

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет  
Кафедра теоретической и прикладной механики

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Методические указания к лабораторным работам*

Составители  
А.П. ШЕВЧЕНКО  
Л.Ф. МЕТЛИНА

Владимир 2010

УДК 531 (076)

ББК 22.2/я7

Т30

Рецензент

Доктор технических наук, профессор  
Владимирского государственного университета

*Л.М. Самсонов*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Теоретическая** механика: метод. указания к лаб. работам /  
Т30 сост.: А.П. Шевченко, Л.Ф. Метлина; Владим. гос. ун-т. – Владимир:  
Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 94 с.

Составлены в соответствии с программой курса «Теоретическая механика».

Содержат методические указания к лабораторным работам. Приведены описания макетов механизмов. Дана краткая теория по разделам курса к каждой лабораторной работе. Указаны порядок выполнения работ и требования к оформлению отчетов. К каждой работе составлены контрольные вопросы. Приводится список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов дневного отделения специальностей 140211, 140500, 140501, 15090001, 190601, 190603, 200101, 200106, 220200, 220401, 220501, 240304, 240502, 270109, 280102.

Табл. 13. Ил 56. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531 (076)

ББК 22.2/я7

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение курса теоретической механики закладывает основы для решения многих научных и конструкторских вопросов в машиностроении, приборостроении, освоении космоса и других областях техники.

Знание теоретической механики позволяет инженеру исследовать и создавать оптимальные конструкции машин, приборов, сооружений, а также разрабатывать технологические процессы их изготовления.

Основная задача подготовки будущего инженера – научить его самостоятельной работе и творческому подходу при выполнении поставленной проблемы. Поэтому наряду с освоением теоретического курса студент должен на лабораторных занятиях ознакомиться с некоторыми механическими системами, конструкциями, к которым относятся макеты плоских механизмов, составных балок, плоских ферм, редукторы, планетарные механизмы и др. Решая конкретно поставленный вопрос на базе перечисленных механизмов и конструкций, студент получает навыки практического применения основных закономерностей механики для анализа и решения конкретных задач.

Выражаем большую благодарность инженеру кафедры М.В. Смольяниновой, студентам группы АС-107 С.П. Буднику, П.А. Смирнову, К.А. Царевой, А.С. Шешину, за большую работу, проделанную при подготовке и оформлении методических указаний.

## Лабораторная работа № 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**Цель работы.** Изучить способы решения задач по определению реакций связей составной конструкции.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Способы определения реакций связей составной конструкции.
3. Исследование изменения реакции заданной опоры в зависимости от параметров действия сил.
4. Последовательность выполнения лабораторной работы.
5. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет конструкции, линейка, транспортир.

#### 1. Краткая теория

##### Плоская система сил. Связи и реакции

Если твердое тело соприкасается с другими телами, которые тем или иным образом ограничивают свободу его перемещения, то такие тела по отношению к рассматриваемому называются связями, а само рассматриваемое тело называется несвободным. Действие связей на несвободные тела характеризуется силами, которые называются реакциями связей. Основные их виды представлены на рис. 1.1.

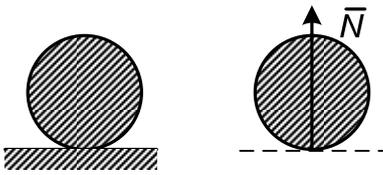
##### Проекция силы на ось

Проекция вектора силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси (рис. 1.2).

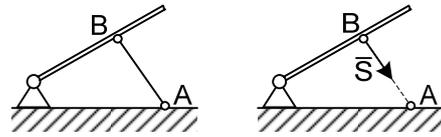
$$F_x = ab = AB_1 = F \cos \alpha .$$

1. Проекция положительна, если  $0 \leq \alpha < 90^\circ$ .
2. Проекция отрицательна, если  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ .
3. Проекция равна нулю, если  $\alpha = 90^\circ$ .

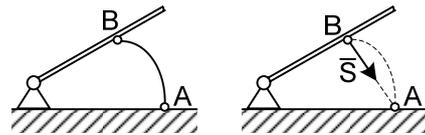
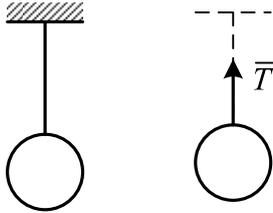
Гладкая поверхность



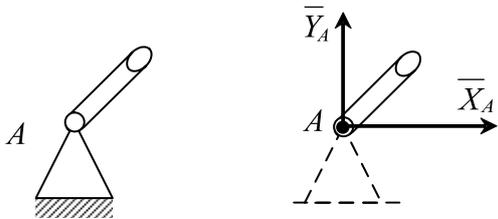
Невесомый стержень  
(прямолинейный и криволинейный)



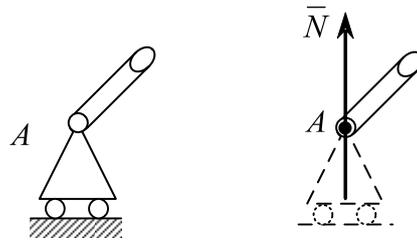
Нить, трос



Неподвижный шарнир



Подвижный шарнир



Жесткая заделка

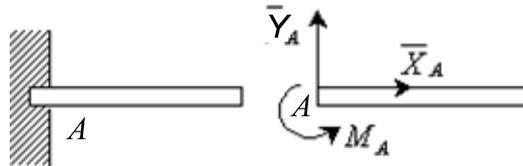


Рис. 1.1

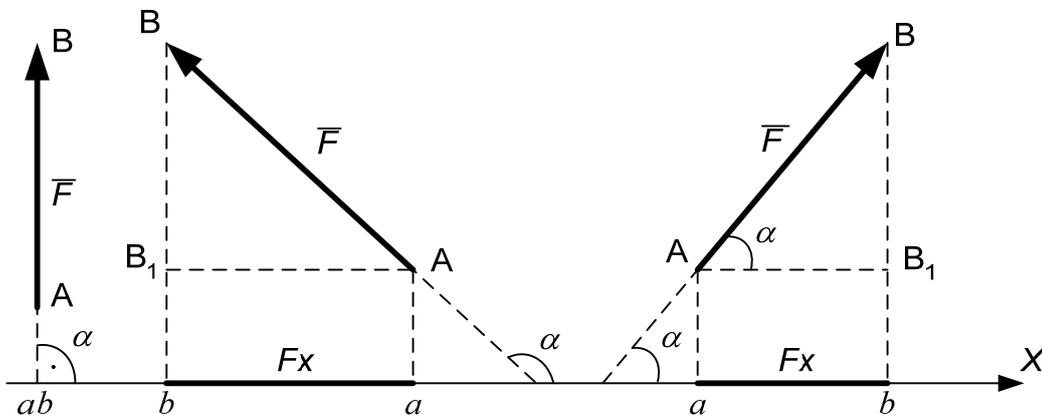


Рис. 1.2

### Момент силы относительно точки

Момент силы  $\overline{F}$  относительно точки  $O$  для плоской системы сил – это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы  $\overline{F}$  на кратчайшее расстояние  $h$  от точки  $O$  до линии действия силы  $\overline{F}$ , которое называется плечом силы (рис. 1.3)

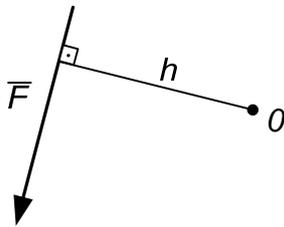


Рис. 1.3

$$m_0(\overline{F}) = Fh.$$

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, при этом  $h = 0$ .

Если сила  $\overline{F}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, то момент силы положительный, если же по ходу часовой стрелки, то момент силы отрицательный.

### Пара сил

Система двух равных по модулю параллельных и противоположно направленных сил  $\overline{F}$  и  $\overline{F}'$  называется парой сил (рис. 1.4).

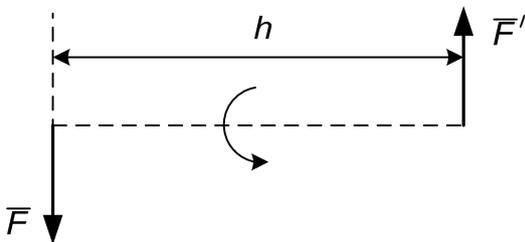


Рис. 1.4

Момент пары сил – это алгебраическая величина, равная произведению модуля одной из сил пары на кратчайшее расстояние между линиями действия сил  $h$ , которое называется плечом

$$M = Fh.$$

Момент пары сил положительный, если она стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательный, если по ходу часовой стрелки.

### Свойства пар сил

1. Алгебраическая сумма проекций пары сил на любую ось равна нулю.
2. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару относительно произвольной точки плоскости, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

## Распределенные силы

В статике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке, которые называются сосредоточенными.

В действительности обычно силы бывают приложены к какой-либо части объема тела или его поверхности, а иногда к некоторой части линии. Такую нагрузку называют распределенной. Она характеризуется интенсивностью  $q$  (рис. 1.5, 1.6).

При решении задач распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой – равнодействующей  $Q$ .

а) Равномерно распределенная нагрузка (рис. 1.5).

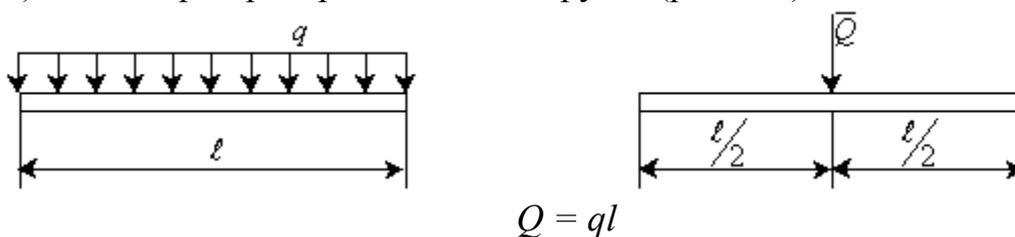


Рис. 1.5

б) Распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (рис. 1.6).

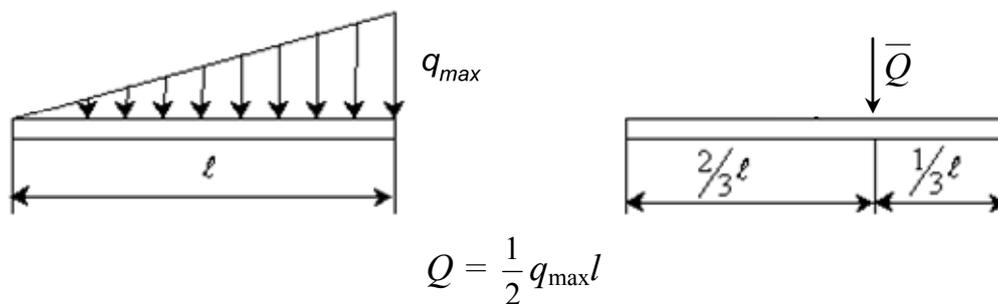


Рис. 1.6

## 2. Способы определения реакций связей составной конструкции

Дана конструкция (рис. 1.7), состоящая из двух балок  $AC$  и  $CD$ , соединенных в точке  $C$  с помощью шарнира. Вся эта система соединена с неподвижной опорой с помощью неподвижного шарнира в точке  $A$  и двух шарнирно-подвижных опор в точках  $B$  и  $D$ .

Требуется определить реакции связей в точках  $A, B, D, C$ .

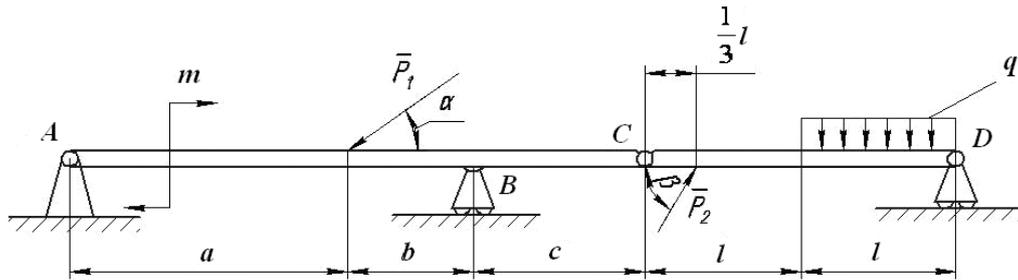


Рис. 1.7

### I способ

Заданную конструкцию разделяем на два тела  $AC$  и  $CD$ , нарушая внутреннюю связь в точке  $C$  и внешние связи в точках  $A, B, D$ . Кроме заданных сил, прикладываем к каждому телу реакции отброшенных связей: внутренних в точке  $C$  и внешних в точках  $A, B, D$ .

Реакции шарнирно-неподвижной опоры  $A$  и цилиндрического шарнира  $C$  по направлению неизвестны, поэтому их раскладываем на две составляющие вдоль положительных направлений осей:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  – в точке  $A$ ;  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  – в точке  $C$ . Реакции шарнирно-подвижных опор  $B$  и  $D$  направлены перпендикулярно к опорной плоскости и обозначены  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_D$ . Получаем два объекта равновесия: балку  $AC$  и балку  $CD$  (рис.1.8, 1.9).

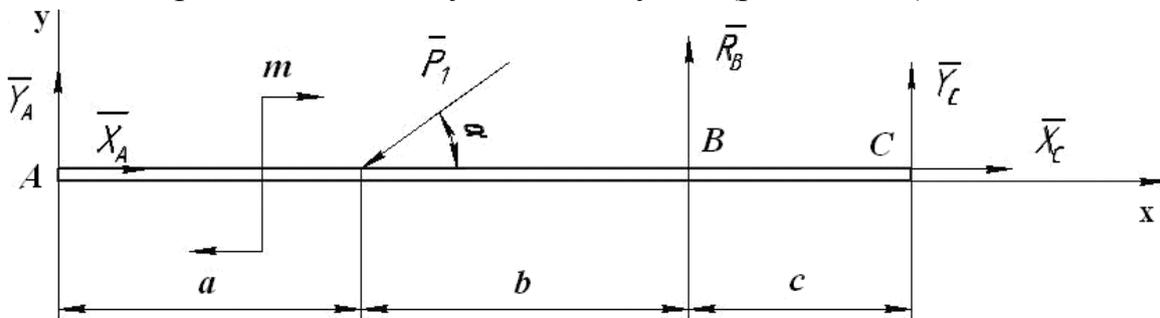


Рис. 1.8

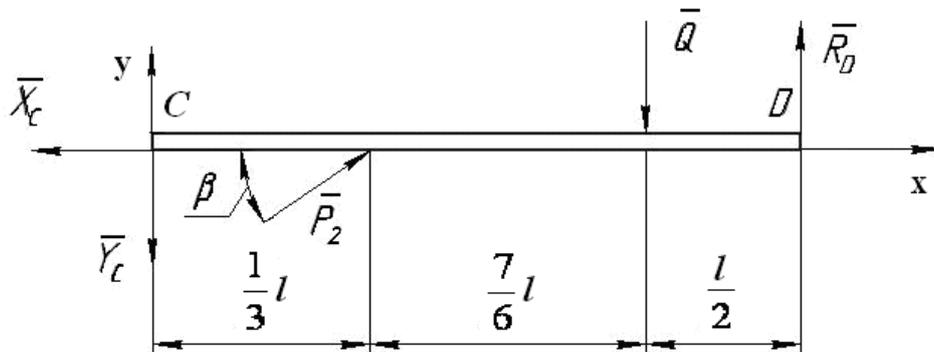


Рис. 1.9

При составлении расчетной схемы нужно учесть, что распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой  $Q = q \cdot l$ . Прикладываем этот вектор в середине отрезка действия распределенной нагрузки.

Таким образом, вся конструкция содержит шесть неизвестных -  $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{R}_B, \overline{R}_D, \overline{X}_C, \overline{Y}_C$ , для определения которых необходимо иметь шесть уравнений равновесия.

Так как каждый объект находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, то для них можно составить по три уравнения равновесия.

При составлении уравнений равновесия можно использовать одну из систем уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \Sigma F_{ix} = 0; & 2) \quad \Sigma M_A = 0; & 3) \quad \Sigma M_A = 0; \\
 \quad \Sigma F_{iy} = 0; & \quad \Sigma M_B = 0; & \quad \Sigma M_B = 0; \\
 \quad \Sigma M_A = 0; & \quad \Sigma F_{ix} = 0; & \quad \Sigma M_C = 0.
 \end{array}$$

Уравнения (1) называются основными уравнениями равновесия плоской системы сил. Центр моментов и направление координатных осей для этой системы уравнений можно выбрать произвольно без каких-либо ограничений.

При составлении уравнений (2) нужно учесть, что ось  $x$ , на которую проектируются силы, не должна быть перпендикулярна к прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

В системе уравнений равновесия (3) точки  $A, B, C$  не должны лежать на одной прямой. Для данной конструкции такая система не подходит.

В результате для объектов  $AB$  и  $CD$  получаем систему, состоящую из шести уравнений равновесия, что соответствует шести неизвестным. Задача статически определена. Решаем полученную систему уравнений и определяем неизвестные  $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{R}_B, \overline{R}_D, \overline{X}_C, \overline{Y}_C$ .

## II способ

Рассматриваем вначале равновесие всей конструкции, нарушая внешние связи (опоры  $A, B, D$ ), заменяя их действие реакциями  $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{R}_B, \overline{R}_D$  и не нарушая шарнир  $C$  (внутренняя связь). Составляем расчетную схему, которая показана на рис. 1.10.

Полученный объект содержит четыре неизвестных реакции связей и находится в равновесии под действием произвольной плоской системы

сил, для которой можно составить только три уравнения равновесия. Этих уравнений недостаточно для определения четырех неизвестных.

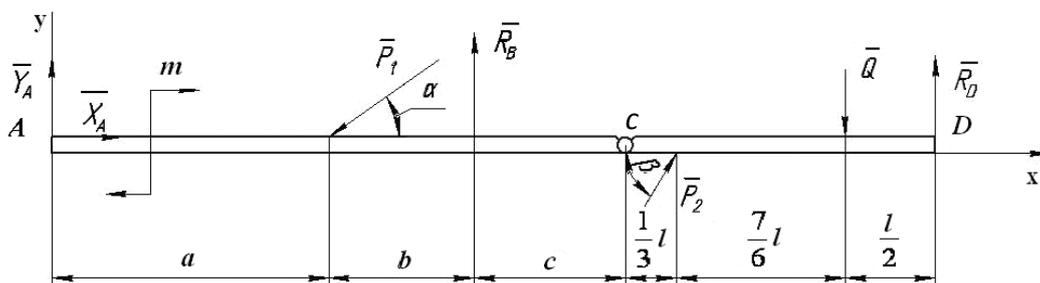


Рис. 1.10

Для их определения разделим конструкцию на две балки, нарушая цилиндрический шарнир  $C$ . Рассмотрим равновесие менее нагруженной балки, прикладывая все заданные силы, а также составляющие реакции  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  цилиндрического шарнира (рис. 1.11).

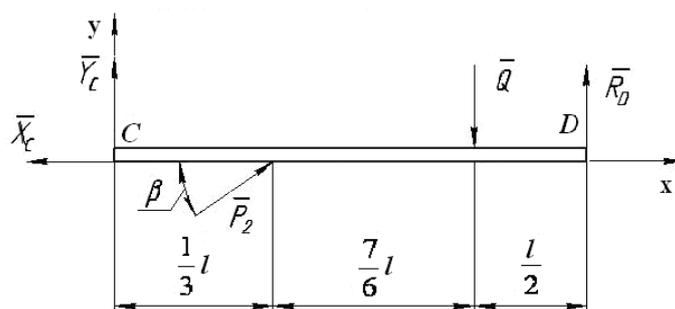


Рис. 1.11

Для вновь полученной расчетной схемы тоже составили три уравнения равновесия. Таким образом, окончательно получаем систему из шести уравнений равновесия, решая которую, определим все шесть неизвестных  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ .

### 3. Исследование изменения реакции заданной опоры в зависимости от параметров действия сил

Допустим, надо проанализировать изменение реакции шарнира  $C$  при варьировании угла  $\alpha$  (см. рис. 1.10) в пределах  $0 \leq \alpha < \pi$  с интервалом  $30^\circ$ .

Для этого решаем систему из шести составленных уравнений равновесия, из которых для заданного варианта получаем выражения составляющих  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  реакции шарнира  $C$

$$X_C = 0,5 \sin \alpha - 0,868;$$

$$Y_C = -1,6 \sin \alpha + 0,2612.$$

Давая параметру  $\alpha$  последовательные значения  $0, 30, \dots, 180$ , находим соответствующие им значения реакций  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  и полную реакцию шарнира

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2}.$$

График изменения величин  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  и  $R_C$  приведен на рис.1.12.

Анализируя графики, можно отметить, что реакция  $Y_C$  достигает максимального значения  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 180^\circ$ , а минимального – при  $\alpha = 90^\circ$ . Реакция  $X_C$  достигает максимального значения при  $\alpha = 90^\circ$ . Максимальное значение полной реакции  $R_C$  шарнира С в расчетном диапазоне  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  достигается при  $\alpha = 90^\circ$ , а минимальное значение – при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 180^\circ$ .

#### 4. Последовательность выполнения лабораторной работы

4.1. Построить в масштабе заданную схему (рис. 1.13) конструкции по макету с указанием внешней нагрузки, которую следует взять из таблицы по варианту, выданному преподавателем.

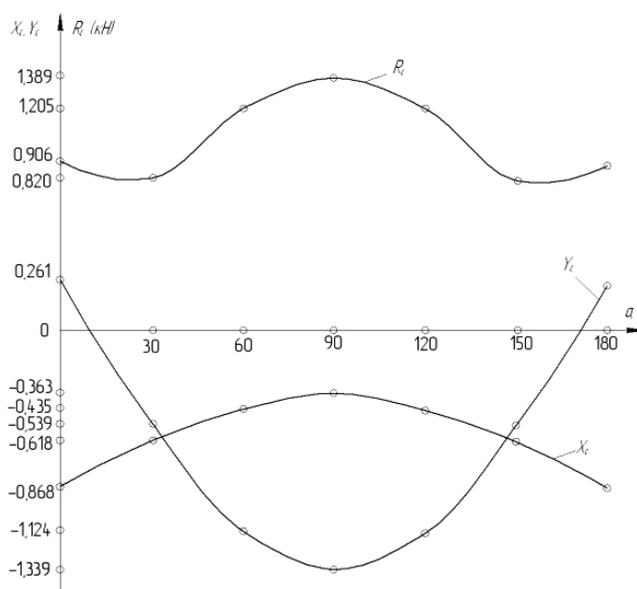


Рис. 1.12

- 4.2. Определить реакции всех связей по первому способу.
- 4.3. Определить реакции всех связей по второму способу.
- 4.4. Результаты вычислений занести в таблицу.
- 4.5. Сделать вывод: какой из способов оказался более простым.

- 4.6. Проанализировать изменение реакции опоры, заданной преподавателем, при варьировании параметра  $\alpha$  и  $\beta$  в пределах  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  с интервалом  $30^\circ$ .
- 4.7. По результатам расчета построить графики изменения составляющих заданной реакции  $X$ ,  $Y$  и полной реакции  $R$  в функции углов  $\alpha$  и  $\beta$ .
- 4.8. Выполнить внеаудиторное задание по варианту, выданному преподавателем. Схемы конструкций представлены на рис. 1.1 а – 1.30 а.

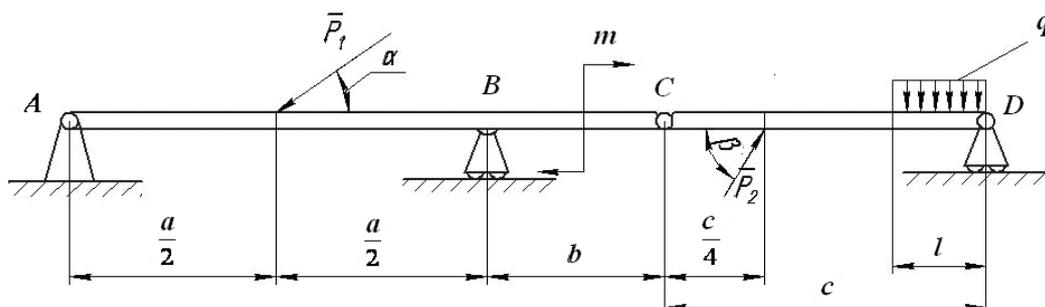


Рис. 1.13

Дано											Определить (Н)					
Номер варианта	$P_1$ Н	$P_2$ Н	$m$ Н·м	$\alpha$ град	$\beta$ град	$a$ м	$b$ м	$c$ м	$l$ м	$q$ Н/м	$R_B$	$R_D$	$X_C$	$Y_C$	$X_A$	$Y_A$
1	2	3	2	30	45	0,8	0,5	0,6	0,30	2						
2	4	4	4	45	30	0,6	0,7	0,7	0,20	4						
3	6	5	1	60	135	0,4	0,8	0,5	0,25	3						
4	8	6	3	180	90	0,2	0,8	0,4	0,20	5						
5	5	7	5	135	60	0,1	0,7	0,3	0,15	4						
6	3	8	2	90	135	0,7	0,3	0,2	0,10	3						
7	7	9	4	60	180	0,3	0,7	0,5	0,25	6						
8	9	3	1	45	30	0,5	0,4	0,8	0,40	5						
9	5	2	3	30	45	0,5	0,3	0,7	0,30	2						
10	3	5	2	135	60	0,8	0,2	0,6	0,20	4						

### 5. Контрольные вопросы

- 5.1. Что называется связью? Перечислите основные типы связей.
- 5.2. Дайте определение реакции связи.
- 5.3. Дайте понятие проекции силы на ось.
- 5.4. Что называется моментом силы относительно точки?
- 5.5. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил?
- 5.6. Что такое пара сил и чему равен её момент?

