Владимирский государственный университет

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Алгебраический компонент

Учебно-практическое пособие

Владимир 2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Алгебраический компонент

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2026
ISBN 978-5-9984-2202-7

УДК 510.3:511.1 (075.8)
ББК 22.12я73

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Тихомирова, С. В.
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. Алгебраический компонент [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2026. – 152 с. – ISBN 978-5-9984-2202-7. – Электрон. дан. (3,08 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит базовые теоретические сведения, необходимые для выполнения типовых практических заданий, решения задач по образцу, с применением формул, логических задач, требующих рассуждений. Разработаны тесты, вопросы для самоподготовки, задания рейтинг-контролей и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов вузов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (профиль «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе») всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 43. Библиогр.: 14 назв.

ISBN 978-5-9984-2202-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-практическое пособие «Актуальные вопросы начальной математики. Алгебраический компонент» разработано на основе анализа результатов обучения студентов. Наиболее часто встречающиеся ошибки при решении задач учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» характерны как для заданий алгебраического содержания, так и для геометрических задач. В пособии рассмотрены вопросы, базирующиеся на теории множеств и теории чисел. Планируемое к изданию в 2026 году продолжение «Актуальные вопросы начальной математики. Геометрический компонент» будет включать задачи по аналитической и конструктивной геометрии.

Пособие содержит четыре главы, в которых изложены основы теории, даны практические образцы решений типовых задач, а также приведены тесты для самопроверки и самоконтроля усвоенных знаний и умений, задания рейтинг-контроля и задачи для самостоятельного решения.

В первой главе акцент делается на числовые множества: с опорой на основные понятия теории множеств рассмотрены отношения между числовыми множествами и операции над ними. Во второй главе с практической точки зрения подробно изучаются алгебраические операции на множествах чисел и математических предложений. За основу для решения взяты задания, сформулированные Н. Я. Виленкиным в задачнике-практикуме по математике [2].

Цель третьей главы – развитие навыков быстрого счета, усвоение различных способов доказательства делимости выражений на число и решения квадратных уравнений.

Теоретический материал дополнен пояснительными рисунками, схемами-алгоритмами для решения задач. Для его закрепления предложены практические упражнения, снабженные шагами-рассуждениями для их решения, ссылками на определения, законы, свойства и другие предложения математической теории. Задачи рассматриваются как на множествах абстрактных предметов (не учитывая природу элементов), так и множествах, содержащих числа или геометрические фигуры. Будущий бакалавр направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе») на высоком уровне должен ориентироваться в видах отношений на числовых множествах и множествах геометрических фигур, разбираться в правилах образования числового ряда и действий над числами, в свойствах и признаках конкретной фигуры, уметь классифицировать элементы множеств по разным основаниям.

В главе «Задачи для самостоятельного решения» задания также сгруппированы по темам. Различные типы задач представлены в нескольких вариантах, что обеспечивает полноценную самоподготовку студентов, а также позволяет работать в группе и индивидуально.

При подготовке пособия были проанализированы учебно-практические издания по дисциплине «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов». В результате был отобран материал, вызывающий наибольшие затруднения у студентов при изучении теории и применении ее при решении задач. Наряду с заданиями из учебников, задачников-практикумов по математике для студентов высших педагогических учебных заведений Н. Я. Виленкина, Л. П. Стойловой, Н. Н. Лавровой, актуальными оказались и были учтены в работе над изданием задания из сборников по математике для 7 – 8-х классов А. И. Ершовой, В. В. Голобородько, А. С. Ершовой «Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 8 класса» [12]; В. И. Жохова, Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка «Алгебра: 8-й класс: дидактические материалы» [13], А. Я. Симонова, Д. С. Бакаева, А. Г. Эпельмана и др. «Система тренировочных задач и упражнений по математике» [14].

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные понятия теории множеств. Способы задания числовых множеств

Одно из фундаментальных *неопределяемых* математических понятий – *множество*. Объем понятия *множество* является *бесконечным* (см. [6, гл. 1]). Содержание понятия *множество* можно раскрыть на примерах: множество деревьев в парке, множество цветных карандашей в наборе, множество букв в слове «абитуриент», множество дней в году и др.

Немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918) говорил, что «множество есть многое, мыслимое как единое целое». Множество можно представить как совокупность (собрание, класс, набор) некоторых предметов или объектов, объединённых по какому-либо признаку.

Теория множеств занимается изучением общих свойств множеств, не зависящих от природы объектов, образующих множества. Предметы (объекты), из которых составлено множество, называют *элементами* множества.

Произвольные множества принято обозначать большими латинскими буквами A, B, M, K, ..., а элементы множеств – малыми латинскими буквами a, b, m, k, ... или буквами с индексами (a_1, a_2, a_3, ...).

Если a является элементом множества A, то это записывают в виде $a \in A$ и читают «Элемент a принадлежит множеству A». Если a не содержится в множестве A, то это записывают в виде $a \notin A$ и читают «Элемент a не принадлежит множеству A».

В математике особую роль играют множества, элементами которых выступают математические объекты (числа, точки, уравнения, функции и др.). Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Для них введены общепринятые обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Множество, которое не содержит элементов, называют пустым и обозначают символом $\emptyset$. Пустым будет, например, множество действительных решений уравнения $x^2 + 1 = 0$, множество натуральных решений неравенства $4x + 5 < 3$.

Множество A называют *конечным*, если количество $m(A)$ его элементов можно выразить натуральным числом. Например, множество цифр десятичной системы счисления или множество натуральных круглых чисел первой полусотни будут конечными числовыми множествами, поскольку все их элементы можно пересчитать (то есть количество элементов множеств известно). В десятичной системе счисления для записи чисел используются десять цифр от нуля до девяти. В первой полусотне натуральных чисел круглыми будут следующие пять: 10, 20, 30, 40, 50.

Множество A называют *бесконечным*, если количество его элементов нельзя выразить натуральным числом. Например, множество натуральных чисел, или множество нечетных целых чисел, или множество всевозможных дробей будут бесконечными. Элементы указанных множеств пересчитать (пронумеровать) не представляется возможным.

Числовое множество считается *заданным*, если есть способ, позволяющий для любого элемента-числа решить, принадлежит или не принадлежит это число данному множеству.

К основным способам задания числовых множеств относятся:

– перечисление элементов множества $A = \{a, b, c, d\}$ (например, множество натуральных круглых чисел первой полусотни в данном случае записывается так: $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, то есть элементы множества записываются в фигурных скобках через запятую);

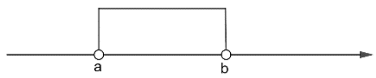
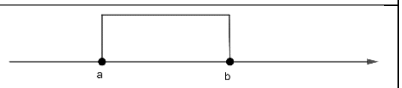
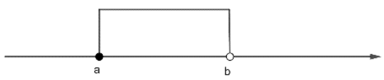
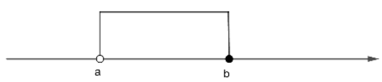
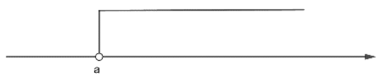
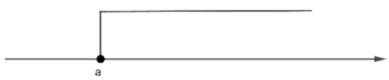
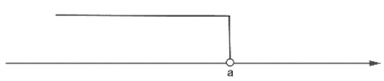
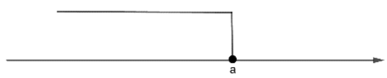
– указание *характеристического* свойства $P(x)$ (характеристическим называют такое свойство, которым обладают все элементы x множества и только они). Форма записи в этом случае имеет вид $A = \{x|\ P(x)\}$, где в фигурных скобках после обозначения элемента x множества ставится вертикальная черта, а затем указывается характеристическое свойство $P(x)$. Читается: «Множество A состоит из элементов x таких, что для них выполнено свойство $P(x)$» или «Множество A содержит элементы x такие, что для них справедливо условие $P(x)$».

Для введения множества с относительно небольшим набором элементов подходит и тот и другой способ задания. Например, множество натуральных чисел, меньших 8, можно задать как перечислением элементов $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, так и с помощью указания характеристического свойства $A = \{x|x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 8\}$.

В случае когда конечное множество содержит значительное количество элементов, а также для задания бесконечных множеств, удобно формулировать характеристическое свойство для элементов числового множества. Например, для множества натуральных общих делителей чисел 3762 и 4446 записываем: $A = \{x | x \in \mathbb{N}$ и $x = \text{ОД}(3762, 4446)\}$, для множества четных натуральных чисел: $A = \{x | x \in \mathbb{N}$ и $x = 2n\}$.

Замечание. Для обозначения произвольного числового множества используют A, произвольного элемента множества – x, но возможно использование любой буквы латинского алфавита: в случае множеств – прописной, элементов множества – строчной. Характеристическое свойство принято обозначать $P(x)$ – от «предикат», но возможно использование букв греческого алфавита – свойство α, свойство β, свойство $\gamma \ldots$

Особого внимания требует множество действительных чисел. Геометрической моделью множества $\mathbb{R}$ является числовая (координатная) прямая. Это значит, что любое действительное число может быть изображено точкой на этой прямой, и наоборот, любая точка числовой прямой соответствует какому-либо действительному числу. Кроме того, если $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, то на числовой прямой можно рассмотреть следующие множества:

Множество	Обозначение	Название	Изображение
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	(a, b)	Интервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Отрезок	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a, +\infty)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$(-\infty, a)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	Бесконечный полуинтервал	

1.2. Отношения между числовыми множествами

Множества могут содержать или не содержать одинаковые элементы. В зависимости от этого выделяют различные *отношения* между множествами. Множества произвольной природы и множества натуральных, целых, рациональных чисел, а также отношения между ними наглядно изображают с помощью *кругов Эйлера*. Построенные диаграммы называют *диаграммами Эйлера – Венна*. Множество действительных чисел и отношения между ними удобно изображать на числовой прямой. Рассмотрим отношения между числовыми множествами.

Определение. Множества A и B находятся в *отношении пустого пересечения* $A \cap B = \emptyset$, если у них нет общих элементов, т. е. нет ни одного элемента x, для которого условия $x \in A$ и $x \in B$ выполнялись бы одновременно.

Диаграмма Эйлера – Венна в этом случае выглядит следующим образом (рис. 1).

Например, A – множество натуральных чисел, которые меньше 100, $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 100\}$, B – множество трехзначных натуральных чисел, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 100 \leq x < 1000\}$. Множества A и B находятся в отношении пустого пересечения $A \cap B = \emptyset$, так как нет ни одного числа, которое было бы меньше 100 и трехзначное одновременно.

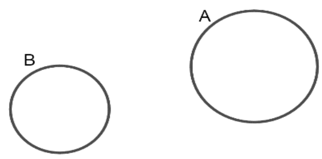


Рис. 1

Пусть заданы множества $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \geq 5\}$ и $B = \{x | x \in \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2\}$. Какие числа составляют множества A и B? Целые числа, удовлетворяющие некоторым условиям: элементы множества A по модулю не меньше 5, элементы множества B по модулю не больше 2. Можно ли назвать элементы множеств A и B? Для ответа на вопрос требуется решить неравенства $|x| \geq 5$ и $|x| \leq 2$.

По определению модуля числа $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$ получаем для первого неравенства $\begin{cases} x \geq 5, \text{если } x \geq 0 \\ -x \geq 5, \text{если } x < 0 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -5 \end{cases}$. Значит, множество $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 5 \text{ или } x \leq -5\}$, следовательно, ему будут принадлежать числа $\pm 5, \pm 6, \pm 7, \ldots$

Для второго неравенства $|x| \leq 2$ в множестве целых чисел по определению модуля $\begin{cases} x \leq 2, \text{если } x \geq 0 \\ -x \leq 2, \text{если } x < 0 \end{cases}$, следовательно,

$\begin{cases} x \le 2, \text{если } x \ge 0 \\ x \ge -2, \text{если } x < 0 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -2 \le x < 0 \end{cases}$. Значит, множество $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -2 \le x \le 2\}$, ему будут принадлежать числа $\pm 2, \pm 1, 0$. Таким образом, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Среди чисел множеств A и B нет общих элементов, поэтому множества A и B находятся в отношении пустого пересечения, $A \cap B = \emptyset$.

Определение. Множества A и B находятся в *отношении пересечения,* $A \cap B \ne \emptyset$, если выполнены условия:

1) существуют элементы x, для которых $x \in A$ и $x \in B$ одновременно;

2) существуют элементы y, для которых $y \in A$ и $y \notin B$ одновременно;

3) существуют элементы z, для которых $z \notin A$ и $z \in B$ одновременно.

Диаграмма Эйлера – Венна данного отношения представлена на рис. 2.

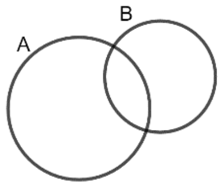


Рис. 2

Например, множества $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 3\}$ находятся в отношении пересечения $A \cap B \ne \emptyset$, потому что:

1) существуют числа x, которые делятся на 2 ($x \in A$) и делятся на 3 ($x \in B$) одновременно (например, $6, 12, 102$);

2) существуют числа y, которые делятся на 2 ($x \in A$) и не делятся на 3 ($y \notin B$) одновременно (например, $2, 4, 8, 10$);

3) существуют числа z, которые не делятся на 2 ($z \notin A$) и делятся на 3 ($z \in B$) одновременно (например, $3, 9, 15$).

Если $A \cap B = \emptyset$, то и $B \cap A = \emptyset$. Если $A \cap B \ne \emptyset$, то и $B \cap A \ne \emptyset$. Если $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$, то необязательно $A \cap C = \emptyset$. При выполненных условиях диаграмма может выглядеть так, как на рис. 3, и тогда заключение $A \cap C = \emptyset$ не выполняется.

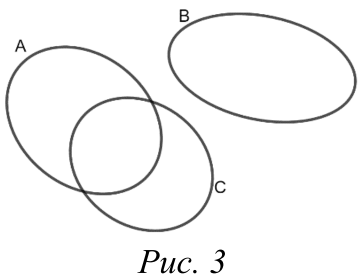


Рис. 3

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 4\}$, B – множество простых чисел, $C = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 6\}$. Действительно, среди чисел, кратных 4, и простых чисел нет общих элементов. Поэтому множества A и B находятся в отношении пустого пересечения, $A \cap B = \emptyset$. Точно так же множество B простых чисел и множество C чисел, кратных 6, не имеют общих элементов, то есть множества B и C не пересекаются, $B \cap C = \emptyset$. Среди множеств чисел, кратных 4 (A), и чисел, кратных 6 (C), существуют как общие (например, $12, 24, 36 \in A$ и $12, 24, 36 \in C$), так и различные числа – свои в каждом множестве (например, $4, 8, 16 \in A$ и $6, 18, 30 \in C$). Поэтому множества A и C находятся в отношении пересечения. Аналогично, если $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$, то необязательно $A \cap C \neq \emptyset$. На диаграмме (рис. 4) видно, что при данных условиях заключение ($A \cap C \neq \emptyset$) не выполняется.

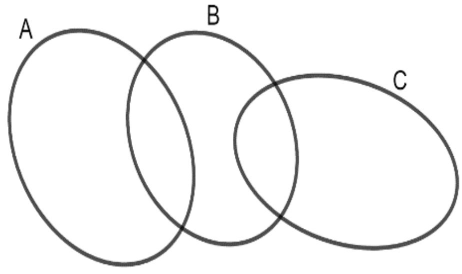


Рис. 4

Данную диаграмму подтверждает набор множеств A, B и C. Пусть A – множество двузначных чисел, B – множество четных чисел, C – множество трехзначных чисел. Среди множеств чисел двузначных и четных существуют общие числа (например, $10, 28 \in A$, $10, 28 \in B$) и различные числа, то есть принадлежащие только одному из множеств (например, числа $11, 75 \in A$, но $11, 75 \notin B$, а числа $8, 1000 \in B$, но $8, 1000 \notin A$). Значит, множество A двузначных чисел пересекается с множеством B четных чисел $A \cap B \neq \emptyset$. Аналогичным образом устанавливаем, что множество C трехзначных чисел находится в отношении пересечения с множеством B четных чисел $C \cap B \neq \emptyset$ (выполнены три условия: $700, 998 \in C$ и $700, 998 \in B$; $701, 997 \in C$ и $701, 997 \notin B$; $8, 1000 \notin C$ и $8, 1000 \in B$). Среди двузначных и трехзначных чисел не найдется ни одного общего элемента, поэтому множества A и C не пересекаются, $A \cap C = \emptyset$.

Определение. Множества A и B находятся в *отношении включения,* $A \subset B$, если выполнены условия:

1) все элементы x множества A ($x \in A$) являются элементами множества B ($x \in B$) одновременно;

2) существуют такие элементы y, для которых $y \notin A$ и $y \in B$ одновременно.

Вид диаграммы Эйлера – Венна в этом случае показан на рис. 5.

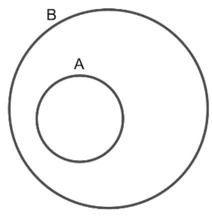


Рис. 5

Например, $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 4\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$. Множества A и B находятся в отношении включения, $A \subset B$:

1) потому что все числа x, кратные 4 ($x \in A$), – четные ($x \in B$) одновременно (например, $4, 8, 12, 20$);

2) существуют числа y, которые не кратны 4 ($y \notin A$) и являются четными ($y \in B$) одновременно (например, $2, 6, 10$).

В каком отношении будут находиться отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b)? Проверим выполнение условий определения включения множеств:

1) все элементы x интервала (a, b) ($x \in (a, b)$) – внутренние точки отрезка $[a, b]$ ($x \in [a, b]$) одновременно;

2) существуют такие числа y, для которых $y \notin (a, b)$ и $y \in [a, b]$ одновременно, – это границы отрезка (точки a и b). Таким образом, интервал (a, b) и одноименный отрезок $[a, b]$ находятся в отношении включения, $(a, b) \subset [a, b]$.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Все натуральные числа – целые. Существуют целые числа, не являющиеся натуральными, например отрицательные целые числа или число ноль. Поэтому $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Очевидно, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то и $A \subset C$ для любых множеств A, B, C. Следовательно, утверждение $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ всегда верно (рис. 6).

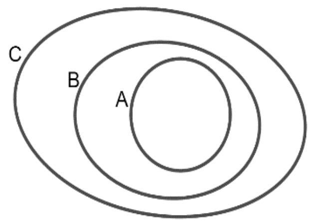


Рис. 6

Основные числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ находятся в отношении включения, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, и каждое последующее множество чисел получается расширением предыдущего. Процедура расширения числовых множеств подробно изучена в учебном пособии [7].

Если $A \subset B$, то A называют *собственным подмножеством* B.

По определению отношения включения (см. условие 2) ясно, что если A – собственное подмножество B, то B не может быть собственным подмножеством множества A.

Принято считать, что $A \subset A$, $\emptyset \subset A$. В этом случае A и $\emptyset$ называют *несобственными подмножествами* множества A.

Если множества A и B находятся в отношении включения, то запись $A \subset B$ может быть прочитана по-разному:

– A включено в B;

– A – подмножество B;

– A содержится в B;

– B содержит A, $B \supset A$.

В математике принято количество элементов множества A или, что то же самое, численность элементов множества A, обозначать $m(A)$ и называть *мощностью* множества A[1]. Понятие «мощность множества» представляет собой обобщение понятия «количество элементов конечного множества». Для конечного множества мощность совпадает с количеством его элементов. При работе с бесконечными множествами мощность определяют через установление взаимнооднозначного соответствия (биекции) между элементами данного множества и числами натурального ряда [4].

Например, мощность пустого множества равна нулю, $m(\emptyset) = 0$, мощность множества букв русского алфавита равна 33, мощность множества натуральных чисел – счётная, так как элементы можно пронумеровать.

Пусть для множества A известна его мощность $m(A) = n$. Тогда количество всевозможных подмножеств множества A всегда можно подсчитать.

Теорема. Если множество A конечно и содержит n элементов ($n \in \mathbb{N}$), то количество всех подмножеств множества A определяется как 2^n.

Например, пусть числовое множество задано перечислением элементов $A = \{1, 2, 3\}$. Количество элементов в A равно трем, $n = 3$. Тогда количество всех подмножеств множества A равно $2^3 = 8$. Выпишем все подмножества и убедимся, что их восемь.

Пустое множество есть подмножество любого множества, $\emptyset \subset A$. Всего одно подмножество.

Подмножества, содержащие один элемент: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Всего три подмножества.

Подмножества, содержащие два элемента: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Всего три подмножества.

Множество $A = \{1, 2, 3\}$ есть подмножество самого себя. Еще одно подмножество.

---

[1] Понятие мощности было введено основателем теории множеств Георгом Кантором. В 1878 году он показал, что бесконечные множества могут иметь различную мощность, и тем самым доказал, что их можно классифицировать по этому признаку.

В результате: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

Всего восемь подмножеств, что и требовалось проверить.

В теории множеств введено понятие *универсального множества* – это множество всех множеств.

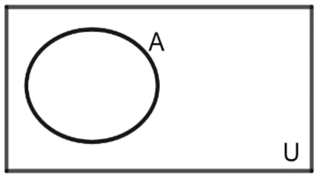


Рис. 7

Любое множество – подмножество универсального. Универсальное множество принято обозначать U, а на диаграмме Эйлера – Венна изображать прямоугольником (рис. 7).

Определение. Множества A и B находятся в *отношении равенства,* $A = B$, если состоят из одинаковых элементов, или:

1) все элементы x множества A ($x \in A$) – элементы множества B ($x \in B$) одновременно, т. е. $A \subset B$;

2) все элементы y множества B ($y \in B$) – элементы множества A ($y \in A$) одновременно, т. е. $B \subset A$.

Диаграмма в этом случае очень простая (рис. 8).

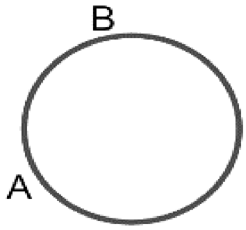


Рис. 8

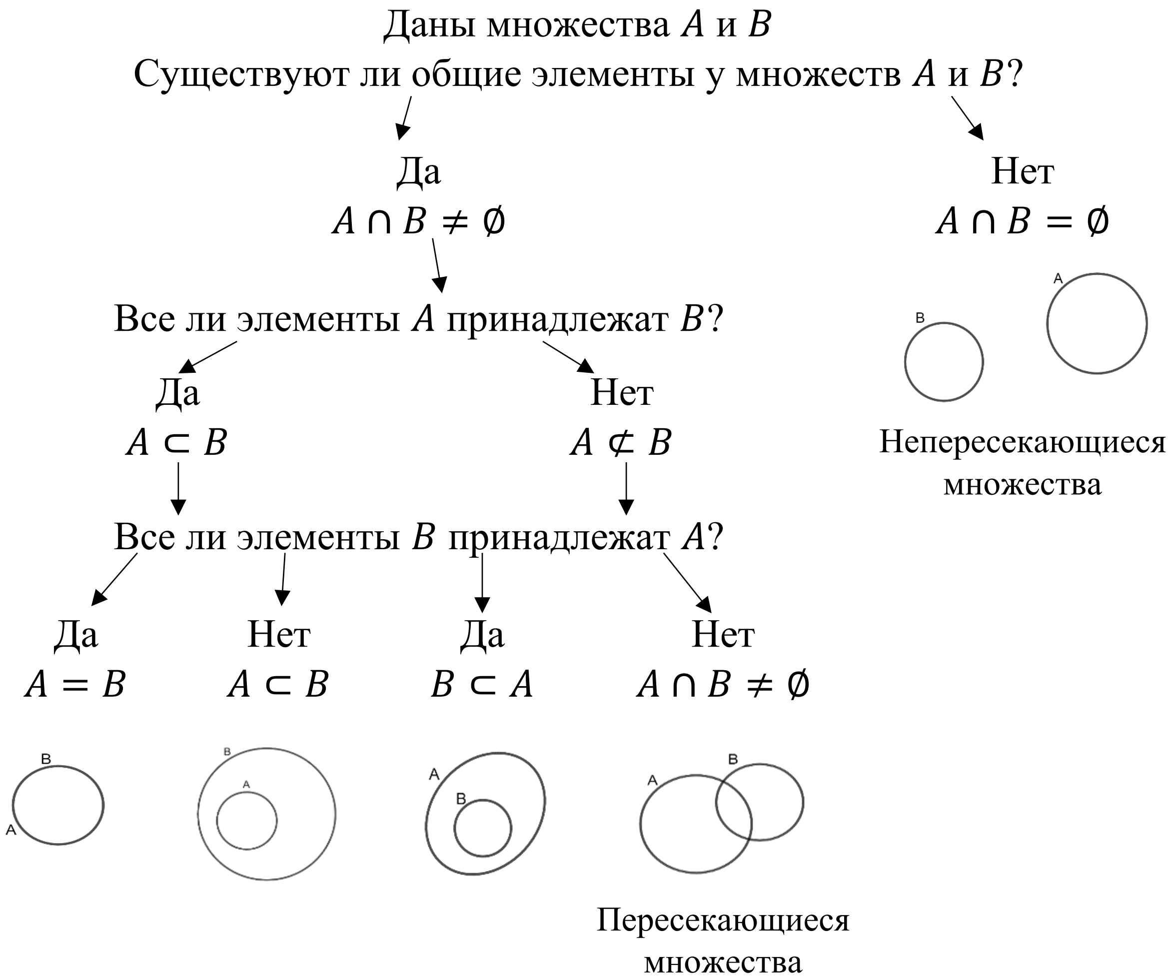
Например, A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 2. Множества A и B находятся в отношении равенства, $A = B$:

1) потому что все четные числа кратны 2, $A \subset B$;

2) все числа, кратные 2, являются четными ($B \subset A$).

Отношение равенства множеств обладает свойствами: рефлексивности (каждое множество равно самому себе, $A = A$), симметричности (для двух множеств A и B выполнено: если $A = B$, то $B = A$) и транзитивности (для любых трех множеств A, B, C выполнено: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$). Значит, в универсальном множестве U отношение равенства множеств представляет собой отношение эквивалентности, поэтому множество U разбивается на классы эквивалентности, где в один класс попадают равные между собой множества. Подробнее о свойствах отношений написано в учебном пособии [4].

Определять тип отношений между двумя множествами удобнее, отвечая на вопросы по следующей схеме:



Используя схему, определим тип отношения между числовыми множествами $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 200\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 500\}$. Задаем вопрос: существуют ли общие элементы у множеств A и B? Да, существуют. Например, числа 800 или 1000. Оба числа удовлетворяют условиям $x > 200$ и $x > 500$. Согласно ответу «Да» на первом шаге схемы, заключаем, что множества A и B находятся, по крайней мере, в отношении пересечения, $A \cap B \neq \emptyset$. Уточним тип отношения между этими пересекающимися множествами, отвечая на вопросы по схеме. Все ли элементы A принадлежат B? В нашем случае данный вопрос формулируется так: «Все ли натуральные числа, большие 200, будут больше 500?». Замечаем, что это не так. Существуют числа, например $201, 300, 499$, которые больше 200, но не более 500 ($201, 300, 499 \in A$, $201, 300, 499 \notin B$). Согласно ответу «Нет» на втором шаге схемы, заключаем, что $A \not\subset B$, то есть множество A не может быть подмножеством множества B. На третьем шаге отвечаем на вопрос «Все ли элементы B принадлежат A?», т. е. все ли натуральные числа, большие

500, будут больше 200? Любое число (например, $501, 900$), превосходящее 500, автоматически больше 200: $501, 900 \in B \longrightarrow 501, 900 \in A$, если $x > 500$, то $x > 200$. Получили ответ «Да» на третьем шаге схемы. Вывод: множество B включено в множество A; множество натуральных чисел, больших 500, – подмножество натуральных чисел, больших 200, $B \subset A$.

Примеры задач

Задача 1. Постройте диаграмму Эйлера – Венна для множеств A, B, C, D, если A – множество правильных многоугольников плоскости, B – множество треугольников плоскости, C – множество квадратов плоскости, D – множество трапеций плоскости.

<u>Решение.</u> Для того чтобы построить диаграмму Эйлера – Венна для множеств, необходимо выяснить, в каких отношениях находятся эти множества.

Определим тип отношения между множествами A и B. Ввиду того, что на плоскости существуют:

1) правильные многоугольники ($x \in A$), которые являются треугольниками ($x \in B$) одновременно;

2) правильные многоугольники ($y \in A$), которые не являются треугольниками ($y \notin B$);

3) неправильные многоугольники ($z \notin A$), которые являются треугольниками ($z \in B$),

заключаем, что $A \cap B \neq \emptyset$. (1)

Определим тип отношения между множествами A и C. Потому как:

1) все квадраты ($x \in C$) являются правильными многоугольниками ($x \in A$) одновременно;

2) на плоскости существуют правильные многоугольники ($y \in A$), которые не являются квадратами ($y \notin C$),

получаем, что $C \subset A$. (2)

Определим тип отношения между множествами A и D. Ни одна трапеция плоскости не является правильным многоугольником, поэтому

$A \cap D = \emptyset$. (3)

Определим тип отношения между множествами B и D. Ни один треугольник плоскости не является квадратом, поэтому

$B \cap C = \emptyset$. (4)

Аналогично получаем

$B \cap D = \emptyset$. (5)

$C \cap D = \emptyset$. (6)

Анализируя условия (1) – (6), получаем следующую диаграмму (рис. 9)

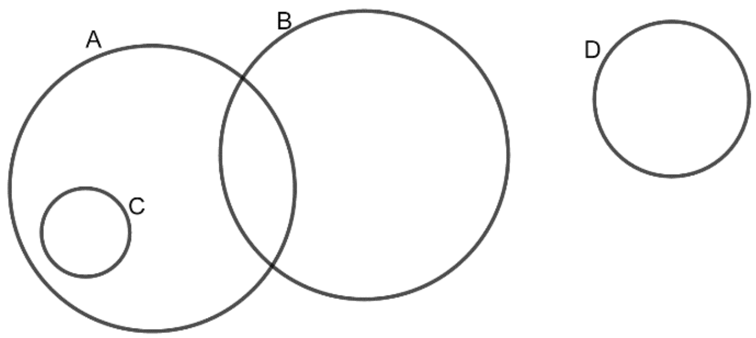


Рис. 9

Задача 2. Приведите пример множеств A, B, C, D, для которых диаграмма Эйлера – Венна (рис. 10) была бы верна. Ответ поясните.

Решение.

A – множество всех четырёхугольников плоскости, B – множество прямоугольников плоскости, C – множество параллелограммов плоскости, D – множество четырёхугольников плоскости, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали.

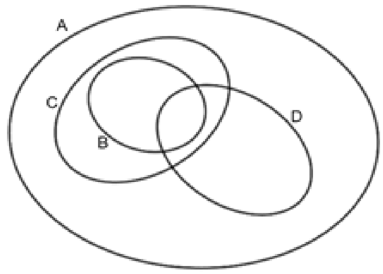


Рис. 10

На плоскости все прямоугольники, параллелограммы, четырёхугольники со взаимно перпендикулярными диагоналями являются четырёхугольниками, поэтому пары множеств B и A, C и A, D и A находятся в отношениях включения:

$B \subset A$, (1)

$C \subset A$, (2)

$D \subset A$. (3)

Все прямоугольники являются параллелограммами, но на плоскости существуют параллелограммы, которые не являются прямоугольниками, значит, $B \subset C$. (4)

На плоскости существуют:

1) параллелограммы со взаимно перпендикулярными диагоналями (ромбы);

2) параллелограммы, диагонали которых не взаимно перпендикулярны;

3) четырёхугольники со взаимно перпендикулярными диагоналями, но не параллелограммы (например, фигуры вида[2], изображённой на рис. 11),

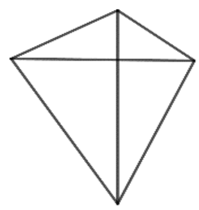


Рис. 11

следовательно, $C \cap D \neq \emptyset$. (5)

На плоскости существуют:

1) прямоугольники со взаимно перпендикулярными диагоналями (квадраты);

2) прямоугольники, у которых диагонали не взаимно перпендикулярны;

3) четырёхугольники со взаимно перпендикулярными диагоналями, но не прямоугольники,

получим $B \cap D \neq \emptyset$. (6)

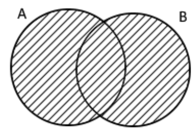
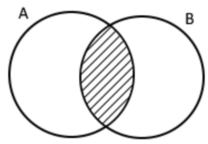
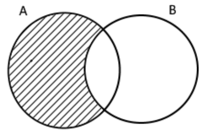
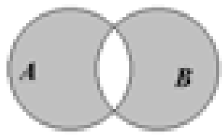
Условия (1) – (6) соответствуют диаграмме (см. рис. 10), поэтому указанные множества A, B, C, D служат примером решения задачи.

1.3. Операции над числовыми множествами: объединение, пересечение, вычитание, декартово умножение

Над множествами, как и над числами, можно выполнять определённые действия – *операции*. В начальной школе изучают следующие действия с числами: сложение, вычитание, умножение, деление. В результате действий с числами получается новое число.

Определим операции над множествами и научимся выполнять их. В результате действий с множествами всегда будет получаться *новое множество*.

[2] В частности, примером может быть фигура дельтóид (от др.-греч. δελτοειδής – «дельтовидный», напоминающий заглавную букву дельта) – четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.

Операция	Результат действия операции	Обозначение	Изображение на кругах Эйлера (в случае $A \cap B \neq \emptyset$)
Объединение	Объединение множеств A и B	$A \cup B$	
Пересечение	Пересечение множеств A и B	$A \cap B$	
Вычитание	Разность множеств A и B	$A \backslash B$	
Симметрическая разность	Симметрическая разность множеств A и B	$A \triangle B$	
Декартово умножение	Декартово произведение множеств A и B	$A \times B$	В координатной плоскости: – система точек; – система отрезков; – часть плоскости

Определение. *Объединением множеств* A и B называется новое множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B: $A \cup B = \{x | \ x \in A \text{ или } x \in B\}$.

На диаграммах новые множества отмечают штриховками. Рис. 12 демонстрирует объединение множеств.

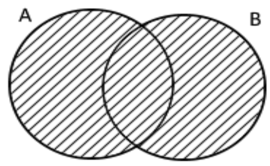


Рис. 12

Определение объединения множеств распространяется на любое конечное число множеств.

Определение. *Пересечением множеств* A и B называется новое множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B: $A \cap B = \{x | \ x \in A \text{ и } x \in B\}$.

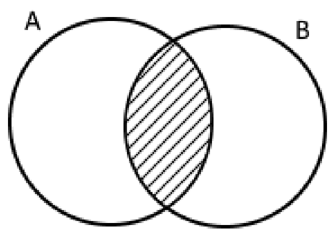


Рис. 13

На диаграмме пересечение множеств A и B отмечают так, как показано на рис. 13.

Определение пересечения множеств распространяется на любое конечное число множеств.

Определение. *Разностью множеств* A и B называется новое множество $A\backslash B$, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B:

$A\backslash B = \{x |\ x \in A$ и $x \notin B\}$.

На диаграмме разность $A\backslash B$ закрыта штриховкой (рис. 14).

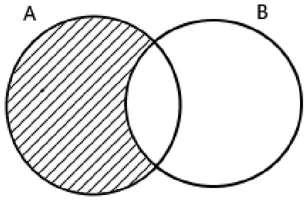
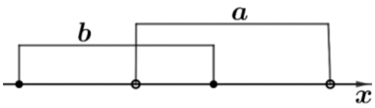


Рис. 14

Упражнение. На числовой прямой x определены множества: интервал a и отрезок b. Отметьте штриховкой пересечение $a \cap b$, объединение $a \cup b$ и разности $a\backslash b, b\backslash a$ данных множеств. Какое из новых множеств – отрезок?



Если $A \subset B$, то $A\backslash B = \emptyset$, а $B\backslash A$ определяется как *дополнение множества A до множества B*, которое обозначают как $\bar{A}_B$. На диаграмме дополнение множества A до множества B отмечено штриховкой (рис. 15).

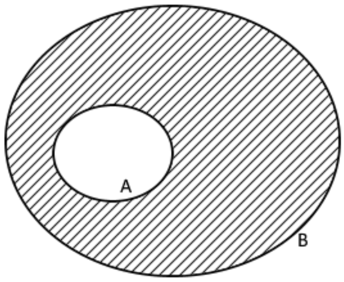


Рис. 15

Определение. Разность между универсальным множеством U и множеством A называют *дополнением* множества A и обозначают $\bar{A}$.

На диаграмме дополнение множества A аналогично отмечают штриховкой (рис. 16).

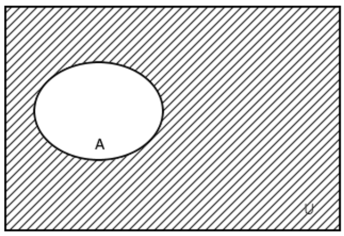


Рис. 16

Определение. *Симметрической разностью* множеств A и B называется новое множество, обозначаемое $A \vartriangle B$ и состоящее только из тех элементов, которые принадлежат или множеству $A\backslash B$, или множеству $B\backslash A$: $A \vartriangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = \{x |\ x \in A\backslash B$ или $x \in B\backslash A\}$.

Упражнение. Множество A состоит из целых чисел от -5 до 10, множество B – из натуральных чисел от 3 до 15. Перечислите элементы множеств $A\backslash B$ и $B\backslash A$. Какие элементы входят в множество $A \vartriangle B$?

