

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

А.Н. ГОЦ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ

*Учебное пособие
В двух частях*

Часть 2

Владимир 2010

УДК 621.01:539.4.001.2 (075.8)

ББК 31.365 я73

Г 74

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ,
заведующий кафедрой «Поршневые двигатели» Московского
государственного технического университета имени Н.Э. Баумана
Н.А. Иващенко

Доктор технических наук, профессор Московского государственного
технического университета «МАМИ»
В.М. Фомин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Гоц, А. Н. Численные методы расчета в энергомашинострое-
Г 74 нии: учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 2 / А. Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. –
Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 204 с. – ISBN 978-5-
9984-0013-1.

В первой части пособия была представлена теория напряжений и деформаций, основные уравнения теории упругости.

В данной книге рассмотрены приближенные методы решения задач прикладной теории упругости. В пособии среди численных методов расчета подробно освещены вариационные методы, а также теоретические основы метода конечных элементов, с помощью которых проводится расчет напряженно-деформированного и теплонапряженного состояния деталей поршневых двигателей.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 140501 – двигатели внутреннего сгорания, направления 140500 – энергомашиностроение (бакалавров и магистров). Соответствует требованиям государственных образовательных стандартов указанных специальностей.

Ил. 54. Библиогр.: 25 назв.

УДК 621.01: 539.4.001.2(075.8)
ББК 31.365 я73

ISBN 978-5-9984-0013-1

© Владимирский государственный
университет, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Раздел третий. Прикладная теории упругости.....	7
Глава 7. Изгиб тонких пластинок.....	7
7.1. Основные понятия и гипотезы.....	7
7.2. Перемещения и деформации в пластинке.....	9
7.3. Напряжения в пластинке.....	11
7.4. Усилия в пластинке.....	16
7.5. Выражения напряжений через усилия.....	21
7.6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки.....	23
7.7. Условия на контуре пластинки.....	26
7.8. Эллиптическая пластинка.....	29
7.9. Прямоугольная пластинка. Решение Навье.....	35
7.10. Прямоугольная пластинка. Решение Леви.....	46
7.11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки	51
7.12. Осесимметричные задачи изгиба круглой пла- стинки.....	53
7.13. Потенциальная энергия при изгибе пластинки	61
Контрольные вопросы.....	65
Глава 8. Расчет симметрично нагруженных цилиндрических деталей.....	66
8.1. Цели и задачи расчета.....	66
8.2. Расчет толстостенных цилиндров, нагруженных равномерно распределенным по длине давлением (задача Ляме).....	67
8.3. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей.....	79
8.4. Крепление цилиндров.....	83
8.4.1. Основные понятия.....	83
8.4.2. Расчет скрепленного цилиндра.....	85
8.5. Определение напряжений во вращающемся диске постоянной толщины.....	90
Контрольные вопросы.....	100

Раздел четвертый. Приближенные методы решения задач прикладной теории упругости.....	101
Глава 9. Вариационные методы решения задач теории упругости.....	101
9.1. Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений.....	101
9.2. Метод Рэлея – Ритца.....	103
9.3. Метод Бубнова – Галеркина.....	120
9.3.1. Обобщенный метод Бубнова – Галеркина.....	120
9.3.2. Применение метода Бубнова – Галеркина.....	122
9.4. Метод Канторовича – Власова.....	131
Контрольные вопросы.....	136
Глава 10. Основы метода конечных элементов.....	137
10.1. Основные соотношения теории упругости в матричной форме.....	137
10.1.1. Пространственная задача.....	137
10.1.2. Плоская задача.....	142
10.2. Основы понятия метода конечных элементов... ..	146
10.2.1. Дискретизация тела.....	146
10.2.2. Типы конечных элементов.....	149
10.2.3. Перемещения, деформации и напряжения в конечном элементе.....	153
10.2.4. Матрица жесткости конечного элемента....	156
10.2.5. Понятие о физическом смысле матрицы жесткости.....	159
10.2.6. Учет внеузловой нагрузки.....	167
10.2.7. Определение узловых перемещений.....	169
10.3. Конечные элементы сплошной среды.....	173
10.3.1. Плоский треугольный элемент.....	173
10.3.2. Совместный прямоугольный элемент.....	180
10.3.3. Четырехузловой изопараметрический элемент.....	187
Контрольные вопросы.....	195
Заключение.....	196
Библиографический список.....	197

В этой книге вы не найдете волшебного ключа, открывающего все двери, – она не научит вас решать все задачи, но даст много хороших образцов для подражания и возможностей поупражняться. Но помните: если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!

Джорж Пойа¹

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первой части учебного пособия [1] были рассмотрены теория напряжений и деформаций, основные уравнения теории упругости, принципы и методы решения задач, в том числе решение плоской задачи в полиномах и тригонометрических рядах, а также конечно-разностный метод (сеточный) расчета задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Во второй части представлено решение прикладных задач: расчет толстостенных цилиндров (задача Ламе), прессовых посадок, расчет тонких пластинок, которые чаще всего применяются в конструкциях тепловых двигателей. Дается краткая характеристика наиболее часто используемых при численных расчетах вариационных методов: Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина и Канторовича-Власова. Даны основы метода конечных элементов в перемещениях, описаны некоторые конечные элементы сплошной среды.

¹ Пойа, Дж. Математическое открытие. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

Учитывая, что книга предназначена для первоначального ознакомления с методом конечных элементов, автор старается применить способ изложения от простого к сложному. При этом неизбежны некоторые повторы, особенно из части 1, но, как показывает опыт преподавания, это оправдывается из-за более быстрого усвоения прочитанного материала.

В пособии для каждой главы² ведется последовательная нумерация формул (первая цифра – номер главы, вторая – ее порядковый номер). Однако в каждой главе или параграфе данной главы часть формул, которые поясняют вывод основных зависимостей только в этом параграфе и нигде, кроме указанного, не используются, нумеруются буквами русского алфавита. Это позволило уменьшить общее количество зависимостей, на которые следует обратить внимание при изучении курса.

Пособие предназначено для студентов специальности 140501 – двигатели внутреннего сгорания, направления 140500 – энергомашиностроение (бакалавров и магистров), а также рассчитано как на аудиторную, так и на самостоятельную работу студентов не только при изучении курса «Численные методы в энергомашиностроении», но и при дальнейшем изучении курсов «Использование МКЭ в энергомашиностроении», «Конструирование ДВС», «Конструирование тепловых двигателей».

Автор с благодарностью примет замечания и предложения, которые могут появиться при практическом пользовании пособием. Вину за все опечатки автор принимает на себя. Замечания просим направлять по адресу:

600000, Владимир, ул Горького, 87, кафедра «Тепловые двигатели и энергетические установки».

E-mail: hotz@mail.ru; hotz@vlsu.ru

² Нумерация разделов и глав ведется начиная с части 1.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ
ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ГЛАВА 7. ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

7.1. Основные понятия и гипотезы

Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане. Высота такого тела называется толщиной пластинки и обозначается h .

Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется *срединной плоскостью*. При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую срединную поверхность пластинки.

Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром* пластинки.

Для исследования деформаций пластинки прямоугольную систему координат будем располагать так, чтобы координатная плоскость xOy совпала со срединной плоскостью пластинки. Ось z будем направлять вниз. При таком выборе системы координат составляющие перемещений по оси x будут u_x , оси y – u_y , а в направлении оси z – u_z , которое будет представлять собой прогиб пластинки. Положение начала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления ее краев (рис. 1).

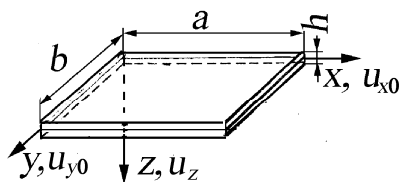


Рис. 1. Тонкая прямоугольная пластинка

При расчете пластинок различают тонкие пластинки и толстые плиты, которые применяются в строительстве.

Тонкими называются пластинки, имеющие отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане примерно в следующих пределах:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}.$$

Величина ожидаемых прогибов w для такой пластинки не более $h/4$ (см. рис 1). Как показал Б.Г. Галеркин, теорию тонких пластинок можно использовать даже при $h/b = 1/3$.

Пластинки, у которых $h/b > 1/3$, рассчитываются по теории толстых плит, а пластинки, имеющие прогибы более $h/4$, рассчитываются по теории гибких пластинок или мембран.

Тонкие пластинки можно рассчитывать по приближенной теории – технической теории изгиба пластинок, основанной на следующих гипотезах, предложенных Кирхгофом:

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации и длина его не изменяется.

Любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси z , и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые углы между этим элементом и осями x и y остаются прямыми, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Гипотеза о сохранении длины прямоугольного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси z отсутствует

$$\epsilon_z = 0. \quad (7.2)$$

2. Гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, а значит, срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости (см. рис. 1) перемещения

$$u_{x0} = 0, u_{y0} = 0. \quad (7.3)$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки. Ввиду малости давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, напряжением σ_z по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y можно пренебречь.

7.2. Перемещения и деформации в пластинке

Изучение изгиба пластинки начнем с определения перемещений и деформаций. Будем исследовать пластинку, несущую поперечную нагрузку, т. е. нагрузку, нормальную к срединной плоскости пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещения. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

Согласно первой гипотезе линейная деформация в направлении оси z $\varepsilon_z = 0$. Подставляя это условие в формулу Коши [1], получаем:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует, что прогибы пластинки u_z не зависят от координаты z , т. е.

$$u_z = u_z(x, y).$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать прогибы всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов (7.1), из формул Коши [1] получаем:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0.$$

Откуда находим производные от составляющих перемещения по осям $x - u_x$ и $y - u_y$ по координате z

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Интегрируя эти уравнения по z , получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x} + f_1(x, y); \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для вычисления функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о нерастяжимости срединной плоскости. Согласно этой гипотезе составляющие перемещения u_x и u_y (7.3) на срединной плоскости $u_{x0} = 0$, а также $u_{y0} = 0$ при $z = 0$. Подставляя эти условия в формулы (a), получаем:

$$u_{x0} = f_1(x, y) = 0,$$

$$u_{y0} = f_2(x, y) = 0.$$

Тогда формулы (a) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей x и y выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации в пластинке, отличные от нуля, найдем с помощью формул Коши, подставляя в них значения составляющих перемещения (7.4):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Здесь составляющие деформации так же, как и составляющие перемещения в соотношениях (7.4), выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

7.3. Напряжения в пластинке

Теперь перейдем к исследованию напряжений в пластинке. Для вычисления нормальных напряжений σ_x и σ_y возьмем две первые формулы закона Гука [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 1/E [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= 1/E [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]. \end{aligned}$$

На основании третьей гипотезы напряжение $\sigma_z=0$. Тогда с учетом (7.5) получим

$$\begin{aligned} -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x). \end{aligned}$$

Выразив из полученных соотношений σ_x и σ_y , окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Формула закона Гука для угловой деформации $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ после подстановки γ_{xy} из формул (7.5) примет такой вид:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

А касательные напряжения в двух других плоскостях после подстановки составляющих деформации из формул (7.1) в формулы закона Гука обратятся в нуль

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = 0, \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Однако в действительности эти касательные напряжения не равны нулю, такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез и противоречит условиям равновесия. Для отыскания этих напряжений рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пренебрегая объемными силами, из первого уравнения находим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставим сюда напряжения из формул (а) и (б):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right).$$

После дифференцирования и упрощения получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)$$

или

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Интегрируя по z , находим:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z + f_1(x, y). \quad (6)$$

Для определения произвольной функции $f_1(x, y)$ имеем следующие граничные условия: на верхней и нижней поверхностях пластинки нет касательных нагрузок, т. е. при $z = \pm h/2$ должно быть $\tau_{zx} = 0$. Подставляя эти условия в формулу (6), получаем:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z + f_1(x, y),$$

откуда находим искомую функцию

$$f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Введя полученное значение $f_1(x, y)$ в формулу (6), получаем:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z. \quad (z)$$

Решая таким же путем второе уравнение равновесия относительно напряжения $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, находим:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z. \quad (d)$$

Итак, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, возникают согласно формулам (a), (б), (z) и (d) следующие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z, \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

На рис. 2 показано распределение этих напряжений по толщине пластинки. Напряжения σ_x , σ_y и $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости, а напряжения τ_{zy} и τ_{zx} распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимального значения. Так же распределяются касательные напряжения и при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

Остается исследовать нормальные напряжения σ_z , которыми мы пренебрегли по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y . Для их определения возьмем третье уравнение равновесия и, считая объемные силы $Z=0$, найдем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}.$$

Подставив сюда касательные напряжения τ_{zy} и τ_{zx} из формул (7.6), после упрощения получаем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 u_z.$$

Интегрируя по z , находим:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 u_z + f_2(x, y). \quad (e)$$

Для определения произвольной функции $f_2(x, y)$ рассмотрим случай загрузки пластинки поперечной нагрузкой на верхней грани интенсивностью $q_1(x, y)$, а на нижней – интенсивностью $q_2(x, y)$, направленными в сторону положительной оси z (рис. 3). В этом случае граничные условия имеют вид:

при $z = -h/2$ $\sigma_z = -q_1$, а при $z = +h/2$ $\sigma_z = q_2$. Подставляя эти условия в формулу (e), получаем:

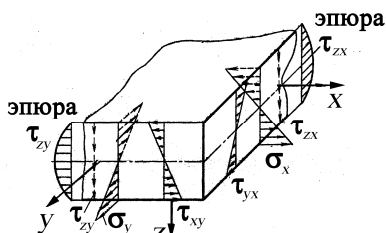


Рис. 2. Распределение напряжений в сечениях пластинки

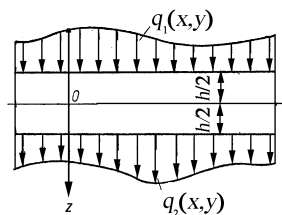


Рис. 3. Схема загрузки пластинки поперечной нагрузкой

$$-q_1 = -\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \nabla^4 u_z + f_2(x, y),$$

$$q_2 = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \nabla^4 u_z + f_2(x, y).$$

В правой части полученной первой зависимости поставлен знак минус, так как напряжение σ_z – отрицательное.

Складывая почленно эти соотношения, находим:

$$q_2 - q_1 = 2f_2(x, y),$$

откуда произвольная функция

$$f_2(x, y) = \frac{q_2 - q_1}{2}.$$

Следовательно, формула (e) примет такой вид:

$$\sigma_z = \frac{q - q_1}{2} + \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 u_z. \quad (7.7)$$

Напряжения, подсчитанные по этой формуле, имеют тот же порядок, что и интенсивность поперечной нагрузки q , и составляют незначительную часть от напряжений σ_x и σ_y .

В формулах (7.6) и (7.7) все напряжения выражены через одну функцию двух переменных $u_z(x, y)$, следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче.

7.4. Усилия в пластинке

Исследуем, какие усилия создаются напряжениями (7.6) в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости. На рис. 4 изображен элемент пластинки, вырезанный такими сечениями. Рассмотрим вначале площадку этого элемента с нормалью x . На этой площадке действуют составляющие напряжений σ_x , τ_{yx} и τ_{zx} . На рис. 4 показаны положительные величины этих напряжений, т. е.

нормальное напряжение σ_x направлено по внешней нормали к сечению, а касательные – в направлении соответствующих положительных координатных осей, так как внешняя нормаль к сечению совпадает с положительным направлением оси x .

Обозначаем через N_x погонную, т. е. приходящуюся на единицу ширины сечения, нормальную силу в сечении с нормалью x . Она равна сумме проекций на ось x равнодействующих напряжений в сечении с нормалью x . На ось x проектируется только нормальное напряжение σ_x . Его равнодействующая на бесконечно малой площадке $dydz$ равна $\sigma_x dydz$, а на единицу ширины сечения приходится сила, равная $\sigma_x dz$. Суммируя эти бесконечно малые проекции по толщине пластинки, получаем выражение для погонной нормальной силы:

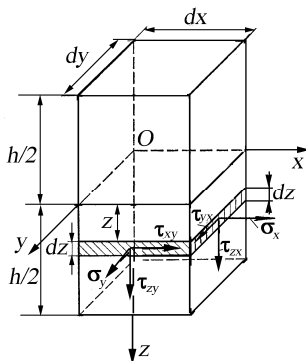


Рис. 4. Обозначение положительных составляющих напряжений

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz.$$

Подставим сюда напряжение σ_x из формул (7.6) и вынесем за знак интеграла величины, независящие от координаты z :

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz.$$

Под знаком входящего сюда интеграла стоит нечетная функция, а пределы интегрирования отличаются только знаком. Следовательно, этот интеграл равен нулю, а значит, и усилие

$$N_x = 0,$$

т. е. нормальной силы в этом сечении не возникает.

Далее подсчитаем изгибающий момент. Обозначим через M_x погонный изгибающий момент в сечении с нормалью x . Изгибающий момент в рассматриваемом сечении создается нормальными напряжениями σ_x . Равнодействующая этих напряжений на площадке толщиной dz и шириной, равной единице, равна $\sigma_x dz$, а изгибающий момент $\sigma_x dz \cdot z$. Суммируя эти моменты от напряжения σ_x на всех таких площадках по толщине пластинки, получаем выражение для погонного изгибающего момента в сечении с нормалью x :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz. \quad (a)$$

Подставляя в соотношение (a) значение нормального напряжения σ_x из формул (7.6) и вынося за знак интеграла величины, независящие от координаты z , находим:

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

После интегрирования получаем

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right).$$

Входящая сюда величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (7.8)$$

называется *цилиндрической жесткостью пластинки* и является физической и геометрической характеристикой пластинки при ее изгибе.

