

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А. К. БЕРНЮКОВ

# ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Владимир 2009

УДК 621.372.542:004.934

ББК 32

Б51

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор  
зав. кафедрой теоретической физики

Владимирского государственного гуманитарного университета  
*В.Г. Рау*

Доктор технических наук профессор  
кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств  
Владимирского государственного университета  
*Е.Н. Талицкий*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Бернюков, А. К.**

Б51 Избранные главы дискретной математики : учеб. пособие /  
А. К. Бернюков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим.  
гос. ун-та, 2009. – 108 с. – ISBN 978-5-89368-977-8.

Рассматриваются вопросы дискретной математики, касающиеся теории сигналов, процедур их обработки, дискретной фильтрации, анализа и синтеза цифровых устройств.

Предназначено для слушателей магистратуры и студентов 3 – 4-го курсов специальностей 210301 – радиофизика и электроника, 210302 – радиотехника, 210405 – радиосвязь, радиовещание и телевидение очной формы обучения.

Табл. 33. Ил. 35. Библиогр.: 32 назв.

УДК 621.372.542:004.934

ББК 32

ISBN 978-5-89368-977-8

© Владимирский государственный  
университет, 2009

## Оглавление

Предисловие.....	6
<b>ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЦЕДУР.....</b>	<b>7</b>
1. ДИСКРЕТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.....	8
1.1. Описание дискретной последовательности в дискретном времени ...	8
1.2. Описание дискретной последовательности в комплексной плоскости $p$ $[\sigma, j\omega]$ .....	9
1.3. Частотный образ дискретной последовательности $x(n)$ – спектр $X(e^{j\omega})$ .....	10
1.4. Описание дискретной последовательности в Z-плоскости .....	11
1.5. Типовые задачи .....	11
1.6. Самоподготовка и самоконтроль.....	16
1.7. Контрольные вопросы .....	19
1.8. Ссылки на используемую литературу.....	19
2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ .....	20
2.1. Основные свойства дискретного преобразования Фурье .....	20
2.2. Быстрое преобразование Фурье.....	21
2.3. Типовые задачи .....	23
2.4. Самоподготовка и самоконтроль.....	26
2.5. Контрольные вопросы .....	27
2.6. Ссылки на используемую литературу.....	27
3. ПРОЦЕДУРЫ СВЁРТКИ И КОРРЕЛЯЦИИ .....	28
3.1. Дискретная свёртка .....	28
3.2. Процедуры корреляции и энергетические спектры .....	30
3.3. Типовые задачи .....	31
3.4. Самоподготовка и самоконтроль.....	35
3.5. Контрольные вопросы .....	36
3.6. Ссылки на используемую литературу.....	36

4. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ .....	37
4.1. Нерекурсивные фильтры .....	37
4.2. Рекурсивные фильтры .....	39
4.3. Основные методы реализации цифровых фильтров .....	40
4.4. Этапы проектирования цифровых (дискретных) фильтров .....	41
4.5. Основные погрешности цифровых фильтров .....	41
4.6. Критерии качества цифровых фильтров.....	42
4.7. Типовые задачи .....	43
4.8. Самоподготовка и самоконтроль.....	46
4.9. Контрольные вопросы .....	47
4.10. Ссылки на используемую литературу.....	47
5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ДПФ.....	48
5.1. Общие сведения.....	48
5.2. Самоподготовка и самоконтроль.....	51
5.3. Контрольные вопросы .....	51
5.4. Ссылки на используемую литературу.....	52
6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ.....	53
6.1. Общие сведения.....	53
6.2. Практические описания дискретных случайных процессов .....	54
6.3. Моделирование случайных процессов на ЭВМ.....	57
6.4. Самоподготовка и самоконтроль.....	59
6.5. Контрольные вопросы .....	60
6.6. Ссылки на используемую литературу.....	60
7. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. КЕПСТРЫ .....	61
7.1. Общие сведения.....	61
7.2. Мультипликативные гомоморфные системы.....	62
7.3. Гомоморфные системы относительно свертки .....	63
7.4. Реализация характеристической системы $D^*$ .....	64
7.5. Пример вычисления кепстра с отражением .....	66
7.6. Самоподготовка и самоконтроль.....	68
7.7. Контрольные вопросы .....	68
7.8. Ссылки на используемую литературу.....	68

## ТЕОРИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И АВТОМАТОВ .... 69

8. ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ .....	70
8.1. Логические переменные и переключательные функции .....	70
8.2. Основные свойства переключательных функций.....	72
8.3. Способы задания переключательных функций .....	73
8.4. Функционально полные наборы (базисы) переключательных функций.....	75
8.5. Минимизация переключательных функций.....	75
8.6. Минимизация систем переключательных функций .....	77
8.7. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки .....	77
8.8. Ссылки на используемую литературу.....	78
9. КОМБИНАЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА .....	79
9.1. Общие положения .....	79
9.2. Базовые интегральные схемы и их основные параметры .....	79
9.3. Типовые комбинационные устройства .....	82
9.4. Синтез комбинационных схем на мультиплексорах и дешифраторах .....	86
9.5. Быстродействие КЦУ и эффект состязаний в них (“гонки”).....	89
9.6. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки .....	89
9.7. Ссылки на используемую литературу.....	90
10. ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТЫ .....	91
10.1. Основные понятия абстрактной теории цифровых конечных автоматов.....	91
10.2. Формы задания абстрактных конечных автоматов .....	92
10.3. Абстрактный синтез конечных автоматов.....	95
10.4. Структурный синтез конечных автоматов .....	100
10.5. Контрольные вопросы.....	103
10.6. Ссылки на используемую литературу.....	103
Библиографический список .....	104

## Предисловие

Настоящее учебное пособие содержит базовый материал для цикла дисциплин, связанных с цифровой обработкой сигналов, приоритетной для современных систем связи.

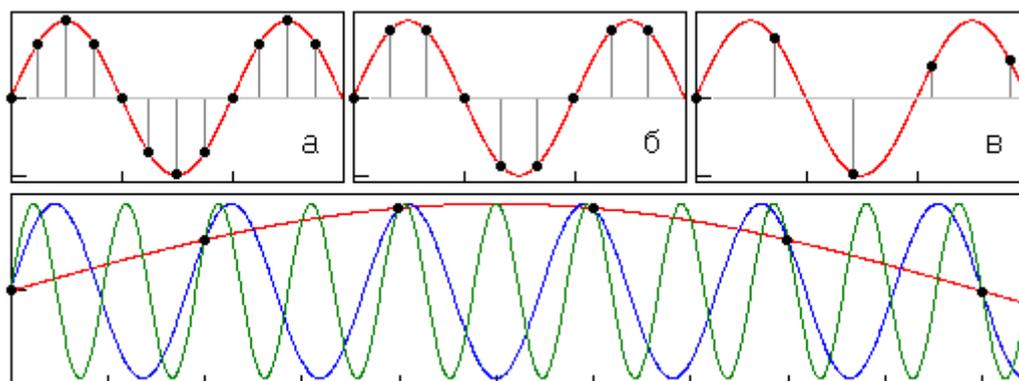
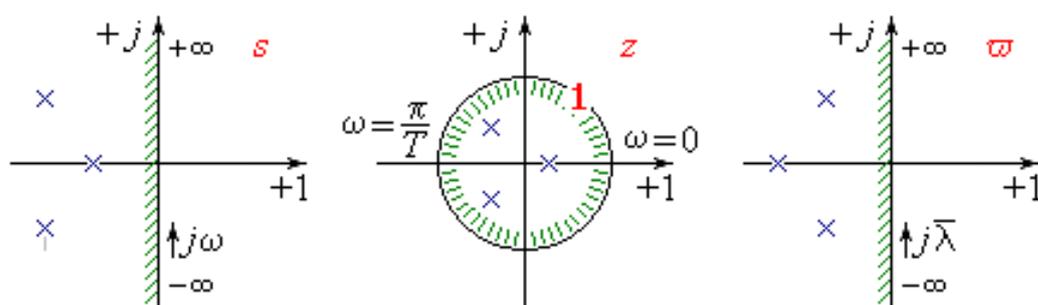
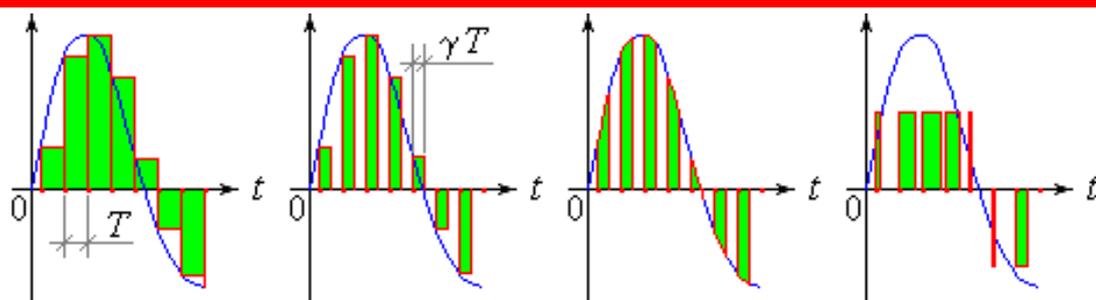
Издание имеет два раздела. Первый посвящен теории дискретных сигналов и процедур. В нем изложены основы дискретизации сигналов, их описания во временных и частотных областях, а также в плоскостях комплексных переменных  $p = \sigma + j\omega$  и  $z = e^{pT}$ . Представлена теория z-преобразования как основа анализа и синтеза цифровых устройств. Рассмотрены алгоритмы дискретного (а также быстрого) преобразования Фурье и спектральный анализ на их основе. Даны описания процедур дискретной свёртки и корреляции как предшествование к дискретной и цифровой фильтрации.

Второй раздел отражает фрагменты теории переключательных функций и цифровых автоматов без памяти (комбинационные схемы) и с памятью (последовательностные схемы).

Каждая схема теоретического курса сопровождается контрольными вопросами и заданиями, что позволяет повысить эффективность усвоения материала дисциплины студентами.

Учебное пособие издано по материалам лекций, прочитанных автором в течение ряда лет на факультете радиопизики, электроники и медицинской техники Владимирского государственного университета, а также в университетском колледже Фалун/Борланге в Швеции в 1994 г.

# ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЦЕДУР



## 1. ДИСКРЕТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

*Дискретные последовательности (ДП) – временные ряды* – отображают процессы, подлежащие цифровой обработке.

### 1.1. Описание дискретной последовательности в дискретном времени

$$x(t) \rightarrow x_T(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \rightarrow \{x(n)\}, \quad (1.1)$$

где  $x(n) = x(nT)$  – отсчет  $x(t)$  в точке  $t = nT$ ,  $n = -\infty, \dots, 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

$$\text{ДП типа } x(n) = \begin{cases} x(n), & n \in [0, N-1] \\ 0, & n \notin [0, N-1] \end{cases} \text{ – ДП конечной длины.} \quad (1.2)$$

ДП является  $N$ -периодической, если удовлетворяет соотношению

$$\tilde{x}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n + pN), \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

В общем случае ДП комплексная, т.е.

$$\dot{x}(n) = x_{\text{Re}}(n) + jx_{\text{Im}}(n) = |\dot{x}(n)| \exp[j \arg \dot{x}(n)], \quad (1.4)$$

$$|\dot{x}(n)| = \sqrt{x_{\text{Re}}^2(n) + x_{\text{Im}}^2(n)}, \quad \arg \dot{x}(n) = \arctg[x_{\text{Im}}(n)/x_{\text{Re}}(n)]. \quad (1.5)$$

Энергия и мощность ДП соответственно равны

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{x}(n)|^2, \quad P = E/N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{x}(n)|^2. \quad (1.6)$$

Две ДП ортогональны, если

$$E_{1,2} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = 0, \quad \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2. \quad (1.7)$$

Произвольная ДП вычисляется по правилу

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k), \quad (1.8)$$

где  $\delta(n - k) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$  – единичный импульс.

Как правило, ДП является результатом *дискретизации* (естественной или искусственной [7, 8, 10 – 13]) непрерывных процессов (сигналов) в радиосистемах. Так, в РЛС кругового обзора угловая информация вырабатывается с периодом сканирования пространства узким радиолучом, дальностная – с периодом излучения зондирующих импульсов. Процесс в пределах периода излучения зондирующих импульсов подвергается искусственной дискретизации с шагом, выбираемым по определенному критерию. Искусственной дискретизации подвергаются сигналы абонентов в системах связи с временным распределением каналов.

Корректное восстановление непрерывного сигнала  $x(t)$  по ДП  $x(n)$  возможно, если период дискретизации  $T < 1/2F_m$ , где  $F_m$  – максимальная частота в спектре  $x(t)$ . В этом случае отсутствует эффект наложения спектров в дискретизированном сигнале. Длительность дискретизирующего импульса (сигнала импульсной несущей)  $t_{ид} \ll 1/F_m$ , чтобы спектр его был равномерен в полосе частот  $x(t)$ .

Следует заметить, что квантованный по амплитуде и кодированный дискретный сигнал называется *цифровым*.

## 1.2. Описание дискретной последовательности в комплексной плоскости $p$ ( $\sigma, j\omega$ )

$$\text{Преобразование Лапласа ДП типа } x(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

имеет вид

$$L_{+1}\{x(nT)\} = X_T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT} = \sum X(p \pm jm\Omega), \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

где  $X(p) = \int_0^t x(t)\exp(-pt)dt$  – преобразование Лапласа непрерывного сигнала  $x(t)$ , из которого получена ДП;  $\Omega=2\pi/T$  – круговая частота дискретизации сигнала с периодом  $T$ .

нала  $x(t)$ , из которого получена ДП;  $\Omega=2\pi/T$  – круговая частота дискретизации сигнала с периодом  $T$ .

Обратное преобразование Лапласа дискретизированного сигнала вычисляется по соотношению

$$L_{-1}\{X(p)\} = x(nT) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p)e^{pnT} dp. \quad (1.11)$$

Поскольку непрерывный сигнал  $x(t)$  может быть представлен в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^q a_k e^{p_k t} \xrightarrow{L_{+1}} X(p) = \sum_{k=1}^q a_k / (p - p_k), \quad (1.12)$$

где  $p_k$  – полюсы в плоскости  $p$ ;  $a_k$  – константы, его дискретизированный аналог  $x^*(t) = T \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$  в плоскости  $p$  отображается в виде

$$L_{+1}\{x(nT)\} = \sum_{k=1}^q a_k / [1 - e^{(p_k - p)T}], p = p_k \pm jm\Omega, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

что представляет собой в плоскости  $p$  повторение вдоль оси  $j\omega$  с периодом  $\Omega = 2\pi/T$  конфигураций полюсов и нулей  $X(p)$ , отображающих непрерывный сигнал  $x(t)$ .

Таким образом, описание  $p_k = \sigma_k + j(\omega_k \pm m\Omega)$  (пусть  $\sigma_k = -2$ ,  $\omega_k = \pi/4T$ , рад/с,  $\Omega = 2\pi/T$ , рад/с) соответствует затухающему ( $\sigma_k < 0$ ) гармоническому ( $\omega_k = \pi/4T$ , рад/с) сигналу, дискретизированному с частотой  $\Omega = 2\pi/T$ , рад/с (число отсчетов за период  $N = (T_k/T) = (\Omega/\omega_k) = 8$ ).

### 1.3. Частотный образ дискретной последовательности $x(n)$ – спектр $X(e^{j\omega})$

*Спектр* дискретного сигнала (дискретной последовательности) вычисляется по правилу (1.10) при  $\sigma=0$ :

$$\dot{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{X}[j(\omega \pm m \cdot 2\pi/T)], m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

и представляет собой непрерывную функцию (спектр  $\dot{X}(j\omega)$  сигнала  $x(t)$ ), повторяющуюся по оси частот с периодом  $\Omega = 2\pi/T$ . В общем случае:

$$\dot{X}(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg \dot{X}(e^{j\omega})}, \quad (1.15)$$

$$|\dot{X}(e^{j\omega})| = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(e^{j\omega}) + X_{\text{Im}}^2(e^{j\omega})}, \quad (1.16)$$

$$\arg \dot{X}(e^{j\omega}) = \arctg[X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) / X_{\text{Re}}(e^{j\omega})], \quad (1.17)$$

$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cos(\omega n), \quad (1.18)$$

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = - \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \sin(\omega n). \quad (1.19)$$

Для исключения наложения периодических копий спектра  $X(j\omega)$  при дискретизации  $x(t)$  необходимо интервал дискретизации  $T$  выбрать по правилу  $T \leq 1/2F_m$ , где  $F_m$  – граничная частота в спектре сигнала  $x(t)$ .

## 1.4. Описание дискретной последовательности в Z-плоскости

Для дискретной последовательности  $x(n)$ ,  $n \geq 0$ , справедливы преобразования:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad z = e^{pT}, \quad p = \sigma + j\omega, \quad (1.20)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=1} X(z)z^{n-1} dz. \quad (1.21)$$

Расположение полюсов  $X(z)$  несет информацию о характере ДП:

$$Z_i = e^{p_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i T)}, \quad |Z_i| = \exp(\sigma_i T), \quad \arg Z_i = \varphi_i = \omega_i T + k \cdot 2\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Так, например, полюсы внутри круга единичного радиуса соответствуют затухающим сигналам ( $e^{\sigma_i T} < 1, \sigma_i < 0$ ). Полюс на положительной действительной оси ( $\arg z_i = 0$ ) – дискретизированной действительной экспоненте. Полюс на отрицательной действительной оси – дискретизированному гармоническому сигналу с двумя отсчетами за период ( $\omega_i T = \pi, \omega_i = \pi/T = \Omega/2$ ). Сигнал с четырьмя отсчетами за период соответствует полюсу на мнимой положительной оси ( $\omega_i T = \pi/2, \omega_i = \Omega/4$ ). По величине фазового угла  $\varphi_i = \omega_i T$  можно судить о числе отсчетов  $N$  за период  $T_i$  гармонического заполнения ДП:

$$N = 2\pi/\varphi_i = T_i/T. \quad (1.23)$$

Величина  $Z^{-1} = e^{-pT}$  определяет задержку ДП на величину  $T$ .

## 1.5. Типовые задачи

### Пример 1

Определите выражение для единичной "ступеньки" через последовательность единичных импульсов.

Согласно (1.8)  $1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(n-k)$ , так как  $x(k)=1$  при  $n \in [0, \infty]$ .

### Пример 2

Определите значения и постройте графики  $x_{\text{Re}}(n)$ ,  $x_{\text{Im}}(n)$ ,  $|x(n)|$ ,  $\arg \dot{x}(n)$  для дискретной последовательности  $x(n)=\exp(p_0n)$ , заданной на интервале  $[N_1, N_2]$  при  $p_0=\sigma_0+j\omega_0$ ,  $\sigma_0=0$ ,  $\omega_0=\pi/4$ ,  $N_1=-3$ ,  $N_2=2$ .

См. рис. 1.1 и табл. 1.1.

$$\dot{x}(n) = e^{p_0n} = e^{(\sigma_0+j\omega_0)n} = e^{\sigma_0n} e^{j\omega_0n} = e^{\sigma_0n} (\cos \omega_0n + j \sin \omega_0n), \quad \sigma_0=0, \quad \omega_0=\frac{\pi}{4},$$

$$x_{\text{Re}}(n) = e^{\sigma_0n} \cos \omega_0n = \cos \frac{\pi}{4}n, \quad x_{\text{Im}}(n) = e^{\sigma_0n} \sin \omega_0n = \sin \frac{\pi}{4}n,$$

$$|\dot{x}(n)| = \sqrt{x_{\text{Re}}^2(n) + x_{\text{Im}}^2(n)} = e^{\sigma_0n} = 1, \quad \arg \dot{x}(n) = \arctg \frac{x_{\text{Im}}(n)}{x_{\text{Re}}(n)} = \omega_0n = \frac{\pi}{4}n.$$

Таблица 1.1

Компоненты ДП	n					
	-3	-2	-1	0	1	2
$x_{\text{Im}}(n)$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
$x_{\text{Re}}(n)$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
$ \dot{x}(n) $	1	1	1	1	1	1
$\arg \dot{x}(n)$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$

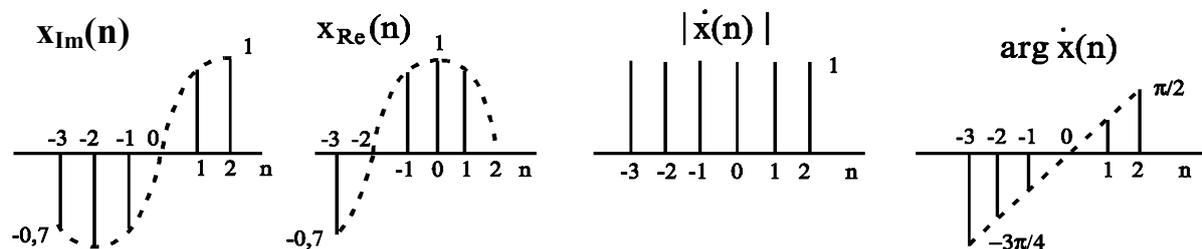


Рис. 1.1

### Пример 3

Определите характер и параметры сигнала с координатами полюсов в комплексной плоскости  $p_k[-1, j(4\pi \pm m\pi/2 \cdot 10^{-3})]$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$

Так как  $p_k = \sigma_k + j(\omega_k \pm m\Omega) = -1 + j(4\pi \pm m\pi / (2 \cdot 10^{-3}))$ ,

то  $\sigma_k = -1$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k = 4\pi$ , рад/с,  $\Omega = 2\pi/T = \pi / (2 \cdot 10^{-3})$ ,  $\Omega/\omega_k = T_k/T = \pi / (2 \cdot 10^{-3}) / 4\pi = 125$ .  
 $x(nT) = e^{\sigma_k t} \sin \omega_k t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = e^{-lnT} \sin \frac{2\pi}{T_k} nT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ,  $x(n) = e^{-n} \sin(2\pi n / 125)$ .

#### Пример 4

Определите предельное число каналов линии телефонной связи с временным разделением каналов и кодоимпульсной модуляцией при допустимой длительности тактового импульса  $t_0 = 1$  мкс и погрешности квантования по уровню не хуже  $\gamma_{кв} = 7$  %.

Так как полоса канала телефонной связи  $\Delta F = 4$  кГц, допустимый период дискретизации  $T < 1/2F_m = 1/2\Delta F_k = 125$  мкс. Погрешность  $\gamma_{кв} = 0,0625$  реализуется системой КИМ с числом разрядов  $n = 4$ , тогда предельное число каналов  $N < \lceil T/nt_0 \rceil = \lceil 125/4 \rceil = 31$ .

#### Пример 5

Определите допустимую (для корректного восстановления непрерывного сигнала по ДП) частоту дискретизации  $F$  прямоугольного импульса длительностью  $t_{и} = 10$  мс, если энергия его оценивается главным лепестком спектра и одним боковым. Определите допустимую длительность дискретизирующего импульса  $t_{ид}$  и число отсчетов  $N$ .

В спектре прямоугольного импульса нули энергии приходятся на частоты  $mf_0 = m/t_{и}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда граничная частота спектра, соответствующая величине  $F_m = 2f_0 = 2/10^{-2} = 2 \cdot 10^2$  Гц, определяет период дискретизации  $T < 1/2F_m = 1/2 \cdot 2 \cdot 10^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  с. Допустимая длительность дискретизирующего импульса  $t_{ид} < 0,1/F_m = 0,1/2 \cdot 10^2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  с.  $N = t_{и}/T = 10 \cdot 10^{-3} / 2,5 \cdot 10^{-3} = 4$ .

#### Пример 6

Вычислите спектр прямоугольного импульса с амплитудой  $A = 1$ , длительностью  $t_{и} = 500$  мкс, дискретизированный с частотой  $F = 10$  кГц. Как изменится спектр, если изменить частоту дискретизации (длительность импульса) в два раза?

Заданный сигнал является ДП конечной длины:

$$x(n) = \begin{cases} A = 1, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & n < 0, n > N - 1, \end{cases}$$

причем  $N = t_{и}F = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 5$ ,  $T < 1/F = 1/10^4 = 10^{-4}$  с.

### Комплексный спектр дискретного прямоугольного импульса

$$\begin{aligned} \dot{X}(e^{j\omega}) &= X(p)|_{\sigma=j\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-pn}|_{p=j\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{-pn}|_{p=j\omega} = A(1-e^{pN})/(1-e^{-p})|_{p=j\omega} = \\ &= A(1-e^{-j\omega N})/(1-e^{-j\omega}) = Ae = \frac{e^{-j\frac{1}{2}\omega N} (e^{j\frac{1}{2}\omega N} - e^{-j\frac{1}{2}\omega N})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} = Ae^{-j(\frac{\omega N}{2} - \frac{\omega}{2})} \frac{2j \sin \frac{\omega N}{2}}{2j \sin \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}, \end{aligned}$$

$$|\dot{X}(e^{j\omega})| = A \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|,$$

$$\text{так как } |e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}| = 1, \arg \dot{X}(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2}(N-1).$$

Анализ  $|\dot{X}(e^{j\omega})|$  и  $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$  и пример расчета при  $N=5$  показывают, что спектр дискретизированного прямоугольного импульса является непрерывной функцией частоты  $\omega$  с периодичностью  $\Omega=2\pi/T$  ( $F=1/T$ ), причем в точках  $\omega_i=0, 2\pi, 4\pi, \dots$  модуль спектра  $|\dot{X}(e^{j\omega})| = \lim A(\sin \omega N/2)/(\sin \omega/2) = AN = N$  в данной задаче, а в точках  $\omega_i=i2\pi, i=1, 2, 3, \dots$   $|X(e^{j\omega})|=0$ . Аргумент  $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$  – периодическая дискретно-линейная функция частоты, которая претерпевает скачки на величину  $\pi$  на частотах  $\omega_i=i2\pi/N, i=1, 2, 3, \dots$  и изменяется в пределах  $\pm\pi(1-1/N)$  (см. рис. 1 из [5]).

При увеличении частоты дискретизации в два раза объем выборки увеличится до  $2N$ , нули спектра будут соответствовать частотам  $\omega_i=i\pi/N$ , т. е. лепестки спектра сузятся в два раза, а амплитуда и число их в два раза возрастут. Аналогично изменится спектр при увеличении  $t_n$  в два раза. ▶

### Пример 7

Вычислите Z-преобразование ДП вида  $x(n)=e^{p_k n}, p_k=-1+j\pi, n \geq 0$ . Определите координаты полюсов и нулей и период дискретизации сигнала. Запишите аналитически компоненты ДП и нарисуйте графики. ◀

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{p_k n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k} z^{-1})^n = \frac{1 - \left[ (e^{p_k} z^{-1})^n - 1 \right]}{e^{p_k} z^{-1} - 1} \approx \frac{1}{1 - e^{p_k} z^{-1}} = \\ &= z / (z - e^{p_k}) = z / (z - e^{-1+j\pi}) = z / (z - e^{-1} e^{j\pi}). \end{aligned}$$

Координата нуля –  $z_{01}=0$ , координата полюса –  $z_1=e^{-1} e^{j\pi}=0,368e^{j\pi}$ .

Поскольку  $|z_1|=0,368<1$  и  $\arg z_1=\varphi_1=\omega_1 T=\pi$ , т.е.  $\omega_1=\pi/T$ , заданный сигнал содержит две квадратурные гармонические составляющие

$$x_{\text{Re}}(n)=0,368^n \cos(n\pi), \quad x_{\text{Im}}(n)=0,368^n \sin(n\pi),$$

дискретизированные двумя отсчетами за период  $T_1=2\pi/\omega_1=2\pi/(\pi/T)=2T$  (рис. 1.2).

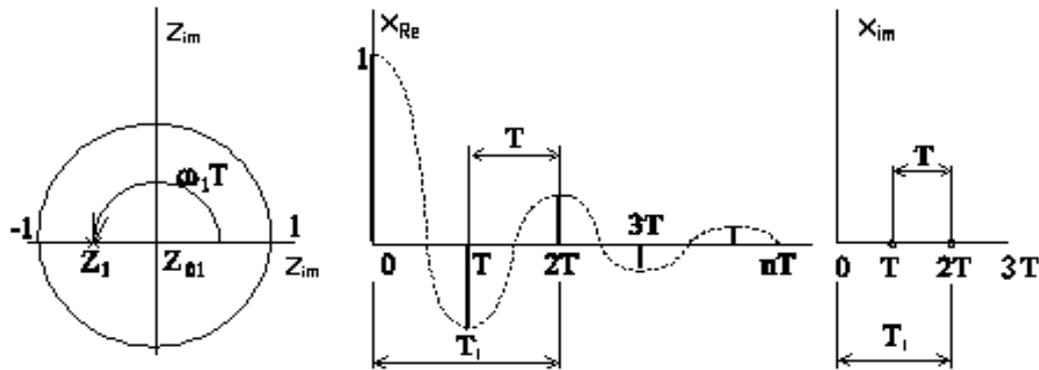


Рис. 1.2

### Пример 8

Найдите  $Z$ -преобразование функции  $x(t)=\cos(\omega_i t)+\sin(\omega_i t)$ , дискретизированной четырьмя отсчетами за период  $T_i=2\pi/\omega_i$ .

После дискретизации заданный сигнал имеет вид

$x(nT)=\cos(\omega_i nT)+\sin(\omega_i nT)$ ,  $\omega_i=2\pi/T_i=2\pi/NT$ , где  $N$  – число отсчетов за период.

При  $N=4$   $\omega_i=2\pi/NT=\pi/2T$ . Тогда

$$\begin{aligned} x(nT) &= \cos \omega_i nT + \sin \omega_i nT = \cos \frac{\pi}{2T} nT + \sin \frac{\pi}{2T} nT = \cos \frac{\pi}{2} n + \sin \frac{\pi}{2} n = \\ &= (e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}})/2 + (e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}})/2j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{z}{z - e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{z}{z - e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right] + \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{j\frac{\pi}{2}}} - \frac{z}{z - e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 + jz + z^2 - jz}{(z-j)(z+j)} + \frac{1}{2j} \frac{z^2 + jz - z^2 + jz}{(z-j)(z+j)} = \frac{z^2}{(z-j)(z+j)} + \frac{z}{(z-j)(z+j)} = \\ &= z(z+1)/(z-j)(z+j). \end{aligned}$$

Координаты нулей –  $z_{01}=0$ ;  $z_{02}=-1$ , координаты полюсов –  $z_{i1}=j$ ,  $z_{i2}=-j$ .

### Пример 9

Определите функцию ДП  $x(n)$ , если  $X(z)=z/(z-a)$ ,  $a=2$ .

Отображению  $X(z)=z/(z-a)$  соответствует

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

В заданном примере  $x(n)=2^n=(e^{\ln 2})^n \approx e^{0,7n}$ .

### Пример 10

Найдите обратное Z-преобразование и определите вид ДП, если  $X(z)=0,25z/(z-1)(z-0,5)$ .

Преобразуем  $\frac{1}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-0,5}$ .

