Есть электронная версия

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

В.П. СОБАКИН О.И. ТРУБИНА Е.В. ФИЛИНОВА

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Практикум

Владимир 2003

УДК 517.5
Ч67

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
В. В. Жиков

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры статистики Всероссийского заочного
финансово-экономического института
Н.Н. Полякова

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Собакин В.П., Трубина О.И., Филинова Е.В.

Ч67 Числовые и функциональные ряды: Практикум / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003. 56 с.
ISBN 5-89368-443-5

Содержит индивидуальные задания к типовому расчету по теме «Ряды», подробно изложенные примеры решения задач, а также необходимые теоретические сведения.

Предназначен для студентов технических специальностей высших учебных заведений всех форм обучения. Может быть использован при самостоятельном изучении данной темы.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.5

ISBN 5-89368-443-5

ОТ АВТОРОВ

Данное издание содержит 510 задач к типовому расчету по теме "Числовые и функциональные ряды" и соответствует традиционному курсу высшей математики, читаемому студентам инженерных специальностей ВлГУ.

Рассматриваются лишь ряды в действительной области. Ряды с комплексными членами и ряды функций комплексного переменного обычно относят к соответствующему спецкурсу.

Все задачи условно распределены по четырем разделам: числовые ряды (задачи № 1 – 7), общие функциональные ряды (задачи № 8 – 10), ряды Тейлора (задачи № 11 – 15) и тригонометрические ряды Фурье (задачи № 16 – 17). Соответственно распределена и вводная часть, в которой приведены подробные решения примеров типовых задач с указаниями общего характера по применению тех или иных методов решения.

Вводная часть содержит также кратко изложенный теоретический материал, что окажет необходимую помощь при выполнении типового расчета. Методические указания могут быть полезны студентам очной и заочной форм обучения при самостоятельном изучении темы как приложение к лекционному курсу.

При подготовке заданий типового расчета использовались задачники [5],[6]; часть задач составлена авторами.

Авторы выражают благодарность за помощь в оформлении данного издания аспиранту кафедры А.В. Кожину.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Если задана числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется числовым рядом с общим членом a_n. Ряд также записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1')$$

Наряду с последовательностью $\{a_n\}_{n \in N}$ рассматривается последовательность чисел $\{S_n\}_{n \in N}$, называемых частичными суммами ряда (1):

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S , \qquad (2)$$

то ряд (1) называется сходящимся, а число S называется суммой ряда.

Пример 1. Найти сумму ряда $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots$.

Решение. Чтобы найти сумму ряда, исходя из определения, надо найти явное выражение для n-й частичной суммы S_n и вычислить предел (2). Предварительно составим формулу общего члена ряда. Заметим, что множители $1; 4; 7; \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 3$, поэтому общий член такой прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Аналогично получим формулу общего члена b_n прогрессии $4; 7; 10; \ldots$: $b_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$. Следовательно,

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} .$$

Разложим дробь на сумму простейших, применяя метод неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1/3}{3n-2} - \frac{1/3}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right). \qquad (3)$$

Составим сумму S_n первых n членов ряда, используя формулу (3), то есть

представляя каждый член ряда в виде разности двух дробей:

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, исходный ряд сходится, и его сумма $S = \dfrac{1}{3}$.

Далеко не всегда вопрос о сходимости ряда решается исходя из определения, использование которого предполагает возможность найти явное выражение для n-й частичной суммы ряда. Как правило, сходимость или расходимость данного числового ряда устанавливается на основании признаков сходимости. Рассмотрим некоторые из них.

1.1. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Признаки сравнения

Для выяснения вопроса о сходимости числового ряда с неотрицательными членами на основании признаков сравнения пытаются сравнить исследуемый ряд с рядом, поведение которого известно. Чаще всего таким "эталонным" рядом служит либо геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \textit{сходится, если } |q| < 1 \\ \textit{расходится, если } |q| \geq 1, \end{cases}$$

либо обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{сходится, если } p > 1 \\ \textit{расходится, если } p \leq 1. \end{cases}$$

При применении первого признака сравнения предпринимаются попытки оценить члены данного ряда сверху членами заведомо сходящегося числового ряда или снизу расходящимся рядом. Согласно этому признаку, если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \tag{4}$$

и
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0 \tag{5}$$

таковы, что для всех $n \in N$ (или для всех номеров n, начиная с некоторого)

$$a_n \leq b_n,$$

то из сходимости ряда (5) с большими членами следует и сходимость ряда (4), а расходимость ряда (4) с меньшими членами влечет расходимость ряда (5).

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arccos(1/n)}{\sqrt{n^3+n}}. \tag{6}$$

Решение. Обратим внимание на тот факт, что члены ряда (6) неотрицательны, а значит, для исследования данного ряда на сходимость можно применить признак сравнения. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом.

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то $\arccos\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, для всех $n \in N$

$$a_n = \frac{\arccos(1/n)}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^{3/2}} = b_n. \tag{7}$$

Ряд с общим членом b_n получается из обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ ($p = 3/2 > 1$) умножением всех его членов на одно и тоже число $\frac{\pi}{2}$ и потому является сходящимся. Из неравенства (7) на основании первого признака сравнения делаем вывод о сходимости исследуемого ряда (6).

Зачастую более удобен в применении второй признак сравнения, согласно которому, если для рядов (4) и (5) существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c, \; 0 < c < +\infty,$$

то ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся, т. е. ведут себя одинаково.

Замечание. Как известно, необходимое условие сходимости ряда – стремление к нулю его общего члена при неограниченном возрастании n. Но далеко не всякий ряд, для которого $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, является сходящимся. Второй признак сравнения указывает, что для сходимости ряда это стремление к нулю должно быть "достаточно быстрым", например, как для последовательности $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}_{n\in N}$ при $p > 1$.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+3n^2+n}{n^3+n+1}$.

Решение. Заметим, что при $n \to \infty$ общий член данного ряда стремится к нулю. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{n^3+3n^2+n}{n^3+n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1+3/n+1/n^2}{1+3/n+1/n^3}\right] = \ln 1 = 0,$$

т. е. последовательность $\{a_n\}_{n\in N}$ является бесконечно малой. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$a_n = \ln\frac{n^3+3n^2+n}{n^3+n+1} = \ln\frac{(n^3+n+1)+(3n^2-1)}{n^3+n+1} = \ln\left(1+\frac{3n^2-1}{n^3+n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3n^2-1}{n^3+n+1} = b_n.$$

Так как $a_n > 0$ и $b_n > 0$ при всех $n \in N$, делаем вывод, что согласно второму признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково. Для решения вопроса о сходимости ряда с общим членом b_n вновь воспользуемся вторым признаком сравнения. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2-1)n}{n^3+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n}{n^3+n+1} = 3.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ так же, как и гармонический ряд, является расходящимся. Отсюда заключаем, что и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

При решении задач часто приходится применять оба признака сравнения.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{5n^2 - 1}. \tag{8}$$

Решение. Примем во внимание, что члены данного ряда положительны и для любого $n \in N$ допускают оценку

$$\frac{(-1)^n + 2}{5n^2 - 1} \le \frac{3}{5n^2 - 1} = b_n. \tag{9}$$

Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является сходящимся, что следует из второго признака сравнения. Действительно, сравним его со сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{5n^2-1} = \frac{3}{5} \ne 0.$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и оценки (9) на основании первого признака сравнения делаем вывод о сходимости ряда (8).

Замечание. Применить второй признак сравнения непосредственно к ряду (8) не удается, так как предел отношения общего члена исследуемого ряда к общему члену ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ не существует (для четных номеров $n = 2k$ этот предел равен $\frac{3}{5}$, для нечетных $n = 2k+1$ получаем значение предела $\frac{1}{5}$).

Радикальный признак Коши и признак Даламбера

Следует отметить, что эти признаки, как и признаки сравнения, применяются лишь к рядам (1) с неотрицательными членами.

Применение признака Коши основано на вычислении предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c,$$

причем, если $c < 1$, то ряд (1) сходится, если $c > 1$, то ряд (1) – расходится. В случае, когда указанный предел не существует или если $c = 1$, признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. В этом случае применяются другие признаки (как правило, это признаки сравнения, необходимый признак сходимости или интегральный признак Коши).

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{4n^2+5n} \right)^{n/2}$.

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \left(\frac{n^2-1}{4n^2+5n} \right)^{n/2}$ представляет собой n-ю степень выражения $\left(\frac{n^2-1}{4n^2+5n} \right)^{1/2}$, поэтому для исследования данного ряда на сходимость удобнее всего применить радикальный признак Коши:

$$c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{4n^2+5n} \right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-1/n^2}{4+5/n} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Так как $c = \frac{1}{2} < 1$, то согласно этому признаку ряд сходится.