Погонная поперечная сила в сечении с нормалью x равна

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения τ_{zx} из формул (7.6), получим:

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

После интегрирования находим

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Погонную сдвигающую силу S_x находим, проектируя усилия в этом сечении на ось y :

$$S_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения τ_{yx} из формул (7.6), получим:

$$S_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

т. е. сдвигающая сила в этом сечении равна нулю.

Погонный крутящий момент в сечении с нормалью x равен

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения τ_{yz} из формул (6), находим:

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

После интегрирования получим

$$M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Аналогично найдем усилия, действующие в сечении с нормалью y (см. рис. 4):

погонный изгибающий момент

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right),$$

погонная поперечная сила

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z,$$

погонный крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (6) и (6), получаем:

$$M_{yx} = M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} = H.$$

Таким образом, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, под действием поперечной нагрузки возникают следующие погонные усилия:

изгибающие моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

поперечные силы

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z, \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

и крутящий момент

$$H = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (7.11)$$

Все внутренние силовые факторы выражены через прогибы срединной плоскости пластинки. На рис. 5 показаны положительные значения найденных усилий, причем положительные направления усилий совпадают с направлением действия соответствующих положительных составляющих напряжений.

7.5. Выражение напряжений через усилия

Формулы (7.9) – (7.11) позволяют определять моменты и поперечные силы в любой точке срединной плоскости пластинки. По их величине можно найти напряжения в любой точке пластинки. Действительно, сравнивая формулы (7.6) нормальных напряжений σ_x и σ_y с формулами (7.9) изгибающих моментов M_x и M_y , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x z}{h^3}, \\ \sigma_y &= \frac{12M_y z}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Полученные формулы соответствуют формулам для определения нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного сечения. В них входит момент инерции прямоугольного сечения при ширине сечения, равной единице, т. е.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}.$$

Тогда формулы (a) принимают

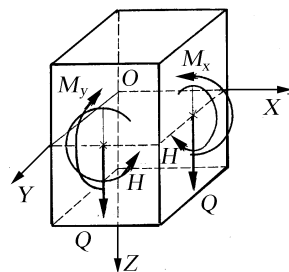


Рис. 5. Внутренние силовые факторы в сечениях пластинки

вид, известный из курса сопротивления материалов для расчета балок при изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают при $z = \pm h/2$

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_x &= \frac{M_x}{W}, \\ \max \sigma_y &= \frac{M_y}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Здесь

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{h^2}{6}$$

момент сопротивления балки прямоугольного сечения высотой h и шириной, равной единице.

Из сравнения формул (7.6) и (7.11) следует

$$\tau_{xy} = \frac{12Hz}{h^3}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают при $z = \pm h/2$ и равны

$$\max \tau_{xy} = \frac{6H}{h^2}.$$

Для определения касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} сравниваем формулы (7.6) и (7.10). В результате получим

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Аналогичные результаты получены в сопротивлении материалов по формуле Д.И. Журавского для балки прямоугольного сечения высотой h и шириной, равной единице. Максимальные напряжения возникают в точках срединной плоскости при $z = 0$, где они равны

$$\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{h},$$

$$\max \tau_{zy} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{h}.$$

7.6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

В полученных выше зависимостях напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы срединной плоскости пластинки $u_z(x, y)$. Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо заранее знать функцию $u_z(x, y)$ – прогиб срединной плоскости пластинки.

Для составления дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки вырежем из нее бесконечно малый элемент $dx dy$ и покажем действующие на него нагрузки (рис. 6).

На грани Oc элемента срединной плоскости действует погонная поперечная сила Q_x . При проектировании действующих сил на ось z силу Q_x необходимо умножить на длину грани dy , на которой она действует.

На грани ab , отстоящей от грани Oc на бесконечно малом расстоянии dx , поперечная сила получает бесконечно малое приращение и равна $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$.

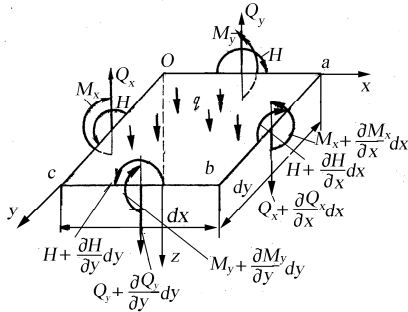


Рис. 6. Нагрузки, действующие на бесконечно малый элемент срединной поверхности пластинки

Рассматриваемый элемент срединной плоскости находится в равновесии, следовательно, должны выполняться шесть условий равновесия: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент (см. рис. 6) на ось z :

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (7.13)$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси y дает

$$\begin{aligned} & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - H dx - \\ & - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - \\ & - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично на гранях Oa и bc выделенного элемента срединной плоскости действуют соответственно погонные поперечные силы Q_y и $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$. По

нормали к срединной плоскости пластинки действует поверхностная нагрузка интенсивностью $q(x, y)$.

После упрощения получаем

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (7.14)$$

Аналогично из уравнения моментов относительно оси x получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y. \quad (7.15)$$

В зависимость (7.13) подставим значение поперечных сил Q_x из (7.14) и Q_y из (7.15). В результате этого получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.$$

Подставив в полученное уравнение значение моментов из формул (7.9) и (7.11), найдем:

$$-D \left[\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q,$$

откуда после упрощения получим

$$D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) - q = 0 \quad (7.16)$$

или

$$D \nabla^4 u_z - q = 0. \quad (7.17)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, его обычно называют уравнение Софи Жермен.

При интегрировании уравнения Софи Жермен появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластинки, которые, в свою очередь, зависят от характера закрепления ее краев.

7.7. Условия на контуре пластинки

На контуре пластинки в зависимости от характера закрепления краев могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т. е. прогибы или углы поворота срединной плоскости, называются *геометрическими*. *Статическими* называются условия, при которых на контуре задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты или поперечные силы. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения, и усилия, условия называются *смешанными*. На каждом крае следует задать два граничных условия.

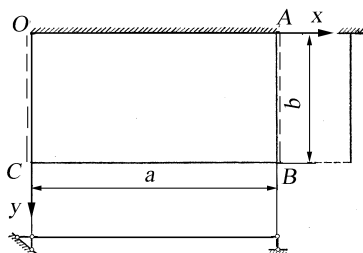


Рис. 7. Варианты закрепления краев пластинки: *OA* – защемление; *AB* и *OC* – шарнирное закрепление; *BC* – свободный край

Сформулируем граничные условия для различных закреплений краев пластинки. Для этого рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 7).

Защемленный край *OA*. В защемлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси *x*. В связи с

этим имеем следующие условия: при $y = 0$ должно быть $u_z = 0$,

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Шарнирно опертые края *OC* и *AB*. На шарнирных краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т. е. $u_z = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки согласно формулам (7.9), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях OC и AB принимают такой вид:

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \text{ должно быть } u_z = 0, \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

С в о б о д н ы й к р а й CB . На свободном краю должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y , поперечная сила Q_y и крутящий момент H , т. е. вместо двух необходимых условий здесь появляются три условия. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако это противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Покажем, что крутящий момент и поперечную силу на контуре пластинки можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент H , распределенный вдоль грани CB , параллельной оси x (рис. 8, *a*). На длине dx действует крутящий момент, равный Hdx . Этот момент можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил H с плечом dx (рис. 8, *б*). На соседнем элементе dx крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину и равен

$$\left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx\right) dx. \text{ Его также можно представить в виде двух верти-}$$

кальных противоположно направленных сил $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ с плечом

dx . Такую замену крутящих моментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине границы CB . На границе каждого бесконечно малого участка dx , за исключением крайних точек C и B , будут действовать по две противоположно направленные силы,

разность между которыми равна $\frac{\partial H}{\partial x} dx$. Следовательно, вдоль гра-

ни CB будет действовать вертикальная распределенная по длине

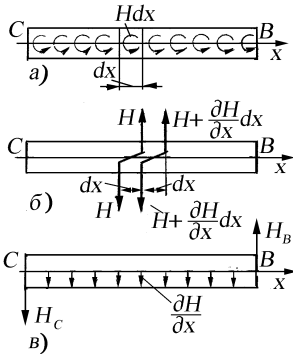


Рис. 8. Замена переменного погонного крутящего момента распределенной нагрузкой

поперечная сила с интенсивностью

$$Q_x^{\text{прив.}} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (7.19)$$

Производные от функции, аппроксимирующей крутящий момент H (7.11), по x и y равны:

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{\text{прив.}} &= -D \left[\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} \right], \\ Q_y^{\text{прив.}} &= -D \left[\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Таким образом, на каждой грани пластинки вместо трех усилий: изгибающего момента, крутящего момента и поперечной силы можно рассматривать только два усилия: изгибающий момент и приведенную поперечную силу.

