математика», «Физика» / А. Н. Ширяев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1989. – 640 с. – ISBN 5-02-013955-6.

Учебное электронное издание

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Задачник

Автор-составитель
РОДИНА Людмила Ивановна

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;
дисковод CD-ROM.

Тираж 9 экз.

Издательство Владимирского государственного университета имени Александра
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.