Признак Даламбера дает ответ на вопрос о сходимости знакоположительного ряда (1), для которого существует отличный от единицы предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c.$$

Согласно этому признаку ряд сходится, если $c<1$, и расходится, если $c>1$. Ряд расходится и в случае, когда последовательность $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\in N}$ является бесконечно большой, то есть $c=\infty$. При $c=1$ признак Даламбера, как и радикальный признак Коши, не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Чтобы получить формулу для $(n+1)$-го члена ряда, достаточно в формулу общего члена a_n вместо n подставить $n+1$.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$.

Решение. Для исследования данного ряда на сходимость применим признак Даламбера. Зная n-й член ряда $a_n=\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$, находим следующий за ним $(n+1)$-й член:

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}=\frac{n!(n+1)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

Затем найдем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при неограниченном возрастании n:

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!(n+1)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}:\frac{n!(2n)!}{(3n)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2+1/n)(2+2/n)}{(3+1/n)(3+2/n)(3+3/n)}=\frac{4}{27}.$$

Так как $c=\dfrac{4}{27}<1$, то согласно признаку Даламбера данный ряд сходится.

Интегральный признак сходимости рядов

Интегральный признак часто оказывается полезен, когда другие признаки не позволяют судить о сходимости или расходимости ряда. Этот признак даёт возможность при некоторых условиях исследование ряда на сходимость свести к вопросу о сходимости несобственного интеграла. А именно, если для числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n\geq 0,\quad n=1;\,2;\ldots \tag{10}$$

существует неотрицательная, непрерывная функция $f(x)$, определенная на интервале $x\in[1;+\infty)$, монотонно убывающая и такая, что

$$f(n)=a_n,\quad n=1;2;\ldots,$$

то ряд (10) сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$.

Пример 7. Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n^5}}$.

Решение. Заменив в формуле общего члена ряда $a_n=\dfrac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n^5}}$ дискретную переменную $n\in N$ на непрерывную переменную x, получим функцию $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{\sqrt[3]{x^5}}$, определенную для всех $x\in[1;+\infty)$ и такую, что $f(n)=a_n$ для любого $n\in\mathrm{N}$.

Покажем, что $f(x)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Действительно, $f(x)$ непрерывна на промежутке $x\in[1;+\infty)$; $f(x)>0$, поскольку $\ln x\geq 0$, если $x\geq 1$; $f(x)$ монотонно убывает на полуинтервале $x\in[1;+\infty)$, так как

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^{5/3}-(1+\ln x)\frac{5}{3}x^{2/3}}{x^{10/3}}=\frac{x^{2/3}\left[1-(1+\ln x)\frac{5}{3}\right]}{x^{10/3}}=\frac{3-5(1+\ln x)}{3x^{8/3}}<0,\ \text{если}\ x\geq 1.$$

Следовательно, интегральный признак Коши применим. На основании этого признака вопрос о сходимости ряда можно решить, исследовав сходимость несобственного интеграла $I=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1+\ln x}{\sqrt[3]{x^5}}dx$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln x}{\sqrt[3]{x^5}}dx=\begin{bmatrix}1+\ln x=U;\,dU=\frac{1}{x}dx\\ \frac{dx}{x^{5/3}}=dV;\,V=\frac{-3}{2x^{2/3}}\end{bmatrix}=-\frac{3(1+\ln x)}{2x^{2/3}}\bigg|_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2/3}x}=$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^{2/3}}+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\frac{1}{x^{2/3}}\bigg|_1^{+\infty}.$$

Для вычисления предела раскроем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^{2/3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}x^{-1/3}}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}=0$.

Таким образом, $I=\frac{3}{2}-\frac{9}{4}(0-1)=\frac{15}{4}$, т. е. несобственный интеграл сходится. Откуда согласно интегральному признаку Коши следует и сходимость ряда.

Замечание. При исследовании на сходимость числового ряда, все члены которого отрицательны, можно вместо данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n),\ a_n>0,\ n=1;2;\ldots \tag{11}$$

исследовать на сходимость знакоположительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{11'}$$

применяя к ряду (11′) признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Ряды (11) и (11′) ведут себя одинаково, поскольку получаются один из другого умножением всех членов ряда на одну и ту же константу $c=-1\neq 0$, что, как известно из свойств числовых рядов, не нарушает сходимости ряда.

1.2. Знакопеременные ряды

Исследуя на сходимость произвольный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{12}$$

следует иметь в виду, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \tag{12'}$$

составленный из модулей его членов, сходится, то сходится и сам ряд (12). При этом ряд (12) называют *абсолютно сходящимся.* Однако расходимость ряда (12′) не влечет за собой расходимость исходного ряда; в случае, когда

ряд (12′) является расходящимся, а сам ряд (12) сходится, то ряд (12) называется *условно сходящимся.*

Тем не менее в некоторых случаях можно установить расходимость исходного ряда (12), исследуя ряд (12′). А именно, справедливы следующие утверждения, которые фактически являются достаточными признаками расходимости знакопеременного ряда.

Утверждение 1.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=c>1$, то ряд (12) расходится.

Утверждение 2.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=c>1$, то ряд (12) расходится.

Приведем теперь один достаточный признак сходимости знакопеременного ряда; правда, касается он только так называемых знакочередующихся рядов. Если первый член такого ряда положителен, то ряд можно представить в виде

$$a_1+(-a_2)+a_3+(-a_4)+\ldots, \tag{13}$$

где $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots$ – положительные числа, или, используя символ суммирования, в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ a_n>0,\ n\in N. \tag{14}$$

Признак Лейбница

Если ряд (14) таков, что

1. $a_{n+1}<a_n$ для любого $n\in N$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

то ряд (14) сходится. При этом, если S – сумма ряда, а S_n – его n-я частичная сумма, то

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|. \tag{15}$$

Замечание. Величина $S-S_n=R_n$ называется остатком сходящегося ряда, а $|R_n|$ – есть абсолютная погрешность, допускаемая при замене суммы ряда его n-й частичной суммой. Поэтому, если знакочередующийся ряд (14) удовлетворяет условиям 1 и 2 признака Лейбница, то неравенство (15) может быть использовано для оценки погрешности при приближенном вычислении суммы ряда.

Пример 8. Определить, является ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{3n^2+1} \tag{16}$$

абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся.

Решение. Чтобы установить, сходится ли данный ряд абсолютно, исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+1}, \tag{17}$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда. Сравним ряд (17) с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя второй признак сравнения.

Здесь $a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n}{3+1/n^2} = \frac{2}{3}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, то сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Но гармонический ряд расходится, следовательно, расходится и ряд (17), а значит, данный ряд абсолютной сходимости не имеет.

На условную сходимость ряд (16) исследуем по признаку Лейбница. Покажем, что условия 1 и 2 признака Лейбница выполняются:

1)Разность $$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+3}{3n^2+1} - \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)^2+1} = \frac{2(n+1)+3}{(3n^2+1)[3(n+1)^2+1]}$$

является положительным числом для любого натурального n, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для всех $n \in N$;

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n^2+1} = 0.$

Таким образом, ряд (16) сходится, причем только условно.

2. ОБЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Область сходимости

Рассмотрим функциональный ряд

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots, \tag{18}$$

члены которого являются действительными функциями действительной переменной x. При фиксированном значении x_0 переменной x из области определения всех функций $U_n(x)$ $(n = 1; 2; \ldots)$ функциональный ряд (18) обращается в числовой ряд

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots . \tag{19}$$

Множество значений x_0, при которых ряд (19) сходится, образует ***область сходимости*** функционального ряда.

В общем случае область сходимости функционального ряда может быть достаточно сложной. Наиболее простой вид имеет область сходимости степенного ряда, т. е. ряда

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{20}$$

где $\{a_n\}_{n\in N}$ – заданная числовая последовательность, x_0 – фиксированное число.

Из теоремы Абеля следует, что область сходимости степенного ряда (20) представляет собой либо одну точку x_0, либо всю числовую прямую, либо промежуток (интервал, полуинтервал, отрезок) с концами в точках $x_0 \pm R$, где R – положительное действительное число, называемое радиусом сходимости степенного ряда.

Часто область сходимости можно найти, пользуясь признаком Даламбера или радикальным признаком Коши.