нагрузка интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 8, в).

В точках же C и B будут возникать сосредоточенные силы H_C и H_B . Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с поперечной силой Q_y и считать, что на грани CB действует приведенная поперечная сила интенсивностью

$$Q_y^{\text{прив.}} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Аналогично вдоль граней контура пластинки, параллельных оси y , будет действовать приведенная

На рис. 9 показаны положительные направления этих приведенных поперечных сил на всех гранях прямоугольной пластинки, а также сосредоточенных сил, возникающих в углах пластинки.

Следовательно, на свободной от закрепления грани вместо трех условий

$$M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad H = 0$$

можно потребовать удовлетворения лишь двух условий

$$M_y = 0, \quad Q_y^{\text{прив.}} = 0. \quad (б)$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. На основании принципа Сен-Венана такая замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассматриваемого края пластинки.

Внесем в условия (б) выражения изгибающего момента M_y (7.9) и приведенной поперечной силы $Q_y^{\text{прив.}} = 0$ (7.20). Тогда на свободной грани CB при $y = b$ должно быть

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

7.8. Эллиптическая пластинка

Решение дифференциального уравнения (7.16) для пластинки, контур которой очерчен по эллипсу, в частных случаях может быть получено в конечном виде. Для решения применим обратный

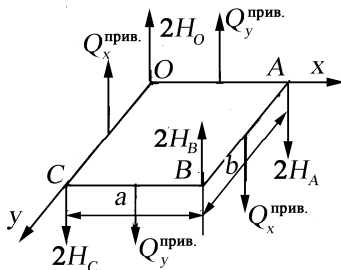


Рис. 9. Направление положительных приведенных сил

метод, т. е., задаваясь видом функции прогибов $u_z(x, y)$, определим, каким нагрузкам и каким граничным условиям (условиям закрепления) соответствует эта функция.

Уравнение контура эллиптической пластинки (рис. 10) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (a)$$

Зададимся функцией прогибов в форме

$$w = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (б)$$

где C – постоянный коэффициент.

Для определения C подставим функцию $u_z(x, y)$ в уравнение Софи Жермен (7.16), предварительно определив производные от этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{4Cx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); & \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \frac{4C}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} &= \frac{24C}{a^4}; & \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{8C}{a^2 b^2}; & \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} &= \frac{24C}{b^4}. \end{aligned} \quad (в)$$

Подставив полученные производные в уравнение (7.16), получим:

$$\frac{24C}{a^4} + 2 \frac{8C}{a^2 b^2} + \frac{24C}{b^4} = \frac{q}{D},$$

откуда

$$C = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (г)$$

Так как C является постоянной величиной, то и q должно быть постоянным. Следовательно, функция (б) является решением дифференциального уравнения (7.16) при поперечной нагрузке q , равномерно распределенной по поверхности пластинки.

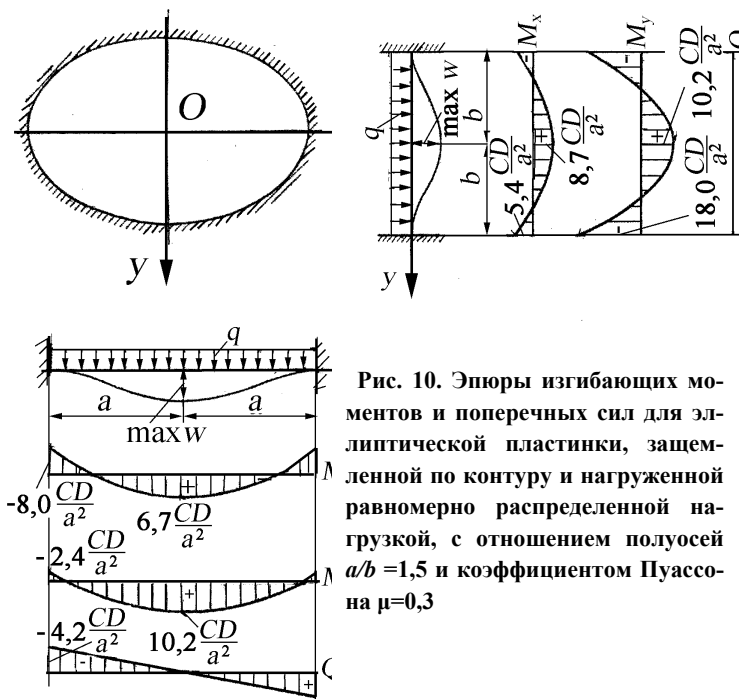


Рис. 10. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для эллиптической пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с отношением полуосей $a/b = 1,5$ и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$

Выясним теперь, каким условиям на контуре соответствует решение (б). Прогиб на контуре обращается в нуль, так как в скобках стоит выражение, равное нулю для любой точки контура. Производные $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ в соответствии с (в) для любой точки контура также обращаются в нуль, так как и в данном случае в скобках стоит выражение, равное нулю для любой точки контура. Таким образом, и прогибы и углы поворота срединной плоскости на контуре пластинки равны нулю. Значит, пластинка защемлена по контуру.

Подставим постоянную C из формулы (2) в функцию (6)

$$w = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (7.21)$$

Таким образом, уравнение (7.21) описывает функцию прогибов срединной поверхности эллиптической в плане пластинки, защемленной по контуру и нагруженной сплошной равномерно распределенной поперечной нагрузкой q .

Характер изгиба срединной поверхности пластинки показан на рис. 10. Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при $x = y = 0$

$$\max u_z = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (7.22)$$

Сравнивая формулы (2) и (7.22), заключаем, что постоянная C равна прогибу в центре пластинки.

Подсчитаем усилия, возникающие в пластинке. Подставляя функцию прогибов (6) и производных (6) в формулы (7.9), находим изгибающие моменты в рассматриваемой пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -4CD \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \right], \\ M_y &= -4CD \left[\frac{1}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} (7.23)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки

$$\left. \begin{aligned} M_x(0,0) &= 4CD \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right), \\ M_y(0,0) &= 4CD \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right). \end{aligned} \right\} (d)$$

Изгибающие моменты у краев большой полуоси

$$\left. \begin{aligned} M_x(\pm a, 0) &= -\frac{8CD}{a^2}, \\ M_y(\pm a, 0) &= -\frac{8\mu CD}{a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

а у краев малой полуоси

$$\left. \begin{aligned} M_x(0, \pm b) &= -\frac{8\mu CD}{b^2}, \\ M_y(0, \pm b) &= -\frac{8CD}{b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Подставив функцию прогибов (\bar{b}) в зависимость (7.11), получим формулу для вычисления крутящих моментов в пластинке:

$$H = -\frac{8CD}{a^2 b^2} (1 - \mu) xy. \quad (7.24)$$

Полагая в (7.25) $x = 0$ или $y = 0$, заключаем, что на осях симметрии рассматриваемой пластинки крутящий момент равен нулю.

Поперечные силы найдем подстановкой в формулы (7.10) функции прогибов (\bar{b})

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{8CD}{a^4 b^2} (a^2 + 3b^2)x, \\ Q_y &= -\frac{8CD}{a^2 b^4} (3a^2 + b^2)y. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

В центре пластинки поперечные силы равны нулю, а по краям полуосей

$$\left. \begin{aligned} Q_x(\pm a, 0) &= \mp \frac{8CD}{a^3 b^2} (a^2 + 3b^2), \\ Q_y(\pm a, 0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x(0, \pm b) &= 0, \\ Q_y(0, \pm b) &= \mp \frac{8CD}{a^2 b^3} (3a^2 + b^2). \end{aligned} \right\}$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для эллиптической пластинки с отношением полуосей $a/b = 1,5$ и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$ показаны на рис. 10.

Круглую пластинку, защемленную по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q , можно рассматривать как частный случай эллиптической пластинки при $b = a$. Тогда по формуле (7.22) получаем максимальный прогиб в центре круглой пластинки

$$\max w = \frac{qa^4}{64D}. \quad (7.26)$$

Из формулы (z) находим, что постоянная C для круглой пластинки равна

$$C = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^4} + \frac{24}{a^4} \right)} = \frac{qa^4}{64D}.$$

По формулам (d) находим изгибающие моменты в центре пластинки

$$M_x(0,0) = M_y(0,0) = \frac{4CD}{a^2} (1 + \mu) = \frac{qa^2}{16} (1 + \mu).$$

По формулам (e) определяем изгибающие моменты в точках контура круглой пластинки в сечении, совпадающем с радиусом:

$$M_\theta = M_y(\pm a, 0) = -\mu \frac{qa^2}{8}$$

и в сечении, перпендикулярном радиусу (перпендикулярном оси x):

$$M_r = M_x(\pm a, 0) = -\frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для круглой пластинки из материала с коэффициентом Пуассона $\mu=0,3$ приведены на рис. 11.