На диаграмме Эйлера – Венна отметьте все элементы множеств A и B (рис. 17). Докажите, что числа $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 11, 12, 13, 14, 15\}$ попали в заштрихованную область $A \bigtriangleup B$.

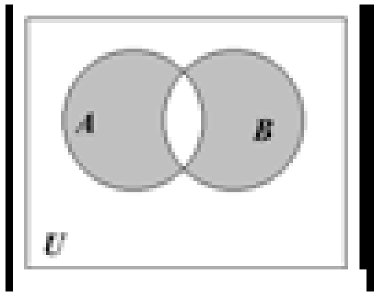


Рис. 17

Замечание. Если новое множество получено с помощью двух и более операций, то порядок выполнения действий определяется скобками (аналогично выполнению арифметических действий с числами). В случае отсутствия скобок приоритет операций над множествами определяется следующим образом:

1) отрицание множества;
2) пересечение множеств;
3) объединение множеств;
4) вычитание множеств.

Например, для множества $K = A \backslash B \cup C \cap D \backslash B$ действия будут выполняться в таком порядке: $K = (A \backslash (B \cup (C \cap D))) \backslash B$.

Определение. *Декартовым произведением* множеств A и B называется новое множество $A \times B$, элементами которого являются упорядоченные пары с первой компонентой из множества A, второй – из множества B: $A \times B = \{(x, y) |\ x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Например, $A = \{\text{м}, \text{н}\}$, $B = \{\text{а}, \text{э}, \text{и}, \text{о}, \text{у}\}$. Тогда декартовым произведением $A \times B$ будут пары-слоги: $A \times B = \{(x, y) |\ x \in A \text{ и } y \in B\} =$
$= \{(\text{м}, \text{а}), (\text{м}, \text{э}), (\text{м}, \text{и}), (\text{м}, \text{о}), (\text{м}, \text{у}), (\text{н}, \text{а}), (\text{н}, \text{э}), (\text{н}, \text{и}), (\text{н}, \text{о}), (\text{н}, \text{у})\}$.

Замечание. *Упорядоченной* выступает любая пара, в которой порядок следования элементов *важен*.

Любое множество можно декартовым образом умножать на себя, при этом получающееся новое множество называют *декартовым квадратом множества* A: $A \times A = \{(a, b) |\ a \in A \text{ и } b \in A\}$.

Декартово произведение двух числовых множеств определяется как множество упорядоченных пар чисел, в которых первая компонента принадлежит первому множеству, а вторая – второму. Значит, декартово произведение двух числовых множеств всегда может быть изображено в координатной плоскости: любая точка плоскости однозначно определяется упорядоченной парой чисел – координатами этой точки.

Примеры задач

Задача 1. Отметьте штриховкой на кругах Эйлера множество X, если: а) $X = (A \cap B) \cup (B \backslash C)$; б) $X = \left(\overline{A \backslash B}\right) \cap (B \cup C)$. При построении диаграммы считайте, что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Решение. А. $X = (A \cap B) \cup (B \backslash C)$.

1.  – $A \cap B$ (по определению пересечения).

2.  – $B \backslash C$ (по определению разности).

3. Множество X представляет собой объединение выделенных множеств. Значит, область, где штриховка прошла хотя бы один раз, и определяет множество X. На диаграмме (рис. 18) выделена граница этого множества.

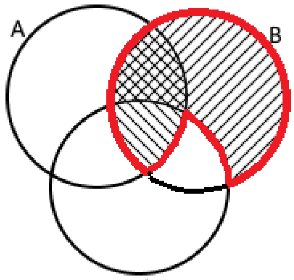
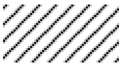


Рис. 18

Б. $X = \left(\overline{A \backslash B}\right) \cap (B \cup C)$.

1.  – $\overline{A \backslash B}$ (по определению дополнения).

2.  – $B \cup C$.

3. Множество X представляет собой пересечение выделенных множеств. Значит, область, где штриховка прошла дважды, и определяет множество X. На диаграмме (рис. 19) указана граница этого множества.

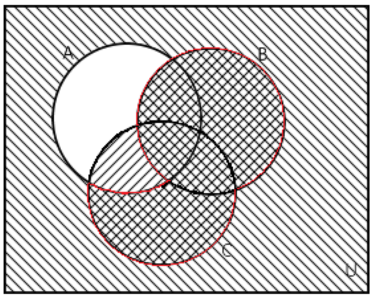


Рис. 19

Замечание. На диаграмме (см. рис. 19) присутствует универсальное множество U, потому что в процессе решения задачи находили дополнение множества.

Задача 2. Отметьте штриховкой на диаграмме Эйлера – Венна множество $X = B \backslash (A \cup C)$ и сформулируйте характеристическое свойство его элементов, если A – множество квадратов плоскости, B – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один прямой угол, C – множество треугольников этой плоскости.

Решение. 1. Множества A, B, C заданы конкретными характеристическими свойствами своих элементов, поэтому сначала нужно определить, в каких отношениях находятся эти множества. Используя схемы рассуждений, приведенные в задачах 1 и 2 п. 1.2, получаем $A \subset B$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$. С учётом названных условий строим диаграмму (рис. 20). Штриховкой отмечено $A \cup C$.

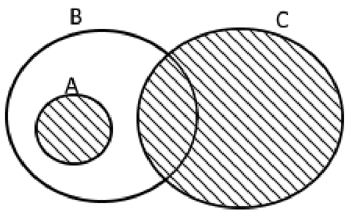


Рис. 20

2. Найдём множество X как разность между множеством B и объединением $A \cup C$, на диаграмме множество X закроем штриховкой (рис. 21). В заштрихованную область попали многоугольники плоскости, имеющие хотя бы один прямой угол, но не квадраты и не треугольники (например, прямоугольные трапеции), что и будет характеристическим свойством элементов множества X.

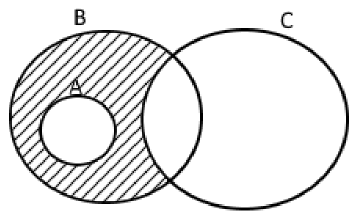


Рис. 21

Ответ: X – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один прямой угол, но не треугольников и не квадратов.

Задача 3. На числовой прямой отметьте множество $X = (\overline{A \cap B})\setminus C$ и сформулируйте характеристическое свойство его элементов, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{R}, x \le 5\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{R}, 2 < x \le 10\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{R}, x \ge 8\}$.

Решение. С учётом характеристических свойств элементов множеств A, B и C отметим их на числовой прямой (рис. 22).

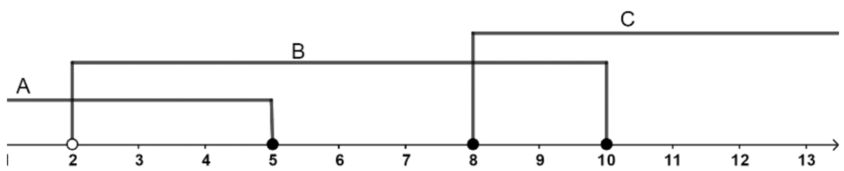


Рис. 22

1. Найдём $A \cap B$. Используя определение пересечения множеств, получаем $A \cap B = (2, 5]$. При этом $2 \notin A \cap B$, так как $2 \notin B$; $5 \in A \cap B$, так как $5 \in A$ и $5 \in B$.

2. Найдём $\overline{A \cap B}$. Используя определение дополнения, получаем $\overline{A \cap B} = (-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$. При этом $2 \in \overline{A \cap B}$, так как $2 \notin A \cap B$; $5 \notin \overline{A \cap B}$, так как $5 \in A \cap B$.

3. Отметим на числовой прямой множества $\overline{A \cap B}$ и C и найдём множество X.

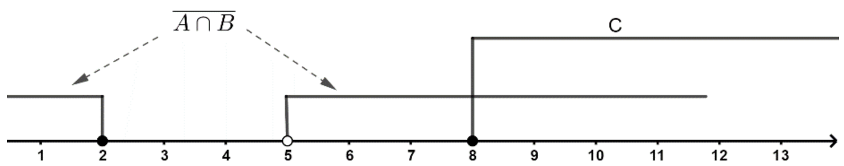


Рис. 23

$X = (\overline{A \cap B}) \setminus C == (-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$. При этом $8 \notin X$, так как $8 \in C$.

4. Отметим на числовой прямой множество X.

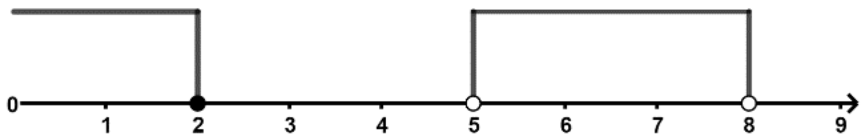


Рис. 24

5. Запишем характеристическое свойство элементов множества X: $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \text{ или } 5 < x < 8\}$.

Задача 4. Изобразите в координатной плоскости декартово произведение множеств $X \times Y$ и декартово произведение множеств $Y \times X$, если:

$$1)\ X = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}, Y = \{y | y \in \mathbb{Z}, |y| < 3\};$$
$$2)\ X = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}, Y = \{y | y \in \mathbb{R}, |y| < 3\};$$
$$3)\ X = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 4\}, Y = \{y | y \in \mathbb{R}, |y| \leq 3\}.$$

Решение.

1. С учётом характеристических свойств элементов множеств находим $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Тогда по определению декартова произведения

$X \times Y = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и } b \in Y\} =$
$= \{(1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (2, -1),$
$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$.

Изображением этого декартова произведения в координатной плоскости будет *система точек*.

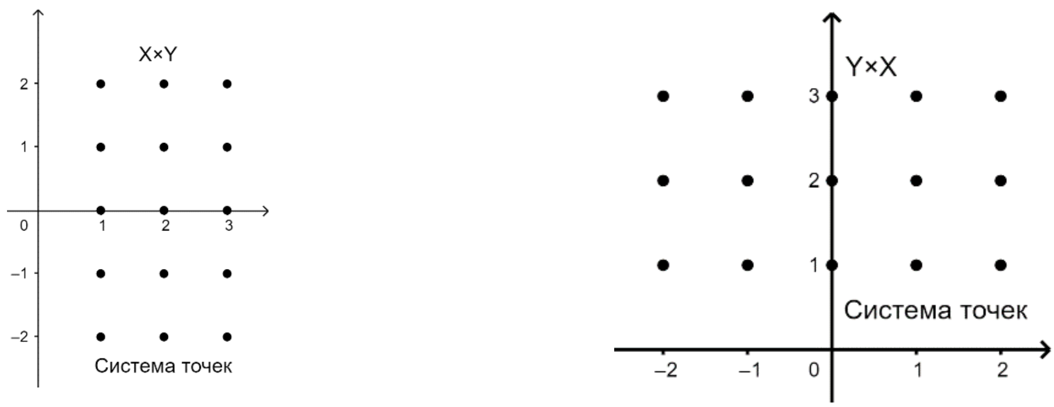


Рис. 25

Найдем декартово произведение $Y \times X$. По определению

$$Y \times X = \{(a, b) |\ a \in Y \text{ и } b \in X\} =$$
$$= \{(-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1),$$
$$(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Изображением этого декартова произведения в координатной плоскости будет *система точек* (см. рис. 25 справа).

2. С учётом характеристических свойств элементов множеств находим $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = (-3, 3)$. В этом случае перечислить элементы декартовых произведений $X \times Y$и $Y \times X$ невозможно, поскольку Y – бесконечное множество. Но можно сформулировать характеристические свойства элементов этих множеств. Далее, согласно указанным свойствам, найдём изображения декартовых произведений в координатной плоскости:

$$X \times Y = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и } b \in Y\} = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и} -3 < b < 3\}.$$

На плоскости это будет множество точек, первая координата которых может быть равна $1, 2, 3$ или 4, а вторая координата изменяется от -3 до 3.

Итак, изображением декартова произведения $X \times Y$ служит *система отрезков*, параллельных оси OY, при этом концы отрезков не принадлежат этому множеству, поскольку, например, упорядоченная пара $(1, 3) \notin X \times Y$ вследствие того, что $3 \notin Y$ (рис. 26).

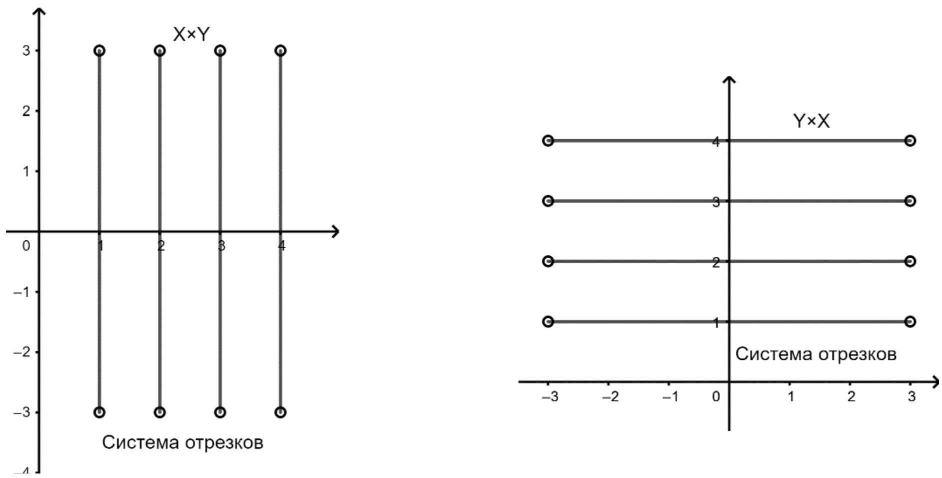


Рис. 26

Сформулируем характеристическое свойство элементов декартова произведения $Y \times X$:

$$Y \times X = \{(a, b) |\ a \in Y \text{ и } b \in X\} = \{(a, b) |\ -3 < a < 3 \text{ и } b \in Y\}.$$

На плоскости это будет множество точек, первая координата которых изменяется от -3 до 3, а вторая координата может быть равна $1, 2, 3, 4$.

Изображением декартова произведения $Y \times X$ служит *система отрезков*, параллельных оси OX (концы отрезков не принадлежат этому множеству).

3. С учётом характеристических свойств элементов множеств находим $X = (-\infty, 4)$, $Y = [-3, 3]$. Тогда $X \times Y = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и } b \in Y\} = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}, a < 4 \text{ и } -3 \leq b \leq 3\}$.

На плоскости это будет множество точек, у которых первая координата меньше 4, а вторая изменяется от -3 до 3 включительно.

Декартово произведение $Y \times X = \{(a, b) |\ a \in Y \text{ и } b \in X\} = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}, -3 \leq a \leq 3 \text{ и } b < 4\}$.

На плоскости это будет множество точек, у которых первая координата изменяется от -3 до 3 включительно, а вторая меньше 4. На рис. 27 слева построено множество $X \times Y$, справа – $Y \times X$.

Декартовы произведения множеств в данном случае представляют собой *часть плоскости*: пунктиром отмечены границы, не принадлежащие соответствующим декартовым произведениям.

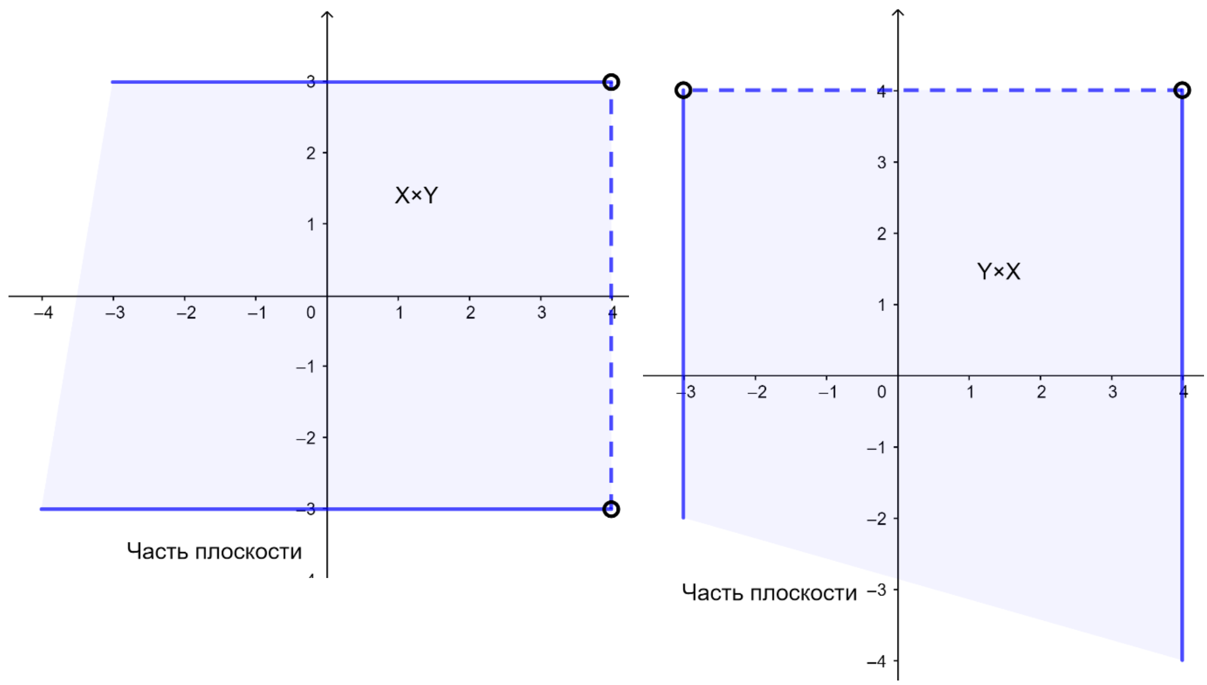


Рис. 27

Следует отметить, что определение декартова произведения двух множеств можно обобщить для любого числа множеств. Так, *декартовым произведением трёх множеств* будет множество упорядоченных троек элементов: $A \times B \times C = \{(x, y, z) | \ x \in A, y \in B$ и $z \in C\}$.

По аналогии определяется произведение четырёх, пяти и более множеств. Заметим, что упорядоченные наборы элементов в математике называют *кортежами* заданной длины, например упорядоченная пара – это кортеж длины 2, упорядоченная тройка – кортеж длины 3 и т. п. В общем случае упорядоченный набор из n элементов называют кортежем длины n. Поэтому теперь можно определить декартово произведение n множеств.

Определение. *Декартовым произведением множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют новое множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, элементами которого будут кортежи длины n: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$
$= \{(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) | \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

Если все множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ равны между собой и равны множеству A, то определяется декартова n-я степень множества A:

$A^n = \{(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) | \ a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A\}$.

1.4. Законы операций над множествами

Законы операции объединения

1. Объединение множества с самим собой равно самому множеству, $A \cup A = A$.

2. Объединение множества с пустым множеством равно самому множеству, $A \cup \emptyset = A$.

3. Коммутативный закон: объединение множеств A и B равно объединению множеств B и $A, A \cup B = B \cup A$.

4. Ассоциативный закон: объединение множества A с объединением множеств B и C равно объединению объединения множеств A и B с множеством $C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Законы операции пересечения

1. Пересечение множества с самим собой равно самому множеству, $A \cap A = A$.

2. Пересечение множества с пустым множеством равно пустому множеству, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3. Коммутативный закон: пересечение множеств A и B равно пересечению множеств B и A, $A \cap B = B \cap A$.

4. Ассоциативный закон: пересечение множества A с пересечением множеств B и C равно пересечению пересечения множеств A и B с множеством C, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Дистрибутивные законы объединения относительно пересечения

1. Левый дистрибутивный закон объединения относительно пересечения: объединение множества A с пересечением множеств B и C равно пересечению объединения множеств A и B с объединением множеств A и C, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Правый дистрибутивный закон объединения относительно пересечения: объединение пересечения множеств A и B с множеством C равно пересечению объединения множеств A и C с объединением множеств B и C, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Дистрибутивные законы пересечения относительно объединения

1. Левый дистрибутивный закон пересечения относительно объединения: пересечение множества A с объединением множеств B и C равно объединению пересечения множеств A и B с пересечением множеств A и C, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Правый дистрибутивный закон пересечения относительно объединения: пересечение объединения множеств A и B с множеством C равно объединению пересечения множеств A и C с пересечением множеств B и C, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Правые дистрибутивные законы вычитания относительно объединения и пересечения

1. Разность между объединением множеств A и B и множеством C равна объединению разности множеств A и C с разностью множеств B и C, $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Разность между пересечением множеств A и B и множеством C равна пересечению разности множеств A и C с разностью множеств B и C, $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Тождества

1. Разность между множеством A и объединением множеств B и C равна пересечению разности множеств A и B с разностью множеств A и C, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2. Разность между множеством A и пересечением множеств B и C равна объединению разности множеств A и B с разностью множеств A и C, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Законы де Моргана

1. Дополнение объединения множеств равно пересечению дополнений этих множеств, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Дополнение пересечения множеств равно объединению дополнений этих множеств, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Доказательство любого из приведённых равенств (или неравенств) выполняется по определенной схеме:

1. Проверяют истинность равенства (или неравенства) с использованием диаграмм Эйлера – Венна.

2. Проводят развёрнутое доказательство на основе определения равных множеств (см. определение в п. 1.1) и определений объединения, пересечения, разности множеств (см. соответствующие определения в п. 1.2).

Для числовых множеств доказательство приведенных выше равенств (или неравенств) устанавливается следующим образом:

1. Проводят доказательство на основе определения равных множеств (см. определение в п. 1.1) и определений объединения, пересечения, разности множеств (см. соответствующие определения в п. 1.2).

2. Проверяют истинность равенства (или неравенства) с использованием диаграмм Эйлера – Венна.

Законы операции умножения

Декартово произведение множества A с пустым множеством (так же как и декартово произведение пустого множества с множеством A) равно пустому множеству, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Дистрибутивные законы умножения относительно объединения, пересечения и вычитания

1. Левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения: декартово произведение множества A и объединения множеств B и C равно объединению декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2. Правый дистрибутивный закон умножения относительно объединения: декартово произведение объединения множеств A и B с множеством C равно объединению декартовых произведений множеств A и C и B и C, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

3. Левый дистрибутивный закон умножения относительно пересечения: декартово произведение множества A и пересечения множеств B и C равно пересечению декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. Правый дистрибутивный закон умножения относительно пересечения: декартово произведение пересечения множеств A и B с множеством C равно пересечению декартовых произведений множеств A и C и B и C, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

5. Левый дистрибутивный закон умножения относительно вычитания: декартово произведение множества A и разности множеств B и C равно разности декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C, $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$.

6. Правый дистрибутивный закон умножения относительно вычитания: декартово произведение разности множеств A и B с множеством C равно разности декартовых произведений множеств A и C и B и C, $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$.

Часто при доказательствах равенств используют законы де Моргана. В этих случаях необходимо анализировать условия, при выполнении которых элемент *не принадлежит пересечению* или *объединению* данных множеств. Рассуждения в таких случаях выстраиваются по алгоритму. Если элемент не принадлежит пересечению множеств, то он принадлежит дополнению к пересечению этих множеств; далее по закону де Моргана и определению операции объединения множеств имеем: $x \notin A \cap B \; \rightarrow \; x \in \overline{A \cap B} \; \rightarrow \; x \in \bar{A} \cup \bar{B} \; \rightarrow \; x \in \bar{A}$, *или* $x \in \bar{B} \; \rightarrow \; x \notin A$, *или* $x \notin B$. Аналогично можно получить условия, при выполнении которых элемент не будет принадлежать объединению данных множеств: $x \notin A \cup B \; \rightarrow x \in \overline{A \cup B} \; \rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \; \rightarrow \; x \in \bar{A}$ *и* $x \in \bar{B} \; \rightarrow \; x \notin A$ *и* $x \notin B$.

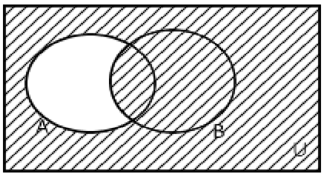


Рис. 28

Кроме того, при доказательстве равенств используются и условия, при выполнении которых элемент *не принадлежит разности* множеств. Эти условия можно получить, работая с диаграммой Эйлера – Венна. Если элемент не принадлежит разности данных множеств, значит, он попадает в заштрихованную область – дополнение разности множеств (рис. 28). Эта область с использованием операций над множествами описывается как $\bar{A} \cup \; B$. Значит, $x \notin A \backslash B$, если $x \notin A$ или $x \in B$.

Итак, при доказательстве равенства множеств полезно помнить:

По определению операций над множествами	По определению отрицания операции над множествами и законам де Моргана
$x \in A \cup B \iff x \in A$ *или* $x \in B$	$x \notin A \cup B \iff x \notin A$ *и* $x \notin B$, потому что $x \notin A \cup B \longrightarrow x \in \overline{A \cup B} \longrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \to x \in \bar{A}$ *и* $x \in \bar{B} \to x \notin A$ *и* $x \notin B$
$x \in A \cap B \iff x \in A$ *и* $x \in B$	$x \notin A \cap B \iff x \notin A$ *или* $x \notin B$, потому что $x \notin A \cap B \longrightarrow x \in \overline{A \cap B} \longrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B} \to x \in \bar{A}$ *или* $x \in \bar{B} \to x \notin A$ *или* $x \notin B$
$x \in A \backslash B \iff x \in A$ *и* $x \notin B$	$x \notin A \backslash B \iff x \notin A$ *или* $x \in B$, потому что $x \notin A \backslash B \to x \in \overline{A \backslash B} \to x \in \bar{A} \cup$ $\cup\, B \to x \in \bar{A}$ *или* $x \in B \to x \notin A$ *или* $x \in B$
$(p,q) \in A \times B \iff p \in A$ *и* $q \in B$	$(p,q) \notin A \times B \iff p \notin A$ *или* $q \notin B$

Примеры доказательств равенства и закона для числовых множеств[3]

Задача 1. Даны множества $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Докажите, что для множеств A, B, C выполнено равенство $\mathrm{A} \backslash (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \backslash \mathrm{C})$. Универсальным считать множество U однозначных положительных чисел, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Доказательство. Для удобства рассуждений левую часть равенства обозначим X, правую – Y:

$$\underbrace{\mathrm{A} \backslash (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})}_{\mathrm{X}} = \underbrace{(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \backslash \mathrm{C})}_{\mathrm{Y}}.$$

Для того чтобы доказать равенство $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ множеств X и Y, необходимо установить, что множество из левой части $\mathrm{A} \backslash (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ равно множеству из правой части $(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \backslash \mathrm{C})$. По определению отношения равенства двух множеств требуется проверить, будут ли множества X и Y состоять из одинаковых элементов.

[3] Справедливость данного равенства и закона для множеств произвольной природы установлена в пособии [4], где приведено подробное доказательство указанных утверждений, основанное на определениях соответствующих операций над множествами.

Множество $X = A \setminus (B \cap C$ из левой части равенства представляет собой разность между множеством A и пересечением множества B с множеством C. Найдем, из каких элементов состоят множества $B \cap C$ и $A \setminus (B \cap C)$.

По определению операции пересечения двух множеств B и C новому множеству $B \cap C$ будут принадлежать элементы, которые входят и в множество B, и в множество C. (Выберите одинаковые в указанных множествах элементы). То есть

$B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4, 5\}$.

Найдем разность множества A с новым множеством $B \cap C$. По определению операции вычитания множеств множеству-результату будут принадлежать все элементы множества A, которые не входят в множество $B \cap C$. Значит,

$A \setminus (B \cap C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{4, 5\} = \{2, 3, 6, 7, 8\}$, т. е. нашли множество $X = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.

Рассмотрим множество в правой части равенства $A \setminus (B \cap C) =$ $= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Правая часть есть множество $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, состоящее из элементов объединения разности множеств A и B с разностью множеств A и C. Найдем эти множества. Множество $A \setminus B$ будет содержать все элементы множества A, которые не являются элементами множества B:

$A \setminus B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8\}$.

Множество $A \setminus C$ будет состоять из элементов множества A, которые не входят в множество C:

$A \setminus C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 8\}$.

Результатом объединения множеств $(A \setminus B)$ и $(A \setminus C)$ по определению операции объединения будет новое множество $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из указанных множеств: или множеству$(A \setminus B)$, или множеству $(A \setminus C)$. Получаем $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)) = \{6, 7, 8\} \cup \{2, 3, 8\} = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.

Значит, множество $Y = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.

Сравним множества $X = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ и $Y = \{2, 3, 6, 7, 8\}$: они состоят из одинаковых элементов, следовательно, равны. Требуемое равенство $X = Y$ доказано.

По условию задачи все три множества A, B и C попарно пересекаются. Изобразим данные множества на диаграмме Эйлера – Венна, где штриховками отметим множества X и Y, и сравним заштрихованные области (рис. 29).

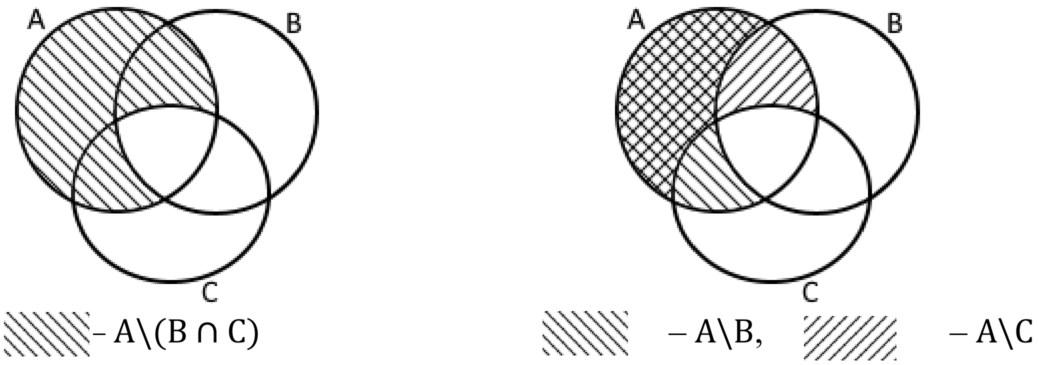


Рис. 29

Множество X на диаграмме (см. рис. 29, слева) закрыто штриховкой. Y выделено областью, где штриховка прошла хотя бы один раз (см. рис. 29, справа). Сравнив области X и Y, приходим к выводу, что $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. Тем самым истинность равенства $\mathrm{A}\backslash(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\backslash\mathrm{C})$ установлена.

Задача 2. Для числовых множеств $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ установим справедливость равенства $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash C) \cap (\overline{A\backslash C})$, где универсальным будет множество U однозначных положительных чисел, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

<u>Доказательство.</u>

Рассмотрим множество в левой части равенства $B\backslash(A \cup C)$. По определениям объединения и вычитания множеств:

1. $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. $B\backslash(A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}\backslash\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1\}$.

Правая часть равенства представлена множеством $(B\backslash C) \cap (\overline{A\backslash C})$. Для нахождения элементов данного множества воспользуемся определениями вычитания, дополнения и пересечения множеств:

1. $A\backslash C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\backslash\{5, 6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 4\}$.
2. $\overline{A\backslash C} = (\overline{A\backslash C})_U = U\backslash(A\backslash C) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\backslash\{2, 3, 4\} =$ $= \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
3. $B\backslash C = \{1, 2, 3, 4, 5\}\backslash\{5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
4. $(B\backslash C) \cap \left(\overline{A\backslash C}\right) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1\}$.

Для равенства $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash C) \cap (\overline{A\backslash C})$ числовых множеств определили, что левая часть $B\backslash(A \cup C) = \{1\}$, правая часть $(B\backslash C) \cap \left(\overline{A\backslash C}\right) = \{1\}$. Множества состоят из одного и того же элемента – это число 1. Значит, выполнено определение отношения равенства для множеств $B\backslash(A \cup C)$ и $B\backslash C) \cap (\overline{A\backslash C})$. Следовательно, указанные множества равны между собой, тем самым равенство $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash C) \cap$ $\cap (\overline{A\backslash C})$ установлено, что и требовалось.

Задача 3. Докажите, что для множеств $A = \{m, n, k\}$, $B = \{b, d, l, k\}$, $C = \{a, b, n\}$ справедлив левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Доказательство. Для удобства рассуждений обозначим левую часть равенства $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ через X, правую – через Y:

$$\underbrace{A \times (B \cup C)}_{X} = \underbrace{(A \times B) \cup (A \times C)}_{Y}.$$

Для доказательства закона необходимо, чтобы левая часть данного предложения была равна правой части, то есть нужно доказать $X = Y$. По определению равных множеств для $X = Y$ достаточно, чтобы эти множества состояли из одинаковых элементов.

Поэтому рассмотрим отдельно левую X и правую Y части предложения; найдем, какие элементы составляют множества X и Y, сравним их.

Множество X представляет собой декартово умножение множества A с объединением множеств B и C. Согласно определениям операций объединения и умножения множеств находим:

$$B \cup C = \{x |\, x \in B \text{ или } x \in C\} = \{b, d, l, k\} \cup \{a, b, n\} =$$
$$= \{a, b, d, l, n, k\}.$$
$$X = A \times (B \cup C) = \{(p, q) |\, p \in A \text{ и } q \in B \cup C\} =$$
$$= \{m, n, k\} \times \{a, b, d, l, n, k\} =$$
$$= \{(m, a), (m, b), (m, d), (m, l), (m, n), (m, k), (n, a), (n, b), (n, d),$$
$$(n, l), (n, n), (n, k), (k, a), (k, b), (k, d), (k, l), (k, n), (k, k)\}.$$

Множество Y представляет собой объединение декартовых умножений множества A с множеством B и множества A с множеством C:

$$A \times B = \{(p, q) |\, p \in A \text{ и } q \in B\} = \{m, n, k\} \times \{b, d, l, k\} =$$
$$= \{(m, b), (m, d), (m, l), (m, k), (n, b), (n, d), (n, l), (n, k), (k, b),$$
$$(k, d), (k, l), (k, k)\}.$$

$A \times C = \{(p, q) | \; p \in A$ и $q \in C\} = \{m, n, k\} \times \{a, b, n\} =$
$= \{(m, a), (m, b), (m, n), (n, a), (n, b), (n, n), (k, a), (k, b), (k, n)\}$.
$Y = (A \times B) \cup (A \times C) = \{x | \; x \in A \times B$ или $x \in A \times C\} =$
$= \{(m, b), (m, d), (m, l), (m, k), (n, b), (n, d), (n, l), (n, k), (k, b), (k, d), (k, l), (k, k)\} \cup$
$\cup \{(m, a), (m, b), (m, n), (n, a), (n, b), (n, n), (k, a), (k, b), (k, n)\} =$
$= \{(m, a), (m, b), (m, d), (m, l), (m, n), (m, k), (n, a), (n, b), (n, d), (n, l), (n, n), (n, k), (k, a), (k, b), (k, d), (k, l), (k, n), (k, k)\}$.

Сравнив элементы множеств X и Y, убеждаемся, что эти множества состоят из одних и тех же элементов, следовательно, являются равными ($X = Y$). Тем самым справедливость левого дистрибутивного закона умножения относительно объединения $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ установлена.

1.5. Разбиение множества на классы

Операции объединения и пересечения множеств – основа понятия «разбиение множества на классы». В общем случае разбиение любого множества M на классы $K_1, K_2, \ldots, K_n$ определяется следующими условиями:

1. Каждый класс K_i не является пустым: $K_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Классы попарно не пересекаются: $K_i \cap K_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ при $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

3. Объединение всех классов дает множество M: $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n = M$.

Если не выполнено условие 2, то классификация считается неправильной, если условие 3 – неполной.

Например, множество треугольников можно разбить на равнобедренные и неравнобедренные (в данном случае классификация проведена по признаку/основанию «быть равнобедренным»). Если множество треугольников разбивается на равнобедренные и прямоугольные, то классификация будет неправильной, поскольку на плоскости существуют равнобедренные прямоугольные треугольники (то есть класс равнобедренных с классом прямоугольных находится в отношении пересечения, что противоречит условию 2).

Если на множестве треугольников плоскости рассматриваются только остроугольные и прямоугольные треугольники, то классификация неполная (так как на плоскости существуют еще и тупоугольные треугольники): названы не все объекты множества треугольников. Нарушено условие 3.

Выделить подмножество A из множества M можно, указав *одно свойство*, которым обладают некоторые элементы множества M. Но для элементов подмножества A это свойство будет характеристическим, поэтому его можно обозначить α. Разбиение множества M на классы в этом случае будет очень простым:

$K_1 = A$,

$K_2 = \overline{A}_M$.

Условия 1 – 3 разбиения множества M на классы K_1 и K_2 выполняются. Например, выше с помощью свойства α – «быть равнобедренным» множество треугольников разбито на два класса. В один класс (I) попадают все равнобедренные треугольники плоскости, в другой (II) – все неравнобедренные (рис. 30).

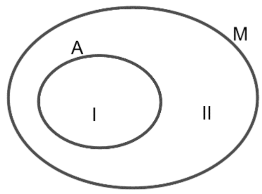


Рис. 30

Если для элементов множества M задать *два свойства* α и β, то первое из них выделит в M подмножество A, второе – подмножество B (рис. 31), тогда классы определятся следующим образом:

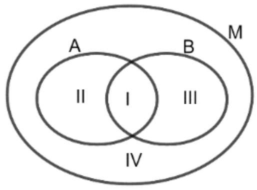


Рис. 31

$K_1 = A \cap B$ – множество элементов, для которых имеют место свойства α и β;

$K_2 = A \cap \overline{B}$ – множество элементов, для которых выполняется свойство α и не выполняется свойство β;

$K_3 = \overline{A} \cap B$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, но выполняется свойство β;

$K_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α и не выполняется свойство β.