Пример 9. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^{3n}}{(2n+5)8^n}. \tag{21}$$

Решение. Считаем переменную x фиксированной и исследуем полученный числовой ряд на абсолютную сходимость, применяя признак Даламбера. Для этого найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|^{3(n+1)}(2n+5)8^n}{(2(n+1)+5)8^{n+1}|x+2|^{3n}} = \frac{|x+2|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+7} = \frac{|x+2|^3}{8}.$$

Согласно признаку Даламбера ряд (21) сходится, если $\frac{|x+2|^3}{8}<1$, т. е., если $|x+2|<2$ или $-4<x<0$.

Из утверждения 1 пункта 1.2 следует, что для всех x таких, что $|x+2|>2$, ряд является расходящимся. Осталось исследовать поведение ряда в точках, где $|x+2|=2$, т. е. $x=0$ и $x=-4$.

В точке $x=0$ исследуемый функциональный ряд обращается в числовой ряд с общим членом

$$a_n=\frac{(-1)^n 2^{3n}}{(2n+5)8^n}=\frac{(-1)^n}{2n+5}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$ является условно сходящимся. Действительно, этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница и, следовательно, сходится. Однако ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}, \tag{22}$$

составленный из модулей его членов, расходится, что легко установить, сравнив его по второму признаку сравнения с гармоническим рядом. Следовательно, абсолютной сходимости нет.

При $x=-4$ получим ряд (22), который расходится, как доказано выше.

Итак, область сходимости степенного ряда (21) определяется неравенством $-4<x\le 0$.

Отметим, что в точках $x\in(-4;0)$ ряд сходится абсолютно, а в точке $x=0$ сходимость условная.

2.2. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

Среди сходящихся рядов особое место, благодаря своим свойствам, занимают равномерно сходящиеся ряды.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве $X\subset R$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой,

что для всех $n\ge N(\varepsilon)$ остаток ряда $R_n(x)$ при любом $x\in X$ удовлетворяет неравенству

$$|R_n(x)|<\varepsilon. \tag{23}$$

Пример 10. Исходя из определения доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+x+n} \tag{24}$$

на всей числовой прямой.

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении $x\in(-\infty;+\infty)$ ряд (24) знакочередующийся, так как для любого $n\in N$ квадратный трехчлен x^2+x+n принимает лишь положительные значения, поскольку его дискриминант $D=1-4n<0$, а коэффициент при x^2 больше нуля. Кроме того, этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+x+n}=0,$

2) $|U_n(x)|=\frac{1}{x^2+x+n}>\frac{1}{x^2+x+(n+1)}=|U_{n+1}(x)|,\ n=1;2;\ldots.$

Следовательно, для остатка $R_n(x)$ ряда при любом фиксированном значении x справедлива оценка:

$$|R_n(x)|\le|U_{n+1}(x)|.$$

Поскольку

$$|U_{n+1}(x)|=\frac{1}{x^2+x+n+1}=\frac{1}{(x^2+x+1)+n}<\frac{1}{n}$$

(последнее неравенство следует из того, что $x^2+x+1>0$ для любого $x\in(-\infty;+\infty)$), то

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n}. \tag{25}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и определим $N(\varepsilon)$ исходя из условия

$$N(\varepsilon)>\frac{1}{\varepsilon}. \tag{26}$$

Например, возьмем $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда из неравенств (25) и (26) следует, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ остаток $R_n(x)$ ряда удовлетворяет неравенству:

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)}<\varepsilon .$$

То есть для любого $\varepsilon>0$ найден номер $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ такой, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$ и всех $x \in(-\infty;+\infty)$ выполняется неравенство (23). Тем самым доказана равномерная сходимость ряда (24) на всей числовой прямой.

Достаточным признаком равномерной сходимости функционального ряда является признак Вейерштрасса, согласно которому функциональный ряд

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots$$

сходится равномерно на множестве $X \subset R$, если существует сходящийся числовой ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots, a_n \geq 0,\ n=1;\ 2;\ \ldots,$$

такой, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|U_n(x)| \leq a_n,\ n=1;\ 2;\ \ldots .$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям признака Вейерштрасса, называют рядом, мажорирующим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Пример 11. Доказать, используя признак Вейерштрасса, равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n nx)}{2^n}$ на всей числовой прямой.

Решение. Так как для любого $x \in(-\infty;+\infty)$ члены данного функционального ряда допускают оценку

$$\left|\frac{\sin(2^n nx)}{2^n}\right|=\frac{|\sin(2^n nx)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},\ n=1;\ 2;\ldots,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то согласно признаку Вейерштрасса исследуемый ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

Пример 12. Доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{\sqrt{n^7+1}} \tag{27}$$

на отрезке $[-6;-4]$.

Решение. Мажорирующий ряд для данного функционального ряда можно построить исходя из ограниченности функции $(x+5)^{2n}$ на отрезке $[-6;-4]$:

$$\left|(x+5)^{2n}\right|=(x+5)^{2n} \leq 1 .$$

Отсюда следует оценка членов функционального ряда (27):

$$\left|\frac{(x+5)^{2n}}{\sqrt{n^7+1}}\right| \leq \frac{1}{n^{7/2}},\ n=1;\ 2;\ldots . \tag{28}$$

Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p>1$. На основании оценки (28) заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}}$ является мажорирующим рядом для ряда (27), и, значит, по признаку Вейерштрасса ряд (27) равномерно сходится на отрезке $[-6;-4]$.

3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

3.1. Разложение функций в степенные ряды

Любую бесконечно дифференцируемую в интервале $|x-x_0|<r$ функцию $f(x)$ можно разложить в этом интервале в ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если для любого x из этого интервала остаточный член R_n формулы Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} = 0, \qquad (29)$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Необходимость в проверке условия (29) отпадает, если для разложения функции в ряд удается использовать известные разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций.

Пример 13. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2)$ в ряд Тейлора по степеням x. Указать область сходимости ряда.

Решение. Разложим квадратный трехчлен на множители, предварительно определив его корни $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$1 + 2x - 8x^2 = -8\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (1+4x)(1-2x).$$

Заметим, что в найденном разложении на ОДЗ функции $f(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, оба множителя положительны. Тогда

$$\ln(1 + 2x - 8x^2) = \ln(1+4x) + \ln(1-2x).$$

Воспользуемся стандартным разложением

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots, \quad (-1 < z \le 1). \qquad (30)$$

Положив в равенстве (30) сначала $z = 4x$, а потом $z = -2x$, получим:

$$\ln(1+4x) = 4x - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{3} - \frac{(4x)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(4x)^n}{n} - \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{4^n x^n}{n}, \qquad \left(-\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{4}\right); \qquad (31)$$

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} - \ldots - \frac{(2x)^n}{n} - \ldots =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}, \qquad \left(-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right). \qquad (32)$$

Складывая сходящиеся ряды (31) и (32) почленно, получим искомое разложение данной функции в степенной ряд:

$$\ln(1 + 2x - 8x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{4^n x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^{n-1} 2^n - 1\right] 2^n x^n}{n}.$$

Разложение справедливо для тех значений x, для которых справедливы оба разложения (31) и (32), т. е. для $x \in (-1/4, 1/4]$.

3.2. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Рассмотрим примеры решения задач на приближенное вычисление значения функции и определенного интеграла с помощью степенных рядов.

Чтобы найти приближенное значение функции достаточно в ее разложении в степенной ряд сохранить первые n членов, отбросив n-й остаток ряда. Погрешность найденного значения равна сумме отброшенных членов.

Если вычисление производится с заданной точностью ε, то число n сохраняемых членов ряда определяют исходя из неравенства

$$|R_n| \le \varepsilon, \qquad (33)$$

где $R_n = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \ldots$.