7.9. Прямоугольная пластинка.

Решение Навье

Для прямоугольной пластинки решение уравнения Софи Жермен (7.16) в конечном виде получить не удастся. Его можно найти в виде бесконечного ряда.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 12), шарнирно опертую по контуру и нагруженную поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x,y)$, которая изменяется по любому закону. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси x равен a , а в направлении оси $y - b$.

Решение уравнения Софи Жермен (7.16) будем искать в виде ряда, который представим в виде двойной тригонометрической суммы по синусам

$$u_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

где A_{mn} – коэффициенты ряда, постоянные числа; m и n – целые положительные числа 1, 2, 3, ...

В развернутом виде ряд (a) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u_z(x, y) = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ & + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots \end{aligned}$$

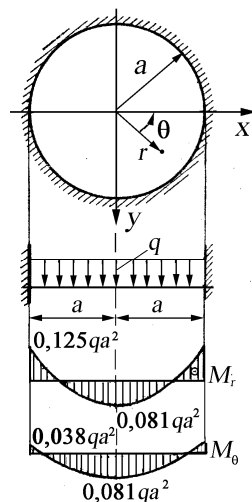


Рис. 11. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для круглой пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с коэффициентом Пуассона $\mu=0,3$

Для шарнирно опертой по контуру пластинки запишем следующие граничные условия:

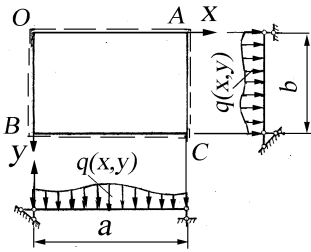


Рис. 12. Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по контуру и нагруженная поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x,y)$

$$\left. \begin{aligned} x = 0, & & x = a \\ u_z = 0, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\delta)$$

$$\left. \begin{aligned} y = 0, & & y = b \\ u_z = 0, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\epsilon)$$

Нетрудно убедиться, что ряд (а) удовлетворяет этим условиям. Действительно, на грани пластинки при $x=0$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0,$$

а это означает в соответствии с (а), что прогиб $u_z(x,y) = 0$. На грани $x = a$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0,$$

а значит, и прогиб $u_z(x,y) = 0$. Точно так же обращаются в нуль прогибы на гранях $y = 0$ и $y = b$. Таким образом, граничные условия (δ) и (ε) для прогибов выполняются.

Вторые производные функции прогибов

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (\zeta)$$

В производные (2) входят синусы тех же аргументов, что и в функцию (а). Поэтому вторые производные $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$ обращаются в нуль на всех гранях пластинки при $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$. Следовательно, граничные условия (б) и (в) для изгибающих моментов также выполняются.

Определим коэффициенты ряда (а). Для этого подставим функцию прогибов (а) в уравнение Софи Жермен (7.16)

$$D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = q(x, y),$$

из которого получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Подставив полученные производные в (7.16), после упрощения получим:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (d)$$

Чтобы определить коэффициенты ряда, входящего в левую часть уравнения (d), необходимо нагрузку $q(x, y)$, входящую в правую часть этого уравнения, разложить в тригонометрический ряд. Для этого нагрузку $q(x, y)$ представим в виде двойного тригономет-

рического ряда Фурье по синусам на прямоугольной области $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, получаем

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (e)$$

Как известно, коэффициенты C_{mn} ряда (e) определяются по формулам [2]

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (ж)$$

Подставляя ряд (d) в уравнение (z), получаем:

$$\begin{aligned} D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Два ряда равны между собой, если равны между собой соответствующие члены обоих рядов. Таким образом,

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}. \quad (з)$$

Подставляя в (з) значение C_{mn} из (ж), определим коэффициенты ряда (a) в виде:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (u)$$

Таким образом функция (a) является решением поставленной задачи, так как она удовлетворяет условиям на контуре пластинки и при выборе коэффициентов ряда в форме (u) удовлетворяет

дифференциальному уравнению изгиба пластинки. Дальнейшая конкретизация задачи теперь зависит от вида функции $q(x,y)$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности пластинки

В этом случае $q(x,y) = q = \text{const}$. По формуле (u) находим

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (\kappa)$$

После интегрирования получаем следующее значение коэффициентов ряда (a) при загрузении пластинки равномерно распределенной нагрузкой

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots).$

Последние ограничения вызваны тем обстоятельством, что полученные после интегрирования значения функций $\cos m\pi$ и $\cos n\pi$ не равны нулю при $m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$

После подстановки этих коэффициентов в ряд (a) находим выражение функции прогибов

$$u_z(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (7.27)$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots).$

Максимальный прогиб, возникающий в центре пластинки при $x = a/2$ и $y = b/2$, равен:

$$\max u_z(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставляя в полученное значение $\max u_z$ значение цилиндрической жесткости из формулы (7.8) и вынося за скобки a^4 , получаем:

$$\max u_z(x, y) = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3} (1 - \mu^2) \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (л)$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Обычно расчеты ведутся с помощью таблиц. Для различных случаев загрузки и закрепления краев пластинки Б.Г. Галеркиным [3] составлены таблицы.

Для табулирования формулу (л) представим в виде

$$\max w = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3},$$

где коэффициент α равен

$$\alpha = \frac{192(1 - \mu^2)}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

зависит только от отношения сторон пластинки a/b . Входящий сюда ряд очень быстро сходится. Так, сохраняя четыре члена ряда и принимая $\mu=0,3$, находим для квадратной пластинки ($a/b=1$)

$$\alpha(1) = \frac{192(1-\mu^2)}{\pi^6} \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1(1^2+1^2)^2} + \frac{1(-1)}{1 \cdot 3(1^2+3^2)^2} + \frac{(-1)1}{3 \cdot 1(3^2+1^2)^2} + \frac{(-1)(-1)}{3 \cdot 3(3^2+3^2)^2} \right] = \frac{192 \cdot 0,91}{\pi^6} (0,2500 - 0,0033 - 0,0033 + 0,0003) = 0,0443.$$

Это значение равно точному, которое приводится в справочной литературе [4].

Изгибающие моменты получим, подставляя в формулы (7.9) функцию прогибов (7.27):

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

($m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$);

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

($m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$).

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при $x = a/2$ и $y = b/2$, где они равны

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

($m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$);

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(m = 1, 3, 5, ...; n = 1, 3, 5, ...).

Для составления таблиц изгибающие моменты представляют в виде

$$\max M_x = \beta qa^2,$$

$$\max M_y = \beta_1 qa^2,$$

где

$$\beta = \frac{16}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(m = 1, 3, 5, ...; n = 1, 3, 5, ...);

$$\beta_1 = \frac{16}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(m = 1, 3, 5, ...; n = 1, 3, 5, ...)

зависят от отношения сторон пластинки a/b.

Подсчитаем коэффициент β для квадратной пластинки, сохраняя четыре члена ряда:

$$\beta(1) = \frac{16}{\pi^4} \left[\frac{1^2 + 0,3 \cdot 1^2}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2} 1 \cdot 1 + \frac{1^2 + 0,3 \cdot 3^2}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2} 1(-1) + \right. \\ \left. + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 1^2}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2} (-1)1 + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2} (-1)(-1) \right] = 0,0469.$$

Точное значение, приводимое в справочниках, $\beta = 0,0479$.

Следовательно, при сохранении четырех членов ряда значение коэффициента β отличается от точного его значения на 2,1 %.

Значение поперечных сил найдем, подставив функцию прогибов (7.27) в формулы (7.10):

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$

(м)

$$Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)}$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$

Максимальные значения поперечные силы получают посередине сторон контура пластинки. Так, $\max Q_x$ возникает в точках пластинки с координатами $x = 0, y = b/2$ и $x = a, y = b/2$, а $\max Q_y$ – в точках с координатами $x = a/2, y = 0$ и $x = a/2, y = b$, где получим:

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$

$$\max Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)}$$

$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$

Для составления таблиц эти функции представим в виде

$$\max Q_x = \gamma qa,$$

$$\max Q_y = \gamma_1 qa,$$

где

$$\gamma = \frac{16}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\gamma_1 = \frac{16}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Нетрудно заметить, что функции γ и γ_1 являются функциями отношения сторон пластинки a/b . Ряды в этих функциях сходятся еще медленнее, чем в функциях β и β_1 . Так, сохраняя, как и в предыдущих случаях, то же число членов ряда, получаем для квадратной пластинки:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \frac{16}{\pi^3} \left[\frac{1}{1(1^2 + 1^2)} + \frac{(-1)}{3(1^2 + 3^2)} + \frac{1}{1(3^2 + 1^2)} + \frac{(-1)}{3(3^2 + 3^2)} \right] = \\ &= \frac{16}{\pi^3} (0,5000 - 0,0333 + 0,1000 - 0,0185) = 0,283, \end{aligned}$$

что отличается от точного значения, равного 0,338 [4] на 16,3 %.