Домножив обе части на  $(z-1)$  и приняв  $z=1$ , получим  $a_1=2$ .

Аналогично, домножив обе части на  $(z-0,5)$  при  $z=0,5$ , получим  $a_2=-2$ .

Тогда  $X(z) = \frac{0,25z \cdot 2}{z-1} + \frac{0,25z \cdot (-2)}{z-0,5} = \frac{0,5z}{z-1} - \frac{0,5z}{z-0,5}$ ,

чему соответствует  $x(n)=0,5 - 0,5(0,5)^n = 0,5(1-e^{-0,69n})$ .

## 1.6. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 1.

### Задание 2

Определите значения и постройте графики  $x_{\text{Re}}(n)$ ,  $x_{\text{Im}}(n)$ ,  $|x(n)|$ ,  $\arg \dot{x}(n)$  для дискретной последовательности  $x(n)$ , заданной на интервале  $[N_1, N_2]$ , по данным табл. 1.2.

Таблица 1.2

ДП	$x_i(n)$ , $n \in [N_1, N_2]$	Номер варианта											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$e^{p_0 n}$	-3,2	-5,4	0,4	0,6	-5,0	-3,3	0,5	-1,4	0,4	-4,0	-2,2	-3,1
2	$a \cdot n$	0,5	-5,0	-3,3	-6,2	2,8	-2,6	-10,-5	0,7	-1,3	3,0	0,5	-5,-1
3	$a^n$	0,5	-2,4	0,4	4,8	3,7	-5,0	-3,5	2,6	2,6	-5,1	3,7	-2,4
	$a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
	$p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$	-1+ +jπ	-0,5+ +jπ/4	2+ +jπ/2	-2- -jπ/2	-1+ +jπ/4	-1- -jπ/4	-0,5+ +jπ/8	-1- -jπ	-2+ +jπ/4	0,5+ +jπ/2	-1+ +jπ/4	1+ +jπ/8

### Задание 3

Определите вид и параметры сигнала с координатами полюсов из табл. 1.3. Постройте графики, отображающие сигнал  $x_k(n)$  и  $X_k(p)$ .

Таблица 1.3

Номер варианта	1	2	3	
$p_k$	$0, j(\pi \pm m\pi/10^{-1})$	$1, j(2\pi \pm m\pi/10^{-2})$	$-1, j(\pi/2 \pm m\pi/10^{-4})$	
4	5	6	7	
$0, j(2\pi \pm m\pi/10^{-3})$	$-1, j(\pi/4 \pm m\pi/2 \cdot 10^{-1})$	$-4, j(\pi \pm m\pi/10^{-2})$	$-2, j(\pi \pm m\pi/4 \cdot 10^{-3})$	
8	9	10	11	12
$-3, j(\pi/2 \pm m\pi/2 \cdot 10^{-5})$	$0,5, j(\pi/8 \pm m\pi/10^{-4})$	$-1, jm\pi/2 \cdot 10^{-3}$	$-1, j(\pi/2 \pm m2\pi)$	$1, j(\pi/4 \pm m4\pi)$

### Задание 4

Определите предельное число каналов линии телефонной связи с временным разделением каналов, если допустимая длительность тактового импульса  $t_{N_{\text{вар}}} = 0,05_1; 0,1_2; 0,2_3; 0,5_4; 1_5; 2_6; 5_7; 10_8; 20_9; 30_{10}; 40_{11}; 50_{12}$  мкс, погрешность квантования по уровню (%) не превышает  $\gamma_{N_{\text{вар}}} = 4_1; 2_2; 1_3; 0,5_4; 1_5; 2_{6-12}$ . (Индекс – номер варианта).

### Задание 5

Определите допустимую (для корректного восстановления из ДП непрерывного сигнала) частоту дискретизации  $F$  прямоугольного импульса длительностью  $t_{\text{и}}$ , если энергия его оценивается главным лепестком спектра и  $K$  боковыми (табл. 1.4). Определите допустимую длительность импульса дискретизации и число отсчетов  $N$ .

Таблица 1.4

Номер варианта	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
$t_{\text{и}}, \text{мс}$	0,1	10	100	1000	0,1	10	100	1000
$K$	0	1	2	3	3	2	1	0

### Задание 6

Определите в общем виде и вычислите по данным табл. 1.5 спектр прямоугольного импульса с амплитудой  $A$ , длительностью  $t_{\text{и}}$ , дискретизированного с частотой  $F$ . Покажите, как изменится спектр при измене-

нии частоты дискретизации и длительности импульса. Постройте графики  $|\dot{X}(e^{j\omega})|$ ,  $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$ .

Таблица 1.5

Номер варианта	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
A, B	1	2	3	4	4	3	2	1
$t_{ин}$ , мс	1	1	0,5	1	2	3	2	3
$F$ , кГц	10	5	10	3	5	5	2	2

### Задание 7

Вычислите  $Z$ -преобразование и отобразите в  $Z$ -плоскости и в явном виде следующие ДП:  $x_1(n)=\exp(p_k n)$ ,  $x_2(n)=a^n$ ,  $x_3(n)=\cos(\omega n)$ ,  $x_4(n)=\sin(\omega n)$ . Значения параметров  $p_k=\sigma_k+j\omega_k$ ,  $a$ ,  $\omega$  возьмите из табл. 1.6.

Таблица 1.6

ДП	$x_i(n)$	Номер варианта							
		1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
1	$\exp(p_k n)$ , $p_k=$	$-0,5+j\pi/4$	$-1+j\pi/2$	$j\pi/4$	$-0,5+j\pi/2$	$-1+j\pi/4$	$0,5+3j\pi/2$	$1+j2\pi$	$-1+j\pi$
2	$a^n$ , $a=$	$-0,25$	$-0,5$	$-1$	$0$	$1$	$0,25$	$0,9$	$0,75$
3	$\cos(\omega n)$ , $\omega=$	$\pi/16$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi$	$\pi/32$	$\pi/16$	$\pi/4$
4	$\sin(\omega n)$ , $\omega=$	$\pi/16$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi$	$\pi/32$	$\pi/4$	$\pi/8$

### Задание 8

Найдите  $Z$ -преобразование гармонических дискретизированных функций  $x_1(nT)=\sin(\omega_i nT)$ ,  $x_2(nT)=\cos(\omega_i nT)$ , если число отсчетов за период равно  $N$  (табл. 1.7). Нарисуйте графики  $x_{1,2}(nT)$  и  $X_{1,2}(z)$ .

Таблица 1.7

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N$	2	4	8	16	32	64	64	32	16	8	4	2
$x(nT)$	$\sin(\omega_i nT)$						$\cos(\omega_i nT)$					

### Задание 9

Определите функцию дискретной последовательности по виду  $Z$ -преобразования и построьте графики  $x(nT)$  и  $X(z)$  (табл. 1.8).

Таблица 1.8

$X(z)$	Номер варианта							
	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
$z/(z-a)$ , $a=$	$0,5$	$0,7$	$1$	$1,5$	$-1$	$-2$	$-4$	$-8$
$z/(z-e^{-j\omega_k})$ , $\omega_k=$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$	$5\pi/2$	$\pi/8$	$\pi/16$
$z/(z-e^{p_k})$ , $p_k=$	$0,5$	$1$	$-0,5$	$-1+j\pi$	$1+j\pi/2$	$-1-j\pi/2$	$0,5+j\pi$	$0,5-j2\pi$

### Задание 10

Найдите обратное  $Z$ -преобразование, если  $X_{N\text{вар}}(z)$  соответствует выражению в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Номер варианта	1, 11	2, 12	3, 13	4, 14	
$X(z)$	$0,5z/(z-2)$	$0,5z/(z^2-14z+0,49)$	$z/(z-0,5)^2$	$1/(1-z^{-1})$	
5, 15	6, 16	7, 17	8, 18	9, 19	10, 20
$(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$	$1/(1-0,3z^{-1})$	$1+z^{-1}$	$(1+z^{-1})^{-1}$	$z^2/(z-j)(z+j)$	$z/(z-j)(z+j)$

Нарисуйте графики ДП  $x_{N\text{вар}}(n)$  и ее  $Z$ -образа  $X_{N\text{вар}}(z)$ .

## 1.7. Контрольные вопросы

1. Как преобразовать совокупность случайных чисел  $\{x(k)\}$  во временной ряд (дискретную последовательность)? Постройте блок-схему алгоритма вычислений по выражению (1.8).

2. Дайте на конкретном примере (по данным задания 2) определение комплексной ДП и ее квадратурных компонентов.

3. Что такое модуль и аргумент ДП?

4. Что такое энергия и мощность ДП?

5. Приведите примеры (проиллюстрируйте рисунками) искусственной и естественной дискретизации непрерывных процессов.

6. Каким образом отображаются сигналы в плоскости переменной  $p=\sigma+j\omega$ ? Какую информацию о сигнале несет величина  $p_i[\sigma_i, j(\omega_i \pm m\Omega)]$ ? Объясните на примере конкретной ДП. Решите задачу из задания 3.

7. Что такое частотный образ дискретизированного сигнала? Какие компоненты содержит комплексный спектр? Решите задачу из задания 6.

8. Как отображаются дискретные сигналы в плоскости переменной  $Z=e^{pT}$ ? Как связаны параметры полюса  $z_i=e^{(\sigma_i+j\omega_i)T}$  с характером ДП? Решите задачи из заданий 7 – 10.

9. На примере типовой ДП покажите связь ее временного, частотного,  $p$ - и  $z$ -образов.

## 1.8. Ссылки на используемую литературу

[1, с. 18 – 22, 36 – 44; 2, с. 15 – 19, 25 – 28, 32 – 35, 39 – 50; 3, с. 4–11; 4, с. 7–10; 5, с. 4 – 14; 8, с. 11 – 18].

## 2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### 2.1. Основные свойства дискретного преобразования Фурье

При обработке информации на ЭВМ дискретизация процессов  $x(t) \rightarrow x(n)$  проводится как по времени ( $n=t/T=0, 1, 2, \dots, N-1$ ; где  $N$  – число отсчетов сигнала с периодом  $T$ ), так и по частоте ( $K=\omega/\Omega_1=0, 1, 2, \dots, K-1$ ; где  $K$  – число отсчетов по частоте с периодом  $\Omega_1$ ). Обычно  $K=N$ . В этом случае дискретный сигнал  $x(n)$  и его спектр  $X(k)$  описываются парой дискретных преобразований Фурье – прямого (ДПФ) и обратного (ОДПФ).

$$\text{ДПФ:} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1; \quad (2.1)$$

$$\text{ОДПФ:} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.2)$$

где  $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ . Величина  $N$  выбирается из условия  $N=1/TF_1$ , где  $F_1=\Omega_1/2\pi$  – дискретность спектра по частоте.

Вследствие периодичности оператора  $W_N^m$  (период  $N$ ,  $W_N^{m+pN} = W_N^m$ ,  $p = 0, \pm 1, +2, \dots$ ) коэффициенты ДПФ и ОДПФ также периодичны.

Алгоритмы ДПФ и ОДПФ могут быть записаны в аналитической (2.1), (2.2), матричной (2.3), (2.4) и векторной (2.5) формах:

$$\text{ДПФ:} \quad \begin{vmatrix} W_N^{00} & W_N^{10} & \dots & W_N^{(N-1)0} \\ W_N^{01} & W_N^{11} & \dots & W_N^{(N-1)1} \\ W_N^{02} & W_N^{12} & \dots & W_N^{(N-1)2} \\ \dots & W_N^{nk} & \dots & \dots \\ W_N^{0(N-2)} & W_N^{1(N-2)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)} \\ W_N^{0(N-1)} & W_N^{1(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\text{ОДПФ:} \quad \frac{1}{N} \begin{vmatrix} W_N^{-00} & W_N^{-01} & \dots & W_N^{-0(N-1)} \\ W_N^{-10} & W_N^{-11} & \dots & W_N^{-1(N-1)} \\ W_N^{-20} & W_N^{-21} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \dots & W_N^{-nk} & \dots & \dots \\ W_N^{-(N-2)0} & W_N^{-(N-2)1} & \dots & W_N^{-(N-2)(N-1)} \\ W_N^{-(N-1)0} & W_N^{-(N-1)1} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{x}_n \mathbf{W}_{NN}^{nk}, \quad \mathbf{x}_n = \frac{1}{N} \mathbf{X}_k \mathbf{W}_{NN}^{-nk}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{X}_k = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T, \quad \mathbf{x}(n) = [x(0), x(1), \dots, x(n-1)]^T,$$

а также отсчетами  $X(z_k)$ ,  $z_k = \exp(j2\pi/N)$ , на единичной окружности  $Z$ -плоскости, равномерно расположенными с интервалом  $\Omega_1 = 2\pi/N$ :

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(k). \quad (2.6)$$

Разновидности спектров ДПФ :

– *амплитудный спектр*  $x(n)$ :

$$S_x(k) = |\dot{X}(k)| = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(k) + X_{\text{Im}}^2(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$X_{\text{Re}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N}nk, \quad X_{\text{Im}}(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N}nk;$$

– *фазовый спектр*  $x(n)$ :  $\psi_x(k) = \arctg[X_{\text{Im}}(k)/X_{\text{Re}}(k)]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ;

– *спектр мощности*  $x(n)$ :  $P_x(k) = |X(k)|^2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Амплитудный спектр и спектр мощности инвариантны к сдвигу, а фазовый – к умножению на константу. В спектрах  $S_x(k)$ ,  $P_x(k)$  (четные функции) и  $\psi_x(k)$  (нечетные функции) вычисляется  $N/2$  независимых отсчетов для  $k = 0, 1, \dots, N/2$ .

Процедура прямого ДПФ требует  $N^2$  комплексных умножений и  $N(N-1)$  комплексных сложений на всем  $k = [0, N-1]$  множестве частот, поэтому для реализации ДПФ на ЭВМ необходимы значительные вычислительные затраты, прогрессивно возрастающие с ростом  $N$ .

## 2.2. Быстрое преобразование Фурье

Практическое использование ДПФ стало возможным после разработки алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), являющихся эффективным способом вычисления ДПФ. Суть БПФ заключается в многократном разбиении исходной ДП  $x(n)$  на четные и нечетные отсчеты и последовательном вычислении локальных БПФ (БПФ с прореживанием по времени – БПФВ) или четных и нечетных отсчетов спектра  $X(k)$  (БПФ с прореживанием по частоте – БПФЧ).

Алгоритм БПФВ описан в [5]. С процедурой БПФЧ можно ознакомиться по [1 – 4] или конспекту лекций. Следует учесть, что для достижения естественного порядка  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , БПФВ требует перестановки входных данных  $x(n)$  по закону двоичной инверсии номеров отсчетов  $n$  (например при  $N=8$  место входного отсчета  $x(3)$  занимает  $x(6)$ , так как  $3=011$ ,

6=110). Базовая операция БПФВ – двухточечное ДПФ "бабочка" – имеет вид, показанный на рис. 2.1, и составляет основу первой степени БПФВ.

Процедура БПФЧ сохраняет естественный порядок входных данных  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , при нумерации выходных отсчетов  $X(k)$  по закону двоичной инверсии (например при  $N=8$  место  $X(1)$  занимает  $X(4)$ , так как  $1=001$ ,  $4=100$ ). Базовая операция БПФЧ – двухточечное ДПФ – основа последней степени БПФЧ (рис. 2.2).

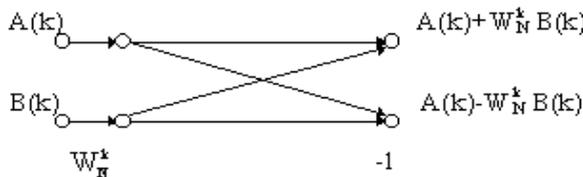


Рис. 2.1

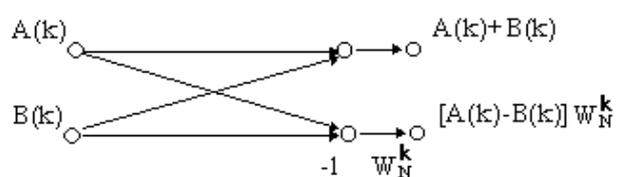


Рис. 2.2

На рис. 2.3 и 2.4 представлены графы БПФВ и БПФЧ для  $N=8$ .

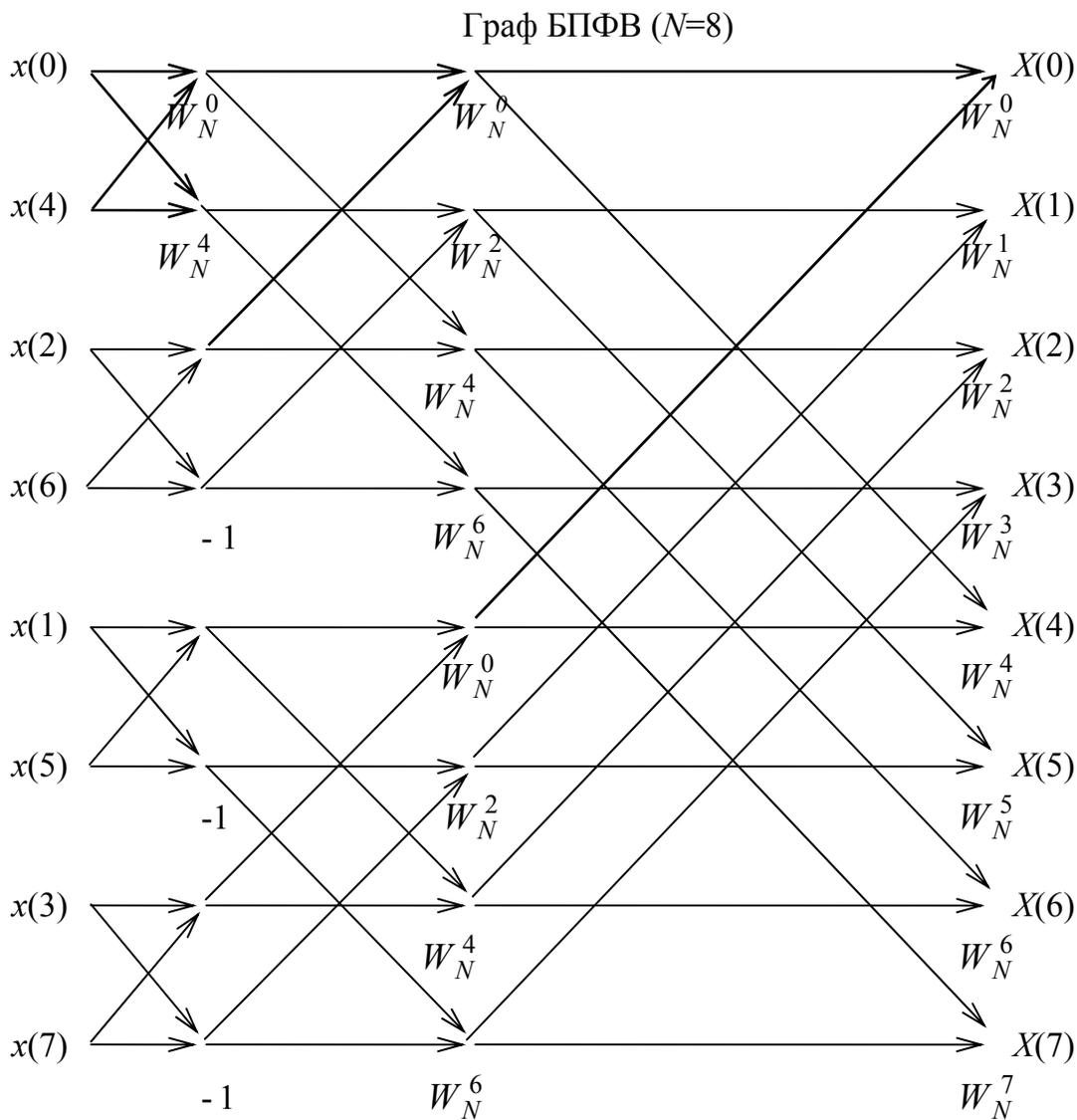
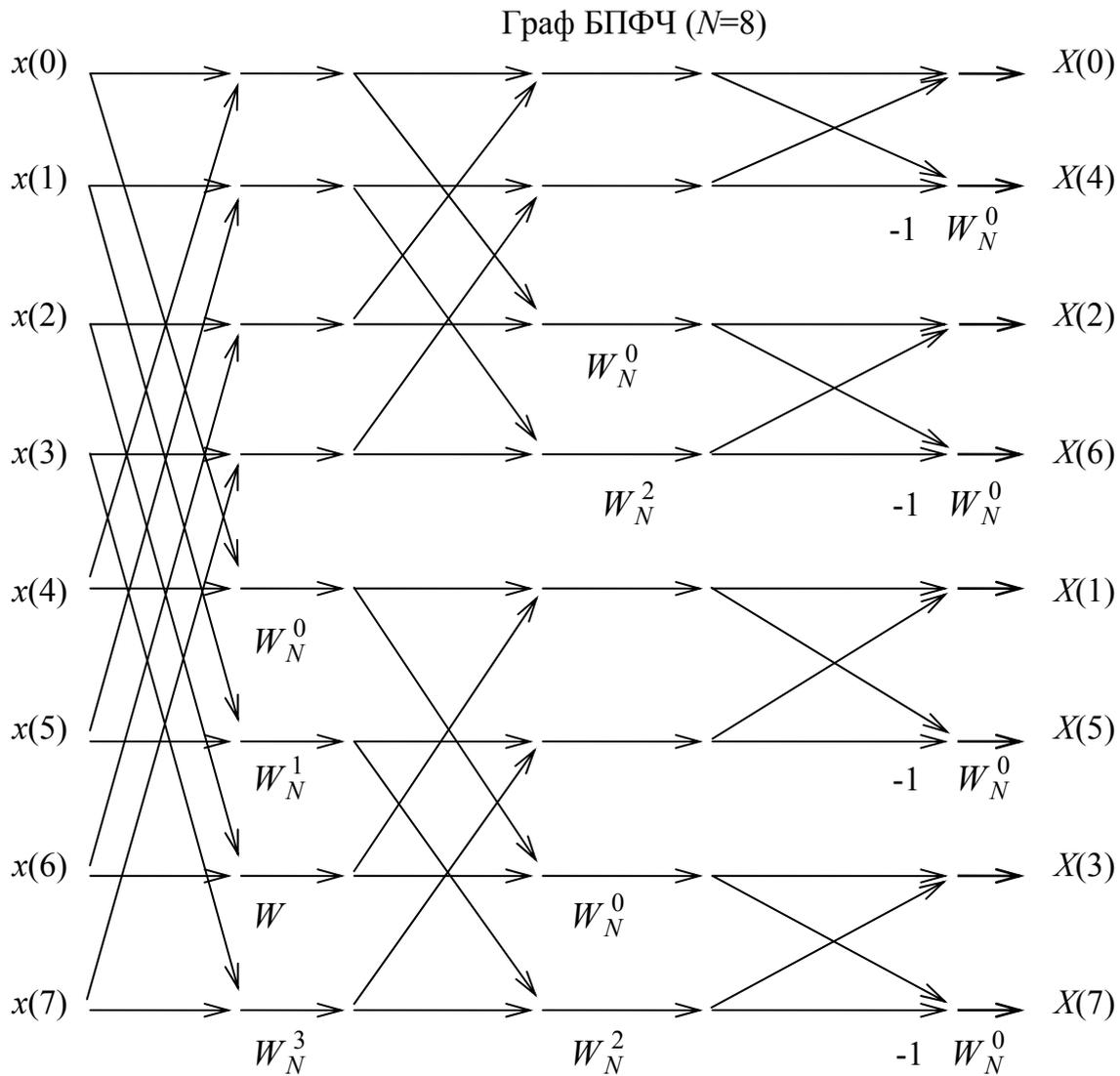


Рис. 2.3

Алгоритм БПФ выполняется за  $\log_2 N$  этапов, на каждом из которых требуется  $N/2$  базовых операций. В итоге на выполнение БПФ требуется  $(N/2)\log_2 N$  комплексных умножений (более трудоемких, чем комплексные сложения, и определяющих длительность БПФ в целом), что обуславливает выигрыш БПФ по сравнению с ДПФ в  $\gamma = N^2 / ((N/2)\log_2 N) = 2N / \log_2 N$  раз.

Прикладные программы спектральных расчетов на ЭВМ строятся на базе алгоритмов БПФ.



### 2.3. Типовые задачи

#### Пример 1

Докажите, что ОДПФ можно вычислить с помощью ДПФ.



Для произвольного  $k$  с учетом  $W_N^{Nk} = 1$  ДПФ имеет вид

$$\begin{aligned}
X(k) &= x(0)W_N^{0k} + x(1)W_N^{1k} + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-2)W_N^{(N-2)k} + x(N-1)W_N^{(N-1)k} = \\
&= x(N-1)W_N^{Nk}W_N^{-k} + x(N-2)W_N^{Nk}W_N^{-2k} + \dots + x(1)W_N^{1k}W_N^{-Nk} + x(0)W_N^{0k} = \\
&= x(0)W_N^{0k} + x(N-1)W_N^{-1k} + x(N-2)W_N^{-2k} + \dots + x(1)W_N^{-(N-1)k}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что для вычисления ОДПФ с помощью оператора ДПФ  $A(k) = A(k) + a(n)W_N^{nk}$  необходимо входные данные  $a(n)=X(k)$  переставить местами:  $X(1)$  с  $X(N-1)$ ,  $X(2)$  с  $X(N-2)$  и т.д., т. е.  $a(n)=X(N-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , и полученные результаты разделить на  $N$ , так как оператор ДПФ вычисляет  $A(k)=Nx(n)$ . При вычислении ДПФ  $a(n)=x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $A(k)=X(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

### Пример 2

Запишите алгоритм ДПФ для ДП  $x(n)$ ,  $n[0, N-1]$ ,  $N=4N_{\text{вар}}$ , в аналитической, матричной и Z-формах.

1. Для  $N_{\text{вар}}=12$  примем  $N=48$ .

$$X(k) = \sum_{n=0}^{47} x(n)W_{48}^{nk}, \quad k = [0, 47], \quad W_{48} = \exp(-j2\pi/48).$$

$$2. \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(47) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(47) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cccc} W_{48}^{00} & W_{48}^{10} & \dots & W_{48}^{460} W_{48}^{470} \\ W_{48}^{01} & W_{48}^{11} & \dots & W_{48}^{461} W_{48}^{471} \\ W_{48}^{02} & W_{48}^{12} & \dots & W_{48}^{462} W_{48}^{472} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{48}^{047} & W_{48}^{147} & \dots & W_{48}^{4647} W_{48}^{4747} \end{array} \right| \end{array}$$

или  $X_k = x_n W_{48}^{nk}$ ,  $n \in [0, 47]$ ,  $k = [0, 47]$ ,  $N = 48$ .

$$3. X(z_k) = \sum_{n=0}^{48-1} x(n)z^{-n} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{48}k}\right) = \sum_{n=0}^{47} x(n)e^{-j\frac{\pi}{24}nk} = X(k).$$

### Пример 3

Найдите спектр  $X(k)$  последовательности  $x(n)$  в виде четырех единичных отсчетов. Вычислите ОДПФ.

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 4,$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 0,$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 0,$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 0,$$

$$x(0) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)e^{j\frac{2\pi}{4}0k} = \frac{1}{4}[X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = 1,$$

$$x(1) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)e^{j\frac{2\pi}{4}1k} = \frac{1}{4}[X(0) + jX(1) - X(2) - jX(3)] = 1,$$

$$x(2) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)e^{j\frac{2\pi}{4}2k} = \frac{1}{4}[X(0) - X(1) + X(2) - X(3)] = 1,$$

$$x(3) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)e^{j\frac{2\pi}{4}3k} = \frac{1}{4}[X(0) - jX(1) - X(2) + jX(3)] = 1.$$

#### Пример 4

Определите амплитудный и фазовый спектры последовательности  $x(n) = 1, 1, 1, 1$ .

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 4, S_x(0) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(0) + X_{\text{Im}}^2(0)} = 4, \psi_x(0) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(0)}{X_{\text{Re}}(0)} = 0;$$

$$X(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 0, S_x(1) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(1) + X_{\text{Im}}^2(1)} = 0, \psi_x(1) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(1)}{X_{\text{Re}}(1)} = ?;$$

$$X(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 0, S_x(2) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(2) + X_{\text{Im}}^2(2)} = 0, \psi_x(2) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(2)}{X_{\text{Re}}(2)} = ?;$$

$$X(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 0, S_x(3) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(3) + X_{\text{Im}}^2(3)} = 0, \psi_x(3) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(3)}{X_{\text{Re}}(3)} = ?.$$

Отсчеты  $\psi_x(k)$ ,  $k=1, 2, 3$ , не определены в силу неопределенности  $\arctg(0/0)$ .

### Пример 5

Постройте графы БПФВ и БПФЧ для  $N=8$ .



Консультация по составлению графов БПФ представлена в [1, 2, 4, 7].



### Пример 6

Определите длительность вычислений ДПФ и БПФ при  $N=2^{N_{\text{вар}}}$ ,  $N_{\text{вар}}=3$ , если процессор ЭВМ выполняет операции комплексного умножения за  $\Delta_{\text{умн}}=10$  мс, комплексного сложения за  $\Delta_{\text{сл}}=10$  мкс. Определите выигрыш от использования БПФ.



Для  $N_{\text{вар}}=3$  имеем  $N=8$ . Длительность ДПФ и БПФ определяется наиболее длительной операцией умножения, поэтому

$$T_{\text{ДПФ}} = N^2 \Delta_{\text{умн}} = 640 \text{ мс}, T_{\text{БПФ}} = \frac{N}{2} \log_2 N \cdot \Delta_{\text{умн}} = 120 \text{ мс}, \gamma = \frac{T_{\text{ДПФ}}}{T_{\text{БПФ}}} = 5,3.$$



## 2.4. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 2. Постройте блок-схему дуального алгоритма ДПФ – ОДПФ для  $N=4N_{\text{вар}}$ . Опишите организацию входных и выходных данных.

### Задание 2

Запишите алгоритм ДПФ в аналитической, матричной и Z-формах для последовательности  $x(n)$ ,  $n \in [0, N-1]$ ,  $N=4N_{\text{вар}}$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта).

### Задание 3

Найдите в форме ДПФ спектр последовательности единичных импульсов при  $N=3N_{\text{вар}}$ ,  $N_{\text{вар}} < 6$ ;  $N=N_{\text{вар}}$  при  $N_{\text{вар}} \geq 6$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта). Вычислите ОДПФ.

#### Задание 4

Вычислите ДПФ, определите амплитудный, фазовый спектры последовательности  $x(n)$  согласно номеру своего варианта (см. таблицу).