Пример 14. Вычислить $\ln(1,2)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Используем известное разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд по степеням x:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Ряд в правой части равенства сходится в полуинтервале $(-1; 1]$. Полагаем $x = 0{,}2$. Для вычисления $\ln(1,2)$ получаем знакочередующийся ряд $\ln(1,2) = 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{3} - \frac{0{,}2^4}{4} + \frac{0{,}2^5}{5} - \ldots$, который удовлетворяет признаку Лейбница. В этом случае справедлива оценка остатка ряда:

$$|R_n| \le |U_{n+1}|.$$

Поэтому неравенство (33) будет выполнено, если модуль первого из отброшенных членов не превышает ε:

$$|U_{n+1}| \le \varepsilon .$$

Непосредственной проверкой находим, что абсолютная величина пятого члена $|U_5| = 0{,}000064 < 0{,}0001$, поэтому U_5 будет первым отброшенным членом. Тогда с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ получим

$$\ln(1{,}2) \approx 0{,}2 - \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}008}{3} - \frac{0{,}0016}{4} = 0{,}18228 .$$

Пример 15. Вычислить $\sqrt[4]{20}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Чтобы воспользоваться известным биноминальным разложением

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1, \qquad (34)$$

представим $\sqrt[4]{20}$ в виде

$$\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{16+4} = \sqrt[4]{16(1+1/4)} = 2(1+1/4)^{1/4}. \qquad (35)$$

Так как число $(1+1/4)^{1/4}$ есть значение бинома $(1+x)^m$ при $m = 1/4$ в точке $x = 1/4$, то согласно (34)

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \qquad (36)$$

$$= 1 + \frac{1}{4^2} - \frac{1\cdot 3}{4^4\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^6\cdot 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^8\cdot 4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^{2n}\cdot n!} + \ldots .$$

Заметим, что полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Действительно,

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{4n-5}{4^2 n} < \frac{4n}{16n} = \frac{1}{4} < 1$$

для любого $n \ge 2$, откуда заключаем, что $|U_{n+1}| < |U_n|$. Более того, так как $|U_3| < \frac{1}{4}|U_2|$; $|U_4| < \frac{1}{4}|U_3| < \frac{1}{16}|U_2|$; …; $|U_n| < \frac{1}{4^{n-2}}|U_2|$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n| = 0$.

Умножив равенство (36) на 2, согласно (35) получим:

$$\sqrt[4]{20} = 2\left[1 + \frac{1}{4\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{4^4\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^6\cdot 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^8\cdot 4!} + \ldots\right].$$

Вычисляя члены ряда, найдем, что пятый член ряда (с учетом множителя 2) меньше 0,001. Следовательно, для соблюдения точности $\varepsilon = 0{,}001$ достаточно сохранить первые четыре члена ряда, вычислив их с одним лишним (запасным) знаком по сравнению с указанной точностью. То есть

$$\sqrt[4]{20} \approx 2 + 0{,}1250 - 0{,}0117 + 0{,}0017 = 2{,}115 .$$

Для приближенного вычисления интеграла подынтегральную функцию $f(x)$ раскладывают в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n . \qquad (37)$$

Согласно свойствам степенных рядов ряд (37) можно почленно интегрировать по отрезку $[c,d]$, целиком принадлежащему интервалу сходимости этого ряда. Причем

$$\int_c^d f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_c^d a_n (x-x_0)^n dx .$$

Сумма числового ряда, полученного в результате интегрирования, приближенно равна сумме его первых n членов. Значение n зависит от требуемой в задаче точности вычисления.

Пример 16. Вычислить $\int_0^1 x(1-e^{-x^2})dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд, пользуясь стандартным рядом

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < z < \infty).$$

Заменяя здесь z на $(-x^2)$, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots .$$

Область сходимости полученного степенного ряда есть интервал $(-\infty;+\infty)$. Поскольку отрезок интегрирования $[0;1]$ входит в область сходимости ряда, то

$$\int_0^1 x(1-e^{-x^2})dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{1!}-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}-\frac{x^9}{4!}+\frac{x^{11}}{5!}+\ldots\right)dx=\frac{x^4}{1!4}-\frac{x^6}{2!6}+\frac{x^8}{3!8}-\frac{x^{10}}{4!10}+\frac{x^{12}}{5!12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{48}-\frac{1}{240}+\frac{1}{1440}-\ldots.$$

Полученный в результате интегрирования числовой ряд является знакочередующимся и удовлетворяет признаку Лейбница. Следовательно, ошибка, допущенная при замене суммы ряда его частичной суммой, не превышает модуля первого из отброшенных членов. Вычислим несколько последовательных первых членов ряда с одним лишним знаком после запятой по сравнению с указанной точностью, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,001:

$$U_1=\frac{1}{4}=0{,}2500,\ U_2=-\frac{1}{12}=-0{,}0833,\ U_3=\frac{1}{48}=0{,}0208,$$

$$U_4=-\frac{1}{240}=-0{,}0042,\ U_5=\frac{1}{1440}=0{,}0007.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 x(1-e^{-x^2})dx\approx 0{,}2500-0{,}0833+0{,}0208-0{,}0042=0{,}1833\approx 0{,}183.$$

3.3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений рассмотрим на примере решения задачи Коши для уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной:

$$y''=f(x,y,y'),\qquad(38)$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1.\qquad(39)$$

Если функция $f(x,y,y')$ представляет собой многочлен от переменных x,y,y', то решение задачи (38) – (39) представимо в виде степенного ряда

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,\qquad(40)$$

где $a_n=\dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Коэффициенты a_n разложения (40) можно определить с учетом условий (39) путем последовательного дифференцирования уравнения (38) по переменной x.

Пример 17. Найти пять первых, отличных от нуля, членов разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши:

$$y''-xy'+y^2=0,\qquad(41)$$

$$y(1)=1,\quad y'(1)=2.\qquad(42)$$

Решение. Приведем уравнение (41) к виду уравнения, разрешенного относительно старшей производной:

$$y''=xy'-y^2.\qquad(43)$$

Согласно сказанному выше решение задачи Коши в окрестности точки $x_0=1$ можно искать в виде ряда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n.$$

Значения $y(1)$ и $y'(1)$ известны из начальных условий. Значение $y''(1)$ найдем из равенства (43), рассматривая его в точке $x_0=1$:

$$y''(1)=1\cdot 2-1^2=1.$$

Производные порядка выше второго найдем путем последовательного дифференцирования по x равенства (43) с учетом того, что y и y' - функции, зависящие от x:

$$y'''=y'+xy''-2yy';$$

$$y^{(IV)}=2y''+xy'''-2(y')^2-2yy''.$$

Рассматривая эти равенства в точке $x_0=1$, получим:

$$y'''(1)=y'(1)+1\cdot y''(1)-2y(1)\cdot y'(1)=-1;$$

$$y^{(IV)}(1)=2y''(1)+1\cdot y'''(1)-2(y'(1))^2-2y(1)\cdot y''(1)=-9.$$

Теперь можно записать пять первых, отличных от нуля, членов ряда Тейлора искомого решения

$$y(x)=1+2(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2-\frac{1}{3!}(x-1)^3-\frac{9}{4!}(x-1)^4+\ldots$$

или

$$y(x)=1+2(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{3}{8}(x-1)^4+\ldots .$$

Если уравнение (38) линейно относительно искомой функции и её производных, то его решение можно искать в виде ряда (40) с неопределенными коэффициентами. Для этого ряд (40) подставим в дифференциальное уравнение (38) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

Пример 18. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$y''+2(x-1)y'+y=0,$$

удовлетворяющее условиям: $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Решение. Решение задачи Коши ищем в виде степенного ряда (40). В нашем случае $x_0=1$, поэтому

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n .$$

Дифференцируя почленно этот ряд дважды, получим

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$$

и

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} .$$

Подставляя в исходное уравнение вместо y, y' и y'' соответствующие ряды, получим равенство:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n=0, \qquad (44)$$

справедливое для всех x, при которых существует искомое решение.

Сгруппируем в левой части равенства (44) члены с одинаковыми показателями степени $(x-1)$. Для этого удобно предварительно заменить индекс суммирования n первого ряда на новый индекс (оставим за ним то же обозначение n) так, чтобы суммирование по новому индексу начиналось

со значения $n=0$. Т. е. ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$ запишем как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n$. Суммирование членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ также можно начать с $n=0$, т.е. записать ряд в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^n$, поскольку при $n=0$ соответствующий член ряда равен нулю. Тогда (44) можно переписать так:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+1)a_n](x-1)^n=0. \qquad (45)$$

Если сумма степенного ряда – функция, тождественно равная нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. Для неизвестных коэффициентов a_n получаем рекуррентное соотношение

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+1)a_n=0$$

или

$$a_{n+2}=\frac{-(2n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad (n=0,1,\ldots). \qquad (46)$$

Из начального условия $y(1)=1$ получим, что $a_0=1$, а из условия $y'(1)=0$ найдем $a_1=0$. Тогда согласно (46) имеем:

$$a_2=-\frac{1}{2\cdot 1}a_0=-\frac{1}{2\cdot 1}; \qquad a_3=0;$$

$$a_4=-\frac{5}{4\cdot 3}a_2=\frac{5\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}; \qquad a_5=0;$$

$$a_6=-\frac{9}{6\cdot 5}a_4=-\frac{5\cdot 9}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}; \qquad a_7=0;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k)}; \qquad a_{2k+1}=0.$$

Итак,

$$y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{(2k)!}(x-1)^{2k}.$$

Чтобы найти область сходимости полученного ряда, применим признак

Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|U_{k+1}(x)|}{|U_k(x)|}=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots(4k-3)(4k+1)|x-1|^{2(k+1)}(2k)!}{(2k+2)!\,1\cdot5\cdot9\cdot\ldots(4k-3)|x-1|^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(4k+1)(x-1)^2}{(2k+1)(2k+2)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(4k+1)(x-1)^2}{(2k+1)(2k+2)}=(x-1)^2\lim_{k\to\infty}\frac{4k+1}{(2k+1)(2k+2)}=0,$$

т. е. ряд сходится на всей числовой прямой, и сумма ряда при всех значениях x является решением уравнения.