## Схемы конструкций к внеаудиторному заданию

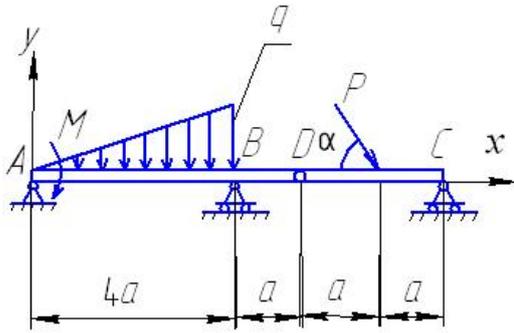


Рис. 1.1а

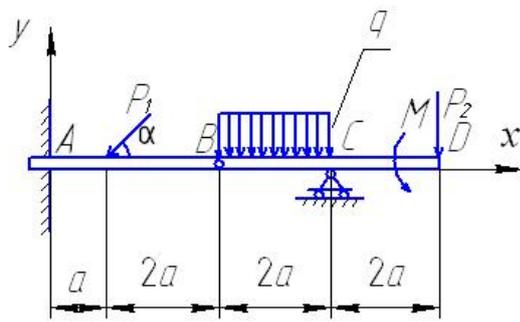


Рис. 1.2а

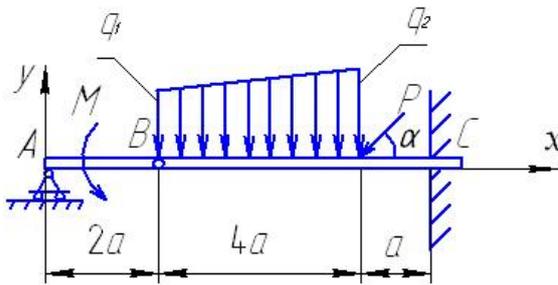


Рис. 1.3а

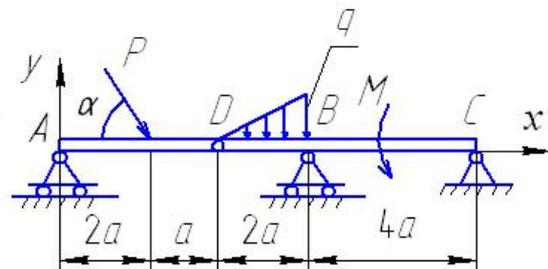


Рис. 1.4а

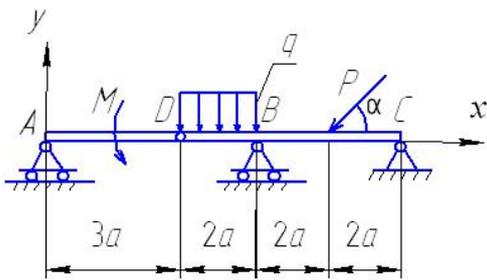


Рис. 1.5а

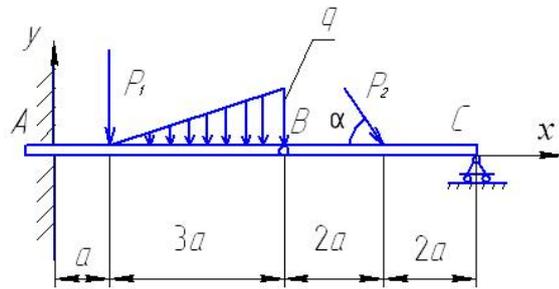


Рис. 1.6а

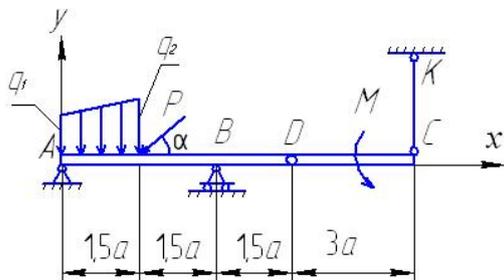


Рис. 1.7а

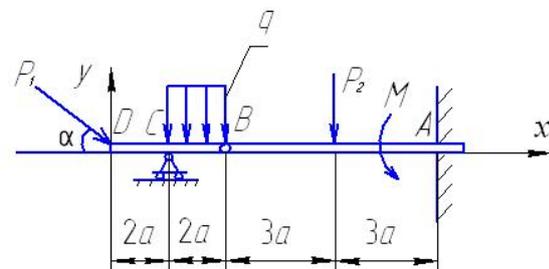


Рис. 1.8а

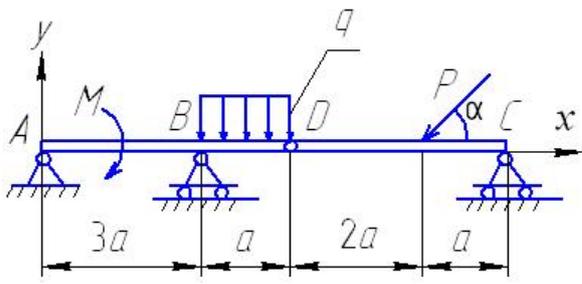


Рис. 1.9а

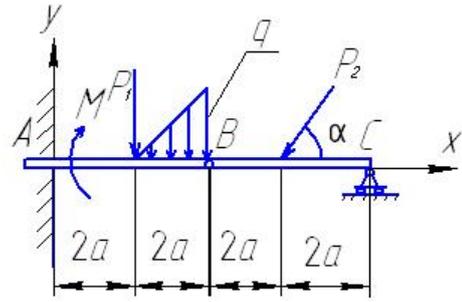


Рис. 1.10а

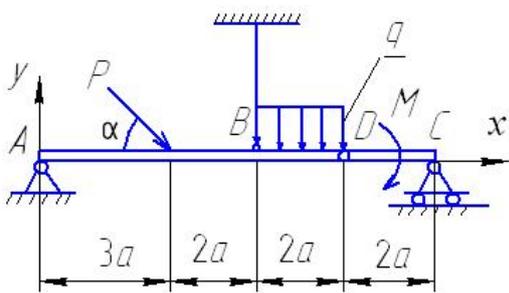


Рис. 1.11а

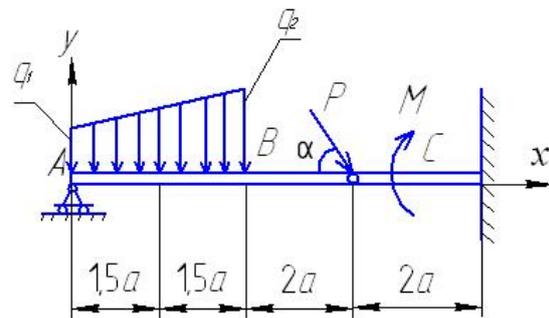


Рис. 1.12а

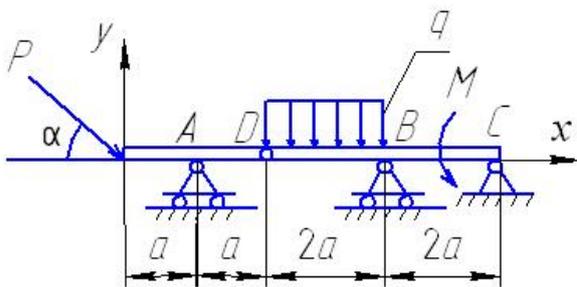


Рис. 1.13а

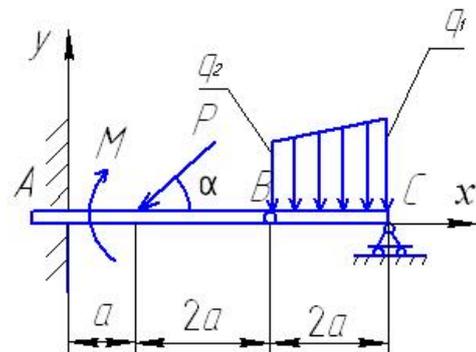


Рис. 1.14а

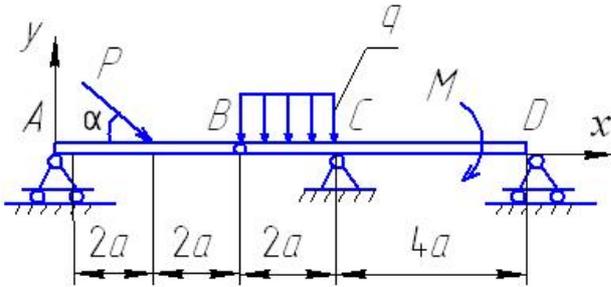


Рис. 1.15а

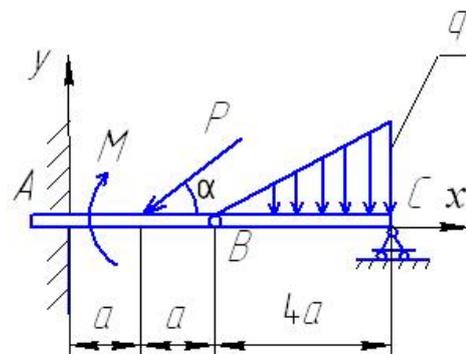


Рис. 1.16а

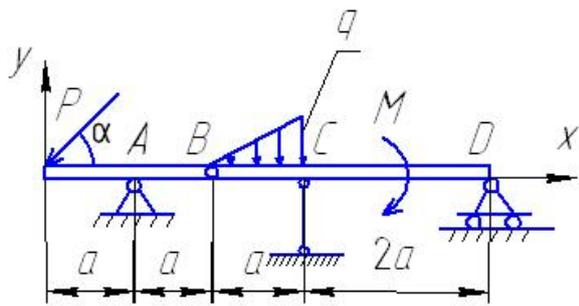


Рис. 1.17а

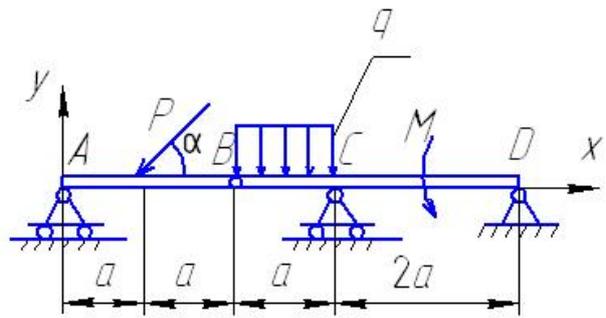


Рис. 1.18а

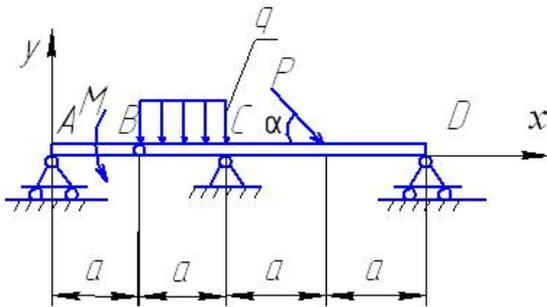


Рис. 1.19а

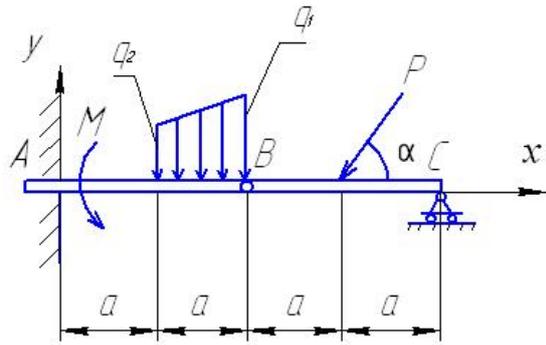


Рис. 1.20а

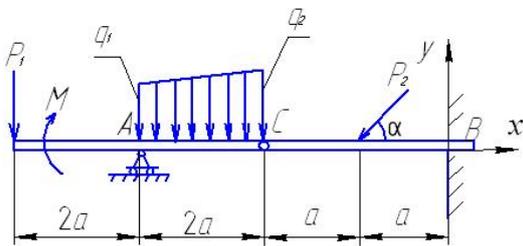


Рис. 1.21а

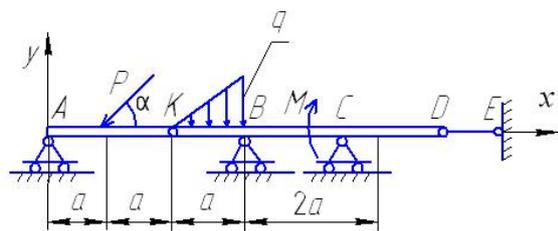


Рис. 1.22а

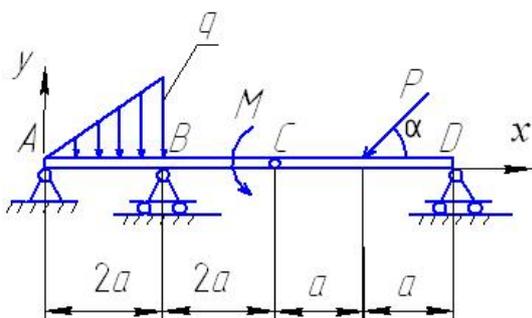


Рис. 1.23а

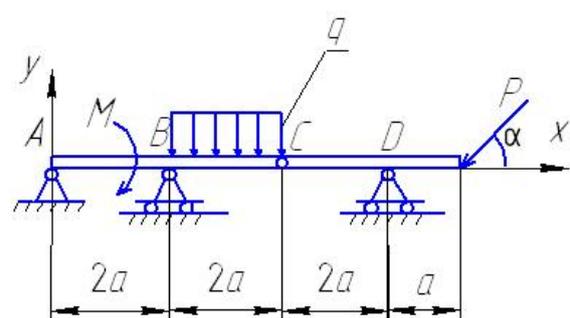


Рис. 1.24а

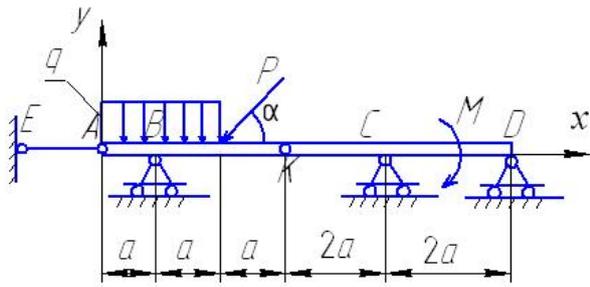


Рис. 1.25а

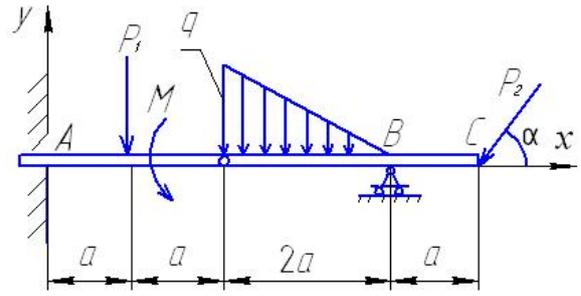


Рис. 1.26а

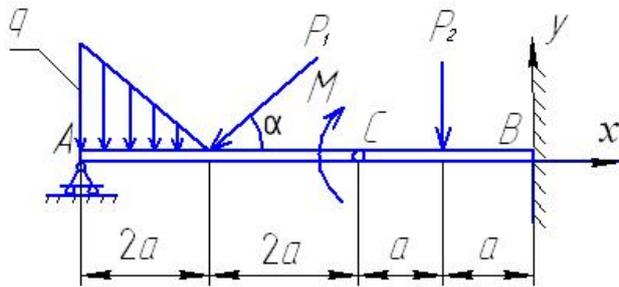


Рис. 1.27а

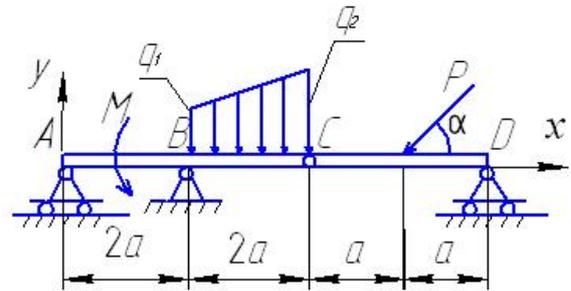


Рис. 1.28а

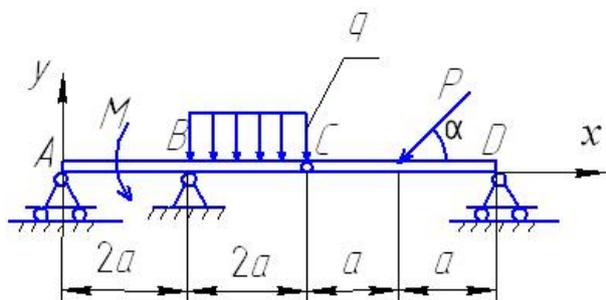


Рис. 1.29а

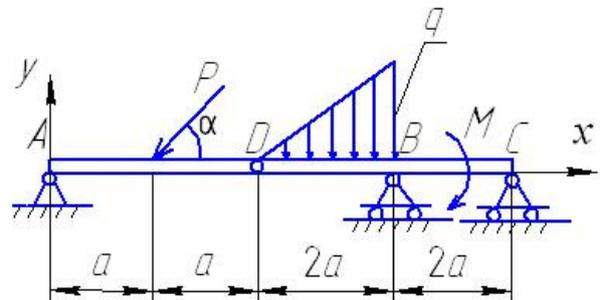


Рис. 1.30а

## Лабораторная работа № 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ СИЛ КОМБИНИРОВАННОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ

**Цель работы.** Научиться определять опорные реакции и усилия в стержнях комбинированной плоской системы связанных тел.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Исследования реакций опор и усилий в стержнях комбинированной плоской системы связанных тел при различных вариантах нагрузки.
3. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет плоской фермы, линейка, циркуль, транспортир

#### 1. Краткая теория

Для выполнения данной работы необходимо уметь определять проекцию силы на ось, момент силы относительно точки, а также иметь представление о паре сил, ее моменте и свойствах пар сил, о распределенных нагрузках и их равнодействующих. Эти вопросы подробно рассмотрены в лабораторной работе № 1. Там же можно ознакомиться с методами определения реакций связей составных конструкций и с различными системами уравнений равновесия произвольной плоской системы сил. Дополнительные теоретические вопросы, связанные с определением реакций стержней плоских ферм разными способами, будут освещены по ходу выполнения лабораторной работы.

#### 2. Исследование реакций опор и усилий в стержнях комбинированной плоской системы связанных тел при различных вариантах нагрузки

##### 2.1. Схема конструкции и исходные данные

Макет конструкции, подлежащий анализу, представляет собой комбинированную систему (рис. 2.1), состоящую из тела весом  $G$  и фермы, связанных при помощи соединительного цилиндрического шарнира  $C$ . Ферма состоит из 9 идеальных стержней, связанных в узлах цилиндриче-

скими шарнирами. Конструкция прикреплена к земле при помощи шарнирно-неподвижных опор  $A$  и  $B$ . Исходные данные приведены в табл. 2.1. Исходные данные  $a$  и  $h$  получили путём замера их на макете и увеличением их до действительной величины.

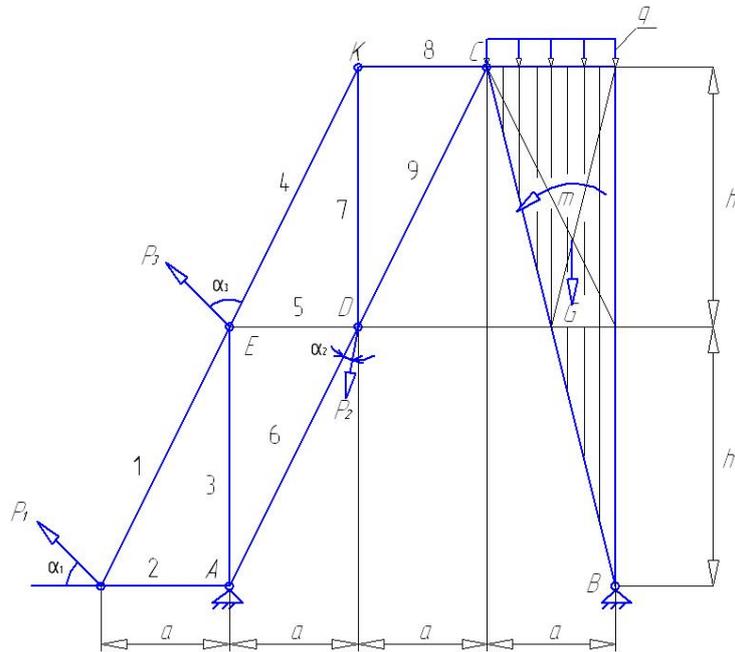


Рис. 2.1

Таблица 2.1

$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	$G$ , кН	$q$ , кН/м	$m$ , кН·м	$a$ , м	$h$ , м	$\alpha_1$ , град	$\alpha_2$ , град	$\alpha_3$ , град
2,0	2,0	3,0	2,0	1,0	1,5	2,5	4,0	45	30	60

## 2.2. Проверка статической определимости конструкции

Задача исследования заданной конструкции – определение реакций (усилий) в стержнях и реакций опор (опорах связи). Тогда число неизвестных находится по формуле

$$N = n_0 + n_1, \quad (2.1)$$

где  $n_0$  – число опорных связей;

$n_1$  – число стержней.

Число уравнений равновесия, которые можно составить для определения неизвестных, определяется по формуле

$$K = 2n + 3T, \quad (2.2)$$

где  $n$  – число узлов фермы, в которых сходятся стержни конструкции;

$T$  – число жёстких плоских тел, входящих в состав конструкции.



Уравнения равновесия соответствующей расчетной схемы на рис. 2.2 имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_{ix}=0; & X_A + X_B - P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_3 \cdot \sin 28^\circ - P_2 \cdot \sin 2^\circ = 0; \\ \Sigma F_{iy}=0; & Y_A + Y_B + P_1 \cdot \sin 45^\circ + P_3 \cdot \cos 28^\circ - P_2 \cdot \cos 2^\circ - Q - G = 0; \\ \Sigma M_A(F_i)=0; & -P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + P_3 \cdot \sin 28^\circ \cdot h + P_2 \cdot \sin 2^\circ \cdot h - P_2 \cdot \cos 2^\circ \cdot a - \\ & -Q(2a + 0,5a) - G \cdot 8/3 \cdot a + m + Y_B \cdot 3a = 0; \end{aligned} \right\} (2.3)$$

В уравнениях (2.3) число неизвестных  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  больше числа заданных уравнений равновесия. Для определения реакций опор расчленим конструкцию по соединительному шарниру  $C$ . Две расчетные схемы, соответствующие исходным данным, приведены ниже (рис. 2.3 и 2.4). Составим для каждой из них уравнения равновесия.

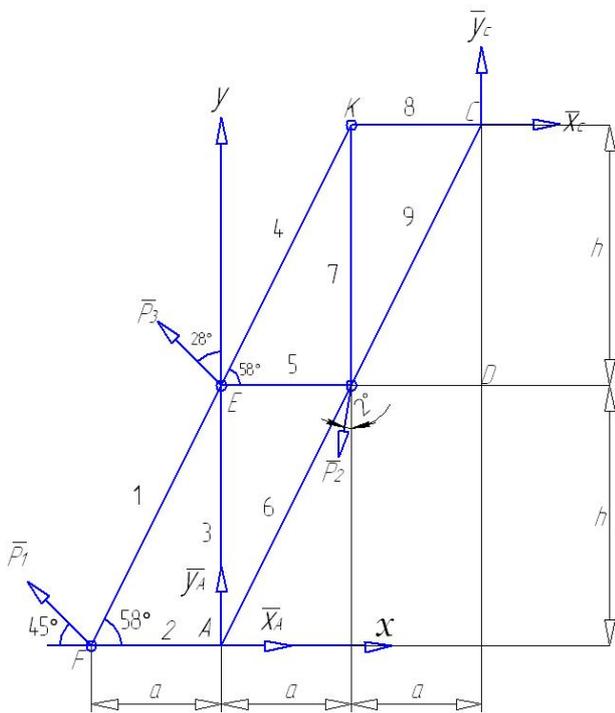


Рис. 2.3

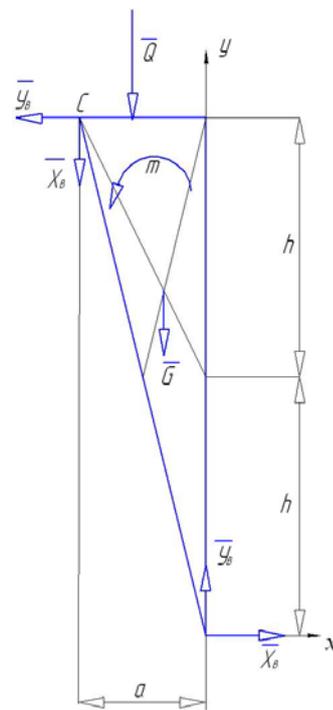


Рис. 2.4

Для расчетной схемы на рис. 2.3 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_{ix}=0; & -P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \sin 2^\circ - P_3 \cdot \sin 28^\circ + X_A + X_C = 0; \\ \Sigma F_{iy}=0; & P_1 \cdot \sin 45^\circ - P_2 \cdot \cos 2^\circ + P_3 \cdot \cos 28^\circ + Y_A + Y_C = 0; \\ \Sigma M_A(F_i)=0; & -P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + P_2 \cdot \sin 2^\circ \cdot h - P_2 \cdot \cos 2^\circ \cdot a + P_3 \cdot \sin 28^\circ \cdot h + \\ & + Y_C \cdot 2a - X_C \cdot 2h = 0. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Для расчетной схемы на рис. 2.4 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_{ix}=0; & -X_C + X_B = 0; \\ \Sigma F_{iy}=0; & Y_B - Y_C - Q - G = 0; \\ \Sigma M_B(F_i) = 0; & Q \cdot 0,5a + Y_C \cdot a + X_C \cdot 2h + G \cdot 1/3 \cdot a + m = 0. \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Далее, решая системы уравнений (2.4) и (2.5) и учитывая, что

$Q = q \cdot a = 1,0 \cdot 2,5 = 2,5$  (кН), находим:

$$\begin{aligned} X_A &= 3,524 \text{ кН}; & X_B &= -0,633 \text{ кН}; & X_C &= -0,633 \text{ кН}; \\ Y_A &= -1,576 \text{ кН}; & Y_B &= 4,011 \text{ кН}; & Y_C &= -0,489 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак минус означает, что реакции  $Y_A, X_B, X_C, Y_C$  направлены противоположно указанным на рисунках.

Для проверки правильности решения рассмотрим, имеет ли место равновесие всей системы при действии заданных сил и найденных реакций опор. Если реакции опор найдены правильно, то уравнения (2.3) должны обратиться в тождество.

Подставим численные значения в уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \text{ кН}; & P_2 &= 2 \text{ кН}; & P_3 &= 3 \text{ кН}; & Q &= 2,5 \text{ кН}; & G &= 2 \text{ кН}; & m &= 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ \cos 45^\circ &= 0,707; & \sin 45^\circ &= 0,707; & \sin 28^\circ &= 0,469; & \cos 28^\circ &= 0,883; & \sin 2^\circ &= 0,035; \\ \cos 2^\circ &= 0,999; & h &= 4 \text{ м}; & a &= 2,5 \text{ м}. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} 3,524 - 0,633 - 2 \cdot 0,707 - 3 \cdot 0,469 - 2 \cdot 0,035 &= 0; \\ 0 &= 0; \\ -1,576 + 4,011 + 2 \cdot 0,707 + 3 \cdot 0,883 - 2 \cdot 0,999 - 2,5 - 2 &= 0; \\ 0 &= 0; \\ -2 \cdot 0,707 \cdot 2,5 + 3 \cdot 0,469 \cdot 4 + 2 \cdot 0,035 \cdot 4 - 2 \cdot 0,999 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 6,25 - \\ &- 2 \cdot 6,667 + 1,5 + 4,011 \cdot 3 \cdot 2,5 = 0; \\ 0,0015 &= 0. \end{aligned}$$

В соответствии с полученными знаками минус реакций  $Y_A, X_B$  покажем схему действительных направлений этих реакций (рис. 2.5)

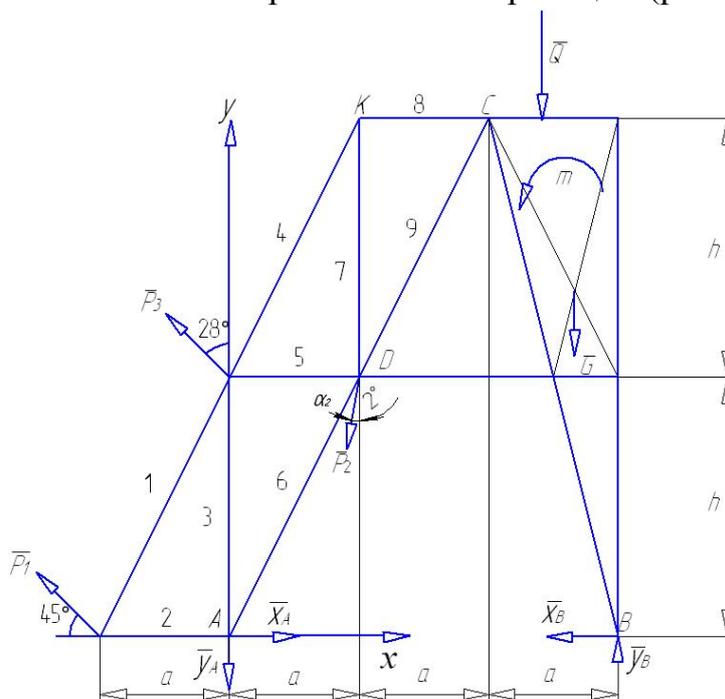
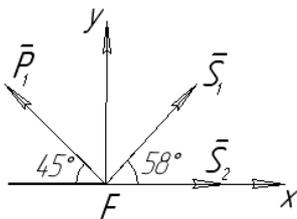


Рис. 2.5

## 2.4. Определение усилий в стержнях фермы при постоянных значениях расчётных параметров

Определим усилия в стержнях конструкции способом вырезания узлов. К каждому узлу прикладываем внешние силы и усилия в стержнях, которые образуют уравновешенную плоскую сходящуюся систему сил. Для такой системы можно составить два уравнения равновесия. Поэтому вырезание узлов надо проводить в такой последовательности, чтобы число неизвестных сил в узле не превышало двух. Логично начать с того узла, в котором сходятся не более двух стержней. Для данной конструкции таким узлом является узел  $F$ .

Составим последовательно расчётные схемы и уравнения равновесия для всех узлов. Условно предполагаем, что все стержни растянуты, то есть усилия направляем от узлов.



Узел  $F$

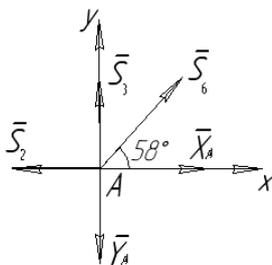
Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: -P_1 \cos 45^\circ + S_1 \cos 58^\circ + S_2 = 0;$$

$$\sum F_{iy}=0: P_1 \sin 45^\circ + S_1 \sin 58^\circ = 0.$$

Решая записанные уравнения, получаем:

$$S_1 = -1,667 \text{ кН}, \quad S_2 = 2,298 \text{ кН}.$$



Узел  $A$

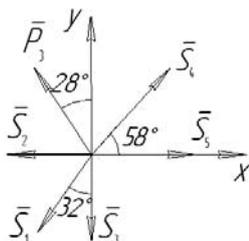
Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: X_A - S_2 + S_6 \cos 58^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy}=0: -Y_A + S_3 + S_6 \sin 58^\circ = 0.$$

После решения найдём

$$S_6 = -2,313 \text{ кН}, \quad S_3 = 0,385 \text{ кН}.$$



Узел  $E$

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: -S_1 \sin 32^\circ - P_3 \sin 28^\circ + S_4 \cos 58^\circ + S_5 = 0;$$

$$\sum F_{iy}=0: -S_1 \cos 32^\circ + S_3 \cos 28^\circ + S_4 \sin 58^\circ - S_5 = 0.$$

Отсюда находим

$$S_4 = -4,337 \text{ кН}, \quad S_5 = 2,822 \text{ кН}.$$

### Узел D

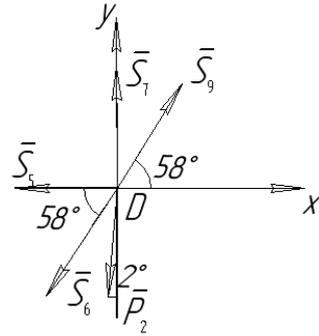
Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: -S_5+S_9\cos 58^{\circ}-S_6\cos 58^{\circ}-P_2\sin 2^{\circ}=0;$$

$$\sum F_{iy}=0: S_7+S_9\sin 58^{\circ}-S_6\sin 58^{\circ}-P_2\cos 2^{\circ}=0.$$

Решая систему из двух уравнений, найдём:

$$S_9=7,637 \text{ кН}, \quad S_7=-3,677 \text{ кН}.$$



### Узел K

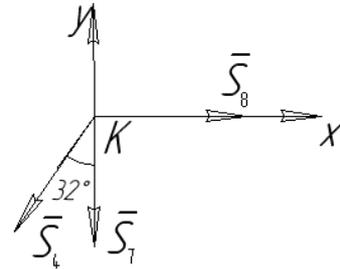
Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: S_8-S_4\sin 32^{\circ}=0;$$

$$\sum F_{iy}=0: -S_7-S_4\cos 32^{\circ}=0.$$

Из этих уравнений определим

$S_8=-2,299$  кН и проверим правильность решений, подставив в последнее уравнение найденные величины.



$$3,677-4,337 \cdot 0,848=0, \text{ то есть } 3,677-3,678=0, \text{ откуда } 0=0.$$

Таким образом, получено тождество, а значит, усилия в стержнях найдены верно. Все значения найденных усилий в стержнях занесем в табл. 2.2.

Таблица 2.2

$S_1$ , кН	$S_2$ , кН	$S_3$ , кН	$S_4$ , кН	$S_5$ , кН	$S_6$ , кН	$S_7$ , кН	$S_8$ , кН	$S_9$ , кН
1,667	2,298	0,385	4,337	2,822	2,313	3,677	2,299	7,637
-	+	+	-	+	-	-	-	+

Из таблицы следует, что усилия в стержнях  $S_2, S_3, S_5, S_9$  будут растягивающими, а усилия  $S_1, S_4, S_6, S_7, S_8$  будут сжимающимися.

### 2.5. Анализ изменения реакций опоры C при варьировании параметра $\alpha_3$ в пределах $0 \leq \alpha \leq \pi$ с интервалом $30^\circ$

Для решения поставленной задачи воспользуемся третьими уравнениями систем уравнений равновесия (2.4) и (2.5).

Вводя численные значения параметров  $P_1=2$  кН;  $P_2=2$  кН;  $P_3=3$  кН;  $G=2$  кН;  $m=1,5$  кН·м и значения тригонометрических функций постоянных углов:  $\alpha_1=45^\circ$ ;  $\alpha_2=30^\circ$ .

$$\sin 45^\circ=0,707; \quad \sin 30^\circ=0,5;$$

$$\cos 45^\circ=0,707; \quad \cos 30^\circ=0,866,$$

получим, считая  $\alpha_3 = \alpha$  переменным:

$$\left. \begin{aligned} -8,25 + 12\sin\alpha + 5Y_c - 8X_c &= 0 \\ 6,291 + 2,5Y_c + 8X_c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Решая систему уравнений (2.6), находим:

$$\left. \begin{aligned} Y_c &= 0,2612 - 1,6 \sin\alpha \\ X_c &= 0,5\sin\alpha - 0,868. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Для проверки расчётных формул (2.7) найдём значения  $X_c$  и  $Y_c$  при  $\alpha = 30^\circ$ . При этом получим

$$X_c = -0,618 \text{ кН}; Y_c = 0,539 \text{ кН}.$$

Поскольку такие же значения реакций были определены ранее, то расчёты проведены правильно.

Теперь, давая параметру  $\alpha$  последовательные значения:  $0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$ , находим значения реакций  $X_c, Y_c$  и  $R_c = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}$ .

График изменения величин опорной реакции  $R_c$  приведен на рис. 2.6. Анализируя график, можно отметить, что максимальное значение опорной реакции  $R_c$  в расчётном диаметре  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  достигается при  $\alpha = 90^\circ$ , а минимальное при  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 150^\circ$ .

### **2.6. Анализ изменения усилия в стержне 6 при изменении параметра $\alpha$ в пределах $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ с интервалом $30^\circ$**

Для решения проблемы применяем способ Риттера (метод сечений). Отсекая ферму по 4, 5 и 6-му стержням, и рассматривая левую часть отсеченной части конструкции, получаем расчётную схему (рис. 2.7).

Исходя из расчётной схемы для определения усилия  $S_6$  составим уравнение моментов относительно точки  $E$

$$\sum M_E(F_i) = 0: X_A \cdot h + S_6 \cos 58^\circ \cdot h - P_1 \cos 45^\circ \cdot h - P_1 \sin 45^\circ \cdot a = 0. \quad (2.8)$$

Воспользуемся уравнением

$$X_A = (0,5\sin\alpha - 0,868) + 1,484 + 3\sin\alpha,$$

которое было найдено ранее, где положили  $\alpha_3 = \alpha$ .

Решая это уравнение, получаем:

$$X_A = 2,5\sin\alpha + 2,352. \quad (2.9)$$

Учитывая уравнение (2.9) и численные значения  $h = 4$  см,  $a = 2,5$  м,  $\cos 58^\circ = 0,530$ ,  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$ , из уравнения (2.8) найдём:

$$S_6 = -(2,5\sin\alpha + 2,342) \cdot 4 + 9,191 = -4,717\sin\alpha - 0,102. \quad (2.10)$$

Для проверки полученного результата, подставим в формулу значение  $\alpha_3 = \alpha = 30^\circ$ . Получим  $S_6 = -2,461$  кН. Приблизительно такое же значение было найдено ранее, что свидетельствует о правильности формулы (2.10).

По найденным значениям усилия в стержне 6 при изменении параметра  $\alpha=0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 150^\circ; 180^\circ$  построен график, который приведен на рис. 2.6.