2. **Сосредоточенная сила** в точке с координатами $x = x_0$ и $y = y_0$ (рис. 13). Представим эту сосредоточенную силу в виде распределенной нагрузки на бесконечно малой площадке $dx dy$ вокруг точки (x_0, y_0)

$$q(x, y) = \frac{P}{dxdy}.$$

При вычислении двойного интеграла в формуле (u) следует учесть, что он обращается в нуль везде, кроме точки (x_0, y_0) , где он равен

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (н)$$

Подставляя значение (н) в формулу (u), получаем следующее выражение для коэффициентов ряда (a):

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

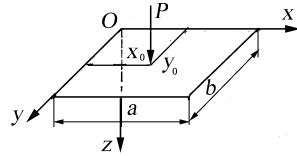


Рис. 13. Пластика с шарнирно закрепленными краями, нагруженная сосредоточенной силой P

После подстановки полученного значения A_{mn} в ряд (a) найдем функцию прогибов пластинки, шарнирно опертой по краям и нагруженной сосредоточенной силой в точке с координатами (x_0, y_0) :

$$u_z = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.28)$$

Полученный ряд сходится медленнее, чем ряд (7.27). Зная функцию прогибов (7.28), обычным порядком можно определить изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы. Ряды, входящие в функции для вычисления указанных величин, сходятся еще хуже, чем в случае равномерно распределенной нагрузки. Поэтому представленное решение может быть рекомендовано только для нахождения прогибов.

7.10. Прямоугольная пластинка. Решение Леви

Решение Навье, рассмотренное в п. 7.9, пригодно только для прямоугольных пластинок, шарнирно опертых по контуру. Более общим является решение Мориса Леви. Это решение пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой оперты, а два других имеют любое закрепление: защемление, шарнирное опирание, свободный край.

Пусть у прямоугольной пластинки (рис. 14) шарнирно опертыми являются края OC и AB . Граничные условия на этих краях имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ и } x = a \\ u_z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (a)$$

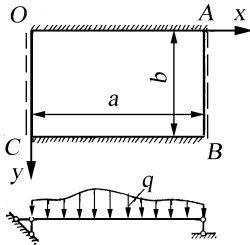


Рис. 14. Прямоугольная пластинка: OA и BC – жестко закрепленные края; OC и AB – шарнирно опертые края

Чтобы выполнить эти условия, функцию прогибов возьмем в виде

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x, \quad (б)$$

где Y – произвольная функция одного аргумента y ; $\alpha = n\pi/a$.

Так как при $x = 0$ и $x = a$ функция $\sin \alpha x = 0$, то зависимость (б) удовлетворяет условиям (а) для прогибов.

Чтобы проверить вторую часть граничных условий (а) (для изгибающих моментов на краях OC и AB), подсчитаем вторые частные производные функции прогибов (б) по x и y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} Y'' \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти производные аналогично функции прогибов (6) при $x = 0$ и $x = a$ обращаются в нуль и, следовательно, вторая часть условия (а) также выполняется.

Функция (6) должна удовлетворять уравнению Софи Жермен (7.16). Подставляя функцию (6) в уравнение (7.16), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (7)$$

Для решения уравнения (7) разложим правую его часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (8)$$

Коэффициенты ряда Фурье $F_n(y)$ являются здесь функцией y . Так как разложение производится на отрезке $0 \leq x \leq a$, то коэффициенты $F_n(y)$ определяют по известной из курса математического анализа формуле

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x dx. \quad (9)$$

Подставим ряд (8) в уравнение (7):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (10)$$

После переноса правой части соотношения (10) в левую и выноса знаков суммирования за скобку получаем

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0$$

или

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = F_n(y). \quad (3)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (3) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (уравнения (3) без правой части) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (3). Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (3), имеет вид

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0. \quad (u)$$

Решение уравнения (u) имеет вид

$$Y_1 = A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n \operatorname{yч}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n \operatorname{yш}\alpha y. \quad (к)$$

Обозначив частное решение уравнения (3) $\bar{F}_n(y)$, получим его общее решение в таком виде:

$$Y(y) = A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n \operatorname{yч}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n \operatorname{yш}\alpha y + \bar{F}_n(y). \quad (л)$$

Подставляя функцию $Y(y)$ в формулу (б), получим:

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n \operatorname{yч}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n \operatorname{yш}\alpha y + \bar{F}_n(y)] \sin \alpha x. \quad (м)$$

Функция (м) является решением уравнения Софи Жермен (7.16) для поперечной нагрузки $q(x,y)$, распределенной по поверхности пластинки по любому закону, а кроме того, удовлетворяет граничным условиям на шарнирно опертых краях OC и AB .

Рассмотрим выбор частного решения $\bar{F}_n(y)$. По правилу Коши частное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка выражается следующим интегралом:

$$\bar{F}_n(y) = \int_0^y \psi(y-t) F_n(t) dt, \quad (н)$$

где $F_n(y)$ – правая часть решаемого уравнения, определяемая соотношением (е), а $\psi(y)$ – частное решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющего условиям

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0), \psi'''(0) = 1. \quad (o)$$

При решении однородного уравнения (*u*) согласно зависимости (*κ*) была получена сумма четырех независимых функций $\text{ch}\alpha y$, $y\text{ch}\alpha y$, $\text{sh}\alpha y$, $y\text{sh}\alpha y$. Из этой комбинации функций удовлетворяет условиям (*o*) только функция

$$\psi(y) = \frac{1}{2\alpha^2} \left(y\text{ch}\alpha y - \frac{1}{\alpha} \text{sh}\alpha y \right). \quad (n)$$

Заменив в функциях (*n*) и (*e*) аргументы и подставив эти функции в формулу (*n*), получим искомое частное решение уравнения (*з*):

$$\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\alpha^2 Da} \int_0^y \left\{ [(y-t)\text{ch}\alpha(y-t) - \frac{1}{\alpha} \text{sh}\alpha(y-t)] \times \right. \\ \left. \times \int_0^a q(x,t) \sin \alpha x dx \right\} dt.$$

Для определения произвольных постоянных A_n , B_n , C_n и D_n в (*м*) используем граничные условия на краях *OA* и *BC*. Рассмотрим пластинку, у которой края *OA* и *BC* жестко защемлены (см. рис. 14). Граничные условия на этих краях

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \text{ и } x = b \\ u_z = 0 \text{ и } \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0. \end{array} \right\}$$

Подставив в них функцию прогибов (*б*), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} Y(0) \sin \alpha x = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(0) \sin \alpha x = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} Y(b) \sin \alpha x = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(b) \sin \alpha x = 0. \end{aligned} \quad (p)$$

Так как условия (*p*) должны выполняться при любых значениях аргумента *x*, то должно быть

$$\left. \begin{aligned} Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \\ Y(b) = 0, \quad Y'(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Если внести в условия (с) функцию (л), то получаем систему уравнений для определения постоянных

$$\begin{aligned} A_n &= 0, \\ B_n + C_n \alpha &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{ch} \alpha b + B_n b \operatorname{ch} \alpha b + C_n \operatorname{sh} \alpha b + D_n b \operatorname{sh} \alpha b + \bar{F}_n(b) &= 0, \\ A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha b + B_n (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha b + D_n (\operatorname{sh} \alpha b + \\ + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + \bar{F}_n(b) &= 0. \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений определяем следующие значения постоянных:

$$\begin{aligned} A_n &= 0, \\ B_n &= \frac{-\alpha (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) - \alpha b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}, \\ C_n &= \frac{-(\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) + b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}, \\ D_n &= \frac{-\alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b) - (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}. \end{aligned}$$

При других закреплениях краев OA и BC получаются другие значения постоянных.

Ряды в функциях прогибов и ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах, в том числе для пластинки с шарнирно опертыми краями.

7.11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки

Для решения задачи об изгибе круглой пластинки, выведенной в декартовой системе координат, преобразуем все уравнения к полярной системе координат.