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

4.1. Разложение функций в тригонометрические ряды

Рядом Фурье функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-l;l]$, называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{47}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=0,1,2,\ldots),$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=1,2,3,\ldots). \tag{48}$$

Для функции $f(x)$, определенной в произвольном интервале $(c;c+2l)$ длины $2l$, следует изменить нижний и верхний пределы интегрирования на c и $(c+2l)$ соответственно. Это так называемые ряды Фурье периода $2l$.

Более простой вид имеют тригонометрический ряд и его коэффициенты для функции, заданной на интервале $(-\pi;\pi)$; в этом случае в формулах (47) и (48) полагают $l=\pi$.

Каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы формально составленный для нее ряд Фурье (47) – (48) сходился, причем именно к этой функции? Одним из наиболее важных в практическом применении признаков сходимости является признак Дирихле, который справедлив для функций, определенных на $[-l;l]$ и удовлетворяющих условиям:

а) $f(x)$ – ограничена, т. е. для любого $x\in[-l;l]$ выполняется неравенство $|f(x)|\le M$, где M – некоторая положительная постоянная;

б) $f(x)$ – кусочно монотонна, т. е. отрезок $[-l;l]$ можно разбить точками $-l=x_0<x_1<\ldots<x_N=l$ на конечное число интервалов $(x_i;x_{i+1})$, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна.

Теорема Дирихле утверждает, что ряд Фурье для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям «а» и «б», сходится на отрезке $[-l;l]$, т. е. имеет сумму $S(x)$ во всех точках этого отрезка. При этом в точках непрерывности функции $f(x)$ ряд сходится к самой функции, т. е. $S(x)=f(x)$; в точках разрыва x_k функции $f(x)$ сумма ряда $S(x_k)$ равна полусумме односторонних пределов:

$$S(x_k)=\frac{1}{2}[f(x_k-0)+f(x_k+0)];$$

на концах отрезка, т. е. в точках $x=l$ и $x=-l$, сумма ряда принимает значения

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)].$$

При решении задач на разложение в ряд Фурье ограниченной кусочно монотонной функции $f(x)$ необходимо иметь в виду, что в ее точках разрыва и на концах отрезка полученный ряд (47 – 48) может и не сходиться к $f(x)$, поэтому в ответе следует указать, где справедливо найденное разложение.

Пример 19. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\pi} & \text{при}\quad -\pi<x\le 0,\\ \sin x & \text{при}\quad 0<x<\pi\end{cases} \tag{49}$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье; построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ в области их существования.

Решение. Вычислим коэффициенты ряда Фурье по формулам (48) при $l=\pi$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{\pi}\right)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x dx=-\frac{x^2}{2\pi^2}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos x}{\pi}\bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi+4}{2\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{\pi}\right)\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos(nx)dx=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}x\cos(nx)dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos(nx)dx\,,\qquad n=1,2,3,\dots .$$

Вычислим отдельно значения интегралов, входящих в выражение для a_n:

$$I_1(n)=\int_{-\pi}^{0}x\cos(nx)dx=\begin{bmatrix}U=x; & dU=dx\\ dV=\cos(nx)dx; & V=\sin(nx)/n\end{bmatrix}=\frac{x\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx=$$

$$=-\frac{\pi\sin(n\pi)}{n}+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\bigg|_{-\pi}^{0}.$$

Поскольку $\sin(\pi n)=0$ и $\cos(\pi n)=(-1)^n$ для любого $n\in N$, то

$$I_1(n)=\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2}, & \text{если}\quad n=2k-1,\quad k=1,2,\dots;\\ 0, & \text{если}\quad n=2k,\quad k=1,2,\dots .\end{cases}$$

$$I_2(n)=\int_{0}^{\pi}\sin x\cos(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_{0}^{\pi},$$

если $n\neq 1$.

Для $n=1$ интеграл $I_2(n)$ вычислим отдельно:

$$I_2(1)=\int_{0}^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2x dx=0.$$

В случае $n\geq 2$ имеем

$$I_2(n)=-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]-\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]\right\}=-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^2-1}\right\}=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{2}{n^2-1}\right]=-\frac{1}{2}\,\frac{2}{n^2-1}\left((-1)^n+1\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k-1,\quad k=2;3;\dots;\\ -\dfrac{2}{n^2-1}, & n=2k,\quad k=1;2;\dots .\end{cases}$$

Таким образом, для $n\geq 2$ имеем

$$a_n=-\frac{1}{\pi^2}I_1(n)+\frac{1}{\pi}I_2(n)=\frac{1}{\pi^2}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}-\frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi^2n^2}, & n=2k-1,\quad k=2;3;\dots\\ -\dfrac{2}{\pi(n^2-1)}, & n=2k,\quad k=1;2;\dots .\end{cases}$$

Кроме того, $a_1=-\frac{1}{\pi^2}I_1(1)+\frac{1}{\pi}I_2(1)=-\frac{2}{\pi^2}$.

Аналогично найдем коэффициенты b_n для $n\geq 1$:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{\pi}\right)\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin(nx)dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}x\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin(nx)dx.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. Интегрируя по частям первый из интегралов, получим:

$$I_3(n)=\int_{-\pi}^{0}x\sin nx dx=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n},\qquad n=1,2,3,\dots .$$

Вычислим второй из интегралов для случаев $n\geq 2$ и $n=1$.

Для $n\geq 2$ имеем

$$I_4(n)=\int_{0}^{\pi}\sin x\sin(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_{0}^{\pi}=0;$$

для $n=1$ получим

$$I_4(n)=\int_{0}^{\pi}\sin x\sin x dx=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

То есть для $n\geq 2$ имеем

$$b_n=-\frac{1}{\pi^2}I_3(n)+\frac{1}{\pi}I_4(n)=-\frac{1}{\pi^2}\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}=\frac{(-1)^n}{\pi n}.$$

Для $n=1$ получим

$$b_1 = -\frac{1}{\pi^2} I_3(1) + \frac{1}{\pi} I_4(1) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{2\pi}.$$

Запишем теперь ряд Фурье функции $f(x)$, подставив в (47) найденные коэффициенты:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi+4}{4\pi} - \frac{2}{\pi^2}\cos x + \frac{\pi-2}{2\pi}\sin x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} - \frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}\right)\cos nx + \frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right] = \frac{\pi+4}{4\pi} +$$

$$+\left(-\frac{2}{\pi^2}\cos x + \frac{\pi-2}{2\pi}\sin x\right) + \left(-\frac{2}{3\pi}\cos 2x + \frac{1}{2\pi}\sin 2x\right) + \left(-\frac{2}{9\pi^2}\cos 3x - \frac{1}{3\pi}\sin 3x\right) + \ldots .$$

Чтобы выяснить, для каких значений x полученный ряд сходится к функции $f(x)$, обратимся к теореме Дирихле.

Рассматриваемая функция (49) непрерывна на всей области определения. Действительно, на интервалах $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$ она непрерывна как элементарная функция, а в точке $x=0$, как несложно проверить, выполняются условия непрерывности:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0-0} f(x) = f(0).$$

Поэтому для всех $x \in (-\pi;\pi)$ справедливо разложение

$$f(x) = \frac{\pi+4}{4\pi} - \frac{2}{\pi^2}\cos x + \frac{\pi-2}{2\pi}\sin x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} - \frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}\right)\cos nx + \frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right],$$

т. е. $f(x) = S(x)$.

Что касается граничных точек отрезка $[-\pi;\pi]$, то согласно теореме Дирихле

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\pi-0} f(x) + \lim_{x\to-\pi+0} f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\pi + \frac{\pi}{\pi}\right] = \frac{1}{2},$$

что не совпадает со значением рассматриваемой функции (49) в этих точках.

Чтобы построить график суммы $S(x)$ ряда Фурье, кроме отмеченного выше ее отличия от функции $f(x)$ надо учесть и тот факт, что сумма ряда (47) является периодической функцией с периодом $T=2l$ (в нашем случае $T=2\pi$). Графики функций $f(x)$ и $S(x)$ приведены ниже на рис. 1 и 2 соответственно.