№	$x(n)$	№	$x(n)$	№	$x(n)$	№	$x(n)$
1	3,4,2,1	5	1,2,2,1	9	2,1,1,2	13	2,2,2,2
2	1,2,3,3	6	4,4,4,4	10	1,0,0,1	14	3,2,1,0
3	$j, -j, j, -j$	7	$-j, -j, j, j$	11	1,1,0,1	15	1,2,3,4
4	1, $j, j, -1$	8	$j, j, j, j$	12	1,1,1,0	16	4,3,2,1

#### Задание 5

Постройте и сравните графы БПФВ и БПФЧ для  $N=4N_{\text{вар}} \pm$  дополнение до  $2^i > 4$ .

#### Задание 6

Определите длительность вычислений ДПФ и БПФ при  $N=2^{N_{\text{вар}}}$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта), если процессор ЭВМ выполняет операции комплексного умножения за  $\Delta_{\text{умн}} = 10$  мс, комплексного сложения за  $\Delta_{\text{сл}} = 10$  мкс. Определите выигрыш от использования БПФ. Постройте график выигрыша затрат при использовании БПФ различной размерности ( $2 < N \leq 4096$ ).

#### Задание 7

Определите период дискретизации по частоте для ДПФ при  $N=16, 32, 64$ ;  $T=0,5$  мс.

### 2.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определения процедур ДПФ и ОДПФ.
2. Определите значения оператора  $W_N^{nk}$  при  $nk=pN, (2p+1)N/2, (2p+1)N/4, (4p+3)N/4, p = 0, 1, 2, \dots$
3. Чем отличается ДПФ от спектра дискретизированного сигнала?
4. Опишите разновидности спектров ДПФ и их свойства на примере спектров по данным табл. 1.2.
5. В чем сущность алгоритмов БПФВ и БПФЧ? Каковы базовые операции и способы организации входных и выходных данных?
6. Докажите преимущество процедур БПФ перед ДПФ.

### 2.6. Ссылки на используемую литературу

[1, с. 62 – 72; 2, с. 67 – 84; 3, с. 11 – 16; 4, с. 26 – 42; 5, с. 14 – 20].

---

### 3. ПРОЦЕДУРЫ СВЁРТКИ И КОРРЕЛЯЦИИ

---

Процедуры свертки лежат в основе цифровой фильтрации, а вычисления корреляций и автокорреляций используются при анализе регулярных и случайных процессов.

#### 3.1. Дискретная свёртка

Дискретная свертка – аналог непрерывной процедуры во временной области  $g(t) = \int_0^t x(t) y(t - \tau) d\tau$  для процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Различают периодическую и линейную дискретные свертки.

**Периодическая свертка (ПС)** двух  $N$ -периодических ДП  $x(n)=x(n \bmod N)$  и  $y(n)=y(n \bmod N)$  определяется соотношением

$$g(n) = x(n) \otimes y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m), \\ \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)y(m). \end{cases} \quad (3.1)$$

Компоненты свертки могут быть представлены аналитически, в виде матрицы и в векторной форме.

Аналитическая запись ПС ( $N=4$ ):

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{m=0}^3 x(m)y(0-m) = x(0)y(0) + x(1)y(-1) + x(2)y(-2) + x(3)y(-3) = \\ &= x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1), \\ g(1) &= \sum_{m=0}^3 x(m)y(1-m) = x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(-1) + x(3)y(-2) = \\ &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2), \\ g(2) &= \sum_{m=0}^3 x(m)y(2-m) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(-1) = \\ &= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3), \\ g(3) &= \sum_{m=0}^3 x(m)y(3-m) = x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Матричная запись ПС ( $N=4$ ):

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(3) \\ y(2) \\ y(1) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Векторная форма ПС:

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{X}_m \mathbf{y}_{n-m}, \quad \mathbf{g}(n) = [g(0), g(1), \dots, g(N-1)]^T, \quad \mathbf{y}_{n-m} = [y(0), y(N-1), \dots, y(1)]^T. \quad (3.4)$$

ПС периодична (период  $N$ ), т.е.  $g(n + pN) = g(n)$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и имеет всегда не более  $N$  ненулевых отсчетов.

Для получения содержательных результатов при вычислении ПС размерность свертываемых ДП может быть увеличена вдвое дополнением до  $2N$  нулевыми отсчетами. Так, при свертывании двух  $N$ -периодических дискретных импульсов ПС также имеет вид прямоугольного импульса. При дополнении ДП до  $2N$  нулевыми отсчетами ПС прямоугольных импульсов приобретает вид треугольного импульса. ПС двух ДП  $x(n)$  и  $y(n)$  может быть вычислена с помощью ДПФ (ОДПФ):

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k)W_N^{-nk}, \quad (3.5)$$

где  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$ ,  $Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk}$ ,  $G(k) = X(k)Y(k)$ .

При реализации ДПФ в виде БПФ процедура (3.5) носит название **быстрой свертки в частотной области**.

**Линейной (апериодической) сверткой (ЛС)** двух ДП произвольных длин  $N_1, N_2$   $x(n)=x(0), x(1), \dots, x(N_1-1)$ ;  $y(n)=y(0), y(1), \dots, y(N_2-1)$  называется ДП  $g(n)$ , определяемая в виде

$$g(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x(m)y(n-m), \\ \sum_{m=0}^n x(n-m)y(m) \end{cases} = x(n) \otimes y(n). \quad (3.6)$$

В ЛС, в отличие от ПС, верхний предел суммирования  $n$  (а не  $(N-1)$ ). Кроме того, в ПС при некоторых  $n$  отсчеты  $x(n)$  или  $y(n)$  умножаются на нулевые отсчеты. ЛС имеет не более  $L=N_1+N_2-1$  отсчетов.

ЛС может быть вычислена путем дополнения свертываемых ДП нулевыми отсчетами до одинаковой длины  $L$  и использования правил вычисле-

ния ПС, в том числе и алгоритма быстрой свертки. Так, две ДП  $\{x(n)\}, n \in [0, N_1 - 1]$ ;  $y(n), n \in [0, N_2 - 1]$ , разной длины  $N_1$  и  $N_2$  преобразуются в новые ДП длины  $L$ :

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ 0, & N_1 < n \leq L - 1, \end{cases} \quad \tilde{y}(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1, \\ 0, & N_2 < n \leq L - 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Так как ДП  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n \bmod L)$  и  $\tilde{y}(n) = \tilde{y}(n \bmod L)$  периодичны с периодом  $L$ , находим ПС:

$$\tilde{g}(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m), \\ \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(n-m) \tilde{y}(m) \end{cases} = g(n). \quad (3.8)$$

Используя процедуры ДПФ (БПФ), можно вычислить  $g(n)$  по схеме:

$$\begin{array}{l} \{\tilde{x}(n)\}_L \xrightarrow{\text{ДПФ}} \tilde{X}(k) \\ \{\tilde{y}(n)\}_L \xrightarrow{\text{ДПФ}} \tilde{Y}(k) \end{array} \rightarrow \otimes \rightarrow \tilde{G}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k) \xrightarrow{\text{ОДПФ}} \{\tilde{g}(n)\} = \{g(n)\}. \quad (3.9)$$

### 3.2. Процедуры корреляции и энергетические спектры

*Автокорреляционная функция (АКФ)*  $N$ -периодической ДП  $x(n), n \in [0, N-1]$ ,

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)x(n+m), \quad n \in [0, N-1] \quad (3.10)$$

является дискретным эквивалентом АКФ непрерывных процессов и характеризует степень связи между отдельными отсчетами ДП.

АКФ может быть представлена в матричной (3.11) и векторной (3.12) формах. Так, при  $N=4$  матричная форма имеет вид

$$\begin{array}{l} R_{xx}(0) \\ R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ R_{xx}(3) \end{array} = \frac{1}{4} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \end{array} \right| = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{c} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{array} \right|, \end{array} \quad (3.11)$$

а векторная форма –

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{N} \mathbf{x}_N \mathbf{x}_N^T, \quad \mathbf{x}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T. \quad (3.12)$$

Из (3.10) и (3.11) видно, что при вычислении АКФ последовательность  $x(n+m)$  не реверсируется, что отличает корреляцию от свертки.

**Энергетический спектр (ЭС)** ДП определяется как ДПФ от АКФ:

$$P_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{xx}(n)W_N^{nk} = X(k)X^*(k) = |X(k)|^2, \quad k \in [0, N-1]. \quad (3.13)$$

Следует учесть, что (3.13) – точное выражение для ЭС лишь для  $N$ -периодической ДП. При вычислении ЭС для аperiodических случайных процессов по отдельным реализациям требуется усреднение промежуточных вычислений по совокупности реализаций.

ОДПФ от  $P_{xx}(k)$  определяет АКФ:

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{xx}(k)W_N^{-nk}, \quad n \in [0, N-1]. \quad (3.14)$$

Для двух  $N$ -периодических ДП  $x(n)$  и  $y(n)$  вычисляют **взаимный энергетический спектр (ВЭС)**

$$P_{xy}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{xy}(n)W_N^{nk} = X(k)Y^*(k) = X^*(k)Y(k), \quad k \in [0, N-1] \quad (3.15)$$

и **взаимную корреляционную функцию (ВКФ)**

$$R_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{xy}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y^*(n+m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(n+m)y(m). \quad (3.16)$$

### 3.3. Типовые задачи

#### Пример 1

Вычислите и запишите аналитически и в виде матрицы компоненты ПС для периодических ДП  $x(n)=3,4,2,1$  и  $y(n)=j,-j,j,j$ . Проверьте результат вычислением быстрой свертки.



1)

$$\begin{aligned} g(0) &= x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1) = 3j + 4j + 2j - 1j = 8j; \\ g(1) &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2) = -3j + 4j + 2j + 1j = 4j; \\ g(2) &= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3) = 3j - 4j + 2j + 1j = 2j; \\ g(3) &= x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) = 3j + 4j - 2j + 1j = 6j. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 8j \\ 4j \\ 2j \\ 6j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j \\ j \\ j \\ -j \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 3 + 4 + 2 + 1 = 10; \\ X(1) &= x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 3 - 4j - 2 + j = 1 - j3; \\ X(2) &= x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 3 - 4 + 2 - 1 = 0; \\ X(3) &= x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 3 + 4j - 2 - j = 1 + j3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(0) &= y(0) + y(1) + y(2) + y(3) = j - j + j + j = 2j; \\ Y(1) &= y(0) - jy(1) - y(2) + jy(3) = j - 1 - j - 1 = -2; \\ Y(2) &= y(0) - y(1) + y(2) - y(3) = j + j + j - j = 2j; \\ Y(3) &= y(0) + jy(1) - y(2) - jy(3) = j + 1 - j + 1 = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(0) &= X(0)Y(0) = 10 \cdot 2j = 20j; \\ G(1) &= X(1)Y(1) = (1 - j3)(-2) = -2 + j6; \\ G(2) &= X(2)Y(2) = 0 \cdot 2j = 0; \\ G(3) &= X(3)Y(3) = (1 + j3)2 = 2 + j6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-0k} = \frac{1}{4}[G(0) + G(1) + G(2) + G(3)] = \\ &= \frac{1}{4}[20j + (-2 + j6) + 0 + (2 + j6)] = 8j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-1k} = \frac{1}{4}[G(0) + jG(1) - G(2) - jG(3)] = \\ &= \frac{1}{4}[20j + j(-2 + j6) - 0 - j(2 + j6)] = 4j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-2k} = \frac{1}{4}[G(0) - G(1) + G(2) - G(3)] = \\ &= \frac{1}{4}j[20j - (-2 + j6) + 0 - (2 + j6)] = 2j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(3) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-3k} = \frac{1}{4}[G(0) - jG(1) - G(2) + jG(3)] = \\ &= \frac{1}{4}[20j - j(-2 + j6) - 0 + j(2 + j6)] = 6j. \end{aligned}$$



### Пример 2

Вычислите значения ЛС для двух ДП  $x(n)=3,4,2$ ;  $y(n)=j,-j$ .

$$g(0) = \sum_{m=0}^0 x(m)y(0-m) = x(0)y(0) = 3j;$$

$$g(1) = \sum_{m=0}^1 x(m)y(1-m) = x(0)y(1) + x(1)y(0) = -3j + 4j = j;$$

$$g(2) = \sum_{m=0}^2 x(m)y(2-m) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) = 0 - 4j + 2j = -2j;$$

$$g(3) = \sum_{m=0}^3 x(m)y(3-m) = x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) = \\ = 0 + 0 - 2j + 0 = -2j.$$

### Пример 3

Вычислите АКФ и ЭС для  $x(n)=4,3,2,1$ , ВКФ и ВЭС для  $x(n)=3,4,2,1$  и  $y(n)=j,-j,j,j$ .

Автокорреляционная функция  $R_{xx}(n)$ ,  $n=0, 1, 2, 3$ :

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(0+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(0) + x(1)x(1) + x(2)x(2) + x(3)x(3)] = \\ = \frac{1}{4}[4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1] = 7,5;$$

$$R_{xx}(1) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(1+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(1) + x(1)x(2) + x(2)x(3) + x(3)x(0)] = \\ = \frac{1}{4}[4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4] = 6;$$

$$R_{xx}(2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(2+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(2) + x(1)x(3) + x(2)x(0) + x(3)x(1)] = \\ = \frac{1}{4}[4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3] = 5,5;$$

$$R_{xx}(3) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(3+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(3) + x(1)x(0) + x(2)x(1) + x(3)x(2)] = \\ = \frac{1}{4}[4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2] = 6.$$

Энергетический спектр  $P_{xx}(k)$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ :

$$R_{xx}(1) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(1+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(1) + x(1)x(2) + x(2)x(3) + x(3)x(0)] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4] = 6;$$

$$R_{xx}(2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(2+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(2) + x(1)x(3) + x(2)x(0) + x(3)x(1)] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3] = 5,5;$$

$$P_{xx}(0) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = R_{xx}(0) + R_{xx}(1) + R_{xx}(2) + R_{xx}(3) = 7,5 + 6 + 5,5 + 6 = 25;$$

$$P_{xx}(1) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = R_{xx}(0) - jR_{xx}(1) - R_{xx}(2) + jR_{xx}(3) = 7,5 - j6 - 5,5 + j6 = 2;$$

$$P_{xx}(2) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = R_{xx}(0) - R_{xx}(1) + R_{xx}(2) - R_{xx}(3) = 7,5 - 6 + 5,5 - 6 = 1;$$

$$P_{xx}(3) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = R_{xx}(0) + jR_{xx}(1) - R_{xx}(2) - jR_{xx}(3) = 7,5 + j6 - 5,5 - j6 = 2.$$

Взаимнокорреляционная функция  $R_{xy}(n)$ ,  $n=0, 1, 2, 3$ :

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(0+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(0) + x(1)y(1) + x(2)y(2) + x(3)y(3)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j - 4j + 2j + j] = 0,5j;$$

$$R_{xy}(1) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(1+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(1) + x(1)y(2) + x(2)y(3) + x(3)y(0)] =$$

$$= \frac{1}{4}[-3j + 4j + 2j + j] = 1j;$$

$$R_{xy}(2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(2+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(2) + x(1)y(3) + x(2)y(0) + x(3)y(1)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j + 4j + 2j - 1j] = 2j;$$

$$R_{xy}(3) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(3+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(3) + x(1)y(0) + x(2)y(1) + x(3)y(2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j + 4j - 2j + j] = 1,5j.$$

Взаимный энергетический спектр  $P_{xy}(k)$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ :

$$P_{xy}(0) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = R_{xy}(0) + R_{xy}(1) + R_{xy}(2) + R_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j + 1j + 2j + 1,5j = 5j;$$

$$P_{xy}(1) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = R_{xy}(0) - jR_{xy}(1) - R_{xy}(2) + jR_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j + 1 - 2j - 1,5 = -0,5 - 1,5j;$$

$$P_{xy}(2) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = R_{xy}(0) - R_{xy}(1) + R_{xy}(2) - R_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j - 1j + 2j - 1,5j = 0;$$

$$P_{xy}(3) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = R_{xy}(0) + jR_{xy}(1) - R_{xy}(2) - jR_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j - 1 - 2j + 1,5 = 0,5 - 1,5j.$$



### 3.4. Самоподготовка и самоконтроль

#### Задание 1

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 3.

#### Задание 2

Вычислите и запишите аналитически и в виде матрицы компоненты ПС для периодических ДП  $x(n)$  и  $y(n)$  (табл. 3.1). Проверьте результат вычислением быстрой свертки.

Таблица 3.1

Номер варианта	1	2	3	4	5
$x(n)$	3,4,2,1	1,2,3,4	1,1,1,1	0,2,2,0	2,1,1,2
$y(n)$	1,2,3,4	1,1,1,1	3,4,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1
6	7	8	9	10	
1,2,2,1	-2,1,1,-2	0,1,1,0	1,0,0,1	-2,0,0,-2	
1,2,3,4	4,3,2,1	1,2,3,4	2,1,1,2	1,2,2,1	

Постройте графики  $x(n)$ ,  $y(n)$ ,  $g(n)$  в едином временном масштабе.

### Задание 3

Вычислите значения ЛС для ДП  $x(n)$  и  $y(n)$  (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Номер варианта	1	2	3	4	5
$x(n)$	3,4,2	1,2,3	$jj,1$	1,2,2	2,1,1
$y(n)$	1,2	$j,-j$	$1,j$	2,1	1,2

6	7	8	9	10
$jj,j$	$-j,-j,-j$	1,1,1	$1,j,j$	$-j,1,1$
1,2	4,3	1,2	2,1	1,2

### Задание 4

Вычислите АКФ, ЭС для  $x(n)$  и ВКФ, ВЭС для  $x(n)$ ,  $y(n)$  по данным из задания 2. Постройте графики  $x(n)$ , АКФ и ЭС в едином временном масштабе.

## 3.5. Контрольные вопросы

1. Чем различаются периодическая и линейная свертки двух ДП? Поясните это на примере свертки  $N$ -периодической и  $M$ -периодической ДП ( $M < N$ ).
2. Для чего вычисляется  $2N$ -периодическая свертка? Как превратить  $N$ -периодическую ДП в  $2N$ -периодическую? Покажите это на примере ПС двух прямоугольных импульсов при  $N = N_{\text{вар}} \pm 4$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта).
3. Как вычислить ПС и ЛС с помощью ДПФ (БПФ)?
4. Поясните на примере сущность процедуры быстрой свертки в частотной области.
5. Что характеризует функция дискретной автокорреляции (взаимной)? Поясните способы записи АКФ.
6. В чем различие процедур корреляции и свертки?
7. Как вычисляется энергетический спектр одной (двух) ДП?

## 3.6. Ссылки на используемую литературу

[1, с. 22 – 24, 45 – 46, 72 – 81, 441 – 447; 2, с. 20 – 22; 3, с. 21 – 26, 45 – 46; 4, с. 39 – 42].

---

## 4. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

---

Дискретные фильтры (ДФ) предназначены для преобразования дискретной последовательности  $x(n)$  по определенному алгоритму  $y(n)=L[x(n)]$ ,  $n$  – дискретное время (дифференцирование, интегрирование, частотная селекция спектра ДП и т.д.). ДФ реализует процедуру свертки ДП  $x(n)$  с импульсной характеристикой  $h(n)$ . В частотной области ДФ селектирует спектр входной ДП в определенном диапазоне частот. Линейные ДФ удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$y(n)=L[ax_1(n)+bx_2(n)]=aL[x_1(n)]+bL[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n).$$

Они инвариантны к сдвигу: если  $y(n)=L[x_1(n)]$ , то  $y(n-k)=L[x_1(n-k)]$ . Отличие дискретных фильтров от цифровых состоит в том, что для первых изменения времени дискретны, а изменения уровней непрерывны, а для вторых – квантованы время и уровни. Цифровые фильтры (ЦФ), в частности, являются реализацией на ЭВМ дискретных.

Основные способы описания ДФ – разностные уравнения  $y(n)=L[x(n)]$ ; операторные коэффициенты передачи (системные функции)  $H(p)=Y(p)/X(p)$ , где  $A_i(p)$ ,  $i=1, 2, 3$  – соответствующие преобразования  $h(n)$ ,  $y(n)$  и  $x(n)$  в плоскости комплексной переменной  $p=\sigma+j\omega$ ; комплексные частотные характеристики  $H(e^{j\omega})=H(p)$  при  $p=j\omega$  и дискретные импульсные передаточные характеристики  $H(z)=Y(z)/X(z)$ ,  $z=e^{pT}$ .

По типу разностного уравнения различают нерекурсивные (НФ), рекурсивные фильтры (РФ) и фильтры-резонаторы.

### 4.1. Нерекурсивные фильтры

Разностное уравнение НФ порядка  $M-1$  имеет вид

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k x(n-k), \quad (4.1)$$

где весовые коэффициенты фильтра  $a_k$  являются отсчетами  $h_k$  в дискретном времени  $k$  его импульсной характеристики. Структура НФ состоит

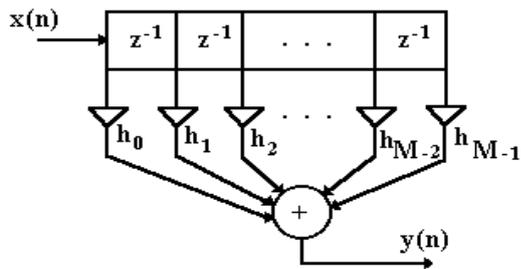


Рис. 4.1

из сумматора, умножителей  $a_k$  на держанные с помощью  $M$ -отводного устройства отсчеты входного сигнала  $x(n-k)$ . Число  $M-1$  элементов памяти в устройстве задержки равно порядку фильтра (рис. 4.1).

Операторный коэффициент передачи НФ

$$\dot{H}_{нф}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-kpT} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-k(p-jm\Omega)T}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2)$$

обладает в комплексной плоскости  $p = \sigma + j\omega$  только нулями, повторяющимися вдоль мнимой оси  $j\omega$  с периодом  $\Omega = 2\pi/T$ ,  $T$  – период дискретизации ДП.

Комплексная частотная характеристика (ЧХ) фильтра

$$\dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H_{нф}(p)|_{p=j\omega} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

определяет выражение для амплитудной частотной характеристики (АЧХ):

$$H_{нф}(\omega) = \left| \dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) \right| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (4.4)$$

где  $A = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \cos k(\omega-m\Omega)T$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $B = -\sum_{k=0}^{M-1} h_k \sin k(\omega-m\Omega)T$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

и фазовой частотной характеристики (ФЧХ):

$$\Phi_{нф}(\omega) = \arg \dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) = \arctg(B/A). \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) видно, что АЧХ и ФЧХ периодичны вдоль оси частот с периодом  $\Omega = 2\pi/T$ .

Дискретная передаточная характеристика (ДПХ) НФ

$$H_{нф}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k z^{-k}, z = e^{pT}, p = \sigma + j\omega \quad (4.6)$$

обладает нулями и полюсами в плоскости  $z$ .

Нерекурсивный фильтр всегда физически реализуем и абсолютно устойчив, так как не включает цепи обратных связей. НФ обеспечивает линейные ФЧХ при произвольных АЧХ. Поскольку используемое число отсчетов импульсной характеристики НФ конечно, такие фильтры называются **КИХ-фильтрами**.

## 4.2. Рекурсивные фильтры

В РФ (рис. 4.2) введена запаздывающая обратная связь с помощью дополнительного (по отношению к НФ) устройства задержки, благодаря чему РФ реализует уравнение

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{L-1} b_k y(n-k), \quad (4.7)$$

где  $a_k, b_k$  – весовые коэффициенты фильтра в цепях прямой и обратной запаздывающих связей соответственно.

Операторный коэффициент передачи РФ

$$H_{pф}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-kpT}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-kpT}} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-k(p-jm\Omega)T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-k(p-jm\Omega)T}}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

обладает в комплексной плоскости  $p=\sigma+j\omega$  не только нулями (корни числителя), но и полюсами (корни знаменателя), конфигурации которых повторяются вдоль мнимой оси  $j\omega$  с периодом  $\Omega = 2\pi/T$ .

Комплексная ЧХ РФ произвольного порядка  $M-1$

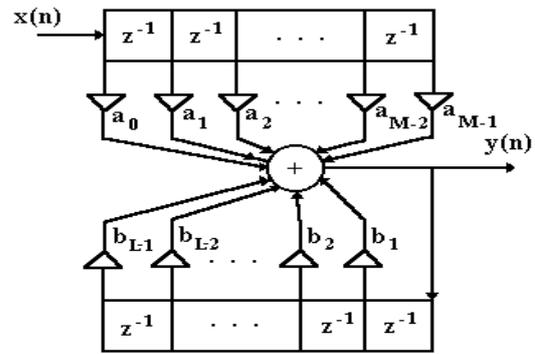


Рис. 4.2

$$H_{pф}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-jk\omega T}} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T}}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.9)$$

позволяет определить АЧХ как  $H_{pф}(\omega) = \left| \dot{H}_{pф}(e^{j\omega}) \right|$  и ФЧХ как  $\arg \dot{H}(e^{j\omega})$  аналогично подобным характеристикам для НФ.

Дискретная передаточная характеристика РФ имеет вид

$$H_{pф}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k z^{-k}}. \quad (4.10)$$

Рекурсивные фильтры могут обладать импульсными характеристиками как с конечным (КИХ), так и с бесконечным (БИХ) количеством отсчетов. Преимущество РФ перед НФ заключается в меньшем количестве элементов памяти (за счет применения обратной связи), более резкой АЧХ и равномерности ее в заданной полосе частот. Недостатки – возможность самовозбуждения и накопление ошибок задания  $a_k$ ,  $b_k$  и  $x(n)$  при циркуляции сигналов по цепи запаздывающей обратной связи.

### 4.3. Основные методы реализации цифровых фильтров

Возможны три основных пути реализации цифровых фильтров – аппаратный, программный и комбинированный [3, 19].

**Аппаратная** реализация ЦФ – специализированное вычислительное устройство (СЦВУ), отражающее принципы построения ЭВМ (наличие арифметико-логического устройства – процессора, постоянного (ПЗУ) и оперативного (ОЗУ) запоминающих устройств, а также внешних устройств – аналого-цифровых (АЦП) и цифроаналоговых (ЦАП) преобразователей, различных интерфейсов и т. п.). Входной непрерывный сигнал  $x(t)$  после дискретизации  $\{x(nt)\}$  и квантования  $\{x^{кв}(nt)\}$  преобразуется с помощью АЦП в набор  $r$ -разрядных кодовых слов  $\{Q_i\}_x$ ,  $Q_i=[0,1]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, r-1$ , которые через интерфейс поступают в СЦВУ – ЦФ. Процессор СЦВУ с характеристикой передачи

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k Z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k Z^{-k}} \quad (4.11)$$

решает разностное уравнение

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{L-1} b_k y(n-k), \quad (4.12)$$

вырабатывая на выходе кодовые слова  $\{Q_i\}_y$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, r-1$ , преобразуемые в непрерывный сигнал с помощью ЦАП.

**Программный** вариант ЦФ реализуется на персональной ЭВМ с учетом особенностей машины и ее программного обеспечения.

**Комбинированный** метод реализации ЦФ предполагает аппаратно-программное построение фильтра в виде микропроцессорного вычислительного устройства (МПВУ) на серийных микропроцессорных комплектах.

Дискретный фильтр реализуется аппаратно с использованием аналого-дискретных (АДП) и дискретно-аналоговых (ДАП) преобразователей.

#### 4.4. Этапы проектирования цифровых (дискретных) фильтров

1. Задают требуемые свойства фильтра (обычно частотная характеристика).

Практически распространены фильтры нижних (ФНЧ), верхних (ФВЧ) частот, полосовые (ПФ) и режекторные (ФР). Для исключения эффекта наложения копий ЧХ дискретных реализаций фильтра частоту дискретизации  $F_d$  выбирают из условия  $F_d > 4F_{\max}$ , где  $F_{\max}$  – максимальная частота ЧХ.

2. Аппроксимируют заданные требования на основе характеристик физически реализуемых фильтров. Наиболее часто используют аппроксимации Баттерворта (максимально гладкая) и Чебышева (с допустимыми пульсациями в полосе пропускания и задерживания).

3. Реализуют цифровые и дискретные фильтры на основе арифметики с ограниченной точностью (при программном методе) или элементов с заданными погрешностями (при аппаратном методе).

4. Проверяют соответствие характеристик ЦФ (ДФ) заданным требованиям (путем моделирования, эксперимента и т. п.).

#### 4.5. Основные погрешности цифровых фильтров

*Методическая* (алгоритмическая) погрешность (%) аппроксимации

$$\delta_{a \max} = \frac{\Delta_{a \max}}{y_{\text{ном}}} 100, \quad \Delta_{a \max} = |y(nT) - y_a(nT)|_{\max}, \quad (4.13)$$

где  $\Delta_{a \max}$  – максимальная разность между выходным сигналом  $y(nT)$  идеального ДФ и сигналом  $y_a(nT)$  на выходе аналогового фильтра-прототипа;  $y_{\text{ном}}$  – номинальное значение выходного сигнала. Величина  $\delta_m$  ( $\Delta_{a \max}$ ) определяется видом аппроксимации ЧХ.

*Вычислительные* погрешности делятся на *ошибки квантования* (%) в регистрах сигнальных слов с числом разрядов  $r_x$  и регистрах коэффициентов фильтра  $a_k, b_k$  с разрядностью  $r_a, r_b$  соответственно:

$$\delta_{кв} = \delta_{x,a,b} \approx 100/2^{r_{x,a,b}}, \quad (4.14)$$

и *ошибки округления* в регистрах вычисления и хранения произведений  $a_k x(n-k)$  и  $b_k y(n-k)$  с разрядностью  $r_{\text{пр}}$

$$|\delta_{\text{пр}}| = 1/2^{r_{\text{пр}}}, \quad r_{\text{пр}} = r_x + r_{a,b}. \quad (4.15)$$

Число разрядов регистров  $r_{x,a,b}$  определяется числом уровней квантования  $M$  с шагом  $h$  (динамическим диапазоном фильтра  $d_{\text{дб}} = 20 \lg M$ ):

$$r_x = \lceil \log_2 M \rceil, \quad M = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h} \approx x_{\max}/h \approx d. \quad (4.16)$$

Обычно  $r_{x,a,b} \leq 16$ , поэтому  $\delta_{x,a,b} \leq 1/2^{16} = 1,5 \cdot 10^{-5}$  ( $1,5 \cdot 10^{-3} \%$ ).

При вычислении произведений для сокращения вычислительных и аппаратных затрат числа  $x$ ,  $a$ ,  $b$  округляются путем отбрасывания младших разрядов.

Вычислительные погрешности – случайные величины (шумы квантования и округления). При аппроксимации их равномерным законом плотности вероятностей  $\omega(\Delta x) = 1/h$ ,  $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ , абсолютные максимальные значения и дисперсии этих погрешностей соответственно равны:

$$\Delta_{\text{кв}} = h/2, \quad D_{\text{кв}} = \sigma_{\text{кв}}^2 = h^2/12, \quad (4.17)$$

$$\Delta_{\text{окр}} = \Delta/2, \quad D_{\text{окр}} = \sigma_{\text{окр}}^2 = \Delta^2/12, \quad (4.18)$$

где  $\Delta$  – перепад уровней, соответствующий отбрасываемым разрядам чисел  $x$ ,  $a$ ,  $b$  и произведения.