Замечание. При задании двух свойств для элементов множества M получим разбиение не более чем на четыре класса. Если подмножества A и B не пересекаются или находятся в отношении включения, то количество классов уменьшается.

Например, на множестве натуральных чисел заданы свойства: α – «быть числом, кратным 2» и β – «быть числом, кратным 3». В таком случае множество натуральных чисел разбивается на классы элементов четырех видов: первый класс составляют все натуральные числа, кратные 2 и 3 одновременно $(6, 12, 18)$; второй класс – все натуральные числа, кратные 2 и не кратные 3 одновременно $(2, 4, 8)$; третий класс – все натуральные числа, не кратные 2 и кратные 3 одновременно $(3, 9, 15)$; четвертый класс – все натуральные числа, не кратные 2 и не кратные 3 одновременно $(1, 5, 7)$. Таким образом, по заданным свойствам α и β все натуральные числа оказываются рассортированными по классам, при этом каждое число попадает только в один класс.

Если для элементов множества M задать *три свойства* α, β и γ, то первое из них выделит в M подмножество A, второе – подмножество B, третье – подмножество C. В этом случае разбиение на классы произойдет так, как показано на диаграмме (рис. 32).

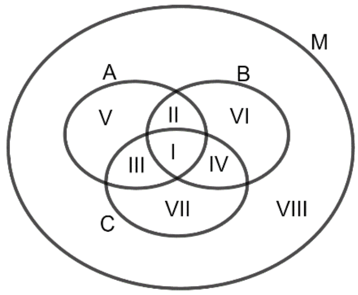


Рис. 32

Зная строение каждого класса, можно определить, какие элементы его образуют:

$K_1 = A \cap B \cap C$ – множество элементов, для которых имеют место свойства α, β и γ;

$K_2 = A \cap B \cap \bar{C}$ – множество элементов, для которых выполняется свойство α, выполняется свойство β и не выполняется свойство γ;

$K_3 = A \cap \bar{B} \cap C$ – множество элементов, для которых выполняется свойство α, не выполняется свойство β и выполняется свойство γ;

$K_4 = \bar{A} \cap B \cap C$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, выполняется свойство β и выполняется свойство γ;

$K_5 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество элементов, для которых выполняется свойство α, не выполняется свойство β, не выполняется свойство γ;

$K_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, выполняется свойство β и не выполняется свойство γ;

$K_7 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, не выполняется свойство β и выполняется свойство γ;

$K_8 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, не выполняется свойство β, не выполняется свойство γ.

Замечание. При задании трёх свойств для элементов множества M получим разбиение не более чем на восемь классов. В случаях, когда выделенные подмножества находятся, например, в отношении включения или пустого пересечения, количество получаемых классов будет уменьшаться.

1.6. Применение классификации на множествах для решения задач

Разбиение *конечного множества* на классы часто используется при решении задач. При этом полезно знать, что:

$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, если $A \cap B = \emptyset$;

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, если $A \cap B \neq \emptyset$;

$m(\bar{A}_B) = m(B) - m(A)$, если $A \subset B$.

Здесь $m(A)$ – численность множества A; $m(B)$ – численность множества B; $m(A \cup B)$ – численность объединения множеств A и B; $m(A \cap B)$ – численность пересечения множеств A и B; $m(\bar{A}_B)$ – численность дополнения множества A до множества B.

Задача 1. В группе 30 студентов, 16 из них занимаются музыкой, 17 увлекаются теннисом, а 10 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в группе студенты, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?

Решение.

Пусть A – множество студентов, интересующихся музыкой, B – множество студентов, интересующихся теннисом, $A \cap B$ – множество студентов, интересующихся и музыкой, и теннисом. По условию известно, что $m(A) = 16$, $m(B) = 17$, $m(A \cap B) = 10$.

Тогда для подсчета численности студентов, интересующихся или музыкой, или теннисом, используется формула $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Получаем $m(A \cup B) = 16 + 17 - 10 = 23$.

Поясним полученный результат. Если сложить число студентов, интересующихся музыкой, и число студентов, занимающихся теннисом, то есть $16 + 17 = 33$, то студенты, интересующиеся и музыкой, и теннисом, окажутся учтенными дважды. Поэтому, чтобы определить число студентов, интересующихся музыкой или теннисом, нужно из суммы $16 + 17$ вычесть число студентов, учтенных дважды, то есть тех, кто интересуется и музыкой, и теннисом. По условию их 10. Таким образом, число интересующихся теннисом или музыкой равно: $16 + 17 - 10 = 23$ студента.

Всего в группе 30 студентов, из которых 23 интересуются или музыкой, или теннисом, а остальные этим не интересуются. Следовательно, число студентов, равнодушных и к музыке, и к теннису, найдем вычитанием: $30 - 23 = 7$.

Ответ: Да, 7.

Усложним задачу: пусть к тем, кто интересуется в классе музыкой – множеству A, и к тем, кто увлекается теннисом – множеству B, добавляются еще и те, кто интересуется театром – множество C. Сколько студентов увлекается или музыкой, или теннисом, или театром? Решение сводится к нахождению численности объединения множеств A, B и C, с учетом того, что все эти множества попарно пересекаются: $m(A \cup B \cup C), A \cap B \cap C \cap A \neq \emptyset$.

В случае, когда множества A, B и C пересекаются лишь попарно, то есть $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, подсчет можно вести, как и прежде: сначала сложить численности всех множеств A, B и C: $m(A) + m(B) + m(C)$ и далее вычесть количество тех элементов, которые подсчитаны дважды: $m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)$.

В случае, когда множества A, B и C все попарно пересекаются, $A \cap B \cap C \cap A \neq \emptyset$, элементы множества $A \cap B \cap C$ оказываются неучтенными: сначала их трижды суммируют при нахождении численности – $m(A) + m(B) + m(C)$, затем трижды вычитают – $(m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C))$. Таким образом, число $m(A) + m(B) + m(C) - (m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C))$ меньше истинного результата ровно на число элементов в пересечении множеств $A \cap B \cap C$, которое и следует добавить для получения верного результата:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) -$$
$$- \big(m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)\big) + m(A \cap B \cap C).$$

Аналогичная формула может быть получена для любого числа множеств.

Интересно, что в формулах для нахождения численностей элементов объединения нескольких пересекающихся множеств $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ и $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - \big(m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)\big) + m(A \cap B \cap C)$ учитывается, сколько раз каждый элемент включается и исключается, поэтому формулы называют *формулами включений и исключений*.

Задача 2. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии – 700, а по стереометрии – 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии – 500, по планиметрии и стереометрии – 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Решение. Пусть U – множество всех абитуриентов, A – множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B – множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C – множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию $m(U) = 1000$, $m(A) = 800$, $m(B) = 700$, $m(C) = 600$, $m(A \cap B) = 600$, $m(A \cap C) = 500$, $m(B \cap C) = 400$, $m(A \cap B \cap C) = 300$. В множество $A \cap B \cap C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - \big(m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)\big) + m(A \cap B \cap C)$ получаем

$m(A \cup B \cup C) = 800 + 700 + 600 - (600 + 500 + 400) + 300 = 900.$

Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили $m(U) - m(A \cup B \cup C) = 1000 - 900 = 100$ (абитуриентов).

Ответ: Да, 100.

Задача 3. Социологи опросили 45 учащихся девятых классов, среди которых 25 юношей. При этом выяснилось: 30 человек имеют за полугодие оценки 4 и 5, из них 16 юношей; спортом занимаются 28 учеников, среди них 18 юношей, 17 учеников успевают только на хорошо и отлично, 15 юношей учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом. Первый математик класса взглянул на результаты опроса и заявил, что там есть ошибки. Как это ему удалось выяснить?

Решение. Обозначим через A множество юношей, через B – множество успевающих на 4 и 5, через C – множество спортсменов. По условию задачи $m(A) = 25$, $m(B) = 30$, $m(C) = 28$, $m(A \cap B) = 16$, $m(A \cap C) = 18$, $m(B \cap C) = 17$, $m(A \cap B \cap C) = 15$. Найдем общее число учащихся, которые или являются юношами, или занимаются спортом, или успевают на 4 и 5. Применив формулу $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - \big(m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)\big) + m(A \cap B \cap C)$, получаем

$m(A \cup B \cup C) = 25 + 30 + 28 - (16 + 18 + 17) + 15 = 47.$

Этого быть не может, так как опрашивали всего 45 учеников! Следовательно, в первоначальных сведениях есть ошибки.

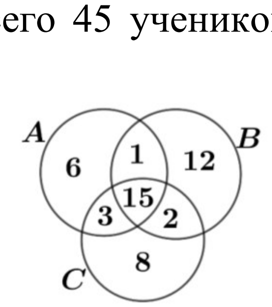


Рис. 33

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера – Венна. В пересечении множеств A, B и C запишем число 15, так как по условию $m(A \cap B \cap C) = 15$. Подсчитаем численности всех классов и укажем их на диаграмме (рис. 33):

$m(A \cap B \backslash C) = m(A \cap B) - m(A \cap B \cap C) = 16 - 15 = 1,$
$m(A \cap C \backslash B) = m(A \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 18 - 15 = 3,$

$m(B \cap C \backslash A) = m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 17 - 15 = 2,$

$m(A \backslash (B \cup C)) = m(A) - m(A \cap B) - m(A \cap C \backslash B) = 25 - 16 - 3 = 6,$

$m(B \backslash (A \cup C)) = m(B) - m(A \cap B) - m(B \cap C \backslash A) = 30 - 16 - 2 = 12,$

$m(C \backslash (A \cup B)) = m(C) - m(A \cap C) - m(B \cap C \backslash A) = 28 - 18 - 2 = 8.$

Для нахождения количества всех учащихся, $m(A \cup B \cup C)$, достаточно сложить отмеченные на диаграмме численности всех классов:

$15 + 1 + 3 + 2 + 6 + 12 + 8 = 47.$

Получили 47, что невозможно по условию задачи.

Ответ: не совпали численности одного и того же множества.

В общем случае рассуждения при решении задач на классификацию удобно проводить по алгоритму. В каждой задаче рассматривается конечное множество элементов. Определяем это множество, то есть устанавливаем, о множестве каких элементов идет речь. Далее следует:

а) определить, сколько свойств задано для элементов рассматриваемого множества;

б) выяснить, в каких отношениях находятся между собой подмножества, выделяемые этими свойствами;

в) изобразить с помощью кругов Эйлера диаграмму, соответствующую условию задачи;

г) определить, на сколько классов разбито рассматриваемое множество, и сформулировать характеристические свойства элементов каждого класса;

д) составить краткую запись условия задачи;

е) привести обоснованное решение задачи.

Для решения задач 4 – 6 использован предложенный алгоритм.

Задача 4. В классе 20 девочек, из которых 15 принимали участие в экскурсии по городу. Сколько в классе учащихся, если 10 мальчиков не принимали участия в экскурсии по городу, а всего принимавших участие в экскурсии было 25.

Решение.

1. По условию задачи для элементов множества M (множества учащихся класса) заданы два свойства:

α – «быть девочкой» (это свойство выделяет подмножество A);

β – «принимать участие в экскурсии» (это свойство выделяет подмножество B).

2. По условию задачи $A \cap B \neq \emptyset$.

3. Диаграмма Эйлера – Венна, соответствующая условию задачи, представлена на рис. 34.

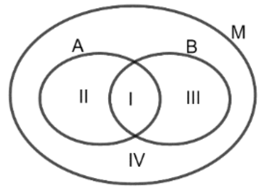


Рис. 34

4. Получены следующие классы:

$К_1 = A \cap B$ – множество девочек, принимавших участие в экскурсии.

$К_2 = A \cap \bar{B}$ – множество девочек, не принимавших участие в экскурсии.

$К_3 = \bar{A} \cap B$ – множество мальчиков, принимавших участие в экскурсии.

$К_4 = \bar{A} \cap \bar{B}$ – множество мальчиков, не принимавших участие в экскурсии.

5. Составим краткую запись условия задачи.

Дано: $m(A) = 20, m(B) = 25, m(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 10, m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 15$.

Найти: $m(M)$.

6. Ответ на вопрос можно найти двумя способами:

<u>1-й способ:</u> $m(M) = m(A \cup B) + m(\bar{A} \cap \bar{B}) = m(A) + m(B) -$
$- m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + m(\bar{A} \cap \bar{B}) = 20 + 25 - 15 + 10 = 40$.

<u>2-й способ:</u> $m(M) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4)$.

При этом можно найти численность каждого класса и указать на диаграмме (рис. 35):

$m(K_1) = 15$,
$m(K_2) = m(A) - m(K_1) = 20 - 15 = 5$,
$m(K_3) = m(B) - m(K_1) = 25 - 15 = 10$,
$m(K_4) = 10$,
$m(M) = 15 + 5 + 10 + 10 = 40$.

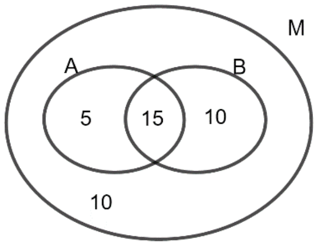


Рис. 35

Ответ: в классе 40 учащихся.

Задача 5. Известно, что в множестве M 37 чисел являются трёхзначными, из которых 15 чётные. Всего чётных чисел 30, из которых 13 – меньше 500. Всего чисел, меньших 500, в множестве M 38, из которых 17 трёхзначные. Сколько всего чисел в множестве M, если 10 чётных трёхзначных чисел меньше 500, а 10 нечётных чисел, не меньших 500, не являются трёхзначными?

Решение.

1. По условию задачи для элементов множества M (множества чисел) заданы три свойства:

α – «быть трёхзначным числом» (это свойство выделяет подмножество A);

β – «быть чётным числом» (это свойство выделяет подмножество B);

γ – «быть числом, меньшим 500» (это свойство выделяет подмножество C).

2. По условию задачи $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

3. Диаграмма Эйлера – Венна, соответствующая условию задачи, принимает следующий вид (рис. 36).

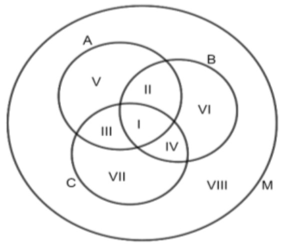


Рис. 36

4. Получены следующие классы:

$K_1 = A \cap B \cap C$ – множество трёхзначных чётных чисел, меньших 500.

$K_2 = A \cap B \cap \bar{C}$ – множество трёхзначных чётных чисел, не меньших 500.

$K_3 = A \cap \bar{B} \cap C$ – множество трёхзначных нечётных чисел, меньших 500.

$K_4 = \bar{A} \cap B \cap C$ – множество чётных чисел, меньших 500, не являющихся трёхзначными.

$K_5 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество трёхзначных чисел, не меньших 500 и не являющихся трёхзначными.

$K_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ – множество четных чисел, не меньших 500 и не являющихся трёхзначными.

$K_7 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ – множество чисел, меньших 500, нечётных и не являющихся трёхзначными.

$K_8 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество нечётных чисел, не являющихся трёхзначными и не меньших 500.

5. Составим краткую запись условия задачи	6. Решение
Дано:	По условию имеем:
$m(A) = 37,$	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5) = 37,$
$m(B) = 30,$	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_4) + m(K_6) = 30,$
$m(C) = 38,$	$m(K_1) + m(K_3) + m(K_4) + m(K_7) = 38,$
$m(K_1) = 10,$	$m(K_1) = 10,$
$m(K_8) = 10,$	$m(K_8) = 10,$
$m(A \cap B) = 15,$	$m(K_1) + m(K_2) = 15,$
$m(B \cap C) = 13,$	$m(K_1) + m(K_4) = 13,$
$m(A \cap C) = 17.$	$m(K_1) + m(K_3) = 17.$
Найти: $m(M)$	$m(M) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + {}$ $+ m(K_4) + m(K_5) + m(K_6) + m(K_7) + {}$ $+ m(K_8).$
	Согласно данным численностям классов получаем:
	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5) = 37,$
	$m(K_4) + m(K_6) = 30 - \big(m(K_1) + m(K_2)\big) =$ $= 30 - 15 = 15,$
	$m(K_7) = 38 - \big(m(K_1) + m(K_3) + m(K_4)\big) =$ $= 38 - (m(K_1) + m(K_3)) - \big(13 - m(K_1)\big) =$ $= 38 - 17 - 3 = 18.$

В результате получаем (рис. 37):

$m(M) = \big(m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5)\big) + {}$
$+ \big(m(K_4) + m(K_6)\big) + m(K_7) + m(K_8) \;=\; 37 +$
$15 + 18 + 10 = 80.$

Ответ: $m(M) = 80.$

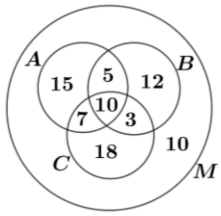


Рис. 37

Задача 6. Известно, что из 30 чисел в множестве M 8 делятся на 12; 14 чисел делятся на 6; 17 чисел делятся на 5; 6 чисел не делятся ни на 5, ни на 6, а 4 числа делятся на 30, но не делятся на 60. Сколько чисел делятся на 60? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 6? Сколько чисел делятся на 6, но не делятся ни на 5, ни на 12?

Решение.

1. По условию задачи для элементов множества M (множества чисел) заданы три свойства:

α – «делиться на 12» (это свойство выделяет подмножество A);

β – «делиться на 6» (это свойство выделяет подмножество B);

γ – «делиться на 5» (это свойство выделяет подмножество C).

2. Ввиду того, что <u>все</u> числа, которые делятся на 12, делятся и на 6, получаем $A \subset B$. (1)

Поскольку:

– существуют числа, которые делятся и на 12, и на 5 одновременно,

– существуют числа, которые делятся на 12, но не делятся на 5,

– существуют числа, которые не делятся на 12, но делятся на 5,

имеем $A \cap C \neq \emptyset$. (2)

Аналогично:

– существуют числа, которые делятся и на 6, и на 5 одновременно,

– существуют числа, которые делятся на 6, но не делятся на 5,

– существуют числа, которые не делятся на 6, но делятся на 5,

поэтому $B \cap C \neq \emptyset$. (3)

3. Диаграмма Эйлера – Венна с учетом условий (1) – (3) принимает следующий вид (рис. 38).

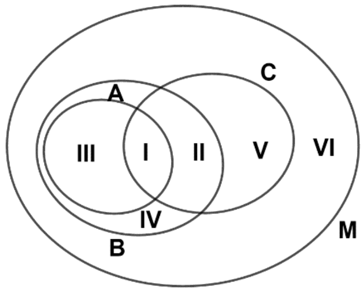


Рис. 38

4. Получены следующие классы:

$K_1 = A \cap B \cap C$– множество чисел, которые делятся на 12 (а значит и на 6) и на 5, то есть фактически множество чисел, которые делятся на 60.

$K_2 = \bar{A} \cap B \cap C$– множество чисел, которые не делятся на 12, но делятся на 6 и на 5 одновременно, то есть фактически делятся на 30, но не делятся на 60.

$K_3 = A \cap B \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые делятся на 12 (а значит, делятся и на 6), но не делятся на 5.

$K_4 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые делятся на 6, но не делятся на 12 и не делятся на 5.

$K_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ – множество чисел, которые делятся на 5, но не делятся на 6 (а значит, не делятся и на 12).

$K_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые не делятся ни на 6 (а значит, не делятся и на 12), ни на 5.

5. Составим краткую запись условия задачи.

Дано:
$m(M) = 30$,
$m(A)$ =8,
$m(B) = 14$,
$m(C) = 17$,
$m(K_2) = 4$,
$m(K_6) = 6$.

Найти:
а) $m(K_1)$,
б) $m(K_5)$,
в) $m(K_4)$.

6. Решение

По условию имеем:
$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) + m(K_5) +$
$+m(K_6) = 30$,
$m(K_1) + m(K_3) = 8$,
$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) = 14$,
$m(K_1) + m(K_2) + m(K_5) = 17$,
$m(K_2) = 4$,
$m(K_6) = 6$.

Согласно данным численностям классов получаем:
а) $m(K_1) + m(K_2) + \big(14 - (m(K_1) + m(K_2))\big) +$
$+ (17 - (m(K_1) + m(K_2))) + m(K_6) = 30$,
$m(K_2) = 4$,
$m(K_6) = 6$.
$m(K_1) + 4 + (14 - (m(K_1) + 4)) + \big(17 - (m(K_1) +$
$+ 4)\big) + 6 = 30$,
$14 + 17 - m(K_1) - 4 + 6 = 30$,
$m(K_1) = 33 - 30$,
$m(K_1) = 3$.

б) $m(K_1) + m(K_2) + m(K_5) = 17$,
$3 + 4 + m(K_5) = 17$,
$m(K_5) = 10$.

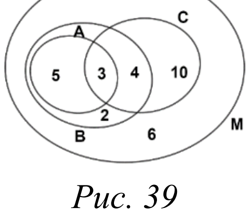


Рис. 39

в) $m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) = 14$,
$m(K_1) + m(K_2) + \big(8 - m(K_1)\big) + m(K_4) = 14$,
$4 + 8 + m(K_4) = 14$,
$m(K_4) = 2$.

Результаты численностей множеств показаны на рис. 39.

Ответ: а) три числа делятся на 60;

б) десять чисел делятся на 5, но не делятся на 6;

в) два числа делятся на 6, но не делятся ни на 12, ни на 5.

Итоговая практическая работа

1. Дано множество $B = \{10, 12\frac{3}{4}, 17{,}3, -7, 4^3, 136\}$. Какие натуральные числа принадлежат этому множеству? Назовите три числа, не принадлежащие этому множеству.

2. Укажите элементы следующих множеств:

а) $\{a, b, c\}$;	д) $\{\emptyset\}$;
б) $\{a\}$;	е) $\{\{a, b\}, \{c\}\}$;
в) $\{\{a\}\}$;	ж) $\{\{a, b, c\}, a\}$;
г) $\emptyset$;	з) $\{\{a\}, a, \emptyset\}$.

3. На числовой прямой даны множества $M = [-5, 2)$ и $K = [0, 4]$. Выполните задания. Ответьте на вопросы.

1) Являются ли множества M и K конечными; бесконечными?

2) Можно ли задать множества M и K перечислением элементов?

3) Охарактеризуйте элементы множеств M и K с помощью числовых неравенств.

4) Постройте множества M и K на числовой прямой.

5) В каком отношении находятся множества M и K?

6) Найдите следующие новые множества: $M \cup K$, $M \cap K$, $M \backslash K$, $K \backslash M$, $\overline{M}$, $\overline{K}$, $\overline{M} \cup \overline{K}$, $\overline{M \cup K}$ $\overline{M} \cap \overline{K}$, $\overline{M \cap K}$ $M \backslash \overline{K}$, $\overline{M} \backslash K$, $\overline{M \backslash K}$, $\overline{K} \backslash M$, $K \backslash \overline{M}$, $\overline{K \backslash M}$ $M \backslash K \cup K \backslash M$, $\overline{M \backslash K} \cup \overline{K \backslash M}$ и изобразите их на числовой прямой.

7) Есть ли среди множеств п. 6 пустые?

8) Принадлежит ли число 2 множествам M, K, $M \cup K$, $M \cap K$, $M \backslash K$, $K \backslash M$, $\overline{M}$, $\overline{K}$?

9) Входит ли число 0 в множества M, K, $M \cup K$, $M \cap K$, $M \backslash K$, $\overline{M \cup K}$, $\overline{M \cap K}$.

10) Определите тип отношений между всеми парами множеств $M \backslash \overline{K}$, $\overline{M} \backslash K$, $M \backslash K$, $\overline{M \backslash K}$.

11) Назовите равные среди всех множеств п. 6.

12) Какие элементы составляют декартово произведение множеств M и K? Изобразите множество $M \times K$ в координатной плоскости.

4. Даны множества геометрических фигур: M – множество многоугольников; K – множество четырехугольников; A – множество параллелограммов; B – множество прямоугольников; C – множество ромбов; D – множество трапеций; E – множество фигур, у которых хотя бы один угол прямой; F – множество фигур, у которых диагонали равны.

Выполните задания. Ответьте на вопросы.

1) Определите тип отношений между всеми парами множеств.

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна для множеств: M, A, B, C; K, A, B, C, D; A, D, E, F; K, B, C, E; K, B, C, F; B, C, E, F.

3) Для каждой диаграммы определите количество классов, на которые разбивается самое широкое множество.

4) Охарактеризуйте элементы каждого класса для всех диаграмм п. 2.

5) Постройте фигуру, принадлежащую каждому из классов для всех диаграмм п. 2.

6) Какие фигуры составляют следующие множества: $M\backslash K$, $A\backslash B$, $B\backslash C$, $B \cap C$, $\overline{B \cap C}_{B\cup C}$, $D\backslash F$, $D\backslash E$, $A \cap E \cap F$, $D \cap E \cap F$? Назовите эти фигуры.

7) Есть ли среди множеств п. 6 равные? Укажите такие множества.

8) Есть ли среди множеств п. 6 пустые? Укажите такие множества.

9) Из множеств M, K, A, B, C, D, E, F образуйте новые с помощью операций пересечения, объединения, вычитания.

10) На диаграмме Эйлера – Венна изобразите множества M, K, A, B, C, D, E, F.

11) На сколько классов произошло разбиение множества M в п. 10?

12) Какому классу фигур принадлежат прямоугольные треугольники, равнобедренные трапеции, квадраты, правильные шестиугольники? Закройте на диаграмме (см. п. 10) соответствующие классы штриховками разного цвета.

Тесты

Вопросы с символом (*) имеют несколько вариантов ответов.

1. Пустым называют множество:

а) которое не содержит ни одного элемента;

б) содержащее ноль;

в) не содержащее чисел.

2. (*) Запись $x \in X$ означает, что:

а) множество X содержит элемент x;

б) объекты x и Xсвязаны некоторым отношением;

в) множество X принадлежит элементу x.

3. Количество элементов множества выражается натуральным числом только для:

а) конечных множеств;

б) бесконечных множеств;

в) числовых множеств.

4. (*) Множество считается заданным, если:

а) перечислены все элементы данного множества;

б) указан способ, позволяющий для любого элемента решить, принадлежит или не принадлежит он данному множеству;

в) указано характеристическое свойство элементов данного множества.

5. Числовые множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ находятся в отношении:

а) пустого пересечения;

б) пересечения;

в) включения;

г) равенства.

6. Если $a < x < b$, то:

а) $x \in (a, b)$;

б) $x \in [a, b]$;

в) x – это число из отрезка с концами a и b.

7. Чем отличаются отношения между множествами от операций над множествами?

а) известны только операции над множествами;

б) отношения устанавливают связь между множествами, а в результате действия операции появляется новое множество;

в) ничем, это одно и то же;

г) известны только отношения между множествами.

8. Если у множеств нет общих элементов, то они находятся в отношении:

а) пустого пересечения;

б) пересечения;

в) включения;

г) равенства.

9. Если некоторые элементы двух множеств одинаковы, то такие множества находятся в отношении:

а) пустого пересечения;

б) пересечения;

в) включения;

г) равенства.

10. У двух множеств все элементы одинаковые, значит, эти множества находятся в отношении:

а) пустого пересечения;

б) пересечения;

в) включения;

г) равенства.

11. (*) Одно множество есть подмножество другого, если:

а) все элементы второго множества являются элементами первого;

б) эти множества равны;

в) все элементы второго множества являются элементами первого;

г) эти множества пересекаются.

12. (*) В отношении равенства находятся:

а) множество ромбов с равными диагоналями и множество прямоугольников с равными сторонами;

б) множество действительных и простых чисел;

в) множество квадратов и множество параллелограммов плоскости;

г) множество кругов и множество овалов плоскости;

д) множество чётных чисел и множество чисел, кратных 2.

13. Если множества A и B находятся в отношении пустого пересечения, то число элементов объединения этих множеств $m(A \cup B)$ равно:

а) $m(A) + m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

б) $m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

в) $m(A) - m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞.

14. Если множества A и B находятся в отношении пересечения, $A \cap B \neq \emptyset$, то число элементов объединения этих множеств $m(A \cup B)$ равно:

а) $m(A) + m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

б) $m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

в) $m(A) - m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞.

15. Если множества A и B находятся в отношении включения, $A \subset B$, то число элементов $m(\overline{A_B})$ дополнения множества A до множества B равно:

а) $m(A) + m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

б) $m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

в) $m(A) - m(B)$, где m(۞) – число элементов множества ۞;

г) $m(B) - m(A)$, где m(۞) – число элементов множества ۞.

16. (*) Изображением декартова произведения в декартовой плоскости может быть:

а) система отрезков;

б) система точек;

в) часть плоскости;

г) шар;

д) куб.

17. (*) Даны множества A, B, C. Множества B и C содержатся в множестве A, если:

а) все элементы множеств B и C – элементы множества A;

б) A – множество действительных чисел $\mathbb{R}$, B – множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, C – множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$;

в) все элементы множества A – элементы множеств B и C;

г) A – множество чисел, кратных 2; B – множество чисел, кратных 4; C – множество чисел, кратных 10;

д) $B \subset A \wedge C \subset A$;

е) $B \subset A \wedge A \subset C$.

18. Объединением двух множеств называется новое множество, состоящее:

а) из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств;

б) элементов, принадлежащих каждому из множеств;

в) всех элементов, принадлежащих первому множеству и не принадлежащих второму;

г) упорядоченных пар элементов с первой компонентой из первого множества и второй компонентой из второго.

19. Пересечением двух множеств называется новое множество, состоящее:

а) из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств;

б) элементов, принадлежащих каждому из множеств;

в) всех элементов, принадлежащих первому множеству и не принадлежащих второму;

г) упорядоченных пар элементов с первой компонентой из первого множества и второй компонентой из второго.

20. Разностью двух множеств называется новое множество, состоящее:

а) из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств;

б) элементов, принадлежащих каждому из множеств;

в) всех элементов, принадлежащих первому множеству и не принадлежащих второму;

г) упорядоченных пар элементов с первой компонентой из первого множества и второй компонентой из второго.

21. Декартовым произведением двух множеств называется новое множество, состоящее:

а) из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств;

б) элементов, принадлежащих каждому из множеств;

в) всех элементов, принадлежащих первому множеству и не принадлежащих второму;

г) упорядоченных пар элементов с первой компонентой из первого множества и второй компонентой из второго.

22. (*) Для доказательства равенства двух множеств достаточно:

а) сравнить эти множества на диаграмме Эйлера – Венна;

б) сравнить эти множества на диаграмме Эйлера – Венна, а далее «развернуть», согласно определениям операций над множествами, каждое из множеств и показать, что любой элемент первого множества является элементом второго, и наоборот;

в) установить включение первого множества во второе и включение второго множества в первое;

г) научиться читать эти множества;

д) установить, что множества состоят из одинаковых элементов.

23. Максимальное число классов при разбиении множества на классы с помощью трех свойств равно:

а) 8;

б) 6;

в) 4;

г) 3;

д) 2.

24. Минимальное число классов при разбиении множества на классы с помощью двух свойств равно:

а) 8;

б) 6;

в) 4;

г) 3;

д) 2.

25. (*) Если множество разбито на классы, то:
а) объединение всех классов равно самому множеству;
б) каждый класс не пуст;
в) классы попарно не пересекаются;
г) возможно наличие пустого класса;
д) число классов совпадает с числом подмножеств данного множества 2^n.
26. (*) Множество треугольников классифицируют:
а) на равнобедренные, равносторонние и прямоугольные;
б) равнобедренные, равносторонние и разносторонние;
в) остроугольные, тупоугольные и прямоугольные;
г) подобные и равные;
д) маленькие и большие.
27. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$. Укажите верные новые множества:
а) $A \backslash B = \{1, 3\}$, $B \backslash A = \{4,6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$;
б) $B \backslash A = \{1, 3\}$, $A \backslash B = \{4, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$;
в) $A \backslash B = \{1, 3\}$, $B \backslash A = \{4,6\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cup B = \{2\}$, $A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$.
28. Решением неравенства $|x| \leq 3$, где $x \in \mathbb{R}$, является:
а) отрезок $[-3, 3]$;
б) интервал $(-3, 3)$;
в) бесконечный полуинтервал $(-\infty, 3)$;
г) множество чисел $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
29. Правый дистрибутивный закон пересечения относительно объединения имеет вид:
а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
30. (*) Выберите из следующих утверждений законы:
а) $A \cap A = A$;
б) $A \cup A = \emptyset$;
в) $A \cup \emptyset = \emptyset$;
г) $A \cap A = \emptyset$;
д) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
е) $A \cup \emptyset = A$.

Опросник

1. Запишите определение операции пересечения множеств.
2. Запишите определение операции объединения множеств.
3. Запишите определение операции вычитания множеств.
4. Запишите определение операции декартова умножения двух множеств.
5. Как найти количество элементов в объединении пересекающихся множеств?
6. Как найти количество элементов в объединении непересекающихся множеств?
7. Как найти количество элементов дополнения множества A до множества B?
8. Как найти количество элементов декартова произведения множества A на множество B?
9. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?
10. В группе 7 человек: из них 5 рисуют, 4 поют, 1 не поет и не рисует. Сколько человек и рисуют, и поют?
11. В группе 6 человек: из них 3 рисуют, 4 поют, 1 не поет и не рисует. Сколько человек и рисуют, и поют?
12. В группе 7 человек: из них 5 рисуют, 4 поют, 3 человека и рисуют, и поют. Сколько человек не поют и не рисуют?
13. В группе 6 человек: из них 3 рисуют, 4 поют, 1 не поет и не рисует. Сколько человек и рисуют, и поют?
14. В группе 8 человек: из них 5 рисуют, 4 поют, 3 человека и рисуют, и поют. Сколько человек не поют и не рисуют?
15. В группе 8 человек: из них 5 рисуют, 4 поют, 2 человека и рисуют, и поют. Сколько человек не поют и не рисуют?
16. Если из отрезка [2, 10] вычесть интервал (5, 7), то получится: а) отрезок [2, 5]; б) интервал (7, 10); в) объединение отрезков [2, 5] и [7,10]; г) объединение интервалов (2, 5) и (7, 10). Выберите ответ.
17. Если из отрезка [2, 10] вычесть интервал [2, 7), то получится отрезок [7, 10] или интервал (7, 10)?
18. Если из отрезка [2, 10] вычесть интервал (4, 10], то получится отрезок [2, 4] или интервал (2, 4)?
19. Пересечением отрезка и интервала может быть отрезок? Если да, то приведите пример.

20. При пересечении отрезка и интервала может получиться интервал? Если да, то приведите пример.

21. При пересечении отрезка и интервала может получиться пустое множество? Приведите пример.

22. В декартовом произведении числовых множеств изображением будет система точек только в случае: а) если оба множества – действительные числа; б) если одно из множеств есть целые числа; в) если оба множества – целые числа. Выберите правильный ответ.

23. В декартовом произведении числовых множеств изображением будет система отрезков только в случае: а) если оба множества – действительные числа; б) если одно из множеств есть целые числа; в) если оба множества – целые числа. Выберите правильный ответ.

24. В декартовом произведении числовых множеств изображением будет прямоугольник только в случае: а) если оба множества – действительные числа; б) если одно из множеств есть целые числа; в) если оба множества – целые числа. Выберите правильный ответ.

25. Когда классификация на множестве будет неправильной?

26. Когда классификация на множестве будет неполной?

27. Перечислите условия разбиения множества на классы.

28. Правильная ли классификация: треугольники бывают равнобедренные и неравнобедренные? Почему?

29. Правильная ли классификация: треугольники бывают равнобедренные и прямоугольные? Почему?

30. Правильная ли классификация: треугольники бывают равнобедренные и подобные? Почему?

Задания для рейтинг-контроля

Вариант 1

1. Дано множество $C = \{213, 45, 324, 732, 136\}$. Составьте подмножество множества C, состоящее из чисел, которые: а) делятся на 3; б) делятся на 9; в) не делятся на 4; г) не делятся на 5; д) не делятся на 3.

2. Изобразите на числовой прямой множества: а) $|x| < 5$; б) $|x + 3| \leq 4$; в) $|x - 3| \geq 4$; г) $|x + 1| > 3$.

3. Пусть $E_1 = \{x |\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 20 = 0\}$, $E_2 = \{x |\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 12 = 0\}$. Задайте множества E_1, E_2 перечислением элементов. Образуйте множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$.

4. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Укажите характеристическое свойство элементов множеств $A \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$.

5. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них есть 100 чисел, кратных 2; 115 чисел, кратных 3; 120 чисел, кратных 5; 45 чисел, кратных 6; 38 чисел, кратных 10; 50 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30. Составьте диаграмму Эйлера – Венна и определите, сколько элементов в заданном множестве.

6. Даны множества $A = (-\infty, 1)$, $B = (-3, +\infty)$, $C = (7, 12]$. Отметьте на числовой прямой множество $X = B \setminus (A \cup C)$ и сформулируйте характеристическое свойство его элементов. Ответ обоснуйте. Можно ли указать в множестве X наибольшее натуральное число? Существует ли в множестве X наименьшее натуральное число? Если наименьшее или наибольшее натуральное число существует, то назовите его.