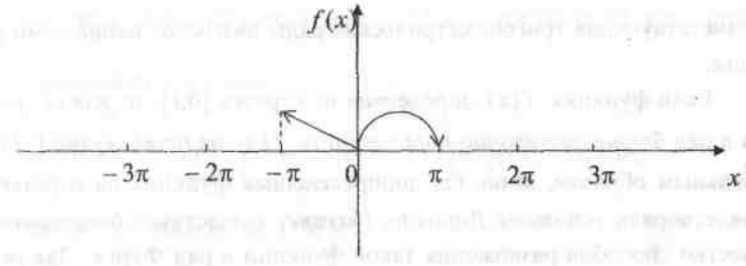

Рис. 1

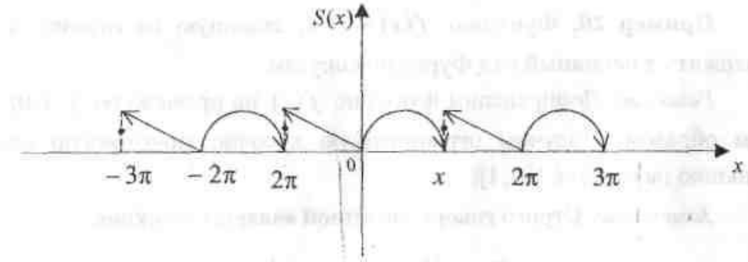

Рис. 2

4.2. Неполные ряды Фурье

Задача разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье существенно упрощается, если эта функция чётна или нечётна. Из формул (48) следует, что ряд Фурье чётной функции $f(x)$ содержит только свободный член и косинусы:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n = 0 \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{50}$$

Нечётная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд, содержащий только синусы:

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{51}$$

Соответствующие тригонометрические ряды называют неполными рядами Фурье.

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[0;l]$, то для её разложения в ряд Фурье достаточно доопределить $f(x)$ на промежутке $[-l;0)$ произвольным образом, лишь бы доопределенная функция на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяла условиям Дирихле. Поэтому существует бесчисленное количество способов разложения такой функции в ряд Фурье. Для разложения функции в неполный ряд Фурье необходимо доопределить её либо чётным, либо нечётным образом.

Пример 20. Функцию $f(x) = 1 - x$, заданную на отрезке $x \in [0;1]$, разложить в неполный ряд Фурье по синусам.

Решение. Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-1;0)$ нечётным образом. Получим ограниченную кусочно монотонную нечётную функцию на отрезке $[-1;1]$.

Замечание. Строго говоря, нечётной является функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1, \\ -1 - x, & -1 \le x < 0, \end{cases}$$

определённая на множестве $x \in [-1;0) \cup (0;1]$.

Используя формулы (51), где $l = 1$, найдём коэффициенты ряда:

$$a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi x)dx = \begin{bmatrix} U = 1 - x; & dU = -dx; \\ dV = \sin(n\pi x)dx; & V = -\cos(n\pi x)/(n\pi) \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left[(1-x)\frac{-\cos(n\pi x)}{\pi n}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx\right] = 2\left[\frac{1}{\pi n} - \frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2}\Bigg|_0^1\right] = \frac{2}{n\pi},\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, получим разложение данной функции $f(x)$ в неполный ряд Фурье

$$1 - x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \ldots\right).$$

Отметим, что найденное разложение справедливо на промежутке $x \in (0;1]$. Согласно теореме Дирихле сумма ряда $S(x)$ в точке разрыва $x = 0$ функции $\tilde{f}(x)$ принимает значение

$$S(0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to 0-0}\tilde{f}(x) + \lim_{x \to 0+0}\tilde{f}(x)\right] = \frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0,$$

что не совпадает со значением $f(0) = 1$.

ЗАДАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ

Задача 1

1. Найти сумму S_n первых n членов ряда;
2. Доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости;
3. Найти сумму ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+12n+5}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

1.4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{9n^2-12n-5}$.

1.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{9n^2-6n-8}$.

1.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+16n+15}$.

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$.

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$.

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$.

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+15}$.

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$.

1.16. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{4}{n^2-4n+3}$.

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$.

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$.

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$.

1.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{4n^2-4n-3}$.

1.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$.

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.

1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$.

1.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$.

1.26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{4n^2-8n+3}$.

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.

1.28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{9n^2-21n+10}$.

1.29. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{4n^2-16n+15}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.

Задача 2. *Используя признаки сравнения, исследовать сходимость ряда.*

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+31}{4n^3+5n}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

2.6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}\right)}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\left(2\sqrt{n}-1\right)}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{n^4+5n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}-n}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n+n}$.

2.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n}$.

2.13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(\sqrt{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+7n}{5^n+n}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-3}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n^2+5)(\sqrt[3]{n}+2)}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{\sqrt{(n^2+3)^5}}$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\sqrt{n}+3}$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+(-1)^n}{\sqrt[3]{2n-1}}$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^4+2^n}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2\sqrt{n}}$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^3+n+1}}$.

2.27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\sqrt[3]{n+1}}$.

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n-1}}$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+(-1)^n}{2^n+n}$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{1/n}+1}{\sqrt{2n^4+n^2+1}}$.

Задача 3. *Используя признаки сравнения, исследовать сходимость ряда.*

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos\sqrt{n}}{n^2+n+4}$.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(\pi n/3)}{3^n+2}$

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{e^{\frac{4}{n^2}}-1}$.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3}$.

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-1\right)^2$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+arctg\,(n)}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}+1}{\sqrt{n^4+n^2+3}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{2n+3}{n^2+1}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/2)+2}{\sqrt{n^2+4}}$.

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,(n^2)}{\sqrt{3n+1}}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arcsin\frac{3}{\sqrt{n+1}}$.

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(\frac{3n+4}{3n+1}\right)$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arccos(1/\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}}$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{2}{n^3}}-1\right)n$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2\sqrt{n^3}+\sqrt{n}}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,(n+1)}{\sqrt{2n^2+n+1}}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2/\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}$.

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos(\pi n/2)}{\sqrt{n^3}+2\sqrt{n}+2}$.

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1+n^3}{n^3+n^2+1}\right)$.

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4-3^{1/n}}{\sqrt{n^2+4}}$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n^2}\right)\sqrt{n}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin(\pi n/4)}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^4+1}}$.

3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arccos(1/\sqrt{n+1})}{n^3+2n+5}$.

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5+2n^2}{3+2n^2}\right)$.

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\sqrt{\frac{n+1}{n^3+n+1}}$.

3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+e^{1/n}}{\sqrt[4]{n^3}+n}$.

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

Задача 4. *Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость ряда.*

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n n!}$.

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 tg\,\frac{\pi}{2^n}$.

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5^n(n-1)!}$.

4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^n(n+1)!}$.

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)!}{(2n)!}$.

4.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

4.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n^5}{(n-1)!}$.

4.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{3^{n+1}(n+1)}}$.

4.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{(2n-1)!}$.

4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{15^n 2n!}{(2n)!}$.

4.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

4.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$.

4.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}$.

4.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{3^n(n+1)!}$.

4.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\ldots(2n+1)}{1\cdot4\ldots(3n-2)}$.

4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n-1)!}{(2n+1)!}$.

4.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^n(2n)!}$.

4.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{4^n(n+1)!}$.

4.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(5n+1)^3}{5^{n+1}}$.

4.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{4^n(n+1)!}$.

4.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(2n+1)!}$.

4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{5^n n!}$.

4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{n^n}$.

4.28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{10^n\sqrt{n^2+1}}{(n-1)!}$.

4.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$.

4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$.

Задача 5. *С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость ряд.*

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$.

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+1}{n^{2}+1}\right)^{n^{2}}$.

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n-1}\right)^{n^{3}}$.

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$.

5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n^{2}}{3}}$.

5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n}\operatorname{arctg}^{n}\frac{1}{(n+1)^{3}}$.

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n}\arcsin^{n}\frac{1}{(n^{2}+1)^{2}}$.

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}}}$.

5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

5.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}}$.

5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^{n}$.

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n}$.

5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$.

5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^{2}}\right)^{n}$.

5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n}\operatorname{arctg}^{n}\frac{2\pi}{3n}$.

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^{2}+1\right)^{n/2}}{(3n)^{n}}$.

5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n/2}$.

5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{n/2}$.

5.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\left(\frac{n}{5n+1}\right)^{n/2}$.

5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}7^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n^{2}}$.