При аппаратной реализации дискретных фильтров необходимо учитывать дополнительно *инструментальные* погрешности, вызванные несовершенством технологического исполнения электронных компонентов.

#### 4.6. Критерии качества цифровых фильтров

Выбор варианта реализации ЦФ подчиняется требованиям к его *быстродействию* и *объему аппаратных и вычислительных затрат*. Быстродействие определяется в основном временем выполнения операций умножения двух операндов и числом самих операций умножения. Аппаратные затраты зависят в первую очередь от объема оперативной памяти для хранения коэффициентов фильтра и результатов выполнения логических и арифметических операций. Объем аппаратных затрат и быстродействие взаимосвязаны.

Пусть число разрядов кодовых слов  $r$ , число потребных операций умножения  $N$ , длительность такта  $T_0$  (не менее длительности одной элементарной операции). Тогда время, необходимое для вычисления одной выборки  $y(nT)$ , должно быть не менее  $t_{\min} \geq NrT_0$ .

*Быстродействие* ЦФ определяется максимальной рабочей частотой

$$F_{\text{цф max}} = 1/t_{\min} \leq 1/NrT_0. \quad (4.19)$$

При работе ЦФ в реальном времени необходимо, чтобы величина  $t_{\min}$  не превышала интервала дискретизации сигналов ( $t_{\min} \leq T$ ). Это означает, что максимальная рабочая частота фильтра должна превышать допустимую частоту дискретизации обрабатываемых сигналов

$$F_{\text{цф max}} \geq F_{\text{д}} = 1/T = 2F_{\text{max}}. \quad (4.20)$$

В различных цифровых системах принятые частоты дискретизации сигналов различны. В системах связи  $F_{\text{д}}=8$  кГц, в звукотехнике  $F_{\text{д}}=40...48$  кГц, в системах обработки изображений  $F_{\text{д}}=14$  МГц. Эти значения определяют необходимое быстродействие фильтра и разрядность его регистров ( $r = 8...16$ ).

Основные пути повышения быстродействия (и соответственно качества работы) фильтров:

- совершенствование элементной базы (технологии ТТЛШ, ЭСЛ и т.п.);
- алгоритмические меры (ЦФ на основе ПЗУ произведений и их сумм, распараллеливание и конвейерная обработка данных, архитектура с разделением функций и т.д.);
- применение быстродействующих сигнальных процессов цифровой обработки сигналов.

#### 4.7. Типовые задачи

##### Пример 1

Запишите разностные уравнения и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для НФ второго порядка.



$$y(n) = \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2);$$

$$\dot{H}_{\text{НФ } 2}(p) = \sum_{k=0}^2 h_k e^{-k(p-jm\Omega)T} = h_0 + h_1 e^{-(p-jm\Omega)T} + h_2 e^{-2(p-jm\Omega)T}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\dot{H}_{\text{НФ } 2}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^2 h_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} = \sum_{k=0}^2 h_k \cos k(\omega-m\Omega)T - j \sum_{k=0}^2 h_k \sin k(\omega-m\Omega)T;$$

$$H_{\text{НФ } 2}(\omega) = \left| \dot{H}_{\text{НФ } 2}(e^{j\omega}) \right| = \sqrt{\left( \sum_{k=0}^2 h_k \cos k(\omega-m\Omega)T \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^2 h_k \sin k(\omega-m\Omega)T \right)^2};$$

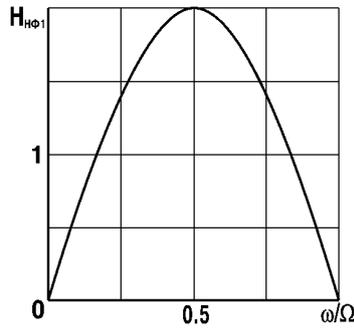
$$\varphi_{\text{НФ } 2}(\omega) = -\arctg \left[ \frac{\sum_{k=0}^2 h_k \sin k(\omega-m\Omega)T}{\sum_{k=0}^2 h_k \cos k(\omega-m\Omega)T} \right];$$

$$H_{\text{НФ } 2}(z) = \sum_{k=0}^2 h_k z^{-k} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}.$$



### Пример 2

Рассчитайте и постройте график АЧХ фильтра НФ1 для  $h_0=1, h_1=-1$ .



$$\begin{aligned}
 H_{\text{TM1}}(\omega) &= \left| \dot{H}_{\text{TM1}}(e^{j\omega}) \right| = \left| h_0 + h_1 e^{-j(\omega-m\Omega)T} \right| = \\
 &= \left| h_0 + h_1 \cos(\omega-m\Omega)T - jh_1 \sin(\omega-m\Omega)T \right| = \\
 &= \sqrt{h_0^2 + h_1^2 + 2h_0h_1 \cos(\omega-m\Omega)T} = \sqrt{2[1 - \cos(\omega-m\Omega)T]} = \\
 &= 2 \left| \sin \frac{(\omega-m\Omega)T}{2} \right| = 2 \left| \sin \left( \frac{\omega\pi}{\Omega} - m\pi \right) \right|, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

Задавая  $\omega$  в диапазоне  $\omega/\Omega = 0 \dots 1$  с шагом  $\Delta\omega/\Omega = 0,2$ , проводим расчет главного лепестка АЧХ ( $m=0$ ).

### Пример 3

Запишите разностное уравнение и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для РФ третьего порядка.

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^3 a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^3 b_k x(n-k) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \\
 &+ a_3 x(n-3) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + b_3 y(n-3);
 \end{aligned}$$

$$H_{\text{p}\Phi_3}(p) = \left( \sum_{k=0}^3 a_k e^{-k(p-jm\Omega)T} \right) / \left( 1 - \sum_{k=1}^3 b_k e^{-k(p-jm\Omega)T} \right), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{p}\Phi_3}(e^{j\omega}) = \left( \sum_{k=0}^3 a_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right) / \left( 1 - \sum_{k=1}^3 b_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{p}\Phi_3}(\omega) = \left[ \left( \sum_{k=0}^3 a_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right) / \left( 1 - \sum_{k=1}^3 b_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right) \right], \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

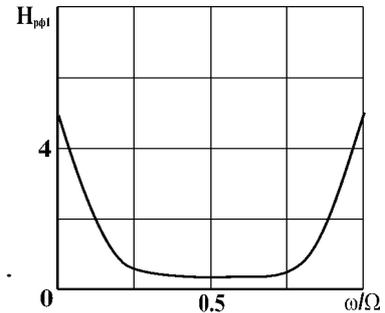
$$\varphi_{\text{p}\Phi_3}(\omega) = \arg \left[ \left( \sum_{k=0}^3 a_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right) / \left( 1 - \sum_{k=1}^3 b_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T} \right) \right], \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{p}\Phi_3}(z) = \frac{\sum_{k=0}^3 a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^3 b_k z^{-k}}.$$

#### Пример 4

Рассчитайте и постройте график АЧХ фильтра РФ1 для  $b=0,8$ .

$$\begin{aligned} H_{p\phi 1}(\omega) &= \left| H_{p\phi 1}(e^{j\omega}) \right| = \left| 1 / \left( 1 - be^{-j(\omega - m\Omega)T} \right) \right| = \\ &= 1 / \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos(\omega - m\Omega)T} = \\ &= 1 / \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos\left(2\pi \frac{\omega}{\Omega} - m2\pi\right)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$



Задавая  $\omega$  в диапазоне  $\omega/\Omega = 0 \dots 1$  с шагом  $\Delta\omega/\Omega = 0,2$ , рассчитываем главный лепесток АЧХ ( $m=0$ ).

#### Пример 5

Определите динамический диапазон, предельное быстродействие и точность цифрового фильтра, реализованного на микросхемах ТТЛ, предназначенного для обработки сигнала с амплитудой  $U_{max} = 1$  В, длительностью  $T_c = 500$  мс и максимальной частотой  $F_m = 1$  кГц. Дисперсия шумов ошибок квантования не превышает значения  $\sigma_{KB}^2 = 8,33$  мВ<sup>2</sup>. Погрешностями аппроксимации и округления пренебречь.

Шаг квантования сигнала по уровню равен  $h = \sqrt{12\sigma_{KB}^2} = \sqrt{12 \cdot 8,33} \approx 10$  мВ.

Число уровней квантования  $M = \lceil U_{max} / h \rceil = \lceil 1000 / 10 \rceil = 100$ .

Динамический диапазон  $d_{дБ} = 20 \lg M = 20 \lg 100 = 40$  дБ.

Число разрядов регистров сигнала и коэффициентов  $r \geq \lceil \log_2 M \rceil \approx 6,66$  (принимаем  $r=7$ ).

Относительная погрешность (%) ЦФ  $\gamma = (1/2^r) \cdot 100 = 0,78$  %.

Период дискретизации по времени  $T \leq 1/2F_m = 1/2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5$  мс.

Объем выборки сигнала по времени  $N = T_c / T = 500 / 0,5 = 1000$ .

Принимаем длительность такта  $T_0 = 20$  нс, что соответствует быстродействию цифровых схем ТТЛ.

Предельная частота работы ЦФ  $F_{цф\ max} = 1/NrT_0 = 1/(10^3 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 10^{-9}) = 7142,9$  Гц.

## 4.8. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 4.

### Задание 2

Запишите разностные уравнения и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для НФ порядка  $N_{\text{вар}}$  (номер варианта). Нарисуйте схему фильтра.

### Задание 3

Рассчитайте и постройте график АЧХ фильтра НФ1 для  $h_0$  и  $h_1$  из табл. 4.1

Таблица 4.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h_0$	1	1	1	1	0,5	-0,5	0,5	0,5	0,5	-0,5	1	0,8
$h_1$	1	-1	0,5	-0,5	1	-1	-1	1	0,5	0,5	-0,5	0,8

Нарисуйте схему и АЧХ НФ1.

### Задание 4

Запишите разностное уравнение и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для РФ порядка  $N_{\text{вар}}$  (номер варианта). Нарисуйте схему фильтра.

### Задание 5

Рассчитайте и постройте график АЧХ фильтра РФ1 для  $b$  из табл. 4.2

Таблица 4.2

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	0,4	-0,4

Нарисуйте схему и АЧХ РФ1.

### Задание 6

Определите динамический диапазон, предельное быстродействие и точность цифрового фильтра, реализованного на микросхемах ТТЛ, предназначенного для обработки сигнала с амплитудой  $U_{\text{max}}=1$  В, длительностью  $T_c$  и максимальной частотой  $F_m$ . Дисперсия шумов ошибок квантования не превышает значения  $\sigma_{\text{КВ}}^2$  (табл. 4.3). Погрешностями аппроксимации и округления пренебречь.

Таблица 4.3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_c$ , мс	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$F_m$ , кГц	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0,5	0,2
$\sigma_{\text{КВ}}^2$ , мс <sup>2</sup>	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

#### 4.9. Контрольные вопросы

1. В чем сходство и различие непрерывных, дискретных и цифровых фильтров?
2. Сформулируйте требования к линейным дискретным фильтрам.
3. В чем сходство и различие частотных характеристик дискретных и непрерывных фильтров?
4. Опишите преимущества цифровых фильтров перед аналоговыми.
5. В чем сущность аппаратной, программной и аппаратно-программной реализаций дискретных (цифровых) фильтров?
6. Нарисуйте схемы типовых структур дискретных фильтров. Приведите описывающие разностные уравнения.
7. В чем сходство и различие НФ и РФ?
8. Опишите основные этапы проектирования ДФ и ЦФ.
9. Дайте определения и раскройте сущность основных видов погрешностей ЦФ.

#### 4.10. Ссылки на используемую литературу

[1, с. 52 – 62; 2, с. 97, 108 – 112; 3, с. 46 – 59; 4, с. 49 – 53].

---

---

## 5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ДПФ

---

### 5.1. Общие сведения

$$\text{Процедура ДПФ } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

соответствует многоканальному фильтру с выходами  $X(k)$ . Импульсная характеристика  $k$ -го канала

$$h(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

соответствует дискретной передаточной характеристике

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) видно, что спектроанализатор на основе ДПФ является "гребенкой" из  $N$  фильтров, настроенных на частоты  $\omega_k=2\pi k/N$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

Для выяснения частотных свойств "гребенки" подадим на вход сигнал в виде ДП  $x(n)=\exp(j\omega n)$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$ . Тогда ДПФ в точке  $k_1$  из множества  $k=0, 1, \dots, N-1$  имеет вид

$$X(k_1) = X_{k_1}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1} = \frac{1-e^{j\omega N}}{1-e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k_1\right)}}, \quad (5.3)$$

откуда находим АЧХ одного "зубца гребенки" в районе частоты  $\omega_{k_1} = \frac{2\pi}{N}k_1$ :

$$\left|H_{k_1}(e^{j\omega})\right| = \left|X_{k_1}(e^{j\omega})\right| = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k_1}{N}\right)}. \quad (5.4)$$

Алгоритм ДПФ, позволяя вычислить сразу  $N$  спектральных составляющих, эквивалентен АЧХ многоканального фильтра, каналы которого настроены на частоты  $\omega_k=(2\pi/N)k$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

Боковые лепестки характеристик фильтра ДПФ и конечная ширина основных лепестков приводят к нежелательным эффектам "растекания (утечки)" спектра по соседним каналам и "маскировки" спектральных составляющих шумом [1, 2, 4]. Это связано с усечением ДП интервалом  $[0, N-1]$ . Уменьшение лепестковости АЧХ гребенчатого фильтра ДПФ достигается взвешиванием входной ДП временным "окном" длины  $N$

$$\omega(n) = \begin{cases} \omega(n), & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & |n| > \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (5.5)$$

со спектром

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \omega(n) e^{-j\omega n}. \quad (5.6)$$

Известно [1 – 4], что преобразование Фурье взвешенной ДП

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(n) x(n) e^{-j\omega n} \quad (5.7)$$

эквивалентно свертке спектров ДП и "окна" в частотной области

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta. \quad (5.8)$$

По (5.8) находится оценка спектра  $\hat{X}(e^{j\omega})$  взвешенной ДП  $x(n)$  на всех частотах.

Для обеспечения высокого качества спектрального анализа к временному "окну" предъявляются следующие требования.

1. Частотная характеристика "окна"  $W(e^{j\omega})$  должна иметь как можно более узкий главный лепесток ( $\Delta\omega_{\text{гл}} \rightarrow 0$ ), что достигается увеличением длины "окна"  $\omega(n)$  в пределах длины ДП, т.е.  $n \in [0, N-1]$ .

2. Уровень боковых лепестков  $\gamma_{\text{бл}} = W_{\text{бл}}/W_{\text{макс}}$  функции  $W(e^{j\omega})$  должен быть минимальным, для чего функция "окна"  $\omega(n)$  должна плавно нарастать в её начале и плавно спадать к концу. Указанным требованиям удовлетворяет ряд "окон" [1, 2]:

- треугольное "окно" Бартлета ( $\Delta\omega_{\text{гл}} = 8\pi/N$ ,  $\gamma_{\text{бл}} = -25$  дБ)

$$\omega_1(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1; \end{cases} \quad (5.9)$$

- "окно" Хэмминга ( $\Delta\omega_{\text{ГЛ}}=8\pi/N$ ,  $\gamma_{\text{бЛ}}=-41$  дБ)

$$\omega_2(n) = 0,54 - 0,46 \cos[2\pi n/(N-1)], \quad 0 \leq n \leq N-1; \quad (5.10)$$

- "окно" Блэкмана ( $\Delta\omega_{\text{ГЛ}}=12\pi/N$ ,  $\gamma_{\text{бЛ}}=-57$  дБ)

$$\omega_3(n) = 0,42 - 0,5 \cos[2\pi n/(N-1)] + 0,08 \cos[4\pi n/(N-1)]. \quad (5.11)$$

Из (5.9) – (5.11) видно, что глубокое подавление боковых лепестков сопровождается расширением главного лепестка ЧХ "окна", что снижает разрешающую способность спектрального анализа.

В [1, 2] описано оптимальное (в смысле обладания наибольшей энергией в главном лепестке при заданной амплитуде боковых) семейство "окон" Кайзера

$$\omega_4(n) = \frac{I_0 \left\{ \omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2} \right\}}{I_0 \left[ \omega_a \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}, \quad (5.12)$$

где  $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (x/2)^k / k! \right]$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Параметр  $\omega_a$  подбирается так, чтобы обеспечить компромисс между шириной главного лепестка и амплитудой бокового лепестка. Обычно  $4 < \omega_a \frac{N-1}{2} < 9$  [2].

Спектральный анализ случайных процессов на основе ДПФ-БПФ проводится поэтапно [3].

1. По заданной разрешающей способности по частоте  $\Delta f$  выбирают интервал наблюдения  $\theta = k_0/\Delta f$ ,  $k_0$  – коэффициент, определяемый видом окна.

2. Находят число отсчетов реализации  $x(n)$  на интервале наблюдения  $N = \lceil \theta/T \rceil$  и дополняют нулями до  $N=2^i$ .

3. Вычисляют спектр ДПФ взвешенной реализации  $x_r(n)\omega(n)$  на  $r$ -м интервале наблюдения:

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n)\omega(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; r = 1, \dots, M. \quad (5.13)$$

4. В качестве характеристики спектральной плотности реализации определяют периодограмму

$$I_r(k) = \frac{|X_r(k)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.14)$$

5. Находят спектральную плотность ДП  $x(n)$  путем усреднения периодограмм по множеству  $M$  реализаций:

$$\hat{S}_x(f_k) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M I_r(k), \quad f_k = k/N. \quad (5.15)$$

Дисперсия оценки  $\hat{S}_x$  уменьшается с ростом количества  $M$  усредняемых периодограмм.

## 5.2. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 5.

### Задание 2

Рассчитайте и постройте АЧХ "гребенки" фильтра ДПФ размерности  $N=N_{\text{вар}} \pm$  дополнение до  $2i$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта),  $N \geq 4$ , задавая центральные частоты "зубцов"  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Покажите эффекты "растекания" спектра.

### Задание 3

Рассчитайте и постройте импульсную характеристику  $k$ -го канала фильтра ДПФ размерности  $N=N_{\text{вар}} \pm$  дополнение до  $2i$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта),  $k=N/4$ .

### Задание 4

Рассчитайте и постройте графики функций "окон"  $\omega_{1-4}(n)$  при  $N=N_{\text{вар}} \pm$  дополнение до  $2i$  ( $N_{\text{вар}}$  – номер варианта),  $N \geq 4$ .

## 5.3. Контрольные вопросы

1. Докажите, что процедура ДПФ эквивалентна многоканальному гребенчатому фильтру.

2. Как определить частотную характеристику фильтра на основе процедуры ДПФ?

3. Каковы избирательные свойства одного канала спектроанализатора на основе ДПФ?

4. В чем заключается отрицательное влияние конечной ширины главного лепестка и боковых лепестков в АЧХ спектроанализатора на основе ДПФ? Опишите эффекты "растекания" и "маскировки" спектра.

5. Для чего производится взвешивание ДП при дискретном спектральном анализе?

6. Сформулируйте требования к характеристикам "окон" спектроанализатора ДПФ и приведите примеры "хороших окон".

7. Опишите этапы спектрального анализа на основе ДПФ (БПФ).

#### **5.4. Ссылки на используемую литературу**

[1, с. 394 – 431; 3, с. 219 – 227; 4, с. 46 – 48].

---

---

## 6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

---

### 6.1. Общие сведения

*Дискретный случайный процесс (случайный временной ряд, случайная решетчатая функция)* – индексированное семейство случайных величин  $\{x_n\}$ . Оно характеризуется совокупностью функций распределения вероятностей, которые в общем случае могут быть функцией индекса  $n$ . Величина  $x_n$  при этом может быть непрерывной или квантованной.

Функция распределения вероятности отдельной случайной величины

$$P_{x_n}(X_n, n) = \text{вероятность } [x_n \leq X_n], \quad (6.1)$$

где  $X_n$  – частное значение случайной величины  $x_n$ ;  $n$  – дискретное время.

Если  $x_n$  принимает непрерывный ряд значений, то ее плотность вероятностей

$$\omega_{x_n}(X_n, n) = \partial P_{x_n}(X_n, n) / \partial X_n; \quad (6.2)$$

$$P_{x_n}(X_n, n) = \int_{-\infty}^{X_n} \omega_{x_n}(X_n, n) dx_n. \quad (6.3)$$

Для квантованной по уровню с шагом  $h$  случайной величины  $x_k = kh$ ,  $k=0, 1, \dots, M-1$

$$P_{x_k}(X_k, k) = \text{вероятность } [x_k = X_k] = \sum_{x=X_k} \omega_{x_k}(x_k, k). \quad (6.4)$$

Взаимная зависимость двух случайных величин  $x_n$  и  $x_m$  описывается функцией совместного распределения вероятности

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \text{вероятность } [x_n \leq X_n, x_m \leq X_m]. \quad (6.5)$$

Для непрерывных случайных величин совместная плотность вероятности

$$\omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = [\partial^2 P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m)] / \partial X_n \partial X_m, \quad (6.6)$$

для квантованных случайных величин

$$\omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \text{вероятность } [x_n = X_n, x_m = X_m], \quad (6.7)$$

для статистически независимых случайных величин

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = P_{X_n}(X_n, n) \cdot P_{X_m}(X_m, m). \quad (6.8)$$

При отсутствии зависимости функции вероятности от сдвига начала отсчета по времени случайный процесс называется *стационарным*. Например, двумерное распределение стационарного случайного процесса удовлетворяет условию

$$P_{x_{n+k}, x_{m+k}}(X_{n+k}, n+k, X_{m+k}, m+k) = P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m).$$

## 6.2. Практические описания дискретных случайных процессов

В общем случае характеристиками случайных процессов являются *начальные* (описывают положение кривой распределения  $\omega_{x_n}$  относительно координатной оси) и *центральные моменты* (описывают отклонения  $\omega_{x_n}$  от центра тяжести (среднего)). На практике чаще используют для анализа случайных величин их математические ожидания, дисперсии, функции корреляции и энергетические спектры. Определим их для стационарных и эргодических процессов (для которых статистические характеристики совпадают при усреднении по времени и ансамблю).

*Математическое ожидание (среднее)* – первый начальный момент:

$$m_{1x_n} = E[x_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n \omega_{x_n}(x_n, n) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT), \quad (6.9)$$

где  $E[\cdot]$  – символ усреднения.

Для квантованных случайных величин

$$m_{1x_k} = \sum_{x_k} x_k \omega_{x_k}(x_k, k), \quad k=0, 1, \dots, M-1. \quad (6.10)$$

Математическому ожиданию присущи свойства

$$m_1[x_n + y_n] = m_1[x_n] + m_1[y_n] \quad \text{и} \quad m_1[ax_n] = am_1[x_n]. \quad (6.11)$$

Среднее значение произведения двух случайных величин равно произведению их средних только для статистически независимых (некоррелированных) процессов:

$$m_1[x_n y_m] = m_1[x_n] m_1[y_m]. \quad (6.12)$$

Если известна реализация случайной последовательности в виде  $N$  отсчетов, оценкой математического ожидания является *выборочное среднее*

$$\hat{m}_{1x_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT). \quad (6.13)$$

**Средний квадрат** – второй начальный момент:

$$m_{2x_n} = E[x_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.14)$$

**Дисперсия (средний квадрат отклонений)** – второй центральный момент:

$$D_{x_n} = M_2(x_n) = \sigma_{x_n}^2 = E[(x_n - m_{1x_n})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - m_{1x_n})^2 \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.15)$$

Из (6.10) и (6.14) следует, что

$$\sigma_{x_n}^2 = E[x_n^2] - m_{1x_n}^2 = m_{2x_n} - m_{1x_n}^2. \quad (6.16)$$

В общем случае  $m_{1x_n}$ ,  $m_{2x_n}$ ,  $M_{2x_n}$  – функции времени, которые постоянны только для стационарных процессов.

Для реализации случайной ДП из  $N$  отсчетов оценкой дисперсии является **выборочная дисперсия**:

$$\hat{D}_{x_n} = \hat{\sigma}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(nT) - \hat{m}_{1x_n}]^2. \quad (6.17)$$

Величина  $\sigma_{x_n}$  называется среднеквадратическим отклонением.

Среднее значение, средний квадрат и дисперсия дают небольшое количество информации о случайном процессе. Более полезная характеристика – **автокорреляционная (взаимнокорреляционная) функция**, являющаяся мерой зависимости между значениями случайного процесса (двух различных случайных процессов) в различные моменты времени  $n$  и  $m$ .

**Дискретная автокорреляционная функция** определяется как

$$R_{xx}(n, m) = E[x_n x_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* \omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) dx_n dx_m. \quad (6.18)$$

В общем случае автокорреляционная последовательность – двумерная функция.

Мера зависимости между двумя различными случайными ДП  $\{x(n)\}$  и  $\{y(n)\}$  описывается **взаимнокорреляционной функцией**

$$R_{xy}(n, m) = E[x_n y_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^* \omega_{x_n, y_m}(X_n, n, Y_m, m) dx dy. \quad (6.19)$$

Для  $N$ -периодической эргодической ДП АКФ вычисляется согласно (3.10) – (3.12), энергетический спектр как ДПФ от АКФ находится по (3.13). Для двух  $N$ -периодических случайных ДП пара ДПФ и ОДПФ определяет взаимный энергетический спектр (3.15) и взаимную корреляционную функцию (3.16).

Развитием корреляционной функции является **ковариация**. **Автоковариационная функция** (АКВФ) определяется как [15]

$$v_{xx}(n, m) = E[(x_n - m_{1x_n})(x_m - m_{1x_m})^*] = R_{xx}(n, m) - m_{1x_n} m_{1x_m}. \quad (6.20)$$

Если  $x_n, n=1, 2, \dots, N$ , – множество  $N$  случайных величин, то  $\mathbf{X}=[x_1, \dots, x_N]^T$  – случайный вектор, ковариация которого

$$v_{xx} = E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T], \quad (6.21)$$

где  $\bar{\mathbf{X}}$  – средний вектор  $E(\mathbf{X})$ . Тогда

$$\begin{aligned} v_{xx} &= E \left\{ \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1}) \\ \dots \\ (x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1}) \dots (x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \right\} = \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1})(x_1 - m_{1x_1}) \dots (x_1 - m_{1x_1})(x_N - m_{1x_N}) \\ \dots \\ (x_N - m_{1x_N})(x_1 - m_{1x_1}) \dots (x_N - m_{1x_N})(x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} E[(x_1 - m_{1x_1})(x_1 - m_{1x_1})] \dots E[(x_1 - m_{1x_1})(x_N - m_{1x_N})] \\ \dots \\ E[(x_N - m_{1x_N})(x_1 - m_{1x_1})] \dots E[(x_N - m_{1x_N})(x_N - m_{1x_N})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \sigma_{12}^2 \dots \sigma_{1N}^2 \\ \sigma_{21}^2 \sigma_{22}^2 \dots \sigma_{2N}^2 \\ \sigma_{N1}^2 \sigma_{N2}^2 \dots \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.22) \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}^2 = E[(x_i - m_{1x_i})(x_j - m_{1x_j})]$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ .

Из (6.22) следует, что диагональные элементы ковариационной матрицы являются дисперсиями отдельных случайных величин, а каждый внедиагональный элемент соответствует ковариации двух случайных величин  $x_i$  и  $x_j$ .

В общем виде взаимноковариационная функция (ВКВФ) двух ДП  $\{x(n)\}$  и  $\{y(n)\}$  определяется как

$$v_{xy}(n, m) = E[(x_n - m_{1x_n})(y_m - m_{1y_m})^*] = R_{xy}(n, m) - m_{1x_n} m_{1y_m}. \quad (6.23)$$

### Пример

Определим статистические характеристики дискретного случайного процесса Бернулли, представляющего исходы при подбрасывании монеты:  $x_n=+1$  (выпадение герба) и  $x_n=-1$  (выпадение решки). Пусть вероятность выпадения герба  $p$ , тогда вероятность выпадения решки  $1-p$ . Процесс Бер-

нулли стационарный, так как вероятности событий  $+1$  и  $-1$  независимы от времени и случайные величины  $\{x_n\}$  статистически независимы. На практике мы используем отдельную ДП конечной длины  $N$  (реализацию  $\{x_n\}_N$ ) из ансамбля выборочных последовательностей бесконечного случайного процесса  $\{x(n)\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ . Заметим, что в данном примере случайные величины квантованы (принимают конечное число значений, равное двум), поэтому функция распределения вероятностей имеет вид

$$P_{x_n}(X_n, n) = \begin{cases} 1, & X_n \geq 1, \\ 1-p, & -1 \leq X_n \leq 1, \\ 0, & X_n < -1. \end{cases}$$

Так как производной не существует, вероятностную меру квантованной случайной величины определяем в виде

$$\omega_{x_n}(X_n, n) = \text{вероятность } [x_n = X_n].$$

$$\text{Среднее значение } m_{1x_n} = +1p + (-1)(1-p) = 2p - 1.$$

$$\text{Средний квадрат } m_{2x_n} = E[x_n^2] = (+1)^2 p + (-1)^2 (1-p) = 1.$$

$$\text{Дисперсия } \sigma_{x_n}^2 = M_{2x_n} - m_{1x_n}^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1-p).$$

Поскольку значения  $x_n$  статистически независимы, автокорреляционная последовательность

$$R_{xx}(m) = \begin{cases} E[x_n^2] = 1, & m = 0; \\ E[x_n] E[x_{n+m}] = m_{1x_n}^2, & m \neq 0. \end{cases}$$

В частном случае, если  $p=0,5$ , то  $m_{1x_n} = 0$ ,  $R_{xx}(m) = \delta(m)$ , т. е. такой дискретный процесс Бернулли близок по свойствам к белому шуму (все случайные величины  $x_n$  некоррелированы).

### 6.3. Моделирование случайных процессов на ЭВМ

В программном обеспечении ЭВМ, как правило, есть датчик случайных чисел с *равномерным* распределением вероятностей  $\omega(x)=1$  на интервале  $x \in [0, 1]$ . Статистические характеристики этих чисел следующие:

$$m_1(x) = \int_0^1 x \omega(x) dx = 0,5, \quad m_2(x) = \int_0^1 x^2 \omega(x) dx = \frac{1}{3};$$

$$M_2(x) = D(x) = \sigma_x^2 = m_1 \{ [x - m_1(x)]^2 \} dx = \frac{1}{12}.$$

Числа с равномерным распределением используют как исходные при моделировании случайных чисел с различными плотностями распределения вероятностей.