7. В координатной плоскости постройте прямые, параллельные оси OY и проходящие через точки $(2, 3)$ и $(-2, 3)$. Установите, декартово произведение каких двух множеств изображается в координатной плоскости в виде полосы, заключенной между этими прямыми.

8. Даны множества $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$. Докажите, что множество $A \times (B \cup C)$ равно множеству $(A \times B) \cup (A \times C)$. Проверьте справедливость равенства $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$.

9. Пользуясь определениями операций объединения, пересечения и разности множеств, установите, что для множеств $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$ верны равенства $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ и $A \cap B \setminus C = A \cap (B \setminus C)$. Проверьте справедливость равенств на диаграммах Эйлера – Венна.

10. Проверьте правильность следующих классификаций: а) треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные; б) все пары окружностей делятся на концентрические и пересекающиеся; в) натуральные числа разделяются на чётные, нечётные и делящиеся на 3; г) целые числа разделяются на положительные и отрицательные. В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

Вариант 2

1. Даны следующие множества: A – множество натуральных чисел; B – множество чётных натуральных чисел; C – множество нечётных натуральных чисел; D – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; E – множество чисел, десятичная запись которых оканчивается нулём; F – множество чисел, кратных 6; K – множество чисел, кратных 3; M – множество чисел, кратных 2 и 5 одновременно. Какие из данных множеств находятся в отношении включения? Есть ли среди данных множеств равные?

2. Покажите на координатной прямой множество решений неравенства: а) $|x| - 2 < 5$; б) $|x - 4| \leq 7$; в) $|x + 2| \geq 3$; г) $|x - 3| > 3$.

3. Дана пара множеств $A = \{a, b, c, d, f, h\}$ и $B = \{a, c, f, l\}$. Найдите: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \backslash B$; г) $\bar{A}_{A \cup B}$.

4. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Для множеств $A \cap B \cap \bar{C}$ и $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ укажите характеристическое свойство их элементов.

5. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, все три языка изучают три студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык? Составьте диаграмму Эйлера – Венна и ответьте на вопросы задачи.

6. Даны множества $A = (-\infty, 6]$, $B = (-7, +\infty)$, $C = [-2, 15]$. Отметьте на числовой прямой множество $X = B \backslash (A \cap C)$ и сформулируйте характеристическое свойство его элементов. Ответ обоснуйте. Можно ли в множестве X указать наименьшее целое число? Если наименьшее целое существует, то назовите его.

7. В координатной плоскости постройте прямые, параллельные оси OX и проходящие через точки $(2, 3)$ и $(2, -1)$. Установите, декартово произведение каких двух множеств изображается в координатной плоскости в виде полосы, заключённой между этими прямыми.

8. Даны множества $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$. Докажите, что множество $A \times (B \backslash C)$ равно множеству $(A \times B) \backslash (A \times C)$. Проверьте справедливость равенства $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

9. Пользуясь определениями операций дополнения, объединения, пересечения и разности множеств, установите, что для множеств $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}, C = \{c, m\}$ верны равенства $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$ и $\overline{(A \backslash B)} = \bar{A} \cup (A \cap B)$. Проверьте справедливость равенств на диаграммах Эйлера – Венна.

10. Проверьте правильность следующих классификаций: а) треугольники делятся на разносторонние, равносторонние и равнобедренные; б) линии делятся на ломаные и кривые; в) параллелограммы делятся на ромбы, прямоугольники и параллелограммы, не имеющие оси симметрии; г) рациональные числа разделяются на целые и дробные. В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И СТРУКТУРЫ

2.1. Алгебраические операции и их свойства

С числами, множествами, высказываниями и предикатами можно выполнять определенные операции. Например, сложение, вычитание, умножение, деление – это операции над числами; объединение, пересечение, вычитание, декартово умножение – это операции над множествами; отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация – это операции над высказываниями и предикатами. Результатом действия операции с числами всегда будет новое число, над множествами – новое множество, с высказываниями или предикатами – новое высказывание или предикат соответственно. Естественно, возникает вопрос: можно ли обобщить понятие операции (и её результата) и рассматривать его независимо от природы элементов логики и алгебры?

Определение. *Алгебраической операцией* $*$ называется отображение декартова квадрата некоторого множества в это же самое множество $\varphi: X^2 \to X$.

Другими словами, на множестве X задана алгебраическая операция $*$, если задано соответствие, которое любой паре элементов (a, b) этого множества сопоставляет единственный элемент $c \in X$, $a * b = c$. Результат действия алгебраической операции $*$ попадает в исходное множество: $(\forall a \in X \wedge \forall b \in X) \implies (a * b \in X)$ (Здесь запись $\forall a \in X \wedge \forall b \in X$ тождественна записи $(a, b) \in X^2$).

Множество $A \subset X$ называют *замкнутым* относительно операции $*$, если из $a \in A$ и $b \in A$ следует, что $a * b \in A$. *Замкнутость* множества X относительно операции $*$ равносильна тому, что $a * b$ является *алгебраической операцией* в A.

Пример. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ алгебраическими являются операции сложения $+$ и умножения $\cdot$. Для любой пары натуральных чисел их сумма и произведение натуральны:

$+ \quad (a, b) \to a + b$	$\cdot \quad (a, b) \to a \cdot b$
$\forall\, a, b \in \mathbb{N}\; a + b \in \mathbb{N}$	$\forall\, a, b \in \mathbb{N}\; a \cdot b \in \mathbb{N}$
$(2,3) \to 2 + 3 = 5 \in \mathbb{N}$	$(2,3) \to 2 \cdot 3 = 6 \in \mathbb{N}$
$(3,2) \to 3 + 2 = 5 \in \mathbb{N}$	$(3,2) \to 3 \cdot 2 = 6 \in \mathbb{N}$

Вычитание на множестве $\mathbb{N}$ не является алгебраической операцией, так как разность натуральных чисел не всегда определяется как число натуральное. Например, паре $(3, 2) \in \mathbb{N}^2$ соответствует разность $3 - 2 = 1, 1 \in \mathbb{N}$; разность, соответствующая паре $(2,3) \in \mathbb{N}^2$, не есть натуральное число $2 - 3 = -1, -1 \notin \mathbb{N}$.

Определение. *Частичной алгебраической операцией* называется та операция, результат действия которой определяется только при дополнительных условиях.

Вычитание и деление на множестве $\mathbb{N}$ – это частичные алгебраические операции: дополнительным условием существования для разности будет отношение «больше», $a > b$, для частного – наличие отношения «делимости», $a \vdots b$.

Например, для деления натуральных чисел $\forall\, a, b \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a{:}\,b \in$ $\in \mathbb{N} -?$ Выполнено ли требование: «Для <u>любых</u> чисел a, b?»

Поставим паре натуральных чисел в соответствие их частное: $(a, b) \rightarrow a{:}\,b$.

Рассмотрим пару $(8, 4) \in \mathbb{N}^2$, $(8,4) \rightarrow \ 8{:}\,4 = 2$. Полученный результат $2 \in \mathbb{N}$.

Возьмем пару $(9, 4) \in \mathbb{N}^2$, $(9,4) \rightarrow 9{:}\,4 = \frac{9}{4}, \frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$. Вывод: <u>не для всех</u> натуральных чисел a, b результат операции деления будет числом натуральным, поэтому деление на множестве $\mathbb{N}$ – частичная алгебраическая операция.

Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что на основных числовых множествах алгебраическими являются следующие операции:

$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$
$+\,, \cdot$		$+\,, \cdot, -$		$+\,, \cdot\,, -, :$		$+\,, \cdot, -, :, \sqrt{}$

Легко проверить, что:

для любых двух множеств A и B все операции над ними в универсальном множестве будут алгебраическими:	для любых двух высказываний A и B все логические операции над ними будут алгебраическими
$A \cup B, A \cap B, A \backslash B, A \times B, \overline{A}$	$A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B, \overline{A}$

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *коммутативной*, если для любых $a, b \in X$ выполняется равенство $a * b = b * a$.

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Если для любого $a \in X$ имеем $e * a = a$, то $e \in X$ называют *левым нейтральным* элементом для операции $*$; если для всех $a \in X$ $a * e = a$, то e называют *правым нейтральным* элементом.

Элемент, нейтральный слева и справа, называют *нейтральным* элементом для операции $*$. В множестве X может быть не более одного нейтрального элемента.

Элемент $b \in X$ называют *правым симметричным* для элемента $a \in X$, если $a * b = e$, и *левым симметричным*, если $b * a = e$.

Элемент, симметричный к a слева и справа, называют *симметричным* a. Для каждого элемента a может быть не более одного симметричного элемента.

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *дистрибутивной слева* относительно операции $\circ$, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *дистрибутивной справа* относительно операции $\circ$, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$.

Определение. Операция $*$ на множестве X называется *дистрибутивной*, если $*$ дистрибутивна слева и справа относительно операции $\circ$.

Пример. Является ли умножение в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ дистрибутивным относительно операции вычитания?

<u>Решение.</u> Умножение – дистрибутивная операция относительно вычитания, потому что для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие равенства:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) \;\longrightarrow\; a \cdot (b - c) = ab - ac,$$

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \;\longrightarrow\; (a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Примеры задач

Задача 1 (6.2)[4]. Относительно каких алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) замкнуты следующие числовые множества:

Б) {натуральные числа}

Рассмотрим множество натуральных чисел относительно алгебраических операций сложения, вычитания, умножения, деления.

Пусть числа $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда сумма $a + b \in \mathbb{N}$ и является числом натуральным. Разность $a - b$ чисел a, b не всегда натуральное число, только при выполнении дополнительного условия: $a > b$. Результат произведения $a \cdot b$ чисел a, b всегда будет натуральным числом. Результатом деления чисел a, b часто будет дробное число. Приходим к выводу, что множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения. Множество натуральных чисел относительно операций вычитания и деления не является замкнутым.

Г) {четные целые числа}

Даны числа $a, b \in \mathbb{Z} \wedge a = 2n, b = 2m \wedge n, m \in \mathbb{Z}$. Найдем результаты суммы, разности, произведения и частного чисел a, b.

$a + b = 2n + 2m = 2(n + m) = 2t,\ 2t \in \mathbb{Z}$

$a - b = 2n - 2m = 2(n - m) = 2k,\ 2k \in \mathbb{Z}$

$a \cdot b = 2n \cdot 2m = 4 \cdot nm = 2p,\ 2p \in \mathbb{Z}$

$a : b = 2n : 2m = n : m,\ n : m \in \mathbb{Z}$ не всегда

Вывод: множество четных целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, но не является замкнутым относительно операции деления.

Е) $\{0\}$

$0 + 0 = 0$

$0 - 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

$0 : 0$ – невыполнимая операция.

Вывод: множество, состоящее из единственного элемента – нуля, является замкнутым относительно операций сложения, вычитания и умножения и не замкнуто относительно операции деления.

---

[4] Здесь и далее нумерация в скобках соответствует нумерации задач, представленных в задачнике-практикуме по математике Н. Я. Виленкина и др. Некоторые пункты из задач (пропущены в пособии) предлагается сделать самостоятельно.

З) $\{0, 1, 2\}$

Рассмотрим суммы элементов данного множества: $0 + 0 = 0 \in \in \{0, 1, 2\}$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 \in \{0, 1, 2\}$, $0 + 2 = 2 + 0 = 2 \in \{0, 1, 2\}$, $1 + 2 = 2 + 1 = 3 \notin \{0, 1, 2\}$, $2 + 2 = 4 \notin \{0, 1, 2\}$. Следовательно, числовое множество $\{0, 1, 2\}$ не будет замкнутым относительно операции сложения.

Рассмотрим все возможные разности. Имеем: $0 - 0 = 1 - 1 = = 2 - 2 = 0 \in \{0, 1, 2\}$, $0 - 1 = 1 - 2 = -1 \notin \{0, 1, 2\}$, $1 - 0 = 2 - 1 = = 1 \in \{0, 1, 2\}$, $0 - 2 = -2 \notin \{0, 1, 2\}$, $2 - 0 = 2 \in \{0, 1, 2\}$. Следовательно, числовое множество $\{0, 1, 2\}$ не будет замкнутым относительно операции вычитания.

Для операции умножения получаем: $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = = 2 \cdot 0 = 0 \in \{0, 1, 2\}$, $1 \cdot 1 = 1 \in \{0,1, 2\}$, $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2 \in \{0,1, 2\}$, $2 \cdot 2 = 4 \notin \{0, 1, 2\}$. Следовательно, числовое множество $\{0, 1, 2\}$ не будет замкнутым относительно операции умножения.

Результаты деления $0: 1, 0: 2, 1: 1, 2: 2$ принадлежат множеству $\{0, 1, 2\}$. Частные же $0: 0, 1: 0, 2: 0, 1: 2$ либо не имеют смысла, либо не принадлежат исходному множеству.

Приходим к выводу, что числовое множество $\{0, 1, 2\}$ не является замкнутым относительно алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления.

К) $\{6n + 5\}$, где $n \in \mathbb{Z}$

Проверим принадлежность результатов алгебраических операций исходному множеству.

Сложение $(6n + 5) + (6k + 5) = 6(n + k) + 10 = 6t + 10$. Число такого вида не принадлежит множеству $\{6n + 5\}$: $6t + 10 \notin \{6n + 5\}$.

Вычитание $(6n + 5) - (6k + 5) = 6(n - k) + 0 = 6t \notin \{6n + 5\}$.

Умножение $(6n + 5) \cdot (6k + 5) = 36nk + 30k + 30n + 25 = = 6(6nk + 5n + 5k) + 25 = 6t + 25$. Число такого вида не принадлежит множеству $\{6n + 5\}$: $6t + 25 \notin \{6n + 5\}$.

Деление $(6n + 5): (6k + 5) \notin \{6n + 5\}$.

Итак, числовое множество вида $\{6n + 5\}$ незамкнуто относительно алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Задача 2 (6.3). Для каких пар $(*, B)$ истинно высказывание «$*$ является алгебраической операцией в множестве B».

А) $*$ – сложение, B – множество натуральных чисел

Высказывание истинно, потому что результатом сложения натуральных чисел является число натуральное, $x, y \in \mathbb{N} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

Б) $*$ – сложение, B – множество отрицательных чисел

При сложении отрицательных чисел результат-сумма есть число отрицательное, $x, y \in \mathbb{R}^{-} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{R}^{-}$. Поэтому высказывание истинно.

В) $*$ – деление, B – множество положительных чисел

Результатом частного положительных чисел будет число положительное, $x, y \in R^{+} \Longrightarrow x{:}\, y \in \mathbb{R}^{+}$. Высказывание истинно.

Г) $*$ – вычитание, B – множество целых чисел

Высказывание истинно, так как разность – результат вычитания – целых чисел является целым числом.

Д) $*$ – деление, B – множество всех действительных чисел

Высказывание истинно: результат частного действительных чисел является числом действительным, $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x{:}\, y \in \mathbb{R}$.

Е) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n + 1$

Выполним сложение двух чисел указанного вида: $(3n + 1) + (3k + 1) = 3n + 1 + 3k + 1 = 3(n + k) + 2 = 3t + 2 \notin \{3n + 1\}$.

Результат суммы – число иного вида, поэтому сложение не является алгебраической операцией в множестве целых чисел вида $3n + 1$.

Ж) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $3n + 1$

Выполним умножение двух чисел указанного вида и посмотрим, попадает ли результат произведения в данное числовое множество: $(3n + 1) \cdot (3k + 1) = 9nk + 3k + 3n + 1 = 3(3nk + n + k) + 1 = 3t + 1 \in \{3n + 1\}$. Результат произведения – число исходного вида, поэтому умножение является алгебраической операцией на множестве целых чисел вида $3n + 1$.

З) $*$ – образование наибольшего общего делителя, B – множество натуральных чисел

Общие делители двух или нескольких чисел выбирают из представителей натурального ряда. Следовательно, образование наибольшего общего делителя представляет собой алгебраическую операцию на множестве натуральных чисел.

И) $*$ – образование степени: $(m, n) \longrightarrow m^{n}$, B – множество натуральных чисел

При возведении в натуральную степень числа натурального результатом будет натуральное число. Следовательно, образование степени – алгебраическая операция на множестве натуральных чисел.

К) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3k$

Найдем результат суммы двух чисел указанного вида: $3k + 3n = = 3(k + n) = 3t \in \{3n\}$ – полученное число такого же вида, как и слагаемые. Значит, сложение – алгебраическая операция на множестве целых чисел вида $3k$.

Л) $*$ – вычитание, B – множество нечетных чисел

Нечетное число зададим формулой $\{2n + 1\}$. Тогда результатом вычитания чисел вида $(2n + 1) - (2k + 1) = 2n - 2k + 1 - 1 = = 2(n - k) = 2t$ всегда будет число четное. Следовательно, вычитание не является алгебраической операцией на множестве нечетных чисел.

М) $*$ – умножение, B – множество рациональных чисел

Результатом умножения рациональных чисел будет число рациональное. Значит, умножение – алгебраическая операция на множестве рациональных чисел.

Н) $*$ – образование наименьшего общего кратного, B – множество натуральных чисел

Общие кратные двух или нескольких натуральных чисел являются натуральными. Следовательно, образование наименьшего общего кратного – алгебраическая операция на множестве натуральных чисел.

О) $*$ – сложение, B – множество отрицательных целых чисел

При сложении целых отрицательных чисел в сумме получится целое отрицательное число, $x, y \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}^-$. Поэтому сложение – алгебраическая операция на множестве отрицательных целых чисел.

П) $*$ – деление, B – множество отрицательных чисел

Если отрицательное число делить на отрицательное, то получится число положительное, то есть результат операции не принадлежит множеству B. Значит, вычитание не является алгебраической операцией на множестве отрицательных чисел.

Р) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $4k + 1$

Выполним умножение двух чисел указанного вида и посмотрим, попадает ли результат произведения в данное числовое множество: $(4k + 1) \cdot (4n + 1) = 16kn + 4n + 4k + 1 = 4(4kn + k + n) + 1 =$

$= 4t + 1 \in \{4k + 1\}$. Результатом произведения служит число исходного вида, поэтому умножение – алгебраическая операция на множестве целых чисел вида $4k + 1$.

Задача 3 (6.4). Какие из следующих алгебраических операций на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ являются коммутативными: а) сложение; б) вычитание; в) умножение.

Пусть $x, y \in \mathbb{Z}$. Тогда для суммы, разности, произведения данных чисел будет соответственно выполнено

$x + y = y + x,$

$x - y \neq y - x,$

$x \cdot y = y \cdot x.$

Значит, алгебраические операции сложения и умножения – коммутативные на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, а вычитание целых чисел некоммутативно.

Г) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow |x + y|$

Имеем $(x, y) \longrightarrow |x + y|$ и $(y, x) \longrightarrow |y + x|$. Результаты вычислений $|x + y|$ и $|y + x|$ совпадают: $|x + y| = |y + x|$, значит, операция сложения целых чисел, взятая по модулю $|x + y|$, на множестве целых чисел коммутативна.

Д) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow x^2 - y^2$

Если $(x, y) \longrightarrow x^2 - y^2$, то $(y, x) \longrightarrow y^2 - x^2$. Результаты действий операции нахождения разности квадратов чисел различны (по знаку): $x^2 - y^2 \neq y^2 - x^2$, следовательно, разность квадратов чисел не является коммутативной операцией.

Задача 4 (6.5). Обладает ли свойством коммутативности: а) операция объединения множеств; б) операция вычитания множеств?

По определению операции объединения множеств A и B новое множество $A \cup B$ будет содержать элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств (A или B). Точно так же будет сформировано множество $B \cup A$, и составлять его будут элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств (B или A). Множества $A \cup B$ и $B \cup A$ образованы одними и теми же элементами, поэтому равны между собой. Следовательно, операция объединения множеств коммутативна.

По определению операции вычитания множеств A и B новое множество $A \backslash B$ состоит из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B. Соответственно, множество $B \backslash A$ содержит элементы, принадлежащие множеству B и не принадлежащие множеству A. Множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ состоят из разных элементов, то есть $A\setminus B \neq B\setminus A$. Отсюда заключаем, что операция вычитания множеств свойством коммутативности не обладает.

Задача 5 (6.8). Является ли коммутативной операция возведения в степень на множестве натуральных чисел?

Пусть операция возведения в степень задана формулой $(x, y) \longrightarrow x^y$. Тогда (y, x) имеет вид $(y, x) \longrightarrow y^x$. Замечаем, что $x^y \neq y^x$, следовательно, $(x, y) \neq (y, x)$. Поэтому операция возведения в степень на множестве натуральных чисел коммутативной не является.

Задача 6 (6.12). Какие из следующих операций на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел ассоциативны?

А) сложение

Пусть $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Требуется установить равенство $x + (y + z) =$ $= (x + y) + z$.

Сложение рациональных чисел можно выполнять в разном порядке. Поэтому операция сложения на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел ассоциативна.

Б) вычитание

Для доказательства свойства ассоциативности необходимо проверить справедливость равенства $x * (y * z) = (x * y) * z$ для любых $x, y, z \in \mathbb{Q}$:

$x * y = x - y$;

$\text{л. ч.} = x * (y * z) = x * (y - z) = x - (y - z)$;

$\text{пр. ч.} = (x * y) * z = (x - y) * z = (x - y) - z$.

Так как равенство $x - (y - z) = (x - y) - z$ не имеет места при любых рациональных значениях x, y, z, приходим к выводу: операция вычитания неассоциативна на множестве $\mathbb{Q}$.

В) умножение

Аналогично сложению умножение рациональных чисел можно выполнять в разном порядке: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$. Поэтому операция умножения на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел ассоциативна.

Г) операция $(x, y) \longrightarrow 2x - y$

Проверим справедливость равенства $x * (y * z) = (x * y) * z$ для любых чисел x, y, z:

$x * y = 2x - y$;

$\text{л. ч.} = x * (y * z) = x * (2y - z) = 2x - (2y - z);$

$\text{пр. ч.} = (x * y) * z = (2x - y) * z = 2(2x - y) - z.$

Равенство $2x - (2y - z) = 2(2x - y) - z$ невозможно при любых числовых значениях x, y, z. Следовательно, операция $(x, y) \longrightarrow\longrightarrow 2x - y$ ассоциативной не является.

Д) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow |x - y|$

Проверим справедливость равенства $x * (y * z) = (x * y) * z$ для любых чисел x, y, z:

$x * y = |x - y|;$

$\text{л. ч.} = x * (y * z) = x * |y - z| = |x - |y - z||;$

$\text{пр. ч.} = (x * y) * z = |x - y| * z = ||x - y| - z|.$

Равенство $\big|x - |y - z|\big| = \big||x - y| - z\big|$ несправедливо при любых числовых значениях x, y, z. Следовательно, операция $(x, y) \longrightarrow \longrightarrow |x - y|$ неассоциативна.

Е) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow x^2 - y^2$

Проверим справедливость равенства $x * (y * z) = (x * y) * z$ для любых чисел x, y, z:

$x * y = x^2 - y^2;$

$\text{л. ч.} = x * (y * z) = x * (y^2 - z^2) = x^2 - (y^2 - z^2)^2;$

$\text{пр. ч.} = (x * y) * z = (x^2 - y^2) * z = (x^2 - y^2)^2 - z^2.$

Равенство $x^2 - (y^2 - z^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 - z^2$ несправедливо при любых числовых значениях x, y, z. Следовательно, операция $(x, y) \longrightarrow \longrightarrow x^2 - y^2$ неассоциативна.

Задача 7 (6.14). Является ли ассоциативной операция возведения в степень на множестве натуральных чисел? Проверьте, выполняется ли, например, равенство $2 * (1 * 3) = (2 * 1) * 3$, где $m * n = m^n$.

Для ответа на вопрос задачи рассмотрим равенство $m * (n * k) = = (m * n) * k$ при $\forall\, m, n, k \in \mathbb{N}$. По условию $m * n = m^n$. Тогда

$m * (n * k) = m * (n^k) = m^{n^k};$

$(m * n) * k = (m^n) * z = (m^n)^k = m^{nk}.$

Видим, что $m^{n^k} \neq m^{nk}$. Это означает, что операция возведения в степень на множестве натуральных чисел не будет ассоциативной.

Проверим равенство $2 * (1 * 3) = (2 * 1) * 3$:

$m * (n * k) = m^{n^k} = 2^{1^3} = 2^1 = 2;$

$(m * n) * k = m^{nk} = 2^{1 \cdot 3} = 2^3 = 8;$

$2 \neq 8 \implies 2 * (1 * 3) \neq (2 * 1) * 3.$

В частном случае убедились, что операция возведения в степень в множестве натуральных чисел неассоциативна.

Задача 8 (6.15). Какое число является нейтральным относительно операции сложения целых чисел? Есть ли нейтральный элемент для сложения натуральных чисел?

По определению нейтрального элемента $e * a = a * e = a$ в множестве целых чисел относительно операции сложения должно выполняться равенство $e + a = a + e = a$. Есть ли такое целое число, к которому добавляем любое целое a или которое добавляем к a и в результате получаем само число a? Да, такое число существует. Это ноль: $e = 0$!

Нейтральный элемент $e = 0$ относительно операции сложения на множестве целых чисел не является числом натуральным. В множестве натуральных чисел не существует нейтрального элемента.

Задача 9 (6.16). Какое число является нейтральным относительно операции умножения целых чисел?

По определению нейтрального элемента $e * a = a * e = a$ в множестве целых чисел относительно операции умножения должно иметь место равенство $e \cdot a = a \cdot e = a$. Есть ли такое целое число, при умножении которого на любое целое a или умножая на которое в результате получается само a? Да, такое число существует. Это единица: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. Ответ: $e = 1$.

Задача 10 (6.17). Найдите нейтральный элемент для операции $(x, y) \longrightarrow x + y + xy$ на множестве рациональных чисел.

Воспользуемся определением нейтрального элемента $e * a = a * e = a$. В данном случае получаем равенство $a + e + ae = a$. Найдем, чему равен элемент e:

$$a + e + ae = a,$$
$$e + ae = a - a,$$
$$e(1 + a) = 0,$$
$$e = \frac{0}{1 + a}$$
$$e = 0.$$

Задача 11 (6.18). Какое множество является нейтральным элементом относительно операции объединения множеств? Существует ли нейтральный элемент для операции пересечения множеств (рассматриваются лишь подмножества универсального множества U)?

Найдем левый нейтральный элемент $E \in U$. По определению для любого множества $M \in U$ выполняется равенство $E * M = M$, то есть $E \cup M = M$. Аналогично находим правый нейтральный элемент: $M \cup E = M$. (Операция объединения множеств коммутативна, поэтому нейтральный элемент слева и справа – это одно и то же.) Нейтральным элементом для операции объединения служит пустое множество $\emptyset$.

Задача 12 (6.21). Найдите число, симметричное числу x относительно операции $(x, y) \longrightarrow x + y + x \cdot y$ на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Определим число $b \in \mathbb{Q}$ – правое симметричное для элемента $a \in \mathbb{Q}$.

В этом случае должно иметь место равенство $a * b = e$:

$a + b + a \cdot b = e.$

Выразим отсюда b через a:

$b + a \cdot b = e - a,$

$b(1 + a) = e - a,$

$b = \dfrac{e - a}{1 + a}.$

Если считать, что $e = 1$ в множестве $\mathbb{Q}$, то симметричный элемент можно записать как в виде $b = \frac{1-a}{1+a}$, так и в виде $b = 1 - \frac{2a}{1+a}$ (где в отличие от предыдущего выделена целая часть).

Определим число $b \in \mathbb{Q}$ – левое симметричное для элемента $a \in \mathbb{Q}$.

В этом случае должно иметь место равенство $b * a = e$:

$b + a + b \cdot a = e.$

Выразим отсюда b через a:

$b + b \cdot a = e - a,$

$b(1 + a) = e - a,$

$b = \dfrac{e - a}{1 + a},$

или

$b = \dfrac{1 + e}{1 + a} - 1.$

Симметричные к a слева и справа элементы совпадают, поэтому число $b = \frac{e-a}{1+a}$ симметрично числу a.

Примечание к задачам 11 – 12. Каждой конкретной операции на числовых множествах соответствуют свои (индивидуальные) нейтральный и симметричный элементы. Может ли случиться так, что для некоторой операции не найдется нейтрального и/или симметричного элемента? Подумайте над этим вопросом. Аргументируйте ответ примерами конкретных операций на конкретных числовых множествах.

Задача 13 (6.22). Какое число нейтрально справа относительно вычитания в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел? Есть ли число, нейтральное слева относительно этой операции?

По определению числа, нейтрального справа, $a * e = a$ относительно операции вычитания на множестве $\mathbb{Z}$: $a - e = a$. При вычитании какого числа из целого a получится то же самое число a? Очевидно, число $e = 0$, $0 \in \mathbb{Z}$.

По определению числа, нейтрального слева относительно операции вычитания целых чисел, $e * a = a$ относительно операции вычитания на множестве $\mathbb{Z}$: $e - a = a$. Из какого целого числа вычитаем целое a, чтобы получилось также число a?

Вывод: нейтрального слева элемента нет.

Задача 14 (6.23). Какое число нейтрально справа относительно деления на множестве $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел?

По определению числа, нейтрального справа, $a * e = a$ относительно операции деления на множестве $\mathbb{Q}^+$: $a : e = a$. На какое число $e \in \mathbb{Q}^+$ делится число $a \in \mathbb{Q}^+$ так, что в результате получается само число a? Очевидно деление на единицу, то есть число $e = 1$, $1 \in \mathbb{Q}^+$.

Задача 15 (6.24). Какое число нейтрально справа относительно операции возведения в степень на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел?

По определению числа, нейтрального справа, $a * e = a$ относительно операции возведения в степень на множестве $\mathbb{N}$: $a^e = a$. При возведении в какую натуральную степень $e \in \mathbb{N}$ числа $a \in \mathbb{N}$ в результате получается само число a? Легко определить, что это число $e = 1$, $1 \in \mathbb{N}$.

Задача 16 (6.27). Является ли деление в множестве положительных чисел дистрибутивным относительно операции сложения?

$a : (b + c) = (a : b) + (a : c)$,

$12 : (2 + 4) = 12 : 2 + 12 : 4$,

$12 : 6 = 6 + 3$,

$2 = 9$ – ложь.

Ответ: деление в множестве положительных чисел недистрибутивно относительно операции сложения.

Задача 17 (6.31). Докажите, что операция возведения в степень на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел дистрибутивна справа относительно умножения.

Воспользуемся определением алгебраической операции $*$ на множестве $\mathbb{N}$, дистрибутивной справа относительно операции $\circ$. В таком случае для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$ должно выполняться равенство

$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$, где $*$ – операция возведения в степень, $x * y = x^y$; $\circ$ – операция умножения, $x \circ y = x \cdot y$.

Тогда левая часть равенства имеет вид

$(a \circ b) * c = (a \cdot b) * c = (a \cdot b)^c$.

Правая часть равенства выглядит следующим образом:

$(a * c) \circ (b * c) = (a^c) \circ (b^c) = a^c \cdot b^c$.

Действительно, равенство $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ справедливо и является правилом возведения в степень произведения нескольких чисел: чтобы произведение натуральных чисел возвести в степень, необходимо каждый множитель возвести в данную степень и полученные результаты перемножить. Установленное равенство позволяет заключить, что равенство $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$ возможно. Следовательно, операция возведения в степень на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел дистрибутивна справа относительно умножения. Что и требовалось доказать.

Задача 18 (6.32). Является ли вычитание $\mathbb{Z}$ целых чисел дистрибутивной операцией относительно умножения?

Для установления дистрибутивности вычитания $\mathbb{Z}$ целых чисел относительно умножения проверим, выполняется ли для целых чисел равенство $c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b)$ или равенство $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$, где $*$ – это операция вычитания на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел, $x * y = x - y$; $\circ$ – это операция умножения на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел, $x \circ y = x \cdot y$.

Равенство $c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b)$ принимает вид

$c * (a \cdot b) = (c * a) \cdot (c * b)$,

$c - (a \cdot b) = (c - a) \cdot (c - b)$,

$c - ab = c^2 - ac - bc + ab$.

В полученном равенстве левая часть не совпадает с правой. Следовательно, равенство ложно. Поэтому вычитание $\mathbb{Z}$ целых чисел не является дистрибутивной операцией слева относительно умножения.

Выполним проверку справа.

Равенство $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$ принимает вид

$(a \cdot b) * c = (a * c) \cdot (b * c)$,

$(a \cdot b) - c = (a - c) \cdot (b - c)$.

Раскроем скобки в левой и правой частях равенства, получим

$ab - c = ab - cb - ac - c^2$.

Левая часть отличается от правой, следовательно, равенство ложно. Поэтому вычитание $\mathbb{Z}$ целых чисел не является дистрибутивной операцией справа относительно умножения.

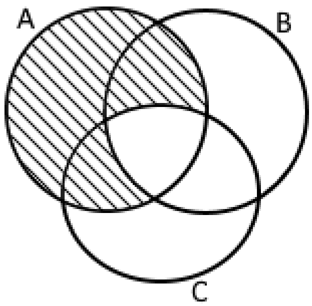
Вывод: вычитание $\mathbb{Z}$ целых чисел недистрибутивно относительно умножения.

Задача 19 (6.33). Является ли операция вычитания множеств дистрибутивной относительно операции пересечения множеств? Ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

На диаграммах Эйлера – Венна требуется проверить равенство следующих множеств:

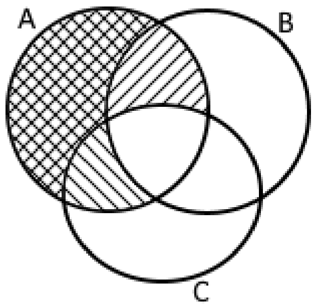
1) $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ – левый дистрибутивный закон вычитания множеств относительно пересечения.

Множество $A\backslash(B \cap C)$ на рис. 40 закрыто штриховкой. Множество $(A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ на рис. 41 выделено областью, где штриховка прошла хотя бы один раз.



- $A\backslash(B \cap C)$

Рис. 40



– $A\backslash B$, – $A\backslash C$

Рис. 41

2) $(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$ – правый дистрибутивный закон вычитания множеств относительно пересечения. На рис. 42 множество (A∩B)\C выделено зеленым цветом. На рис. 43 желтым цветом выделено множество $A\backslash C$, синим – множество $B\backslash C$.

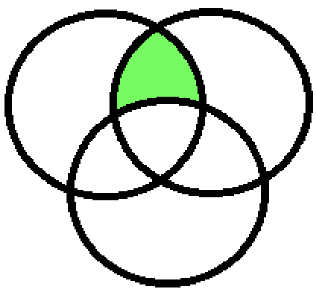


Рис. 42

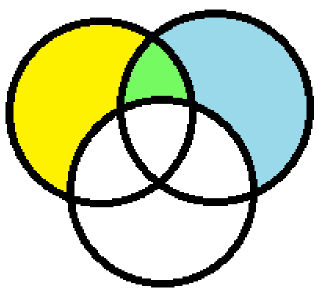


Рис. 43

При пересечении множеств $A \setminus C$ и $B \setminus C$ получается наложение желтого и синего цветов. В итоге получается зеленый цвет – результат пересечения двух множеств.

Практическая работа

1 (6.2). Относительно каких алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) замкнуты следующие числовые множества:

А) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

В) $\{$нечетные целые числа$\}$;

Д) $\{$положительные рациональные числа$\}$;

Ж) $\{0, 1\}$;

И) $\{3n + 1\}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2 (6.6). Какие из следующих алгебраических операций на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – коммутативные?

А) сложение;

Б) умножение;

В) вычитание;

Г) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow x + 2y$;

Д) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$;

Е) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow |x - y|$.

3 (6.7). Обладает ли свойством коммутативности операция пересечения множеств?

4 (6.9). Алгебраическая операция на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ ставит в соответствие паре чисел (m, n) их наибольший общий делитель, $(m, n) \longrightarrow \text{НОД}(m, n)$. Коммутативна ли эта операция?

5 (6.10). Коммутативна ли операция $(m, n) \longrightarrow \text{НОК}(m, n)$, где $\text{НОК}(m, n)$ – наименьшее общее кратное m и n?

6 (6.11). Какие из следующих операций на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел ассоциативны?

А) сложение;

Б) вычитание;

В) умножение;

Г) операция $(x, y) \longrightarrow x + 2y$;

Д) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$;

Е) операция, задаваемая формулой $(x, y) \longrightarrow |x - y|$.

7 (6.13). Являются ли пересечение и объединение множеств ассоциативными операциями?

8 (6.19). Какое число симметрично числу 8 относительно операции сложения целых чисел? А числу -6?

9 (6.20). Какое число симметрично числу 8 относительно операции умножения рациональных чисел? А числу $-\frac{3}{4}$? Есть ли число, симметричное нулю относительно этой операции?

10 (6.25). Найдите множество, нейтральное относительно операции $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

11 (6.26). Найдите множество, симметричное множеству A относительно операции $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

12 (6.28). Является ли операция объединения множеств дистрибутивной относительно операции пересечения множеств? Ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

13 (6.29). Является ли операция пересечения множеств дистрибутивной относительно операции объединения множеств? Ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

14 (6.30). Является ли сложение целых чисел дистрибутивной операцией: а) относительно умножения? б) относительно вычитания?