5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+3}{3n^{2}-2}\right)^{2n}$.

5.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n}\arcsin^{n}\frac{\pi}{4n}$.

5.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^{n}}$.

5.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{\left(2n^{2}+1\right)^{n/2}}$.

5.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+1}\right)^{n/2}$.

5.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$.

5.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$.

Задача 6. *Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость числовой ряд.*

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}$.

6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{(1+\ln n)^{4}}}$.

6.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}$.

6.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[5]{n+1}}}{\sqrt[5]{(n+1)^{4}}}$.

6.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^{3}}}$.

6.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^{2}n}}$.

6.7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^{-2}\sqrt{n}}{n}$.

6.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1-\sqrt[4]{n+1}}}{\sqrt[4]{(n+1)^{3}}}$.

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n}}$.

6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+3\ln n)^{2}}$.

6.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^{2}}}$.

6.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{2n+3}}$.

6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+3)}{\sqrt{(n+3)^{3}}}$.

6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{(2+5\ln n)^{3}}}$.

6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{2^{\sqrt{(n+2)^{3}}}}$.

6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3^{(2n+3)^{2}}}$.

6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\ln n}{n^{2}}$.

6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+\ln^{2}n)}$.

6.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{2^{\sqrt[4]{(n+1)^{5}}}}$.

6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{2}}{e^{(n+1)^{3}}}$.

6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}+4n+8}$.

6.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{2+\ln(n+1)}}$.

6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{-3}\sqrt{n+1}}{n+1}$.

6.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{2^{\sqrt{(2n-1)^{3}}}}$.

6.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{1/(n+1)}}{(n+1)^{2}}$.

6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\left[(1+\ln^{2}(2n+1)\right]}$.

6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{e^{n}}$.

6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}\cdot 3^{\sqrt{3n-2}}}$.

6.29. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-3)[(1+3\ln(n-3)]^{3}}$.

6.30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(2n-1)}{\sqrt[3]{(2n-1)^{4}}}$.

Задача 7. *Определить, является ли ряд абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся.*

7.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{3^n}$.

7.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(2n+1)^3}}$.

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$.

7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n^2} \right)^{\frac{n}{3}}$.

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$.

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{3n^2-1}$.

7.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+2)^n}$.

7.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{6n-5} \right)^n$.

7.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{2n}$.

7.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-3)2^n}{n!}$.

7.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

7.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

7.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{4n+1}}$.

7.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}$.

7.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^n$.

7.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^{n+1}}$.

7.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$.

7.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{\frac{n}{2}}$.

7.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n(2n+1)}$.

7.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

7.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

7.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

7.23. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1}$.

7.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)5^n}$.

7.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} tg \frac{1}{4n}$.

7.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n 2^n}$.

7.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n+2}$.

7.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n$.

7.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{2n+7}}$.

7.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{e^n}$.

Задача 8. *Исходя из определения, доказать равномерную сходимость функционального ряда на всей числовой прямой.*

8.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{x^2+1}}$.

8.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + \sin^2 x}$.

8.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1 + x^{2n}}$.

8.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx^2}}{1+n}$.

8.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 1 + \sin x}$.

8.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(e^{|x|}+1)}$.

8.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 e^{|x|} + 1}$.

8.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + \cos^4 x}$.

8.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^x + n}$.

8.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n} + 1 + |x|}$.

8.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + \sqrt{x^2+2}}$.

8.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x^2+n)^2}$.

8.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n|x|} n}$.

8.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^x + \sqrt{n+1}}$.

8.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + x^2 + 9}$.

8.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + \sin x}$.

8.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + n + e^x}$.

8.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \cos x}$.

8.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^6 + n^3}$.

8.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n} + n^2 + 2}$.

8.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n - \cos^2 x}$.

8.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{10} + \sqrt{n+1}}$.

8.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{\sqrt{n}+1}$.

8.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1} - \sin^2 x}$.

8.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)e^{nx^2}}$.

8.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + x^2 + 2x + 2}$.

8.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} + \cos^2 x}$.

8.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{1+x^2} + 1}$.

8.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n e^{|x|} + 1}$.

8.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^x + (n+1)^2}$.

Задача 9. *Применяя признак Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда на указанном промежутке.*

9.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n+3}}$, $[2;4]$.

9.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{\sqrt{n^3+2n^2}}$, $[0;2]$.

9.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{15^n(n+1)}$, $[-2;4]$.

9.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt[5]{(n+2)n}}$, $[-3;-1]$.

9.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{7^n n}$, $[-9;-3]$.

9.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(n+4)^2}$, $[-5;-3]$.

9.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$, $[-1;1]$.

9.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}\sqrt{n^4+2}}$, $[-2;0]$.

9.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(n+3)}$, $[-2/5;2/5]$.

9.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(3n+1)3^n}$, $[-4;-2]$.

9.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)\sin^3(nx)}{\sqrt{n^5+7}}$, $[-1;3]$.

9.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-3)^n\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$, $[2;4]$.

9.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\pi)\cos^2(nx)}{\sqrt[3]{n^5+\pi}}$, $[0;\pi]$.

9.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x\sin(2nx)}{(n+1)(2n+3)}$, $[-1;1]$.

9.15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+7)\sin^2(n\pi x)}{(n+2)\sqrt[3]{n^2+2}}$, $[-8;-6]$.

9.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-2)^n\sin\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)$, $[1;3]$.

9.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2\left(\frac{2\pi}{5^n}\right)(x-5)^n$, $[4;6]$.

9.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n\cdot 3^n}$, $[-2;\ 2]$.

9.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-6)^n\sin\left(\frac{1}{6^n}\right)$, $[5;7]$.

9.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)\cos^2(2nx)}{n\sqrt{n^3+1}}$, $[-1;3]$.

9.21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)^2x^{2n}}{(3n+1)}$, $[-1/3;1/3]$.

9.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sin^2 x}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\cos^4 x}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sqrt{x^2+2}}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x^2+n)^2}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+x^2+9}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n+e^x}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^6+n^3}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}+n^2+2}$, $(-\infty;+\infty)$.

9.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^{10}+\sqrt{n+1}}$, $(-\infty;+\infty)$.

Задача 10. *Найти область сходимости степенного ряда.*

10.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n2^n}$.

10.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-4)^{2n}}{(2n+1)^2}$.

10.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

10.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{3n}}{(n+5)^2}$.

10.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{(3n+1)^2}$.

10.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2n-1}$.

10.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{2n}}{3n-1}$.

10.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{(n+1)2^n}$.

10.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(3n+1)2^n}$.

10.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^{2n}}{(n+1)^2 3^n}$.

10.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(x-3)^{3n}}{(4n-1)^3}$.

10.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)5^n}$.

10.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)4^n}$.

10.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{4n+3}$.

10.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(3n-1)6^n}$.

10.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n-1}}{5n+1}$.

10.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{(n+2)3^n}$.

10.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

10.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^{2n-1}}{(3n^2-1)4^n}$.

10.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(5n+1)2^n}$.

10.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(x+5)^{3n}}{(5n-6)^3}$.

10.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-6)^n}{(3n+1)4^n}$.

10.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+4)^{2n+1}}{(4n+1)5^n}$.

10.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+5)^{2n-1}}{(n+1)!}$.

10.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-1)^{2n-1}}{(n+2)!}$.

10.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{(3n-1)2^n}$.

10.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)(x+4)^{2n+1}}{(n+3)!}$.

10.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n(x+1)^{3n}}{(4n+1)^3}$.

10.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-4)^{2n}}{(4n-1)^3}$.

10.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{(3n+1)2^n}$.

Задача 11. *Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x. Указать область сходимости ряда.*

11.1. $f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}$.

11.2. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

11.3. $f(x)=\frac{x}{2-x}$.

11.4. $f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}$.

11.5. $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$.

11.6. $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$.

11.7. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

11.8. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

11.9. $f(x)=2x^2\cdot\cos^2(x/2)-x$.

11.10. $f(x)=2x\cdot\sin^2(x/2)-x$.

11.11. $f(x)=\frac{7}{12+x-x^2}$.

11.12. $f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}$.

11.13. $f(x)=\ln(2-x-6x^2)$.

11.14. $f(x)=\ln(1+x-12x^2)$.

11.15. $f(x)=\sqrt{1+2x}$.

11.16. $f(x)=x\,ch(2x)$.

11.17. $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}$.

11.18. $f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}$.

11.19. $f(x)=\ln(2-x-x^2)$.

11.20. $f(x)=\ln(1-x-12x^2)$.

11.21. $f(x)=x\sqrt{1-2x}$.