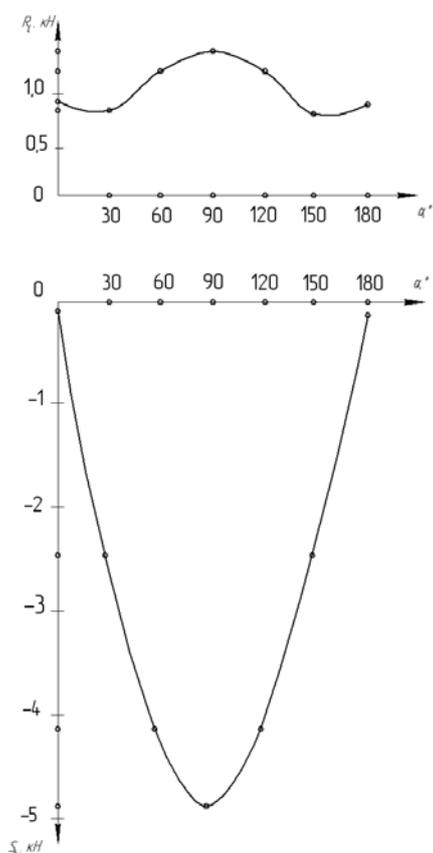


Рис. 2.6

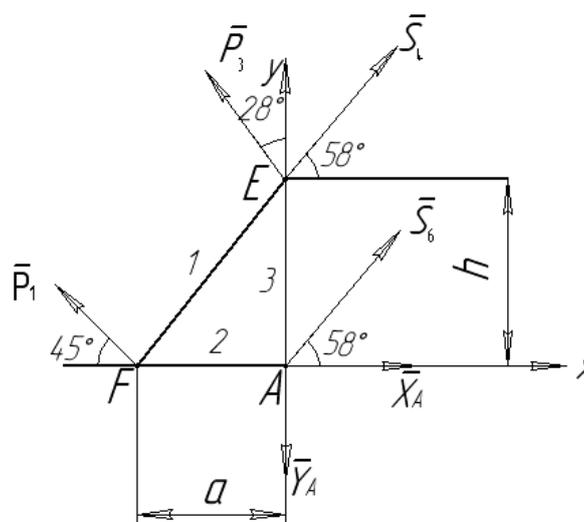


Рис.2. 7

График изменений усилий в стержне 6 показывает, что максимальное растягивающее усилие достигается при  $\alpha=90^\circ$ . При дальнейшем увеличении угла  $\alpha^\circ$  растягивающее усилие в стержне 6 уменьшается.

Для закрепления данной темы необходимо выполнить внеаудиторное задание согласно варианту схемы фермы (рис. 2.1 а - 2.30 а), выданному преподавателем.

### 3. Контрольные вопросы

- 3.1. Как определяется проекция силы на ось?
- 3.2. Что называется парой сил?
- 3.3. Чему равен момент пары?
- 3.4. Как определяется момент силы относительно точки?
- 3.5. В чём заключается способ вырезания узлов фермы?
- 3.6. Когда применяется метод Риттера?

### Схемы ферм к внеаудиторному заданию

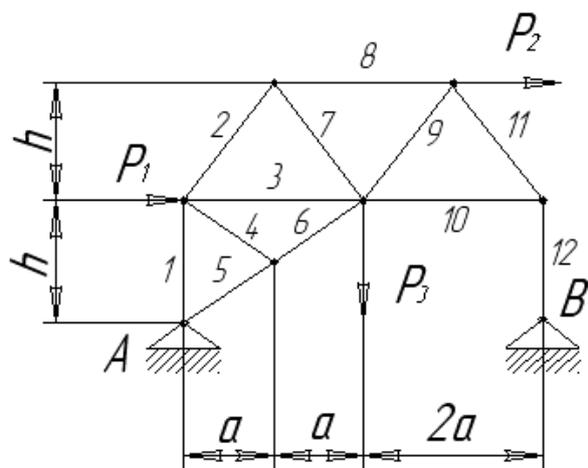


Рис. 2.1а

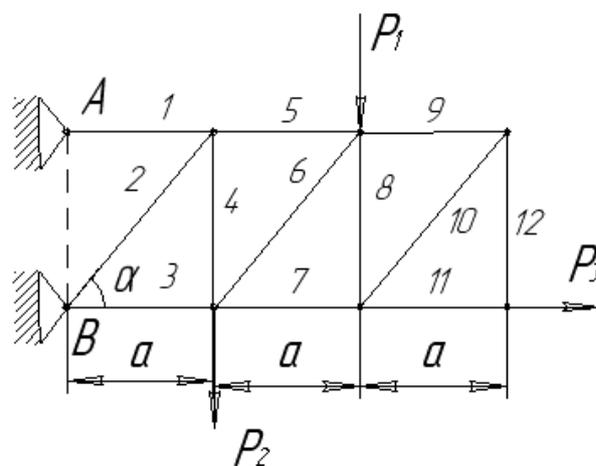


Рис. 2.2а

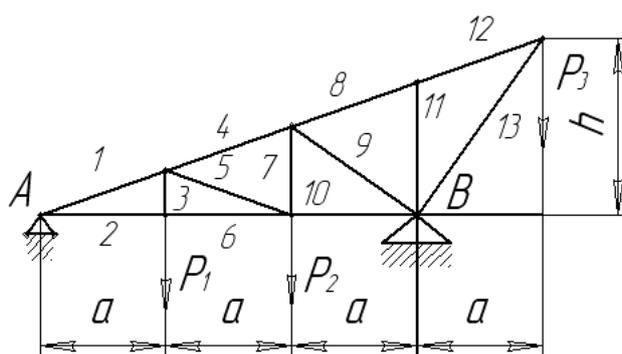


Рис. 2.3а

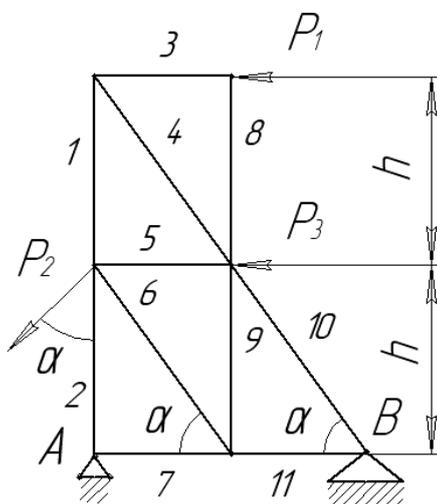


Рис. 2.4а

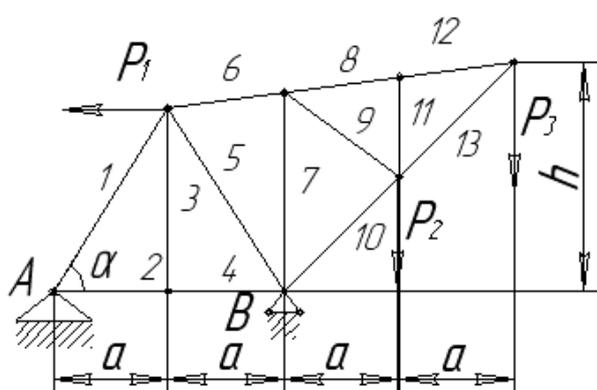


Рис. 2.5а

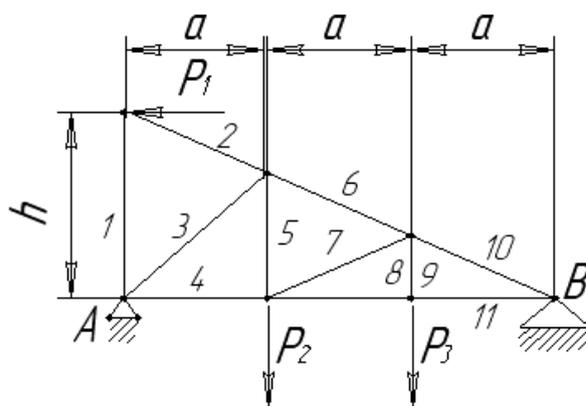


Рис. 2.6а

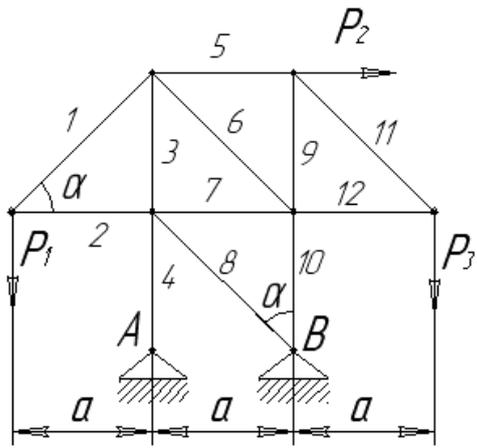


Рис. 2.7а

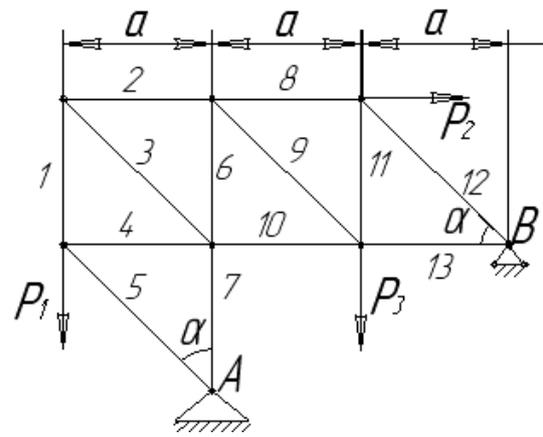


Рис. 2.8а

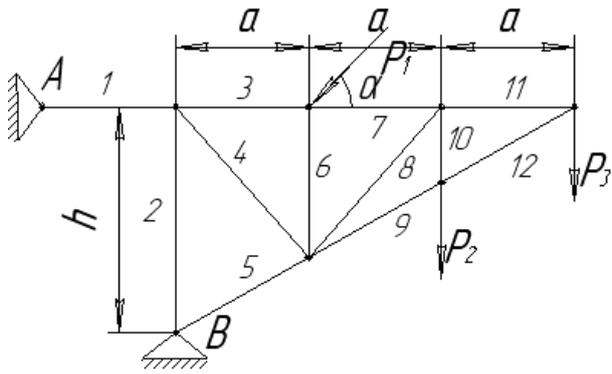


Рис. 2.9а

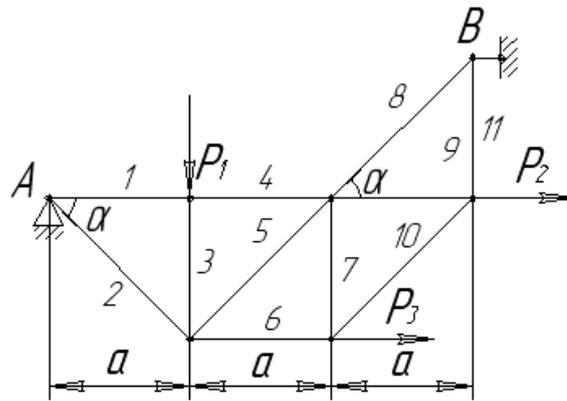


Рис. 2.10а

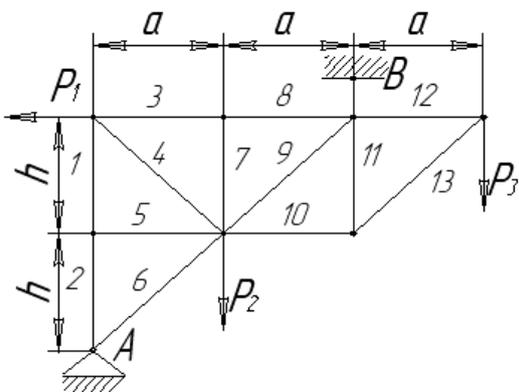


Рис. 2.11а

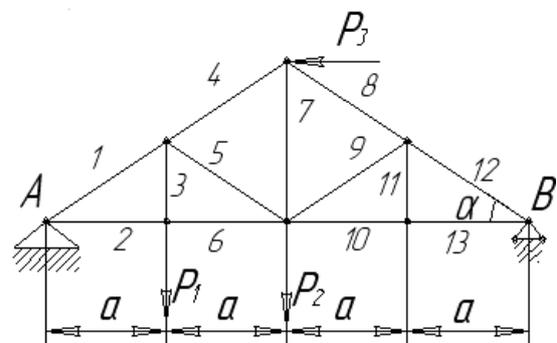


Рис. 2.12а

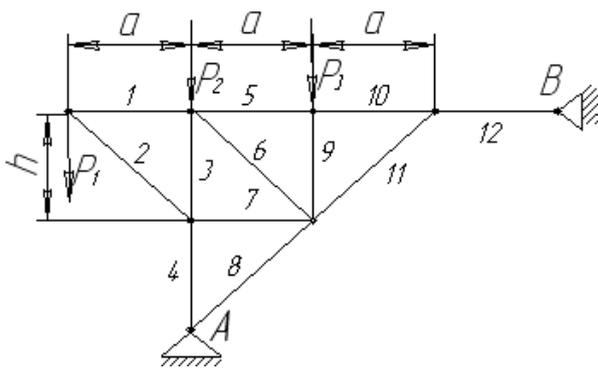


Рис. 2.13а

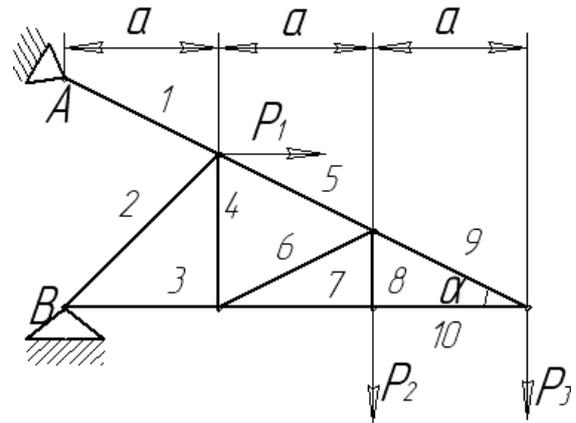


Рис. 2.14а

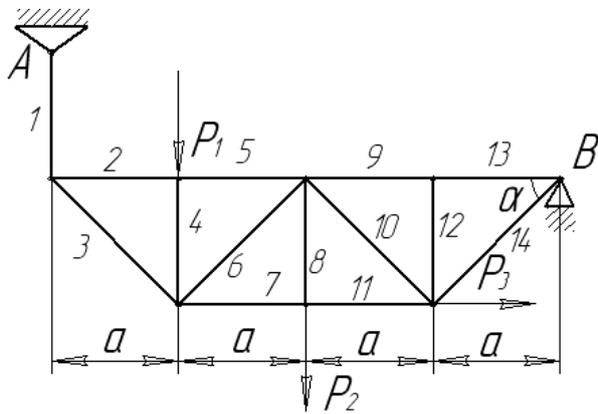


Рис. 2.15а

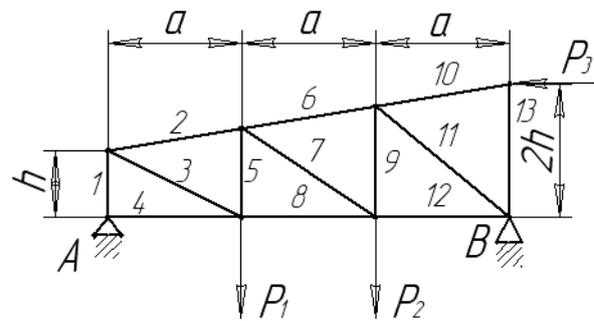


Рис. 2.16а

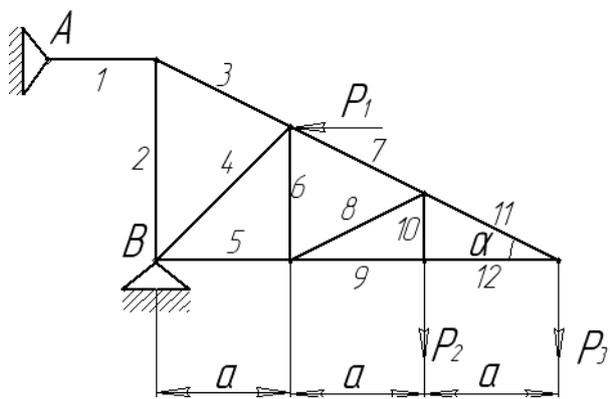


Рис. 2.17а

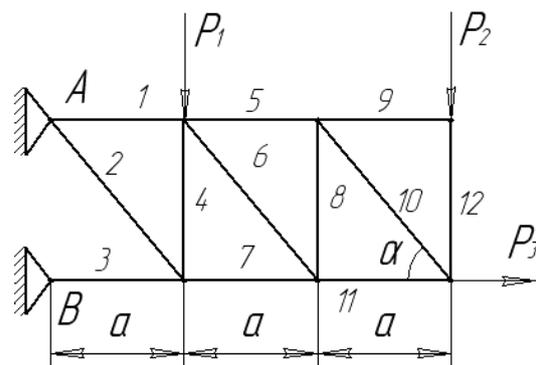


Рис. 2.18а

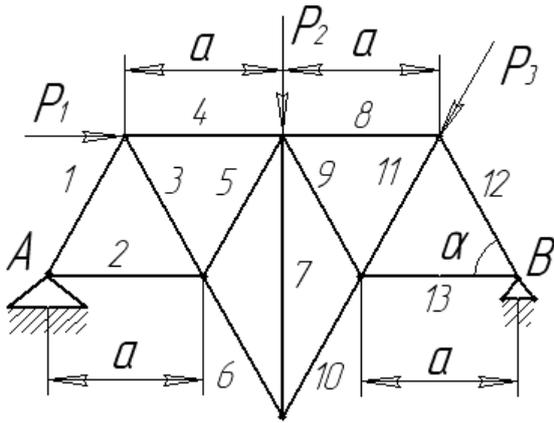


Рис. 2.19а

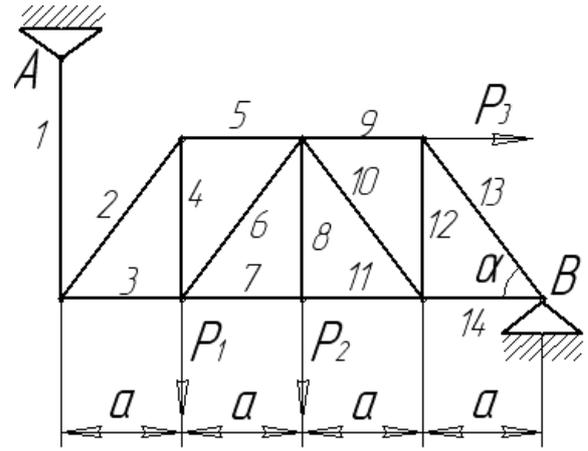


Рис. 2.20а

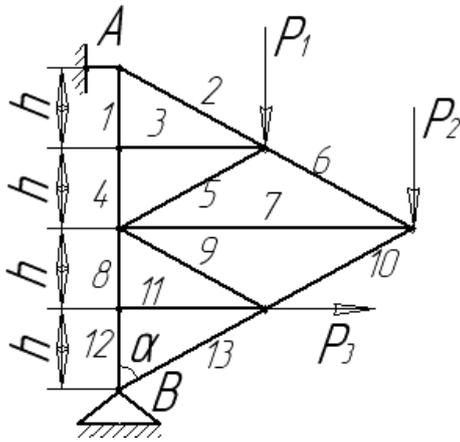


Рис. 2.21а

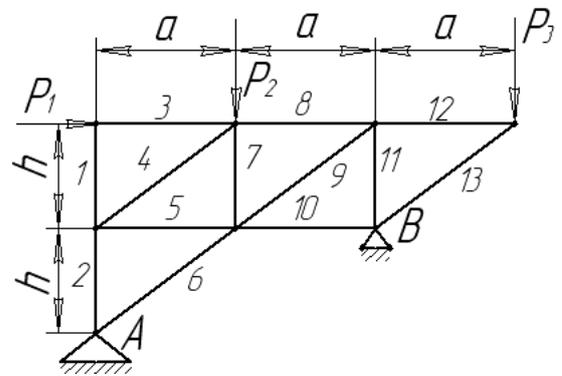


Рис. 2.22а

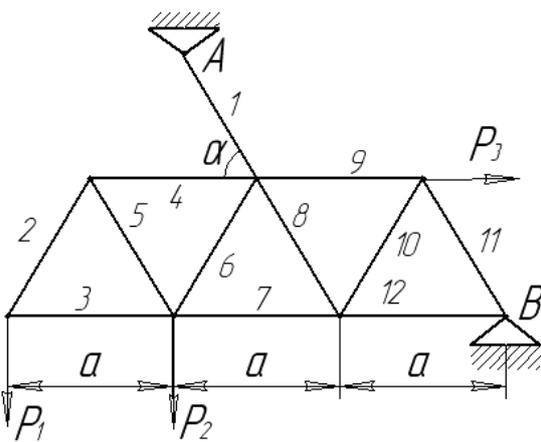


Рис. 2.23а

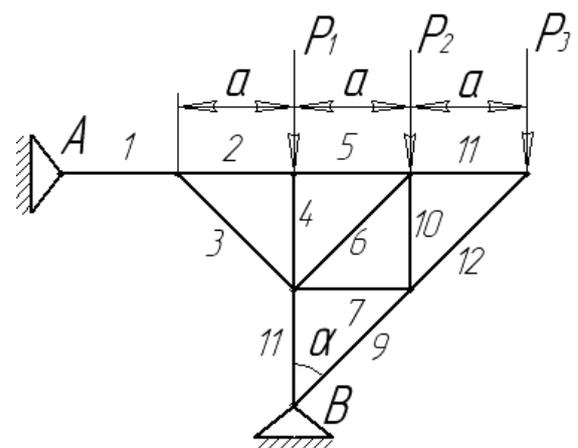


Рис. 2.24а

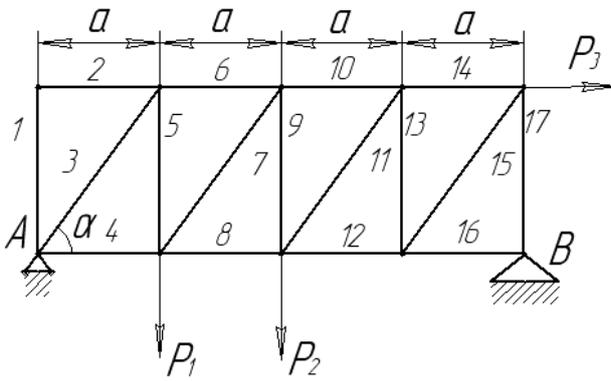


Рис. 2.25а

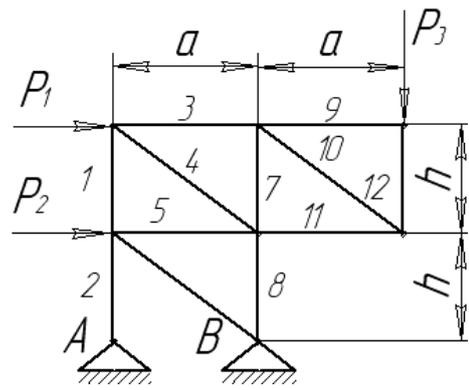


Рис. 2.26а

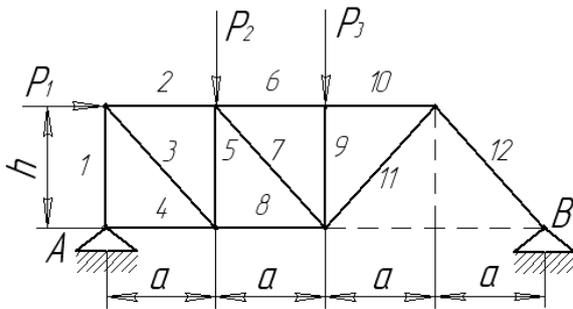


Рис. 2.27а

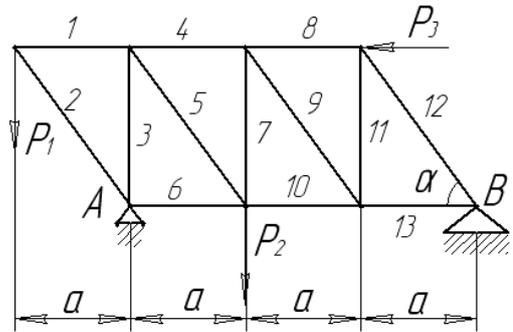


Рис. 2.28а

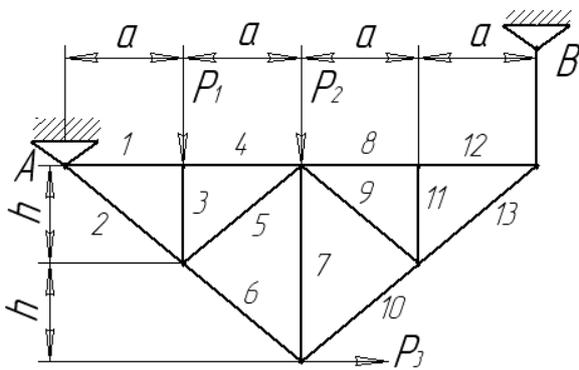


Рис. 2.29а

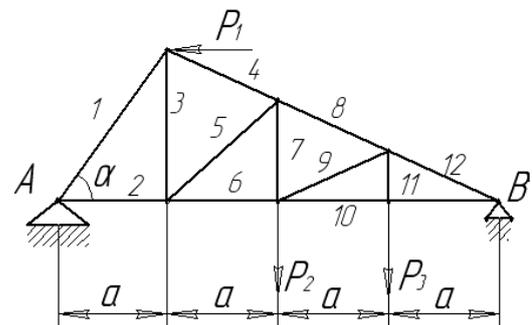


Рис. 2.30а

## Лабораторная работа № 3

### КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА АНАЛИТИЧЕСКИМ И ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДАМИ

**Цель работы.** Изучить аналитические и графические способы определения кинематических характеристик плоского механизма.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Методы определения скоростей и ускорений точек плоского механизма.
3. Последовательность выполнения лабораторной работы.
4. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир.

#### 1. Краткая теория

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью движения. Изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры тела в её плоскости.

Плоскопараллельное движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, принятой за полюс, и вращения вокруг полюса.

Другие теоретические вопросы будут рассмотрены по ходу выполнения лабораторной работы.

#### 2. Методы определения скоростей и ускорений точек плоского механизма

В кинематике плоскопараллельного движения скорости и ускорения точек плоского механизма определяются разными способами.

##### 2.1. Определение скоростей точек

- а) Методом выбора полюса.
- б) С помощью мгновенного центра скоростей.
- в) По теореме о проекции скоростей на ось, соединяющую две точки плоской фигуры.
- г) С помощью плана скоростей.

а) *Определение скоростей точек методом выбора полюса*  
 Рассмотрим движение плоской фигуры (рис. 3.1).

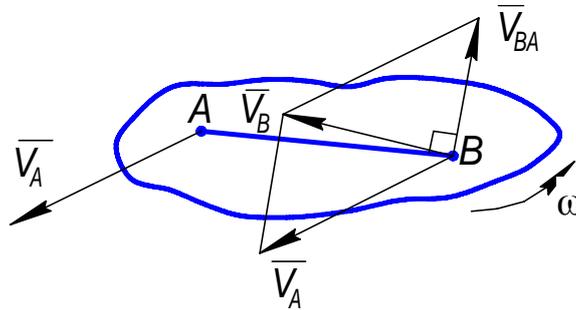


Рис. 3.1

По теореме о скоростях точек плоской фигуры найдём

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA},$$

где  $\overline{V}_B$  - искомая скорость точки  $B$ ;  $\overline{V}_A$  - известная скорость точки  $A$ , принятой за полюс;  $\overline{V}_{BA}$  - вращательная скорость точки  $B$  вокруг полюса  $A$ , равная по модулю произведению угловой скорости плоской фигуры на расстояние от точки до полюса и направленная перпендикулярно к отрезку прямой  $BA$  в сторону мгновенного вращения фигуры, т.е.

$$V_{BA} = \omega \cdot BA, \quad \overline{V}_{BA} \perp BA.$$

Скорость точки  $B$  изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке  $B$  на скорости  $\overline{V}_A$ , перенесенной в точку  $B$  и скорости  $\overline{V}_{BA}$  (см. рис. 3.1).

б) *Метод определения скоростей точек с помощью  
 мгновенного центра скоростей*

При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка тела, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей и обозначается символом  $C_V$ .

Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей точек тела. На рис. 3.2 и 3.3 представлены схемы плоских механизмов, для которых дано:

$\omega_1$  – угловая скорость вращения кривошипа  $OA$ ,

$\omega_3$  – угловая скорость вращения звеньев  $O_1A=l_1, O_2B=l_3$ .

Определяем скорость точки А по известной формуле  $V_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot l_1$ . Проводим  $\overline{V_A} \perp O_1A$  в направлении  $\omega_1$ . Затем показываем прямые направления скоростей точек В: на рис. 3.2 – вдоль направляющих ползуна В, на рис. 3.3 - перпендикулярно звену  $O_2B$ . На пересечении перпендикуляров к векторам  $\overline{V_A}$  и  $\overline{V_B}$  найдём положение мгновенного центра скоростей  $C_V$  звена АВ, совершающего плоскопараллельное движение.

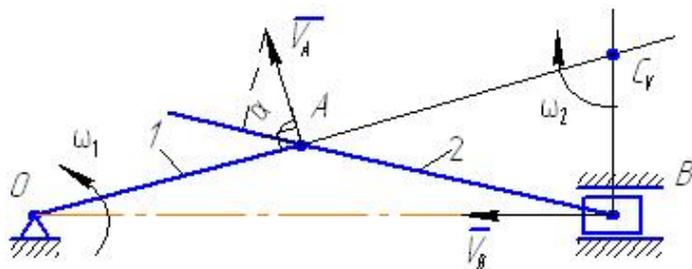


Рис. 3.2

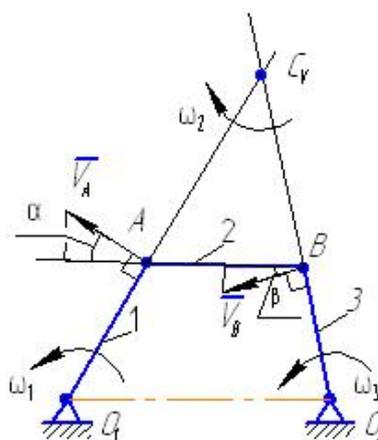


Рис. 3.3

Потом определяем

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}; V_B = \omega_2 \cdot BC_V; \omega_3 = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{V_B}{l_3}.$$

в) *Определение скоростей точек по теореме о проекции скоростей*

Согласно теореме о равенстве проекций скоростей точек А и В на прямую АВ можно записать  $V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta$ , откуда  $V_B = V_A \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ .

г) *Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью плана скоростей*

Рассмотрим механизм на рис. 3.3 для точки В, запишем формулу  $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}$ . Строим из произвольно выбранного центра О в масштабе вектор  $\overline{Oa}$ , по величине и направлению равный  $\overline{V_A}$  (рис. 3.4). Из точки О проводим прямую направления  $\overline{V_B}$  перпендикулярно звену  $O_2B$ .

Из точки  $a$  проводим прямую направления вектора  $\overline{V}_{BA}$  перпендикулярно звену  $AB$ . В точке пересечения прямых получим точку  $v$ .

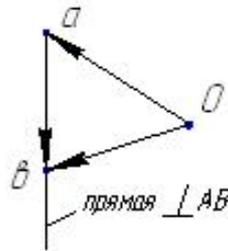


Рис.3.4

Отрезок  $\overline{Ov}$  соответствует на плане скорости точки  $B$ , а  $\overline{av}$  - скорости точки  $B$  во вращении вокруг полюса  $A$  ( $\overline{V}_{BA}$ ).

Измеряя отрезки  $\overline{Ov}$  и  $\overline{av}$  и умножая на масштаб скорости  $\mu_V$ , находим:  $V_B = \mu_V \cdot Ov$ ;  $V_{BA} = \mu_V \cdot av$ . Зная, что  $V_{BA} = \omega_2 \cdot AB$ , определим  $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB}$ .

## 2.2 Определение ускорений

- Методом выбора полюса (аналитический и графический способы).
- С помощью мгновенного центра ускорений.

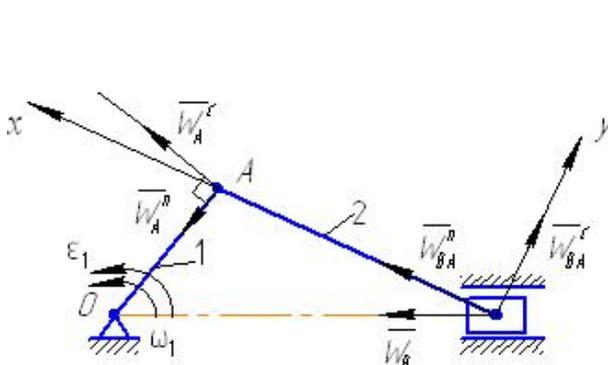


Рис. 3.5

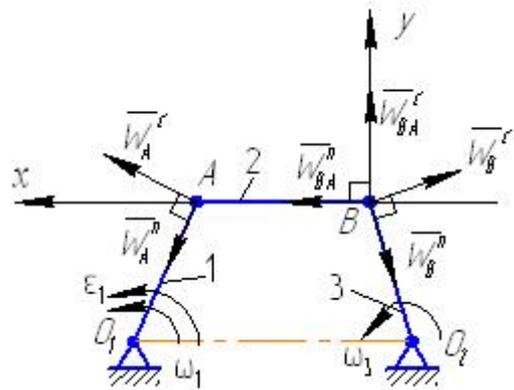


Рис. 3.6

### а) Определение ускорений точек методом выбора полюса

Рассмотрим плоские механизмы на рис. 3.5, 3.6, для которых данные взять из рис. 3.2, 3.3 и дополнительно  $\epsilon_1$  - угловое ускорение кривошипа  $O_1A$ . За полюс выбираем точку  $A$ .