**ЗАКОН 1.** Случайные числа с *нормальным* распределением генерируют из последовательности, имеющей равномерное распределение  $\omega(x)=1$ ,  $x \in [0, 1]$ , на основе центральной предельной теоремы:

$$x_{нк}(n) = \sum_{i=1}^n x_i, n \rightarrow \infty.$$

Практически уже при  $n \geq 8$  распределение чисел  $x_n$  не отличается от нормального [9]. При этом плотность вероятностей

$$\omega_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_n}^2}} e^{-\frac{(x_n - m_1(x_n))^2}{2\sigma_{x_n}^2}}. \quad (6.24)$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы  $n$  случайных независимых чисел с равномерным распределением следующие:

$$\left. \begin{aligned} m_1(x_n) &= E \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] = nm_1(x) = n/2, \\ D(x_n) &= \sum_{i=1}^n D(x_i) = nD(x) = n/12. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

С учетом (6.24) и значений из (6.25) окончательное выражение для плотности имеет вид

$$\omega_1(x_n) = \sqrt{\frac{6}{\pi n}} e^{-\frac{6(x_{нк} - 0,5n)^2}{n}}. \quad (6.26)$$

Для нормально распределенных чисел со стандартными параметрами ( $m_1(x)=0$ ,  $D(x)=1$ ) каждое число центрируется (уменьшается в  $\sqrt{D}$  раз). Тогда алгоритм формирования случайных чисел с нормальным распределением приводится к виду

$$x_{нк} = \sqrt{\frac{12}{n}} \left[ \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \right\}_k - \frac{n}{2} \right]. \quad (6.27)$$

**ЗАКОН 2.** Случайные числа с *плотностью распределения Релея* получают на основе преобразования случайных чисел  $x$  и  $y$  с нормальным законом распределения согласно выражениям

$$x_p = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad (6.28)$$

$$\omega_2(x_p) = \frac{x_p}{\sigma^2} e^{-\frac{x_p^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.29)$$

**ЗАКОН 3.** Смещение одного из исходных нормально распределенных чисел  $x$  или  $y$  на величину  $a$  позволяет реализовать алгоритм формирования случайных чисел  $x_{pc}$  с плотностью распределения по **закону Райса**:

$$x_{pc} = \sqrt{(x_H + a)^2 + y_H^2}, \quad (6.30)$$

$$\omega_3(x_{pc}) = \frac{x_{pc}}{\sigma^2} e^{-\frac{x_{pc}^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ax_{pc}}{\sigma^2}\right). \quad (6.31)$$

**ЗАКОН 4.** Преобразование  $x_3 = x_H^2 + y_H^2$  позволяет получить случайные числа с **экспоненциальным законом** распределения

$$\omega_4(x_3) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x_3}{2\sigma^2}}. \quad (6.32)$$

**ЗАКОН 5.** Сумма квадратов из случайных чисел с нормальным законом распределения определяет числа с **распределением  $\chi^2$**  и  $m$  степенями свободы:

$$\left. \begin{aligned} x_\chi &= \sum_{i=1}^m x_{H_i}^2, \\ \omega_5(x_\chi) &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sigma^2} \left(\frac{x_\chi}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x_\chi}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Случайные числа  $\{x(k)\}$  с заданными законами распределения преобразуются во временную ДП согласно соотношению

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k). \quad (6.34)$$

## 6.4. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Изучите вопросы, касающиеся описания и моделирования случайных ДП по [2, с. 265 – 273; 3, с. 44 – 46].

## Задание 2

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 6.

### 6.5. Контрольные вопросы

1. Чем отличается функция распределения вероятностей случайной величины от плотности вероятностей? Объясните это на примере нормального распределения. Дайте определение характеристикам случайных процессов.
2. Что такое совместная плотность распределения вероятностей?
3. Как описывается распределение вероятностей квантованной случайной величины?
4. Дайте определение стационарного случайного процесса.
5. Рассчитайте и постройте графики плотностей вероятностей случайных чисел  $x \in [0, 1]$ , распределенных по законам 1 – 5, при  $m_{1x} = N_{\text{вар}}/32$ ,  $M_{2x} = N_{\text{вар}}/64$ ,  $a = N_{\text{вар}}/128$ ,  $m = 256$ .
6. Как определить математическое ожидание и дисперсию случайной ДП конечной длины  $N = 100N_{\text{вар}}$  ?
7. Что характеризует АКФ случайного процесса? Сравните АКФ белого шума и узкополосного случайного процесса.
8. Чем различаются АКФ и АКВФ? Что позволяет оценить АКВФ?
9. Изобразите реализацию дискретного случайного процесса Бернулли и функцию распределения вероятностей.
10. Составьте блок-схему программы генерирования на ЭВМ случайных чисел с распределением по законам Гаусса, Релея, Райса и экспоненты.

### 6.6. Ссылки на используемую литературу

[1, с. 626 – 631; 2, с. 263 – 283; 3, с. 44 – 46; 6, с. 5 – 10].

---

---

## 7. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. КЕПСТРЫ

---

### 7.1. Общие сведения

Гомоморфные системы составляют класс *нелинейных* систем, подчиняющихся *обобщенному принципу суперпозиции*:

$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \circ H[x_2(n)], \quad (7.1)$$

$$H[C : x_1(n)] = C \cup [x_1(n)], \quad (7.2)$$

где  $H$  – оператор обработки;  $\circ$  и  $\square$  – входная и выходная операции соответственно, « $:$ » и  $\cup$  – правила объединения входных и выходных сигналов со скаляром  $C$  соответственно.

*Линейные* системы – частный случай гомоморфных, для которого  $\square = \circ = +$ ,  $:$  =  $\cup = \times$ .

Каноническое представление гомоморфных систем (фильтров)

$$x(n) \rightarrow \square [D_{\square}[x(n)]^+ = \hat{x}(n) \rightarrow^+ L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \rightarrow^+ D_{\circ}^{-1}[\hat{y}(n)]^{\circ} = y(n) \quad (7.3)$$

включает в себя характеристическую систему для операции  $\square$ :

$$D_{\square}[x_1(n) \square x_2(n)] = D_{\square}[x_1(n)] + D_{\square}[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n), \quad (7.4)$$

$$D_{\square}[C : x_1(n)] = C D_{\square}[x_1(n)] = C \hat{x}_1(n), \quad (7.5)$$

*линейную* систему, удовлетворяющую условиям

$$L[\hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)] = L[\hat{x}_1(n)] + L[\hat{x}_2(n)] = \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n), \quad (7.6)$$

$$L[C \hat{x}(n)] = C L[\hat{x}(n)], \quad (7.7)$$

характеристическую систему  $D_{\circ}^{-1}$  (обратную  $D$ ) для операции  $\circ$

$$D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n)] = D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n)] \circ D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_2(n)] = y_1(n) \circ y_2(n), \quad (7.8)$$

$$D_{\circ}^{-1}[C : \hat{y}_1(n)] = C \cup D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n)] = C \cup y_1(n). \quad (7.9)$$

Таким образом, чтобы полностью разделять сигналы  $x_1(n)$  и  $x(n)$ , необходимо иметь возможность полностью разделять сигналы  $\hat{x}_1(n)$  и  $\hat{x}_2(n)$  с помощью линейного фильтра.

В практических приложениях наиболее распространены гомоморфные системы с операциями умножения и свертки.

## 7.2. Мультипликативные гомоморфные системы

Рассмотрим сигнал вида

$$x(n) = [x_1(n)]^\alpha \cdot [x_2(n)]^\beta, \quad (7.10)$$

для которого характеристическая система должна удовлетворять условию

$$D\{[x_1(n)]^\alpha \cdot [x_2(n)]^\beta\} = \alpha D[x_1(n)] + \beta D[x_2(n)]. \quad (7.11)$$

Функция, удовлетворяющая этому условию, логарифмическая, так как  $\log[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \log[x_1(n)] + \log[x_2(n)]$ .

Отсюда с учетом возможной неположительности  $x_{1,2}(n)$  вытекает вид *канонической* формы *гомоморфной* системы *с умножением*

$$x(n) \rightarrow \boxed{\log[x(n)]^+ = \hat{x}(n) \rightarrow^+ L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \rightarrow^+ \exp[\hat{y}(n)]} = y(n), \quad (7.12)$$

где  $x(n)$ ,  $\hat{x}(n)$ ,  $y(n)$  и  $\hat{y}(n)$  – в общем случае комплексные последовательности типа  $\dot{x}(n) = |\dot{x}(n)|e^{j \arg[\dot{x}(n)]}$ .

Логарифматор формирует сигнал  $\log[\dot{x}(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)$ , аддитивные компоненты которого можно разделить линейным фильтром  $L$ . Блок вычисления экспоненты вырабатывает сигнал  $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ .

Система  $D$  вычисляет комплексный логарифм

$$\hat{x}(n) = \log[\dot{x}(n)] = \log|\dot{x}(n)| + j \arg[\dot{x}(n)] \pm m2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.13)$$

Система  $D^{-1}$  вычисляет обратную  $\log[x(n)]$  функцию:

$$e^{\log[\dot{x}(n)]} = e^{\log|\dot{x}(n)| + j \arg[\dot{x}(n)] \pm m2\pi}. \quad (7.14)$$

Так как комплексный логарифм – неоднозначная функция, необходимо  $\arg[x(n)]$  выбрать так, чтобы не было неоднозначности. Кроме того,  $\log[\dot{x}(n)]$  надо определить так, чтобы для  $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  удовлетворялся обобщенный принцип суперпозиции:  $\log[x(n)] = \log[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \log[x_1(n)] + \log[x_2(n)]$ , откуда

$$\log[\dot{x}(n)] = \log|\dot{x}_1(n)| + \log|\dot{x}_2(n)|, \quad (7.15)$$

$$\arg[\dot{x}(n)] = \arg[\dot{x}_1(n)] + \arg[\dot{x}_2(n)]. \quad (7.16)$$

Чтобы устранить неоднозначность в (7.16), необходимо, чтобы  $\arg[\dot{x}]$  был непрерывной функцией  $x$ .

Гомоморфная обработка мультипликативных сигналов  $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  целесообразна тогда, когда одна компонента меняется медленно, а другая

быстро. Это позволяет легко разделить локализованные спектры сигналов  $\hat{x}_1(n)$  и  $\hat{x}_2(n)$  с помощью линейного фильтра [18]. Отсюда целесообразно применение гомоморфных систем с умножением при обработке сигналов радиосвязи. Мультипликативные гомоморфные системы полезны при сжатии динамического диапазона звуковых сигналов и при обработке сигналов изображения, когда применение линейных систем неэффективно [1 – 4].

### 7.3. Гомоморфные системы относительно свертки

Сигналы объединяются с помощью *свертки*

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n) \quad (7.17)$$

в системах радиосвязи, радионавигации, звукозаписи, где свертывается сигнал с шумом или откликом тракта передачи. При сложении независимых случайных процессов свертываются плотности вероятностей. Свертываются также сейсмические сигналы при распространении по земле.

*Каноническая форма гомоморфных фильтров для свертки*

$$x(n) \rightarrow \left[ D_*[x(n)]^+ = \hat{x}(n) \rightarrow^+ L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \rightarrow^+ D_*^{-1}[\hat{y}(n)]^+ \right]^* = y(n) \quad (7.18)$$

включает характеристическую систему со свойствами:

$$D_*[x_1(n) * x_2(n)] = D_*[x_1(n)] + D_*[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n), \quad (7.19)$$

$$D_*[C : x_1(n)] = C D_*[x_1(n)] = C \hat{x}_1(n), \quad (7.20)$$

линейную систему  $L$  (для временной селекции  $x_1(n)$  или  $x_2(n)$ ) и систему  $D_*^{-1}$ , обратную системе  $D_*$ .

Если представить сигналы их  $Z$ -образами, можно преобразовать свертку в произведение  $[x(n) = x_1(n) * x_2(n) \rightarrow X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)]$ . Тогда каноническая система (7.18) заменяется системой

$$\underbrace{X(z) \rightarrow \log[X(z)] = \hat{X}(z)}_{D_*} \rightarrow L[\hat{X}(z)] = \hat{Y} \rightarrow \underbrace{\exp[\hat{Y}(z)] = Y(z)}_{D_*^{-1}}. \quad (7.21)$$

Так как  $X(z)$  обычно комплексная функция, необходимо использовать комплексный логарифм и решить проблему его неоднозначности: для  $X(z) = X_1(z)X_2(z)$  обеспечить  $\hat{X}(z) = \log[X_1(z)X_2(z)] = \log[X_1(z)] + \log[X_2(z)]$ .

Если входные сигналы – дискретные последовательности, то характеристическая система  $D^*$  представляется в виде

$$x(n) \xrightarrow{Z_{+1}} X(z) \xrightarrow{\bullet \log[\dot{X}(z)]^+} \hat{X}(z) \xrightarrow{Z_{-1}} \hat{x}(n). \quad (7.22)$$

В плоскости  $Z$  на единичной окружности  $\hat{X}(z) = \hat{X}(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ . Если  $\hat{x}(n)$  – действительная ДП, то  $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$  – четная, а  $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$  – нечетная функции  $\omega$  с периодом  $2\pi$ . Так как  $\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]$ , то  $X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})|$ ,  $X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \arg X(e^{j\omega})$  должны быть непрерывными функциями  $\omega$ .

Обратная характеристическая система  $D_*^{-1}$  имеет вид

$$\hat{y}(n) \xrightarrow{Z_{+1}} \hat{Y}(z)^+ \xrightarrow{+} \exp[\hat{Y}(z)] = Y(z) \xrightarrow{Z_{-1}} y(n). \quad (7.23)$$

В гомоморфных системах относительно свертки используют инвариантные по частоте линейные системы  $L$ , для которых

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\Theta}) L(e^{j(\omega-\Theta)}) d\Theta, \quad (7.24)$$

что соответствует во временной области преобразованию

$$\hat{y}(n) = l(n) \hat{x}(n), \quad (7.25)$$

где  $l(n)$  – обратная к  $L(e^{j\omega})$  процедура.

Так как  $x(n)$ ,  $\hat{x}(n)$ ,  $\hat{y}(n)$  и  $y(n)$  предполагаются действительными и устойчивыми ДП, то  $l(n)$  должна быть действительной и устойчивой ДП, а область сходимости  $L(z)$  – содержать единичную окружность. Действительная и мнимая части  $L(e^{j\omega})$  будут соответственно четной и нечетной функциями  $\omega$ .

#### 7.4. Реализация характеристической системы $D^*$

Будем рассматривать класс минимально-фазовых ДП, для которых нули и полюсы находятся внутри единичного круга плоскости  $Z$ . Для них  $x(n)$  и  $\hat{x}(n)$  физически реализуемы, т.е.  $x(n) = \hat{x}(n) = 0$  при  $n < 0$ . Тогда  $Z$ -преобразование  $\hat{x}(n)$  полностью определяется вещественной частью преобразования Фурье (ПФ), и для получения  $\hat{x}(n)$  нужно также вычислить  $\hat{X}_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})|$ . Обратное преобразование Фурье (ОПФ) от

$\hat{X}_{\text{Re}}(e^{j\omega})$  равно четной части  $\hat{x}(n)$ , которая обозначается как  $C(n) = [\hat{x}(n) + \hat{x}(-n)]/2$ , и называется **кепстром** входного сигнала  $x(n)$  [1, 2]. Так как  $\hat{x}(n) = 0$  при  $n < 0$ ,

$$\hat{x}(n) = C(n)U_+(n), \quad U_+(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 2, & n > 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Отсюда вытекает последовательность процедур системы  $D_*$ :

$$x(n) \xrightarrow{\text{ПФ}} X(e^{j\omega}) \rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) = \log |X(e^{j\omega})| \xrightarrow{\text{ОПФ}} C(n) \rightarrow \otimes \rightarrow \hat{x}(n). \quad (7.27)$$

$\uparrow$   
 $U_+(n)$

Численная реализация на ЭВМ процедуры вычисления кепстра минимально-фазовой ДП  $x(n)$  конечной длины  $N$  с использованием ДПФ имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = \sum_{n=-\infty}^{M-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \\ \hat{X}_{\text{Re}}(k) = \log |X(k)|, \\ C_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{M-1} \hat{X}_{\text{Re}}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(n \pm mN), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (7.28)$$

Для вычисления комплексного кепстра по  $C_p(n)$  необходимо найти

$$\hat{x}_{cp}(n) = \begin{cases} C_p(n), & n = 0, \frac{N}{2}, \\ 2C_p(n), & 1 \leq n < \frac{N}{2}, \\ 0, & \frac{N}{2} < n \leq N-1. \end{cases} \quad (7.29)$$

При большом  $N$   $\hat{x}_{cp}(n)$  незначительно отличается от  $\hat{x}(n)$ .

Проблему вычисления комплексного логарифма можно исключить, определяя кепстр на основе логарифмической производной [2]. Но это достигается ценой сильного эффекта наложения.

Следует заметить, что комплексный кепстр вычисляется при выявлении формы сигналов (учитываются их фазовые характеристики). В задачах, требующих определения задержки и относительного уровня отражен-

ного сигнала, достаточно вычислить кепстр по (7.28) или связанный с ним кепстр мощности

$$C_s(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{N-1} \ln |X(k)|^2 e^{j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad m = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (7.30)$$

## 7.5. Пример вычисления кепстра с отражением

В задачах радионавигации возникает проблема приема сигнала, пораженного зеркальным отражением от доминирующих (локализованных) объектов в зоне действия радиомаяков [8, 10, 17]. В этом случае цифровой бортовой подсистемой обрабатывается в дискретном времени  $n=t/T=0, 1, 2, 3, \dots$  процесс

$$x(n) = s(n) + \sum_{i=1}^M p_i s(n - n_i) = s(n) * h(n), \quad (7.31)$$

являющийся суммой полезного сигнала радиомаяка  $s(n)$  и  $M$  задержанных (отраженных с коэффициентом  $P_i$ ) копий, что эквивалентно свертке сигнала  $s(n)$  и импульсного отклика канала (ИОК) распространения радиосигнала

$$h(n) = \delta(n) + \sum_{i=1}^M p_i \delta(n - n_i) = \delta(n) + p_1 \delta(n - n_1) + p_2 \delta(n - n_2) + \dots \quad (7.32)$$

Частотная характеристика канала в дискретных точках  $k=\omega/\Delta\omega=0, 1, 2, \dots$  находится как ДПФ от ИОК:

$$H(k) = 1 + p_1 e^{-j \frac{2\pi}{N} n_1 k} + p_2 e^{-j \frac{2\pi}{N} n_2 k} + \dots = \sum_{i=0}^{M-1} p_i e^{-j \frac{2\pi}{N} n_i k}, \quad p_0 = 1. \quad (7.33)$$

Процедура разрешения (разделения) полезного сигнала со спектром  $S(k)$  и отражения выполняется по схеме

$$\begin{aligned} x(n) = s(n) * h(n) &\xrightarrow{\text{ДПФ}} X(k) = S(k)H(k) \xrightarrow{\log} \ln |X(k)| = \\ &= \ln S(k) + \ln H(k) \xrightarrow{\text{ОДПФ}} \hat{x}(m) = \hat{s}(m) + \hat{h}(m), \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\text{где } \hat{s}(m) = F_{-1} [\ln |S(k)|] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln S(k) e^{j \frac{2\pi}{N} mk}, \quad \hat{h}(m) = F_{-1} [\ln |H(k)|] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\ln |H(k)|] e^{j \frac{2\pi}{N} mk} \quad - \text{соответственно кепстр сигнала и ИОК, определенные в новом дискретном времени } m=\Delta t/T=0, 1, 2, \dots$$

Поскольку логарифм спектра сигнала, содержащего отраженную копию, включает аддитивную периодическую компоненту, созданную этой копией, обратное преобразование Фурье от логарифма спектра имеет пики в точках, соответствующих задержке отраженного сигнала [8]. Покажем это на примере сигнала, пораженного одним “несильным” отражением ( $M=1, p_1 < 1$ ). В этом случае  $x(n) = s(n) + p_1 s(n - n_1)$  и

$$\ln|H(k)| = \ln(1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1 k}) \approx p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1 k} - \frac{1}{2} p_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{N}2n_1 k} + \frac{1}{3} p_1^3 e^{-j\frac{2\pi}{N}3n_1 k} - \dots$$

Тогда кепстр  $x(n) \approx s(n) * h(n)$  со спектром

$$X(k) = S(k)H(k) = S(k)(1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1 k}) \text{ определяется выражением}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(m) &= F_{-1}[\ln|H(k)|] = F_{-1}[\ln|S(k)| + \ln|H(k)|] = \\ &= \hat{s}(m) + F_{-1}[\ln|H(k)|] = \hat{s}(m) + p_1 \delta(m - n_1) - \frac{1}{2} p_1^2 \delta(m - 2n_1) + \\ &+ \frac{1}{3} p_1^3 \delta(m - 3n_1) - \dots \end{aligned}$$

Видно, что кепстр сигнала с отражением (сигнала, свернутого с ИОК) содержит  $\delta$ -образные периодические пики, определяющие задержку отражения  $n_1$  и интенсивность амплитуды его первого пика  $p_1$ .

Эти особенности кепстра обуславливают следующие возможности гомоморфной обработки навигационных сигналов:

- обнаружение отражения (по критерию более одного пересечения заданного порога);
- разрешение сигнала и его отражение с помощью линейных фильтров по глубине “провала” в кепстре  $\hat{x}(m)$ ;
- оценку параметров отражения (уровня и задержки относительно полезного сигнала);
- компенсацию отражения (восстановление “образа” сигнала на фоне отражения).

Достоинства гомоморфной обработки – инвариантность к форме сигнала и цифровая реализация на ЭВМ с использованием быстрых алгоритмов Фурье.

Недостатки связаны с широкополосностью обработки:

- сильная зависимость кепстра от шумов [13, 17];
- сложность реализации в радиодиапазоне.

## 7.6. Самоподготовка и самоконтроль

### Задание 1

Изучите принципы и особенности гомоморфной обработки по [1, с. 360 – 364; 2, с. 340 – 380; 8, с. 68 – 79].

### Задание 2

Ответьте письменно на контрольные вопросы по теме 7.

## 7.7. Контрольные вопросы

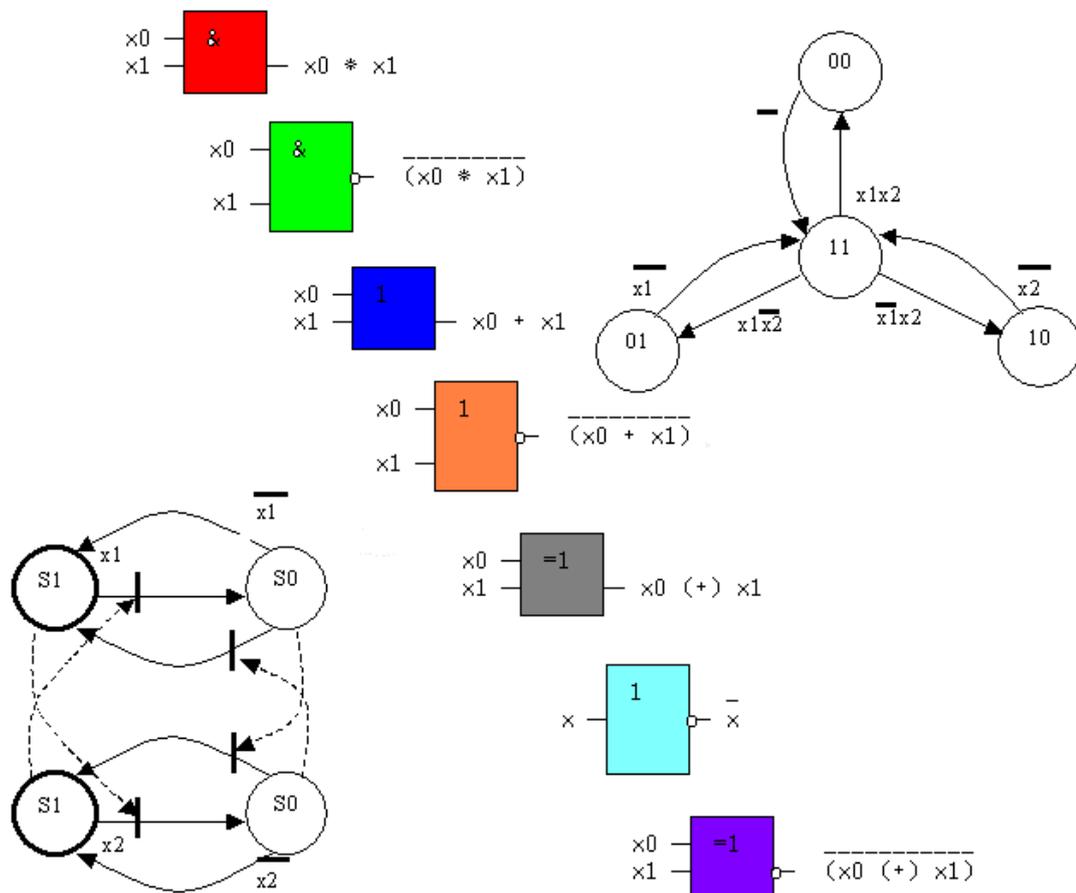
1. В чем заключается обобщенный принцип суперпозиции?
2. Дайте аналитическое определение гомоморфной системы.
3. В каких случаях гомоморфная система превращается в линейную?
4. Нарисуйте структурную схему гомоморфной системы с указанием входных, промежуточных и выходных сигналов.
5. Дайте аналитическое определение прямой и обратной характеристических систем.
6. Объясните назначение линейной системы в составе гомоморфной.
7. Какова роль Фурье- и  $Z$ -преобразования при анализе гомоморфной системы?
8. Запишите правило функционирования, нарисуйте структурную схему и объясните назначение отдельных звеньев гомоморфной системы обработки мультипликативных сигналов.
9. Объясните назначение комплексного логарифмирования в гомоморфных системах с умножением сигналов.
10. Укажите области применения мультипликативных гомоморфных систем.
11. Запишите аналитически правило функционирования гомоморфных систем относительно свертки, нарисуйте структурную схему гомоморфной обработки и объясните назначение отдельных звеньев.
12. Запишите алгоритм вычисления кепстра. Каковы особенности вычисления кепстра на ЭВМ?
13. Дайте определение кепстра мощности.
14. Приведите пример вычисления кепстра навигационного сигнала. Нарисуйте график кепстра сигнала с отражением.

## 7.8. Ссылки на используемую литературу

[1 – 5].

---

# ТЕОРИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И АВТОМАТОВ



---

## 8. ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ . ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

---

### 8.1. Логические переменные и переключательные функции

Аппарат алгебры логики, или *булевой алгебры* (Дж. Буль, 1815 – 1864) используется для формального описания цифровых устройств.

Основное понятие алгебры логики – *высказывание* как некое предложение, о котором можно сказать только истинно оно ( $x = 1$ , true) или ложно ( $x = 0$ , false). В этой связи *переменные* называют *логическими*, если они принимают только два значения: 0 и 1.

Переключательной функцией (ПФ) выражается более сложное высказывание, зависящее от нескольких переменных.

*Переключательной* называется функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , принимающая значение 0 или 1 на наборах логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (*набор – совокупность аргументов  $x_i$* ).

Для  $n$  переменных (аргументов) число наборов конечно и равно  $2^n$  (от 00...0 до 11...1). Поскольку на любом наборе ПФ может принимать значение 0 или 1, то число возможных ПФ от  $n$  аргументов будет  $2^N$ , где  $N=2^n$  – число наборов. Таким образом, число возможных ПФ для  $n$  аргументов равно  $2^{2^n}$ .

*Пример* (табл. 8.1). Для  $n=1$   $2^{2^1} = 4$ . Таким образом, имеется четыре ПФ  $f_{0-3}$  ( $f_0=0, f_1=1, f_2=x, f_3=\bar{x}$ ). Пусть  $n = 2$  ( $x_2, x_1$ ),  $N = 2^2 = 4$ ;  $2^N = 16$ , т.е. для двух аргументов можно построить 16 ПФ ( $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{15}$ ).

Переключательная функция, полностью определенная на всех наборах аргументов, *существенно зависит от  $x_i$* , если выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots).$$

В противном случае аргумент  $x_i$  *фиктивный*, а функция, не зависящая от всех аргументов, называется *вырожденной*. Иначе говоря, если при изменении аргумента  $x_i$  значение функции не меняется, то функция от этого аргумента не зависит и этот аргумент можно опустить. Указанное свойство переключательных функций будет использовано при минимизации их аналитического представления. Физическая реализация ПФ – цифровое устройство (комбинационная схема).

Таблица 8.1

$f(x_2, x_1)$	$x_2$	0	0	1	1	Наименование логической функции	Обозначение
	$x_1$	0	1	0	1		
$f_0$		0	0	0	0	Константа 0	0
$f_1$		0	0	0	1	Конъюнкция (функция “И”)	$x_2 \wedge x_1$
$f_2$		0	0	1	0	Запрет по $x_1$	$x_2 \Delta x_1$
$f_3$		0	0	1	1	Повторение $x_2$	$x_2$
$f_4$		0	1	0	0	Запрет по $x_2$	$x_1 \Delta x_2$
$f_5$		0	1	0	1	Повторение $x_1$	$x_1$
$f_6$		0	1	1	0	Сумма по модулю 2	$x_2 \oplus x_1$
$f_7$		0	1	1	1	Дизъюнкция (функция “ИЛИ”)	$x_2 \vee x_1$
$f_8$		1	0	0	0	Стрелка Пирса (“ИЛИ–НЕ”)	$x_2 \downarrow x_1$
$f_9$		1	0	0	1	Логическая равнозначность	$x_2 \sim x_1$
$f_{10}$		1	0	1	0	Инверсия $x_1$	$\bar{x}_1$
$f_{11}$		1	0	1	1	Импликация от $x_1$ к $x_2$	$x_2 \rightarrow x_1$
$f_{12}$		1	1	0	0	Инверсия $x_2$	$\bar{x}_2$
$f_{13}$		1	1	0	1	Импликация от $x_2$ к $x_1$	$x_1 \rightarrow x_2$
$f_{14}$		1	1	1	0	Штрих Шеффера (“И–НЕ”)	$x_2 / x_1$
$f_{15}$		1	1	1	1	Константа 1	1

Другое название переключательной функции ИЛИ (дизъюнкция) – логическое сложение, ПФ И (конъюнкция) – логическое умножение, а ПФ  $f_6$  (сумма по mod2) – исключающее ИЛИ. В инженерной практике нашли наибольшее применение *логические элементы (ЛЭ)*, реализующие следующие ПФ:  $f_1$  (И, AND),  $f_7$  (ИЛИ, OR),  $f_6$  (исключающее ИЛИ, XOR), функции Пирса  $f_8$  (И–НЕ, NAND) и Шеффера  $f_{14}$  (ИЛИ–НЕ, NOR), а также вырожденные функции – инверсия  $f_{10}, f_{12}$  (НЕ, NOT) и повторение  $f_3, f_5$  аргументов. Остальные ПФ (в том числе и любая ПФ из указанных) могут быть получены посредством суперпозиции из нескольких (или даже одной) *базисных* ПФ, как будет показано далее.

На рис. 8.1 показаны условные графические обозначения (УГО) основных логических элементов: повторителя, инвертора (НЕ), И, ИЛИ, И–НЕ, ИЛИ–НЕ, суммы по модулю 2 (исключающее ИЛИ).