11.22. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

11.23. $f(x)=x\sqrt[3]{27-2x}$.

11.24. $f(x)=\ln(1-5x+4x^2)$.

11.25. $f(x)=x\sqrt[2]{4-3x}$.

11.26. $f(x)=(x-1)\sin 2x$.

11.27. $f(x)=x^3\ln(1+x^2)$.

11.28. $f(x)=x^3 arctg\left(\frac{x}{2}\right)$.

11.29. $f(x)=(x-1)\cos 3x$.

11.30. $f(x)=\ln(1+3x+2x^2)$.

Задача 12. *Используя разложение в ряд Тейлора соответствующих элементарных функций, вычислить значение с точностью* $\varepsilon=0{,}0001$.

12.1. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

12.2. $\sin 12^\circ$.

12.3. $\sin 36^\circ$.

12.4. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

12.5. $\cos 10^\circ$.

12.6. $\sin 10^\circ$.

12.7. $\sin 15^\circ$.

12.8. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

12.9. $\cos 12^\circ$.

12.10. $\cos 15^\circ$.

12.11. $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

12.12. $\sqrt[5]{34}$.

12.13. $\cos 36^\circ$.

12.14. $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

12.15. $\sqrt[3]{1{,}05}$.

12.16. $\sqrt[3]{66}$.

12.17. $\sqrt[4]{260}$.

12.18. $arctg(1/4)$.

12.19. $arctg(0{,}3)$.

12.20. $arctg(1/5)$.

12.21. $\ln(1{,}05)$.

12.22. $\ln(1{,}02)$.

12.23. $\ln(1{,}03)$.

12.24. $\ln(1{,}12)$.

12.25. $\sqrt[5]{270}$.

12.26. $\sqrt[4]{1{,}05}$.

12.27. $\ln(1{,}11)$.

12.28. $arctg(1/8)$.

12.29. $\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}$.

12.30. $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл с точностью* $\varepsilon = 0{,}001$.

13.1. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$.

13.2. $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2} dx$.

13.3. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

13.4. $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$.

13.5. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

13.6. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$.

13.7. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$.

13.8. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

13.9. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

13.10. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$.

13.11. $\int\limits_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.

13.12. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$.

13.13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

13.14. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$.

13.15. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx$.

13.16. $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.

13.17. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$.

13.18. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

13.19. $\int\limits_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.

13.20. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

13.21. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$.

13.22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

13.23. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

13.24. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$.

13.25. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$.

13.26. $\int\limits_0^{0,4} \cos(5x/2)^2 dx$.

13.27. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

13.28. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

13.29. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

13.30. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$.

Задача 14. *Найти первые четыре, отличные от нуля, члена разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши.*

14.1. $y'' - xy' - 6x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.2. $y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$.

14.3. $y'' - 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$.

14.4. $y'' + (x-1)y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$.

14.5. $y'' + xy' + 6x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.6. $y'' + xy' - 12x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.7. $y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.8. $y'' + (x-1)y' - y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

14.9. $y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.10. $y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

14.11. $y'' + (x-1)y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$.

14.12. $y'' + xy' + 2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.13. $y'' + xy' + 12x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.14. $y'' - (x-1)y' + x - 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

14.15. $y'' + (x-1)y' + 2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

14.16. $y'' + (x-1)y' - x + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

14.17. $y'' - 2xy' + x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.18. $y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

14.19. $y'' - xy' + 12x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.20. $y'' + 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.21. $y'' - xy' - 2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

14.22. $y'' + xy' - 6x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.23. $y'' + (x-1)y' - x + 1 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$.

14.24. $y'' - xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

14.25. $y'' - 2xy' - x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

14.26. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

14.27. $y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

14.28. $y'' + xy' + 2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

14.29. $y'' - (x-1)y' + x - 1 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$.

14.30. $y'' - xy' - 12x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Задача 15. *Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда.*

15.1. $y''+(x-1)y'-x+1=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0.$

15.2. $y''-2xy'+x=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.3. $y''-xy'+2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

15.4. $y''-xy'+12x^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.5. $y''+2xy'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.6. $y''-xy'-2=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

15.7. $y''+xy'-6x=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.8. $y''+(x-1)y'-x+1=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=2.$

15.9. $y''-xy'-2y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.10. $y''-2xy'-x=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

15.11. $y''+xy'+2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

15.12. $y''+xy'-y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

15.13. $y''-(x-1)y'+x-1=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=2.$

15.14. $y''+xy'+2=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

15.15. $y''-xy'-12x^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.16. $y''-xy'-6x=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.17. $y''-xy'+y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0.$

15.18. $y''-2xy'+y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1.$

15.19. $y''+(x-1)y'+y=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1.$

15.20. $y''+xy'+6x=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.21. $y''+xy'-12x^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.22. $y''+xy'-y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.23. $y''+(x-1)y'-y=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0.$

15.24. $y''+xy'-y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.25. $y''-xy'+2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2.$

15.26. $y''+(x-1)y'+y=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1.$

15.27. $y''+xy'+2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.28. $y''-(x-1)y'+x-1=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0.$

15.29. $y''+xy'+12x^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

15.30. $y''+(x-1)y'+2=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0.$

Задача 16. *Функцию, определенную на интервале длиной 2π, разложить в тригонометрический ряд Фурье; определить сумму ряда в точках разрыва функции. Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда в области их существования.*

16.1. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.2. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.3. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ x-\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.4. $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.5. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ \pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.6. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.7. $f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.8. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.9. $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.10. $f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.11. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ 2\pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.12. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ x-2\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.13. $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.14. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ x-\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.15. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.16. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.17. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ 2\pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.18. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.19. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & 0<x<\pi,\\ x-2\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.20. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.21. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0,\\ x-2\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.22. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, & -\pi<x<0,\\ -\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.23. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.24. $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0,\\ (\pi+x)/2, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.25. $f(x)=\begin{cases}(\pi-x)/2, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.26. $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)/2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.27. $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)/2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

16.28. $f(x)=\begin{cases}(x+\pi)/2, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.29. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}.$

16.30. $f(x)=\begin{cases}(\pi+x)/2, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}.$

Задача 17. *Функцию, заданную на отрезке* [0; *l*], *разложить в неполный ряд Фурье:*

а) по синусам кратных дуг – для вариантов с нечетными номерами;

б) по косинусам кратных дуг – для вариантов с четными номерами.

Построить графики функции $f(x)$ *и суммы соответствующего ряда в области их существования.*

17.1. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1]$. 17.2. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1]$.

17.3. $f(x)=\sin(x/2)$, $x\in[0;\pi]$. 17.4. $f(x)=\sin(x/2)$, $x\in[0;\pi]$.

17.5. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1/2]$. 17.6. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1/2]$.

17.7. $f(x)=\cos 2\pi x$, $x\in[0;1]$. 17.8. $f(x)=\sin 2\pi x$, $x\in[0;1]$.

17.9. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;2]$. 17.10. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;2]$.

17.11. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1/2]$. 17.12. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1/2]$.

17.13. $f(x)=\cos 2\pi x$, $x\in[0;1/2]$. 17.14. $f(x)=\sin 2\pi x$, $x\in[0;1/2]$.

17.15. $f(x)=\cos 3x$, $x\in[0;\pi]$. 17.16. $f(x)=\cos 3x$, $x\in[0;\pi]$.

17.17. $f(x)=\cos(x/2)$, $x\in[0;\pi]$. 17.18. $f(x)=\cos(x/2)$, $x\in[0;\pi]$.

17.19. $f(x)=\sin(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$. 17.20. $f(x)=\sin(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$.

17.21. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$. 17.22. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$.

17.23. $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi/2]$. 17.24. $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi/2]$.

17.25. $f(x)=\cos 3\pi x$, $x\in[0;1]$. 17.26. $f(x)=\sin 3\pi x$, $x\in[0;1]$.

17.27. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$. 17.28. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$.

17.29 $f(x)=\cos(\pi x/3)$, $x\in[0;3]$. 17.30. $f(x)=\sin(\pi x/3)$, $x\in[0;3]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для втузов: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 575 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1988. – Т.2. – 576 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986. – 575 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
6. Шмелев П.А. Теория рядов в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
8. Сборник задач по математике для втузов, специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 367 с.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1980. –Ч. 2. – 465 с.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

СОБАКИН Василий Павлович
ТРУБИНА Ольга Ильинична
ФИЛИНОВА Елена Викторовна

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Практикум

Редактор Е.А. Амирсейидова
Корректор Е.В. Афанасьева
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 01.10.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,62. Тираж 300 экз.
Заказ 345-2003г.

Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.