15 (6.33). Является ли операция вычитания множеств дистрибутивной справа относительно операции пересечения множеств? Ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

2.2. Основные алгебраические структуры

Определение. *Алгебраической структурой* называется непустое множество, на котором определены операции, обладающие определенными свойствами.

Основные алгебраические структуры – *группа, кольцо, поле.*

Определение. Множество G с введенной на нем алгебраической операцией $*$ называется *группой* $(G,*)$, если выполнены три условия:

1) операция $*$ должна быть ассоциативной: $a * (b * c) = (a * b) * c$;

2) для любого элемента $a \in G$ должен существовать *нейтральный* элемент e такой, что $a * e = e * a = a$;

3) для любого элемента $a \in G$ должен существовать *симметричный* ему элемент a' такой, что $a' * a = a * a' = e$.

Условия 2) и 3) равносильны тому, что в группе разрешимы уравнения вида $a * x = b$ и $y * a = b$ для любых $a, b \in G$.

Если для любых элементов $a, b \in G$ имеем $a * b = b * a$, то группу G называют *коммутативной*. Алгебраическую операцию на коммутативных группах обычно называют сложением и обозначают знаком «+».

Пример. Проверим, является ли группой множество натуральных чисел.

А. По сложению $(\mathbb{N}, +)$:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ выполняется, следовательно, сложение натуральных чисел ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a + e = e + a = a$, значит, $e = 0$, но $0 \notin \mathbb{N}$, то есть $e \notin \mathbb{N}$, нейтрального элемента для сложения в множестве натуральных чисел не существует, следовательно, условие 2) не выполняется.

Вывод: множество $\mathbb{N}$ группу по сложению не образует.

Б. По умножению $(\mathbb{N}, \cdot)$:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, следовательно, умножение натуральных чисел ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \cdot e = e \cdot a = a$, значит, $e = 1$, $1 \in \mathbb{N}$ – выполняется;

3) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a' \cdot a = e$, т. е. $a' \cdot a = 1$, получается, $a' = \frac{1}{a}$. В случае $a \neq 1$ имеем $a' \notin \mathbb{N}$. Значит, условие 3) не выполняется <u>для всех</u> натуральных a.

Вывод: множество $\mathbb{N}$ группу по умножению не образует.

Пример. Проверим, является ли группой множество целых чисел.

А. По сложению $(\mathbb{Z}, +)$:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ выполняется, следовательно, сложение целых чисел ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{Z} \; a + e = e + a = a$, значит, $e = 0$, число $0 \in \mathbb{Z}$ и является нейтральным элементом для операции сложения в множестве целых чисел;

3) $\forall a \in \mathbb{Z} \;\; \exists a' \in \mathbb{Z} \;\; a' + a = a + a' = 0$. Действительно, для каждого целого числа существует симметричный элемент. Таковым является целое число, противоположное данному.

Вывод: множество $\mathbb{Z}$ образует группу по сложению.

Б. По умножению $(\mathbb{Z},\cdot)$:

1) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}\ \ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ выполняется, следовательно, умножение целых чисел ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{Z}\ a\cdot e=e\cdot a=a$, значит, $e=1$, $1\in\mathbb{Z}$, следовательно, число 1 – нейтральный элемент для операции умножения в множестве целых чисел;

3) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists a' \in \mathbb{Z}\ a'\cdot a=a\cdot a'=e,\ a'\cdot a=a\cdot a'=1.$ Действительно, для каждого целого числа a существует симметричный элемент $a'=\frac{1}{a}$ – таково число, обратное данному, но $a'\notin\ \mathbb{Z}$.

Вывод: множество $\mathbb{Z}$ не образует группу по умножению.

Пример. Проверим, будет ли группой универсальное множество U по объединению $(U,\ \cup)$, по пересечению $(U,\ \cap)$.

Действительно, $\forall A,B,C \in U$ имеем:

А. $\cup$ – алгебраическая операция (?)

1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (требование ассоциативности операции объединения выполнено);

2) $A\cup E=E\cup A=A$, $E=\emptyset$, $\emptyset\in U$ (требование о существовании нейтрального элемента выполнено);

3) $A\cup A'=E$, $A\cup A'=\emptyset \Rightarrow A'-?$ (требование о существовании симметричного элемента не выполнено: не найдется такого множества A', объединение которого с множеством A даст пустое множество).

Вывод: U по $\cup$ не образует группу.

Б. $\cap$ – алгебраическая операция (?)

1) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (требование ассоциативности операции пересечения выполнено);

2) $A\cap E=E\cap A=A,\quad E=U$ (требование о существовании нейтрального элемента выполнено: нейтральным элементом для A служит само универсальное множество);

3) $A\cap A'=E$, $A\cap A'=U$, следовательно, $A'-?$ (требование о существовании симметричного элемента не выполнено: не найдется такого множества A', пересечение которого с множеством A даст универсальное множество).

Вывод: U по $\cap$ не образует группу.

Определение. Непустое множество K с двумя алгебраическими операциями $*,\ \circ$ называется *кольцом* $(K,\ *,\ \circ)$, если выполнены следующие условия:

1) $(K,\ *)$ – группа;

2) операция $\circ$ дистрибутивна относительно операции $*$.

Пример кольца – множество целых чисел $(\mathbb{Z}, +,\ \cdot)$.

Если операция $\circ$ ассоциативна, то есть если $(a \circ b) \circ c = = a \circ (b \circ c)$ для $\forall a, b, c \in K$, то кольцо K называется *ассоциативным*. Если операция $\circ$ коммутативна, то есть если $a \circ b = b \circ a$ для $\forall a, b \in K$, то кольцо K называется *коммутативным*.

Определение. Множество P с введенными операциями $*,\ \circ$ представляет собой *поле* $(P,\ *,\ \circ)$, если выполнены следующие условия:

1) $(P,\ *,\ \circ)$ – кольцо.

2) разрешимо уравнение вида $a \circ x = b$.

Замечание. Операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны для всех числовых множеств. Поэтому, когда нужно выяснить, является ли данное множество кольцом (или полем), эти требования проверять необязательно.

Примером поля служит $(\mathbb{Q}, +,\ \cdot)$. Проверим, выполнены ли условия определения поля:

1) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует группу по сложению $(\mathbb{Q}, +)$;

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ имеет место дистрибутивность умножения относительно сложения: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) +\ (a \cdot c)$, $(a + b) \cdot c = = (a \cdot c) + (b \cdot c)$;

Из 1) – 2) следует, что $(\mathbb{Q},\ +,\ \cdot)$ является кольцом.

3) $a \cdot x = b, x = \frac{b}{a}, \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, то есть $x \in \mathbb{Q}$, значит, уравнение в множестве $\mathbb{Q}$ разрешимо. Что и требовалось доказать.

Практическая работа

1 (6.35). Образуют ли группу относительно сложения: а) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; б) множество четных целых чисел; в) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел; г) множество $\boldsymbol{J}$ иррациональных чисел?

2 (6.36). Дано множество $B = \{0, 1\}$ с такой операцией сложения: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$. Докажите, что B – группа.

3 (6.40). Образует ли группу множество: а) всех четных чисел относительно сложения; б) всех целых чисел, кратных 7, относительно сложения; в) всех целых чисел вида $5k + 1$ относительно умножения; г) квадратов всех рациональных чисел относительно умножения?

4 (6.37). Определите, кольцом или полем являются следующие числовые множества: а) множество всех целых чисел, кратных 5; б) множество всех нечетных целых чисел; в) множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел; г) множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b – целые, $a, b \in \mathbb{Z}$.

5 (6.42). Определите, являются ли кольцом или полем следующие множества: а) множество всех четных чисел; б) $M = \{0\}$; в) $B = \{0, 1\}$; г) множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b – целые, $a, b \in \mathbb{Z}$.

6 (обобщенная 6.38, 6.41). Задайте множество $\mathbb{Z}_k$ перечислением элементов, выполните следующее задание. Множество $\mathbb{Z}_k$ состоит из чисел $0, 1, 2, \dots, k-1$ (в условиях задачи принять $3 \leq k \leq 12$). Операции сложения и умножения определяются так: суммой чисел a и b называют остаток от деления $a + b$ на k, а произведением этих чисел – остаток от деления $a \cdot b$ на k. Докажите, что сложение и умножение являются алгебраическими операциями в $\mathbb{Z}_k$. Составьте таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}_k$. Коммутативны ли эти операции в $\mathbb{Z}_k$? Какой элемент нейтрален относительно сложения, а какой – относительно умножения? Найдите элемент, противоположный элементу $k-2$. Найдите элемент, обратный элементу $k-1$. Ассоциативны ли сложение и умножение в $\mathbb{Z}_k$? Проверьте, является ли $\mathbb{Z}_k$ полем или только кольцом.

7 (6.39). Является ли совокупность подмножеств универсального множества кольцом относительно объединения и пересечения множеств? Какие из аксиом кольца выполняются, а какие – нет?

Задания для рейтинг-контроля

Вариант 1

1. Докажите, что соответствие $\langle x, y \rangle \to 3x + 2y$ представляет собой алгебраическую операцию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

2. Объясните, какие свойства действий использованы при вычислении: $3847 + (2456 - 1827) = (3847 - 1827) + 2456 = 2020 + + 2456$; $73 \cdot 35 = (70 + 3) \cdot 35 = 70 \cdot 35 + 3 \cdot 35$.

3. Применяя дистрибутивный закон умножения относительно сложения и вычитания, найдите значение выражения: а) $3 \cdot (20 + 1)$; б) $(70 - 4) \cdot 5$; в) $6 \cdot 19$.

4. Дано множество $B = \{0, 1\}$ с такой операцией сложения: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$. Докажите, что B – группа.

5. Определите, является кольцом или полем множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b – целые, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. Докажите, что соответствие $\langle x, y \rangle \to 2x + 3y$ представляет собой алгебраическую операцию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

2. Объясните, какие свойства действий использованы при вычислении: $299 + 1594 = (300 - 1) + (1600 - 6) = (300 + 1600) - (1 + + 6) = 1900 - 7$; $25 \cdot 651 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 651 = 651 \cdot 100$.

3. Применяя дистрибутивный закон умножения относительно сложения и вычитания, найдите значение выражения: а) $5 \cdot (30 + 4)$; б) $(60 - 2) \cdot 5$; в) $34 \cdot 3$.

4. Дано множество $B = \{0, 1, 2\}$ с такой операцией сложения: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $0 + 2 = 2$, $2 + 0 = 2$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 0$, $2 + 1 = 0$, $2 + 2 = 1$. Докажите, что B – группа.

5. Определите, является кольцом или полем множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b – целые, $a, b \in \mathbb{Z}$,

Глава 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ И ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ

В главе рассмотрены два вопроса. Первый связан с умножением и делением на множестве целых чисел. Его цель – развитие умений и навыков устного счета. Второй вопрос касается различных способов решения квадратных уравнений. Подобный навык необходимо время от времени освежать в памяти, потому что во многих разделах программы учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» знания по данной теме считаются базовыми.

3.1. Приемы быстрого счета

Одно из главных умений человека – счет. Практика показывает, что обучающиеся образовательных учреждений, студенты средних специальных и высших образовательных учреждений имеют большие проблемы со счетом, особенно с подсчетами в уме. Ценные указания, касающиеся элементов быстрого счета, собраны в книге Я. И. Перельмана «Быстрый счет. Тридцать простых приемов устного счета» [9]. Приведем некоторые из них.

1. Умножение на 2. Удваиваем, то есть складываем: $342 \cdot 2 = 684$, $473 \cdot 2 = 946$.

2. Умножение на 4. Дважды удваиваем: $112 \cdot 4 = 224 \cdot 2 = 448$.

$\mathbf{207 \cdot 4} = ?$[5]

3. Умножение на 8. Трижды удваиваем: $217 \cdot 8 = 217 \cdot 2 \cdot 4 = 434 \cdot 4 = 868 \cdot 2 = 1736$.

$\mathbf{106 \cdot 8} = ?$

4. Деление на 4. Дважды делим пополам: $76 : 4 = 38 : 2 = 19$.

$\mathbf{508 : 4} = ?$

Деление на 8. Трижды делим пополам: $464 : 8 = 232 : 4 = 116 : 2 = 58$.

$\mathbf{508 : 8} = ?$

5. Умножение на 5. Умножаем на 10 и делим пополам: $74 \cdot 5 = 740 : 2 = 370$.

$\mathbf{29 \cdot 5} = ?$

---

[5] Отмеченные полужирным шрифтом упражнения читателю предлагается выполнить самостоятельно.

Умножение на 25. Делим на 4 и умножаем на 100: $72 \cdot 25 = \\ = \frac{72}{4} \cdot 100 = 1800$.

При делении на 4 возможны остатки {1, 2, 3}. Поэтому рассматриваем следующие случаи.

Остаток равен 1: $73 \cdot 25 = \frac{72}{4} \cdot 100 + 25 = 1800 + 25 = 1825$.

Остаток равен 2: $74 \cdot 25 = \frac{72}{4} \cdot 100 + 50 = 1800 + 50 = 1850$.

Остаток равен 3: $75 \cdot 25 = \frac{72}{4} \cdot 100 + 75 = 1800 + 75 = 1875$.

$\mathbf{28 \cdot 25} = ?,\ \mathbf{29 \cdot 25} = ?,\ \mathbf{30 \cdot 25} = ?,\ \mathbf{31 \cdot 25} = ?$

6. Умножение на $1\frac{1}{2}$. К самому числу добавляется его половина: $34 \cdot 1\frac{1}{2} = 34 + 17 = 51$.

Умножение на $1\frac{1}{4}$. К самому числу добавляется его четверть: $48 \cdot 1\frac{1}{4} = 48 + 12 = 60$.

$\mathbf{58 \cdot 1\frac{1}{4}} = ?$

Умножение на $2\frac{1}{2}$. К удвоенному числу добавляется его половина:

$18 \cdot 2\frac{1}{2} = 36 + 9 = 45$

$\mathbf{39 \cdot 2\frac{1}{2}} = ?$

Другой способ: само число умножаем на 5 и делим пополам: $18 \cdot 2\frac{1}{2} = 90 : 2 = 45$.

Умножение на $\frac{3}{4}$ (или нахождение $\frac{3}{4}$ от числа). Умножаем число на $1\frac{1}{2}$ и делим пополам: $30 \cdot \frac{3}{4} = (30 + 15) : 2 = 22\frac{1}{2}$.

7. Умножение на 9. Умножаем число на 10 и вычитаем само число: $62 \cdot 9 = 62(10 - 1) = 620 - 62 = 600 - 42 = 558$.

$\mathbf{73 \cdot 9} = ?$

8. Умножение на 11. Цифры двузначного числа нужно записать по краям, а в середину вписать их сумму. Если сумма крайних – число двузначное, то цифра единиц суммы записывается в середину, а цифру сотен результата увеличиваем на 1.

Другой вариант: умножаем на 10 и прибавляем само число: $87 \cdot 11 = 87(10 + 1) = 870 + 87 = 957$.

$\mathbf{73 \cdot 11} = ?$

9. Умножение на 15. Заменяем умножением на 10 и на $1\frac{1}{2}$, потому что $10 \cdot 1\frac{1}{2} = 15 : 18 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 10 = 270$.

Умножение на 125. Заменяем умножением на 100 и на $1\frac{1}{4}$, потому что $100 \cdot 1\frac{1}{4} = 125 : 26 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 100 = 2600 + 650 = 3250$.

Умножение на 75. Заменяем умножением на 100 и на $\frac{3}{4}$, потому что $100 \cdot \frac{3}{4} = 75 : 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot 100 = 2400 \cdot \frac{3}{4} = 1800$.

10. Деление на 5. Удваиваем число и делим его на 10: $68 : 5 = 136 : 10 = 13{,}6$.

$\mathbf{237 : 5} = ?$

Деление на $1\frac{1}{2}$. Делим удвоенное число на 3: $36 : 1\frac{1}{2} = 72 : 3 = 24$.

$\mathbf{53 : 1\frac{1}{2}} = ?$

Деление на 15. Делим удвоенное число на 30: $240 : 15 = 480 : 30 = 16$.

$\mathbf{462 : 15} = ?$

11. Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Умножаем цифру десятков данного числа на число, непосредственно следующее за этой цифрой, $8 \cdot (8 + 1)$, и приписываем справа 25: 7225.

$25^2 = 625, \quad 145^2 = 21025$

$8{,}5^2 = 72{,}25 \qquad (8\frac{1}{2})^2 = 72\frac{1}{4}$

$\mathbf{45^2} = ?\mathbf{,\ 4,5^2} = ?\mathbf{,\ 45\frac{1}{2}^2} = ?$

12. Возведение в квадрат с помощью формулы $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$.

$41^2 = (40 + 1)^2 = 1600 + 1 + 80 = 1681,$

$69^2 = (70 - 1)^2 = 4900 + 1 - 140 = 4761.$

$\mathbf{76^2} = ?$

Прием удобен для чисел, оканчивающихся на 1, 4, 6, 9.

13. Вычисление по формуле $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$.

$52 \cdot 48 = (50 - 2) \cdot (50 + 2) = 2500 - 4 = 2496.$

$\mathbf{69 \cdot 71} = ?\quad \mathbf{33 \cdot 27} = ?\ \mathbf{53 \cdot 57} = ?$

Прием подходит для случаев, когда один множитель удобно представить в виде суммы двух чисел, другой – в виде разности этих же чисел.

Указанный прием применим и в случае действий с дробными числами:

$$7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} = \left(7 + \frac{1}{2}\right)\left(7 - \frac{1}{2}\right) = 49 - \frac{1}{4} = 48\frac{1}{4},$$

$$11\frac{3}{4} \cdot 12\frac{1}{4} = \left(12 - \frac{1}{4}\right)\left(12 + \frac{1}{4}\right) = 144 - \frac{1}{16} = 143\frac{15}{16}.$$

Полезно запомнить! $37 \cdot 3 = 111$

Запомнив это, легко выполнять устно умножение числа 37 на 6, 9, 12 и т. п.

$37 \cdot 6 = 37 \cdot 3 \cdot 2 = 222$

$37 \cdot 9 = 37 \cdot 3 \cdot 3 = 333$

$37 \cdot 12 = 37 \cdot 3 \cdot 4 = 444$

$37 \cdot 15 = 37 \cdot 3 \cdot 5 = 555$

Полезно запомнить! $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$

Запомнив это, легко выполнять устно умножения следующего рода:

$77 \cdot 13 = 1001$

$77 \cdot 26 = 2002$

$77 \cdot 39 = 3003$

$91 \cdot 11 = 1001$

$91 \cdot 22 = 2002$

$91 \cdot 33 = 3003$

$143 \cdot 7 = 1001$

$143 \cdot 14 = 2002$

$143 \cdot 21 = 3003$

Практическая работа

Вычислите, используя приемы быстрого счета.

$124 : 4$	$92 \cdot 88$	$94 \cdot 11$	$27 \cdot 33$
35^2	$7\frac{1}{2}^2$	$3{,}5^2$	$3\frac{1}{2}^2$
$327 \cdot 4$	$307 \cdot 8$	87^2	$62 \cdot 5$
78^2	64^2	$37 \cdot 43$	68^2
$54 \cdot 46$	$1088 : 4$	$124 : 8$	$1108 : 4$
$464 \cdot 5$	$412 \cdot 1\frac{1}{2}$	$462 : 5$	$508 \cdot 1\frac{1}{4}$
$47 \cdot 125$	$52 \cdot 15$	$31 \cdot 75$	$73 \cdot 2\frac{1}{2}$
$746 : 5$	$29 \cdot 31$	$11 \cdot 77$	$142 \cdot 4$
$112 \cdot 1\frac{1}{4}$	$94 \cdot 25$	$312 \cdot 1\frac{1}{4}$	$59 \cdot 61$
$67 \cdot 73$	$256 : 5$	$58 \cdot 62$	$417 : 5$
$263 \cdot 25$	$49 \cdot 5$	$294 \cdot 5$	$304 \cdot 25$
$49 \cdot 11$	$57 \cdot 11$	516	$39 \cdot 11$
$404 \cdot 1\frac{1}{2}$	$288 \cdot 1\frac{1}{4}$	$152 \cdot 9$	$262 \cdot 9$
$308 \cdot 9$	$385 \cdot 9$	$114 \cdot 1\frac{1}{2}$	$560 \cdot 1\frac{1}{4}$
$512 : 8$	$256 : 8$	$222 \cdot 25$	$368 : 5$
$6\frac{1}{2}^2$	$18\frac{1}{4} \cdot 19\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}^2$	$205 \cdot 1\frac{1}{2}$
$11 \cdot 87$	$732 \cdot 1\frac{1}{2}$	$11 \cdot 78$	$11 \cdot 69$

3.2. Отношение делимости. Свойства отношения. Признаки делимости

Отношение делимости – одно из основных отношений, задаваемых на множестве натуральных чисел, с ним связано необходимое и достаточное условие существования частного от деления натуральных чисел, поэтому рассмотрим это отношение и его свойства подробно.

Определение. Натуральные числа a и b находятся *в отношении делимости,* $a \vdots b$, тогда и только тогда, когда существует натуральное число k такое, что $k \cdot b = a$:

$\forall a, b \in \mathbb{N}\ (a \vdots b) \iff (\exists k \in \mathbb{N} \ \wedge\ a = k \cdot b)$.

Введённое отношение обладает свойствами:

– рефлексивности $(\forall a \in \mathbb{N})\ (a \vdots a)$;

– антисимметричности $(\forall a, b \in \mathbb{N})\ (a \vdots b) \wedge (b \vdots a) \Leftrightarrow (a = b)$;

– транзитивности $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})\ (a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \Leftrightarrow (a \vdots c)$.

Значит, отношение делимости на множестве натуральных чисел представляет собой отношение нестрогого порядка.

Замечание 1. Отношение делимости рассматривается и на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$. Однако в этом случае указывается условие $b \neq 0$:

$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 \ \wedge\ b \neq 0\ \ (a \vdots b) \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 |\ a = k \cdot b)$.

Тогда при $a \neq 0$ число k также отлично от нуля, и приходим к определению отношения делимости для натуральных чисел. Если же $a = 0$, то и $k = 0$.

Сформулируем ряд теорем для целых неотрицательных чисел, необходимых при решении задач. Доказательство этих утверждений можно найти в учебниках [1], [10].

Теорема 1. Если числа a и b находятся в отношении делимости, то число a не меньше числа b:

$(a \vdots b) \implies (a \geq b)$.

Теорема 2. Если число a_1 делится на число b и число a_2 делится на b, то и сумма чисел a_1, a_2 разделится на число b:

$(a_1 \vdots b \ \wedge\ a_2 \vdots b) \implies \big((a_1 + a_2) \vdots b\,\big)$.

Например, 44 делится на 4, 1612 делится на 4, значит, сумма $(44 + 1612)$ разделится на 4 (при этом само значение суммы находить не требуется).

Замечание 2. Правило деления суммы (теорема 2) обобщается на случай n слагаемых.

Теорема 2′. Если каждое из n слагаемых делится на число b, то и их сумма разделится на b:

$$(a_1 \vdots b \land a_2 \vdots b \land \ldots \land a_n \vdots b) \Rightarrow \left((a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \vdots b\right).$$

Очень важно помнить, что обратное предложение теоремой не является как в случае двух слагаемых, так и в случае n слагаемых.

Теорема 3. Если число a_1 делится на число b, число a_2 делится на b и $a_1 \geq a_2$, то разность чисел a_1, a_2 разделится на число b:

$$(a_1 \vdots b \land a_2 \vdots b) \Rightarrow \left((a_1 - a_2) \vdots b\right).$$

Например, 1612 делится на 4, 44 делится на 4, значит, разность $(1612 - 44)$ разделится на 4 (при этом само значение разности находить не требуется).

Теорема 4. Если сумма чисел делится на число b и первое слагаемое делится на b, то и второе слагаемое разделится на число b:

$$\left((a_1 + a_2) \vdots b \land a_1 \vdots b\right) \Rightarrow (a_2 \vdots b).$$

Теорема 5. Если число a_1 делится на число b и число a_2 не делится на b, то и сумма чисел a_1, a_2 не делится на число b:

$$\left(a_1 \vdots b \land \overline{a_2 \vdots b}\right) \Rightarrow \left(\overline{(a_1 + a_2) \vdots b}\right).$$

Замечание 3. Теоремы 4 и 5 могут быть сформулированы и для разности чисел a_1, a_2 (если $a_1 \geq a_2$) с точностью до названия компонент при вычитании.

Теорема 4′. Если разность двух чисел и уменьшаемое делятся на число, то и вычитаемое разделится на это число:

$$\left((a_1 - a_2) \vdots b \land a_1 \vdots b\right) \Rightarrow (a_2 \vdots b).$$

Теорема 5′. Если уменьшаемое делится на число, а вычитаемое не делится, то и разность не разделится на это число:

$$\left(a_1 \vdots b \land \overline{a_2 \vdots b}\right) \Rightarrow \left(\overline{(a_1 - a_2) \vdots b}\right).$$

Замечание 4. Теорема 5 допускает обобщение на случай n слагаемых.

Теорема 5″. Если каждое из слагаемых делится на число b и только одно не делится на b, то и их сумма не разделится на b:

$$\left(a_1 \vdots b \land a_2 \vdots b \land \ldots \land \overline{a_n \vdots b}\right) \Rightarrow \left(\overline{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \vdots b}\right).$$

Например, 33 делится на 3, 213 делится на 3, 777 делится на 3, а 11 не делится на 3. Значит, сумма $(33 + 213 + 777 + 11)$ не разделится на 3 (при этом само значение суммы находить не требуется).

Теорема 6. Если число a делится на b, то для любого целого неотрицательного числа n произведение $(a \cdot n)$ делится на b:

$(a \vdots b \wedge n \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow ((a \cdot n) \vdots b)$.

Например, 15 делится на 5, значит, и произведение вида $(15 \cdot 338)$ или $(15 \cdot 4167)$ разделится на 5 (само значение произведения при этом находить не требуется).

Замечание 5. Теорему 6 часто называют правилом деления произведения на число.

Теорема 6′. Если хотя бы один из множителей делится на число, то их произведение разделится на это число:

$(a_1 \vdots b \vee a_2 \vdots b) \Rightarrow ((a_1 \cdot a_2) \vdots b)$.

Теорема 7. Если произведение натуральных чисел a и b делится на произведение натуральных чисел n и b, то число a делится на n:

$((a \cdot b) \vdots (n \cdot b)) \Rightarrow (a \vdots n)$.

Например, рассмотрим числа 120 и 60. 120 делится на 60. Представим 120 в виде произведения $24 \cdot 5$, а 60 – в виде произведения $12 \cdot 5$. По теореме 7 вывод делается о делимости чисел 24 и 12: $(24 \cdot 5) \vdots (12 \cdot 5) \Rightarrow (24 \vdots 12)$.

Теорема 8. Если число a_1 делится на b_1, а число a_2 делится на b_2, то произведение чисел $(a_1 \cdot a_2)$ делится на произведение чисел $(b_1 \cdot b_2)$:

$(a_1 \vdots b_1 \wedge a_2 \vdots b_2) \Rightarrow ((a_1 \cdot a_2) \vdots (b_1 \cdot b_2))$.

Например, число 33 делится на 3, число 55 делится на 5, значит, произведение $33 \cdot 55$ разделится на произведение $3 \cdot 5$, то есть произведение $33 \cdot 55$ разделится на 15.

Или, например, число 18 делится на 2, а число 12 делится на 4. По теореме 8 произведение $18 \cdot 12$ разделится на произведение $2 \cdot 4$, то есть произведение $18 \cdot 12$ разделится на 8.

Сформулированные теоремы 2, 4 и 6 используют при доказательстве признаков делимости. Существенную роль в этих доказательствах играет и теорема о представлении числа в десятичной системе счисления. Напомним запись числа в десятичной системе счисления:

$$\ell = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0 =$$
$$= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Признаки делимости

Определение. Признак делимости – это предложение, позволяющее, не выполняя самого действия деления, ответить на вопрос, делится или нет некоторое число на данное.

Приведём некоторые из признаков делимости.

Формулировка признака делимости	Логическая запись утверждения
1. Число ℓ делится нацело на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа разделится на 2.	$\ell \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$
2. Число ℓ делится нацело на 4 тогда и только тогда, когда две последние цифры числа ℓ образуют число a_1a_0, делящееся на 4.	$\ell \vdots 4 \Leftrightarrow a_1a_0 \vdots 4$
3. Число ℓ делится нацело на 8 тогда и только тогда, когда три последние цифры числа ℓ образуют число $a_2a_1a_0$, делящееся на 8.	$\ell \vdots 8 \Leftrightarrow a_2a_1a_0 \vdots 8$
4. Число ℓ делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3.	$\ell \vdots 3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + \\ +a_1 + a_0 \end{pmatrix} \vdots 3$
5. Число ℓ делится нацело на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 9.	$\ell \vdots 9 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + \\ +a_1 + a_0 \end{pmatrix} \vdots 9$
6. Число ℓ делится нацело на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа делится на 5.	$\ell \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$
7. Число ℓ делится нацело на 25 тогда и только тогда, когда две последние цифры числа ℓ образуют число a_1a_0, делящееся на 25.	$\ell \vdots 25 \Leftrightarrow a_1a_0 \vdots 25$
8. Число ℓ делится нацело на 125 тогда и только тогда, когда три последние цифры числа ℓ образуют число $a_2a_1a_0$, делящееся на 125.	$\ell \vdots 125 \Leftrightarrow a_2a_1a_0 \vdots 125$

Окончание

Формулировка признака делимости	Логическая запись утверждения
9. Число ℓ делится нацело на 10^n тогда и только тогда, когда $(n+1)$ последние цифры числа ℓ образуют число, делящееся на 10^n.	$\ell \vdots 10^n \Leftrightarrow (a_{n+1}a_n \dots a_1a_0) \vdots 10^n$
10. Число ℓ делится нацело на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, занимающих нечётные места, отличается от суммы цифр, занимающих чётные места, на число, делящееся на 11.	$\ell \vdots 11 \Leftrightarrow$ $\left(\left(a_0 + \sum_{i=2j} a_i\right) - \left(a_1 + \right.\right.$ $\left.\left. + \sum_{i=2j+1} a_i\right)\right) \vdots 11$ для $\forall j \in \mathbb{N}, j \leq k$

Например, 3301485 делится на 11. Действительно, $\left(\left(5 + \right.\right.$ $\left. + \sum_{i=2j} a_i\right) - \left(8 + \sum_{i=2j+1} a_i\right)\Big) = (5+4+0+3) - (8+1+3) =$ $= 12 - 12 = 0, 0 \vdots 11.$

3.3. Об операции деления на множестве $\mathbb{N}_0$ целых неотрицательных чисел

Определение. *Деление* – это бинарная операция, которая паре целых неотрицательных чисел a и b, $b \neq 0$ ставит в соответствие их частное $a : b$. Число a называется *делимым*, число b – *делителем*.

При этом *частным* $a : b$ называется число $c \in \mathbb{N}_0$, которое при умножении на делитель b даёт делимое a, то есть $a : b = c \iff c \cdot b = a, b \neq 0$.

Условие существования частного. *Частное* от деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b *существует* тогда и только тогда, когда числа a и b находятся в отношении делимости.

Если частное двух целых неотрицательных чисел существует, то оно единственно.

Деление целых чисел не является алгебраической операцией, так как результат действия не всегда определяется как целое (или натуральное) число. Операция деления на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (как и на множестве натуральных $\mathbb{N}$) не подчиняется коммутативному ($a : b \neq b : a$) и ассоциативному ($a : (b : c) \neq (a : b) : c$) законам. Для операции деления формулируется ряд правил:

Правило деления произведения на число:

$$(a \cdot b) : c = \begin{cases} (a : c) \cdot b, & a \vdots c, \\ a \cdot (b : c), & b \vdots c. \end{cases}$$

Правило деления числа на произведение:

$$a : (b \cdot c) = \begin{cases} (a : b) : c, & a \vdots (b \cdot c), \\ (a : c) : b, & a \vdots c. \end{cases}$$

Правило деления частного на число:

$$(a : b) : c = \begin{cases} a : (b \cdot c), & a \vdots (b \cdot c), \\ (a : c) : b, & a \vdots (b \cdot c). \end{cases}$$

Правило деления числа на частное:

$$a : (b : c) = \begin{cases} (a : b) \cdot c, & a \vdots b, \\ (a \cdot c) : b, & b \vdots c. \end{cases}$$

Напомним, что операции сложения, вычитания, умножения, деления на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (или на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$) можно вводить разными способами: число определяют с точки зрения теоретико-множественного подхода, с точки зрения теории измерения величин, аксиоматическим способом – все эти подходы подробно описаны в учебнике [1], а также учебно-практическом пособии [5]. Заметим, что внутренняя организация множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (как и множества натуральных чисел $\mathbb{N}$) остается неизменной, она не зависит от того, какой подход используют для введения и изучения основных понятий для этих множеств. Красота построений числовых систем состоит в том, что неизменную внутреннюю структуру множества можно описывать, оставаясь в строгих рамках первоначально данных определений.

В пособиях [5] – [8] доказательство математических предложений проводили только на множестве натуральных чисел. Рассмотрим примеры доказательства предложений в том числе и на множестве целых чисел.

Практическая работа

Обязательные задания

1. Объясните, почему число 15 является делителем числа 60 и не является делителем числа 70.

2. Постройте граф отношения «быть делителем данного числа», заданного на множестве X = {2, 6, 12, 18, 24}. Как отражены на этом графе свойства данного отношения?

3. Известно, что число 24 – делитель числа 96, а число 96 – делитель числа 672. Докажите, что число 24 – делитель числа 672, не выполняя деления.

4. Запишите множество делителей числа:

а) 24;

б) 13;

в) 1.

5. На множестве X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} задано отношение «иметь одно и то же число делителей». Является ли оно отношением эквивалентности?

6. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) если сумма двух слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число;

б) если одно из слагаемых суммы не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;

в) если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;

г) если одно из слагаемых суммы делится на некоторое число, а другое не делится на это число, то и сумма не делится на это число.

7. Верно ли, что:

а) $a \vdots m \wedge b \vdots n \Rightarrow ab \vdots mn$;

б) $ab \vdots n \Rightarrow a \vdots n \vee b \vdots n$.

8. Выпишите из ряда чисел 132, 1050, 1114, 364, 12000 те, которые:

а) делятся на 2;

б) делятся на 4;

в) делятся на 2 и не делятся на 4;

г) делятся и на 2, и на 4.

9. Сделайте вывод о взаимосвязи делимости на 3 и на 9. Докажите его.

10. Верно ли утверждение:

а) для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4;

б) для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы оно делилось на 4.

11. Из ряда чисел 72, 312, 522, 483, 1197 выпишите те, которые:

а) делятся на 3;

б) делятся на 9;

в) делятся на 3 и не делятся на 9;

г) делятся и на 3, и на 9.

12. Не выполняя сложения, установите, делится ли значение выражения на 4:

а) 284 + 1440 + 113; в) 284 + 1441 + 113;

б) 284 + 1440 + 792224; г) 284 + 1441 + 113 + 164.

13. Не выполняя вычитания, установите, делится ли разность на 9:

а) 360 – 144;

б) 946 – 540;

в) 30 240 – 97.

14. Верно ли, что для делимости числа x на 8 в десятичной системе счисления необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось трехзначное число, образованное последними тремя цифрами $a_2a_1a_0 \vdots 8$ десятичной записи числа x?

15. Даны числа 36 и 45:

а) найдите все общие делители этих чисел;

б) можно ли назвать все их общие кратные;

в) найдите три трехзначных числа, которые являются общими кратными данных чисел;

г) чему равны НОД (36, 45) и НОК (36, 45)? Как проверить правильность полученных ответов?

16. Верны ли записи:

а) НОД (32, 8) = 8 и НОК (32, 8) = 32;

б) НОД (17,35) = 1 и НОК (17,35) = 595;

в) НОД (255, 306) = 17 и НОК (255, 306) = 78030.

17. Найдите НОК (a, b), если известно, что:

а) $a = 47$, $b = 105$ и НОД (47, 105) = 1;

б) $a = 315$, $b = 385$ и НОД (315, 385) = 35.

18. Из множества чисел 1032, 2964, 5604, 8910, 7008 выпишите те, которые делятся на 12.

19. Делятся ли на 18 числа 1548 и 942?

20. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

21. Найдите цифры a и b числа $72a - 3b$, если известно, что это число делится на 45.

22. Не выполняя умножения и деления уголком, установите, какие из следующих произведений делятся на 30:

а) $105 \cdot 20$;

б) $47 \cdot 12 \cdot 5$;

в) $85 \cdot 33 \cdot 7$.

23. Не выполняя сложения или вычитания, установите, значения каких выражений делятся на 36:

а) $72 + 180 + 252$;

б) $612 – 432$;

в) $180 + 252 + 100$;

г) $180 + 250 + 200$.

24. Из множества чисел 13, 27, 29, 51, 67 выпишите простые числа, а составные разложите на простые множители.

25. Докажите, что число 819 не является простым числом.

26. Разложите на простые множители числа 124, 588, 2700, 3780.

27. Какое число имеет разложение:

а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$;

б) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$?

28. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное данных чисел, представив их в каноническом виде:

а) 948 и 624;

б) 120, 540, 418.

29. Сложите дроби $\frac{7}{192}$ и $\frac{187}{1620}$. Что используется при сложении обыкновенных дробей: НОД или НОД знаменателей?

30. Сократите дробь $\frac{21120}{30720}$. Что используется при сокращении дроби: НОД или НОД числителя и знаменателя?

31. Сколько существует натуральных чисел, меньших 500 и не делящихся ни на 2, ни на 3?

32. Сколько существует натуральных чисел, меньших 500 и не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Творческие задания

1. Докажите, что при любом натуральном n истинны утверждения:

а) $n(n+1)(n+2) \vdots 6$;

б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 12$.

2. Сформулируйте признаки делимости на $12, 15, 18, 36, 45, 75$.

3. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 846 и 246;

б) 585 и 1960;

в) 15283 и 10013.

4. Верно ли, что:

а) НОД $(448, 656) = 16$;

б) НОК $(578, 8670) = 8670$?

5. Докажите, что числа 432 и 385 взаимно простые.

6. Найдите наибольший общий делитель всех пятизначных чисел, записанных при помощи цифр $1, 2, 3, 4, 5$ (цифры в записи чисел не повторяются).

7. Определите, какой день недели будет 1 января 2027 г.

8. Найдите остаток от деления на 3 числа $A = 13^{16} \cdot 2^{25} \cdot 5^{15}$.

9. Сколькими нулями оканчивается число $20!$?

10. Докажите утверждения:

1) $0 \vdots a$, где $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

2) $a \vdots 1$ для $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

3) если $1 \vdots a$, то $a = 1$.

3.4. Примеры доказательства делимости выражений на число методом математической индукции

Правило. Для того чтобы доказать какое-либо утверждение $P(x)$ методом математической индукции, нужно:

1) проверить истинность этого утверждения при начальном элементе e множества ($e = 0$ для $\mathbb{N}_0$ или $e = 1$ для $\mathbb{N}$);

2) на основе предположения об истинности утверждения при фиксированном значении переменной $x = k$ доказать, что утверждение истинно и для $x = k'$.

Если $P(e) \wedge P(k) \Rightarrow P(k')$ – истинное высказывание, то утверждение $P(x)$ справедливо для всех натуральных (или в зависимости от e – целых неотрицательных) чисел.

Задача 1. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $(n^3 - n) \vdots 3$.

Доказательство.

1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

$1^3 - 1 = 0$, 0 делится на 3. Значит, при $n = 1$ утверждение истинно.

2. Предположим, что при $n = k$ утверждение истинно, то есть

$$(k^3 - k) \vdots 3, \tag{1}$$

и докажем, что утверждение истинно при $n = k' = k + 1$, то есть докажем, что имеет место делимость

$$(k + 1)^3 - (k + 1) \vdots 3. \tag{2}$$

Используем следующие рассуждения.

Составим разность между выражением при $n = k + 1$ (обозначим A) и выражением при $n = k$ (обозначим B) и упростим её:

$$\underbrace{[(k + 1)^3 - (k + 1)]}_{A} - \underbrace{[k^3 - k]}_{B} =$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 - k^3 + k = \underbrace{3k^2 + 3k}_{A-B} = 3 \cdot (k^2 + k).$$

Полученная разность $A - B$ делится на 3 (по правилам деления произведения на число), вычитаемое B делится на 3 по предположению (1). Значит, по правилу деления и уменьшаемое A будет делиться на 3. Следовательно, при $n = k + 1$ выражение (2) делится на 3.

Доказано, что утверждение истинно при $n = 1$. Из истинности утверждения при $n = k$ следует истинность этого утверждения и при $n = k + 1$. Значит, выражение $(n^3 - n)$ делится на 3 при любом натуральном n.

Задача 2. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $(5^{2n-1} + 1) \vdots 6$.

Доказательство.

1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

Найдём значение выражения $(5^{2n-1} + 1)$ при $n = 1$.

$5^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 5^1 + 1 = 6$, 6 делится на 6 – это утверждение истинно.

2. Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, то есть

$$(5^{2k-1} + 1) \vdots 6, \tag{3}$$

и докажем, что утверждение будет истинно при $n = k' = k + 1$, то есть докажем, что имеет место делимость

$$(5^{2(k+1)-1}+1) ⋮ 6. \qquad (4)$$

Преобразуем выражение (4) к такому виду, чтобы можно было использовать условие (3):

$$5^{2(k+1)-1}+1 = 5^{2k+2-1}+1 = 5^{(2k-1)+2}+1 = 5^{2k-1}\cdot 5^2+1 =$$
$$= 5^{2k-1}\cdot 25+1 = 5^{2k-1}\cdot(24+1)+1 = \underbrace{5^{2k-1}\cdot 24}+\underbrace{5^{2k-1}+1}.$$

В полученном выражении первое слагаемое $5^{2k-1}\cdot 24$ делится на 6 (по правилу деления произведения на число), второе слагаемое $5^{2k-1}+1$ делится на 6 по гипотезе (3), следовательно, сумма этих слагаемых разделится на 6: $(5^{2k-1}\cdot 24+5^{2k-1}+1) ⋮ 6$.

Значит, и исходное выражение (4) делится на 6.

Доказано, что выражение $(5^{2n-1}+1)$ делится на 6 при $n=1$, из делимости его на 6 при $n=k$ следует делимость при $n=k+1$. Значит, исходное утверждение справедливо для всех натуральных чисел n.

Задача 3 (7.66). Доказательство разными способами на множестве $\mathbb{Z}$.

Докажите, что при любом целом n число $n^2(n^2-1)$ делится на 12.

<u>Доказательство.</u>

В выражение $n^2(n^2-1)$ переменная входит в четной степени, поэтому о знаке n^2 не беспокоимся. Доказательство проводим на множестве целых чисел.

Способ 1.

1. Проверим истинность утверждения при $n=0$.

$0^2(0^2-1)=0\cdot(-1)=0$, 0 делится на 12. Значит, при $n=0$ утверждение истинно.

2. Предположим, что при $n=k$ утверждение истинно, то есть

$$k^2(k^2-1) ⋮ 12, \qquad (5)$$

и докажем, что утверждение истинно при $n=k'=k+1$, то есть докажем, что имеет место делимость

$$(k+1)^2((k+1)^2-1) ⋮ 12. \qquad (6)$$

Используем следующие рассуждения.

Составим разность между выражением при $n=k+1$ (обозначим A) и выражением при $n=k$ (обозначим B) и упростим её:

$$\underbrace{[(k+1)^2((k+1)^2-1)]}_{A} - \underbrace{k^2(k^2-1)]}_{B} =$$

$$= (k+1)^2(k^2+2k+1-1) - k^2(k^2-1) =$$

$= (k+1)^2(k^2 + +2k) - k^2(k^2-1) =$
$= (k^2+2k+1)(k^2+2k) - k^2(k^2-1) =$
$= k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k^3 + 4k^2 + 2k - k^4 + k^2 = \underbrace{4k^3 + 6k^2 + 2k}_{A-B} =$
$= 2 \cdot k(2k^2 + 3k + 1).$

Полученная разность $A - B$ делится на 2 (по правилам деления произведения на число). Таким образом, доказано, что утверждение $n^2(n^2-1)$ делится на 2. Теперь следует доказать, что полученный второй множитель $k(2k^2+3k+1)$ разделится на 6 (требуется установить делимость на 12, есть деление на 2, значит, требуется доказать еще делимость на 6, потому что $2 \cdot 6 = 12$).

1)Проверим истинность утверждения при $k = 0$.

$0^2(2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$, 0 делится на 6. Значит, при $k = 0$ утверждение истинно.

2)Предположим, что при $k = m$ утверждение истинно, то есть

$$m(2m^2 + 3m + 1) \vdots 6, \qquad (7)$$

и докажем, что утверждение истинно при $k = m' = m + 1$, то есть докажем, что имеет место делимость

$$(m+1)(2(m+1)^2 + 3(m+1) + 1) \vdots 6. \qquad (8)$$

Найдем разность выражений (7), (8) при $k = m+1$ и при $k = m$:
$(m+1)(2(m+1)^2 + 3(m+1) + 1) - m(2m^2 + 3m + 1) =$
$= (m+1)(2m^2 + 4m + 2 + 3m + 3 + 1) - m(2m^2 + 3m + 1) =$
$= (m+1)(2m^2 + 7m + 6) - m(2m^2 + 3m + 1) = 2m^3 + 7m^2 +$
$+ 6m + 2m^2 + 7m + 6 - 2m^3 - 3m^2 - m = 6m^2 + 12m + 6 =$
$= 6(m^2 + 2m + 1) = 6(m+1)^2.$

По правилу деления произведения на число выражение $6(m+1)^2$ разделится на 6. Следовательно, при $k = m + 1$ выражение (8) делится на 6.

Доказано, что утверждение истинно при $k = 0$ и из истинности утверждения при $k = m$ следует истинность этого утверждения и при $k = m + 1$. Значит, выражение $k(2k^2 + 3k + 1)$ делится на 6 при любом натуральном k.

Общий вывод: доказано, что утверждение истинно при $n = 0$ и из истинности утверждения при $n = k$ следует истинность этого утверждения и при $n = k + 1$. Значит, выражение $n^2(n^2 - 1)$ делится на 12 при любом натуральном n.

Способ 2.

Выражение $n^2(n^2-1)$ разложим на множители, используя формулы сокращенного умножения: $n^2(n^2-1) = n^2(n-1)(n+1) = = n \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)]$. Получили умножение числа n на произведение трех последовательных чисел, центральным из которых является n. Рассуждение проводим согласно правилу деления произведения на число: произведение двух последовательных чисел $(n-1) \cdot n$ или $n \cdot (n+1)$ всегда делится на 2, поскольку в паре следом идущих целых чисел одно четное; произведение трех последовательных чисел $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ всегда делится на 6, поскольку в такой тройке хотя бы один множитель делится на 2 и один из множителей делится на 3.

По условию надо доказать делимость выражения $n \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)]$ на 12. Установлено, что это выражение делится на 6. Осталось доказать его делимость еще на 2.

Пусть n – число четное, запишем его в виде $n = 2k$, тогда выражение $n \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)] = 2k \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)]$ делится на 12: первый множитель $2k$ делится на 2, второй множитель $[(n-1) \cdot n \cdot (n+1)]$ делится на 6.

Пусть n – нечетное число, запишем его в виде $n = 2k+1$, тогда выражение $n \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)] = (2k+1) \cdot [(n-1) \cdot n \cdot (n+1)] = (2k+1) \cdot \left[\left((2k+1)-1\right) \cdot (2k+1) \cdot \left((2k+1)+1\right)\right] = (2k+1) \times \times [(2k+1-1) \cdot (2k+1) \cdot (2k+1+1)] = (2k+1) \cdot [2k \cdot (2k+1) \times \times 2(k+1)]$ делится на 12, потому что второй множитель $[(n-1) \cdot n \times \times (n+1)]$ теперь содержит два четных числа: $n-1 = 2k$ и $n+1 = = 2(k+1)$. Тройка последовательных чисел $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = = 2k \cdot (2k+1) \cdot 2(k+1)$, два из которых четны (значит, произведение их разделится на 4) и одно кратно 3, делится на 12.

3.5. Различные методы решения квадратных уравнений[6]

Квадратные уравнения. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратным*. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют *приведенным*, если $a \neq 0$, то *неприведенным*. Числа a, b, c носят следующие названия: a – *первый коэффициент*, b – *второй коэффициент*, c – *свободный член*.

[6] Параграф содержит теоретические сведения из [11], [14] и задания по заявленной теме из [12 – 14].

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения. Поэтому формулу для нахождения корней можно переписать в виде $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.

В случае, когда второй коэффициент является четным ($b = 2k$), формула для нахождения корней принимает вид

$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2k\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$. Имеем $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$. Следовательно, $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение. Здесь $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. Замечаем, что b четно $b = 2 \cdot (-3)$, $k = -3$, поэтому $D = k^2 - ac = (-3)^2 - 1 \cdot 9 = 0$. Так как $D = 0$, то уравнение имеет один корень: $x = \frac{5 \pm 0}{1} = 3$. Следовательно, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$. Находим дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31$. Так как $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2} = 0$.

Решение. Левая часть уравнения – это дробь. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Из уравнения $3x - 6 = 0$ находим $x = 2$. Значение $x = 2$ будет корнем уравнения $\frac{3x-6}{x^2-x-2} = 0$, только если будет выполнено условие для знаменателя (знаменатель не может быть равен нулю). Из условия для знаменателя

$x^2 - x - 2 \neq 0$ находим $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$, $x \neq \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}$, $x_1 \neq \frac{1+3}{2}$, $x_2 \neq \frac{1-3}{2}$, то есть $x_1 \neq 2$, $x_2 \neq -1$. Так как при $x = 2$ знаменатель $x^2 - x - 2$ обращается в нуль, то уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Неполные квадратные уравнения. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называют *неполным*. Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения – проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x = 0$.

Решение. Имеем $x(2x - 5) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 5 = 0$, то есть $x = 2{,}5$. Итак, уравнение имеет два корня: 0 и 2,5.

Ответ: 0; 2,5.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2 - 10 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 3, получим $x^2 - \frac{10}{3} = 0$, то есть $\left(x - \sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 0$. Значит, либо $x - \sqrt{\frac{10}{3}} = 0$, откуда $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$; либо $x + \sqrt{\frac{10}{3}} = 0$, откуда $x = -\sqrt{\frac{10}{3}}$. Итак, уравнение имеет два корня $\sqrt{\frac{10}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2 + 5 = 0$.

Решение. Поскольку $2x^2 + 5 > 0$ при любых x, то уравнение $2x^2 + 5 = 0$ не имеет корней.

Теорема Виета. Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q:

$x_1 + x_2 = -p$,

$x_1 \cdot x_2 = q$

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Выведем некоторые соотношения между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Найдем сумму квадратов корней: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$.

Рассмотрим сумму кубов корней: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = -p(p^2 - 3q)$.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, часто опираются на следующие соотношения:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-p}{q},$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{p^2-2q}{q}.$$

Справедлива теорема, обратная теореме Виета: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$.

Решение. Попробуем найти два числа x_1 и x_2 такие, что

$x_1 + x_2 = 9$,

$x_1 \cdot x_2 = 14$.

Такими числами являются 2 и 7. По теореме, обратной теореме Виета, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

Ответ: 2; 7.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Решение. Попробуем найти такие два числа x_1 и x_2, чтобы выполнялись равенства

$x_1 + x_2 = -3$,

$x_1 \cdot x_2 = -28$.

Нетрудно заметить, что такими числами будут -7 и 4. Они и являются корнями заданного уравнения.

Ответ: -7; 4.

Практическая работа

Вариант 1

1. Дано множество квадратных уравнений. Укажите неполные квадратные уравнения. Ответ обоснуйте.

а) $4x^2 - 5x - 7 = 0$; б) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;
в) $7x^2 - x + 6 = 0$; г) $x^2 + 2 - 3x = 0$;
д) $2x^2 - 11 = 0$; е) $8 - 9x^2 = 0$;
ж) $7x^2 = 0$; з) $17 - x^2 - x = 0$.

2. Какие из чисел 0; $\frac{1}{3}$; -1; $-0{,}5$; 2 будут корнями уравнения.

а) $x^2 - x - 2 = 0$; б) $2x^2 + x = 0$;
в) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; г) $3x^2 + 2x - 1 = 0$?

3. Найдите дискриминант квадратных уравнений:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;
в) $2x - x^2 + 3 = 0$; г) $3x - 1 + 6x^2 = 0$.

4. Сколько корней имеют уравнения:

а) $3x^2 - 7x = 0$; б) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
в) $2x^2 - 1 = 0$; г) $x^2 + 3x + 3 = 0$?

5. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 1 и 3; б) -2 и $0{,}5$; в) 0 и 4;
г) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{6}$; д) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$; е) $1 - \sqrt{3}$ и $1 + \sqrt{3}$.

6. При каких значениях n можно представить в виде квадрата двучлена выражение:

а) $x^2 - nx + 16$; б) $x^2 + 6x - n$;
в) $nx^2 - 12x + 4$; г) $x^2 + nx + \frac{4}{49}$?

7. Решите уравнения:

а) $x^2 + x = 0$; б) $x^2 - 4x + 3 = 0$; в) $5x^2 + 14x - 3 = 0$;
г) $x^2 - 2x - 2 = 0$; д) $5x = 3x^2$; е) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
ж) $7x^2 - 4 = 0$; з) $3x^2 - x + 2 = 0$.

8. Найдите корни уравнений:

а) $10x^2 + 5x - 0{,}6 = 0$; б) $7x^2 + 8x + 1 = 0$;
в) $2x^2 - 3x + 2 = 0$; г) $x^2 + 6 = 5x$;
д) $5y^2 - 4y = 1$; е) $2 - 3x = 5x^2$.

9. Разложите на множители многочлены:

а) $x^2 - 6x + 9$; б) $4x^2 - \frac{9}{121}$; в) $x^2 + 5x + 6$;
г) $x^2 + x - 2$; д) $3y^2 - 5$; е) $y^2 - 3y - 4$.

10. При каком значении a уравнение: а) $x^2 - ax + 9 = 0$; б) $x^2 + 3ax + a = 0$ имеет один корень?

11. При каком значении m один из корней уравнения $3x^2 - mx - 6 = 0$ равен -2?

12. Найдите сумму и произведение корней уравнений:

1) а) $x^2 - 16x + 28 = 0$; б) $x^2 - 12x - 45 = 0$;
в) $y^2 + 17y + 60 = 0$; г) $3y - 40 + y^2 = 0$;
2) а) $x^2 - 27x = 0$; б) $y^2 - 12 = 0$;
в) $60z + z^2 = 0$; г) $4{,}5y - y^2 = 0$;
3) а) $3x^2 - 6x - 7 = 0$; б) $5y^2 + y - 3 = 0$;
в) $8x - 2x^2 + 3 = 0$; г) $4y^2 - 5y = 0$.

13. Запишите квадратное уравнение, корни которого равны: а) 2 и 5; б) -1 и 3; в) 0,4 и $2\frac{1}{2}$.

14. Найдите подбором корни уравнений:

1) а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $y^2 + 8y + 15 = 0$;
2) а) $x^2 - 8x - 9 = 0$; б) $z^2 - 3z - 10 = 0$;
3) а) $x^2 - 17x + 42 = 0$; б) $y^2 - 11y - 80 = 0$.

15. Один из корней квадратного уравнения равен 2. Найдите другой корень уравнения: а) $x^2 + 17x - 38 = 0$; б) $7x^2 - 11x - 6 = 0$.

16. Определите знаки корней уравнений (если корни существуют), не решая уравнения:

1) а) $x^2 + 10x + 17 = 0$; б) $y^2 - 13y - 11 = 0$;
2) а) $3y^2 - 23y + 21 = 0$; б) $5x^2 + 17x - 93 = 0$;
3) а) $x^2 + \sqrt{6}x + 8 = 0$; б) $3y^2 - \sqrt{3}y - 3\sqrt{2} = 0$.

17. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 0$ и $y = \frac{(x+1)(3x-2)}{x-4}$; б) $y = 0$ и $y = \frac{x^2-2x-15}{x+3}$;
в) $y = 2x - 1$ и $y = \frac{14-x}{x+2}$; г) $y = 5x$ и $y = 6 + \frac{4}{x-1}$.

18. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x\sqrt{5}}{x\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}-x\sqrt{3}}$; б) $\frac{x\sqrt{7}+\sqrt{2}}{x\sqrt{7}-\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{7}-\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{x}{7x^2-2}$.

Вариант 2

1. Дано множество квадратных уравнений. Укажите неполные квадратные уравнения. Ответ обоснуйте.

а) $3x^2 + 7x - 6 = 0$; б) $2x^2 - 5x + 1 = 0$;
в) $5x^2 - x + 9 = 0$; г) $x^2 + 7 - 4x = 0$;
д) $3x^2 + 2x = 0$; е) $15x - x^2 = 0$;
ж) $11x^2 = 0$; з) $3x - x^2 + 19 = 0$.

2. Какие из чисел 0; 0,5; 1; $-\frac{1}{6}$; -3 будут корнями уравнений:

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $6x^2 + x = 0$;
в) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; г) $6x^2 - 5x - 1 = 0$?

3. Найдите дискриминант квадратных уравнений:

а) $5x^2 - 4x - 1 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$;
в) $3x - x^2 + 10 = 0$; г) $2x + 3 + 2x^2 = 0$.

4. Сколько корней имеют уравнения:

а) $6x^2 - 5x = 0$; б) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
в) $3x^2 - 4 = 0$; г) $x^2 - 4x + 5 = 0$?

5. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 2 и 5; б) -1 и 0,8; в) 0 и -3;
г) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$; д) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; е) $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$

6. При каких значениях m можно представить в виде квадрата двучлена выражение:

а) $x^2 + mx + 9$; б) $x^2 - 2x - m$;
в) $mx^2 - 12x + 9$; г) $x^2 - \frac{2}{7}x + m$?

7. Решите уравнения:

а) $x^2 - x = 0$; б) $x^2 + 5x + 6 = 0$; в) $5x^2 + 8x - 4 = 0$;
г) $x^2 - 6x + 7 = 0$; д) $7x = 4x^2$; е) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
ж) $5x^2 - 3 = 0$; з) $2x^2 - x + 3 = 0$.

8. Найдите корни уравнений:

а) $10x^2 - 3x - 0{,}4 = 0$; б) $7x^2 + 6x - 1 = 0$;
в) $3x^2 - 4x + 2 = 0$; г) $x^2 + 12 = 7x$;
д) $7y^2 + 5y = 2$; е) $1 + 8x = 9x^2$.

9. Разложите на множители многочлены:

а) $y^2 - 10y + 25$; б) $9x^2 - \frac{49}{144}$; в) $y^2 - 5y + 4$;
г) $x^2 - x - 6$; д) $2x^2 - 7$; е) $y^2 + 7y - 8$.

10. При каком значении a уравнение: а) $x^2 + ax + 16 = 0$; б) $x^2 - 2ax + 3a = 0$ имеет один корень?

11. При каком значении m один из корней уравнения $2x^2 - x - m = 0$ равен -3?

12. Найдите сумму и произведение корней уравнений:

1) а) $x^2 - 14x + 33 = 0$; б) $x^2 + 12x - 28 = 0$;
в) $y^2 + 17y + 52 = 0$; г) $35 + 12y + y^2 = 0$;

2) а) $x^2 + 17x = 0$; б) $z^2 + 15 = 0$;
в) $75 - y^2 = 0$; г) $2{,}3z - z^2 = 0$;

3) а) $7x^2 - 2x - 14 = 0$; б) $2y^2 + 15y + 3 = 0$;
в) $16 - 4y^2 - y = 0$; г)$3x^2 - 14 = 0$.

13. Запишите квадратное уравнение, корни которого равны: а) 3 и 4; б) -2 и 5; в) 0,6 и $1\frac{2}{3}$.

14. Найдите подбором корни уравнений:

1) а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $z^2 + 5z + 6 = 0$;

2) а) $x^2 - 2x - 15 = 0$; б) $y^2 + 7y - 8 = 0$;

3) а) $x^2 - 15x + 36 = 0$; б) $y^2 - 10y - 39 = 0$.

15. Один из корней квадратного уравнения равен 3. Найдите другой корень уравнения: а) $x^2 - 21x + 54 = 0$; б) $9x^2 - 20x - 21 = 0$.

16. Определите знаки корней уравнений (если корни существуют), не решая уравнения:

1) а) $x^2 + 11x + 20 = 0$; б) $y^2 - 15y - 13 = 0$;

2) а) $2y^2 + 19y - 27 = 0$; б) $3x^2 - 21x + 17 = 0$;

3) а) $5x^2 - \sqrt{5}x - 5\sqrt{3} = 0$; б) $y^2 + \sqrt{7}y + 1 = 0$.

17. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 0$ и $y = \frac{(x-3)(2x+5)}{x+2}$; б) $y = 0$ и $y = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$;

в) $y = 3x + 1$ и $y = \frac{x+27}{x-3}$; г) $y = 4x$ и $y = \frac{7}{x+1} - 1$.

18. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x\sqrt{7}}{x\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{7}-x\sqrt{2}}$; б) $\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{3}}{x\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{5}-\sqrt{3}}{x\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{32x}{5x^2-3}$.

Задания для рейтинг-контроля

Вариант 1

1. Решите уравнения и сделайте проверку:

а) $25y^2 - 1 = 0$; б) $-y^2 + 2 = 0$; в) $9 - 16y^2 = 0$;
г) $7y^2 + y = 0$; д) $4y - y^2 = 0$; е) $0{,}2y^2 - y = 0$.

2. Найдите корни уравнений:

а) $(x+2)(x-1) = 0$; б) $(x - 0{,}3)x = 0$;
в) $x^2 + 4x = 0$; г) $x^2 - 36 = 0$;
д) $16x^2 - 1 = 0$; е) $4x - 5x^2 = 0$;
ж) $x^2 = 7x$; з) $x^2 - 3x - 5 = 11 - 3x$;
и) $5x^2 - 6 = 15x - 6$.

3. Какие из уравнений не имеют корней?

а) $x^2 + 9 = 0$; б) $\sqrt{a} + 1 = 0$;
в) $|-3y^2| + 1{,}2 = 0$; г) $(y-1)^2 + 1 = 0$;
д) $(z+4)^2 = 0$; е) $(x+3)^2 - 4 = 0$.

4. Решите задачу. Разность двух чисел равна 2. Половина произведения этих чисел равна их среднему арифметическому. Найдите такие числа.

5. При каких значениях y:

а) значение многочлена $y^2 - 11y + 2{,}4$ равно нулю;
б) равны значения двучленов $1{,}5y^2 + 0{,}5$ и $3y - 2{,}5y^2$;
в) трехчлен $2 + y - 0{,}5y^2$ равен двучлену $2y^2 - 3y$?

6. Найдите корни уравнений и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до $0{,}001$:

а) $x^2 - 6x + 4 = 0$; б) $16y^2 - 8y - 31 = 0$.

7. Докажите, что при любом значении k уравнение $3y^2 - ky - 2 = 0$ имеет два корня.

8. Докажите, что не существует такого значения m, при котором уравнение $x^2 - mx + m - 2 = 0$ имело бы один корень.

9. Решите уравнения:

а) $\frac{x^3}{|x|} + x + 3 = 0$; б) $3x^2 + \frac{x^2}{|x|} - 4 = 0$.

10. Один из корней данного квадратного уравнения равен -3. Найдите коэффициент k и другой корень уравнения:

а) $x^2 - 5x + k = 0$; б) $x^2 + kx + 18 = 0$;
в) $3x^2 + 8x + k = 0$; г) $5x^2 + kx - 12 = 0$.

11. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 7x - 11 = 0$. Не решая уравнения:

1) найдите значение выражений:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $(x_1 - x_2)^2$;

г) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; д) $x_1^3 + x_2^3$;

2) запишите квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

12. Решите уравнения:

а) $x^2 + x + 1 = \frac{15}{x^2+x+3}$ (подстановка $x^2 + x + 1$);

б) $x(x+1) = \frac{24}{(x-1)(x+2)}$.

13. Решите задачи.

А. Числитель обыкновенной дроби на 4 меньше ее знаменателя. Если к числителю этой дроби прибавить 19, а к знаменателю – 28, то она увеличится на $\frac{1}{5}$. Найдите эту дробь.

Б. Теплоход, собственная скорость которого 18 км/ч, прошел 50 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Чему равна скорость течения реки?

В. Два автомата должны были изготовить по 180 деталей. Первый автомат изготовлял в час на 2 детали больше, чем второй, и поэтому закончил работу на 3 ч раньше. Сколько деталей изготовлял в час каждый автомат?

Г. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется столько же времени, что и при наполнении через вторую и третью трубы одновременно. Сколько времени потребуется для наполнения бассейна через каждую трубу, если через первую наполняют бассейн на 16 ч быстрее, чем через третью, и на 4 ч быстрее, чем через вторую?

14. Найдите корни уравнений:

1) а) $(x-2)^2 = 3x - 8$; б) $(x-1)^2 = 29 - 5x$;

в) $5(x+2)^2 = -6x - 44$; г) $(x+3)^2 - 16 = (1-2x)^2$;

2) а) $(x-2)(x+2) = 7x - 14$; б) $(-x-1)(x-4) = x(4x-11)$;

в) $-x\left(\frac{1}{3} - x\right) = (x-1)(x+1)$; г) $5(x-2) = (3x+2)(x-2)$;

3) а) $\frac{x^2-x}{3} = \frac{2x-4}{5}$; б) $\frac{x^2-3}{2} - 6x = 5$;

в) $\frac{x^2+2x}{2} = \frac{x^2+24}{7}$; г) $\frac{3x^2+x}{4} - \frac{2-7x}{5} = \frac{3x^2+17}{10}$.

Вариант 2

1. Решите уравнения и сделайте проверку:

а) $9y^2 - 4 = 0$; б) $-y^2 + 5 = 0$; в) $1 - 4y^2 = 0$;
г) $8y^2 + y = 0$; д) $6y - y^2 = 0$; е) $0{,}1y^2 - 0{,}5y = 0$.

2. Найдите корни уравнений:

а) $(x + 1)(x - 2) = 0$; б) $x(x + 0{,}5) = 0$;
в) $x^2 - 2x = 0$; г) $x^2 - 16 = 0$;
д) $9x^2 - 1 = 0$; е) $3x - 2x^2 = 0$;
ж) $x^2 = 3x$; з) $x^2 + 2x - 3 = 2x + 6$;
и) $3x^2 + 7 = 12x + 7$.

3. Какие из уравнений не имеют корней?

а) $x^2 - 1 = 0$; б) $\sqrt{y} + 2 = 0$;
в) $|-2a^2| + 0{,}6 = 0$; г) $(y - 2)^2 + 4 = 0$;
д) $(m - 1)^2 = 0$; е) $(x - 3)^2 - 9 = 0$.

4. Решите задачу. Произведение двух чисел равно их среднему арифметическому, а разность этих чисел равна 1. Найдите такие числа.

5. При каких значениях a:

а) значение многочлена $a^2 - 11a + 2{,}8$ равно нулю;
б) равны значения двучленов $a^2 - 6a$ и $0{,}5a^2 - 16$;
в) двучлен $2a^2 - 1{,}6a$ равен трехчлену $1{,}8a^2 + 0{,}4a + 5$?

6. Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до $0{,}001$:

а) $x^2 - 4x - 3 = 0$; б) $9y^2 + 6y - 17 = 0$.

7. Докажите, что при любом значении m уравнение $4y^2 + my - 5 = 0$ имеет два корня.

8. Докажите, что не существует такого значения a, при котором уравнение $x^2(a - 2) + ax + 1 = 0$ имело бы один корень.

9. Решите уравнения:

а) $\frac{x^3}{|x|} + 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + \frac{x^2}{|x|} - 6 = 0$.

10. Один из корней данного квадратного уравнения равен -2. Найдите коэффициент k и другой корень уравнения:

а) $x^2 + 5x + k = 0$; б) $x^2 + kx - 16 = 0$;
в) $5x^2 - 7x + k = 0$; г) $3x^2 + kx + 10 = 0$.

11. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 9x - 17 = 0$. Не решая уравнения:

1) найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $(x_1 - x_2)^2$;

г) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; д) $x_1^3 + x_2^3$;

2) запишите квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

12. Решите уравнение:

а) $x^2 + 3x = \frac{8}{x^2+3x-2}$ (подстановка $y = x^2 + 3x$);

б) $(x-2)(x+7) = \frac{19}{(x+1)(x+4)}$.

13. Решите задачи.

А. Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 4 больше ее числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 2, а знаменатель – на 21, то дробь уменьшится на $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

Б. Катер прошел 40 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения 2 км/ч?

В. Две мастерские должны были сшить по 96 курток. Первая мастерская шила в день на 4 куртки больше, чем вторая, и потому выполнила заказ на 2 дня раньше. Сколько курток шила в день каждая мастерская?

Г. Слесарь может выполнить заказ за то же время, что и два ученика, работая вместе. За сколько часов может выполнить заказ слесарь и каждый из учеников, если слесарь может выполнить его на 2 ч быстрее, чем один первый ученик, и на 8 ч быстрее, чем один второй?

14. Найдите корни уравнений:

1) а) $(x+3)^2 = 2x + 6$; б) $(x+2)^2 = 43 - 6x$;

в) $4(x-1)^2 = 12x + 3$; г) $(x-2)^2 + 24 = (2+3x)^2$;

2) а) $(x-3)(x+3) = 5x - 13$; б) $7(1-x) = (2x+3)(1-x)$;

в) $-x(4x+1) = (x+2)(x-2)$; г) $(x+4)(2x-1) = x(3x+11)$;

3) а) $\frac{2x^2+x}{5} = \frac{4x-2}{3}$; б) $\frac{x^2-4}{3} + 4x = 3$;

в) $\frac{x^2-11}{7} = \frac{x-x^2}{2}$; г) $\frac{4x^2+x}{3} - \frac{5x-1}{6} = \frac{x^2+17}{9}$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите уравнения наиболее рациональным способом: а) $2004x^2 - 2003x - 1 = 0$; б) $12345x^2 + 12340x - 5 = 0$.

2. Найдите корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $a + b + c = 0$.

3. Решите уравнения:

а) $x^2 - 5\sqrt{x^2} + 4 = 0$; б) $x|x| + 5x - 6 = 0$;

в) $|x^2 + 2x - 5| = -2x$; г) $|x - 5| + (x^2 - 7x + 10)^2 = 0$.

4. Не вычисляя корней уравнения $x^2 - 3x - 2 = 0$, найдите:

а) $x_1^3 + x_2^3$; б) $\frac{x_1}{x_2^3} + \frac{x_2}{x_1^3}$; в) $x_1x_2^4 + x_1^4x_2$.

5. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px - 2 = 0$ равна 5. Найдите p.

6. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 5|x| + + 1 = 0$.

7. Определите, при каком значении a оба корня уравнения $x^2 - \ (a^2 - 2|a|)x - 2a + a^2 = 0$ равны нулю.

8. Определите, при каких значениях a уравнение $(a^2 + 4a - 21)x^2 - (a^2 - 3a)x - 3 + 4a - a^2 = 0$ имеет более двух корней.

9. Найдите корни уравнений:

1) а) $\frac{x-7}{x-2} + \frac{x+4}{4} = 1$; б) $\frac{3y-3}{3y-2} + \frac{6+2y}{3y+2} = 2$;

в) $\frac{2}{x-5} - \frac{x+4}{x+5} = \frac{3}{x^2-25}$; г) $\frac{2y-2}{y+3} - \frac{18}{y^2-9} = \frac{y-6}{y-3}$;

2) а) $\frac{4}{y-2} - \frac{2}{y} = \frac{3-y}{y^2-2y}$; б) $\frac{3x-2}{x-1} + \frac{x-4}{x+3} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$;

3) а) $\frac{7}{x-3} + 1 = \frac{18}{x^2-6x+9}$; б) $\frac{1}{2x-1} - \frac{13x-4}{4x^2-4x+1} = 4$;

в) $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{9}{(x+2)^2} - \frac{6}{x^2-4} = 0$; г) $\frac{4}{1-9y^2} + \frac{3}{3y^2+y} = \frac{4}{9y^2+6y+1}$.

10. Решите уравнения:

а) $\frac{y-14}{y^3-8} = \frac{5}{y^2+2y+4} - \frac{1}{y-2}$; б) $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1} + \frac{6}{8c^3+1} = \frac{2}{2c+1}$;

в) $\frac{14}{x^3+x^2-9x-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{7}{(x-3)(x+1)}$; г) $\frac{1}{x^3-4x} + \frac{1}{x^3+4x} - \frac{4}{x^4-16} = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнения наиболее рациональным способом: а) $2004x^2 + 2003x - 1 = 0$; б) $12345x^2 - 12340x - 5 = 0$.

2. Найдите корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $a - b + c = 0$.

3. Решите уравнения:

а) $x^2 - 13\sqrt{x^2} + 36 = 0$; б) $x|x| - 5x - 6 = 0$;

в) $|x^2 - 3x - 7| = -3x$; г) $(x^2 + x - 6)^2 + |x + 3| = 0$.

4. Не вычисляя корней уравнения $x^2 - 3x - 2 = 0$, найдите:

а) $x_1^4 + x_2^4$; б) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; в) $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$

5. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px - 2 = 0$ равна 8. Найдите p.

6. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 6|x| + + 3 = 0$.

7. Определите, при каком значении a оба корня уравнения $x^2 - (a^2 + 3a)x + 3|a| - a^2 = 0$ равны нулю.

8. Определите, при каких значениях a уравнение $(a^2 - 5a - 14)x^2 - (a^2 - 4)x - 2 - 3a - a^2 = 0$ имеет более двух корней.