В полярной системе координат прогиб пластинки и нагрузка будут функциями r и θ , т. е. $u_z(r, \theta)$ и $q(r, \theta)$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки Софи Жермен (7.16) получит вид

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (7.29)$$

Изгибающие моменты в круглой пластинке будем обозначать: M_r – погонный изгибающий момент в сечении, перпендикулярном к радиусу-вектору r в рассматриваемой точке или **радиальный изгибающий момент**; M_θ – погонный изгибающий момент в сечении, совпадающий с радиусом-вектором r в рассматриваемой точке, или **тангенциальный изгибающий момент**.

Заменяя в формулах (7.9) производные функции прогибов по x и y на производные по r и θ , получим формулы для изгибающих моментов в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Таким же образом преобразуем формулу для крутящего момента в декартовой системе координат (7.11) к полярной

$$H = -D(1 - \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \quad (7.31)$$

Поперечные силы в круглой пластинке обозначим следующим образом: Q_r – погонная поперечная сила на площадке с нор-

мально r , или радиальная поперечная сила; Q_θ – погонная поперечная сила на площадке, совпадающей с радиусом-вектором r , или тангенциальная поперечная сила.

Заменяя в формулах (7.10) производные по x и y на производные по r и θ , получим формулы для вычисления поперечных сил в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z, \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Обозначим $Q_r^{\text{прив}}$ интенсивность приведенной поперечной силы на гранях контура, перпендикулярных к радиусу-вектору r , а $Q_\theta^{\text{прив}}$ – на гранях, совпадающих с радиусом-вектором r . Тогда из формул (7.18) и (7.19) после замены переменных x и y на переменные r и θ можно получить приведенную поперечную силу на гранях контура, учитывающего наличие крутящего момента:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Подставляя в зависимости (б) значение поперечных сил из (7.32) и H из (7.31), получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1-\mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right), \\ Q_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Формулы (7.29) – (7.33) представляют собой основные уравнения изгиба пластинок в полярной системе координат. Уравнение (7.29) служит для определения прогибов срединной плоскости пластинки w , а остальные – для составления граничных условий и определения внутренних усилий.

7.12. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной, если нагрузка, а также условия закрепления краев пластинки не зависят от полярного угла θ . В этом случае и прогибы пластинки не будут зависеть от полярного угла θ , а будут функцией лишь одной координаты r , т. е. $u_z = u_z(r)$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности (7.29) значительно упрощается

$$D \left(\frac{d^4 u_z}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 u_z}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = q(r). \quad (7.34)$$

Поскольку функция прогибов не зависит от угла θ , то формулы (7.30) для изгибающих моментов примут вид

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right), \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} + \mu \frac{d^2 u_z}{dr^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

а крутящий момент в зависимости (7.31) обратится в нуль.

Поперечные силы в формулах (7.32) примут вид

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right), \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

а приведенные поперечные силы из (б)

$$\begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= Q_r, \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (7.34) можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения u_{z1} и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения u_{z2} , т. е.

$$u_z = u_{z1} + u_{z2}. \quad (в)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 u_{z1}}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 u_{z1}}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 u_{z1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_{z1}}{dr} = 0,$$

соответствующего неоднородному уравнению (7.34), имеет вид:

$$u_{z1} = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Чтобы получить общий вид частного решения u_{z2} , уравнение (7.34) представим в виде

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ \left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}. \quad (з)$$

Интегрируя последовательно четыре раза уравнение (з), найдем общий вид частного решения:

$$u_{z2} = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r \left[r \left(\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (д)$$

Пусть нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки, т. е. примем, что $q(r) = q = \text{const}$. В этом случае выражение (д) легко интегрируется и принимает следующий вид:

$$u_{z2} = \frac{qr^4}{64D}.$$

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7.34) для нагрузки, равномерно распределенной по поверхности пластинки, будет иметь вид:

$$u_z = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (7.37)$$

Рассмотрим **шарнирно опертую по контуру пластинку**, загруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 15).

Для определения постоянных интегрирования в решении (7.37) имеем следующие граничные условия. В центре пластинки при $r = 0$ прогиб должен иметь конечное значение. Так как $\ln 0 = -\infty$, то в решении (7.37) следует отбросить члены, содержащие множитель $\ln r$, т. е. принять, что $C_2 = C_4 = 0$.

В этом случае решение (7.37) примет вид

$$u_z = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 r^2. \quad (e)$$

При шарнирном закреплении по контуру пластинки при $r = a$ должны обращаться в нуль прогиб w и радиальный изгибающий момент M_r .

$$u_z = 0; \quad \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (ж)$$

Подставляя в полученные граничные условия (ж) функцию прогибов (e), получаем:

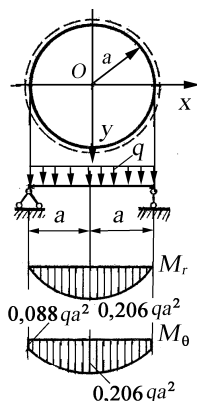


Рис. 15. Круглая пластинка с шарнирно опертыми краями и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

$$\frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3a^2 = 0,$$

$$\frac{3qa^2}{16D} + 2C_3 + \frac{\mu}{a} \left(\frac{qa^3}{16D} + 2C_3a \right) = 0.$$

Откуда находим

$$C_3 = -\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qr^2}{32D},$$

$$C_1 = \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D}.$$

Подставляя найденные постоянные в решение (e), получаем функцию прогибов для пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой:

$$u_z = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\mu}{1+\mu} a^2 - r^2 \right). \quad (7.38)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при $r = 0$, где он равен

$$\max u_z = \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qa^4}{64D}. \quad (3)$$

Подставляя функцию прогибов (7.38) в формулы (7.35), получаем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} (3+\mu)(a^2 - r^2), \\ M_\theta &= \frac{q}{16} \left[(3+\mu)a^2 - (1+3\mu)r^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при $r = 0$ и равны

$$\max M_r = \max M_\theta = \frac{qa^2}{16}(3 + \mu).$$

Изгибающие моменты в точках контура при $r = a$ равны

$$M_r = 0,$$

$$M_\theta = \frac{qa^2}{8}(1 - \mu).$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\mu=0,3$, показаны на рис. 15.

Рассмотрим **круглую пластинку, защемленную по контуру** и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 11).

Для определения постоянных C_1 и C_3 запишем следующие граничные условия: на внешнем контуре пластинки (в защемлении) отсутствуют прогибы и повороты сечений, т. е.

$$\text{при } r = a \quad u_z = 0, \quad \frac{du_z}{dr} = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию прогибов (e), получаем:

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3a^2 = 0,$$

$$\frac{qa^3}{16D} + 2C_3a = 0,$$

откуда находим

$$C_3 = -\frac{qa^2}{32D},$$

$$C_1 = \frac{qa^4}{64D}.$$

Тогда уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки (e) для случая жесткого закрепления краев принимает такой вид:

$$u_z = \frac{q(a^2 - r^2)^2}{64D}. \quad (7.40)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки при $r = 0$ равен

$$\max u_z = \frac{qa^4}{64D},$$

что совпадает с результатом (7.26), полученным из решения частного случая эллиптической пластинки. Из сравнения этого значения с максимальным прогибом в шарнирно опертой пластинке (з) следует, что максимальный прогиб защемленной по контуру пластинки примерно в четыре раза меньше максимального прогиба шарнирно опертой пластинки.

Действительно, из формулы (з) при $\mu = 0,3$ $(5+\mu)/(1+\mu) = (5+0,3)/(1+0,3) = 4,07$.

Подставляя функцию прогибов (7.40) в формулы (7.35), найдем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} [(1+\mu)a^2 - (3+\mu)r^2], \\ M_\theta &= \frac{q}{16} [(1+\mu)a^2 - (1+3\mu)r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки при $r = 0$ равны

$$M_r = M_\theta = \frac{qa^2}{16}(1+\mu),$$

а на контуре пластинки при $r = a$

$$M_r = -\frac{qa^2}{8}, \quad M_\theta = -\mu \frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$, показаны на рис. 11. Максимальный изгибающий момент возникает в точках контура на площадках, перпендикулярных к радиусу. Он на 40 % меньше максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластинке.