Для точки  $B$  на рис. 3.5 по теореме об ускорениях запишем

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}; \quad \overline{W}_B = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau. \quad (3.1)$$

Модули ускорений равны  $\overline{W}_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1$ ;  $\overline{W}_A^\tau = \epsilon_1 \cdot l_1$ ;  $\overline{W}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2$ ;  $\overline{W}_{BA}^\tau = \epsilon_2 \cdot l_2$ .

Для точки  $B$  на рис. 3.5 также по теореме об ускорениях будем иметь  $\overline{W}_B = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau$ .

Так как  $\overline{W}_B = \overline{W}_B^n + \overline{W}_B^\tau$ , то получим

$$\overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau = \overline{W}_B^n + \overline{W}_B^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau. \quad (3.2)$$

Найдём модули ускорений

$$W_B^n = \omega_3^2 \cdot l_3; \quad W_B^\tau = \epsilon_3 \cdot l_3; \quad W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2}.$$

Уравнения (3.1) и (3.2) можно решить аналитически, проектируя их на оси  $x$  и  $y$  (см. рис. 3.5, 3.6), показав при точках  $A$  и  $B$  векторы ускорений без масштаба. При этом  $\overline{W}_A^\tau \perp O_1A$  и направлен в сторону  $\epsilon_1$ ,  $\overline{W}_A^n$  направлен вдоль  $AO_1$  к оси  $O_1$ ,  $\overline{W}_{BA}^\tau \perp BA$  предположительно направлено в любую сторону,  $\overline{W}_{BA}^n$  направлено вдоль звена  $AB$  к полюсу  $A$ ,  $\overline{W}_B^\tau \perp O_2B$  и предположительно направлено в любую сторону,  $\overline{W}_B^n$  направлено вдоль  $O_2B$  к оси  $O_2$ .

Из полученных уравнений сможем определить в первом случае  $W_B$ ,

$W_{BA}^\tau$  и затем  $\epsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB}$ , а во втором -  $W_B^\tau$ ,  $W_{BA}^\tau$  и потом

$$W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2}, \quad \epsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB}.$$

Решим уравнение (3.1) графическим способом построением плана ускорений (рис. 3.7).

Строим при точке  $B$  в масштабе известные по модулю векторы  $\overline{W}_A^n$ ,  $\overline{W}_A^\tau$ ,  $\overline{W}_{BA}^n$ , откладывая их последовательно. Затем проводим прямые направления ускорений  $\overline{W}_B$  вдоль направляющих ползуна  $B$  и  $\overline{W}_{BA}^\tau$  перпендикулярно  $AB$  из конца вектора  $W_{BA}^n$ .

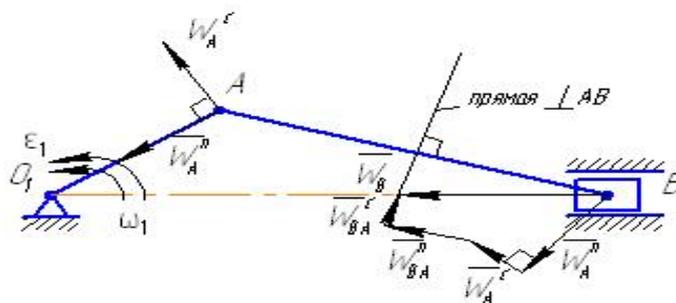


Рис. 3.7

В точке пересечения этих прямых получим  $\overline{W}_B$ . Измеряя длину вектора  $\overline{W}_B$  и умножая на масштаб  $\mu_W$ , найдём модуль ускорения точки  $B$ , т.е.  $W_B = \mu_W \cdot Bb$ .

Аналогично решим графически уравнение (3.2) (рис. 3.8).

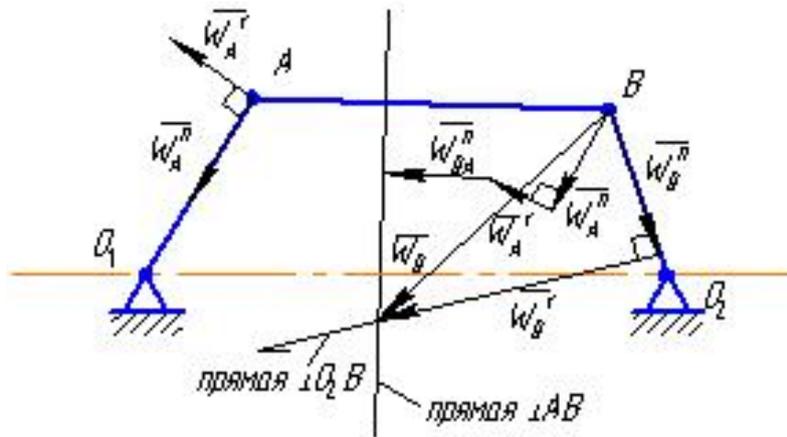


Рис. 3.8

Строим в масштабе известные по величине векторы ускорений правой части уравнения (3.2)  $\overline{W}_A^n$ ,  $\overline{W}_A^r$ ,  $\overline{W}_{BA}^n$  и прямую направления вектора  $\overline{W}_{BA}^r \perp BA$ , а также известный по величине вектор  $\overline{W}_B^n$  левой части уравнения и прямую направления  $W_B^r$ . Точку пересечения прямых соединим с точкой  $B$  и получим вектор  $\overline{W}_B$ . Измерив его и умножив на масштаб  $\mu_W$ , определим модуль ускорения точки  $B$ .

б) *Определение ускорений точек с помощью мгновенного центра ускорений*

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Он обозначается символом  $C_W$ .

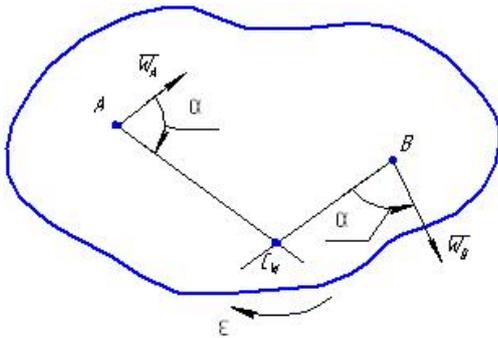


Рис. 3.9

Положение мгновенного центра ускорений определяется формулами по заданным  $\overline{W}_A$ ,  $\epsilon$  и  $\omega$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}; \quad AC_W = \frac{W_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

Откладывая угол  $\alpha$  от вектора ускорения  $\overline{W}_A$  в сторону углового ускорения  $\epsilon$ , проводим полупрямую, на которой на расстоянии  $AC_W$  находится мгновенный центр ускорений  $C_W$  (рис. 3.9).

Ускорение произвольной точки  $B$  определяется из пропорции

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{AC_W}{BC_W}, \text{ откуда } W_B = W_A \frac{BC_W}{AC_W}.$$

Вектор  $\overline{W}_B$  проводим под углом  $\alpha$ , отложенным от отрезка  $BC_W$  противоположно направлению углового ускорения  $\epsilon$ .

### 3. Последовательность выполнения лабораторной работы

- 3.1. Построение механизма. Для этого взять из сложного механизма три первых звена, начиная с ведущего, для которого заданы кинематические характеристики, измерить длины звеньев  $l_1, l_2, l_3$ , отложив угол  $\alpha^0$  по своему варианту. Выбрав соответствующий масштаб, построить механизм.
- 3.2. Определить скорость точки, принадлежащей одновременно первому и второму звеньям. Затем определить скорость точки, принадлежащей одновременно звеньям 2 и 3, и угловые скорости  $\omega_2, \omega_3$  теми методами, которые приведены в теоретической части лабораторной работы.
- 3.3. Определить ускорения тех же точек, которые указаны во 2-м пункте, и угловые ускорения 2-го и 3-го звеньев методами, перечисленными выше. Результаты вычислений занести в табл. 3.1.
- 3.4. Выполнить внеаудиторное задание по варианту схемы плоского механизма (рис. 3.1а - 3.30а), выданному преподавателем, и табл. 3.2.

Таблица 3.1

Значения	$\alpha$ , град	$l_1$ , см	$l_2$ , см	$l_3$ , см	$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	$\varepsilon_1$ , с <sup>-2</sup>	$V_A$ см/с	$V_B$ см/с	$\omega_2$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_3$ , с <sup>-1</sup>	$W_A$ , см/с <sup>2</sup>	$W_B$ , см/с <sup>2</sup>	$\varepsilon_2$ , с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_3$ , с <sup>-2</sup>
Мгновенный центр скорости														
Теорема о проекции скорости														
План скоростей														
Аналитич. определение ускорения														
Графическое определение ускорения														
Мгновенный центр ускорений														

Таблица 3.2

Номер варианта	Расстояние, см				Длина звеньев, см											
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	$O_1A$	$O_2B$	$O_2D$	$O_3D$	<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>	$O_2E$	
а	0	60	78	21	-	22	30	-	35	72	24	35	70	-	-	-
	1	50	90	15	-	20	28	-	25	63	42	64	32	-	73	-
	2	63	75	-	-	30	-	34	-	64	48	84	56	-	56	-
	3	51	-	-	-	25	-	60	-	81	54	43	86	-	45	-
	4	73	45	8	-	18	24	-	23	80	40	60	-	69	50	-
	5	57	62	50	-	26	-	40	-	86	56	32	28	-	44	-
	6	50	83	-	-	32	-	50	-	90	30	36	72	-	41	-
	7	48	38	-	-	24	40	-	26	60	40	72	36	-	52	-
	8	100	45	-	-	28	35	-	24	90	30	62	31	-	62	-
9	105	64	28	-	23	-	50	-	99	33	35	70	-	-	-	
б	0	52	40	104	52	26		41	-	63	21	92		46	48	-
	1	66	40	98	-	21	39	-	-	82	41	56	-	-	58	19
	2	50	41	-	-	20	25	-	34	60	45	65	86	-	46	-
	3	92	44	30	-	21	31	-	-	70	25	60	-	-	48	20
	4	62	38	-	-	22	26	-	-	76	38	66	99	30	-	-
	5	37	21	30	-	19	44	-	-	66	22	62	31	-	37	-
	6	81	55	-	-	25	-	56	-	69	46	44	32	-	41	-
	7	45	37	-	-	26	-	-	-	93	31	60	30	-	55	-
	8	44	108	33	-	25	-	-	-	72	92	23	-	45	-	-
9	64	120	-	-	24	40	-	-	50	52	13	-	90	-	-	
в	0	90	50	-	-	22	32	-	-	90	30	71	-	-	45	16
	1	60	17	113		22	-	60	-	64	32	34	68	-	60	-
	2	78	56	30	10	25	46	-	26	78	69	36	-	13	42	-
	3	32	50	53	-	23	-	30	-	72	48	45	-	50	60	-
	4	23	54	42	32	24	19	57	-	64	32	64	-	-	63	30
	5	61	36	66	-	25	31	-	61	60	-	82	41	-	46	20
	6	61	42	18	-	24	-	32	-	81	27	46	-	-	52	16
	7	83	17	45	-	25	30	-	24	78	26	60	30	-	65	-
	8	82	42	52	-	23	28	-	26	88	-	72	36	-	54	-
9	50	34	95	-	21	-	31	-	78	26	32	-	62	58	31	

#### **4. Контрольные вопросы**

- 4.1. Какое движение тела называется плоскопараллельным?
- 4.2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении.
- 4.3. Что такое мгновенный центр скоростей, способы его определения?
- 4.4. Определение скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей.
- 4.5. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении.

## Схемы плоских механизмов к внеаудиторному заданию

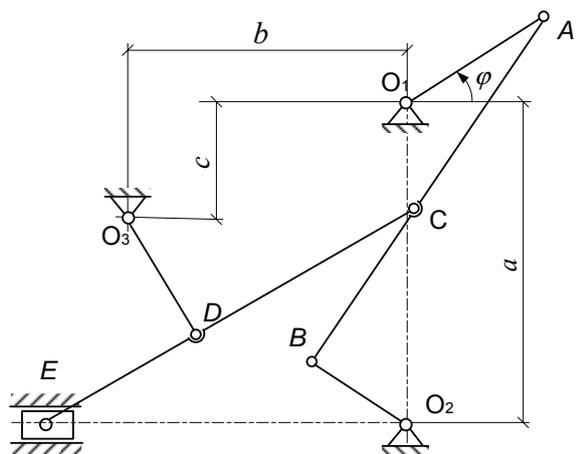


Рис. 3.1 а

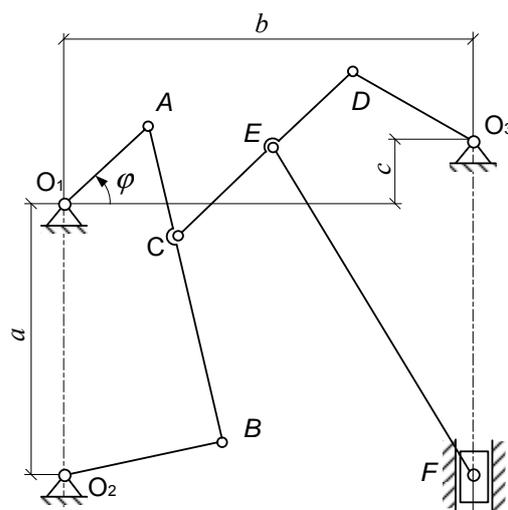


Рис. 3.2 а

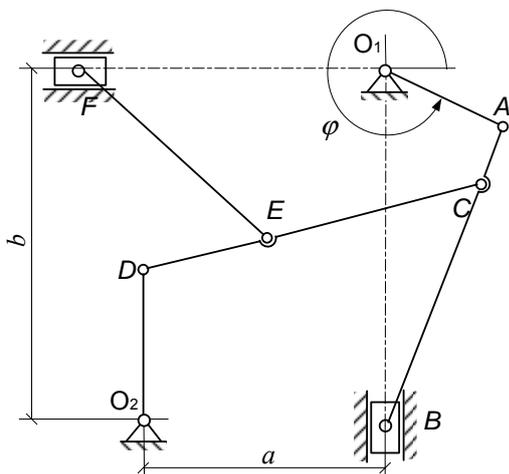


Рис. 3.3 а

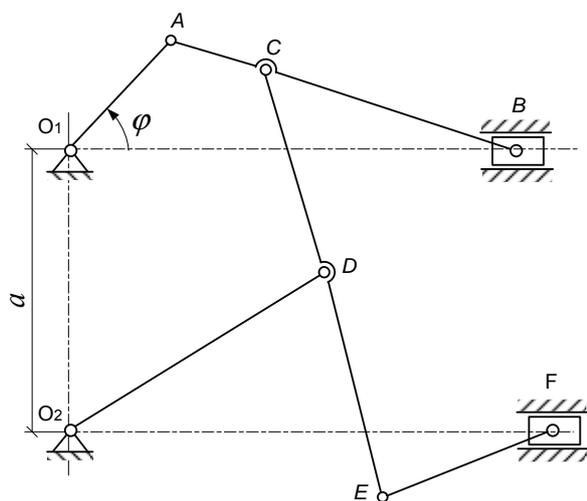


Рис. 3.4 а

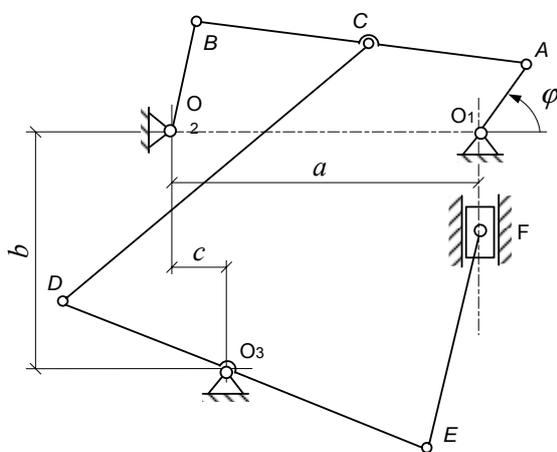


Рис. 3.5 а

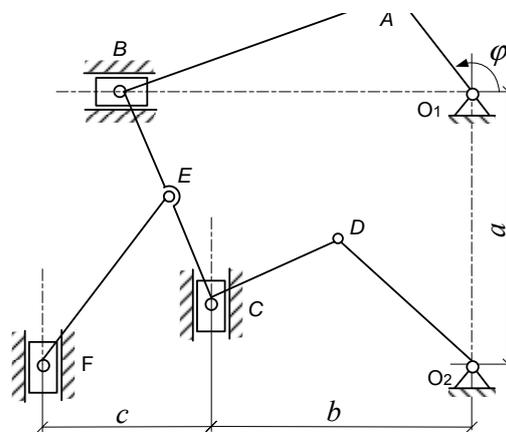


Рис. 3.6 а

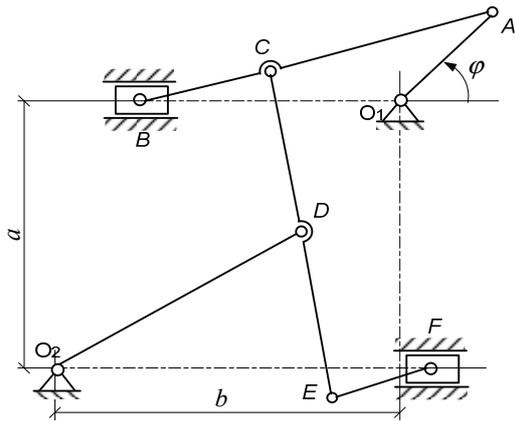


Рис. 3.7 а

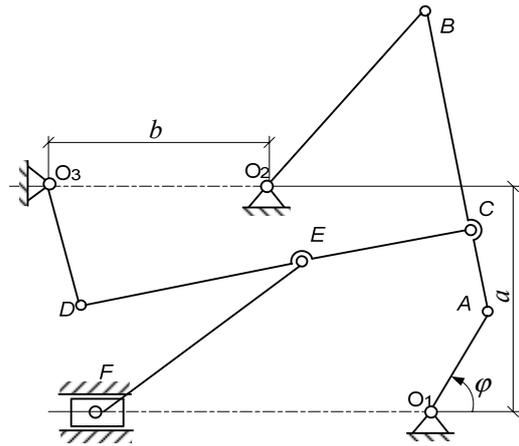


Рис. 3.8 а

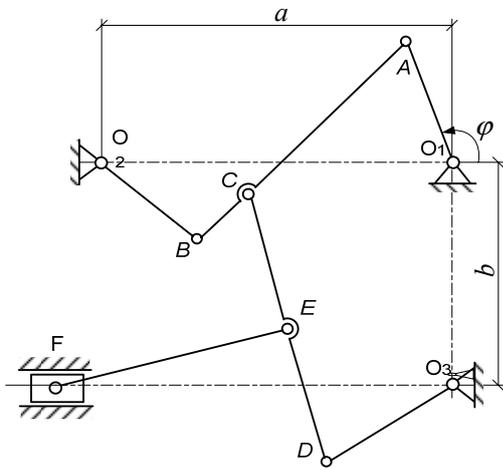


Рис. 3.9 а

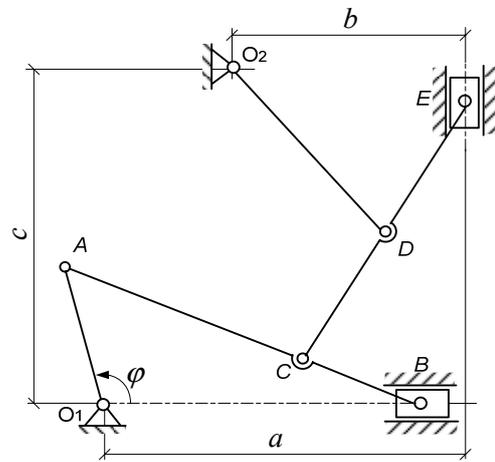


Рис. 3.10 а

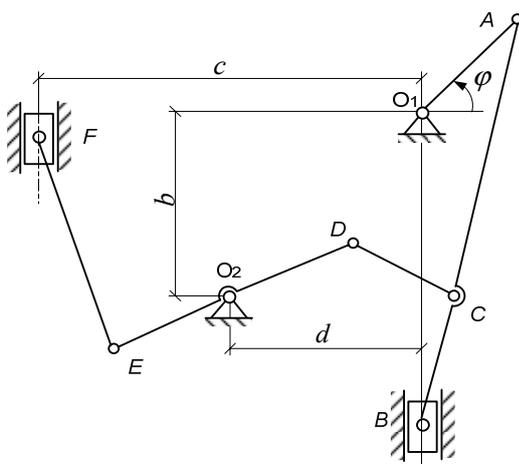


Рис. 3.11 а

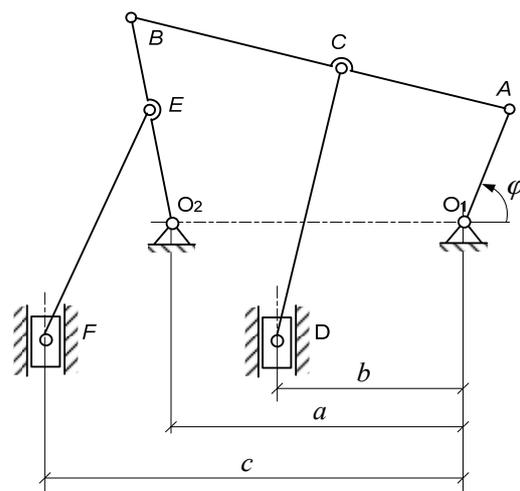


Рис. 3.12 а

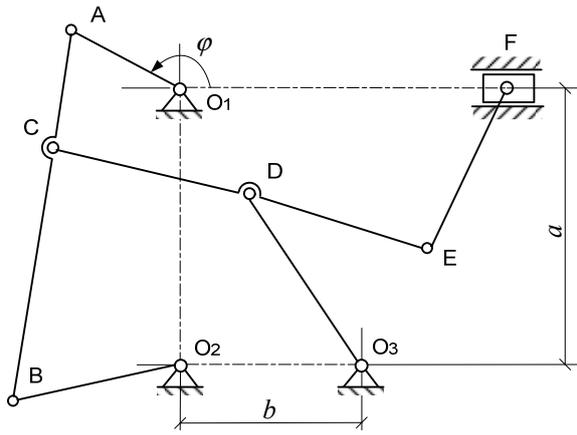


Рис. 3.13 а

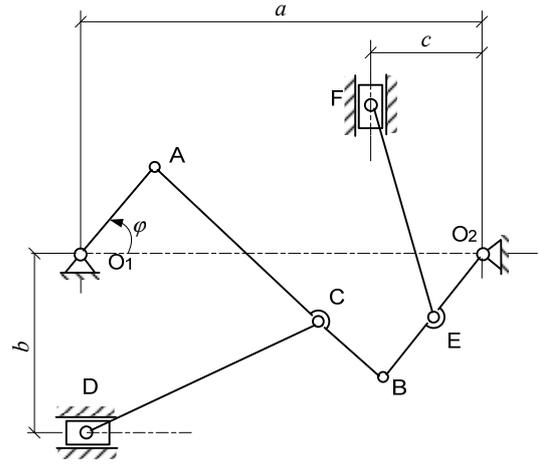


Рис. 3.14 а

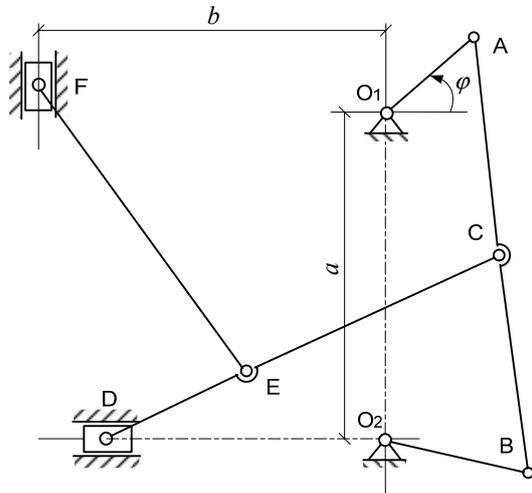


Рис. 3.15 а

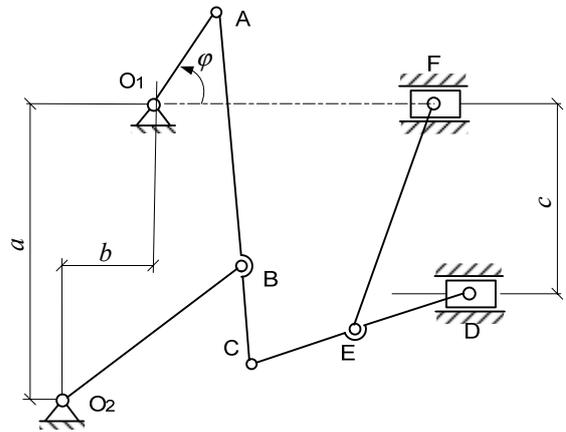


Рис. 3.16 а

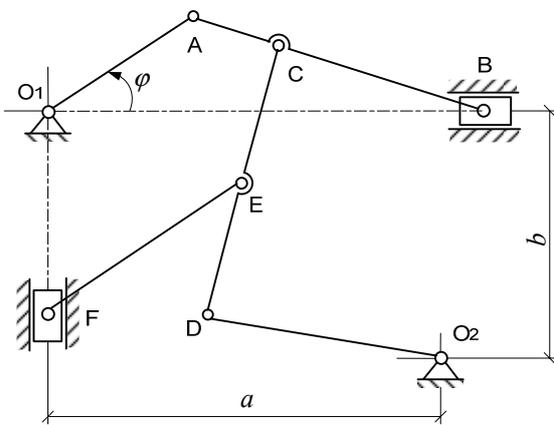


Рис. 3.17 а

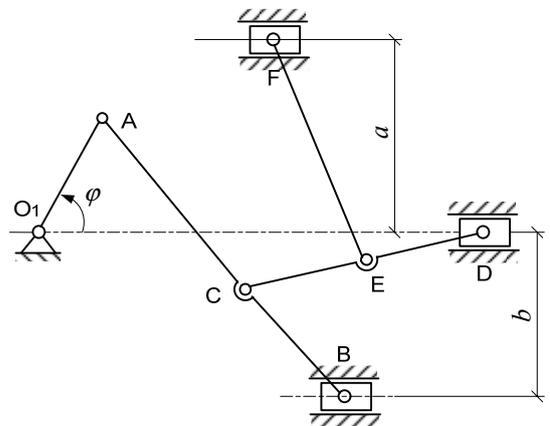


Рис. 3.18 а

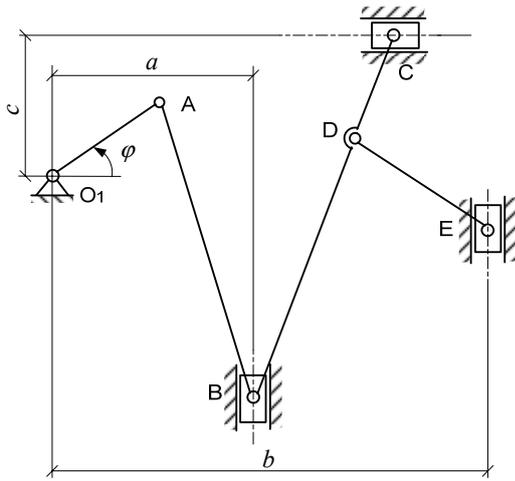


Рис. 3.19 а

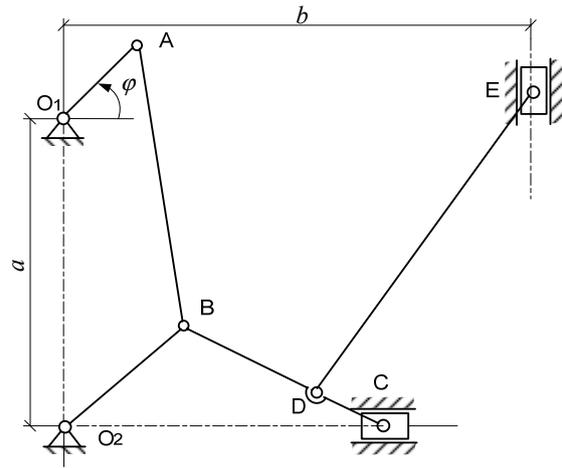


Рис. 3.20 а

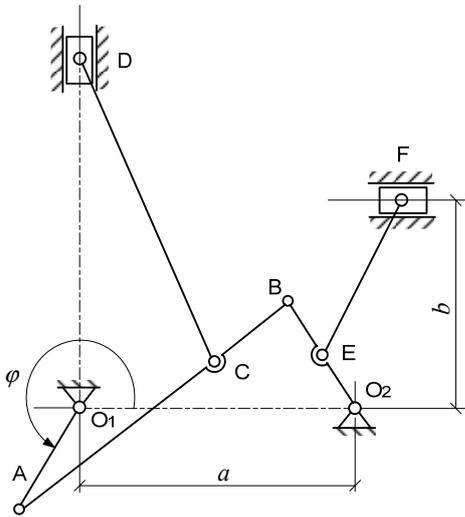


Рис. 3.21 а

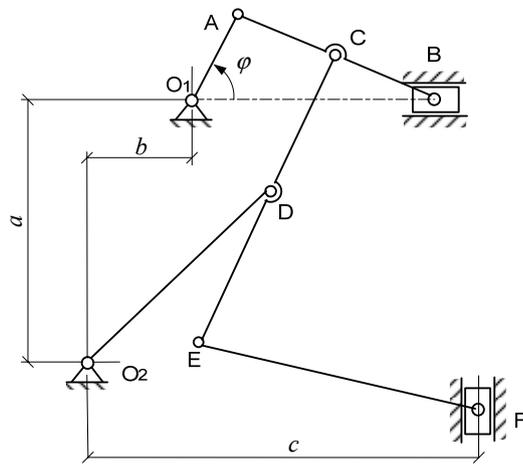


Рис. 3.22 а

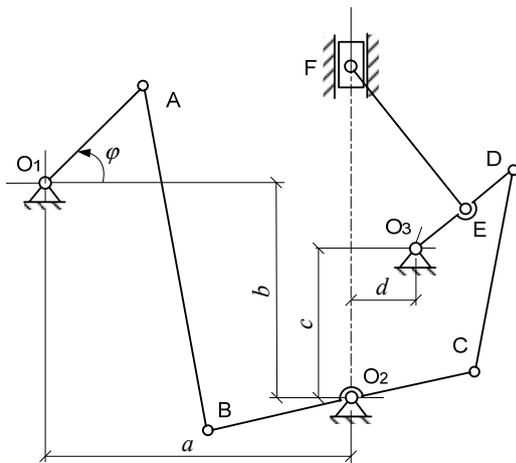


Рис. 3.23 а

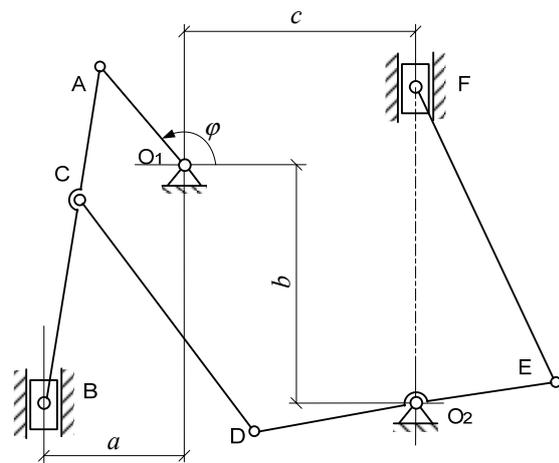


Рис. 3.24 а



## Лабораторная работа № 4

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

**Цель работы.** Изучение теоретического материала и применение принципа Даламбера для решения задач динамики.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Определение реакций связей плоского механизма с помощью принципа Даламбера.
3. Последовательность выполнения лабораторной работы.
4. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир.

#### 1. Краткая теория

##### 1.1. Принцип Даламбера для механической системы

Принцип Даламбера позволяет решать задачи исследования динамики материальной системы методами статики, составлением уравнений равновесия, учитывая силы инерции точек системы.