9. Найдите корни уравнений:

1) а) $\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3$; б) $\frac{4y+7}{2y-3} - \frac{y-3}{2y+3} = 1$;

в) $\frac{3}{x+2} - \frac{3}{2-x} = \frac{2}{x^2-4}$; г) $\frac{2y-8}{y-5} + \frac{10}{y^2-25} = \frac{y+4}{y+5}$;

2) а) $\frac{5}{y+3} - \frac{3}{y} = \frac{2-y}{y^2+3y}$; б) $\frac{2x-7}{x-4} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+6}{(x-4)(x+1)}$;

3) а) $\frac{5}{x-2} + 1 = \frac{14}{x^2-4x+4}$; б) $\frac{1}{3x+1} - \frac{1}{9x^2+6x+1} = 2$;

в) $\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{9}{(x+3)^2} - \frac{6}{x^2-9} = 0$; г) $\frac{3}{1-4y^2} + \frac{4}{2y^2+y} = \frac{3}{4y^2+4y+1}$.

10. Решите уравнения:

а) $\frac{7a-6}{a^3+27} = \frac{1}{a^2-3a+9} - \frac{1}{a+3}$; б) $\frac{y+3}{9y^2+3y+1} + \frac{3}{27y^3-1} = \frac{1}{3y-1}$;

в) $\frac{1-x}{x^3-3x^2-4x+12} - \frac{2}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-2}$; г) $\frac{1}{x^3-x} + \frac{1}{x^3+x} - \frac{2}{x^4-1} = 0$.

Глава 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи по теме «Числовые множества и операции над ними»

В задачах 1 – 10 определите, какие множества рассматриваются и в каком отношении они находятся между собой. Определите численность данных и искомых множеств.

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

2. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну – по геометрии и одну – по тригонометрии. Результаты проверки решений представлены ниже.

Решены задачи	Количество решивших
по алгебре	20
по геометрии	18
по тригонометрии	18
по алгебре и геометрии	7
по алгебре и тригонометрии	8
по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько учащихся решили ровно две задачи?

3. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, русскому языку – 42, физике – 37, математике или физике – 75, математике или русскому языку – 76, физике или русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

4. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B, C. Результаты опроса представлены ниже.

Что читали	Количество прочитавших
Книгу A	25
Книгу B	22
Книгу C	22
Книгу A или B	33
Книгу A или C	32
Книгу B или C	31

Известно, что все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из трех книг?

5. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только 5 не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

6. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B, C. Из 40 школьников, каждый из которых посмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13 человек, фильм B – 16, фильм C – 19. Определите, сколько учеников посмотрели все три фильма.

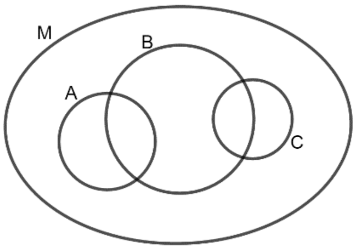
7. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли A, B, C видели, соответственно, 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли A и B, A и C, B и C?

8. В спортивном лагере 65 % ребят умеют играть в футбол, 70 % – в волейбол и 75 % – в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

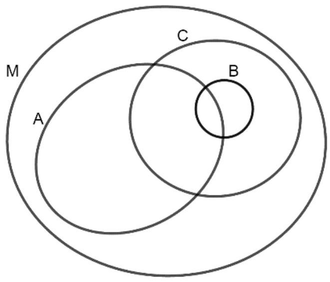
9. A – подмножество множества натуральных чисел, каждый элемент множества A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найдите число элементов в множестве A, если среди них имеется: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30.

10. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

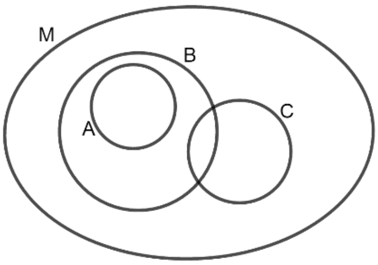
В задачах 11 – 20 нужно привести пример конкретных числовых множеств, для которых данная диаграмма Эйлера – Венна будет верной. Ответ поясните.



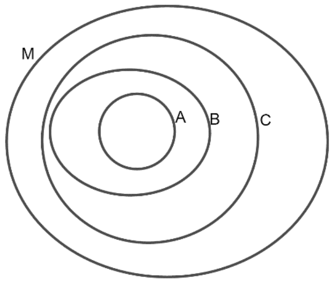
№ 11



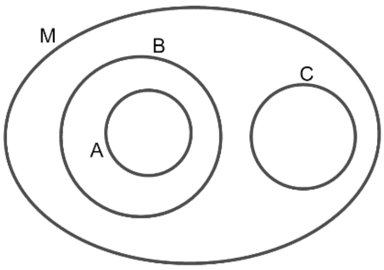
№ 12



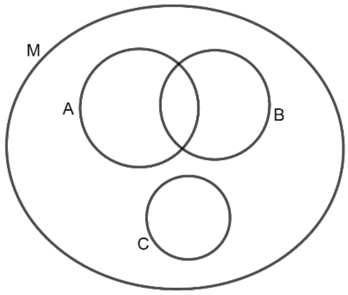
№ 13



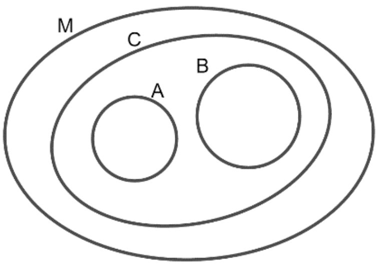
№ 14



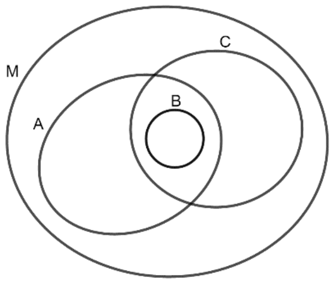
№ 15



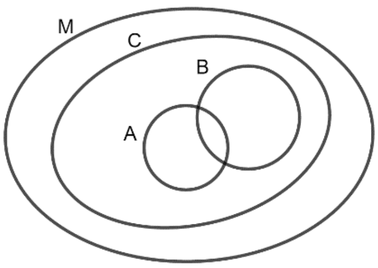
№ 16



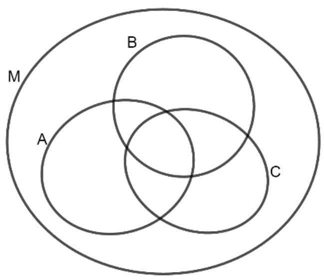
№ 17



№ 18



№ 19



№ 20

В задачах 21 – 30 постройте диаграммы Эйлера – Венна для данных числовых множеств. Ответ обоснуйте.

21. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 300\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 100\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 5\}$.

22. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 20\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 5\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 40\}$.

23. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 20\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 5\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$.

24. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 3\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 100\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 200\}$.

25. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 200\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 300\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 8\}$.

26. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 4\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 6\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$.

27. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 8\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 4\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 12\}$.

28. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 100\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 10\}$, C – множество трёхзначных натуральных чисел.

29. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 200\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 5\}$, C – множество двузначных натуральных чисел.

30. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, A – множество трёхзначных натуральных чисел, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 1000\}$.

В задачах 31 – 40 на диаграмме Эйлера – Венна отметьте штриховкой множество X и сформулируйте характеристическое свойство его элементов. Ответ обоснуйте.

31. $X = (B \backslash \bar{C}) \cup (A \backslash B)$, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 3\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 5\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

32. $X = \bar{C} \cap (A \backslash B)$, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 3\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x \vdots 4\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

33. $X = \bar{A} \cap (B \backslash C)$, если $A = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x > 300\}$, $B = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x > 100\}$, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x < 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

34. $X = (\bar{C} \backslash A) \cap (B \cup C)$, если $A = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x > 7\}$, B – множество двузначных натуральных чисел, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

35. $X = (A \backslash \bar{B}) \cup C$, если $A = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x < 100\}$, $B = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x \vdots 5\}$, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x > 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

36. $X = \bar{B} \cap (C \backslash A)$, если A – множество двузначных натуральных чисел, $B = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x \vdots 3\}$, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x < 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

37. $X = (C \cap \bar{B}) \backslash A$, если A – множество двузначных натуральных чисел, B – множество трёхзначных натуральных чисел, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x < 5000\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

38. $X = (\bar{A} \backslash B) \cap C$, если A – множество двузначных натуральных чисел, $B = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$, C – множество трёхзначных натуральных чисел. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

39. $X = C \cup (\bar{B} \backslash A)$, если $A = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x \vdots 100\}$, B – множество двузначных натуральных чисел, $C = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x < 1000\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

40. $X = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$, если $A = \{x | \, x \in \mathbb{N}, x > 1000\}$, B – множество трёхзначных натуральных чисел, C – множество натуральных чисел, в десятичной записи которых присутствует цифра 5. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

В задачах 41 – 50 нужно отметить на числовой прямой множество X и сформулировать характеристическое свойство его элементов. Ответ поясните.

41. а) $X = (B \backslash A) \cap C$; б) $X = (A \cup C) \backslash B$; в) $X = B \backslash (A \backslash C)$; г) $X = (A \cup C) \backslash (C \cap (A \backslash B))$; д) $X = \overline{(B \backslash A) \cup (B \backslash C)}$; е) $X = (A \backslash (B \cup C)) \cup (B \cap C)$, если $A = (3, 5)$, $B = [-8, 10)$, $C = [1, +\infty)$.

42. а) $X = C \backslash (A \cap B)$; б) $X = (A \cup B) \backslash C$; в) $X = (B \cap C) \backslash A$; г) $X = (A \cup B) \backslash ((C \backslash B) \cup (C \backslash A))$; д) $X = \overline{((A \cap B) \backslash C) \cup (C \backslash A)}$; е) $X = (B \cup C) \backslash A \cup (B \cap C)$, если $A = [-5, 3]$, $B = (1, 12]$, $C = (-2, 8)$.

43. а) $X = A(B \cap C)$; б) $X = (B \backslash A) \cup C$; в) $X = (B \cup C) \backslash A)$; г) $X = (B(A \cap C)) \cap (A \cup C)$; д) $X = \overline{(A \cap B) \cup (B \cap C)}$; е) $X = ((A \backslash B) \backslash C) \cup (C \backslash (A \cap B))$, если $A = [-3, 6]$, $B = (5, +\infty)$, $C = [2, 11)$.

44. а) $X = B \backslash (A \backslash C)$; б) $X = (A \cap B) \backslash C$; в) $X = (A \cup B) \backslash (B \backslash C)$; г) $X = B \backslash ((A \backslash C) \cup (C \backslash A))$; д) $X = \overline{(A \cup B) \cap (B \cup C)}$; е) $X = C \backslash (B \cap C) \cap ((B \backslash A) \cup (A \backslash B)$, если $A = (-\infty, 8)$, $B = (-7, +\infty)$, $C = [-2, 5]$.

45. а) $X = B \backslash (C \backslash A)$; б) $X = (B \cap C) \cup A$; в) $X = (A \cup B) \backslash C$; г) $X = ((A \cup C) \backslash (B \backslash C)) \cap (A \cup B))$; д) $X = \overline{(A \cup C) \cap (B \cup C)}$; е) $X = ((C \backslash B) \cup (C \backslash A)) \cap (A \cup B)$, если $A = (5, +\infty)$, $B = [-4, 9)$, $C = (2, +\infty)$.

46. а) $X = A \backslash (B \cup C)$; б) $X = B(A \cap C)$; в) $X = (A \backslash B) \cap C$; г) $X = (B \cup A) \backslash (A \cap (B \backslash C))$; д) $X = \overline{(C \backslash B) \cup (C \backslash A)}$; е) $X = (B \backslash (C \cup A)) \cup (C \cap A)$, если $A = (-3, 6)$, $B = [3, +\infty)$, $C = [1, 8]$.

47. а) $X = A \backslash (B \backslash C)$; б) $X = B \cap (C \backslash A)$; в) $X = A \backslash (B \cup C)$; г) $X = (B \cup C) \backslash ((A \backslash C) \cup (A \backslash B))$; д) $X = \overline{(B \cap C \backslash A) \cup (A \backslash B)}$, е) $X = (C \cup A) \backslash B \cup (C \cap A)$, если $A = (-\infty, 1]$, $B = (-5, 2)$, $C = (-3, 3]$.

48. а) $X = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$; б) $X = (A \cup B) \cap C$; в) $X = (A \cup C) \cap B$; г) $X = (C(B \cap A)) \cap (B \cup A)$; д) $X = \overline{(B \backslash C) \cup (C \cap A)}$; е) $X = (B \backslash C \backslash A) \cup (A \backslash (B \cap C))$, если $A = [-2, 3)$, $B = [1, 7]$, $C = (5, 9)$.

49. а) $X = C \backslash (B \backslash A)$; б) $X = (B \cup C) \cap A$; в) $X = (A \cup C) \backslash (B \backslash C)$; г) $X = C \backslash ((B \backslash A) \cup (A \backslash B))$; д) $X = \overline{(A \cup C)(B \cap C)}$; е) $X = A \backslash (C \cap A) \cap ((C \backslash B) \cup (B \backslash C)$, если $A = [-3, 4)$, $B = (2, 5]$, $C = (1, 8]$.

50. а) $X = (A \backslash B) \cup C$; б) $X = (A \backslash C) \cap B$; в) $X = C \backslash (A \cup B)$; г) $X = ((B \cup A) \backslash (C \backslash A)) \cap (B \cup C))$; д) $X = \overline{(B \cup C)(C \cup A)}$; е) $X = ((A \backslash C) \cup (A \backslash B)) \cap (B \cup C)$, если $A = [-3, +\infty)$, $B = [4, +\infty)$, $C = (-5, 0)$.

В задачах 51 – 60 нужно доказать, что данное равенство имеет место для заданных множеств A, B, C, где $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, универсальным U считать множество однозначных положительных чисел $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

51. $(A \backslash B) \cup (A \cap C) = A \cap (\overline{B \backslash C})$.

52. $B \cup (C \backslash A) = (B \cup C) \cap (\overline{A \backslash B})$.
53. $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (\overline{C \backslash A})$.
54. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (\overline{C \backslash B})$.
55. $B \backslash (A \cup C) = (B \backslash A) \cap (\overline{C \backslash A})$.
56. $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash B) \cap (\overline{A \backslash B})$.
57. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash C) \cap (\overline{B \backslash C})$.
58. $B \backslash (A \cup C) = (B \backslash C) \cap (\overline{A \backslash C})$.
59. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (\overline{B \backslash C})$.
60. $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (\overline{B \backslash A})$.

В задачах 61 – 70 нужно построить в координатной плоскости изображения декартовых произведений $X \times Y$, $Y \times X$. Для каждого случая выполните отдельный чертёж.

61. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, 3 \le x < 6\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, |y| < 5\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, 3 \le x < 6\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| < 5\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, 3 \le x < 6\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| < 5\}$.
62. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 7\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{N}, y < 4\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 7\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, -2 < x < 7\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$.
63. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, -3 \le y < 4\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 4\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 4\}$.
64. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{N}, y < 6\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 6\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |x| = 2\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 6\}$.
65. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, -7 \le y < 1\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -7 \le y < 1\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |x| = 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -7 \le y < 1\}$.
66. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{N}, y < 5\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 5\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |x| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 5\}$.
67. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |x| = 4\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, -3 \le y < 2\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |x| = 4\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 2\}$;
в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |x| = 4\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 2\}$.
68. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, |y| \le 2\}$;
б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| \le 2\}$;

в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, x < 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| \leq 2\}$.

69. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |y| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, -4 \leq y < 2\}$;

б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, |y| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -4 \leq y < 2\}$;

в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |y| < 3\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, -4 \leq y < 2\}$.

70. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{N}, y < 4\}$;

б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$;

в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, |x| \leq 5\}, Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$.

В задачах 71 – 90 нужно:

а) определить, сколько свойств задано для элементов рассматриваемого множества;

б) выяснить, в каких отношениях находятся между собой подмножества, выделяемые этими свойствами;

в) изобразить с помощью кругов Эйлера диаграмму, соответствующую условию задачи;

г) определить, на сколько классов было разбито рассматриваемое множество, и сформулировать характеристические свойства элементов каждого класса;

д) составить краткую запись условия задачи;

е) привести обоснованное решение задачи.

71. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что 45 из них – не треугольники, 35 – не квадраты, а 20 – не треугольники и не квадраты?

б) Из 100 чисел 50 делятся на 5, 75 чисел – на 3, 10 чисел – ни на 5, ни на 3. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 15?

72. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что 80 из них – ромбы, 50 – не являются квадратами, а 30 – являются ромбами, но не квадратами?

б) Из 120 чисел 70 делятся на 9, 80 являются чётными, а 15 нечётных не делятся на 9. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 18?

73. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 75 неправильных треугольников, 60 непрямоугольных треугольников, а 35 неправильных треугольников – не прямоугольные?

б) Из 120 чисел 55 делятся на 3, 50 чисел – на 4, 20 чисел не делятся ни на 3, ни на 4. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 12?

74. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 70 равнобедренных треугольников, 85 неправильных треугольников, 55 неправильных равнобедренных треугольников?

б) Из 100 чисел 30 делятся на 5, 60 чисел – на 6, 20 чисел не делятся ни на 5, ни на 6. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 30?

75. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если 75 из них не являются ромбами, 55 фигур – не трапеции, 30 фигур не являются ни ромбами, ни трапециями?

б) Из 180 чисел 100 делятся на 4, 70 чисел – на 7, 60 чисел не делятся ни на 4, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 28?

76 а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 75 параллелограммов, из которых 35 не являются квадратами? Всего фигур-неквадратов в коробке – 60.

б) Из 120 чисел 70 делятся на 4, 60 чисел – на 5, 20 чисел не делятся ни на 4, ни на 5. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 20?

77. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что среди них 85 не являются остроугольными треугольниками, 75 – не тупоугольные треугольники, а 60 не являются ни остроугольными, ни тупоугольными треугольниками?

б) Из 125 чисел 60 делятся на 5, 70 чисел – на 7, 10 чисел не делятся ни на 5, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 35?

78. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что среди них 80 остроугольных треугольников, 45 неправильных треугольников и 25 неправильных остроугольных треугольников?

б) Из 120 чисел 50 делятся на 3, 70 чисел – на 8, 20 чисел не делятся ни на 3, ни на 8. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 24?

79. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 40 неправильных треугольников, 70 фигур не являются тупоугольными треугольниками, а 10 неправильных треугольников не содержат тупого угла?

б) Из 100 чисел 25 делятся на 7, 35 чисел – на 2, 50 чисел не делятся ни на 2, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 14?

№ 80. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 95 параллелограммов, 90 фигур – не ромбы, а 85 фигур – ромбы?

б) Из 100 чисел 40 делятся на 4, 50 чисел – на 9, 30 чисел не делятся ни на 4, ни на 9. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 36?

81. а) Сколько всего учеников в классе, если 24 из них любят в свободное время играть в компьютерные игры, 23 – смотреть фильмы, а 21 – в свободное время любят читать; при этом 2 ученика не любят ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в электронные игры, 10 учеников любят играть в подобные игры и читать, 10 – любят читать и смотреть фильмы, 15 учеников любят играть и смотреть фильмы, из которых 5 ещё и любят читать?

б) Известно, что из 30 ребят один в свободное время не любит ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в компьютерные игры, 4 ребят любят смотреть фильмы, но не любят ни играть, ни читать, 3 – любят читать, но не любят играть и смотреть фильмы. Всего ребят, которые любят играть в компьютерные игры, – 20, а ребят, которые любят смотреть фильмы, – 14, при этом 5 – любят играть и смотреть фильмы, но не любят читать. Сколько ребят любят играть в компьютерные игры и смотреть фильмы? Сколько ребят любят играть, но не любят смотреть фильмы? Сколько ребят любят читать и смотреть фильмы?

в) Сколько чисел в множестве M, если 35 из них делятся на 3, 35 чисел – на 5, 18 чисел – на 25, 10 чисел не делятся ни на 3, ни на 5, 8 чисел делятся на 75, 15 чисел делятся на 3, но не делятся на 5? Сколько в множестве M чисел, которые делятся на 15, но не делятся на 75? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 25 и не делятся на 3? Сколько чисел делятся на 25, но не делятся на 3?

№ 82. а) Сколько студентов приняли участие в студенческой конференции, если среди них 43 писали рефераты, из них 12 выступили с докладами? Всего выступивших с докладами студентов – 20, из них 8 человек участвовали в выставке студенческих работ. Всего в выставке приняли участие 48 студентов, из них 15 писали рефераты, при этом только 5 студентов и писали рефераты, и выступали с докладами, и участвовали в выставке.

б) Известно, что из 100 студентов 10 не принимали участие в работе студенческой конференции (то есть не писали рефераты, не выступали с докладами и не участвовали в выставке студенческих работ), восемь студентов выступали с докладами, но не писали рефераты и не участвовали в выставке. Всего 57 студентов писали рефераты, из которых 12 не выступали с докладами и не участвовали в выставке. В выставке участвовали всего 55 студентов, из которых 10 писали рефераты и выступали с докладами. Сколько из писавших рефераты студентов участвовали в выставке? Сколько студентов участвовали в выставке, но не писали рефераты? Сколько студентов писали рефераты и выступали с докладами?

в) Сколько чисел в множестве M, если известно, что среди них 45 чисел делятся на 4, 35 чисел – на 5, 17 чисел – на 8, 20 чисел не делятся ни на 4, ни на 5, 20 чисел делятся на 20, а 10 чисел делятся на 8, но не делятся на 5? Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 40? Сколько чисел делятся на 20, но не делятся на 40? Сколько чисел делятся на 4, но не делятся на 8 и не делятся на 5?

№ 83. а) Сколько абитуриентов посещают курсы дополнительной подготовки, если из них 65 человек ходят на занятия по математике, 55 – на занятия по русскому языку, 60 – на занятия по иностранным языкам. На занятия по математике и русскому языку ходят 20 человек, на занятия по математике и иностранным языкам – 30 человек, на занятия по русскому и иностранным языкам – 25 человек, и только 5 человек посещают все указанные занятия.

б) Из 125 абитуриентов 20 посещали дополнительные занятия по иностранному языку, но не посещали дополнительные занятия ни по математике, ни по русскому языку; 75 абитуриентов посещали дополнительные занятия по математике, из них 30 ходили и на занятия по иностранному языку, а 25 – не посещали занятий ни по русскому языку, ни по иностранному; 60 абитуриентов посещали дополнительные занятия по русскому языку, из них 15 – ходили на занятия по иностранному языку, но не ходили на занятия по математике. Сколько абитуриентов посещали дополнительные занятия по математике, русскому и иностранному языкам одновременно? Сколько абитуриентов посещали занятия по математике и русскому языку, но не посещали занятия по иностранному языку? Сколько абитуриентов посещали занятия по математике и иностранному языку, но не посещали занятия по русскому языку?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 50 чисел делятся на 7, 50 чисел – на 3, 15 чисел – на 14, 10 чисел не делятся ни на 7, ни на 3, 20 чисел делятся на 7, но не делятся ни на 14, ни на 3, а 10 чисел делятся на 14, но не делятся на 3? Сколько чисел в множестве M делятся на 21? Сколько чисел делятся на 21, но не делятся на 42? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся на 7?

84. а) Сколько кондитерских изделий приобрели для праздничного чаепития, если среди 30 пирожных оказались 20 с клубничным джемом? Всего с клубничным джемом было 50 кондитерских изделий, из которых 15 имели форму рулетов. Всего было куплено 60 кондитерских изделий в форме рулетов, из которых 15 являлись пирожными. Ещё были куплены 50 мясных пирожков-треугольничков, то есть данные кондитерские изделия не были пирожными, не имели ни клубничной начинки, ни формы рулетов, а 10 кондитерских изделий назывались «Клубничные пирожные-рулетики».

б) Для праздничного чаепития купили 120 кондитерских изделий. В покупке были 30 пирожных; 45 кондитерских изделий с клубничным джемом, из них 25 ватрушек, 20 изделий в форме рулетов не имели клубнично-джемовой прослойки и не считались пирожными, назывались «Мясной рулет из лаваша»; 10 пирожных-корзиночек с клубничным джемом; 40 мясных пирожков-треугольничков. Сколько кондитерских изделий «Клубничные пирожные-рулетики» было куплено всего? Сколько было рулетов с клубничным джемом, не являющихся пирожными? Сколько всего было куплено пирожных без клубничного джема?

в) Сколько чисел в множестве M, если 80 из них делятся на 3, 70 чисел – на 10, 30 чисел – на 100, 45 чисел – на 30, 10 чисел делятся на 100, но не делятся на 3, 15 чисел не делятся ни на 3, ни на 10? Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 300? Сколько чисел делятся на 30, но не делятся на 300? Сколько чисел делятся на 10, но не делятся ни на 100, ни на 3?

№ 85. а) Сколько человек ходили в поход, если 5 из них ставили палатки; 5 человек собирали хворост для костра, из них 2 – ставили палатки; 5 человек готовили пищу, из них 2 ставили палатки, а 3 – собирали хворост для костра? 3 человека не ставили палатки, не собирали хворост и не готовили пищу, а 1 участник похода и ставил палатки, и собирал хворост, и готовил пищу.

б) Из 10 человек, ходивших в поход, двое не ставили палатки, не собирали хворост для костра и не готовили пищу; 1 человек собирал хворост, но не ставил палатки и не готовил пищу; 4 человека ставили палатки, из них 1 собирал хворост, но не готовил пищу; 5 человек готовили пищу, из них 1 ставил палатки, но не собирал хворост для костра. Сколько человек ставили палатки, собирали хворост для костра и готовили пищу? Сколько человек ставили палатки, но не собирали хворост и не готовили пищу? Сколько человек готовили пищу, но не ставили палатки?

в) Сколько чисел в множестве M, если известно, что 60 чисел делятся на 45, 100 чисел – на 2, 100 чисел – на 15, 20 чисел не делятся ни на 2, ни на 15, 40 чисел делятся на 45, но не делятся на 2, а 50 чисел делятся на 2, но не делятся на 15. Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 30? Сколько чисел делятся на 90? Сколько чисел делятся на 15, но не делятся ни на 45, ни на 2?

86. а) Сколько детей занимается в кружке рукоделия, если 15 детей любят вязать; 14 – шить, из них половина любит и вязать; 16 детей любят вышивать, из них 10 детей любят шить, 8 – вязать, а 5 детей любят и шить, и вязать, и вышивать?

б) Из 20 детей, занимающихся в кружке рукоделия, 2 ребенка любят вышивать, но не любят шить и не любят вязать; 3 детей любят шить, вязать и вышивать; 5 человек любят шить и вышивать, но не любят вязать. Всего детей, которые любят вязать, – 12, из них 5 детей любят и вышивать. Всего детей, которые любят шить, – 14. Сколько всего детей в кружке любят вышивать? Сколько детей любят вязать, но не любят шить? Сколько детей любят шить, но не любят ни вязать, ни вышивать?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 70 чисел делятся на 10, 75 чисел – на 9, 100 чисел – на 5, 30 чисел – на 90, 25 чисел делятся на 9, но не делятся на 5, а 25 чисел не делятся ни на 5, ни на 9? Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 45? Сколько чисел делятся на 45, но не делятся на 90? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 10 и не делятся на 9?

87. а) Сколько человек занимаются в кружке цветоводов, если известно, что 10 из них выращивают сортовые розы; 15 человек – сортовые гладиолусы, из них 3 члена кружка выращивают ещё и розы; 8 человек выращивают хризантемы, из них 3 человека выращивают ещё и

розы, а 3 человека выращивают ещё и гладиолусы; только 1 человек выращивает и розы, и гладиолусы, и хризантемы, а 5 человек выращивают только орхидеи?

б) Из 30 членов общества цветоводов 12 человек выращивают сортовые розы; 12 человек – сортовые гладиолусы; 5 человек выращивают хризантемы, но не выращивают ни розы, ни гладиолусы; 3 человека выращивают розы и гладиолусы, но не выращивают хризантемы; 4 человека выращивают гладиолусы и хризантемы; 5 человек выращивают только орхидеи. Сколько человек выращивают розы, но не выращивают гладиолусы? Сколько человек выращивают гладиолусы, но не выращивают ни розы, ни хризантемы? Сколько человек выращивают и розы, и гладиолусы, и хризантемы?

в) Сколько чисел в множестве M, если 55 из них делятся на 6, 70 чисел – на 5, 110 чисел – на 3, 30 чисел делятся на 6, но не делятся на 5, 10 чисел делятся на 5, но не делятся на 3, а 30 чисел не делятся ни на 3, ни на 5? Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 30? Сколько чисел делятся на 15, но не делятся на 30? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся ни на 5, ни на 6?

88. а) Сколько читателей в библиотеке, если известно, что 110 из них предпочитают читать детективы; 60 человек отдают предпочтение историческим романам, из них 30 человек любят и детективы; 90 человек любят читать фантастику, из них 20 человек любят и исторические романы; 50 человек любят читать детективы и фантастику, из них 20 – любят ещё и исторические романы; 30 читателей этой библиотеки детективами, фантастикой и историческими романами не интересуются?

б) Из 300 читателей библиотеки половина предпочитает читать детективы; 125 человек любят читать исторические романы, из них 50 – любят читать и фантастику; 35 человек любят читать фантастику, но не любят ни исторические романы, ни детективы; 50 человек не любят ни детективы, ни фантастику, ни исторические романы, при этом 50 человек любят читать только детективы (фантастика и исторические романы их не интересуют). Сколько человек любят читать детективы и фантастику? Сколько всего человек любят читать фантастику? Сколько человек читают только исторические романы?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 110 чисел делятся на 3, 140 чисел – на 8, 70 чисел – на 16, 30 чисел делятся на 3, но не делятся на 8, 30 чисел не делятся ни на 3, ни на 8? Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 24? Сколько чисел делятся на 8, но не делятся ни на 3, ни на 16? Сколько чисел делятся на 24, но не делятся на 48?

89 а) Сколько школьников приняли участие в акции «Театр – детям», если известно, что 1300 из них посетили спектакли в театре; 800 – слушали лекции об истории театра, 500 из них посетили и спектакли; 1100 школьников присутствовали на творческих встречах с артистами, из них 600 – посетили спектакли, а 400 – слушали лекции; 300 школьников приняли участие во всех мероприятиях: посетили спектакли, слушали лекции и присутствовали на встречах с артистами.

б) Из 2350 школьников, принявших участие в акции «Театр – детям», 1250 слушали лекции об истории театра, 1100 присутствовали на творческих встречах с артистами, 500 посетили и спектакли в театре, но не слушали лекции и не присутствовали на встречах с артистами; 200 школьников слушали лекции и были на встречах с артистами, но не посещали спектакли; 650 школьников посетили и спектакли, и прослушали лекции. Сколько школьников посетили встречи с артистами, но не слушали лекции? Сколько школьников посетили спектакли, слушали лекции и присутствовали на встречах с артистами? Сколько школьников слушали лекции, но не были на спектаклях и встречах с артистами?

в) Сколько чисел в множестве M, если 85 из них делятся на 11, 40 чисел – на 9, 90 чисел – на 3, 15 чисел – на 99, 50 чисел делятся на 11, но не делятся на 3, а 10 чисел не делятся ни на 3, ни на 11. Сколько чисел делятся на 33? Сколько чисел не делятся на 99? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся ни на 9, ни на 11?

90 а) Сколько дней велись наблюдения за погодой, если известно, что в это время 13 дней дул восточный ветер; 11 дней атмосферное давление было ниже нормы (*меньше 760 мм рт. ст.*); 12 дней стояла ясная погода, из них 7 дней дул восточный ветер, а 6 дней давление было ниже нормы? 8 дней при восточном ветре давление было ниже нормы, из них только 5 дней были ясными. Кроме того, в период наблюдений 10 дней дул южный ветер, давление было не ниже нормы и было пасмурно.

б) Из 28 дней, в течение которых велись наблюдения за погодой, 12 дней дул восточный ветер, из них 1 день был пасмурным с атмосферным давлением выше нормы; 13 дней стояла ясная погода, из них 7 дней атмосферное давление было ниже нормы. 1 день при давлении ниже нормы был пасмурным, восточный ветер не дул. 8 дней при давлении не ниже нормы и отсутствии восточного ветра было пасмурно, а 4 дня при восточном ветре и давлении ниже нормы стояла ясная погода. Сколько дней в наблюдаемый период давление было ниже нормы? Сколько дней при восточном ветре и давлении не ниже нормы стояла ясная погода? Сколько дней при отсутствии восточного ветра стояла ясная погода?

в) Сколько чисел в множестве М, если 40 из них делятся на 3; 50 чисел – на 11; 20 чисел – на 22, из которых 15 не делятся на 3; 25 чисел делятся на 3, но не делятся на 11; 25 чисел не делятся ни на 3, ни на 11? Сколько чисел делятся на 33? Сколько чисел делятся на 33, но не делятся на 66? Сколько чисел делятся на 11, но не делятся ни на 22, ни на 33?

Задачи по теме «Алгебраические операции и структуры»

В задачах 1 – 10 определите, для каких пар $\langle *, B\rangle$ истинно высказывание «$*$ является алгебраической операцией на множестве B». Приведите обоснованное решение.

1. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – вычитание, B – множество целых чисел.

2. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $3n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – сложение, B – множество отрицательных целых чисел.

3. а) $*$ – образование наибольшего общего делителя, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. а) $*$ – образование степени: $\langle m, n\rangle \to m^2$, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n+2$, $n \in \mathbb{N}$.

5. а) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – умножение, B – множество рациональных чисел.

6. а) $*$ – образование наименьшего общего кратного, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $4n + 1, n \in \mathbb{N}$.

7. а) $*$ – сложение, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – деление, B – множество отрицательных чисел.

8. а) $*$ – деление, B – множество положительных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $5n + 2, n \in \mathbb{N}$.

9. а) $*$ – деление, B – множество всех действительных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $4n, n \in \mathbb{N}$.

10. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – вычитание, B – множество нечётных чисел.

В задачах 11 – 20 определите, относительно каких алгебраических операций – сложения, вычитания, умножения и деления – замкнуты числовые множества. При решении воспользуйтесь определением замкнутости множества.

11. а) $\{2n + 1\}$, n – целое; б) $\{1\}$.

12. а) $\{3n + 1\}$, n – целое; б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

13. а) $\{6n + 5\}$, n – целое; б) {натуральные числа}.

14. а) $\{3n + 2\}$, n – целое; б) {нечётные целые числа}.

15. а) $\{6n + 1\}$, n – целое; б) {чётные целые числа}.

16. а) $\{4n + 3\}$, n – целое; б) {положительные рациональные числа}.

17. а) $\{4n + 1\}$, n – целое; б) $\{0\}$.

18. а) $\{5n + 2\}$, n – целое; б) $\{-1, 0, 1\}$.

19. а) $\{7n + 1\}$, n – целое; б) $\{0, 1, 2\}$.

20. а) $\{5n + 1\}$, n – целое; б) $\{0, 1\}$.

В задачах 21 – 30 установите, какие из алгебраических операций являются коммутативными: а) на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$; б) на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Решение нужно обосновать.

21. а) умножение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x + 2y$.

22. а) $\langle x, y\rangle \to \text{НОК}(x, y)$; б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to 2x - y$.

23. а) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x + y$; б) вычитание.

24. а) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x^2 - y^2$; б) сложение.

25. а) умножение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to$ $\to x - y$.

26. а) сложение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to$ $\to x^3 + y^3$.

27. а) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to |x + y|$; б) умножение.

28. а) вычитание; б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x^2 +$ $+ y^2$.

29. а) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to |x - y|$; б) умножение.

30. а) $\langle x, y\rangle \to$ НОД(x, y); б) операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x^3 - y^3$.

В задачах 31 – 40 докажите или опровергните, что данные алгебраические операции являются ассоциативными в указанных множествах.

31. Операция вычитания множеств на универсальном множестве U.

32. Операция вычитания на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

33. Операция эквиваленции на множестве высказываний.

34. Операция возведения на степень в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

35. Операция импликации на множестве высказываний.

36. Операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to 2x - y$, на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

37. Операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to |x - y|$, на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

38. Операция пересечения множеств на универсальном множестве U.

39. Операция умножения в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

40. Операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x - 2y$, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В задачах 41 – 50 установите, существует ли: а) нейтральный элемент для данной операции на указанном множестве; б) симметричный данному элемент относительно данной операции на указанном множестве. В случае положительного ответа найдите эти элементы.

41. а) Для операции сложения на множестве отрицательных действительных чисел; б) множество A относительно операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ в универсальном множестве U.

42. а) Для операции объединения множеств на универсальном множестве U; б) -7 относительно сложения целых чисел.

43. а) Для операции $\langle x,y\rangle\to x+y+xy$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; б) число x относительно операции $\langle x,y\rangle\to x+y+xy$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

44. а) Для операции вычитания на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) множество B относительно операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ в универсальном множестве U.

45. а) Для операции декартова умножения множеств, элементами которых являются целые числа (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) $\frac{3}{4}$ относительно умножения рациональных чисел.

46. а) Для операции вычитания множеств на универсальном множестве U (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) $-\frac{7}{8}$ относительно умножения рациональных чисел.

47. а) Для операции $\langle x,y\rangle\to x+y-xy$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; б) число x относительно операции $\langle x,y\rangle\to x+y-xy$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

48. а) Для операции возведения в степень на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$; б) множество A относительно операции пересечения множеств A и B на универсальном множестве U.

49. а) Для операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ на универсальном множестве U; б) число y относительно операции $\langle x,y\rangle\to x+y+xy$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

50. а) Для операции деления на множестве положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) множество B относительно операции объединения множеств A и B на универсальном множестве U.