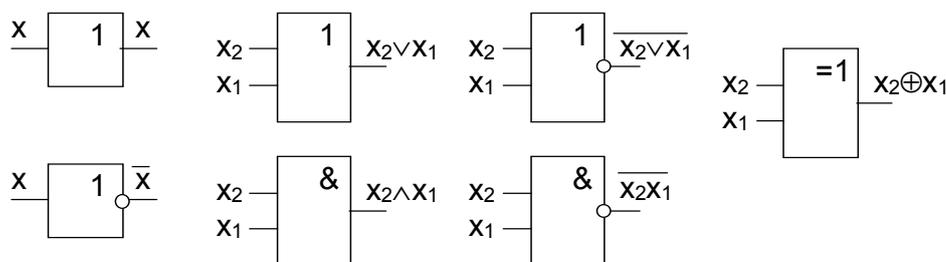


Рис. 8.1

## 8.2. Основные свойства переключательных функций

Функции И, ИЛИ, НЕ удовлетворяют следующим законам, которые легко доказываются путем подстановки наборов аргументов. Некоторые из этих законов тождественны операциям умножения и сложения, а некоторые специфичны для алгебры логики и не имеют прямых аналогов в обычной алгебре.

*Идемпотентный закон:*

$$x_1 \vee x_1 = x_1 ,$$

$$x_1 x_1 = x_1 .$$

*Коммутативный (переместительный) закон:*

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 ,$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 .$$

*Ассоциативный (сочетательный) закон:*

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) ,$$

$$x_1 (x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 .$$

*Дистрибутивный (распределительный) закон* (нет аналога в алгебре):

$$x_1 (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 ,$$

$$x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) .$$

*Закон отрицания:*

$$x_1 \vee \bar{x}_1 = 1 ,$$

$$x_1 \bar{x}_1 = 0 .$$

*Закон двойного отрицания:*

$$\bar{\bar{x}} = x .$$

*Правило (закон) де Моргана:*

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n ,$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n .$$

*Закон поглощения:*

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1 ,$$

$$x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1 .$$

*Закон склеивания:*

$$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 ,$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 .$$

### 8.3. Способы задания переключательных функций

**Табличный способ.** Из существующего множества способов задания ПФ наиболее употребим способ задания с помощью *таблицы истинности*, где каждому набору аргументов соответствует значение ПФ. В табл. 8.2 ПФ  $y_1(x_2, x_1, x_0)$  полностью определена на всех наборах аргументов, а ПФ  $y_2(x_2, x_1, x_0)$  не полностью определена, т.е. для некоторых наборов значение функции безразлично (отмечено звездочкой). Доопределение ПФ на этих наборах нулем или единицей может быть впоследствии использовано при минимизации.

Таблица 8.2

$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y_1$	$y_2$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	*
0	1	0	1	*
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	*

**Аналитический способ.** ПФ может быть представлена аналитически в виде СКНФ и СДНФ –

*совершенных конъюнктивных и дизъюнктивных нормальных форм.*

Введем следующие определения.

**Конъюнкция** называется *элементарной (ЭК)*, если она содержит любое количество попарно различных между собой переменных со знаками отрицания или без них, например ЭК  $x_1x_2$ ,  $x_1\bar{x}_3x_4$ .

**Дизъюнкция** называется *элементарной (ЭД)*, если она содержит любое количество попарно различных между собой переменных со знаками отрицания или без них, например ЭД  $x_1 \vee \bar{x}_2$ ,  $x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$ .

**Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$$y = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

**Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)$$

Преобразование ДНФ  $\Leftrightarrow$  КНФ совершается по правилам, изложенным выше (п. 8.2).

**Пример.** Преобразуйте ДНФ в КНФ. Используя дистрибутивный закон и закон отрицания, получим

$$\begin{aligned} x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 &= (x_1x_2 \vee \bar{x}_1)(x_1x_2 \vee x_3) = \\ &= (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

Для определения совершенных нормальных форм (СДНФ и СКНФ) введем следующие понятия.

**Конституентой единицы ( $K_i$ , КЕ)** называется ЭК  $n$  аргументов, принимающая значение 1 лишь на одном наборе.

**Конституентой нуля ( $M_i$ , КН)** называется ЭД  $n$  аргументов, равная 0 лишь на одном наборе.

Общее число  $K_i$  и  $M_i$ , определенных на всех наборах, равно  $2^n$  (для ПФ  $n$  аргументов).

**Совершенной ДНФ** называется дизъюнкция всех КЕ этой функции.  $\bigcup_i^m K_i$

**Совершенной КНФ** называется конъюнкция всех КН этой функции  $\bigcap_j^k M_j$ .

Согласно этим определениям из таблицы истинности (табл. 8.2) для функции  $y_1(x_2, x_1, x_0)$ , имеем СДНФ  $y_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7$ , СКНФ  $y_1 = M_0 M_3 M_6$ .

Сформулируем **правило записи  $K_i$  и  $M_i$** .

В наборе значений аргументов, составляющих элементарную конъюнкцию конституенты единицы, каждый аргумент  $x_i$  записывается в прямой форме, если его значение на этом наборе равно 1, и в инверсной форме, если его значение на данном наборе равно 0.

**Для записи КН правило обратное:** аргумент записывается в КН в прямой форме, если на данном наборе его значение равно 0, и в инверсной форме, если его значение на наборе равно 1.

Тогда СДНФ  $y_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0$ ,

СКНФ  $y_1 = (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$ .

Переход от СДНФ к СКНФ (и обратно) может быть совершен по формальным правилам.

1. Запишите новую СДНФ (СКНФ) из КЕ (КН), не входящих в исходную, функцию например из табл. 8.2 следует, что  $y_1^* = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0$ .

2. В новой СДНФ (СКНФ) операцию ИЛИ замените на И, а операцию И – на ИЛИ, т.е.  $y_1^{**} = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$ .

3. Инвертируйте аргументы для завершения преобразования:

$y_1^{***} = (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) = y_1$ .

В общем случае предпочтение отдается той совершенной форме (СДНФ, СКНФ), в которой меньше составляющих – произведений (сумм).

## 8.4. Функционально полные наборы (базисы) переключательных функций

Система ПФ  $\{y_1, \dots, y_N\}$  называется *функционально полной* (или *базисом*), если любая ПФ из системы может быть определена суперпозицией функций  $\{y_1, \dots, y_N\}$ .

*Минимальным* назовем такой *базис*, для которого удаление хотя бы одной функции  $y_i$  превращает указанную систему ПФ в неполную.

Функционально полной является система функций И, ИЛИ, НЕ, но она не минимальна. Функция штрих Шеффера (И – НЕ) или стрелка Пирса (ИЛИ – НЕ) образуют минимальный базис. Возникает вопрос: что для переключательной функции считать минимальным представлением.

### *Примеры функционально-полных наборов*

1. Набор И, ИЛИ, НЕ:

$$\text{СДНФ } y(x_1 x_2 \dots x_n) = \bigcup_i^m K_i, \quad \text{СКНФ } y(x_1 x_2 \dots x_n) = \bigcap_j^k M_j.$$

2. Наборы И – НЕ, ИЛИ – НЕ:

$$\text{И – НЕ } y(x_1 x_2 \dots x_n) = \bigcup_i^m \overline{K_i} = \bigcap_i^m \overline{K_i}, \quad \text{ИЛИ – НЕ } y(x_1 x_2 \dots x_n) = \bigcap_j^k \overline{M_j} = \bigcup_j^k \overline{M_j}.$$

## 8.5. Минимизация переключательных функций

ДНФ (КНФ), содержащая наименьшее число логических переменных по сравнению со всеми другими представлениями данной функции, называется минимальной ДНФ (КНФ) – МДНФ (МКНФ).

Основная задача проектирования логических схем (ЛС) и структур – реализация ПФ в заданном базисе при наименьшем числе логических элементов (корпусов ИМС и т.д.).

Известны аналитические методы: Квайна, Мак-Класки, Рота и др. В инженерной практике более распространен формальный *метод минимизации с помощью диаграмм Вейча (карт Карно)*. Диаграмма Вейча (ДВ) представляет собой квадратную или прямоугольную таблицу с числом клеток  $2^n$  ( $n$  – число переменных) – по количеству всех конституент функции.

Если минимизация идет в ДНФ, то диаграмма Вейча заполняется единицами (конституентами 1), если в КНФ, то ДВ заполняется нулями (конституентами 0). Таким образом, ДВ представляет собой иную форму записи таблицы истинности.

Диаграммы Вейча для  $n = 2, 3, 4$  показаны на рис 8.2.

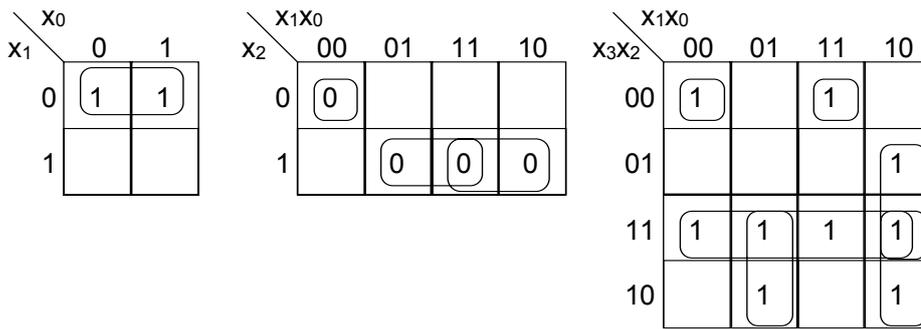


Рис. 8.2

Диаграммы построены так, что соседние клетки соответствуют наборам аргументов, различающимся значением одного аргумента. Клетки на противоположных краях диаграммы также являются соседними.

Нахождение МДНФ или МКНФ сводится к отысканию варианта, при котором все единицы в СДНФ (нули в СКНФ) покрываются наименьшим числом наиболее коротких произведений или сумм, для чего в ДВ обводят прямоугольными контурами клетки с единицами (нулями) по следующим правилам:

- контур должен быть прямоугольным с числом клеток  $2^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- одни и те же клетки с 1 или 0 могут входить в несколько контуров;
- число контуров должно быть как можно меньше, а размеры каждого контура – как можно больше;
- объединение начинают с клеток, которые могут войти в контур единственным образом;
- клетки с неопределенными значениями могут произвольным образом доопределяться и входить или не входить в контур.

Для каждого контура в записи соответствующей ДНФ (КНФ) исключаются те аргументы, от которых функция не зависит. Иначе говоря, если для данного контура изменения значений  $x_i$  не приводят к изменению значения функции, то из записи этот аргумент опускается.

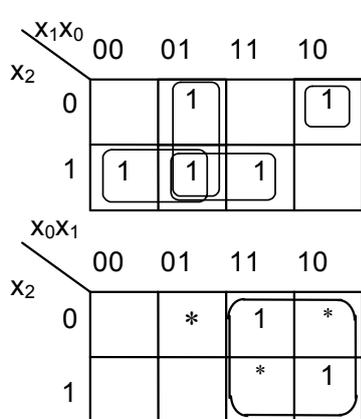


Рис. 8.3

Минимизируем ПФ  $y_1$  из табл. 8.2 в ДНФ (рис. 8.3). Для  $y_1$  диаграмма Вейча содержит пять КЕ, которые входят в четыре контура:

$$\text{МНДФ } y_1 = x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0.$$

Для  $y_2$  диаграмма Вейча содержит две КЕ и три неопределенных значения. Неопределенные значения (\*), которые вошли в единственный контур, считаются доопределенными единицами:

$$\text{МДНФ } y_2 = x_1.$$

## 8.6. Минимизация систем переключательных функций

Рассмотрим цифровую схему  $S$ , имеющую  $N$  логических входов и  $L$  выходов, представляющих собой функции от входных аргументов (рис. 8.4).

Если каждая из  $L$  функций может быть представлена как ПФ входных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , то такая схема называется **комбинационной (КС)** и описывается следующей системой уравнений.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1 \dots x_N), \\ y_2 = y_2(x_1 \dots x_N), \\ \dots \dots \dots \\ y_L = y_L(x_1 \dots x_N). \end{cases}$$



Рис. 8.4

Комбинационную схему часто называют логическим  $(N, L)$ -полюсником, а систему уравнений – системой собственных функций  $(N, L)$ -полюсника. Эквивалентными считаются КС, у которых собственные функции  $y_i$  ( $i=1 \dots L$ ) равны.

Синтез КС состоит из двух этапов.

*На первом этапе* синтеза составляется система собственных функций, адекватно отражающая некоторое физическое описание работы будущего устройства.

*На втором этапе* система собственных функций реализуется некоторой комбинационной схемой, для построения которой используют набор логических элементов.

Для одной и той же системы собственных функций может быть построено несколько КС, различной сложности. Минимизация ПФ, составляющих КС, может быть как отдельной, так и совместной. Идея совместной минимизации состоит в покрытии диаграмм Вейча одинаковыми контурами, что дает одни и те же схемные блоки для различных ПФ.

## 8.7. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки

1. Приведите примеры ПФ для  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .
2. Запишите ПФ ( $n=2$ ) с номерами  $i=\overline{1,14}$ .
3. Определите значения  $K_i$ ,  $i=\overline{0,15}$ , для  $n=2, 3, 4, 5$ .
4. Определите значения  $M_i$ ,  $i=\overline{0,15}$ , для  $n=2, 3, 4, 5$ .

5. Преобразуйте ДНФ в КНФ:  $x \vee \bar{x}yz, x \vee yz, xy \vee xz, x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$ .
6. Преобразуйте КНФ в ДНФ:  $(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}), (x \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ .
7. Преобразуйте ПФ в КНФ (ДНФ):  $\overline{\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{z}}, \overline{(x \vee y)(\bar{y} \vee z) \vee \bar{x}y}, \overline{x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz}, \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xz}, \overline{(x \vee y)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y}, \overline{x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz}$ .
8. Преобразуйте ПФ в СДНФ, постройте диаграмму Вейча:  $x \vee y\bar{z}, x \vee xy \vee z, xy \vee \bar{x}z \vee xuz, x \vee y \vee z, x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .
9. Преобразуйте КНФ в СКНФ, постройте диаграмму Вейча:  $(x \vee y)(x \vee y \vee \bar{z}), (x \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee \bar{z}), (x \vee y)z, x(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ .
10. Преобразуйте СДНФ в СКНФ (аналитически и с помощью диаграмм Вейча):  $xyz \vee xy\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z, xyz \vee \bar{x}\bar{y}z, xyz \vee \bar{x}yz$ .
11. Преобразуйте СКНФ в СДНФ (аналитически и с помощью диаграмм Вейча):  $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z), (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}), (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z), (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ .
12. Постройте таблицы  $K_i$  и  $M_i$  для  $n=2, 3, 4$ .
13. Покажите функциональную полноту базисов И, НЕ; ИЛИ, НЕ; И – НЕ; ИЛИ – НЕ.
14. Найдите МДНФ и МКНФ и оцените их сложность:  
 $(x_1 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3)(x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3); (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)(x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3);$   
 $\overline{x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3} (x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3); (x_1 \vee x_3)(x_1\bar{x}_2 \vee x_3); \overline{x_1x_2x_3} (x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3).$

## 8.8. Ссылки на используемую литературу

[20; 29 – 32].

## 9. КОМБИНАЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА

### 9.1. Общие положения

*Комбинационное цифровое устройство* (КЦУ) – это преобразователь дискретной информации  $X$  в  $Y$ , причем входному двоичному слову  $X$  в данный момент времени однозначно и независимо от предыдущего состояния соответствует выходное слово  $Y$  в тот же момент времени. У КЦУ нет «памяти» о предыстории процесса. ЦУ с «памятью» называют автоматами. Они будут рассмотрены далее.

Элементарные КЦУ – логические элементы И, ИЛИ, НЕ, И – НЕ, ИЛИ – НЕ, И – ИЛИ – НЕ и т. п. Более сложные КЦУ состоят из элементарных и удовлетворяют двум условиям:

- входы последующих ЛЭ связаны с выходами предыдущих (рис. 9.1, а);
- отсутствуют обратные связи с выходов последующих ЛЭ на входы предыдущих (замкнутые пути для сигналов) (рис. 9.1, б).

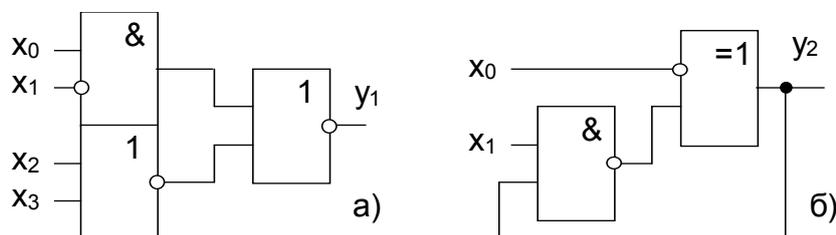


Рис. 9.1

Для КЦУ характерен *принцип дуальности* (следует из правила де Моргана). Если в КЦУ<sub>1</sub>, реализующей ПФ  $f(x_1x_2\dots x_n)$ , заменить И на ИЛИ, ИЛИ на И, проинвертировать входы  $x_i$ , то полученная КЦУ<sub>2</sub> реализует  $\overline{f(x_1x_2\dots x_n)}$ .

### 9.2. Базовые интегральные схемы и их основные параметры

Логические *интегральные схемы* (ИС), выпускаемые промышленностью, представлены широкой номенклатурой интегральных серий на основе биполярных и полевых транзисторов.

Серии ИМС отличаются по целому ряду параметров в зависимости от технологий их изготовления (ТТЛ, ТТЛШ, ЭСЛ, КМОП, *n*-МОП, *p*-МОП и др.).

К числу типовых параметров ИМС относят:

1) *коэффициент разветвления по выходу*  $K_{разв}(N)$  – число входов одноконтурных ИС, которые одновременно могут быть подключены к выходу данной ИС (нагрузочная способность ИМС);

2) *коэффициент объединения по входу*  $K_{об}(N)$  – число входных сигналов данной ИС;

3) *статические характеристики:*

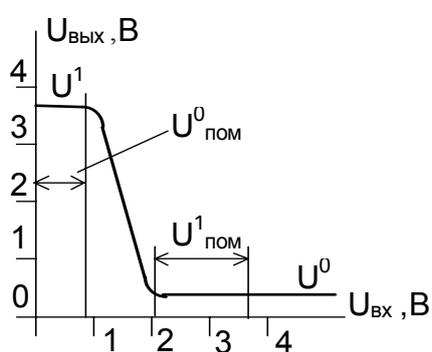


Рис. 9.2

– входная  $I_{вх} = f_1(U_{ВХ})$ ;

– выходная  $U_{вых} = f_2(I_{ВЫХ})$ ;

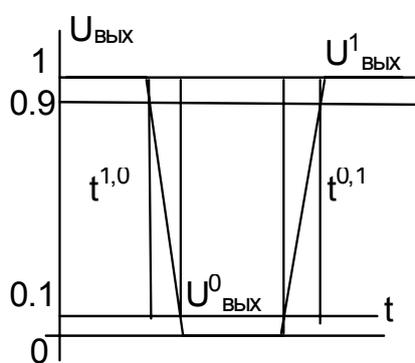
– передаточная  $U_{вых} = f_3(U_{ВХ})$ .

Типовая передаточная характеристика ТТЛ ИМС приведена на рис. 9.2, где показаны уровни помех на входе  $U^1_{пом}$  и  $U^0_{пом}$ , вызывающие изменение сигнала на выходе (“срабатывание” элемента). Эти значения характеризуют помехоустойчивость схемы.

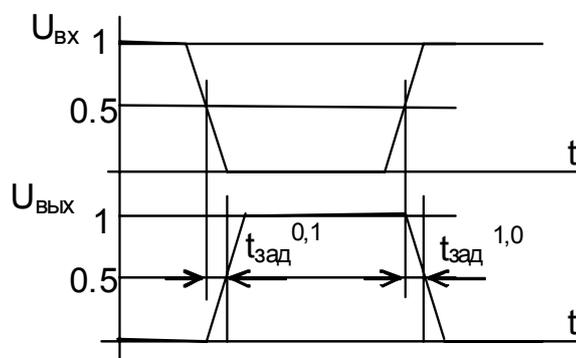
Уровень логического нуля для ТТЛ ИМС  $U^0 = 0...0,4$  В, уровень логической единицы  $U^1 = 2,4...4,5$  В. Порог срабатывания по нулевому уровню составляет приблизительно 0,8 В.

4) *временные параметры* (динамические), которые можно оценить из рис. 9.3.

Здесь  $t^{0,1}$  и  $t^{1,0}$  – время перехода из 1 в 0 и наоборот (рис. 9.3, а) и  $t^{0,1}_{зад}$  и  $t^{1,0}_{зад}$  – время задержки включения и выключения ЛЭ (рис. 9.3, б);



а)



б)

Рис. 9.3

5) вид реализуемой ПФ (И, ИЛИ, НЕ, И – НЕ, ИЛИ – НЕ, И – ИЛИ – НЕ и т.д.). В качестве примера на рис. 9.4, а показано УГО ЛЭ 2 – 2 – 3И – ИЛИ – НЕ;

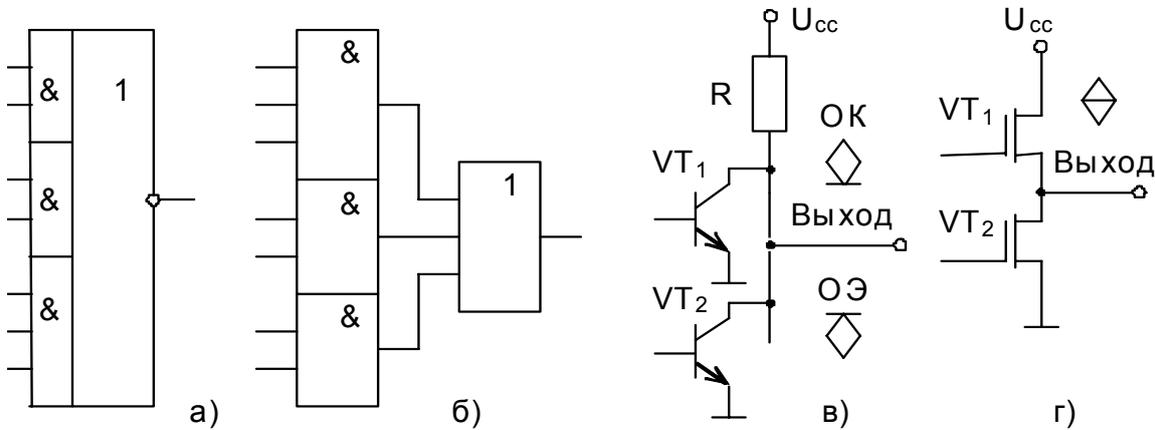


Рис. 9.4

б) **выходы ИС.** Обычные выходы ИМС ТТЛ(Ш) нельзя объединять (соединять). Это делается только логически (с помощью схем И – ИЛИ), как показано на рис. 9.4, б, или используя монтажное ИЛИ для ИС с открытым коллектором или эмиттером (рис. 9.4, в).

ИС с **тристабильным выходом** позволяют отключить выход путем перевода его в высокоимпедансное состояние (ВИС, Z-состояние) (рис. 9.4, г).

1. Логический ноль на выходе  $U^0$ ,  $VT_1$  закрыт,  $VT_2$  открыт.
2. Логическая единица на выходе  $U^1$ ,  $VT_1$  открыт,  $VT_2$  закрыт.
3. ВИС состояние,  $VT_1$  и  $VT_2$  закрыты.

Выходы нескольких ИМС с тристабильным выходом могут быть объединены, при этом только одна из этих ИМС включена (“выбрана”) сигналом разрешения CS (*chip select*), а выходы остальных переведены в ВИС.

На рис. 9.5 показан управляемый двунаправленный инвертирующий буфер, позволяющий передавать информацию в том или ином направлении в зависимости от управляющего входа Т. Если  $T=0$ , то разрешена передача от А к В, если  $T=1$ , то разрешена передача от В к А. Такая коммутация возможна, поскольку всегда выход одного из инверторов находится в высокоимпедансном состоянии.

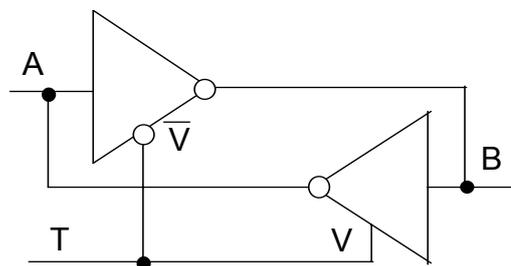


Рис. 9.5

Комбинация из нескольких подобных устройств позволяет направлять потоки информации в параллельном коде, образуя так называемую *шину передачи данных*

Параметры интегральных микросхем серий ТТЛ, ТТЛШ, ЭСЛ, КМОП можно найти в соответствующих справочниках.

### 9.3. Типовые комбинационные устройства

**Дешифраторы (декодеры).** Дешифратором (декодером) называется КЦУ, у которого каждой входной комбинации сигналов  $\{x_i\}$  соответствует активное состояние только одного выходного сигнала. **Полный дешифратор** (ДШ) с  $n$  входами имеет  $2^n$  выходов. Таблица истинности и условное графическое обозначение дешифратора К155ИД3 (4x16, L-активные выходы, выбор кристалла) приведены соответственно в табл. 9.1 и на рис. 9.6.

Таблица 9.1

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{15}$
0	0	0	0	0	1	1	...	1
0	0	0	1	1	0	1	...	1
0	0	1	0	1	1	0	...	1
0	0	1	1	1	1	1	...	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	1	...	0

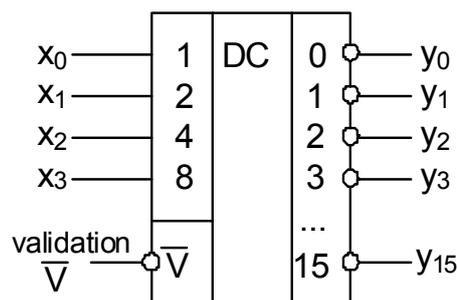


Рис. 9.6

ПФ, описывающие выходные сигналы ДШ, выглядят следующим образом:  $y_0 = \overline{x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} \overline{V}}$ ,  $y_1 = \overline{x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 \overline{V}}$ , ...,  $y_{15} = \overline{x_3 x_2 x_1 x_0 \overline{V}}$ .

**Неполный дешифратор** при  $n$  входах имеет число выходов  $N < 2^n$ . В виде серийных ИС выпускают только ДШ 4x10. Такие дешифраторы работают в двоично-десятичном коде 8-4-2-1 и используются для индикации результата в десятичном коде (К155ИД1, К561ИД1).

**Каскадирование** дешифраторов позволяет увеличить число входов и выходов. На рис. 9.7, а показан ДШ 4x16 на базе двух неполных ДШ 4x10, а на рис. 9.7, б – ДШ 5x32 на базе ДШ 4x16, в построении которого использованы управляющие входы  $V$ . Выходные сигналы  $y_0 - y_{15}$  формиру-

ются с помощью первого ДШ при условии  $x_4 = 0$ , а сигналы  $y_{16} - y_{31}$  – на выходах второго ДШ при  $x_4 = 1$ .

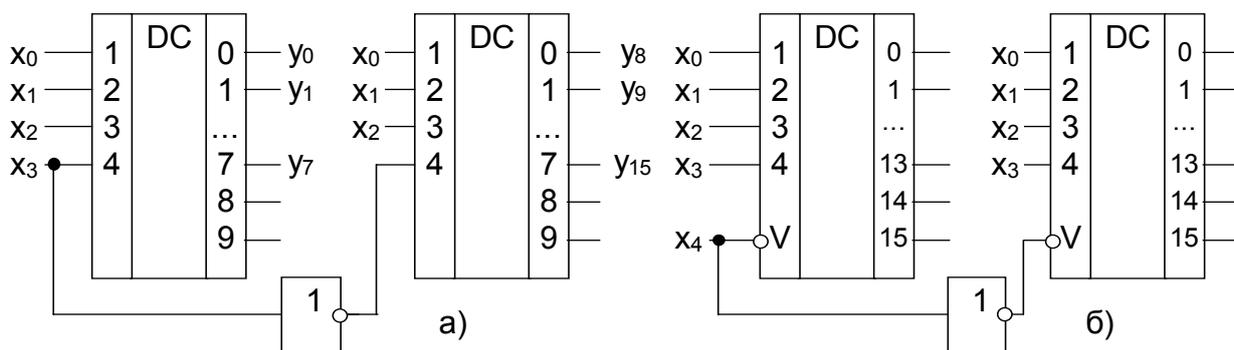


Рис. 9.7

**Шифраторы (кодеры).** Шифраторы выполняют обратное по отношению к дешифраторам преобразование единичного (унитарного) кода на входе  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$ , в  $n$ -разрядный позиционный двоичный код. Например, для восьмивходового шифратора активному значению одного из входных сигналов  $x_i = 0$  соответствует комбинация выходных сигналов  $y_2 - y_0$  (табл. 9.2).

Таблица 9.2

$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y_2$	$y_1$	$y_0$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Для шифратора должно выполняться условие  $x_i \vee x_j = 1$  при  $i \neq j$  (в случае L-активных входов). Если сигналы на входы  $x_i$  поступают от независимых источников, то это условие нереализуемо. В этом случае *каждому входу назначается свой приоритет*. Будем считать, что чем выше номер входа  $i$ , тем выше его приоритет. **Приоритетный шифратор** вырабатывает двоичный код числа для активного входа с наибольшим номером. Примером приоритетного ДШ 8x3 может служить К155ИВ1.

**Мультиплексоры.** С помощью мультиплексоров осуществляется коммутация на выход одного из нескольких информационных входных сигнала

лов  $D_i$  в соответствии с заданным кодом на управляющих входах  $\{x_{ij}\}$ . УГО мультиплексора “4→1” приведено на рис. 9.8.

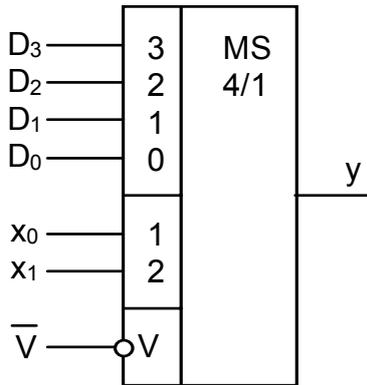


Рис. 9.8

Аналитическое выражение для выходного сигнала  $y$  в СДНФ выглядит следующим образом:

$$y = \bar{V} (\bar{x}_1 \bar{x}_0 D_0 \vee \bar{x}_1 x_0 D_1 \vee x_1 \bar{x}_0 D_2 \vee x_1 x_0 D_3) .$$

Сопоставляя формулы для дешифратора и мультиплексора, можно отметить, что для каждого входа  $D_i$  комбинации сигналов управления  $\{x_{ij}\}$  выглядят аналогично комбинациям входных сигналов в дешифраторе. Следовательно, *составной частью мультиплексора является дешифратор.*

Примеры серийных мультиплексоров – микросхемы К155КП5 (8→1), К155КП2 (2x4→1).