Согласно принципу Даламбера главный вектор всех сил (внешних, внутренних, условно приложенных сил инерции точек) и главный момент их относительно любого неподвижного центра будут равны нулю

$$\begin{aligned}\bar{R}' &= \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_i^{(i)} + \sum \bar{F}_i^{(ин)} = 0, \\ \bar{M}_O &= \sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(e)} \right) + \sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(i)} \right) + \sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(ин)} \right).\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum \bar{F}_i^{(i)} = 0$  и  $\sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(i)} \right) = 0$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned}\bar{R}' &= \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_i^{(ин)} = 0, \\ \bar{M}_O &= \sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(e)} \right) + \sum \bar{M}_O \left( \bar{F}_i^{(ин)} \right) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, принцип Даламбера исключает внутренние силы и упрощает решение задач. Следует научиться находить главный вектор  $\bar{R}'_{ин}$  и главный момент  $\bar{M}'_O^{ин}$  сил инерции.

## 1.2. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

а) Твердое тело совершает поступательное движение (рис. 4.1).

Силы инерции приводятся к равнодействующей  $\bar{R}_{ин}$ , приложенной к центру масс «С» твердого тела. Равнодействующая равна по модулю произведению массы твердого тела  $M$  на ускорение  $\bar{W}$  любой его точки и направлена противоположно этому ускорению.

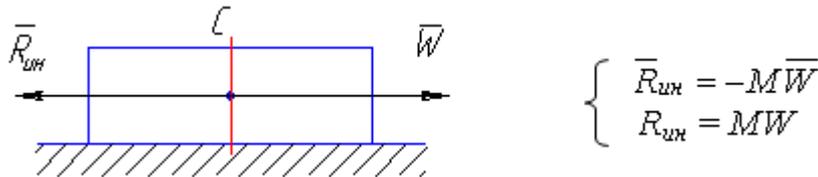


Рис. 4.1

б) Твердое тело совершает вращение вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к плоскости материальной симметрии (рис. 4.2).

При приведении сил инерции точек тела к центру ее вращения «О» получим силу, приложенную в этом центре, и пару сил, лежащую в плоскости симметрии.

Сила равна главному вектору, направленному противоположно ускорению центра масс

$$\bar{R}'_{ин} = -M\bar{W}_C,$$

где  $\bar{W}_C$  - ускорение центра масс.

Модуль главного вектора равен  $R'_{ин} = MW_C$ .

Момент пары сил равен главному моменту сил инерции относительно оси вращения, перпендикулярной к плоскости симметрии и по модулю равной

$$M_Z^{ин} = J_Z \varepsilon,$$

где  $J_Z$  - момент инерции относительно оси вращения,

$\varepsilon$  - угловое ускорение твердого тела.

$M_Z^{ин}$  направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

Если твердое тело совершает вращение вокруг неподвижной оси, которая является главной центральной осью инерции (рис. 4.3), то  $R'_{ин} = 0$ , так как  $W_C = 0$ , и силы инерции точек тела приводятся к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии тела, момент которой равен по модулю  $M_{CZ} = J_{CZ} \varepsilon$  и направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

в) Тело совершает плоскопараллельное движение (рис. 4.4).

Если твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции точек тела приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции  $\bar{R}'_{ин}$ , и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии, величина момента которой определяется формулой

$$M_C^{ин} = J_C \varepsilon.$$

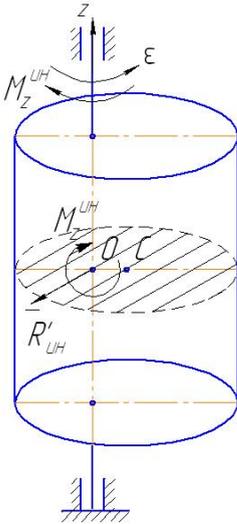


Рис. 4.2

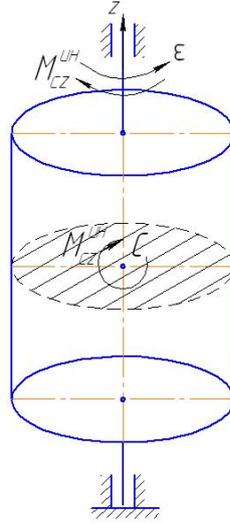


Рис. 4.3

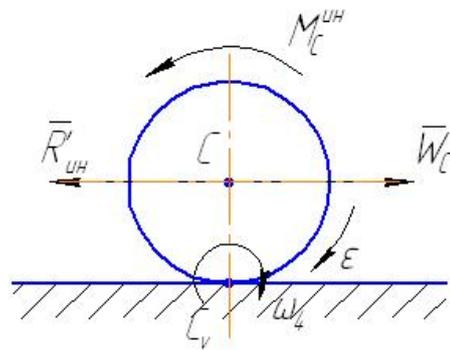


Рис. 4.4

$M_C^{ин}$  направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

$$\bar{R}'_{ин} = -M\bar{W}_C.$$

$\bar{R}'_{ин}$  направлен противоположно ускорению центра масс и по модулю равен  $R'_{ин} = MW_C$ .

## 2. Определение реакций связей плоского механизма с помощью принципа Даламбера

### Пример 1

Рассмотрим макет плоского механизма (рис. 4.5), для которого известно:

$\omega_{OA} = \omega_0$  – угловая скорость кривошипа (ведущего звена);

$\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0$  – угловое ускорение ведущего звена;

$OA = l_1$ ;  $AB = l_2$ ;

$P_1$  – вес ведущего звена;

$P_2$  – вес ползуна.

Весом шатуна  $AB$  пренебречь. Ведущее звено  $OA$  считать однородным стержнем. Требуется определить реакции оси  $O$  и направляющих ползуна  $B$ .

В начале выполнения работы, если ранее в предыдущих разделах не определялись кинематические характеристики механизма, требуется определить ускорение точки  $C$  (центра масс ведущего звена) и точки  $B$  (ползуна).

Для точек  $A$  и  $C$  ускорения найдем по известным формулам

$$\begin{aligned}\bar{W}_A &= \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau; W_A^n = \omega_O^2 l_1; W_A^\tau = \varepsilon_O l_1. \\ \bar{W}_C &= \bar{W}_C^n + \bar{W}_C^\tau; W_C^n = \omega_O^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_C^\tau = \varepsilon_O \frac{l_1}{2}.\end{aligned}$$

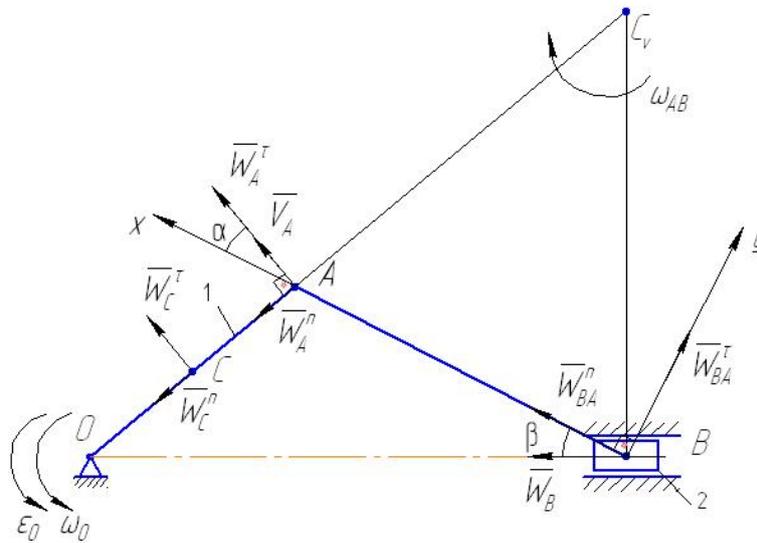


Рис. 4.5

Ускорение точки  $B$  найдем, принимая точку  $A$  за полюс, по теореме об ускорениях точек тела при плоском движении

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau; \quad (4.1)$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BA; W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot BA; \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}; V_A = \omega_O l_1.$$

Проектируя равенство (4.1) на ось  $x$  (см. рис. 4.5), получим:

$$W_B \cos \beta = W_A^\tau \cos \alpha + W_A^n \sin \alpha + W_{BA}^n, \text{ откуда находим}$$

$$W_B = \frac{W_A^\tau \cos \alpha + W_A^n \sin \alpha + W_{BA}^n}{\cos \beta}.$$

Так как механизм строили в масштабе, все размеры  $AC_V$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  измеряем с чертежа. После определения ускорений можно перейти к непосредственному решению задач.

На данную систему (плоский механизм) (рис. 4.6) действуют силы тяжести ведущего звена  $\bar{P}_1$ , ползуна  $\bar{P}_2$ , реакции оси  $\bar{Y}_O$ ,  $\bar{X}_O$ , реакции направляющих  $\bar{N}_2$ . Добавляем силы инерции. Ведущее звено совершает вращательное движение. Силы инерции приводим к точке  $O$  на оси вращения. Главный вектор сил инерции ведущего звена состоит из двух векторов, равных по модулю:  $R_{ин1}^n = m_1 W_C^n = \frac{P_1}{g} \omega_O^2 \frac{l_1}{2}$ ;  $R_{ин1}^\tau = m_1 W_C^\tau = \frac{P_1}{g} \epsilon_O \cdot \frac{l_1}{2}$ .

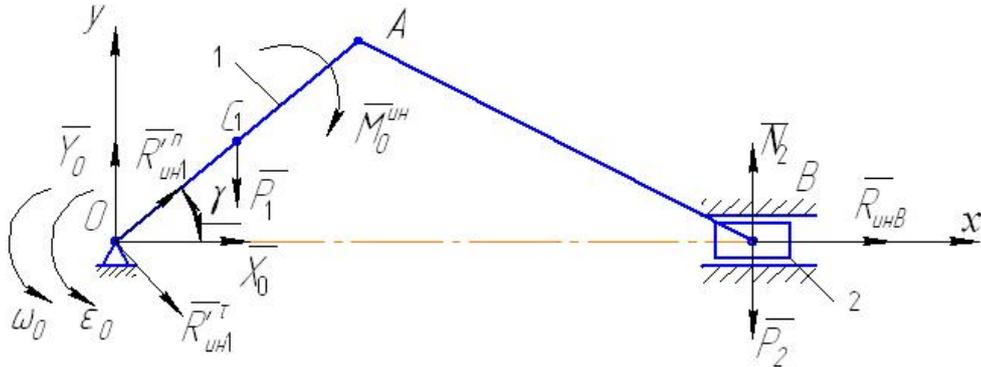


Рис. 4.6

Эти составляющие направлены в противоположные стороны соответствующим ускорениям центра масс звена. Главный момент сил инерции относительно оси вращения  $O$  равен

$$M_O^{ин} = J_O \epsilon_O; J_O = \frac{P_1 l_1^2}{3g}; M_O^{ин} = \frac{P_1 l_1^2}{3g} \epsilon_O.$$

Направляем его в сторону, противоположную направлению углового ускорения. Ползун  $B$  совершает поступательное движение. Силы инерции этого тела приводятся к равнодействующей, равной по модулю  $R_{инB} = m_2 W_B$ . Вектор  $\bar{R}_{инB}$  направлен в противоположную сторону вектору ускорения точки  $B$ .

Для полученной системы сил (см. рис. 4.6) составляем уравнения равновесия.

$$\sum F_{ix} = 0: X_O + R_{ин1}^n \cos \gamma + R_{ин1}^\tau \sin \gamma + R_{инB} = 0; \quad (4.2)$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_O + R_{ин1}^n \sin \gamma - R_{ин1}^\tau \cos \gamma - P_1 - P_2 + N_2 = 0; \quad (4.3)$$

$$\sum M_O = 0: -P_1 \frac{l_1}{2} \cos \gamma - M_1^{ин} - P_2 \cdot OB + N \cdot OB = 0. \quad (4.4)$$

Решая систему уравнений, найдем из уравнения (4.2)  $X_O$ , из уравнения (4.4) –  $N$ , из уравнения (4.3) –  $Y_O$ .

### Пример 2

В данном примере плоский механизм (рис. 4.7) включает в себя звенья, которые совершают вращательное движение ( $O_1 A$ ;  $O_2 B$ ) и плоскопараллельное ( $AB$ ).

В этом случае изменяется определение ускорений точек механизма.

Дано:  $\omega_0$ ;  $\varepsilon_0$ ;  $O_1 A = l_1$ ;  $O_2 B = l_2$ ;  $AB = l_3$ ,  $P_1$  – вес звена  $O_1 A$ ,  $P_2$  – вес звена  $O_2 B$ . Весом звена  $AB$  пренебречь. Все звенья – однородные стержни.

Размеры звеньев замеряем на макете механизма.

Требуется определить реакции в осях  $O_1$  и  $O_2$ .

Сначала определим ускорения  $W_{C1}^n, W_{C1}^\tau, W_B^n, W_B^\tau, W_{C2}^n, W_{C2}^\tau$  (см. рис. 4.7).

По изученным ранее методам определения кинематических характеристик точек тел при различных видах движения определяем:

$$V_A = \omega_0 l_1; \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}; V_B = \omega_{AB} \cdot BC_V = \frac{V_A \cdot BC_V}{AC_V}; \omega_{O_2 B} = \frac{V_B}{l_2}.$$

Переходим к определению ускорений:

$$\bar{W}_A = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau; W_A^n = \omega_0^2 l_1; W_A^\tau = \varepsilon_0 l_1.$$

$$\bar{W}_{C1} = \bar{W}_{C1}^n + \bar{W}_{C1}^\tau; W_{C1}^n = \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_{C1}^\tau = \varepsilon_0 \cdot \frac{l_1}{2}.$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_B^n + \bar{W}_B^\tau; W_B^n = \omega_{O_2 B}^2 \cdot l_2; W_B^\tau = \varepsilon_{O_2 B} l_2;$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau \text{ или}$$

$$\bar{W}_B^n + \bar{W}_B^\tau = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau \quad (4.5)$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot l_3; W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} l_3.$$

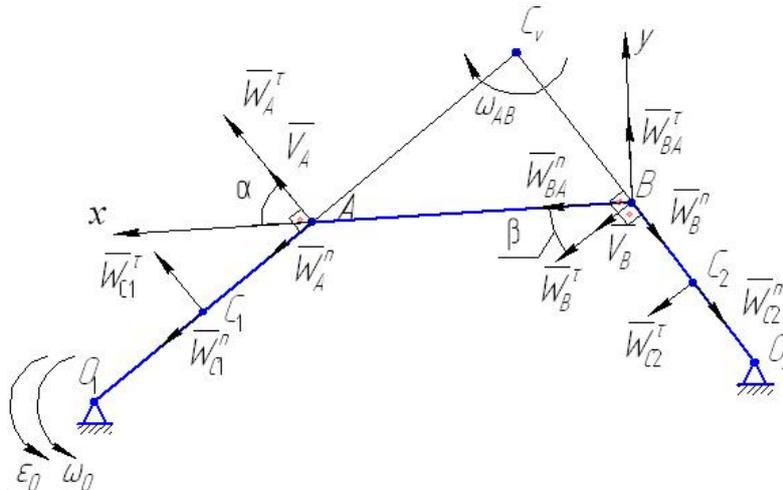


Рис. 4.7

Проектируем равенство (4.5) на ось  $x$  для определения  $W_B^\tau$ , имеем

$$-W_B^n \sin \beta + W_B^\tau \cos \beta = W_A^n \sin \alpha + W_A^\tau \cos \alpha + W_{BA}^n,$$

откуда определяем  $W_B^\tau$ , а затем  $\epsilon_{O_2B}$ .

$$W_B^\tau = \frac{W_A^n \sin \alpha + W_A^\tau \cos \alpha + W_{BA}^n + W_B^n \sin \beta}{\cos \beta}, \quad \epsilon_{BO_2} = \frac{W_B^\tau}{l_2}.$$

Теперь найдем ускорение центра масс  $C_2$

$$\bar{W}_{C_2} = \bar{W}_{C_2}^n + \bar{W}_{C_2}^\tau; \quad W_{C_2}^n = \omega_{O_2B}^2 \cdot \frac{l_2}{2}; \quad W_{C_2}^\tau = \epsilon_{O_2B} \cdot \frac{l_2}{2}.$$

Таким образом, определили необходимые ускорения, которые потребуются для определения приведенных сил инерции. Все размеры и углы берем с чертежа методом замера, так как механизм строится в масштабе.

Переходим к определению реакций в осях  $O_1$  и  $O_2$  с помощью принципа Даламбера (рис. 4.8, 4.9, 4.10). Чертежи рисуем в более крупном масштабе.

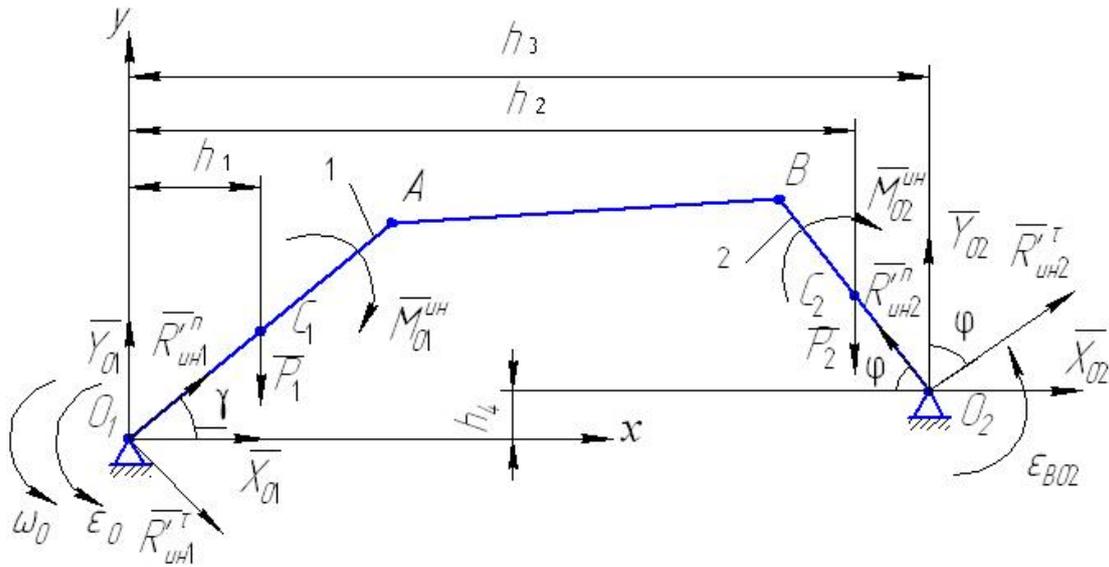


Рис. 4.8

На данную систему (см. рис. 4.8) действуют силы тяжести  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , приложенные в центрах тяжести первого и второго звеньев, реакции в осях  $Y_{O_1}, X_{O_1}, Y_{O_2}, X_{O_2}$ . Добавляем приведенные силы инерции. Первое и второе звенья совершают вращательное движение. Силы инерции приводим к точкам  $O_1$  и  $O_2$ . Для первого звена главный вектор сил инерции состоит из

двух векторов  $R_{un1}^n, R_{un1}^\tau$ , равных по модулю  $R_{un1}^n = m_1 W_{C_1}^n = \frac{P_1}{g} \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}$ ;

$R_{ун1}^{\tau} = m_1 W_{C1}^{\tau} = \frac{P_1}{g} \epsilon_O \cdot \frac{l_1}{2}$  и направленных в противоположные стороны соответствующим ускорениям.

Главный момент сил инерции относительно оси вращения  $O_1$  равен по модулю

$$M_{O1}^{ун} = J_{O1} \epsilon_O; J_{O1} = \frac{P_1 l_1^2}{3g}; M_{O1}^{ун} = \frac{P_1 l_1^2}{3g} \epsilon_O.$$

Для второго звена соответственно имеем векторы  $\bar{R}_{ун1}^n$  и  $\bar{R}_{ун1}^{\tau}$ , равные по модулю

$$R_{ун2}^n = m_2 W_{C2}^n = \frac{P_2}{g} \omega_{O2B}^2 \cdot \frac{l_2}{2}; R_{ун2}^{\tau} = m_2 W_{C2}^{\tau} = \frac{P_2}{g} \epsilon_{O2B} \cdot \frac{l_2}{2}$$

и направленные противоположно соответствующим ускорениям.

Главный момент сил инерции находим относительно оси  $O_2$

$$M_{O2}^{ун} = J_{O2} \epsilon_{O2B}; J_{O2} = \frac{P_2 l_2^2}{3g}; M_{O2}^{ун} = \frac{P_2 l_2^2}{3g} \epsilon_{O2B}.$$

Главные моменты сил инерции направлены в сторону, противоположную соответствующим угловым ускорениям (рис. 4.8). В результате получим расчетную схему произвольной плоской системы сил, содержащую четыре неизвестные реакции  $X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O2}$ .

Одной расчетной схемы недостаточно, так как для произвольной плоской системы можно составить лишь три уравнения равновесия. Поэтому, используя методику решения таких задач в статике, мы разъединяем систему на объекты равновесия и строим еще дополнительно две расчетные схемы (рис. 4.9, 4.10).

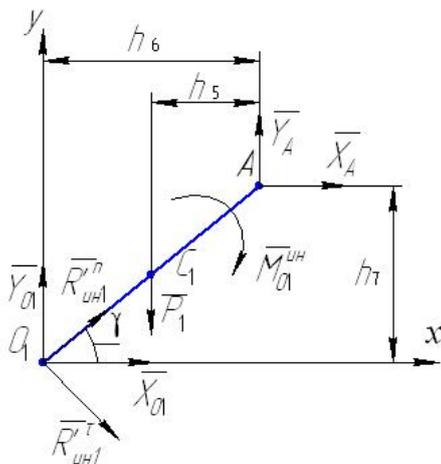


Рис. 4.9

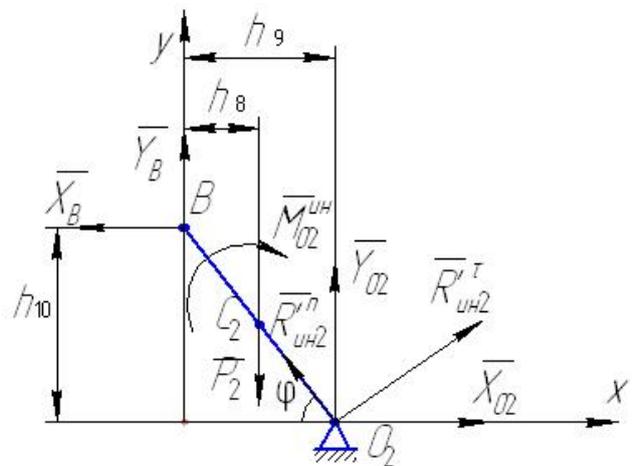


Рис. 4.10

Для определения четырех неизвестных  $X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O2}$  используем три объекта равновесия и составляем только четыре уравнения равновесия.

Для объекта на рис. 4.8 составим два уравнения равновесия

$$\sum M_{O1} = 0; -P_1 h_1 - M_{01}^{uu} - M_{02}^{uu} - P_2 h_2 + Y_{O2} \cdot h_3 - X_{O2} \cdot h_4 + R_{ун2}^n \sin \varphi \cdot h_3 + R_{ун2}^n \cos \varphi \cdot h_4 + R_{ун2}^\tau \cos \varphi \cdot h_3 - R_{ун2}^\tau \sin \varphi \cdot h_4 = 0; \quad (4.6)$$

$$\sum Fix = 0; X_{O1} + X_{O2} + R_{ун1}^n \cos \varphi + R_{ун1}^\tau \sin \varphi - R_{ун2}^n \cos \varphi + R_{ун2}^\tau \sin \varphi = 0. \quad (4.7)$$

Для объекта на рис. 4.9 составляем уравнение моментов всех сил относительно точки  $A$

$$\sum M_A = 0; -Y_{O1} \cdot h_6 + P_1 h_5 - M_1^{uu} + R_{ун1}^\tau \cdot l_1 + X_{O1} \cdot h_7 = 0. \quad (4.8)$$

Для объекта на рис. 4.10 составляем уравнение моментов всех сил относительно точки  $B$

$$\sum M_B = 0; -P_2 h_8 + Y_{O2} \cdot h_9 + X_{O2} \cdot h_{10} + R_{ун2}^\tau \cdot l_2 - M_{02}^{uu} = 0. \quad (4.9)$$

Решаем систему четырех уравнений. Из уравнения (4.9) выразим  $Y_{O2}$  и подставим в уравнение (4.6), из которого определим  $X_{O2}$ . Значение  $X_{O2}$  подставим в уравнение (4.7), из которого найдем  $X_{O1}$ . Найденное значение  $X_{O1}$  подставим в уравнение (4.8) и определим  $Y_{O1}$ . Таким образом, задача будет решена.

### Пример 3

На рис. 4.11 представлен плоский механизм, построенный в масштабе по макету, в котором к шатуну  $AB$  подсоединен ролик, представляющий собой сплошной однородный цилиндр радиусом  $r_2$ . Ролик катится по плоскости без скольжения. Для механизма дано:  $\omega_0$ ;  $\varepsilon_0$ ;  $OA = l_1$ ;  $AB = l_3$ ;  $r_2$ ;  $P_1$  – вес звена  $OA$ ;  $P_2$  – вес ролика. Весом шатуна  $AB$  пренебречь. Требуется определить реакции в оси  $O$ , реакцию плоскости и силу сцепления.

Найдем кинематические характеристики данного механизма:

$$V_A = \omega_0 l_1; W_A^n = \omega_0^2 l_1; W_A^\tau = \varepsilon_0 l_1; W_C^n = \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_C^\tau = \varepsilon_0 \frac{l_1}{2};$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}}; V_B = \omega_{AB} \cdot BC_{V1}; \omega_2 = \frac{V_B}{BC_{V2}} = \frac{V_B}{r_2};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \cdot \left( \frac{dV_B}{dt} \right); \quad \frac{dV_B}{dt} = W_B;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{W_B}{r_2}.$$

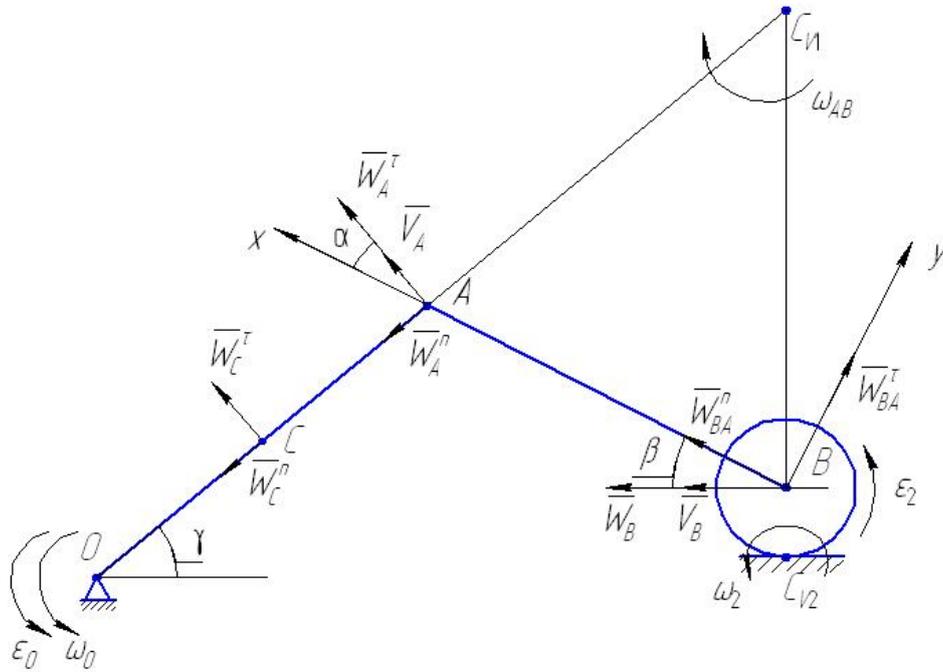


Рис. 4.11

Принимая точку  $A$  за полюс, найдем:

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau; \quad (4.10)$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB; \quad W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Проектируя равенство (4.10) на ось  $x$ , определим ускорение точки  $B$ :

$$W_B \cos\beta = W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n,$$

$$W_B = \frac{W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n}{\cos\beta}.$$

Все размеры берем с чертежа (см. рис. 4.11). Далее показываем все силы (рис. 4.12), действующие на механизм: силы тяжести  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ , реакции связей  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}_2$  и силу сцепления  $\bar{F}_{сц}$ . Добавляем приведенные силы инерции  $R_{ин1}^n, R_{ин1}^\tau, M_O^{ин}, R_{инB}^n, M_B^{ин}$ , которые определяем по модулю и направлению аналогично примерам 1 и 2.

Рассмотрев два объекта равновесия (рис. 4.12; рис. 4.13), составим необходимые уравнения равновесия.

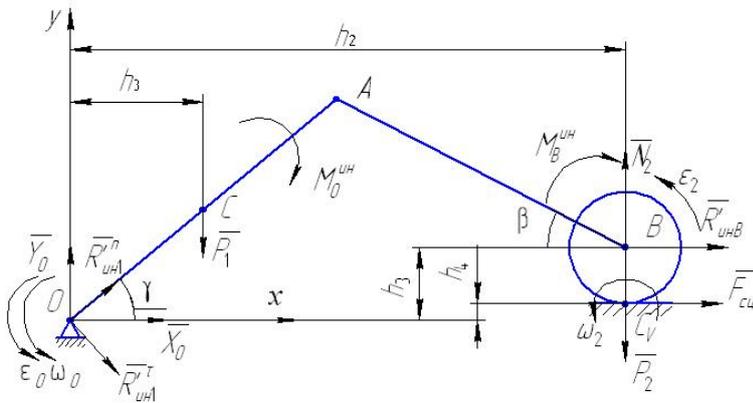


Рис. 4.12

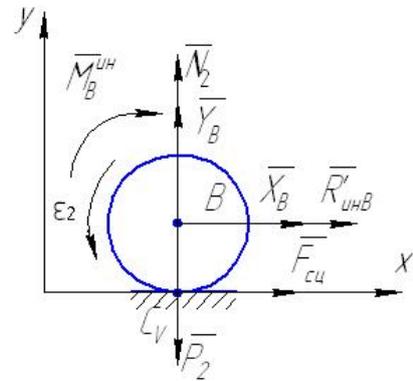


Рис. 4.13

Для объекта на рис. 4.13 составим одно уравнение равновесия

$$\sum M_B = 0; -M_B^{uh} + F_{cu} \cdot r_2 = 0. \quad (4.11)$$

Для объекта на рис. 4.12 составим три уравнения равновесия:

$$\sum Fix = 0; X_O + R_{ин1}^n \cos \gamma + R_{ин1}^t \sin \gamma + R_{инB} + F_{cu} = 0; \quad (4.12)$$

$$\sum Fiy = 0; Y_O + R_{ин1}^n \sin \gamma - R_{ин1}^t \cos \gamma - P_1 - P_2 + N_2 = 0; \quad (4.13)$$

$$\sum M_O = 0; -P_1 h_1 - M_O^{uh} - M_B^{uh} - P_2 \cdot h_2 + N_2 \cdot h_2 - R_{инB} \cdot h_3 - F_{cu} \cdot h_4 = 0. \quad (4.14)$$

Для ролика отдельно найдем  $M_B^{uh} = J_B \epsilon_2$ , где  $J_B = \frac{1}{2} M_2 r_2^2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2$ .

Решая систему четырех уравнений, находим из уравнения (4.11) силу сцепления  $F_{cu}$ , из уравнения (4.14) –  $N_2$ , из уравнения (4.12) –  $X_O$ , из уравнения (4.13) –  $Y_O$ .

### 3. Последовательность выполнения лабораторной работы

3.1. Построить механизм в заданном положении по макету механизма. Для этого измеряем длины звеньев  $l_1, l_2, l_3$  и базовые размеры.

3.2. Если ранее не были определены кинематические характеристики механизма, найти их, пользуясь примерами, приведенными в лабораторной работе № 3.

3.3. Определить с помощью принципа Даламбера реакции  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O$  в оси O и в зависимости от рассматриваемого механизма реакции  $N_2, F_{cu}, Y_{O2}, X_{O2}$ .

Данные согласно варианту, выданному преподавателем, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_0, \text{с}$	1	2	3	4	2	3	2	1	2	3
$\varepsilon_0, \text{с}$	2	1	2	2	3	1	4	2	2	2
$r_2, \text{м}$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,2	0,3	0,2	0,2	0,4	0,5

Результаты вычислений занести в табл. 4.2.

Таблица 4.2

$Y_O$	$X_O$	$Y_{O2}$	$X_{O2}$	$N_2$	$F_{сц}$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1 Что называется моментом инерции твердого тела относительно оси?