В задачах 51 – 60 проверьте, является ли операция $*$ дистрибутивной относительно операции $\circ$ на множестве M. Для операций на универсальном множестве U ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Для операций на числовых множествах или множестве высказываний постройте аналитические рассуждения, используя определение дистрибутивной операции.

51. $*$ – деление, $\circ$ – сложение, M – множество положительных чисел.

52. $*$ – вычитание, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество.

53. $*$ – вычитание, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

54. $*$ – объединение, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество.

55. $*$ – пересечение, $\circ$ – объединение , $M = U$ – универсальное множество.

56. $*$ – сложение, $\circ$ – вычитание, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

57. $*$ – деление, $\circ$ – умножение, M – множество положительных чисел.

58. $*$ – конъюнкция, $\circ$ – импликация, M – множество высказываний.

59. $*$ – дизъюнкция, $\circ$ – конъюнкция, M – множество высказываний.

60. $*$ – возведение в степень, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Докажите, что операция $*$ дистрибутивна справа.

В задачах 61 – 70 задайте множество $\mathbb{Z}_k$ перечислением элементов, выполните следующее задание. Множество $\mathbb{Z}_k$ состоит из чисел $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Операции сложения и умножения определяются так: суммой чисел a и b называют остаток от деления $a + b$ на k, а произведением этих чисел – остаток от деления $a \cdot b$ на k. Докажите, что сложение и умножение являются алгебраическими операциями в $\mathbb{Z}_k$. Составьте таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}_k$. Коммутативны ли эти операции в $\mathbb{Z}_k$? Какой элемент нейтрален относительно сложения, а какой относительно умножения? Найдите элемент, противоположный элементу $k-2$. Найдите элемент, обратный элементу $k-1$. Ассоциативны ли сложение и умножение в $\mathbb{Z}_k$? Проверьте, является ли $\mathbb{Z}_k$ полем или только кольцом.

61. $k = 11$.	66. $k = 12$.
62. $k = 5$.	67. $k = 9$.
63. $k = 6$.	68. $k = 3$.
64. $k = 7$.	69. $k = 10$.
65. $k = 4$.	70. $k = 8$.

Задачи по теме «Преобразования выражений и приемы быстрого счета»

Найдите значение выражения, используя приемы быстрого счета.

1. а) $(7 \cdot 1\frac{1}{2})^2 + 69 \cdot 2 - 6{,}5^2$; б) $(78 \cdot 82 - 53^2): 15$.
2. а) $25 \cdot 28 - (26 \cdot 1\frac{1}{2})^2 + 29 \cdot 11$; б) $(3{,}7 \cdot 4{,}3 - 2{,}8^2)125$.
3. а) $(22 \cdot 1\frac{1}{4})^2 - 13 \cdot 2\frac{1}{2} + 11,5^2$; б) $\frac{3}{4}(28^2 + 37 \cdot 43 - 12)$.
4. а) $2(36 \cdot 2\frac{1}{2})^2 + 9 \cdot 82 - 12{,}5^2$; б) $75(54 \cdot 46 - 19^2)$.
5. а) $4 \cdot 33 - (1\frac{1}{2} \cdot 44)^2 + 16 \cdot 24$; б) $(35^2 - 23^2): 5$.
6. а) $(18 \cdot \frac{3}{4} - 3{,}5)^2 + 28 \cdot 8$; б) $(63 \cdot 57 - 27^2)15$.
7. а) $9\left(34 \cdot 1\frac{1}{4}\right)^2 - 49 \cdot 2 + 3{,}5^2$; б) $(77 \cdot 83 + 26^2): 1\frac{1}{2}$.
8. а) $5 \cdot 58 \cdot 62 + (70 \cdot \frac{3}{4})^2$; б) $(6{,}6^2 - 5{,}4^2)15$.
9. а) $(13 \cdot 1\frac{1}{2} + 134 \cdot \frac{3}{4})^2 - 25^2 \cdot 8$; б) $(89 \cdot 91 - 58^2): 5$.
10. а) $12{,}5^2 \cdot 4 \cdot 11 + 44 \cdot 36 + (\frac{3}{4} \cdot 24\,)^2$; б) $(37 \cdot 19 - 37^2): 1\frac{1}{2}$.

Задачи по теме «Отношение делимости на числовых множествах»

В задачах 1 – 20 докажите, используя метод математической индукции, делимость выражений на заданное число при любом натуральном значении переменной n.

1. а) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) \vdots 2$; б) $(n^4 - n^2) \vdots 12$; в) $(6^{n+2} + 7^{2n+1}) \vdots 43$; г) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$; д) $(3^{2n+1} + 40n - 67) \vdots 64$.	2. а) $(n^3 + 11n) \vdots 3$; б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 4$; в) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \vdots 9$; г) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$; д) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

3. а) $(n^3+2n) \vdots 3$; б) $(n^4+6n^3+11n^2+6n) \vdots 24$; в) $(3^{2n+1}+1) \vdots 4$; г) $(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}) \vdots 37$; д) $(4\cdot 6^n+5n-4) \vdots 5$.	4. а) $(n^3-7n+6) \vdots 6$; б) $(2n^2+n)(7n+1) \vdots 3$; в) $(8\cdot 2^{3n}-1) \vdots 7$; г) $(5^{n+3}\cdot 2^n-125) \vdots 45$; д) $(3^{2n+2}-8n-9) \vdots 64$.
5. а) $(n^3+3n^2+5n) \vdots 3$; б) $n^2(n^2-1) \vdots 4$; в) $(49^n-1) \vdots 6$; г)$(3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-2^{2n}\cdot 3^{3n+2}) \vdots 1053$; д) $(7^n+3n-1) \vdots 9$.	6. а) $(n^3+5n) \vdots 3$; б) $(n^6-3n^5+6n^4-7n^3+$ $+5n^2-2n) \vdots 24$; в) $(7^{2n}-1) \vdots 8$; г) $(2\cdot 7^n+1) \vdots 3$; д) $(4^n+15n-1) \vdots 3$.
7. а) $n(14n^2+9n+1) \vdots 6$; б) $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3) \vdots 9$; в) $(36^n-1) \vdots 5$; г) $(11^{n+1}+12^{2n-1}) \vdots 133$; д) $(9^{n+1}-18n-9) \vdots 18$.	8. а) $n(2n^2-3n+1) \vdots 6$; б) $(n^7-n) \vdots 7$; в) $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 19$; г) $(6^{2n}-1) \vdots 35$; д) $(9^n-8n-1) \vdots 8$.
9. а) $(n^5-n) \vdots 5$; б) $(2n^3+3n^2+7n) \vdots 3$; в) $(5^{2n-1}+1) \vdots 2$; г) $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$; д) $(4^n+15n-1) \vdots 9$.	10. а) $(n^3+5n) \vdots 6$; б) $(2n^2+n)(7n+1) \vdots 6$; в) $(3^{2n+1}+5) \vdots 8$; г) $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}) \vdots 17$; д) $(7^n+3n-1) \vdots 3$.

В задачах 11 – 20 вместо $*$ впишите цифры так, чтобы полученное число делилось на заданное по условию число. Ответ обоснуйте.

11. $3324*2$ – на 4; $107*25$ – на 3; $341*0*1$ – на 9.
12. $2477**0$ – на 25; $158*234$ – на 3; $117*9*0$ – на 9.
13. $6771*4$ – на 4; $807*143$ – на 3; $45*072*7$ – на 9.
14. $919*2*0$ – на 25; $572*711$ – на 3; $23*4*27$ – на 9.
15. $5353*6$ – на 4; $802*611$ – на 3; $32*22*45$ – на 9.
16. $7712**5$ – на 25; $34*1178$ – на 3; $161*7*32$ – на 9.
17. $9752*8$ – на 4; $551*772$ – на 3; $17*100*9$ – на 9.
18. $*1156*0$ – на 25; $608*322$ – на 3; $700*17*3$ – на 9.
19. $256*4*$ – на 4; $421*9022$ – на 3; $334*22*4$ – на 9.
20. $*25755*$ – на 25; $190*233$ – на 3; $228*119*$ – на 9.

В задачах 21 – 30, не находя значения выражения, выясните, делится ли оно на заданное число d. Ответ обоснуйте.

21. $d = 12$. а) $18936 + 23986 + 93458$; б) $66389 - 13466 + 66144$; в) $3179 \cdot 3993 \cdot 8788$; г) $3388 \cdot 4628 \cdot 8372$; д) $8366 \cdot 4539 \cdot 4418$.	26. $d = 18$. а) $16020 + 18026 + 15256$; б) $9846 + 6086 - 4808$; в) $8591 \cdot 6422 \cdot 3267$; г) $2314 \cdot 6591 \cdot 6591$; д) $3179 \cdot 4539 \cdot 6270$.
22. $d = 20$. а) $3390 + 5790 + 19580$; б) $23600 + 12784 - 12464$; в) $4732 \cdot 3971 \cdot 3115$; г) $5915 \cdot 10082 \cdot 15842$; д) $2890 \cdot 3179 \cdot 5766$.	27. $d = 24$. а) $2136 + 2338 + 2390$; б) $9240 + 6866 - 5378$; в) $3872 \cdot 6241 \cdot 23763$; г) $13706 \cdot 7436 \cdot 2937$; д) $8525 \cdot 3124 \cdot 3042$.
23. $d = 28$. а) $4986 + 3388 + 4758$; б) $48408 + 17444 - 21864$; в) $1309 \cdot 1749 \cdot 5340$; г) $5041 \cdot 2366 \cdot 1378$; д) $1958 \cdot 3266 \cdot 4725$.	28. $d = 36$. а) $6069 + 6984 + 7692$; б) $4428 + 16412 - 5288$; в) $7921 \cdot 2314 \cdot 2178$; г) $4056 \cdot 5041 \cdot 5577$; д) $2379 \cdot 3549 \cdot 3916$.
24. $d = 40$. а) $6770 + 7120 + 9870$; б) $5890 + 6360 - 3570$; в) $3916 \cdot 7921 \cdot 9790$; г) $8281 \cdot 5432 \cdot 4615$; д) $9295 \cdot 5538 \cdot 3724$.	29. $d = 42$. а) $6186 + 6678 + 5196$; б) $13484 + 10416 - 11258$; в) $5070 \cdot 5785 \cdot 6853$; г) $7921 \cdot 5607 \cdot 3380$; д) $2769 \cdot 3692 \cdot 5467$.
25. $d = 45$. а) $7625 + 4815 + 7185$; б) $87750 + 19850 - 13235$; в) $4563 \cdot 5041 \cdot 9295$; г) $3721 \cdot 4539 \cdot 7455$; д) $6162 \cdot 5538 \cdot 3355$.	30. $d = 50$. а) $8460 + 13350 + 39090$; б) $22800 + 32720 - 31170$; в) $2209 \cdot 3382 \cdot 4225$; г) $3355 \cdot 3718 \cdot 9295$; д) $5043 \cdot 7810 \cdot 9165$.

В задачах 31 – 40 определите истинность высказываний. Будут ли в указанном перечне высказываний взаимно обратные и взаимно противоположные?

31. а) «Если число не делится на 3 и на 5, то оно не делится на 15»; б) «Если число не делится на 3 или на 5, то оно не делится на 15»; в) «Если число делится хотя бы на одно из чисел – 3 или 5, то оно делится на 15»; г) «Если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15».

32. а) «Если число делится на 4 и на 12, то оно делится на 36»; б) «Если число делится или на 4, или на 12, то оно делится на 36»; в) «Если число не делится на 4 и на 12, то оно не делится на 36»; г) «Если число не делится хотя бы на одно из чисел – 4 или 12, то оно не делится на 36».

33. а) «Если число делится на 28, то оно делится на 4 и делится на 7»; б) «Если число делится на 28, то оно делится на 4 или делится на 7»; в) «Если число не делится на 28, то оно не делится на 4 и не делится на 7»; г) «Если число не делится на 28, то оно не делится на 4 или не делится на 7».

34. а) «Если число не делится на 12 и на 8, то оно не делится на 24»; б) «Если число не делится на 12 или на 8, то оно не делится на 24»; в) «Если число делится хотя бы на одно из чисел – 12 или 8, то оно делится на 24»; г) «Если число делится на 12 и на 8, то оно делится на 24».

35. а) «Если число делится на 4 и на 9, то оно делится на 36»; б) «Если число делится или на 4, или на 9, то оно делится на 36»; в) «Если число не делится на 4 и на 9, то оно не делится на 36»; г) «Если число не делится хотя бы на одно из чисел – 4 или 9, то оно не делится на 36».

36. а) «Если число не делится на 24, то оно не делится на 12 и не делится на 8»; б) «Если число не делится на 24, то оно не делится на 12 или не делится на 8»; в) «Если число делится на 24, то оно делится на 12 или делится на 8»; г) «Если число делится на 24, то оно делится и на 12, и на 8».

37. а) «Если число делится на 4 и на 8, то оно делится на 32»; б) «Если число делится или на 4, или на 4, то оно делится на 32»; в) «Если число не делится на 4 и на 8, то оно не делится на 32»; г) «Если число не делится хотя бы на одно из чисел – 4 или 8, то оно не делится на 32».

38. а) «Если число не делится на 9 и на 2, то оно не делится на 18»; б) «Если число не делится на 9 или на 2, то оно не делится на 18»; в) «Если число делится хотя бы на одно из чисел – 9 или 2, то оно делится на 18»; г) «Если число делится на 9 и на 2, то оно делится на 18».

39. а) «Если число делится на 26, то оно делится на 2 и делится на 13»; б) «Если число делится на 26, то оно делится на 2 или делится на 13»; в) «Если число не делится на 26, то оно не делится на 2 и не делится на 13»; г) «Если число не делится на 26, то оно не делится на 2 или не делится на 13».

40. а) «Если число не делится на 42, то оно не делится на 6 и не делится на 14»; б) «Если число не делится на 42, то оно не делится на 6 или не делится на 14»; в) «Если число делится на 42, то оно делится на 6 или делится на 14»; г) «Если число делится на 42, то оно делится и на 6, и на 14».

Задачи по теме «Различные методы решения квадратных уравнений»

Часть А

1. Решите уравнения:

а) $2x^2 - 18 = 0$;	а) $3x^2 - 12 = 0$;
б) $x^2 + 2x = 0$;	б) $x^2 - 3x = 0$;
в) $4x^2 = 0$;	в) $-7x^2 = 0$;
г) $4x^2 - 11 = x^2 - 11 + 9x$;	г) $7x^2 + 3 = 2x^2 + 3x + 3$.
д) $x^2 + 16 = 0$;	д) $2{,}7x^2 = 0$;
е) $6x^2 - 18 = 0$;	е) $x^2 - 5x = 0$;
ж) $4x^2 + 36 = 0$;	ж) $6x - 3x^2 = 0$;
з) $3{,}6x^2 = 0$;	з) $12 + 4x^2 = 0$;
и) $-\frac{3}{7}x^2 = 0$;	и) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6} = 0$;
к) $\frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7} = 0$.	к) $-\frac{2}{3}x^2 = 0$.

2. Найдите корни уравнений:

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$;	а) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
б) $x^2 + 9x = 0$;	б) $x^2 - 5x = 0$;
в) $7x^2 - x - 8 = 0$;	в) $6x^2 + x - 7 = 0$;
г). $x^2 - 4x + 3 = 0$;	г) $3x^2 - 48 = 0$;
д) $2x^2 - 50 = 0$.	д) $x^2 - 6x + 5 = 0$.

3. Решите уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;	а) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
б) $y^2 + 8y + 16 = 0$;	б) $y^2 - 10y + 25 = 0$;
в) $-t^2 - 3t + 1 = 0$;	в) $-t^2 + t + 3 = 0$;
г) $3a^2 + a = 4$.	г) $2a^2 - a = 3$.

4. При каких значениях x равны значения многочленов?

$(x+1)^2$ и $7x - 3x^2$ $\qquad$ $(x-1)^2$ и $2x - 2x^2$

5. Определите значения y, при которых верны равенства:

$y^2 - \frac{9y-2}{7} = 0$. $\qquad$ $y^2 - \frac{11y-2}{9} = 0$.

6. Один из корней данного уравнения равен 4. Найдите второй корень и число a:

$x^2 + x - a = 0$ $\qquad$ $x^2 - ax - 8 = 0$

7. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны -5 и 8, 9 и -4.

8. Решите уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

$x^2 + 3x - 18 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x - 24 = 0$

9. Решите задачи.

а) Одно из двух натуральных чисел больше другого на 5. Найдите эти числа, если их произведение равно 24.	а) Одно из двух натуральных чисел меньше другого на 6. Найдите эти числа, если их произведение равно 27.
б) Длина прямоугольника на 5 см больше ширины, а его площадь равна 36 см^2. Найдите стороны прямоугольника.	б) Ширина прямоугольника на 6 см меньше длины, а его площадь равна 40 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

10. Запишите обратную теорему Виета для данного уравнения и найдите подбором его корни:

$x^2 + 12x + 20 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 7x + 12 = 0$

Часть Б

1. Решите уравнения:

а) $9x^2 - 4 = 0$;
б) $2x^2 = 3x$;
в) $2 = 7x^2 + 2$;
г) $0{,}2x - 1{,}8x^2 = 0$;
д) $1{,}2a^2 - 3{,}6 = 0$;
е) $(2x + 1)(x - 4) =$
$= (x - 2)(x + 2)$;
ж) $(x + 0{,}1)(x - \frac{1}{6})(x +$
$+ 3{,}9) = 0$;
з) $3x(2x - 0{,}1) = 0$;
и) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
к) $x^2 + 2x - 63 = 0$.

а) $4x^2 - 25 = 0$;
б) $3x^2 = -2x$;
в) $9x^2 - 1 = -1$;
г) $6z - 0{,}3z^2 = 0$;
д) $\frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{27} = 0$;
е) $(2x - 9)(x + 1) = (x - 3)(x + 3)$;
ж) $(x - 0{,}3)(x + \frac{1}{7})(x + 2{,}1) = 0$;
з) $5x(4x - 0{,}2) = 0$;
и) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
к) $x^2 + 18x + 65 = 0$.

2. Определите, при каком значении a один из корней данного уравнения равен 1:

$3x^2 - ax = 0$

$3x^2 - a = 0$

3. Решите уравнения:

а) $x^2 + 7x - 14 = 0$;
б) $9y^2 + 6y + 1 = 0$;
в) $-2t^2 + 8t + 2 = 0$;
г) $a + 3a^2 = -11$.

а) $x^2 - 10x - 39 = 0$;
б) $4y^2 - 4y + 1 = 0$;
в) $-3t^2 - 12t + 6 = 0$;
г) $4a^2 + 5 = a$.

4. При каких значениях x равны значения многочленов?

$(2 - x)(2x + 1) = (x - 2)(x + 2)$

$(1 - 3x)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)$

5. Определите значения y, при которых верны равенства:

$$\frac{y^2 + 6y}{6} - \frac{2y + 3}{2} = 12$$

$$\frac{y^2 + 10y}{10} - \frac{2y + 5}{2} = 20$$

6. Выполните задание.

Один из корней уравнения $2x^2 + 10x + q = 0$ на 3 больше другого. Найдите свободный член q.

Один из корней уравнения $3x^2 - 21x + q = 0$ меньше другого на 1. Найдите свободный член q.

7. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны -3 и $-\frac{1}{3}$, -2 и $-\frac{1}{2}$.

8. Найдите подбором корни:

$x^2 - x - 20 = 0$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

9. Решите задачи.

а) В прямоугольном треугольнике один из катетов на 7 см больше другого. Найдите периметр треугольника, если его гипотенуза равна 13 см.

б) Найдите длины сторон прямоугольника, периметр которого равен 32 см, а площадь равна 55 см^2.

а) Одна из сторон прямоугольника на 2 см меньше другой, а его диагональ равна 10 см. Найдите периметр прямоугольника.

б) Найдите длины сторон прямоугольника, площадь которого равна 51 см^2, а периметр равен 40 см.

10. Один из корней данного уравнения равен 2. Найдите второй корень и коэффициент a:

$x^2 + ax - 12 = 0$

$x^2 - 7x + a = 0$

Часть B

1. Решите уравнения:

а) $-0{,}2x^2 + 4 = 0$;
б) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$;
в) $(2x - 1)^2 = 1 - 4x$;
г) $3 - (4x + 1)(3 - x) = x^2$;
д) $6{,}3x - 0{,}7x^2 = 0$;
е) $1{,}4a^2 - 4{,}2 = 0$;
ж) $-4x = 7x^2$;
з) $x^2 + x = 90$;
и) $\frac{1}{5}x^2 + x - 10 = 0$;
к) $x^2 + 4x + 5 = 0$.

а) $3 - 0{,}4x^2 = 0$;
б) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$;
в) $(3x + 2)^2 = 4 + 12x$;
г) $x^2 - (2x - 3)(1 - x) = 3$;
д) $8y + 0{,}4y^2 = 0$;
е) $\frac{1}{5}u^2 - \frac{9}{20} = 0$;
ж) $x^2 - x = 110$;
з) $-3x^2 = 11x$;
и) $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$;
к) $x^2 - 2x + 3 = 0$.

2. Определите, при каком значении a корни данного уравнения являются противоположными числами:

$x^2 + (a - 2)x + a - 6 = 0$

$x^2 + (a + 1)x + a - 8 = 0$

3. Решите уравнения:

а) $x^2 + x - 72 = 0$;
б) $2y^2 - 2y + 0{,}5 = 0$;
в) $-15 = 3t(2 - t)$;
г) $\frac{1}{3}a = a^2 + 4$.

а) $x^2 - 5x - 84 = 0$;
б) $8y^2 + 4y + 0{,}5 = 0$;
в) $10t = 5(t^2 - 4)$;
г) $\frac{1}{7}a = a^2 + 1$.

4. При каких значениях x равны значения многочленов?

$x^2 - \frac{3x-1}{2}$ и $x - 1$ $\qquad$ $x^2 - \frac{3x-1}{2}$ и $2x + 4$

5. Определите значения x, при которых верно равенство:

$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{1-x}{2}$ $\qquad$ $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{2x-1}{4}$

6. Выполните задание.

Разность корней уравнения $2x^2 - 5x + c = 0$ равна 1,5. Найдите c.

Разность корней уравнения $2x^2 - 3x + c = 0$ равна 2,5. Найдите c.

7. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

$2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$

8. Найдите подбором корни:

$x^2 + 20x + 36 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 14x + 24 = 0$

9. Решите задачи.

а) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 23 см. Найдите катеты треугольника, если его гипотенуза равна 17 см.

б) От прямоугольного листа картона длиной 16 см отрезали квадрат, сторона которого равна ширине листа. Площадь оставшегося прямоугольника равна 60 см^2. Найдите ширину листа картона.

а) В прямоугольном треугольнике сумма гипотенузы и одного из катетов равна 32 см, а второй катет равен 24 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

б) Когда от квадратного листа фанеры отрезали прямоугольную полоску шириной 2 м, площадь листа составила 24 м^2. Найдите первоначальную площадь листа.

10. Один из корней данного уравнения в 2 раза больше другого. Найдите корни уравнения и коэффициент k:

$2x^2 - 3x + k = 0$ $\qquad$ $2x^2 - kx + 4 = 0$

Задачи по теме «Применение квадратных уравнений»

Часть А

1. Решите уравнения:

а) $\frac{x^2-6}{x-3} = \frac{x}{x-3}$;
б) $\frac{20}{x} = 9 - x$;
в) $\frac{x-4}{x} = \frac{2x+10}{x+4}$.

а) $\frac{x^2+2x}{x+4} = \frac{8}{x+4}$;
б) $\frac{10}{x} = 7 - x$;
в) $\frac{x+3}{x} = \frac{2x+10}{x-3}$.

2. При каких значениях x значение функции

$y = \frac{3x+2}{x-1}$ равно 8?

$y = \frac{2x+4}{x-2}$ равно 10?

3. Решите задачи.

а) Числитель обыкновенной дроби на 2 меньше знаменателя. Если числитель увеличить на 1, а знаменатель увеличить на 3, то получится дробь, равная данной. Найдите данную дробь.

б) Произведение двух натуральных чисел равно 273. Найдите эти числа, если одно из них на 8 больше другого.

в) Площадь прямоугольника 480 дм^2. Найдите его стороны, если периметр прямоугольника равен 94 дм.

а) Знаменатель обыкновенной дроби на 1 больше ее числителя. Если к числителю дроби прибавить 2, а к знаменателю – 3, то получится дробь, равная данной. Найдите данную дробь.

б) Одно из натуральных чисел на 7 меньше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 330.

в) Площадь прямоугольного треугольника 180 см^2. Найдите катеты треугольника, если их сумма 39 см.

4. При каком значении y:

сумма дробей $\frac{1}{y}$ и $\frac{y}{y-1}$ равна их произведению?

разность дробей $\frac{1}{y}$ и $\frac{y}{y+1}$ равна их произведению?

5. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x^2}{x+6} = \frac{1}{2}$;
б) $\frac{x^2-x}{x+3} = \frac{12}{x+3}$.

а) $\frac{x^2}{x+3} = \frac{1}{4}$;
б) $\frac{x^2-10}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$.

6. Катер прошел 80 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 9 часов.

Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч.

7. Функция задана формулой

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$$

$$y = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

Определите, при каком значении x значение данной функции равно нулю.

8. Решите уравнения:

$$\frac{3}{a+2} + 1 = \frac{4}{a^2+4a+4}$$

$$\frac{2}{a-3} + 1 = \frac{15}{a^2-6a+9}$$

9. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 - 6x + 9 = 0$ имеет одно решение?

10. Вычислите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - 2x - -6 = 0$.

Часть Б

1. Решите уравнения:

а) $\frac{x^2-12}{x-3} = \frac{x}{3-x}$;

б) $\frac{2x^2-5x+2}{x-2} = 4x + 1$;

в) $\frac{2x-3}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{4x-6}{x^2+2x}$.

а) $\frac{x^2-8x}{5-x} = \frac{15}{x-5}$;

б) $\frac{2x^2+x-1}{x+1} = 3x + 1$;

в) $\frac{3x+1}{x} + \frac{5}{x-2} = \frac{6x-2}{x^2-2x}$.

2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

$y = \frac{x-8}{x-20}$ и $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{x-1}{x-2}$ и $y = \frac{6}{x}$

3. Решите задачи:

а) Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их сумма равна 46 см, а гипотенуза – 34 см.

б) Моторная лодка прошла 60 км по течению реки и 36 км по озеру, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость

а) Найдите стороны прямоугольника, если их разность равна 14 дм, а диагональ прямоугольника – 26 дм.

б) Расстояние между пристанями равно 112 км. Двигаясь по течению, катер прошел лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

это расстояние на 1 час быстрее, чем занял обратный путь. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

4. При каких значениях y:

сумма дроби $\frac{y+1}{y-1}$ и дроби, обратной данной, равна 2,5?

сумма дроби $\frac{y+3}{y-3}$ и дроби, обратной данной, равна 1, 5?

5. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{3x+1}{x-2} = \frac{2x-10}{x+1}$;
б) $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$;
в) $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3x+2}{x}$;
г) $\frac{4x+1}{x-3} = \frac{3x-8}{x+1}$;
д) $\frac{y+3}{y-3} = \frac{2y+3}{y}$;
е) $\frac{5y-2}{2y+1} = \frac{3y+2}{y+3}$;
ж) $\frac{4x^2-11x-3}{3-x} = 0$;
з) $\frac{3}{x-2} = 2x+1$;
и) $\frac{9x+3}{1+3x} = x-7$;
к) $\frac{x^2}{3-x} = \frac{2x}{3-x}$.

а) $\frac{4x-1}{x+2} = \frac{2x+12}{x-1}$;
б) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$;
в) а) $\frac{5x-7}{x-3} = \frac{4x-3}{x}$;
г) $\frac{5x-2}{x+2} = \frac{6x-21}{x-3}$;
д) $\frac{y+4}{y+2} = \frac{2y-1}{y}$;
е) $\frac{2y-5}{y+5} = \frac{3y+21}{2y-1}$;
ж) $\frac{3x^2-5x-2}{2-x} = 0$;
з) $\frac{4x+2}{1+2x} = x-6$;
и) $\frac{9}{x+3} = 2x-1$;
к) $\frac{x^2}{2-x} = \frac{3x}{2-x}$.

6. Решите задачи.

Из города в село, расстояние до которого равно 120 км, выехал велосипедист. Через 6 часов вслед за ним выехал мотоциклист, скорость которого на 10 км/ч больше скорости велосипедиста. Определите скорости велосипедиста и мотоциклиста, если в село они прибыли одновременно.

Расстояние 700 км экспресс проходит на 4 часа быстрее товарного поезда, так как его скорость больше скорости товарного поезда на 20 км/ч. Определите скорость каждого из поездов, если известно, что они движутся с постоянной скоростью без остановок.

7. Функция задана формулой

$y = \frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$ $\qquad$ $y = \frac{2x^2-7x+6}{x^2-4}$

Определите, при каком значении x график этой функции пересекается с прямой $y = 1$.

8. Решите уравнения:

$\frac{1}{a^2-4a+4} - \frac{4}{a^2-4} = \frac{1}{a+2}$ $\qquad$ $\frac{4}{a^2-4} - \frac{1}{a^2+4a+4} = \frac{1}{a-2}$

9. При каком значении параметра a уравнение $x^2 + ax + \frac{1}{4} = 0$ имеет одно решение?

10. Вычислите: а) $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + x - 5 = 0$; б) $x_1^3 + x_2^3$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 2x - 9 = 0$.

Часть В

1. Решите уравнения:

а) $\frac{3x^2+2x-1}{x+1} = 5$; $\qquad$ а) $\frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$;

б) $\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x+4} = \frac{32}{x^2-16}$; $\qquad$ б) $\frac{x}{x+3} - \frac{4}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$;

в) $\frac{1}{2x-x^2} + \frac{x-4}{2x+x^2} = \frac{2}{4-x^2}$. $\qquad$ в) $\frac{x-2}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-1}$.

2. Найдите координаты точек пересечения с осью абсцисс графика функции:

$y = \frac{x^3-3x^2+2x}{x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{x-1}{x-2}$ и $y = \frac{6}{x}$

3. Решите задачи.

а) Путь от A до B, равный 20 км, турист должен был пройти за определенное время. Однако он был задержан с выходом из A на 1 час, поэтому ему пришлось увеличить скорость на 1 км/ч, чтобы ликвидировать опоздание. С какой скоростью должен был идти турист?

б) Разность кубов двух натуральных чисел равна 1603. Найдите эти числа, если их разность равна 7.

а) На участке пути длиной 300 км поезд увеличил скорость на 10 км/ч, в результате чего прибыл на конечную станцию на 1 час раньше, чем планировалось по расписанию. С какой скоростью должен был идти поезд по расписанию?

б) Сумма кубов двух натуральных чисел равна 1547. Найдите эти числа, если их сумма равна 17.

4. При каком значении y равны значения выражений?

$\frac{3y+1}{9y^2+3y+1} - \frac{1}{3y-1}$ и $\frac{3y^2-13y+1}{27y^3-1}$

$\frac{2y-1}{4y^2-2y+1} + \frac{1}{2y+1}$ и $\frac{6y^2+y+2}{8y^3+1}$

5. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x^2-12}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 1$;

б) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+x}$;

в) $\frac{2y^2+5y-2}{y^2-4} = 1$;

г) $\frac{2x^2+x-1}{2x-1} = 2$;

д) $\frac{x^2+3x}{x-4} = \frac{x^2-x}{4-x}$;

е) $\frac{x^2-1}{x+5} = \frac{5-x}{x+5}$;

ж) $\frac{x^2-6x}{3x-1} = \frac{3x-4}{1-3x}$;

з) $\frac{x^2+3x}{2} + \frac{x-3x^2}{8} = 2x$;

и) $\frac{2x+1}{3} - \frac{4x-x^2}{12} = \frac{x^2-4}{9}$;

к) $(x+2)^2 + \frac{24}{x^2+4x} = 18$.

а) $\frac{x^2-3}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} = 1$;

б) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$;

в) $\frac{3y^2+y-24}{9-y^2} = -2$;

г) $\frac{3x^2+11x-4}{3x-1} = 3$;

д) $\frac{x^2-2x}{x+4} = \frac{x-4}{x+4}$;

е) $\frac{x^2-2x}{2x-1} = \frac{4x-3}{1-2x}$;

ж) $\frac{2x^2+3x}{3-x} = \frac{x-x^2}{x-3}$;

з) $\frac{3x-x^2}{2} + \frac{2x^2-x}{6} = x$;

и) $\frac{3x+1}{4} - \frac{7x-x^2}{10} = \frac{x^2-1}{8}$;

к) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$.

6. Решите задачи.

а) Два слесаря, работая совместно, могут выполнить задание на 8 дней быстрее, чем один первый слесарь, и на 18 дней быстрее, чем один второй. Сколько дней потребуется слесарям на совместное выполнение задания?

б) Высота h (в метрах), на которой через t секунд окажется брошенное вертикально вверх тело, вычисляется по формуле $h = v_0t - 5t^2$, где v_0 – начальная скорость, м/с. В какой момент времени тело окажется на высоте 240 м, если за 2 с оно поднялось вверх на 120 м?

а) Мастеру на выполнение заказа потребуется на 5 дней меньше, чем его ученику, но при совместной работе они выполнят заказ на 4 дня быстрее, чем мастер, работающий в одиночку. За сколько дней выполнит заказ мастер, работая в одиночку?

б) Высота h (в метрах), на которой через t секунд окажется брошенное вертикально вверх тело, вычисляется по формуле $h = v_0t - 5t^2$, где v_0 – начальная скорость, м/с. В какой момент времени тело окажется на высоте 300 м, если за 1 с оно поднялось вверх на 75 м?

7. При каких значениях a данное уравнение имеет один корень?

$\frac{x^2-8x+15}{x-a} = 0$ $\qquad$ $\frac{x^2+4x-21}{x+a} = 0$

8. Решите уравнения:

$\frac{1}{a-2} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{5}{a^3-2a^2+a-2}$ $\qquad$ $\frac{1}{a-1} - \frac{3}{a^2+2} = \frac{3}{a^3-a^2+2a-2}$

9. При каком значении параметра a уравнение $4x^2 - ax + a - 3 = 0$ имеет одно решение?

10. Известно, что: а) $x_1^2 + x_2^2 = 13$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$. Определите $x_1 + x_2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + x + a = 0$. Определите a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современном образовательном пространстве интересен и учитель-предметник, и педагог дополнительного образования, и педагог-организатор по воспитательной работе, и студент – все они должны креативно мыслить и творчески подходить к решению вопросов. Подобное мышление формируется в периоды обучения в школе и вузе.

Учебно-практическое пособие позволит приобрести практический навык в решении математических задач вычислительного характера, на доказательство, задач, требующих рассуждения, выстраивания алгоритма решения. Любое умозаключение должно быть обосновано и подтверждено теорией: определениями рассматриваемых элементов, предложениями о связях составляющих элементов, теоретическими правилами и закономерностями.

Пособие подходит для самостоятельного изучения разделов учебной программы дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов», содержит соответствующие тесты и задания для самостоятельного выполнения и самоконтроля. Усвоение будущим бакалавром рассмотренных в издании вопросов отвечает требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования и начального общего образования, предъявляемым к учителям начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Стойлова, Л. П. Теоретические основы начального курса математики / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2015. – ISBN 978-5-4468-0768-0.
2. Задачник-практикум по математике / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 208 с.
3. Лаврова, Н. Н. Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 184 с.
4. Тихомирова, С. В. Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Множества : учеб. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с. – ISBN 978-5-9984-1234-9.
5. Тихомирова, С. В. Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Целые неотрицательные числа. Величины : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : ВлГУ, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-1394-0.
6. Тихомирова, С. В. Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников : учеб. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 104 с. – ISBN 978-5-9984-1532-6.
7. Тихомирова, С. В. Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов : учеб. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 152 с. – ISBN 978-5-9984-1420-6.
8. Тихомирова, С. В. Актуальные вопросы начальной математики и методики ее преподавания : учеб.-метод. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 156 с. – ISBN 978-5-9984-1793-1.

Дополнительная литература

9. Перельман, Я. И. Быстрый счет. Тридцать простых приемов устного счета / Я. И. Перельман. – Л. : Дом занимательной науки, 1941.
10. Стойлова, Л. П. Математика : учеб. для студентов учреждений высш. проф. образования / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2002. – 424 с.

11. Гусев, В. А. Математика. Справочные материалы : кн. для учащихся / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1988. – 416 с. – ISBN 5-09-001292-X.

12. Ершова, А. И. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 8 класса / А. И. Ершова, В. В. Голобородько, А. С. Ершова. – 8-е изд., испр. и доп. – М. : Илекса, 2025. – 240 с. – ISBN 978-5-89237-307-4.

13. Жохов, В. И. Алгебра : 8-й класс: дидактические материалы : учеб. пособие / В. И. Жохов, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – 30-е изд., стер. – М. : Просвещение, 2024. – 122 с. – ISBN 978-5-09-111061-6.

14. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов [и др.]. – М. : Просвещение, 1991. – 208 с. – ISBN 5-09-002848-6.

Учебное электронное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
Алгебраический компонент

Учебно-практическое пособие

Редактор Е. А. Лебедева
Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов
Компьютерная верстка Л. В. Макаровой
Корректор Н. В. Пустовойтова
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 9 экз.

Издательство Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.