**Демультимплексоры.** Демультимплексоры представляют собой КЦУ для коммутации информационного входного сигнала  $D$  на один из выходов в соответствии с заданным кодом на управляющих входах  $\{x_{ij}\}$  и решают тем самым задачу, обратную мультиплексированию. УГО демультимплексора “1→4” показано на рис. 9.9.

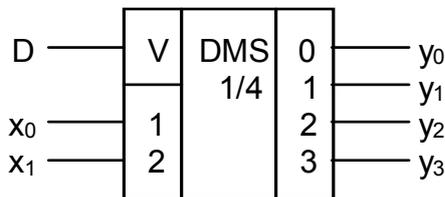


Рис. 9.9

Логические функции, описывающие выходные сигналы демультимплексора, имеют вид

$$y_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 D, \quad y_1 = \bar{x}_1 x_0 D, \\ y_2 = x_1 \bar{x}_0 D, \quad y_3 = x_1 x_0 D .$$

Подобными выражениями описываются выходные сигналы дешифраторов, если принять  $D = \bar{V}$ . В качестве примера демультимплексора “1→8” рассмотрим сдвоенный дешифратор К155ИД4 [1 – 4] (рис. 9.10).

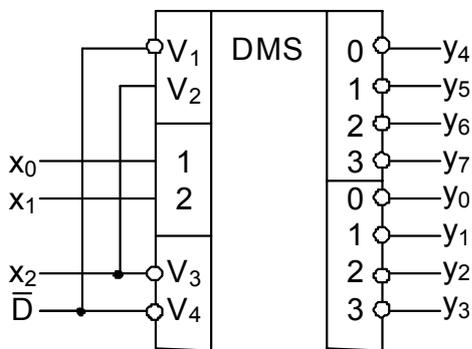


Рис. 9.10

Информационный сигнал  $\bar{D}$  проходит на выходы  $y_0$ - $y_7$  демультимплексора в зависимости от значения набора  $x_2 x_1 x_0$ . Если схему на рис. 9.10 рассматривать как дешифратор, то вход  $\bar{D}$  может служить сигналом синхронизации или стробирования выходов. При  $\bar{D} = 1$  на всех выходах схемы установится логическая единица. Каскадным включением двух ИМС К155ИД4 и ЛЭ “НЕ” можно получить

дешифратор на 4 входа и 16 выходов.

**Сумматоры и АЛУ.** Сумматоры представляют собой КЦУ для сложения  $n$ -разрядных двоичных чисел. Сумматоры (рис. 9.11) – основные вычислительные устройства в арифметико-логических блоках микропроцессоров и микроЭВМ, от их быстродействия существенно зависит скорость вычислений. Для многоразрядных чисел быстродействие сумматоров определяется в значительной мере скоростью распространения переноса при сложении.

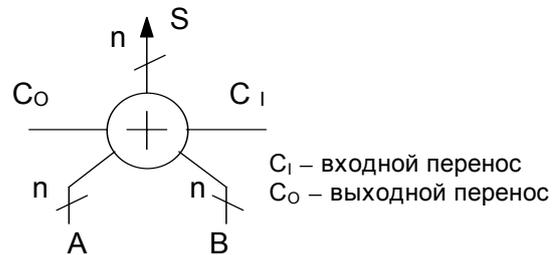


Рис. 9.11

При формировании результата в  $i$ -м разряде необходимо учесть значения чисел в этом разряде  $a_i$  и  $b_i$ , а также перенос из предыдущего разряда  $c_i$ . Каждый разряд сумматора формирует значение суммы в этом разряде  $s_i$  и перенос в следующий разряд  $c_{i+1}$  (табл. 9.3).

ПФ, описывающие работу одноразрядного двоичного сумматора, могут быть представлены в базисе И – НЕ следующим образом:

$$s_i = a_i \overline{a_i} x \overline{a_i} x x, \text{ где } x = b_i \overline{b_i} c_i \overline{b_i} c_i c_i ;$$

$$c_{i+1} = a_i c_i \overline{a_i} b_i \overline{b_i} c_i .$$

Таблица 9.3

$a_i$	$b_i$	$c_i$	$s_i$	$c_{i+1}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Схема двоичного 4-разрядного сумматора, составленного из одноразрядных сумматоров SM, представлена на рис. 9.12.

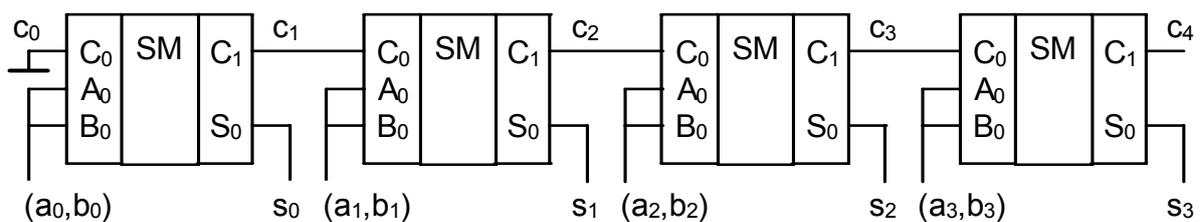


Рис. 9.12

Данный сумматор позволяет складывать два двоичных числа  $A_3-A_0$  и  $B_3-B_0$ , формировать результат  $S_3-S_0$  и перенос  $C_4$  в следующий разряд. Перенос между разрядами сумматора в схеме на рис. 9.12 последовательный, что замедляет получение результата при значительном числе разрядов. Увеличение быстродействия сумматоров достигается путем использования параллельного переноса с помощью специальных схем.

Комбинационные сумматоры – основная часть арифметическо-логического устройства (АЛУ), основного операционного узла любого

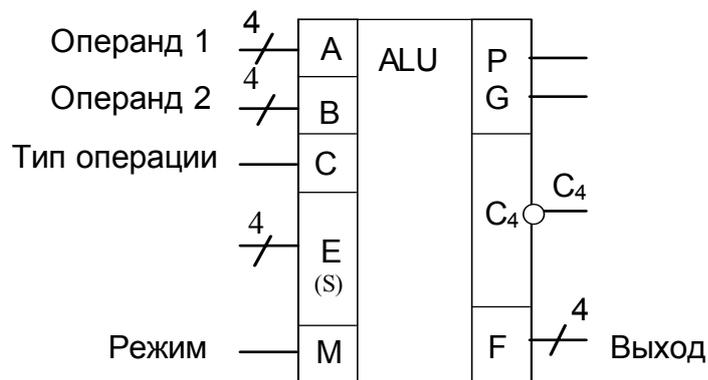


Рис. 9.13

МПУ. В качестве примера можно рассмотреть четырехразрядное АЛУ К155ИП3 (рис. 9.13), работающее в двух возможных режимах: арифметические ( $M = 0$ ) и логические операции ( $M = 1$ ). Выбор операции задается кодом  $E$  ( $E_3E_2E_1E_0$ ). Логические операции выполняются над операндами поразрядно

( $A_3-B_3, A_2-B_2, A_1-B_1, A_0-B_0$ ). При выполнении арифметических операций АЛУ представляет собой четырехразрядный сумматор с параллельным переносом.

На выходах Р и G формируются два сигнала  $g_{i+1} = a_i b_i$  и  $p_{i+1} = a_i \vee b_i$ , с помощью которых получается параллельный перенос  $c_{i+1}$ , зависящий от всех предыдущих переносов сумматора:

$$c_{i+1} = g_{i+1} \vee p_{i+1} g_{i+1} \vee p_{i+1} p_i g_{i-1} \vee \dots \vee p_{i+1} p_1 \dots c_0.$$

Для организации параллельного переноса в 4n-разрядных АЛУ используют ИМС ускоренного переноса (К155ИП4, К531ИП4).

#### 9.4. Синтез комбинационных схем на мультиплексорах и дешифраторах

Любую ПФ  $n$  аргументов можно реализовать на мультиплексоре  $2^n \rightarrow 1$ , подав на его адресные входы сигналы ( $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0$ ), а на информационные входы  $D_i, i=0 \dots (2^n - 1)$ , значения 0 и 1, соответствующие конституентам 0 и 1 из таблицы истинности ПФ. Это следует из вышеприведенного (с. 74) аналитического описания сигнала на выходе мультиплексора.

Таким образом, для ПФ четырех аргументов потребуется мультиплексор  $16 \rightarrow 1$ . Однако если подавать на информационные входы не только константы 0 и 1, но и аргументы  $x_i$  или ПФ от некоторых аргументов, то потребуется мультиплексор с меньшим числом адресных входов.

Реализуем ПФ  $y$  четырех аргументов, представленную диаграммой Вейча (рис. 9.14, а), с помощью мультиплексора  $8 \rightarrow 1$ .

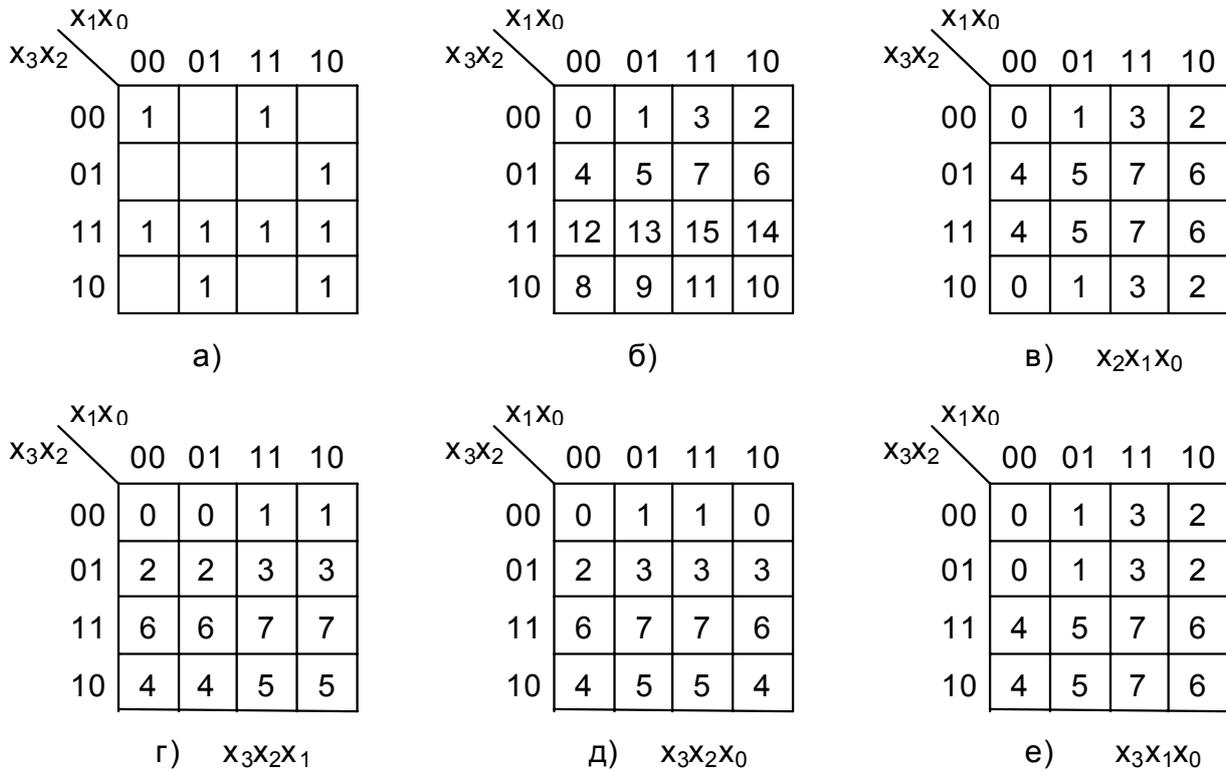


Рис. 9.14

На три адресных входа такого мультиплексора можно подать три из четырех переменных  $x_3x_2x_1x_0$ . Этими тремя переменными будет задаваться адрес входного канала мультиплексора  $D_i$  ( $0 \dots 7$ ). Клетки диаграмм Вейча четырех переменных нумеруются числами от 0 до 15 (рис. 9.14, б). Аналогично можно пронумеровать клетки диаграмм Вейча адресами каналов  $i$  мультиплексора, не учитывая четвертый аргумент. Таких диаграмм Вейча будет четыре – по числу возможных сочетаний из четырех аргументов по три (рис. 9.14, в, г, д, е).

На рис. 9.14, в, г, д, е указаны тройки аргументов, взятых в качестве адресных. Числа  $i$  (номера каналов) разбили указанные диаграммы Вейча на восемь частей, каждая из которых представляет диаграмму Вейча из двух клеток для одного аргумента, не являющегося адресным. Эти восемь диаграмм Вейча одной переменной определяют функции  $D_i = \varphi_i(x_j)$ , которые надо подать на информационные входы мультиплексора. Из рис. 9.14, а, в следует, что  $D_0 = \bar{x}_3$ ,  $D_1 = x_3$ ,  $D_2 = x_3$ ,  $D_3 = \bar{x}_3$ ,  $D_4 = x_3$ ,  $D_5 = x_3$ ,  $D_6 = 1$ ,  $D_7 = x_3$ .

В табл. 9.4 приведены значения  $D_i$  для всех возможных комбинаций адресных сигналов, полученных из рис. 9.14, а, б, в, г, д, е. Предпочтение следует отдать той схеме, на информационные входы которой подается большее число констант 0 и 1. В этом смысле варианты схемы при задании адресов аргументами  $x_3x_2x_1$ ,  $\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0$  и  $x_3x_1x_0$  эквивалентны (рис. 9.15).

Таблица 9.4

Вход	Адресные входы мультимплексора			
	$x_2x_1x_0$	$x_3x_2x_1$	$x_3x_2x_0$	$x_3x_1x_0$
$D_0$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
$D_1$	$x_3$	$x_0$	$x_1$	0
$D_2$	$x_3$	0	$x_1$	$x_2$
$D_3$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_0$	0	$\bar{x}_2$
$D_4$	$x_3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$
$D_5$	$x_3$	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	1
$D_6$	1	1	1	$x_2$
$D_7$	$x_3$	1	1	1

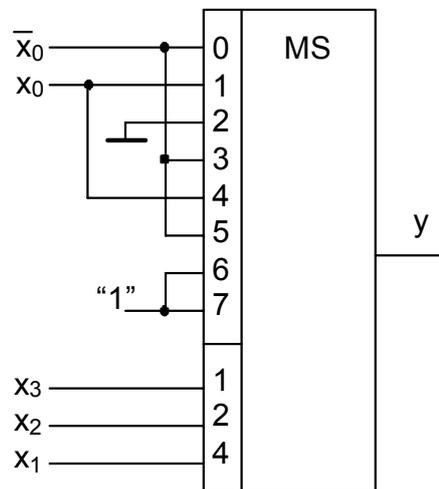


Рис. 9.15

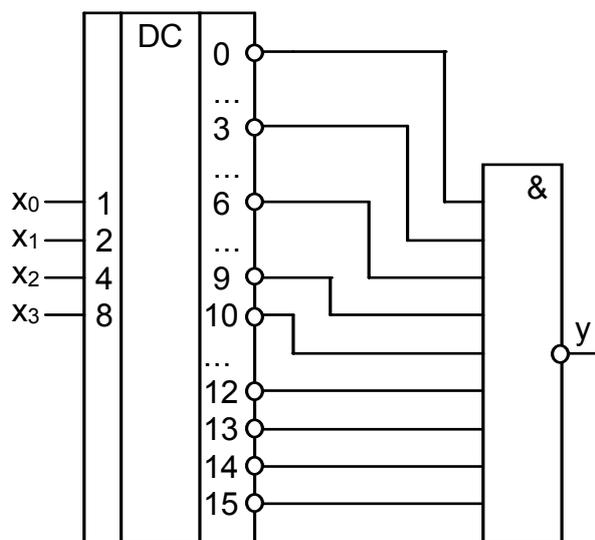


Рис. 9.16

Для построения КЦУ можно использовать и дешифраторы. Так как активное значение сигнала на каждом выходе дешифратора соответствует одному из наборов входных сигналов, то, объединяя с помощью логических элементов выходные сигналы дешифратора, соответствующие конститuentам 0 или 1 при задании ПФ, можно реализовать комбинационную схему с числом аргументов, не превышающим число входов дешифратора.

Для функции четырех аргументов СДНФ, преобразованная по закону де Моргана в базис И – НЕ, выглядит следующим образом:  $y = \overline{K_0 K_3 K_6 K_9 K_{10} K_{12} K_{13} K_{14} K_{15}}$ , где  $K_i$  – конститuentы 1 функции  $y$ .

Комбинационная схема  $y$  показана на рис. 9.16. При построении использован дешифратор 4x16 с L-активными выходными сигналами и логический элемент И – НЕ.

## 9.5. Быстродействие КЦУ и эффект состязаний в них (“гонки”)

Логические элементы, входящие в состав КЦУ, переключаются с задержками  $t_{зад}^{0,1}$ , поэтому выходные сигналы КЦУ устанавливаются (изменяются) по окончании переходных процессов в последовательно соединенных элементах. Эту задержку в появлении выходных сигналов надо учитывать при работе устройства, анализируя цепочку ЛЭ, которая дает максимальную задержку. Проанализируем схему на рис. 9.17.

В данном случае, как следует из временных диаграмм на рис. 9.17, неодинаковые задержки в логических цепях дают помеху на выходе, эта помеха вызвана состязаниями (“гонками”) в цепях распространения сигнала. С “гонками” можно бороться следующими способами:

1) задавая такой порядок смены входных сигналов, что помехи вообще не появляются;

2) уравнивая задержки в “опасных” участках;

3) вводя синхронизацию выходных сигналов, как показано на рис. 9.17; это наиболее эффективный способ.

В частности, в мультиплексорах, дешифраторах можно синхронизировать выход блокируя помехи, вызванные “гонками”.

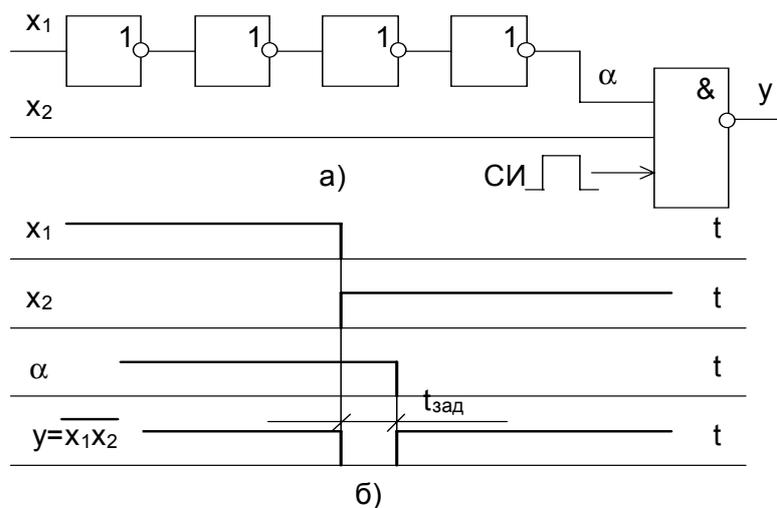


Рис. 9.17

## 9.6. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки

1. Постройте логические схемы, реализующие следующие ПФ в базисе И – НЕ. Используя принцип дуальности, построьте схемы в базисе ИЛИ–НЕ:  
 $f_1 = K_0VK_8$ ,  $f_2 = K_1VK_3$ ,  $f_3 = K_0VK_1VK_2$ ,  $f_4 = K_1VK_2$ ,  $f_5 = M_0M_1$ ,  
 $f_6 = M_1M_2M_3$ ,  $f_7 = M_0M_3$ ,  $f_8 = M_0M_2$ .

2. Проведите структурный синтез КС в базисе ИЛИ – НЕ (И – НЕ) по заданным ПФ:  $f_1 = x \vee x\bar{y} \vee xz$ ,  $f_2 = x(x \vee \bar{y})(x \vee z)$ ,  $f_3 = x \vee z$ ,  $f_4 = x(y \vee z)$ .

3. Поясните принцип дуальности КС на примере структурного синтеза схемы по заданной ПФ:  $f_1 = xy \vee \bar{x}z$ ,  $f_2 = (x \vee y)(\bar{x} \vee z)$ ,  $f_3 = x \vee \bar{y} \vee z$ ,  $f_4 = x\bar{y}z$ .

4. Проведите синтез КС, реализующей ПФ в базисе И – НЕ:  $x \vee yz$ ;  $x y z \vee \bar{z}$ ;  $x \vee x y z$ ;  $x y z \vee \bar{y} \bar{z}$ . Постройте временные диаграммы сигналов при возбуждении КС сигналами 4-разрядного двоичного счетчика.

5. Проведите синтез КС, реализующей ПФ в базисе ИЛИ – НЕ:  $(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)$ ;  $(x \vee \bar{y})(y \vee z)$ ;  $(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z})$ ;  $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)$ . Постройте временные диаграммы сигналов при возбуждении КС сигналами 4-разрядного двоичного счетчика.

6. Запишите систему функций выходов полного двоичного дешифратора при  $n=2, 3, 4, 5$ . Переведите в базис И – НЕ (ИЛИ – НЕ). Постройте схему дешифратора и приведите условное обозначение. Нарисуйте диаграммы сигналов на выходах двоичного дешифратора при периодической схеме кодовых слов на его входах.

7. Запишите систему функций выходов неполного дешифратора в кодах 2-4-2-1, 4-2-2-1, 5-2-1-1, 5-4-2-1. Постройте схему.

8. Синтезируйте шифратор с числом входов 4, 6, 10, 14 в базисах И – НЕ (ИЛИ – НЕ). Нарисуйте схему и приведите условное обозначение. Поясните принцип приоритетности входов шифратора.

9. Запишите выражение для функции выхода мультиплексора для  $n=2, 3, 4, 5$ . Нарисуйте схему и приведите условное обозначение.

10. Постройте схему на основе мультиплексора для генерирования сигналов



11. Нарисуйте структурную схему  $n$ -разрядного ПЗУ чисел на основе мультиплексора,  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

12. Запишите выражение для функций выходов демультиплексора при  $n=2, 3, 4, 5$ . Нарисуйте схему и приведите условное обозначение.

13. Постройте дешифратор на основе демультиплексора при  $n=2, 3, 4, 5$ .

14. Поясните принцип двоичного суммирования чисел при  $n=4, 5, 6, 7$ . Постройте схему двоичного сумматора и приведите условное обозначение.

15. Поясните принцип каскадирования одноразрядных сумматоров при  $n=2, 3, 4, 5$ .

16. Поясните организационную структуру АЛУ.

## 9.7. Ссылки на используемую литературу

[20, 32].

---

## 10. ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТЫ

---

### 10.1. Основные понятия абстрактной теории цифровых конечных автоматов

Выходные сигналы комбинационных цифровых устройств полностью определяются в любой момент времени комбинацией сигналов на их входах. В этой связи КЦУ иногда называют автоматами без памяти, т.е. КЦУ не позволяют учитывать значения логических переменных, появлявшихся ранее. Многие же задачи требуют учитывать предысторию процесса.

В общей теории автоматов вводится понятие *«абстрактный автомат»* – это математическая идеализация реального объекта или системы, перерабатывающей некоторую входную информацию. Это понятие не связано с конкретным физическим смыслом; абстрактная теория автоматов своей главной задачей имеет изучение общих особенностей поведения автоматов и решает в основном вопросы анализа их внешнего функционирования.

Прикладные разделы теории автоматов рассматривают техническую реализацию автоматов на той или иной физической базе. В прикладном, техническом смысле *цифровым автоматом* (последовательностным устройством) называется более сложный, чем КЦУ, преобразователь дискретной информации, имеющий некоторое конечное число различных внутренних состояний (так называемый *конечный цифровой автомат – КЦА*).

Под воздействием входных сигналов  $X$  (входного слова) автомат последовательно переходит из одного состояния в другое и выдает выходной сигнал (выходное слово)  $Y$ . Выходное слово  $Y$  определяется в общем случае поступившим входным словом  $X$  и внутренним состоянием автомата  $S$ , которое, в свою очередь, явилось результатом воздействия на автомат предыдущего входного сигнала.

Введем понятие *автоматного (дискретного) времени*. Для КЦА автоматное время может представлять собой последовательность событий, например испытаний, номер во входной последовательности и, наконец, реальное время  $t$ . Автоматное время удобно представлять в виде последовательности  $1, 2, \dots, n$ . Если интервал между двумя последовательными моментами автоматного времени постоянен, строго соответствует физиче-

скому времени, то такой автомат называется синхронным. Для асинхронного автомата нет жесткого масштабного соответствия между физическим временем и последовательностью событий в нем.

КЦА рассматривается как *абстрактный конечный автомат (АКА)*, если не исследуется его внутренняя структура. Для задания АКА вводится три конечных множества:

- входных сигналов  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_l\}$ ;
- выходных сигналов  $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m\}$ ;
- внутренних состояний  $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_p\}$ .

Абстрактный автомат как преобразователь информации функционирует в дискретном (автоматном) времени по правилам, которые задаются двумя характеристическими функциями, определенными на трех алфавитах:  $X \in \{x_i\}, i = \overline{1, l}; Y \in \{y_i\}, i = \overline{1, m}; S \in \{S_k\}, k = \overline{1, p}$ .

Определение *автомата Мили (Mealy)*:

$$\begin{cases} Y^n = F(X^n, S^n), \\ S^{n+1} = G(X^n, S^n) \end{cases} \quad \text{– функции выходов } Y^n \text{ и переходов } S^{n+1}. \quad (3.1)$$

Определение *автомата Мура (Moore)*:

$$\begin{cases} Y^n = \Phi(X^n), \\ S^{n+1} = G(X^n, S^n) \end{cases} \quad \text{– функции выходов } Y^n \text{ и переходов } S^{n+1}. \quad (3.2)$$

Эти функции лишь декларируют переходы типа  $X^n, S^n \rightarrow Y^n, S^{n+1}$ , но не уточняют, какими конкретно средствами задается эта функциональная связь.

## 10.2. Формы задания абстрактных конечных автоматов

К формам и средствам представления АКА предъявляются следующие требования:

- *полнота представления* – исчерпывающее описание всех компонентов АКА;
- *однозначность представления* – недопущение какой-либо неоднозначности или неопределенности в описании АКА;
- *простота получения* – детерминированный и достаточно простой переход от описания АКА в некоторой исходной форме (словесное описание) к описанию в заданной форме;

- *наглядность представления* – интерпретация с достаточной наглядностью всех основных свойств АКА;

- *удобство в использовании* – применимость форм для преобразования на этапах синтеза *реальных конечных автоматов (РКА)*.

*Представление АКА с помощью таблиц переходов и выходов.* Это представление одно из самых удобных и широкоупотребительных. Таблицы переходов и выходов для АКА Мили имеют число строк, равное числу символов во входном алфавите (т. е.  $l$ ), и число столбцов, равное числу символов в алфавите внутренних состояний (т.е.  $p$ ). В клетках проставляются будущие внутренние состояния  $S^{n+1}$  и текущие выходные сигналы  $Y^n$ . Часто для компактности записи таблицы переходов и выходов представляют в виде совмещенной таблицы.

*Пример.* Для некоторого конкретного автомата Мили ( $X \in \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Y \in \{y_1, y_2\}$ ,  $S \in \{S_1, S_2, S_3\}$ ) таблицы переходов, выходов и совмещенная таблица представлены соответственно в табл. 10.1, 10.2, 10.3.

Таблица 10.1				Таблица 10.2				Таблица 10.3			
$x_i$	$S_k$			$x_i$	$S_k$			$x_i$	$S_k$		
	$S_1$	$S_2$	$S_3$		$S_1$	$S_2$	$S_3$		$S_1$	$S_2$	$S_3$
$x_1$	$S_1$	$S_3$	$S_2$	$x_1$	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$S_1/y_1$	$S_3/y_1$	$S_2/y_2$
$x_2$	$S_3$	$S_1$	$S_2$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$x_2$	$S_3/y_1$	$S_1/y_2$	$S_2/y_1$
$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_1$	$x_3$	$y_2$	$y_2$	$y_1$	$x_3$	$S_1/y_2$	$S_2/y_2$	$S_1/y_1$

Для АКА Мура таблицы выходов и переходов отдельно не строятся ввиду простоты представления таблицы выходов.

*Пример.* Для некоторого конкретного автомата Мура ( $X \in \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Y \in \{y_1, y_2\}$ ,  $S \in \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ) совмещенная таблица представлена в табл. 10.4.

Все указанные таблицы (см. табл. 10.1 – 10.4) соответствуют полностью определенным АКА Мили и Мура. При частично определенных АКА соответствующие клетки помечаются (\*).

					Таблица 10.4				
Вых. сигнал	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$S_k$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$x_i$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$x_1$	$S_1$	$S_3$	$S_4$	$S_2$
$x_2$	$S_4$	$S_2$	$S_1$	$S_3$	$x_3$	$S_2$	$S_1$	$S_4$	$S_2$

Основное достоинство табличного представления – предельная простота составления и непосредственное отображение формул (3.1) и (3.2).

**Представление АКА с помощью графа.** Построение графов для АКА Мили и Мура сходно, за исключением отображения выходных сигналов. Внутренние состояния отображаются вершинами графа, внутренние переходы – направленными дугами. Дуги помечаются входными сигналами, которые вызывают переход. При этом для АКА Мили указывается еще выходной сигнал, сопровождающий данный переход. Выходные сигналы АКА Мура указываются у вершин графа, так как их появление не зависит от входных сигналов (в соответствии с (3.2)).

Для АКА Мили граф согласно табл. 10.3 выглядит, как показано на рис. 10.1, а для автомата Мура (табл. 10.4) граф показан на рис. 10.2.

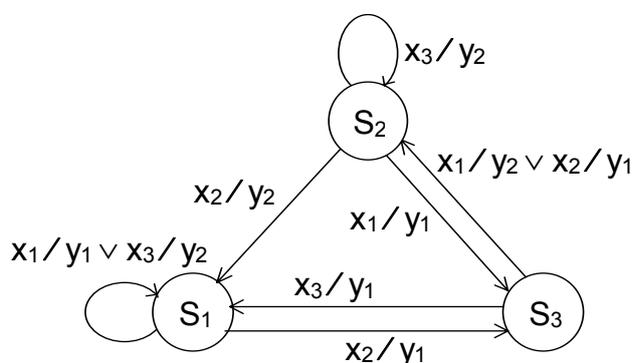


Рис. 10.1

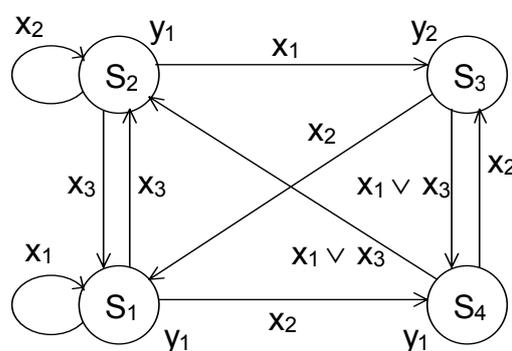


Рис. 10.2

Графическое представление удобно и позволяет сократить число ошибок. С помощью графа легко осуществить словарное преобразование, т. е. получить некоторую выходную последовательность символов при подаче входного слова из  $d$  символов.