4.2 Сформулируйте принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.

4.3 Как вычисляются равнодействующая, главный вектор и главный момент сил инерции при различных случаях движения твердого тела?

4.4 Расскажите о направлении равнодействующей, главного вектора и главного момента сил инерции.

## Лабораторная работа № 5

### ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

**Цель работы.** Научиться составлять уравнение работ при исследовании равновесия плоских механизмов.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Исследование равновесия плоских механизмов с помощью принципа возможных перемещений.
3. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир, калькулятор.

#### 1. Краткая теория

Возможными, или виртуальными, перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям точек, и обозначают  $\delta S$ .

Число независимых между собой возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы.

Возможное перемещение является воображаемым перемещением в данный момент времени. В отличие от этого действительное перемещение точки происходит в определённом направлении под действием системы приложенных сил при непрерывном изменении аргумента – времени. Действительное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки (для стационарных связей).

Если в некотором положении механической системы с двусторонними идеальными связями приложенные к ней силы уравновешиваются, то на любом возможном перемещении системы из этого положения сумма работ задаваемых сил равна нулю

$$\sum F_i \delta S_i \cos(\bar{F}_i, \delta \bar{S}_i) = 0. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1), называемое уравнением работ, выражает одно из важнейших положений механики – принцип возможных перемещений, где  $\delta S_i$  – возможное перемещение точек системы.

Достоинством принципа возможных перемещений является отсутствие в его формулировке реакции идеальных связей. Идеальными называются связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю.

$$\sum R_i \delta S_i \cos(\bar{R}_i, \delta \bar{S}_i) = 0. \quad (5.2)$$

## 2. Исследование равновесия плоских механизмов с помощью принципа возможных перемещений

В данной работе рассматриваются плоские механизмы, находящиеся в равновесии под действием сил или сил и пар сил. Исследования равновесного состояния механизма сводятся к определению зависимости между ними. Применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, требуется определить величину, указанную в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер варианта	Номер рисунка	$M$ , кН·м	$F_B$ , кН	Определить	Номер варианта	Номер рисунка	$M$ , кН·м	$F_B$ , кН	Определить
1	5.1	10		$F_B$	16	5.4		15	$F_A$
2	5.2		6	$F_A$	17	5.1	5		$F_B$
3	5.3	5		$F_B$	18	5.2		3	$F_A$
4	5.4		14	$F_A$	19	5.3	7		$F_B$
5	5.1	12		$F_B$	20	5.4		8	$F_A$
6	5.2		4	$F_A$	21	5.1	2		$F_B$
7	5.3	4		$F_B$	22	5.2		10	$F_A$
8	5.4		7	$F_A$	23	5.3	8		$F_B$
9	5.1	8		$F_B$	24	5.4		3	$F_A$
10	5.2		9	$F_A$	25	5.1	7		$F_B$
11	5.3	9		$F_B$	26	5.2		16	$F_A$
12	5.4		12	$F_A$	27	5.3	10		$F_B$
13	5.1	14		$F_B$	28	5.4		11	$F_A$
14	5.2		8	$F_A$	29	5.1	16		$F_B$
15	5.3	11		$F_B$	30	5.2		13	$F_A$

### 2.1. Последовательность выполнения лабораторной работы

1. Построить механизм в масштабе, взяв с предложенного макета три первых звена. Положение механизма задано углом поворота ведущего звена (угол задается преподавателем). Если выполнялась работа по кинематике плоского механизма, то данные зависимости скоростей точек  $A$  и  $B$  нужно взять из той работы. Если нет, то на вновь построенном механизме надо определить эту зависимость, используя теорему о проекции скоростей на ось, соединяющую эти точки. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  измеряем на построенном в масштабе чертеже с помощью транспортира.

2. Изобразить на рисунке задаваемые силы ( $\bar{F}_A$ ,  $\bar{F}_B$  или  $M$ ) согласно своему варианту. Вариант выдаётся преподавателем.

3. Сообщить системе любое возможное перемещение и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения.

4. Записать уравнение работ согласно формуле (5.1) всех указанных сил на возможных перемещениях точек их приложения.

5. Решить составленное уравнение равновесия и определить величину, указанную в табл. 5.1 согласно варианту.

### 2.2. Примеры выполнения работы

#### Пример №1

На рис. 5.1 представлен плоский механизм, находящийся в равновесии в данном положении под действием силы  $\bar{F}_B$ , приложенной к ползуну, и пары сил с моментом  $M$ .

Определить модуль силы  $F_B$ , если известно  $M = 10$  кН·м (вращающий момент);  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $OA = 0,6$  м.

*Последовательность выполнения работы:*

1. Изобразим на рис. 5.1 момент пары сил  $M$ , приложенный к ведущему звену  $OA$ , и силу  $F_B$ , действующую на ползун  $B$ . Сила  $F_B$  препятствует движению ползуна  $B$ .
2. Задаем возможное перемещение  $\delta\varphi$  звену  $OA$  и выразим возможное перемещение  $\delta S_B$  через  $\delta\varphi$ .

При плоскопараллельном движении возможные скорости обладают теми же свойствами, что и скорости движения.

По теореме о проекции возможных скоростей на ось  $x$ , проходящую через  $AB$ , получим  $V_A \cos 15^\circ = V_B \cos \beta$ , где  $\cos 15^\circ = 0,97$ ;  $\cos \beta = \cos 45^\circ = 0,707$ . Тогда

$$V_B = \frac{V_A \cos 15^\circ}{\cos 45^\circ}; V_B = 1,37 \cdot V_A.$$

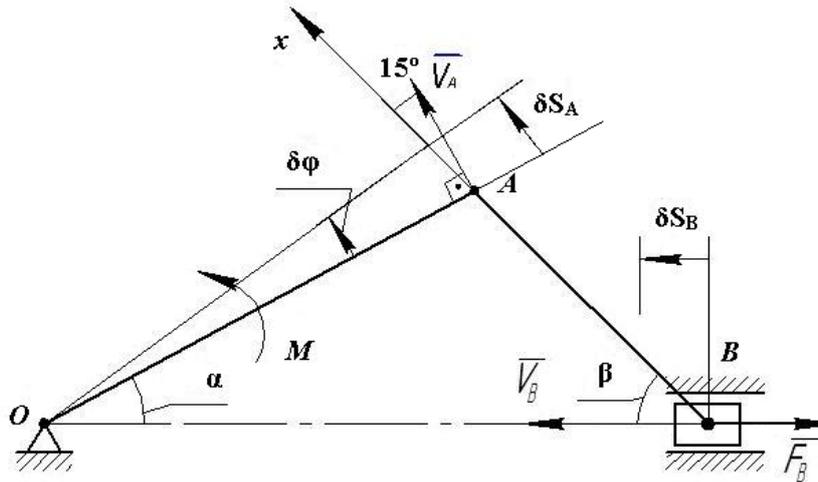


Рис. 5.1

Умножим последнее равенство на ничтожно малый промежуток времени  $\tau$ , получим соотношение возможных перемещений точек  $A$  и  $B$

$$\delta S_B = 1,37 \cdot \delta S_A.$$

Так как  $\delta S_A = \delta \varphi \cdot OA$ , то получим

$$\delta S_B = 1,37 \cdot \delta \varphi \cdot OA; \delta S_B = 1,37 \cdot 0,6 \cdot \delta \varphi = 0,822 \cdot \delta \varphi.$$

3. Вычислим сумму работ момента  $M$  и силы  $F_B$  на заданном возможном перемещении

$$M \cdot \delta \varphi - F_B \cdot \delta S_B = 0.$$

Подставим значение  $\delta S_B$ , выраженное через  $\delta \varphi$ . Тогда получим  $M \cdot \delta \varphi - F_B \cdot 0,822 \cdot \delta \varphi = 0$ . Сократив на  $\delta \varphi$ , найдём:  $M = 0,822 \cdot F_B$ , откуда

$$F_B = \frac{M}{0,822} = \frac{10}{0,822} \approx 12,2 \text{ кН};$$

Ответ:  $F_B = 12,2$  кН.

*Пример №2*

На плоский механизм (рис. 5.2) действуют силы  $\bar{F}_A \perp OA$  и  $\bar{F}_B$  вдоль направляющих, которые взаимно уравновешиваются в данном положении механизма.

Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $F_B = 7,3$  кН. Определить модуль силы  $F_A$ .

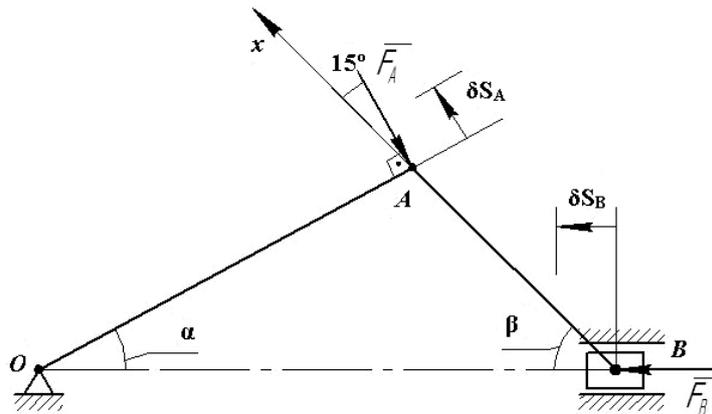


Рис. 5.2

*Последовательность выполнения работы:*

1. Изобразим на рис. 5.2 силу  $\overline{F}_A$ , направленную  $\perp OA$  в сторону, противоположную возможному повороту этого звена, и вектор  $\overline{F}_B$ .
2. Задаем возможное перемещение  $\delta S_B$ . Тогда по аналогии с предыдущим примером (рассматривается тот же механизм), имеем

$$\delta S_B = 1,37 \cdot \delta S_A; \delta S_A = \frac{\delta S_B}{1,37}.$$

3. Вычислим сумму работ сил  $F_B$  и  $F_A$  на возможном перемещении

$$F_B \cdot \delta S_B - F_A \cdot \delta S_A = 0; F_B \cdot \delta S_B - F_A \cdot \frac{\delta S_B}{1,37} = 0.$$

Сокращая на  $\delta S_B \neq 0$ , получим:  $F_A = F_B \cdot 1,37$ ,  $F_A = 7,3 \cdot 1,37 \approx 10$  кН.

Ответ:  $F_A \approx 10$  кН.

*Пример №3*

Плоский механизм (рис. 5.3) находится в равновесии в данном положении под действием пары сил с моментом  $M$ , приложенной к звену  $OA$ , и силы  $\overline{F}_B$ , приложенной к точке  $B$  перпендикулярно звену  $O_1B$ .

Дано:  $M = 4$  кН·м;  $OA = 0,2$  м.

Определить модуль силы  $F_B$ .

*Последовательность выполнения работы:*

1. Изобразим на рис. 5.3 момент пары сил  $M$ , приложенный к ведущему звену  $OA$ , и силу  $F_B$ , действующую на шарнир  $B$  звена  $O_1B$  пер-

пендикулярно этому звену в сторону, противоположную возможному повороту звена  $O_1B$ .

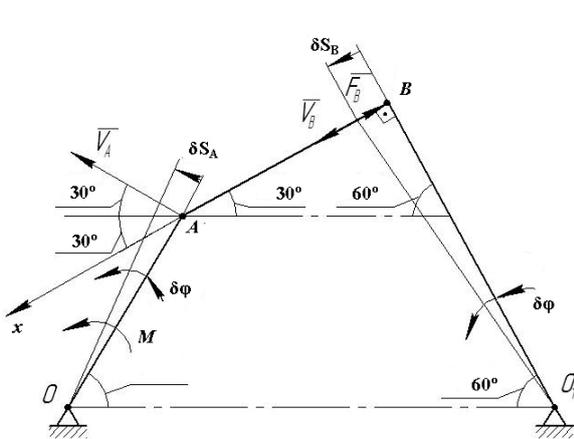


Рис. 5.3

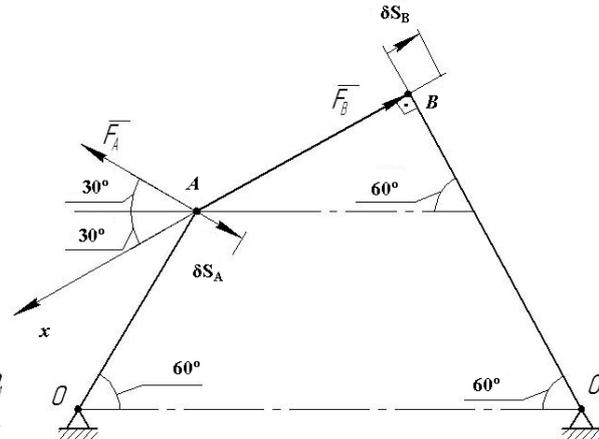


Рис. 5.4

2. Задаем возможное перемещение  $\delta\varphi$  звену  $OA$  и выразим  $\delta S_B$  через  $\delta\varphi$ . По теореме о проекции возможных скоростей на ось, проходящую через  $AB$ , получим:

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B, \text{ значит } \delta S_B = \delta S_A \cdot \cos 60^\circ, \delta S_B = 0,5 \cdot \delta S_A.$$

Так как  $\delta S_A = \delta\varphi \cdot OA = 0,2 \cdot \delta\varphi$ , то  $\delta S_B = 0,5 \cdot 0,2 \cdot \delta\varphi$ ,  $\delta S_B = 0,1 \cdot \delta\varphi$ .

3. Вычислим сумму работ  $M$  и  $F_B$  на заданном возможном перемещении

$$M \cdot \delta\varphi - F_B \cdot \delta S_B = 0.$$

Подставляя  $\delta S_B = 0,1 \cdot \delta\varphi$ , получим:  $M \cdot \delta\varphi - F_B \cdot 0,1 \cdot \delta\varphi = 0$ .

Сократив на  $\delta\varphi$ , запишем:  $M - 0,1 \cdot F_B = 0$ , откуда

$$F_B = \frac{M}{0,1} = \frac{4}{0,1} = 40 \text{ кН.}$$

Ответ:  $F_B = 40$  кН.

#### Пример №4

Плоский механизм (рис. 5.4) находится в равновесии в данном положении под действием силы  $\bar{F}_A$ , приложенной к точке  $A$  перпендикулярно звену  $OA$ , и силы  $\bar{F}_B$ , приложенной к точке  $B$  перпендикулярно звену  $O_1B$ .

Дано:  $F_B = 10$  кН;  $l_{OA} = 0,2$  м. Определить модуль силы  $F_A$ .

Последовательность выполнения работы:

1. Изобразим на рис. 5.4 силы  $\vec{F}_A$ , и  $\vec{F}_B$ .
2. Зададим возможное перемещение  $\delta S_B$  точки  $B$  и выразим возможное перемещение  $\delta S_A$  точки через  $\delta S_B$ , используя расчеты в предыдущем примере.

$$\delta S_B = \delta S_A \cdot \cos 60^\circ; \delta S_A = \frac{\delta S_B}{\cos 60^\circ} = \frac{\delta S_B}{0,5}; \delta S_A = 2\delta S_B.$$

3. Вычислим сумму работ сил  $F_B$  и  $F_A$  на возможном перемещении

$$F_B \cdot \delta S_B - F_A \cdot \delta S_A = 0.$$

С учетом  $\delta S_A = \frac{\delta S_B}{0,5}$  получим  $F_B \cdot \delta S_B - F_A \frac{\delta S_B}{0,5} = 0.$

Сократив на  $\delta S_B$ , найдем  $F_A$ :

$$F_A = 0,5 \cdot F_B; F_A = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ кН}.$$

Ответ:  $F_A = 5 \text{ кН}.$

Результаты расчета занести в табл. 5.2.

Таблица 5.2

$l_{OA}, \text{ м}$	$l_{AB}, \text{ м}$	$l_{O1B}, \text{ м}$	$\delta\varphi_{OA}$	$\delta S_A$	$\delta S_B$	$M,$ кН·м	$F_A,$ кН	$F_B,$ кН
0,2				$2\delta S_B$			5	10

### 3. Контрольные вопросы

- 3.1. Запишите формулу определения работы постоянной силы.
- 3.2. Как определяется работа постоянного момента?
- 3.3. Что называется возможным перемещением механической системы?
- 3.4. Сформулируйте принцип возможных перемещений.

## Лабораторная работа № 6

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

**Цель работы.** Приобрести навыки использования принципа возможных перемещений для определения реакций связей составных конструкций.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Определение реакций связей составной конструкции.
3. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет конструкции, линейка, транспортир, калькулятор.

#### 1. Краткая теория

При исследовании равновесия сложных несвободных систем необходимо определить реакции связей, действующие на системы, не обладающие ни одной степенью свободы. К таким системам относятся сооружения, несущие нагрузку, так как они должны быть неизменяемыми и неподвижно прикрепленными к земле.

Применение уравнений равновесия усложняет задачу. Для расчета реакций связей в этом случае используется принцип возможных перемещений, который устанавливает общее условие равновесия механической системы и выражается уравнением

$$\sum F_i \delta S_i \cos(\bar{F}_i, \delta \bar{S}_i) = 0. \quad (6.1)$$

Это уравнение называют уравнением работ. При расчете реакций связей отбрасывают ту связь, реакцию которой требуется определить. Действие связи заменяют ее реакцией, которая переходит в число задаваемых сил. При этом система, освобожденная от одной связи (если она статистически определима), получает одну степень свободы.

Затем системе сообщают возможное перемещение, соответствующее этой степени свободы. Составляют уравнение работ согласно уравнению (6.1), в которое входят не только задаваемые силы, но и реакция отброшенной связи. Из этого уравнения сразу определяют искомую реакцию. Для определения других связей поступают так же, отбрасывая снова только одну связь, сообщая системе одну степень свободы.

## 2. Определение реакций связей составной конструкции

В данной работе предлагается макет конструкции и требуется определить реакции связей. Виды связей приведены студенту в табл. 6.1, там же указана нагрузка, действующая на данную систему. Вариант задания выдается преподавателем.

### 2.1. Последовательность выполнения работы

а) Построить заданную схему по макету с указанием вида опор и внешней нагрузки. Эти данные следует взять из табл. 6.1 по варианту, выданному преподавателем.

б) Используя принцип возможных перемещений, определить реакции в опорах и результат вычислений занести в табл. 6.2.

в) Выполнить внеаудиторное задание согласно выданному варианту конструкции. Схемы конструкций представлены на рис. 6.1 а – 6.30 а.

### 2.2. Пример выполнения работы

Дана конструкция, состоящая из двух балок  $AC$  и  $CD$ , соединенных в точке  $C$  с помощью цилиндрического шарнира (рис. 6.1). В точке  $A$  система имеет шарнирно-неподвижную опору, а в точках  $B$  и  $D$  шарнирно-подвижные опоры.

Конструкция нагружена двумя сосредоточенными силами  $P_1 = 20$  кН;  $P_2 = 10$  кН, парой сил с моментом  $M = 100$  кН·м и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 25$  кН/м. Длина балки  $AC = 3l$ ,  $CD = 2l$ , где  $l = 2$  м.

Определить при помощи принципа возможных перемещений реакции неподвижной шарнирной опоры  $A$  и реакции подвижно-шарнирных опор  $B$  и  $D$ .

Реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  определим по горизонтальной и вертикальной составляющим.

Для определения составляющей  $\bar{X}_A$  мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению балки, т.е. заменим неподвижную шарнирную опору  $A$  шарнирной опорой на катках, приложив при этом к балке горизонтальную реакцию  $\bar{X}_A$  (см. рис. 6.2). Получим составную балку, которая имеет все опоры на катках.

Таблица 6.1

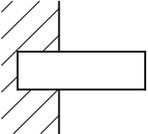
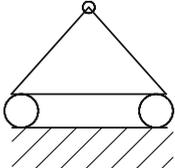
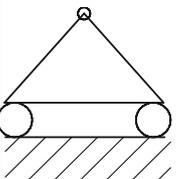
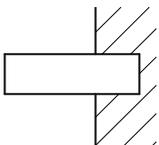
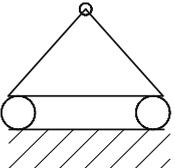
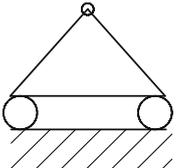
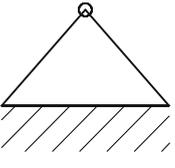
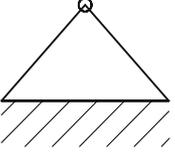
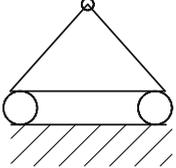
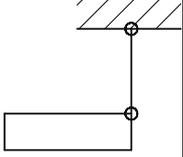
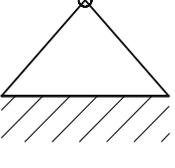
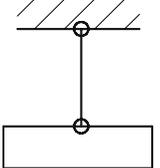
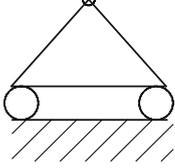
Номер варианта	Вид опор			Значение сил				$l$ , м	$\alpha$ , град	$\beta$ , град
	$A$	$B$	$D$	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кНм			
1		—		40	60	10	20	2	30	60
2		—		40	30	5	30	4	60	30
3				30	10	4	60	2	30	60
4				30	20	10	80	4	60	30
5				40	10	5	5	2	30	60

Таблица 6.2

$X_A$	$Y_A$	$Y_B$	$Y_D$
1,5 кН	-21,34 кН	48,66 кН	35 кН

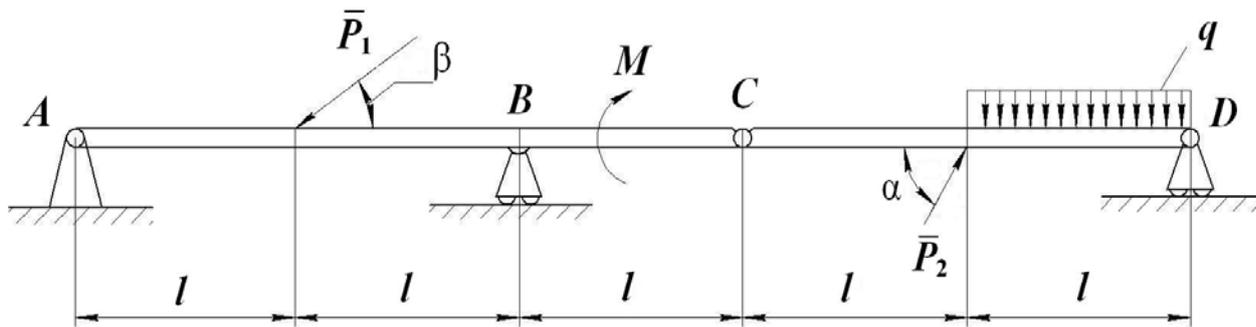


Рис. 6.1

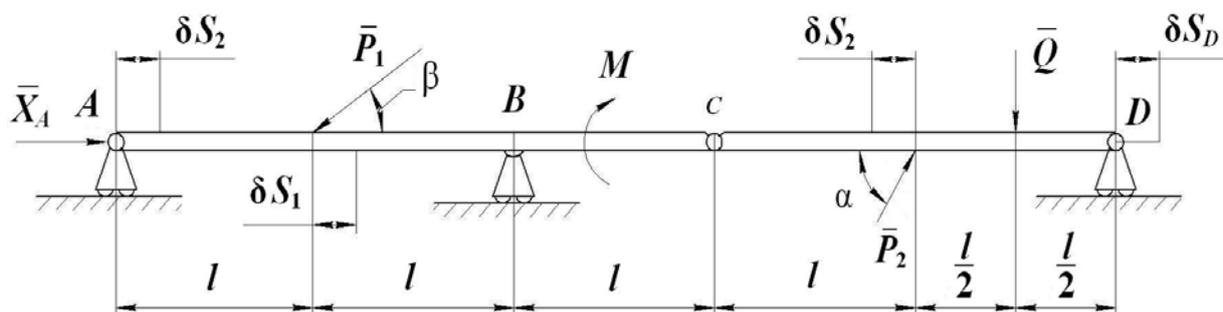


Рис. 6.2

Сообщим этой балке возможное перемещение (горизонтальное)  $\delta S_A$ , направленное вправо. Работа всех вертикальных сил на горизонтальном перемещении  $\delta S_A$  равна нулю. Работа пары сил, определяемая формулой  $A = \pm M\delta$ , равна нулю, так как балка, к которой приложена пара, не получила поворота. На возможном перемещении работу совершают только силы  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{X}_A$ . Уравнение работ при этом запишется

$$X_A \delta S_A - P_1 \cos \beta \delta S_1 + P_2 \cos \alpha \delta S_2 = 0, \quad (6.2)$$

где  $\delta S_A = \delta S_1 = \delta S_2$

Тогда уравнение (6.2) примет вид

$$X_A - P_1 \cos \beta + P_2 \cos \alpha = 0,$$

откуда  $X_A = P_1 \cos \beta - P_2 \cos \alpha$ . Подставив численные значения, получим:  $X_A = 1,5 \text{ кН}$ .

Чтобы определить вертикальную составляющую  $\bar{Y}_A$  реакции опоры A, мысленно отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению конца A, приложив при этом к балке реакцию  $\bar{Y}_A$  (рис. 6.3). Устано-

вим, какое перемещение можно сообщить полученной системе, не нарушая имеющихся связей.

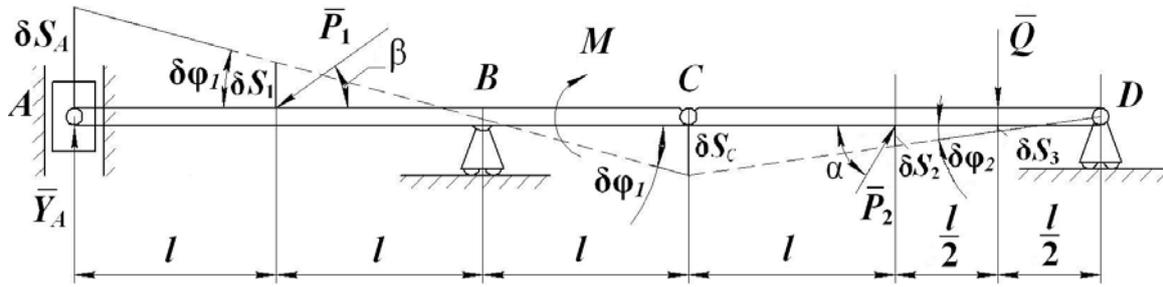


Рис. 6.3

Поступательному перемещению по горизонтальному направлению балки  $CD$  препятствует опора  $A$ , по вертикальному – опоры  $B$  и  $D$ . Поворот балки  $CD$ , лежащей на опоре  $D$ , возможен на малый угол  $\delta\varphi_2$  вокруг неподвижной точки  $D$ , а балка  $AC$  повернется на угол  $\delta\varphi_1$ , шарнир  $C$  переместится по вертикали. Отметим возможные перемещения тех точек, где приложены силы, т.е.  $\delta S_1$ ,  $\delta S_B$ ,  $\delta S_2$ ,  $\delta S_3$ . Причем равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой  $Q = q \cdot l = 50 \text{ кН}$ , приложенной на расстоянии  $\frac{l}{2}$  от опоры  $D$ .

При составлении уравнения работ определим работу пары сил по формуле  $A = \pm M \delta\varphi_1$ . Поворот балки  $AC$  произведен по движению часовой стрелки и пара стремится вращать плоскость в том же направлении, значит, знак работы пары сил будет положительным.

Уравнение работ для определения реакции  $\bar{Y}_A$  имеет вид

$$Y_A \delta S_A - P_1 \sin \beta \delta S_1 + M \delta\varphi_1 - P_2 \sin \alpha \delta S_2 + Q \delta S_3 = 0. \quad (6.3)$$

Выразим возможные перемещения всех точек через одну и ту же величину, например через  $\delta\varphi_1$ . Тогда перемещение каждой точки определяется произведением угла поворота на расстояние от точки до соответствующего центра вращения. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= l \delta\varphi_1; \quad \delta S_A = 2l \delta\varphi_1; \quad \delta S_C = l \delta\varphi_1 = 2l \delta\varphi_2; \\ \delta\varphi_2 &= \frac{\delta\varphi_1}{2}; \quad \delta S_2 = l \delta\varphi_2 = \frac{l \delta\varphi_1}{2}; \quad \delta S_3 = \frac{l}{2} \delta\varphi_2 = \frac{l \delta\varphi_1}{4}. \end{aligned}$$

Подставим эти значения в уравнение (6.3)

$$Y_A 2l \delta\varphi_1 - P_1 \sin \beta l \delta\varphi_1 + M \delta\varphi_1 - P_2 \sin \alpha \frac{l \delta\varphi_1}{2} + Q \frac{l \delta\varphi_1}{4} = 0.$$

Сократив на  $\delta\varphi_1$  и подставив числовые значения, найдем:

$$Y_A = -21,34 \text{ кН.}$$

Знак минус означает, что реакция  $\bar{Y}_A$  направлена противоположно направлению, указанному на чертеже. Для определения реакции в опоре  $B$  мысленно отбросим эту опору, приложив к балке ее реакцию  $\bar{Y}_B$ .

Сообщим полученной системе возможное перемещение, повернув балку  $AC$  вокруг неподвижной опоры  $A$ , тогда балка  $CD$  повернется вокруг опоры  $D$  (рис. 6.4). Составим уравнение работ

$$-P_1 \sin \beta \delta S_1 + Y_B \delta S_B - M \delta \varphi_1 + P_2 \sin \alpha \delta S_2 - Q \delta S_3 = 0. \quad (6.4)$$

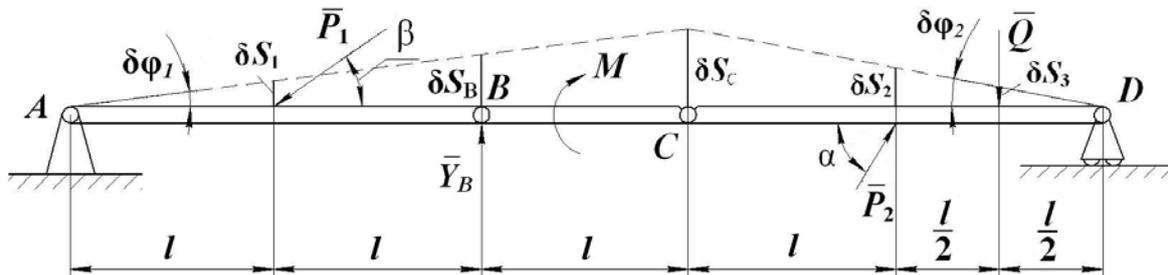


Рис. 6.4

Выразим возможные перемещения через  $\delta\varphi_1$

$$\delta S_1 = l \delta \varphi_1; \quad \delta S_B = 2l \delta \varphi_1; \quad \delta S_C = 3l \delta \varphi_1 = 2lc;$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{3}{2} \delta \varphi_1; \quad \delta S_2 = l \delta \varphi_2 = \frac{3}{2} l \delta \varphi_1; \quad \delta S_3 = \frac{l}{2} \delta \varphi_2 = \frac{3}{2} \frac{l}{2} \delta \varphi_1.$$

Подставим эти значения в уравнение работ (6.4).

$$-P_1 \sin \beta l \delta \varphi_1 + Y_B 2l \delta \varphi_1 - M \delta \varphi_1 + P_2 \sin \alpha \frac{3}{2} l \delta \varphi_1 - Q \frac{3}{4} l \delta \varphi_1 = 0.$$

Сократив на  $\delta\varphi_1$  и подставив численные значения, найдем:

$$Y_B = -481,66 \text{ кН.}$$

Чтобы определить реакцию в опоре  $D$ , мысленно отбросим опору, заменив ее действие реакцией  $\bar{Y}_D$ .

Сообщим полученной системе возможное перемещение повернув балку  $DC$  вокруг шарнира  $C$ , причем балка  $AC$  при этом будет неподвижна (рис. 6.5).