**Пример.** Пусть для АКА Мура входное слово  $X = \{x_2, x_2, x_1, x_1, x_2\}$ . Считая исходным состояние автомата  $S_1$ , получим последовательность состояний  $S = \{S_4, S_3, S_4, S_2, S_2\}$  и слово выходных символов  $Y = \{y_1, y_2, y_1, y_1, y_1\}$ .

**Матричное представление АКА.** Матричное представление автомата соединяет черты графического и табличного представлений. Напоминая по внешнему виду таблицу, оно, тем не менее, прежде всего отражает структурные особенности графа.

Матрица АКА Мили – квадратная, строки и столбцы соответствуют текущим и последующим состояниям. В клетках матрицы помечаются условия перехода, т. е. необходимые входные сигналы и появляющиеся при этом выходные сигналы. Матрица АКА Мура имеет дополнитель-

ный столбец сигналов выходов, зависящих от внутренних текущих состояний.

Матричное представление для вышеприведенных АКА Мили и Мура показано соответственно в табл. 10.5 и 10.6.

Таблица 10.5

$S_k^{n+1} \backslash S_k^n$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$S_1$	$x_1/y_1 \vee x_3/y_2$	–	$x_2/y_1$
$S_2$	$x_2/y_2$	$x_3/y_2$	$x_1/y_1$
$S_3$	$x_3/y_1$	$x_1/y_2 \vee x_2/y_1$	–

Таблица 10.6

$S_k^{n+1} \backslash S_k^n$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$y_j^n$
$S_1$	$x_1$	$x_3$	–	$x_2$	$y_1$
$S_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	–	$y_1$
$S_3$	$x_2$	–	–	$x_1 \vee x_3$	$y_2$
$S_4$	–	$x_1 \vee x_3$	$x_2$	–	$y_1$

Матрица переходов позволяет с достаточной простотой обнаруживать: 1) изолированные вершины; 2) тупиковые вершины; 3) переходящие вершины (к которым нет переходов); 4) переменные (нормальные) вершины.

*Пример.* Для некоторого автомата Мура матрица переходов выглядит, как показано в табл. 10.7, из чего следует:

Таблица 10.7

$S_k^{n+1} \backslash S_k^n$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$y_j^n$
$S_1$	$x_1 \vee x_2$	–	–	–	$y_1$
$S_2$	$x_2$	$x_1$	–	–	$y_1$
$S_3$	–	–	$x_1 \vee x_2$	–	$y_2$
$S_4$	$x_2$	$x_1$	–	–	$y_1$

- $S_1$  – тупиковая вершина;
- $S_3$  – изолированная вершина;
- $S_4$  – переходящая вершина;
- $S_2$  – переменная вершина.

### 10.3. Абстрактный синтез конечных автоматов

Основная задача любого конечного автомата – дискретное преобразование информации. Допустимо предположить наличие эквивалентных автоматов, которые одинаково осуществляют это преобразование.

*Эквивалентность конечных автоматов.* Два АКА будем считать *эквивалентными*, если выполняются следующие условия:

- входные и выходные алфавиты не содержат внутри себя тождественных или повторяющихся символов и могут быть взаимно однозначно отображены друг на друга;
- оба автомата определены на одном и том же классе допустимых входных последовательностей символов;
- при подаче на АКА одинаковых входных последовательностей на выходах появляются одинаковые (может быть со сдвигом на конечное число тактов автоматного времени) выходные последовательности.

Если длина входных последовательностей не ограничена, то АКА обладают полной эквивалентностью. Если длина последовательности  $k$  символов, то автоматы  $k$ -эквивалентны. Это более слабая эквивалентность, так как на  $k+1$ -м символе может наступить неэквивалентность.

**Эквивалентные преобразования конечных автоматов** (табл. 10.8). Рассмотрим два АКА Мили и Мура, заданные с помощью своих графов (рис. 10.3, а, б). Их начальные состояния  $S_1$  и  $S_1^*$ . Подадим на входы АКА одно и то же входное слово  $X_{7,1} = \{x_1, x_2, x_2, x_1, x_1, x_2, x_2\}$ .

Таблица 10.8

Автоматное время	1	2	3	4	5	6	7	8
Входное слово	$X_{7,1}$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$
АКА Мили	$S_k^n$	$S_1$	$S_3$	$S_2$	$S_3$	$S_1$	$S_3$	$S_2$
АКА Мура	$Y_j^n$	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_2$	$y_1$	$y_1$	$y_2$
	$S_k^{*n}$	$S_1^*$	$S_4^*$	$S_3^*$	$S_5^*$	$S_2^*$	$S_4^*$	$S_3^*$
	$Y_i^n$	$y_1$	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_2$	$y_1$	$y_2$

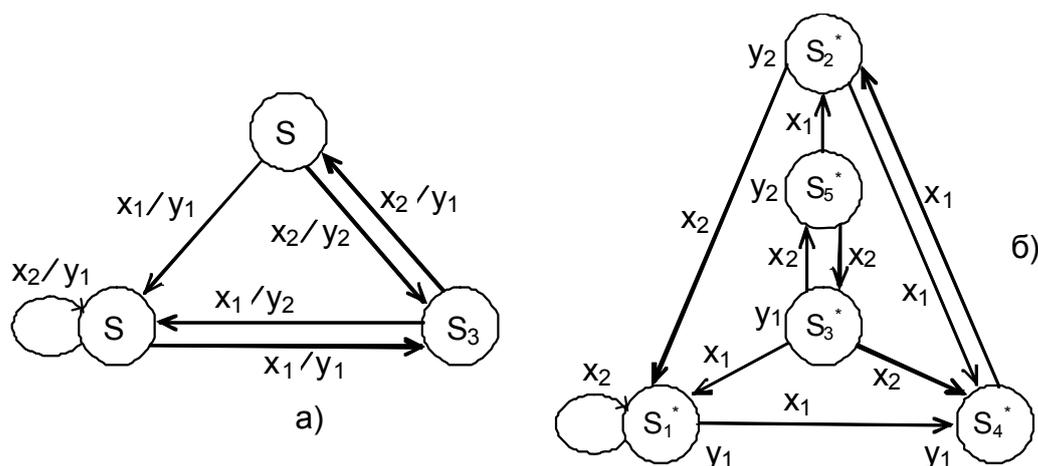


Рис. 10.3

Это эквивалентные АКА, они ведут себя одинаково, с той лишь разницей, что выходная последовательность АКА Мура запаздывает на один такт автоматного времени по отношению к выходной последовательности АКА Мили. Первый выходной символ АКА Мура в этой связи игнорируется.

**Переход от автомата Мили к автомату Мура.** С учетом того, что выходной сигнал эквивалентного АКА Мура отстает на один такт автоматного времени, выходной сигнал в клетке с координатами  $(S_k, x_i)^n$  совмещенной таблицы АКА Мили будет определять выходной сигнал для будущего внутреннего состояния  $S_b^{n+1}$  автомата Мура.

Таким образом, структура автомата Мура будет определяться парами  $S_b^{n+1}/y_j^n$  в клетках исходной таблицы (см. табл. 10.8) с координатами  $(S_k, x_i)^n$  автомата Мили. Поскольку в табл. 10.8 одним и тем же состоянием  $S_b^{n+1}$  могут в различных клетках соответствовать различные выходные сигналы (т. е. переход в  $S_b^{n+1}$  может быть под воздействием различных входных сигналов  $x_i^n$  и при этом могут быть различные выходные сигналы  $y_j^n$ ), то одному и тому же внутреннему состоянию АКА Мили могут соответствовать несколько внутренних состояний автомата Мура, каждое из которых определяется неповторяющейся парой  $S_b^{n+1}/y_j^n$ . Эти состояния можно закодировать координатами клетки  $(S_k, x_i)^n \rightarrow (k, i)$ .

*Алгоритм перехода от АКА Мили к АКА Мура* может быть представлен в следующем виде.

1. Выпишите из совмещенной таблицы переходов и выходов АКА Мили все неповторяющиеся пары и закодируйте их соответствующими состояниями АКА Мура  $S_b^*$ .

2. Соотнесите каждое состояние  $S_k$  автомата Мили со множеством состояний автомата Мура  $S_b^*$ .

3. Заполните переходы в таблице переходов и выходов АКА Мура следующим образом. Если состояние автомата Мура  $S_b^*$  относится к множеству  $S_k$  состояний автомата Мили, то в столбец переходов из  $S_b^*$  под воздействием  $x_i$  необходимо проставить состояния  $S_{bi}^*$ , соответствующие столбцу переходов из  $S_k$  автомата Мили.

4. Выходные сигналы для каждого состояния  $S_b^*$  находятся в клетке с координатами  $(k, i)$ , т.е. в паре  $S_b^{n+1}/y_j^n$ .

*Пример.* Преобразуйте АКА Мили (см. рис.10.3, а, табл. 10.9) в эквивалентный ему АКА Мура. Следуя изложенному алгоритму, получим:

$$1) S_1/y_1 \rightarrow S_{21}^* = S_{12}^* \Rightarrow S_1^*$$

$$S_1/y_2 \rightarrow S_{31}^* \Rightarrow S_2^*$$

$$S_2/y_1 \rightarrow S_{32}^* \Rightarrow S_3^*$$

$$S_3/y_1 \rightarrow S_{11}^* \Rightarrow S_4^*$$

$$S_3/y_2 \rightarrow S_{22}^* \Rightarrow S_5^*$$

$$2) S_1 \in \{S_1^*, S_2^*\}$$

$$S_2 \in \{S_3^*\}$$

$$S_3 \in \{S_4^*, S_5^*\}$$

3) и 4) см. табл. 10.9.

Таблица 10.9

$S_k \backslash x_i$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$x_1$	$S_3/y_1$	$S_1/y_1$	$S_1/y_2$
$x_2$	$S_1/y_1$	$S_3/y_2$	$S_2/y_1$

Таблица 10.10

$y_j$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_1$	$y_2$
$S_k$	$S_1^*$	$S_2^*$	$S_3^*$	$S_4^*$	$S_5^*$
$x_i$	$S_4^*$	$S_4^*$	$S_1^*$	$S_2^*$	$S_2^*$
$x_1$	$S_4^*$	$S_4^*$	$S_1^*$	$S_2^*$	$S_2^*$
$x_2$	$S_1^*$	$S_1^*$	$S_5^*$	$S_3^*$	$S_3^*$

Например,  $S_4^*$  относится к  $S_3$ , тогда в столбец переходов для  $S_4^*$  подставляются состояния для переходов из  $S_3$ , т. е.  $S_1/y_2 \rightarrow S_2^*$  и  $S_2/y_1 \rightarrow S_3^*$ .

Таким образом, совмещенная таблица соответствует АКА Мура, граф

которого представлен на рис. 10.3, б.

**Переход от автомата Мура к автомату Мили.** Для осуществления обратного перехода от автомата Мура к автомату Мили удобно воспользоваться представлением автомата Мура в виде графа. Сущность преобразования заключается в том, что выходные сигналы, относящиеся к вершинам автомата Мура, будут помечать все дуги, идущие в эту вершину. Тем самым одновременно производится изменение момента автоматного времени, к которому относится сам выходной сигнал, на один такт вперед.

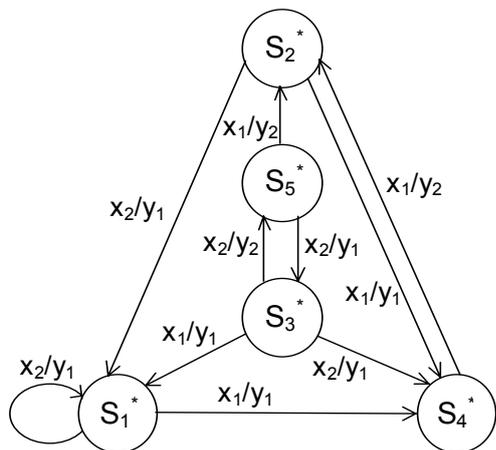


Рис. 10.4

**Пример.** Преобразуйте АКА Мура (см. рис. 10.3, б) в АКА Мили. После указанных выше преобразований с выходными сигналами граф автомата будет выглядеть, как показано на рис. 10.4.

Полученный граф автомата Мили отличается по числу состояний от рассмотренного на рис. 10.3, а графа автомата Мили, хотя и эквивалентен ему.

Здесь возникает вопрос о минимизации числа состояний абстрактных автоматов.

**Минимизация числа состояний абстрактных автоматов.** Сущность метода минимизации заключается в разбиении всего алфавита внутренних состояний на попарно непересекающиеся классы эквивалентных состояний с заменой далее каждого класса эквивалентности одним состоянием. Получающийся в результате минимальный автомат имеет столько же состояний, на сколько классов эквивалентности разбивается все множество внутренних состояний заданного автомата.

**Эквивалентными** называются такие два состояния автомата, замена которых одного на другое не изменяет результатов преобразования входной последовательности на всем множестве символов. Можно, как и ранее, говорить как о полной эквивалентности ( $\pi$ ), так и о  $k$ -эквивалентных внутренних состояниях ( $\pi_k$ ).

**Процедура минимизации** выглядит следующим образом.

1. Находят последовательные разбиения  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  алфавита внутренних состояний на классы 1, 2, ...,  $k$ -эквивалентных состояний до тех пор, пока на каком-то шаге  $\pi_k = \pi_{k+1}$ . Очевидно, при этом можно утверждать, что  $k$ -эквивалентное состояние является полностью эквивалентным. Число шагов процедуры не превышает  $p-1$ , где  $p$  – размер алфавита внутренних состояний.

2. В каждом классе эквивалентности выбирают по одному символу, которые и составляют новый алфавит внутренних состояний минимизированного автомата.

3. Таблицы переходов и выходов минимизированного автомата получают из таблиц исходного автомата путем вычеркивания столбцов с состояниями, не вошедшими в минимизированный алфавит, и замены в оставшихся столбцах внутренних состояний исходного автомата эквивалентными им состояниями минимизированного автомата.

4. В качестве начального выбирают начальное состояние исходного автомата или любое, ему эквивалентное.

**Пример.** Минимизируйте автомат Мили, заданный графом на рис. 10.4.

Таблица 10.11

$x_i \backslash S_k$	$S_1^*$	$S_2^*$	$S_3^*$	$S_4^*$	$S_5^*$
$x_1$	$S_4^*/y_1$	$S_4^*/y_1$	$S_1^*/y_1$	$S_2^*/y_2$	$S_2^*/y_2$
$x_2$	$S_1^*/y_1$	$S_1^*/y_1$	$S_5^*/y_2$	$S_3^*/y_1$	$S_3^*/y_1$

Совмещенная таблица переходов и выходов автомата представлена в табл. 10.11.

1. Проведем разбиение на класс 1-эквивалентности по реакции на слово длиной в один символ ( $x_1 \vee x_2$ ). К понятию **реакции** относится только **выходной сигнал**, поскольку основное назначение автомата – осуществление словарного преобразования.

Для класса  $\pi_1$  выполняется правило:

$$\pi_1 = \{S_1^1, S_2^1, S_3^1\}, \text{ где } S_1^1 = \{S_1^*, S_2^*\}, S_2^1 = \{S_3^*\}, S_3^1 = \{S_4^*, S_5^*\}.$$

Результаты разбиения отражены в табл. 10.12.

Таблица 10.12

$x_i$	$S_k$				
	$S_1^1$		$S_2^1$	$S_3^1$	
	$S_1^*$	$S_2^*$	$S_3^*$	$S_4^*$	$S_5^*$
$x_1$	$S_3^1$	$S_3^1$	$S_1^1$	$S_1^1$	$S_1^1$
$x_2$	$S_1^1$	$S_1^1$	$S_3^1$	$S_2^1$	$S_2^1$

2. Дальнейшее разбиение на классы приводит к тому, что  $\pi_2 = \pi_1 = \pi$ . Перекодировав оставшиеся состояния:

$$S_1^1 \rightarrow S_1; S_2^1 \rightarrow S_2; S_3^1 \rightarrow S_3, \text{ получим}$$

совмещенную таблицу автомата (см. табл. 10.12), соответствующую АКА Мили, заданного графом на рис. 10.3, а.

## 10.4. Структурный синтез конечных автоматов

Под *структурным синтезом* конечных автоматов будем понимать построение реальных двоичных цифровых устройств, реализующих функции заданных АКА. При этом будем полагать, что вопрос минимизации количества внутренних состояний АКА уже решен.

*Задачи структурного синтеза конечных автоматов.* Как правило, для построения цифровых устройств используют триггеры, число внутренних состояний которых равно двум. Триггеры в этой связи называют *элементарными автоматами* (ЭА), или простейшими *элементами памяти* (ЭП). Таким образом, задача структурного синтеза на уровне логических схем сводится к построению автоматов из элементарных автоматов и комбинационных схем. Исходная информация для структурного синтеза может быть взята из той или иной формы задания автомата.

Структурный синтез начинается с двоичного кодирования внутренних состояний автомата, что задает взаимно-однозначное соответствие между состояниями автомата и комбинациями состояний ЭА. Двоичное кодирование позволяет поведение синтезируемого автомата, первоначально заданного, к примеру, таблицей переходов и выходов, описать в терминах двузначной логики, т. е. в выражениях булевой алгебры. В качестве таких выражений используют *функции внешних переходов ЭА*, определяющие изменение состояний каждого из ЭА (включая рассматриваемый) и происходящих на автомат входных сигналов. Слово “внешний” подчеркивает тот факт, что функционирование ЭА в синтезируемой структуре зависит не только от его собственного состояния, но и от состояний других ЭА, входящих в эту структуру.

Функции внешних переходов зависят от выбранного способа кодирования внутренних состояний синтезируемого автомата, следовательно, можно предположить наличие оптимального кодирования.

Для того чтобы каждый ЭА работал в соответствии со своей функцией внешних переходов, на его входах необходимо наличие строго определенных управляющих сигналов. Эти сигналы определяются по логическим выражениям, которые называются *функциями возбуждения ЭА*.

Функции возбуждения зависят не только от функции внешних переходов, но и от внутреннего функционирования. Естественно, что для разных ЭА следует формировать разные функции возбуждения. Отсюда следует задача оптимального выбора типа ЭА, приводящего к наипро-

стейшей форме выражений для функций возбуждения, требующей минимальных затрат для их реализации.

Двоичное кодирование внутренних состояний АКА позволяет также решить задачу формирования выходных сигналов синтезируемого устройства. Функции выходов, заданные таблицей выходов, преобразуются к системе комбинационных логических выражений, описывающих двоичные выходные сигналы, как функции входных сигналов автомата и состояний составляющих его элементарных автоматов. Сложность этих логических выражений зависит от способа кодирования, поэтому и здесь можно говорить об оптимальном кодировании внутренних состояний автомата.

**Блок-схема конечного автомата.** В отличие от АКА с одним входом  $X$  и одним выходом  $Y$  реальный конечный автомат имеет  $l$  входных и  $m$  выходных сигналов, каждый из которых может принимать значения 0 и 1. Это следует из определения входных и выходных алфавитов ( $X \in x_i, i = \overline{1, l}, Y \in y_j, j = \overline{1, m}$ ) и внутренних состояний  $S \in S_k, k = \overline{1, p}$ .

Структура реального конечного автомата выглядит, как показано на рис. 10.5. В структуре РКА можно выделить две части: комбинационную схему, состоящую из двух КЦУ, и запоминающее устройство (ЗУ), содержащее  $N$  простейших элементов памяти – триггеров  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , на которые действуют сигналы возбуждения  $\{q_i\}$ .

Под воздействием  $q_i$  в моменты времени, определенные тактовыми импульсами (ТИ), триггер  $T_i$  пере-

ходит в одно из двух состояний: 0 или 1. Состояние  $T_i$  отражает сигнал  $Q_i$ , а совокупность состояний всех триггеров  $\{Q_i\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  – внутреннее состояние РКА. Если имеется  $N$  триггеров, то возможное число внутренних состояний равно  $2^N$ .

Комбинационные цифровые устройства КЦУ<sub>Y</sub> и КЦУ<sub>Q</sub> описываются логическими функциями  $Y^n = F_1(X^n, Q^n)$  и  $\{q_i\}^n = \Phi(Q^n, X^n)$ .

РКА работает под воздействием входных сигналов  $X$ , поступающих в моменты автоматного времени  $1, 2, \dots, n$ , задаваемого ТИ. При этом автомат

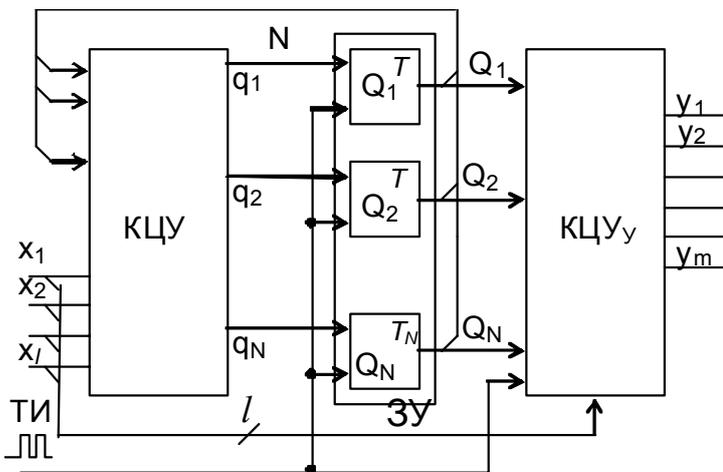


Рис. 10.5

переходит из одного состояния в другое в соответствии с функцией переходов и вырабатывает выходные сигналы в соответствии с функцией выходов.

Таким образом РКА последовательно преобразовывает последовательность кодов  $X$  разрядностью  $l$  в последовательность кодов  $Y$  разрядностью  $m$  (последовательностное цифровое устройство).

Наибольшая трудность в синтезе РКА – получение функций возбуждения  $q_i^n$ , в зависимости от которых каждый элементарный автомат-триггер перейдет в следующее состояние  $Q_i^{n+1}$ . Трудоемкость получения функций возбуждения существенно зависит от  $N$  и  $l$ .

Синтезируемый автомат можно проектировать как автомат Мура или автомат Мили. В том и другом случае РКА может быть построен по синхронному или асинхронному принципу. Как правило, входные сигналы задаются в логике уровней, поэтому “синхронность” или “асинхронность” автомата определяется заданием автоматного времени, т. е. характером реакции автомата на входной сигнал (рис. 10.6).

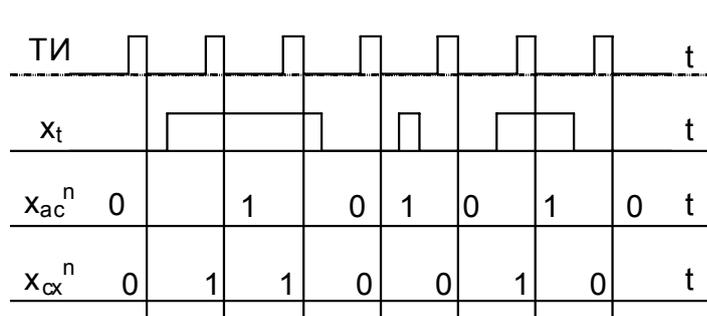


Рис. 10.6

Для синхронного автомата входное двоичное слово  $x^l$  интерпретируется в соответствии с тактирующими импульсами ТИ (автоматное время) как 0110010, а для асинхронного – как 0101010 в соответствии с уровнями на входе.

В *асинхронных КА* сигналы  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$  изменяются с некоторой задержкой относительно входного сигнала, в общем случае ненормированной. Отсюда следует, что каждому изменению сигнала на входе соответствует два в общем случае разных сигнала обратной связи  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ , которые должны формировать одни и те же функции возбуждения элементарных автоматов. Чтобы разброс в скорости срабатывания ЭА не приводил к нарушению детерминированности переходов, два соседних состояния РКА должны различаться лишь состоянием одного ЭА. Это влечет жесткие ограничения к характеру кодирования внутренних состояний автомата и необходимость использования значительного числа ЭА. Такое усложнение иногда окупается максимальным быстродействием устройства.

В *синхронных КА* входные сигналы ЭА изменяются в промежутках между синхронизирующими импульсами и остаются неизменными в интервалах опроса входных сигналов синхросигналами. Это обстоятельство

обеспечивает устойчивую работу автомата при изменении состояний любого числа ЭА (не нарушается детерминированность его переходов), что снимает ограничения на кодирование внутренних состояний автомата и позволяет использовать все возможные состояния элементарных автоматов.

Таким образом, необходимое для синтеза количество ЭА  $N$  определяется числом  $p$  внутренних состояний КА:  $N = \text{int}[\log_2 p]$ , где  $\text{int}$  – ближайшее большее целое число к  $\log_2 p$ . Хотя синхронные автоматы имеют меньшее быстродействие, чем асинхронные, они получили большее распространение в силу их простоты, меньшей чувствительности к скорости изменения входных сигналов и не критичности к временным характеристикам составляющих их логических элементов.

### **10.5. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение цифрового автомата.
2. Опишите формы задания АКА.
3. Опишите представление АКА с помощью таблиц переходов и выходов.
4. Опишите представление АКА с помощью графов и матриц.
5. Дайте определение эквивалентности конечных автоматов.
6. Опишите особенности автоматов Мили и Мура.
7. Опишите сущность структурного синтеза конечных автоматов.

### **10.6. Ссылки на используемую литературу**

[20, 30, 32].

---

---

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

1. *Рабинер, Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов : пер. с англ. / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; под ред. Ю. Н. Александрова. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
2. *Оппенгейм, А. В.* Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер ; под ред. С. Я. Шаца. – М. : Связь, 1979. – 416 с.
3. *Гольденберг, Л. М.* Цифровая обработка сигналов : справочник / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1985. – 312 с.
4. *Кузенков, Б. Д.* Методы и устройства цифровой обработки сигналов / Б. Д. Кузенков. – Куйбышев : КУАИ, 1988. – 96 с.
5. Цифровая обработка сигналов / Владим. политехн. ин-т ; сост. : А. К. Бернюков, Е. А. Архипов. – Владимир, 1990. – 40 с.
6. Проектирование и моделирование бортовых радиолокационных систем : метод. указания / сост. : Е. Н. Богуславчик, Н. П. Пospelова. – М. : МАИ, 1985. – 18 с.
7. *Бернюков, А. К.* Цифровая обработка радиотехнической информации : практикум / А. К. Бернюков ; Владим. гос. техн. ун-т. – Владимир, 1994. – 80 с.
8. *Бернюков, А. К.* Обоснование цифровых структур радиотехнических систем : учеб. пособие / А. К. Бернюков, А. П. Галкин ; Владим. политехн. ин-т. – Владимир, 1985. – 80 с.
9. *Быков, В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Сов. радио, 1971. – 328 с.
10. *Бернюков, А. К.* Цифровая обработка сигнала международной системы посадки самолетов / А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1981. – Т. 36, № 9. – С. 26 – 29.
11. *Он же.* Распознавание помех при радионавигации и посадке самолетов / А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1986. – Т. 29, № 7. – С. 54 – 59.
12. *Он же.* Микропроцессорная функционально-адаптивная обработка сигналов систем радионавигации и посадки самолетов в бортовой подсистеме / А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1988. – № 7. – С. 78 – 83.
13. *Он же.* Функционально-адаптивная обработка информации в бортовых устройствах радиосистем навигации и посадки самолетов / А. К. Бернюков // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13, № 2. – С. 8 – 13.

14. Дискретное преобразование Фурье : метод. указания / сост. Б. Д. Кузенков. – Куйбышев : КУАИ, 1986. – 36 с.
15. *Ахмед, Н.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов : пер. с англ. / Н. Ахмед, К. Р. Рао ; под ред. И. Б. Фоменко. – М. : Связь, 1980. – 240 с.
16. *Бобнев, М. П.* Генерирование случайных процессов / М. П. Бобнев. – М. : Энергия, 1971. – 240 с.
17. *Архипов, Е. А.* Гомоморфная фильтрация для разрешения радионавигационных сигналов и переотражений / Е. А. Архипов, А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1986. – № 11. – С. 83 – 86.
18. *Гоноровский, Н. С.* Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / Н. С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
19. *Мизин, И. А.* Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ) / И. А. Мизин, А. А. Матвеев. – М. : Связь, 1979. – 240 с.
20. *Пухальский, Г. И.* Проектирование дискретных цифровых устройств на интегральных микросхемах : справочник / Г. И. Пухальский, Т. Л. Новосельцева. – М. : Радио и связь, 1990. – 304 с.
21. *Богданович, М. И.* Цифровые интегральные микросхемы : справочник / М. И. Богданович [и др.]. – Минск : Беларусь : Полымя, 1996. – 608 с.
22. *Шило, В. Л.* Популярныe цифровые микросхемы : справочник / В. Л. Шило. – М. : Радио и связь, 1987. – 382 с.
23. *Алексенко, А. Г.* Основы микросхемотехники / А. Г. Алексенко. – Изд. 2-е. – М. : Сов. радио, 1977. – 408 с.
24. Интегральные микросхемы : справочник / Б. В. Тарабрин [и др.] ; под ред. Б. В. Тарабрина. – М. : Радио и связь, 1984. – 528 с.
25. *Ланцов, А. М.* Цифровые устройства на комплементарных микросхемах / А. М. Ланцов, Л. Н. Зворыкин, И. Ф. Осипов. – М. : Радио и связь, 1983. – 272 с.
26. TTL. Advanced Low-Power Schottky. Date book. Vol. 2. Texas Instruments, 1983.
27. Проектирование импульсных и цифровых устройств радиотехнических систем : учеб. пособие для радиотехн. специальностей вузов / Ю. П. Гришина [и др.] ; под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высш. шк., 1985. – 319 с.
28. *Гольденберг, Л. М.* Цифровые устройства и микропроцессорные системы. Задачи и упражнения : учеб. пособие для вузов / Л. М. Гольденберг, В. А. Малеев, Г. Б. Мальков. – М. : Радио и связь, 1992. – 256 с.

29. Цифровые и импульсные устройства : метод. указания к лаб. работам / Владим. политехн. ин-т ; сост. А. К. Бернюков. – Владимир, 1992. – 24 с.
30. Цифровая и вычислительная техника : учеб. для вузов / Э. В. Евреинов [и др.] ; под ред. Э. В. Евреинова. – М. : Радио и связь, 1991. – 464 с.
31. Цифровая схемотехника : метод. указания к лаб. работам / Владим. гос. ун-т ; сост. А. И. Никитин. – Владимир, 1999. – 48 с.
32. *Бернюков, А. К.* Цифровые устройства / А. К. Бернюков, А. И. Никитин. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 174 с. – ISBN 5-89368-188-6.
-

Учебное издание

БЕРНЮКОВ Арнольд Константинович

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Подписано в печать 01.04.09.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,28. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.