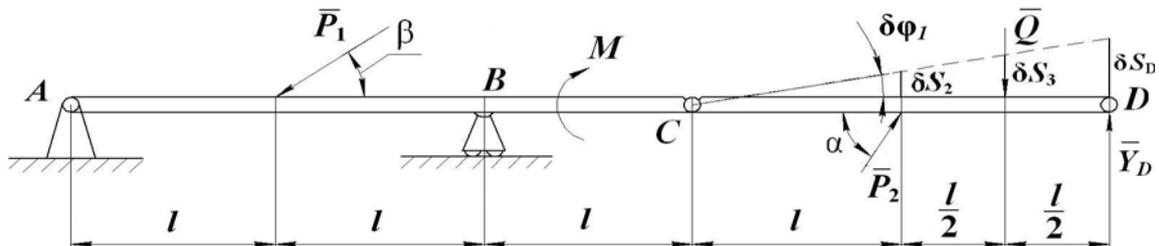


Рис. 6.5

Составим уравнение работ

$$P_2 \sin \alpha \delta S_2 - Q \delta S_3 + Y_D \delta S_D = 0. \quad (6.5)$$

Выразим возможные перемещения через  $\delta \varphi_1$

$$\delta S_2 = l \delta \varphi_1 = \frac{3}{2} l \delta \varphi_1; \quad \delta S_D = 2 l \delta \varphi_1.$$

Подставив эти значения в уравнение (6.5), получим:

$$P_2 \sin \alpha l \delta \varphi_1 - Q \frac{3}{2} l \delta \varphi_1 + Y_D 2 l \delta \varphi_1 = 0.$$

После сокращения на  $\delta \varphi_1$  и вычислений найдем  $Y_D$   $Y_D = 35$  кН.

.

Результаты вычислений занесем в табл. 6.2.

#### 4. Контрольные вопросы

- 4.1. Что называется возможным перемещением системы?
- 4.2. Сформулируйте принцип возможных перемещений (уравнение работ).
- 4.3. Какие силы входят в уравнение работ?
- 4.4. Что такое идеальные связи?

## Схемы конструкций к внеаудиторному заданию

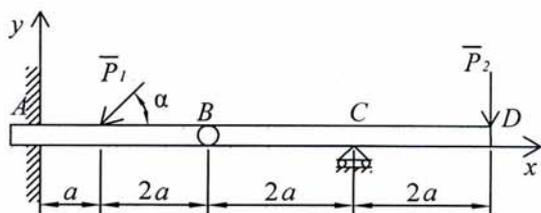


Рис. 6.1а

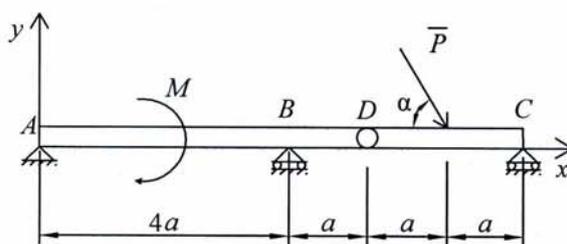


Рис. 6.2а

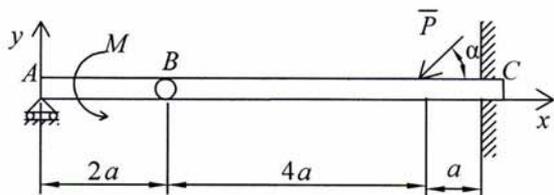


Рис. 6.3а

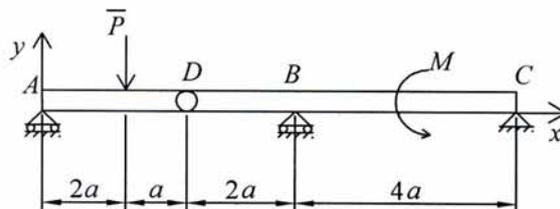


Рис. 6.4а

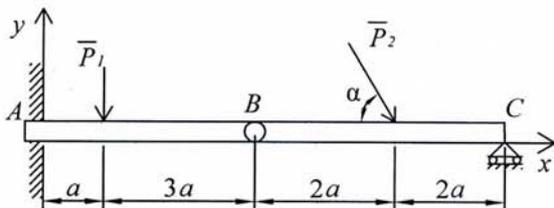


Рис. 6.5а

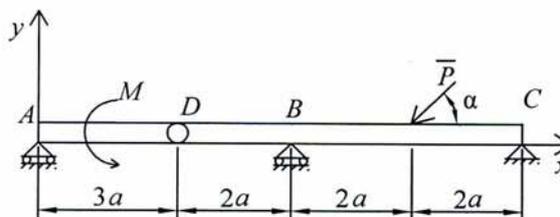


Рис. 6.6а

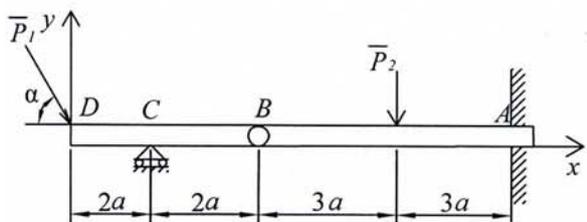


Рис. 6.7а

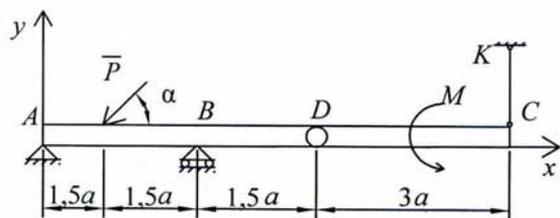


Рис. 6.8а

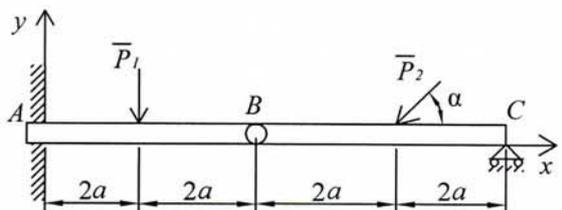


Рис. 6.9а

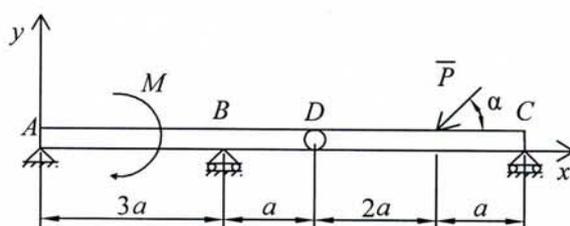


Рис. 6.10а

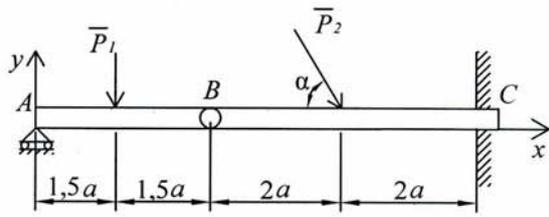


Рис. 6.11а

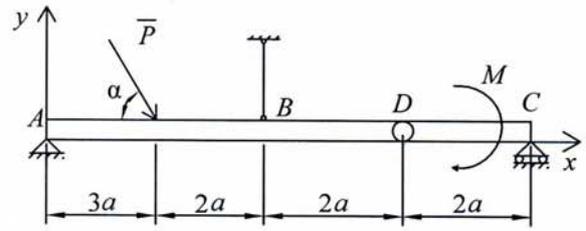


Рис. 6.12а

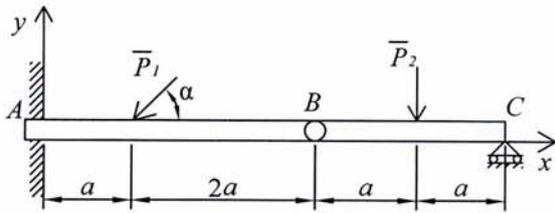


Рис. 6.13а

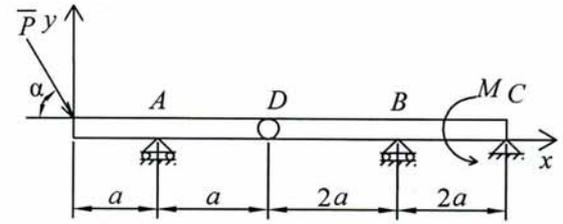


Рис. 6.14а

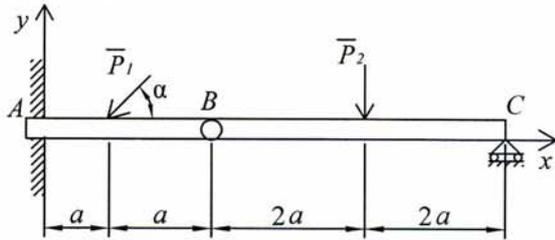


Рис. 6.15а

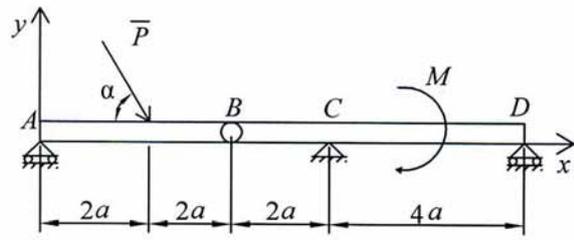


Рис. 6.16а

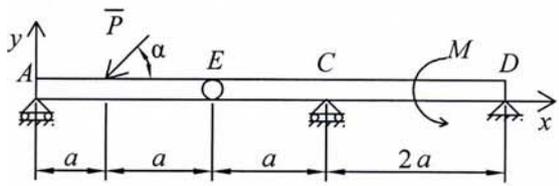


Рис. 6.17а

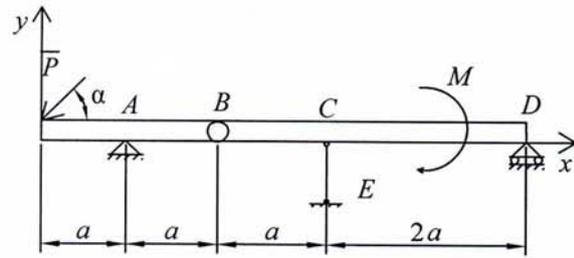


Рис. 6.18а

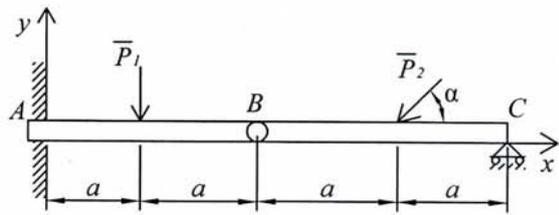


Рис. 6.19а

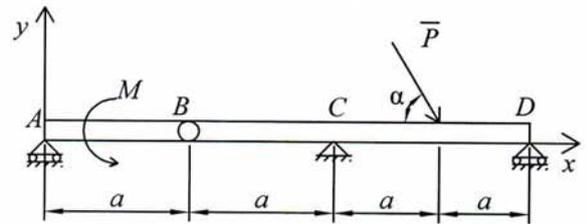


Рис. 6.20а

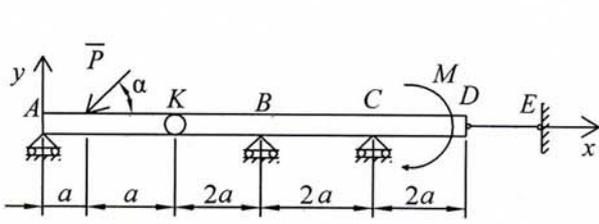


Рис. 6.21а

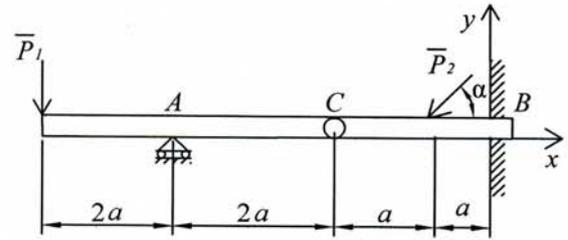


Рис. 6.22а

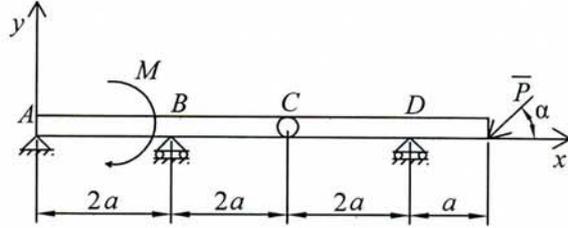


Рис. 6.23а

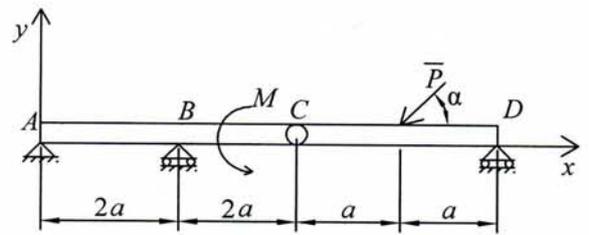


Рис. 6.24а

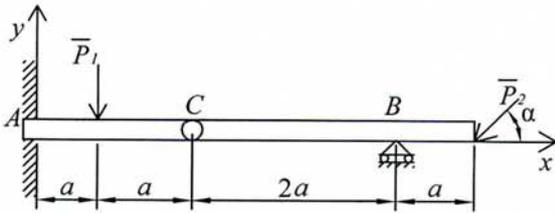


Рис. 6.25а

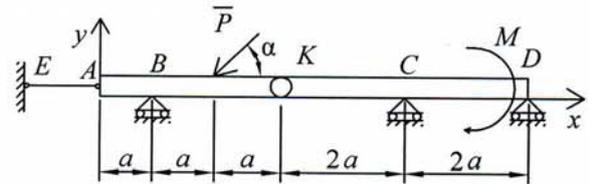


Рис. 6.26а

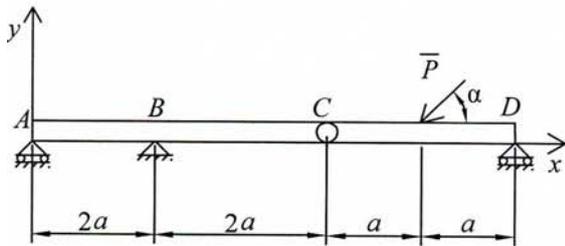


Рис. 6.27а

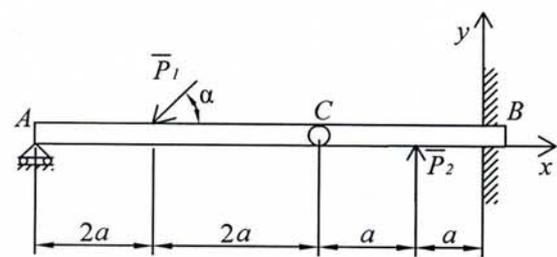


Рис. 6.28а

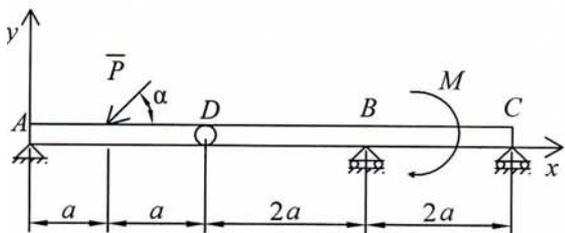


Рис. 6.29а

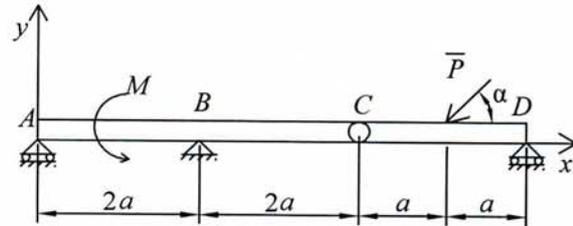


Рис. 6.30а

## Лабораторная работа № 7

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА В ЗАДАННОМ ПОЛОЖЕНИИ

**Цель работы.** Научиться определять кинетическую энергию системы, состоящей из нескольких тел.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Примеры определения кинетической энергии кривошипно-шатунных механизмов.
3. Последовательность выполнения лабораторной работы.
4. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир.

#### 1. Краткая теория

Кинетическая энергия – это скалярная мера механического движения материальной точки или механической системы. Она является важным фактором при исследовании движения материальной точки и механической системы. Поэтому надо уметь определять кинетическую энергию механической системы.

Кинетическая энергия системы, состоящей из нескольких твердых тел, равна сумме кинетических энергий тел, входящих в данную систему:

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n; \quad \text{т.е.} \quad T = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам

а) при поступательном движении

$$T = \frac{1}{2}MV^2,$$

где  $M$  – масса твердого тела, а  $V$  – скорость любой точки;

б) при вращении вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2,$$

где  $J_z$  – момент инерции твердого тела относительно оси вращения  $z$ ,

$\omega$  – угловая скорость вращения;

в) при плоскопараллельном движении

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где  $M$  – масса твердого тела,

$V_c$  – скорость центра масс тела,

$J_c$  – момент инерции твердого тела относительно оси  $cz$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения,

$\omega$  – величина мгновенной угловой скорости вращения.

## 2. Примеры определения кинетической энергии кривошипно-шатунных механизмов

### Пример 2.1

Вычислить кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 7.1

Дано:  $l_1$  – длина кривошипа  $OA$ ,  $l_2$  – длина шатуна  $AB$ ,  $P_1$  – вес кривошипа  $OA$ ;  $P_2$  – вес ползуна  $B$ , весом шатуна  $AB$  пренебречь.  $\omega_0$  – угловая скорость вращения кривошипа  $OA$ . Кривошип считать тонким однородным стержнем. Кинетическая энергия заданной системы

$$T = T_{OA} + T_B. \quad (7.1)$$

Так как по условию задачи массой шатуна пренебрегаем, то и кинетическую энергию его не учитываем.

Кривошип  $OA$  совершает вращательное движение. Его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega_{OA}^2,$$

где  $J_O = \frac{m_1 l_1^2}{3}$ ,  $m_1 = \frac{P_1}{g}$ ,  $J_O = \frac{P_1 l_1^2}{3g}$ ,  $\omega_{OA} = \omega_0$ .

Окончательно получим

$$T_{OA} = \frac{P_1 l_1^2 \omega_0^2}{6g}. \quad (7.2)$$

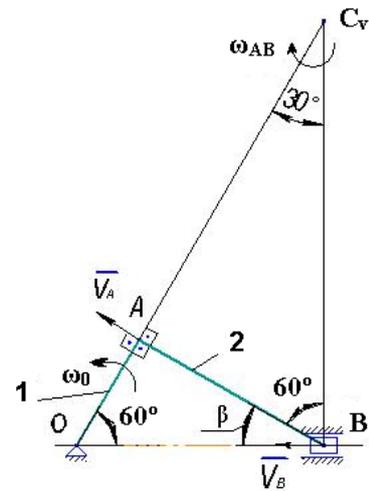


Рис. 7.1

Ползун  $B$  совершает поступательное движение. Кинетическая энергия ползуна определяется по формуле

$$T_B = \frac{1}{2} m_2 V_B^2. \text{ Так как } m_2 = \frac{P_2}{g}, \text{ то}$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{g} V_B^2. \quad (7.3)$$

Скорость ползуна  $B$  нужно выразить через угловую скорость  $\omega_0$  кривошипа  $OA$ . Это сделаем двумя способами:

- а) используя положение мгновенного центра скоростей звена  $AB$ ;
- б) используя теорему о проекции скоростей на прямую, соединяющую две точки данного звена.

По способу (а) находим сначала скорость точки  $A$  звена  $OA$

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA, \quad V_A = \omega_O \cdot l_1.$$

Вектор  $\overline{V_A}$  направляем  $\perp OA$  в сторону угловой скорости  $\omega_0$ . Затем находим положение мгновенного центра скоростей  $C_V$  звена  $AB$  и угловую

скорость звена  $AB$ ,  $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}$ , а также  $V_B = \omega_{AB} \cdot BC_V$ .

$AC_V$  и  $BC_V$  определим из рис.7.1

$$AC_V = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = l_2 \sqrt{3}, \quad BC_V = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2l_2.$$

Тогда окончательно определим

$$\omega_{AB} = \frac{\omega_O l_1}{l_2 \sqrt{3}} = \frac{\omega_O l_1 \sqrt{3}}{3l_2}, \quad V_B = \frac{\omega_O l_1 \sqrt{3}}{3l_2} 2l_2 = \frac{2\omega_O l_1 \sqrt{3}}{3}.$$

По способу (б) спроектируем векторы  $\overline{V_A}$  и  $\overline{V_B}$  на прямую  $AB$

$$V_A \cos \alpha_1 = V_B \cos \beta, \text{ где } \alpha_1 = 0; \quad \beta = 30^\circ.$$

Тогда  $V_A = V_B \cos 30^\circ$ , откуда

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 30^\circ} = \frac{\omega_O l_1 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\omega_O l_1 \sqrt{3}}{3}. \quad (7.4)$$

Результаты определения скорости точки  $B$  по способам (а) и (б) совпадают. Подставив уравнение (7.4) в уравнение (7.3), найдем:

$$T_B = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \cdot \frac{4\omega_O^2 l_1^2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3} \frac{P_2}{g} \omega_O^2 l_1^2. \quad (7.5)$$

С учетом уравнений (7.2) и (7.5) по уравнению (7.1) определим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{P_1 \omega_O^2 l_1^2}{6g} + \frac{2}{3} \frac{P_2}{g} \omega_O^2 l_1^2, \quad T = \frac{\omega_O^2 l_1^2}{6g} (P_1 + 4P_2).$$

### Пример 2.2

На рис. 7.2 изображен кривошипно-шатунный механизм.

Дано:  $l_1$  – длина кривошипа  $OA$ ,  $l_2$  – длина шатуна  $AB$ ,  $l_3$  – длина звена  $O_1B$ ,  $P_1$  – вес кривошипа  $OA$ ,  $P_3$  – вес звена  $O_1B$ . Весом шатуна  $AB$  пренебречь.  $\omega_O$  – угловая скорость вращения кривошипа  $OA$ .

Определить кинетическую энергию механизма.

Аналогично предыдущему примеру записываем кинетическую энергию системы

$$T = T_{OA} + T_{O_1B}. \quad (7.6)$$

В данном механизме звенья  $OA$  и  $O_1B$  совершают вращение вокруг неподвижных осей. Кинетическую энергию их определим по известным формулам

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega_{OA}^2.$$

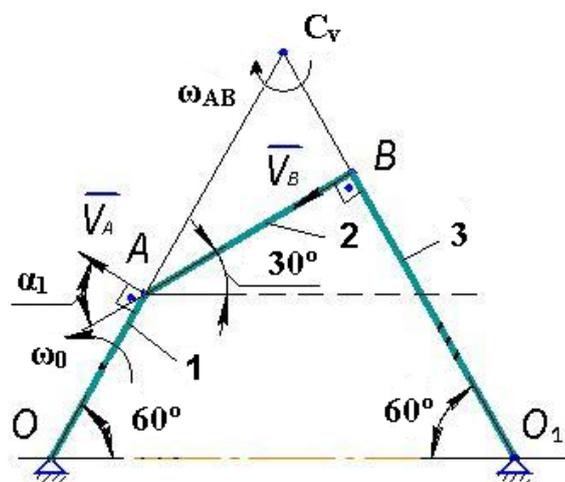


Рис. 7.2

Кинетическая энергия звена  $OA$  данного механизма равна кинетической энергии звена  $OA$  механизма в примере 2.1. Тогда из уравнения (7.2) следует

$$T_{OA} = \frac{P_1 l_1^2 \omega_O^2}{6g}. \quad (7.7)$$

$T_{O_1B} = \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_{O_1B}^2$ . Так как  $J_{O_1} = \frac{m_3 l_3^2}{3}$ , поэтому

$$T_{O_1B} = \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \omega_{O_1B}^2. \quad (7.8)$$

Выразим угловую скорость звена  $O_1B$  через заданную угловую скорость кривошипа  $OA$  двумя способами:

а) с помощью мгновенного центра скоростей.

Находим  $V_A = \omega_O l_1$ . Проводим вектор  $\overline{V_A} \perp OA$ . Определим положение мгновенного центра скоростей звена  $AB$  на пересечении перпендикуляров к вектору скорости  $\overline{V_A}$  и  $\overline{V_B}$ , причем  $\overline{V_B} \perp O_1B$ .

Затем определяем  $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}$ , где  $AC_V = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{2l_2}{\sqrt{3}}$ .

Тогда получим  $\omega_{AB} = \frac{\omega_O l_1 \sqrt{3}}{2l_2}$ .

Теперь найдем  $V_B = \omega_{AB} \cdot BC_V$ , где  $BC_V = AB \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{l_2 \sqrt{3}}{3}$ .

Окончательно определим  $V_B = \frac{\omega_O l_1 \sqrt{3}}{2l_2} \cdot \frac{l_2 \sqrt{3}}{3} = \frac{\omega_O l_1}{2}$ .

А так как  $V_B = \omega_{O_1B} \cdot O_1B$ , откуда  $\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{\omega_O l_1}{2l_3}$ . (7.9)

б) С помощью теоремы о проекции скоростей на прямую, соединяющую две точки

$$V_A \cos \alpha_1 = V_B \cos \beta, \text{ где } \alpha_1 = 60^\circ; \beta = 0^\circ.$$

Тогда  $V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 0^\circ$ ;  $V_B = V_A \cos 60^\circ$ . С учетом известного

$V_A = \omega_O l_1$  найдем  $V_B = \omega_O l_1 \frac{1}{2} = \frac{\omega_O l_1}{2}$ .

Окончательно получим

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{\omega_O l_1}{2l_3}. \quad (7.10)$$

Согласно уравнениям (7.9) и (7.10) получили одинаковые значения угловой скорости звена  $O_1B$ .

Тогда кинетическую энергию звена  $O_1B$  найдем, подставив уравнение (7.10) в (7.8)

$$T_{O_1B} = \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \frac{\omega_{O_1}^2 l_1^2}{4l_3^2} = \frac{m_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{24} = \frac{P_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{24g}. \quad (7.11)$$

С учетом уравнений (7.7) и (7.11) из уравнения (7.6) найдем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{P_1 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{6g} + \frac{P_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{24g} = \frac{\omega_{O_1}^2 l_1^2}{24g} (4P_1 + P_3).$$

### Пример 2.3

На схемах (см. рис. 7.1, 7.2) заменить ползун  $B$  и звено  $O_1B$  роликом весом  $P_3$  и радиусом  $r_3$ . Считать ролик сплошным однородным. Определить кинетическую энергию полученных систем (рис.7.3, 7.4).

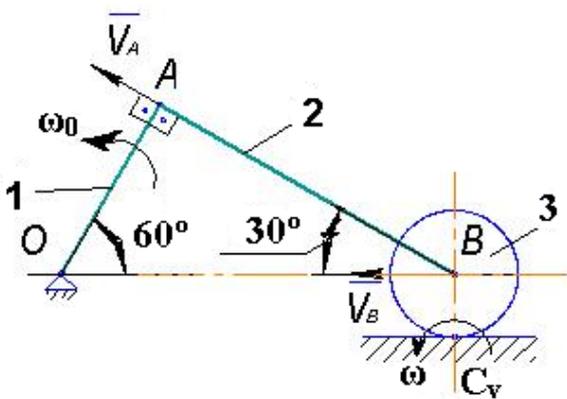


Рис. 7.3

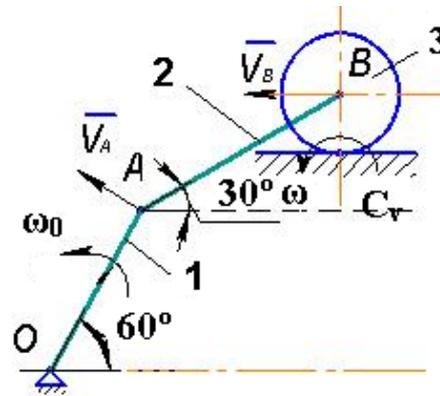


Рис. 7.4

Кинетическую энергию систем на рис.7.3 и рис.7.4 будем определять по формуле

$$T = T_1 + T_3. \quad (7.12)$$

Кинетическую энергию первого тела кривошипа  $OA$  возьмем из расчетов примеров 2.1 и 2.2 согласно уравнениям (7.2) или (7.7)

$$T_1 = \frac{P_1 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{6g}. \quad (7.13)$$

Кинетическую энергию третьего тела, которое совершает плоско-параллельное движение, определим по формуле

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_3^2, \text{ где } M_3 = \frac{P_3}{g}, J_B = \frac{M_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g},$$

а угловую скорость ролика – с помощью мгновенного центра скоростей

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BC_v} = \frac{V_B}{r_3}.$$

Тогда получим 
$$T_3 = \frac{P_3}{2g} V_B^2 + \frac{P_3 r_3^2}{2 \cdot 2g} \cdot \frac{V_B^2}{r_3^2}$$
или 
$$T_3 = \frac{3 P_3}{4 g} V_B^2. \quad (7.14)$$

Скорость центра масс  $B$  ролика 3 системы на рис. 7.3 будет равна скорости ползуна  $B$  в примере 2.1 согласно уравнению (7.5)

$$V_B = \frac{2\omega_{O_1} l_1 \sqrt{3}}{3}.$$

Тогда из уравнения (7.14) найдем кинетическую энергию ролика системы на рис. 7.3.

$$T_3 = \frac{3P_3}{4g} \cdot \frac{4\omega_{O_1}^2 l_1^2 3}{9}$$
или 
$$T_3 = \frac{P_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{g}. \quad (7.15)$$

С учетом уравнений (7.13) и (7.15) из уравнения (7.12) найдем кинетическую энергию системы на рис. 7.3.

$$T = \frac{P_1 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{6g} + \frac{P_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{g}; \quad T = \frac{\omega_{O_1}^2 l_1^2}{6g} (P_1 + 6P_3).$$

Скорость центра масс  $B$  ролика 3 системы на рис. 7.4 необходимо определить. Для этого воспользуемся теоремой о проекции скоростей точек на прямую, соединяющую точки данного звена.

$$V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ, \text{ откуда } V_B = V_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}, \text{ где } V_A = \omega_0 l_1,$$

$$\text{тогда } V_B = \omega_0 l_1 \frac{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\omega_0 l_1 \sqrt{3}}{3} \quad (7.16)$$

Подставим уравнение (7.16) в уравнение (7.14) и найдем кинетическую энергию ролика 3 системы на рис. 7.4

$$T_3 = \frac{3P_3}{4g} \cdot \frac{\omega_{O_1}^2 l_1^2 3}{9}, \text{ т.е.}$$

$$T_3 = \frac{P_3 \omega_{O_1}^2 l_1^2}{4g}. \quad (7.17)$$

Подставляя уравнения (7.13) и (7.17) в уравнение (7.12), получим кинетическую энергию системы на рис. 7.4:

$$T = \frac{P_1 \omega_O^2 l_1^2}{6g} + \frac{P_3 \omega_O^2 l_1^2}{4g}.$$

Преобразуя, найдем  $T = \frac{\omega_O^2 l_1^2}{12g} (2P_1 + 3P_3).$

### 3. Последовательность выполнения лабораторной работы

3.1. Из планшета плоского механизма взять три первых звена. Замерить длины звеньев  $l_1, l_2, l_3$ . По заданному углу  $\alpha$  в соответствующем масштабе начертить механизм.

3.2. Выразить скорость ползуна  $B$  или угловую скорость звена  $O_1B$  через заданную угловую скорость первого звена. При этом использовать два способа: мгновенный центр скоростей и теорему о проекции скоростей на прямую, соединяющую две точки.

3.3. Определить кинетическую энергию системы, пренебрегая весом шатуна.

3.4. Заменить в первом случае ползун  $B$ , во втором случае звено  $O_1B$  роликом 3, вес которого  $P_3$  и радиус  $r_3$ , и определить кинетическую энергию систем. При расчете скоростей данные (необходимый угол, расстояния до мгновенного центра скоростей) взять из чертежа с учетом масштаба.

Результаты вычислений занести в таблицу. Угловую скорость и угол  $\alpha$  задает преподаватель.

$r_3, \text{ м}$	$\omega_O, \text{ с}^{-1}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$\alpha^0$	$V_A, \text{ м/с}$	$V_B, \text{ м/с}$	$J_0, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$J_{O1}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$T, \text{ Н}\cdot\text{м}$
0,05		20	60	30						
0,1		30	40	25						
0,15		25	55	40						
0,2		10	45	35						
0,25		15	30	40						

3.5. Выполнить внеаудиторное задание по варианту схемы плоского механизма (рис.3.1а - 3.30а), выданному преподавателем.

### 4. Контрольные вопросы

4.1. Запишите формулу определения кинетической энергии вращательного движения тела.

4.2. Как определяется кинетическая энергия плоскопараллельного движения твердого тела?

4.3. Как определить скорость точки с помощью мгновенного центра скоростей?

4.4. Запишите формулу определения кинетической энергии поступательного движения тел.

## Лабораторная работа № 8

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РЕДУКТОРА СКОРОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА II РОДА

**Цель работы.** Изучить методику применения дифференциальных уравнений Лагранжа II рода для определения заданных параметров движения редуктора скоростей.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Определение угловых ускорений ведущего и ведомого валов редуктора скоростей.
3. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности.** Макет редуктора, линейка, циркуль, транспортир.

#### 1. Краткая теория

Движение механической системы характеризуется некоторыми понятиями и определениями.

**Обобщенные координаты** – это независимые параметры, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы в любой момент времени. У механических систем с голономными (геометрическими) связями число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Обобщенные координаты обозначаются буквами

$$q_j, j = (1, 2, \dots, s),$$

где  $s$  – число степеней свободы системы.

Обобщенные координаты могут иметь любой физический смысл и любую размерность. В механике они могут иметь размерность длины, угла, площади, объема и т. д.

Малые положительные приращения обобщенных координат называются **обобщенными возможными перемещениями** и обозначаются символами

$$\delta q_j, j = (1, 2, \dots, s).$$

Производные от обобщенных координат по времени называются **обобщенными скоростями системы**. Их будем обозначать символами

$$\dot{q}_j, j = (1, 2, \dots, s).$$

Размерность зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Каждой обобщенной координате соответствует обобщенная сила, которая обозначается буквами

$$Q_j, j = (1, 2, \dots, s).$$

Обобщенная сила определяется по формуле

$$Q_j = \frac{\delta A q_j}{\delta q_j}, j = (1, 2, \dots, s),$$

где  $\delta A q_j$  – элементарная работа действующих сил на перемещении механической системы, вызванном элементарным приращением  $\delta q_j$  обобщенной координаты  $q_j$ .

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты.

Для исследования движения механической системы используют дифференциальные уравнения Лагранжа II рода, которые имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, j = (1, 2, \dots, s).$$

Количество уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы механической системы. Уравнения Лагранжа представляют общий метод исследования движения различных физических систем.

## **2. Определение угловых ускорений ведущего и ведомого валов редуктора скоростей**

### **2.1. Условие и постановка задачи**

Рассмотрим редуктор скоростей (рис. 8.1), в котором к ведущему валу I приложена пара сил, момент которой (вращающий момент) постоянен и равен  $M_I$ . К ведомому валу II приложены силы сопротивления, создающие относительно оси II постоянный момент  $M_{II}$  (момент сопротивления).

Определить угловые ускорения ведущего и ведомого валов редуктора.

В задании приняты следующие обозначения:

$m_{2-3}$  – масса каждого сателлита 2-3, состоящего из колес 2 и 3;

$J_{2-3}$  – момент инерции сателлита 2-3 относительно собственной оси;

$J_I$  – момент инерции частей редуктора, жестко связанных с ведущим валом I, относительно его оси;

$J_{II}$  – момент инерции частей редуктора, жестко связанных с ведущим валом II, относительно его оси;

$r_1, r_2, r_3, r_4$  – радиусы колес 1-4.

Схемы редукторов к внеаудиторному заданию показаны на рис. 8.1 а - 8.24 а, а необходимые для решения данные приведены в таблице.

### 2.2. Пример выполнения задания

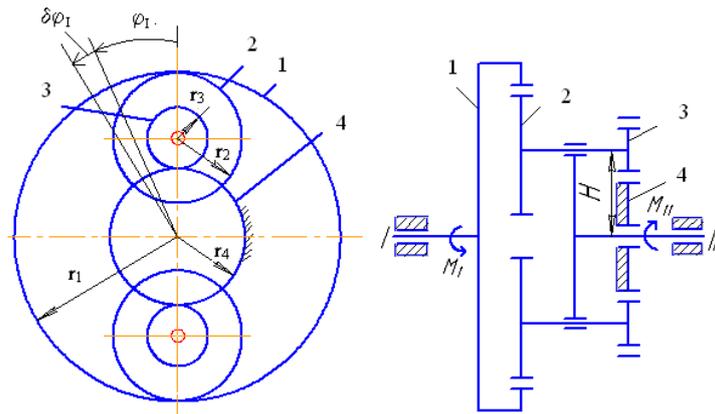
Дано:  $M_I = 100$ ,  $M_{II} = 320$  Н·м;  $J_I = 4$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_{2-3} = 100$  кг;  $J_{2-3} = 2$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_{II} = 12$  кг·м<sup>2</sup>;  $r_1 = 60$ ;  $r_2 = 25$ ;  $r_3 = 5$ ;  $r_4 = 30$  см (см. рисунок).

Определить угловые ускорения  $\epsilon_I$  и  $\epsilon_{II}$ .

Номер варианта	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$m_{2-3}$ , кг	$J_{2-3}$	$J_I$	$J_{II}$	$M_I$	$M_{II}$
	см						кг·м <sup>2</sup>			Н·м	
1	30	8	14	-	14	4,5	0,001	2	18	72	6
2	15	10	12	37	-	60	0,9	4	16	90	220
3	15	20	-	-	-	7	0,002	6	12	85	350
4	10	15	12	37	-	55	0,92	4,8	22	200	225
5	10	12	-	-	-	70	1,0	4	16	190	726
6	35	10	15	40	-	95	1,2	12	6	75	160
7	10	15	10	15	12	65	0,96	5,5	6,0	70	8
8	10	10	-	-	-	80	1,1	4,5	18	110	400
9	10	15	12	-	-	55	0,91	18	5,7	120	450
10	20	15	-	-	-	72	1,2	0,2	5	240	280
11	15	10	-	-	-	62	0,95	5,5	18	170	105
12	30	10	5	-	-	70	1,0	9	22	190	100
13	10	10	-	-	-	8	0,002	6,5	20	130	380
14	27	12	5	10	-	82	1,1	5	12	60	102
15	20	10	-	-	-	75	1,05	20	7	175	55
16	10	-	15	-	-	50	0,9	12	6	220	80
17	15	10	12	-	-	95	1,2	4	6	120	74
18	20	25	15	30	-	50	0,92	2,7	19	110	54
19	20	15	10	25	-	82	1,1	2,5	20	75	150
20	20	5	10	15	-	45	0,8	12	2,0	170	90
21	25	15	10	30	16	58	1,0	2,0	3,0	75	18
22	40	10	18	12	-	80	1,2	3,0	15	100	91
23	15	10	15	10	-	70	1,0	4,2	21	80	35
24	50	10	15	25	-	72	1,02	1,5	12	120	30

Воспользуемся дифференциальным уравнением Лагранжа II рода. Данная система имеет одну степень свободы. Приняв за обобщенную координату системы угол поворота  $\varphi_I$  ведущего вала, запишем соответствующее уравнение Лагранжа (8.1).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = Q_{\varphi_I}. \quad (8.1)$$



Найдем кинетическую энергию системы  $T$  как функцию обобщенной скорости  $\dot{\varphi}_I$ , равной угловой скорости ведущего вала  $\omega_I$ . Для вычисления кинетической энергии рассматриваемой системы необходимо знать угловые скорости всех звеньев редуктора: ведущего вала (колеса 1)  $\omega_I$ , ведомого вала (водила)  $\omega_{II}$ , сателлитов  $\omega_{2-3}$ .

Определим эти угловые скорости способом Виллиса. Относительные угловые скорости колес редуктора:

$$\omega_{1r} = \omega_I - \omega_0;$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0;$$

$$\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0;$$

$$\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0,$$

где  $\omega_I = \omega_I$  (колесо 1 жестко связано с ведущим валом I);  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3}$ , а угловая скорость водила  $\omega_0 = \omega_{II}$ , так как водило жестко связано с ведомым валом II.

Приведем формулы, устанавливающие зависимость между относительными угловыми скоростями колес 1 и 2, а также 3 и 4:

$$\frac{\omega_I - \omega_{II}}{\omega_2 - \omega_{II}} = \frac{r_2}{r_1}; \quad (8.2)$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_{II}}{\omega_4 - \omega_{II}} = -\frac{r_4}{r_3}. \quad (8.3)$$

Перемножая левые и правые части равенств (8.2) и (8.3), а также учитывая, что  $\omega_2 = \omega_3$ , получаем:

$$\frac{\omega_I - \omega_{II}}{\omega_4 - \omega_{II}} = - \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}.$$

Так как колесо 4 неподвижно, т.е.  $\omega_4 = 0$ , то

$$\frac{\omega_I - \omega_{II}}{-\omega_{II}} = - \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}.$$

Из этого равенства

$$\omega_{II} = \omega_I \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3}. \quad (8.4)$$

Из (8.2) и (8.4)

$$\omega_2 = \omega_I \frac{r_1 (r_4 + r_3)}{r_1 r_3 + r_2 r_4}.$$

Полученные значения  $\omega_{II}$  и  $\omega_2$  показывают, что вал II и сателлиты вращаются в одном направлении с валом I.

Составим выражение кинетической энергии всех движущихся частей редуктора

$$T = \frac{J_I \omega_I^2}{2} + 2 \left( \frac{m_{2-3} v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_{2-3} \omega_2^2}{2} \right) + \frac{J_{II} \omega_{II}^2}{2},$$

где

$$v_{C_2} = H \omega_{II} = (r_3 + r_4) \omega_{II} = \omega_I \frac{r_1 r_3 (r_3 + r_4)}{r_1 r_3 + r_2 r_4}.$$

Выразив все линейные и угловые скорости через угловую скорость ведущего вала  $\omega_I = \dot{\varphi}_I$ , получим:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_I^2 \left[ J_I + \frac{2m_{2-3} \cdot r_1^2 r_3^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 r_3 + r_2 r_4)^2} + \frac{2J_{2-3} r_1^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 r_3 + r_2 r_4)^2} + J_{II} \frac{r_1^2 r_3^2}{(r_1 r_3 + r_2 r_4)^2} \right]. \quad (8.5)$$

Из выражения кинетической энергии редуктора находим приведенный к оси ведущего вала момент инерции редуктора

$$J_{пр} = J_I + \frac{2r_1 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 r_3 + r_2 r_4)^2} (m_{2-3} r_3^2 + J_{2-3}) + J_{II} \frac{r_1^2 r_3^2}{(r_1 r_3 + r_2 r_4)^2}. \quad (8.6)$$

Таким образом, с учетом (8.6) уравнение (8.5) запишется

$$T = \frac{1}{2} J_{пр} \dot{\varphi}_I^2. \quad (8.7)$$

Найдем обобщенную силу  $Q_{\varphi_I}$ . Сообщим углу  $\varphi_I$  приращение  $\delta\varphi_I$  и составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном

перемещении. В эту сумму войдет работа вращающего момента  $M_I$  и работа момента сил сопротивления  $M_{II}$ , которая отрицательна,

$$\delta A_{\varphi_I} = M_I \delta \varphi_I - M_{II} \delta \varphi_{II}.$$

Работа сил тяжести равна нулю, так как центр тяжести всех движущихся частей редуктора неизменно находится на оси его материальной симметрии – прямой, совпадающей с осями валов I и II. Зависимость между угловыми перемещениями ведущего и ведомого валов такая же, как и зависимость между абсолютными значениями угловых скоростей

$$\delta \varphi_{II} = \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3} \delta \varphi_I.$$

Тогда

$$\delta A_{\varphi_I} = \left( M_I - M_{II} \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3} \right) \delta \varphi_I.$$

Обобщенная сила

$$Q_{\varphi_I} = \frac{\delta A_{\varphi_I}}{\delta \varphi_I} = M_I - M_{II} \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3}.$$

Продифференцируем уравнение (8.7) согласно уравнению (8.1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) = J_{\text{пр}} \ddot{\varphi}_I, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = 0.$$

Уравнение (8.1) примет вид

$$J_{\text{пр}} \ddot{\varphi}_I = M_I - M_{II} \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3}. \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.8), учитывая выражение (8.6), получим:

$$\varepsilon_I = \ddot{\varphi}_I = \frac{(M_I - M_{II}) r_1 r_3 / (r_1 r_3 + r_2 r_4)}{J_I + (2r_1^2 (r_3 + r_4)^2) / (r_1 r_3 + r_2 r_4)^2 \cdot (m_{2-3} r_3^2 + J_{2-3}) + J_{II} (r_1^2 r_3^2 / (r_1 r_3 + r_2 r_4)^2)}.$$

Зависимость между угловыми ускорениями ведущего и ведомого валов такая же, как и зависимость (8.4) между их угловыми скоростями

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_I \frac{1}{1 + r_2 r_4 / r_1 r_3}.$$

Подставив в эти формулы заданные числовые значения всех величин, находим:

$$\varepsilon_I = 0,37 \text{ с}^{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{II} = 0,106 \text{ с}^{-2}.$$

### 3. Контрольные вопросы

- 3.1. Что такое обобщенные координаты?
- 3.2. Дайте определение обобщенной скорости.
- 3.3. Запишите формулу определения обобщенной силы.
- 3.4. Запишите дифференциальные уравнения Лагранжа II рода.

## Схемы редукторов к внеаудиторному заданию

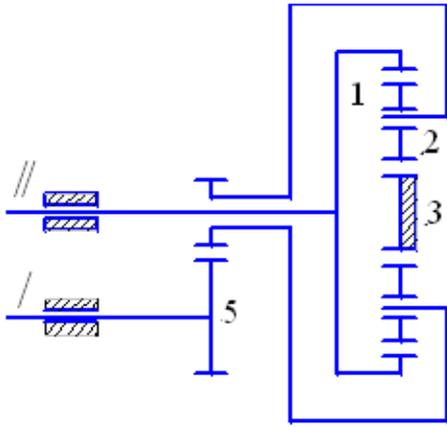


Рис. 8.1a

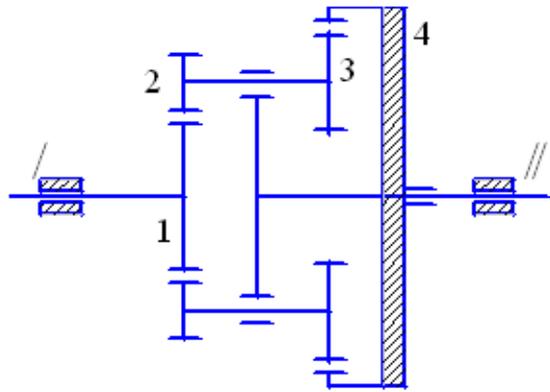


Рис. 8.2a

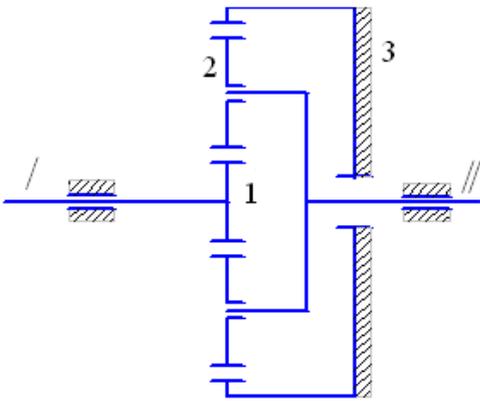


Рис. 8.3a

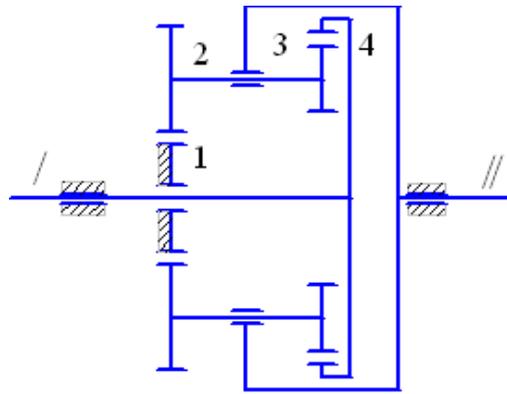


Рис. 8.4a

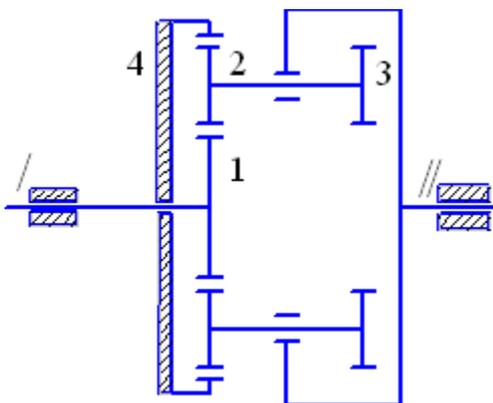


Рис. 8.5a

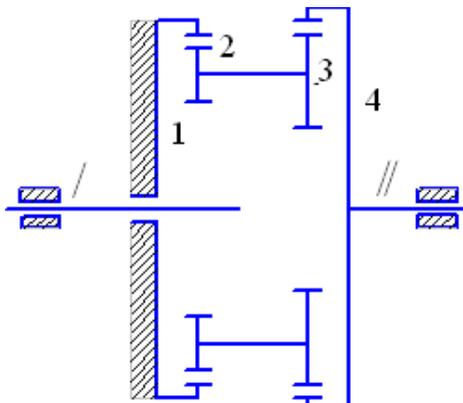


Рис. 8.6a

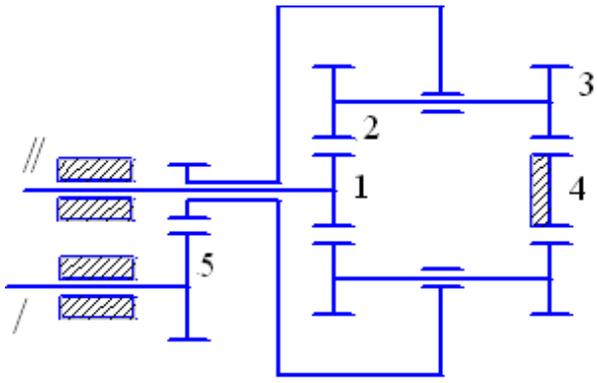


Рис. 8.7а

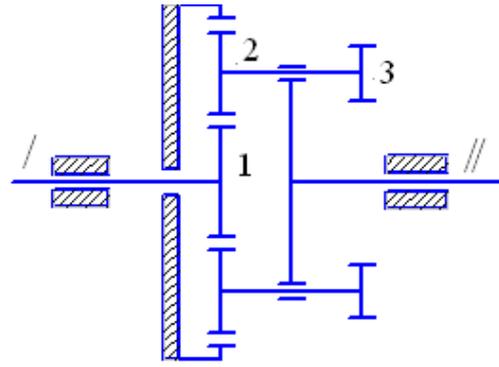


Рис. 8.8а

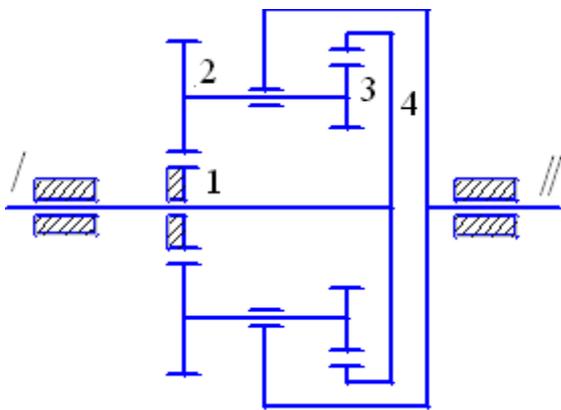


Рис. 8.9а

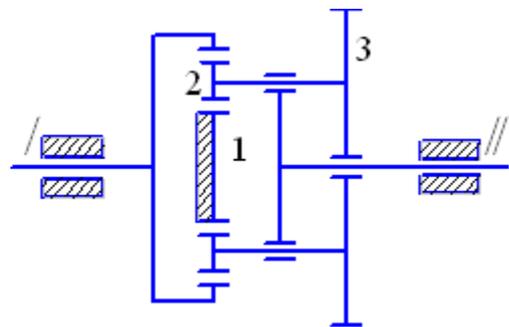


Рис. 8.10а

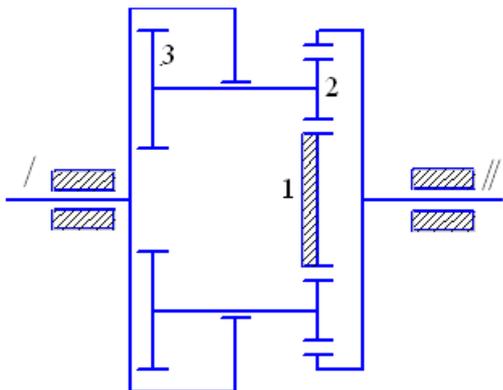


Рис. 8.11а

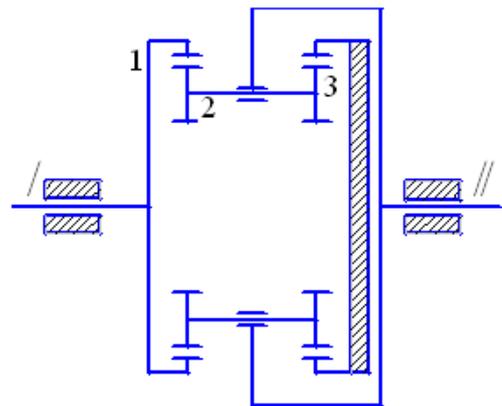


Рис. 8.12а

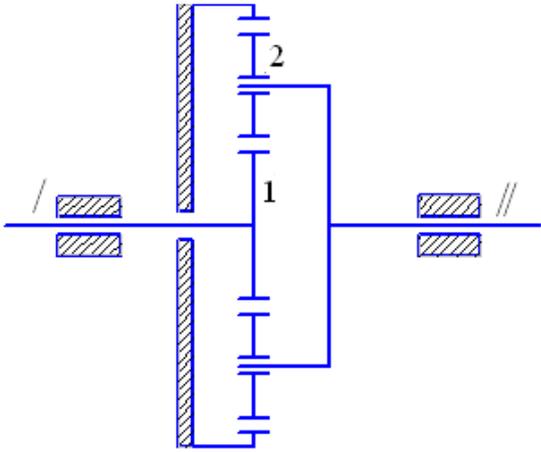


Рис. 8.13а

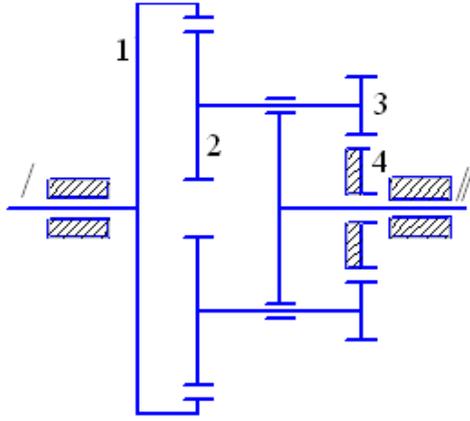


Рис. 8.14а

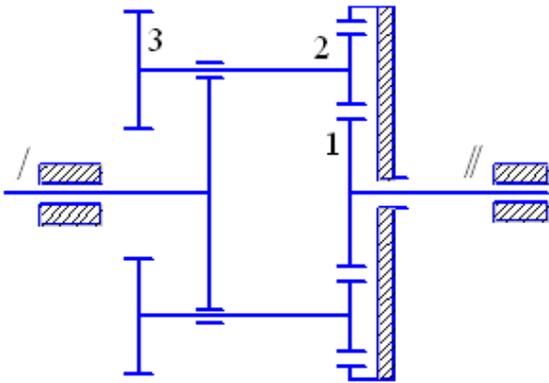


Рис. 8.15а

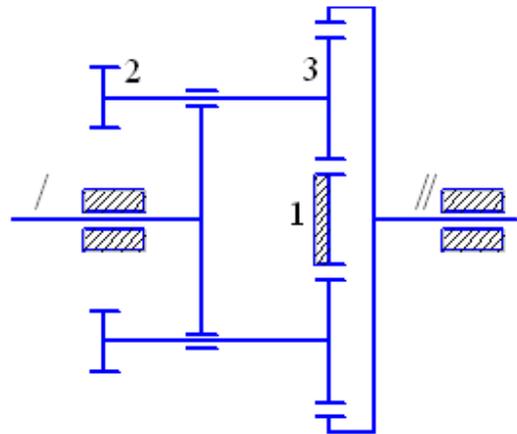


Рис. 8.16а

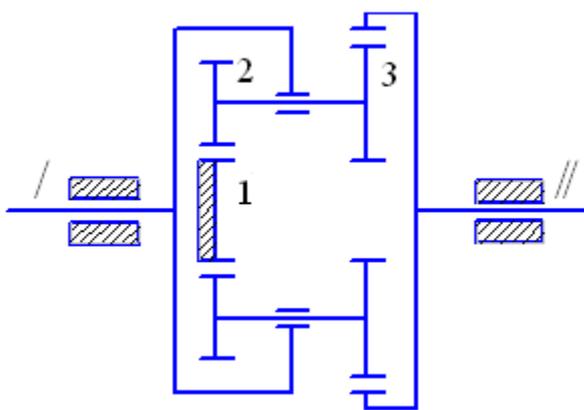


Рис. 8.17а

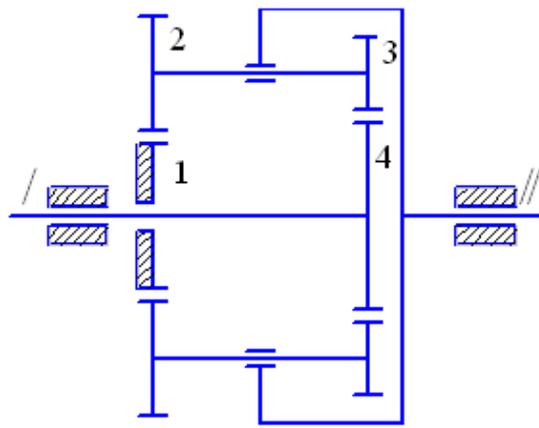


Рис. 8.18а

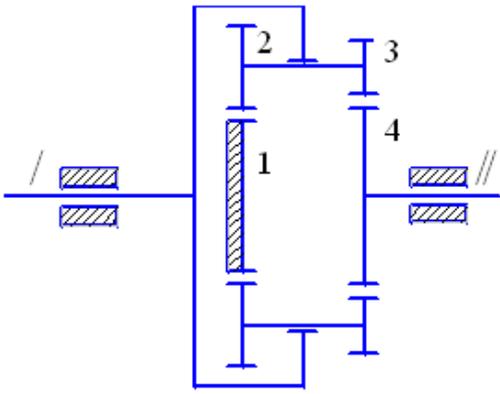


Рис. 8.19а

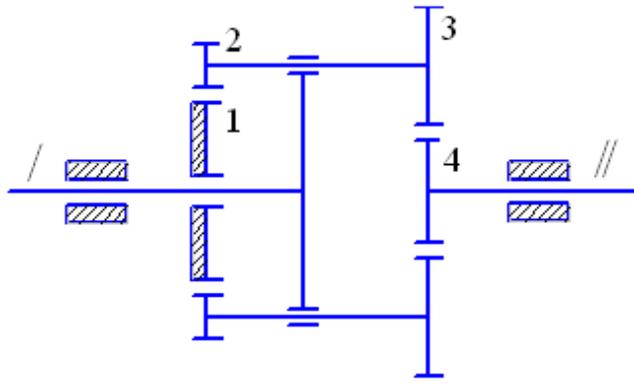


Рис. 8.20а

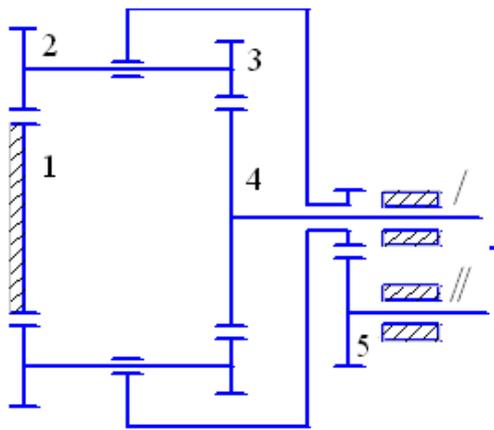


Рис. 8.21а

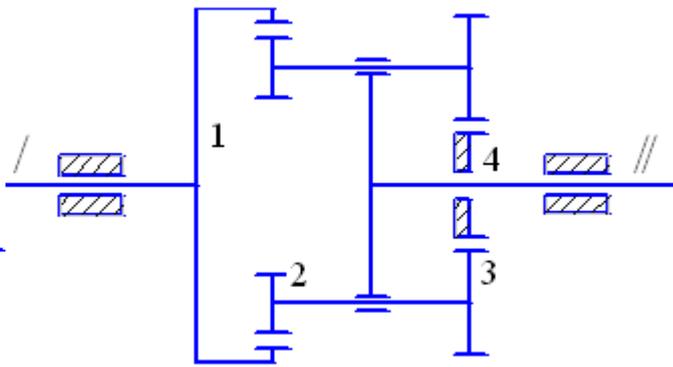


Рис. 8.22а

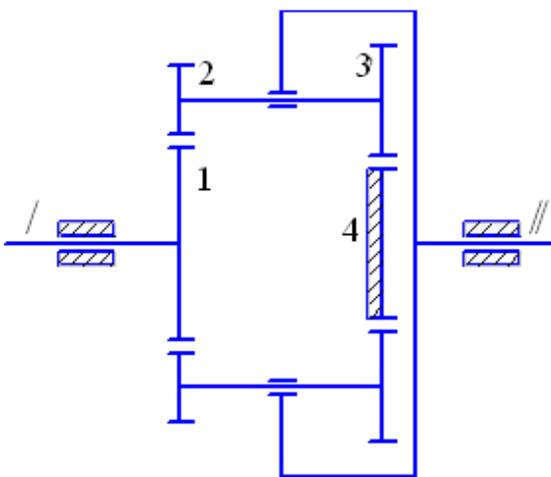


Рис. 8.23а

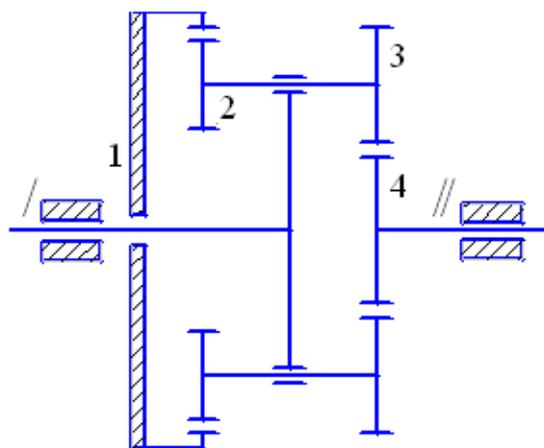


Рис. 8.24а

## **ПОРЯДОК ОФОРМЛЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

Каждая лабораторная работа оформляется на одной стороне листа формата А4 и подшивается под титульный лист, надписи на котором оформляют чертежным шрифтом или на компьютере.

Отчет о лабораторной работе должен включать в себя:

1. Цель работы.
2. Рисунки макетов заданных механизмов или конструкций в выбранном масштабе.
3. Расчетные схемы механизмов, конструкций, отдельных узлов конструкций.
4. Подробный расчет поставленной задачи.
5. Анализ отдельных параметров, указанных в лабораторной работе.
6. Графики изменения параметров расчета.
7. Сводную таблицу результатов расчета.
8. Вывод.

## **РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 240 с. – Т. 2. – 496 с.

2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : В 2 ч. / А. А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1984. – Т. 1. – 343 с. – Т. 2. – 423 с.

3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1970. – 369 с.

4. Новожилов, А. И. Краткий курс теоретической механики / А. И. Новожилов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.

5. Шевченко, А. П. Практикум по дисциплине «Теоретическая механика» / А.П. Шевченко [и др.]; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 156 с. – ISBN 5-89368-702-7.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Лабораторная работа № 1. Определение и исследование реакций опор составных конструкций.....	4
Лабораторная работа № 2. Исследование равновесия сил комбинированной плоской системы связанных тел.....	17
Лабораторная работа № 3. Кинематическое исследование плоского механизма аналитическим и графическим методами.....	31
Лабораторная работа № 4. Применение принципа Даламбера для определения реакций связей плоского механизма.....	45
Лабораторная работа № 5. Исследование равновесия плоских механизмов с одной степенью свободы с помощью принципа возможных перемещений.....	57
Лабораторная работа № 6. Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей составной конструкции.....	64
Лабораторная работа № 7. Определение кинетической энергии плоского механизма в заданном положении.....	74
Лабораторная работа № 8. Исследование движения редуктора скоростей с помощью дифференциальных уравнений Лагранжа II рода.....	82
Порядок оформления лабораторных работ.....	92
Рекомендательный библиографический список.....	92

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания по лабораторным работам

Составители

ШЕВЧЕНКО Александра Петровна

МЕТЛИНА Лина Федоровна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В. Козырев

Подписано в печать 01.03.10.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 500 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.