Рассмотрим **кольцевую пластинку с защемленным внешним краем**, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 16). Для определения постоянных в функции (7.37) запишем следующие граничные условия:

на внешнем защемленном краю при $r = a$

$$\text{имеем } u_z = 0, \quad \frac{du_z}{dr} = 0;$$

на внутреннем свободном краю при $r = b$

имеем

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = 0,$$

$$Q_r^{\text{прив.}} = Q_r = -D \frac{d}{dr}$$

$$\left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = 0.$$

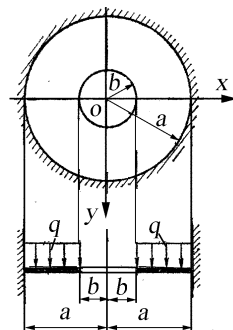


Рис. 16. Кольцевая пластинка с жестко закрепленным краем

Подставляя в эти граничные условия функцию прогибов (7.37), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a &= 0, \\ \frac{qa^3}{64D} + \frac{C_2}{a} + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a &= 0, \\ \frac{3qb^2}{16D} - \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 + \\ + \mu \left(\frac{qb^2}{16D} + \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4 \right) &= 0, \\ \frac{qb}{2D} + \frac{4C_4}{b} &= 0. \end{aligned} \right\} (u)$$

Решив систему (u), находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{qa^2}{64D\alpha} \left\{ (1-\mu)a^4 - [(5-3\mu) - 4(1+\mu)\ln a]a^2b^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2[2(1+\mu) + (1-2\ln a)((1-\mu) + 4(1+\mu)\ln b/a)b^2]b^4 \right\} \\ C_2 &= -\frac{qa^2b^2}{16D\alpha} \left\{ (1+\mu)a^2 + [(1-\mu) + 4(1+\mu)\ln b/a]b^2 \right\} \\ C_3 &= \frac{q}{32D\alpha} \left\{ -(1-\mu)a^4 + 2(1-\mu)(1+2\ln a)a^2b^2 + \right. \\ &\quad \left. + [(3+\mu) + 4(1+\mu)\ln b]b^4 \right\} \\ C_4 &= -\frac{qb^2}{8D}, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где} \quad \alpha = (1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2. \quad (\kappa)$$

Для табулированного расчета введем обозначения

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

$$k = \frac{(1-\mu)\beta^2 + (1+\mu)(1+4\beta^2 \ln \beta)}{(1-\mu) + (1+\mu)\beta^2} \beta^2.$$

Тогда уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (7.37) после подстановки в него постоянных (κ) примет следующий вид:

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left[-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - (4k+8\beta^2\rho^2)\ln\rho \right]. \quad (7.42)$$

Полученное решение (7.42) позволяет вычислить прогибы и перемещения в кольцевой пластинке с жестко закрепленным внешним краем.

7.13. Потенциальная энергия при изгибе пластинки

Выведем формулу для вычисления потенциальной энергии, накапливающейся при изгибе пластинки. Согласно принятым гипотезам в пластинке $\sigma_z = 0$ и $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, поэтому общая формула удельной потенциальной энергии [1] в данном случае примет вид $W = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$.

Внося сюда выражения напряжений (7.6) и деформаций (7.5), получаем:

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках величину

$$2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}.$$

После группировки получаем

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

или

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

Подставим полученное выражение удельной потенциальной энергии в пластинке в формулу для определения потенциальной энергии $U = \iiint_V W dx dy dz$, накапливаемую во всей пластинке (по

всему ее объему V). Так как прогибы пластинки являются функциями только двух переменных x и y , то в тройном интеграле можно отделить интегрирование по координате z

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_s \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \times \\ \times \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz.$$

Интегрируя и вводя обозначение цилиндрической жесткости согласно соотношению (7.8), получаем потенциальную энергию, накапливаемую при изгибе пластинки, в таком виде:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (7.43)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей площади срединной поверхности пластинки.

Для некоторых случаев закрепления прямоугольной пластинки со сторонами a и b выражение для потенциальной энергии (7.43) можно упростить. Возьмем интеграл от последнего слагаемого в квадратных скобках выражения (7.43) и преобразуем его следующим образом:

$$J = \iint_s \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dy. \quad (a)$$

Преобразуем интеграл (а), проведя интегрирование по частям (выражение под вторым интегралом):

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^a dx \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} - \int_0^b \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dy \right) = \\
 &= \oint_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dx - \iint_s \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx dy.
 \end{aligned} \tag{б}$$

Первый из входящих сюда интегралов – контурный интеграл, так как подынтегральная функция есть результат интегрирования по y и, следовательно, в нее входят значения производных функции прогибов по контуру, параллельному оси x . Другими словами, интегрирование ведется вдоль контура пластинки, параллельного оси x , так как после интегрирования по y необходимо выполнить подстановку по этой координате значений 0 и b . Второй интеграл в формуле (б) преобразуем еще раз

$$\iint_s \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx dy = \int_0^u dy \int_0^a \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx$$

и проинтегрируем его по частям. Тогда интеграл (а) примет такой вид:

$$J = \oint_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dx - \oint_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dy + \iint_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy. \tag{в}$$

Во втором из полученных контурных интегралов интегрирование ведется вдоль контура пластинки, параллельного оси y .

Если пластинка произвольного очертания закреплена по контуру, то во всех точках контура прогиб и углы поворота срединной плоскости равны нулю, т. е.

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, оба контурных интеграла в соотношении (6) обращаются в нуль, так как в них входит множителем производная $\frac{du_z}{\partial x}$.

Если прямоугольная пластинка шарнирно оперта по всему контуру (см. рис. 12), то во всех точках контура прогиб $u_z = 0$. На краях OA и BC , параллельных оси x , искривление вдоль этой оси невозможно, если пластинка плотно прилегает к опоре. Таким образом, на этих краях везде $\frac{du_z}{\partial x}$, а значит, первый контурный интеграл в формуле (6) обращается в нуль. На краях OB и AC невозможны искривления вдоль оси y , т. е. в этом направлении углы поворота и кривизна срединной плоскости равны нулю

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

Другими словами, и второй контурный интеграл в формуле (6) обращается в нуль.

Таким образом, в двух рассматриваемых случаях интеграл (6) приводится к виду

$$J = \iint_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy.$$

После подстановки этого интеграла в формулу потенциальной энергии (7.43) выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль, и формула (7.43) упрощается до такого вида:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s \left(\nabla^2 u_z \right)^2 dx dy. \quad (7.44)$$

Полученное выражение можно использовать для вычисления потенциальной энергии при изгибе пластинок любого очертания, защемленных по контуру, а прямоугольных пластинок еще и шарнирно опертых по контуру.

Контрольные вопросы

1. Какие дополнительные допущения принимаются в теории тонких пластин?
2. В чем смысл гипотез Кирхгофа для пластинок?
3. Что такое срединная плоскость для пластинки и чему равны в ней линейные и угловые деформации?
4. Как выражаются погонные изгибающие моменты M_x и M_y через перемещения срединной поверхности пластинки?
5. Что называется цилиндрической жесткостью пластинки?
6. Из каких условий получено уравнение Софи Жермен?
7. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки с шарнирно опертыми краями? И сколько их должно быть?
8. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки с жестко заделанными краями? И сколько их должно быть?
9. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки, у которой три края шарнирно опертые, а один – свободный?
10. Как решается задача Навье в случае равномерно распределенного по поверхности давления $q = q_0$?
11. К какому уравнению сводится решение задачи М. Леви? Как отыскать решение этого уравнения?
12. Какой вид имеют граничные условия в случае осесимметричного изгиба круглых пластин?
13. Какие граничные условия нужно записать для кольцевой круглой пластинки?
14. Какая из пластин, свободно опертая или защемленная, будет иметь большие изгибающие моменты при одинаковых размерах и нагрузке?

ГЛАВА 8. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

8.1. Цели и задачи расчета

Рассмотрим расчет толстостенных цилиндров (труб), нагруженных внешним или внутренним давлением как постоянным, так и изменяющимся по длине.

Теория расчета цилиндров, нагруженных постоянным по длине давлением, позволяет определять напряжения в трубах, цилиндрах машин, в напесованных деталях и т. п., когда давление распределено равномерно и концевые эффекты, связанные, например, с наличием днищ, отсутствуют. Она пригодна также и для тех случаев, когда постоянное давление распределено только по части длины детали или когда концы цилиндра закреплены. В этих случаях, однако, теория дает возможность установить лишь напряжения, возникающие на достаточном расстоянии от мест изменения давления или от концов цилиндра.

Напряжения вблизи мест изменения нагрузки или вблизи концов цилиндра могут быть определены с помощью теории расчета цилиндров, нагруженных переменным давлением.

Отметим главнейшие из практических задач, решаемых этой теорией:

- определение напряжений в цилиндре, загруженном давлением на части длины; вопрос этот является актуальным, например, при расчете цилиндров двигателя, где максимальное давление в рабочем пространстве имеет место лишь на небольшой части хода поршня и, следовательно, воздействует только на сравнительно узкий кольцевой поясок поверхности цилиндра;
- определение напряжений около мест сопряжения полого цилиндра с днищами;

- расчет прессовых посадок в том случае, если сопрягаемые детали имеют различную длину;

В приближенной постановке рассмотрим также расчет вращающихся дисков постоянной толщины, например маховиков, устанавливаемых на хвостовике коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания.

8.2. Расчет толстостенных цилиндров, нагруженных равномерно распределенным по длине давлением (задача Ляме)

Рассмотрим сначала деформации тонкой шайбы, имеющей толщину dz (рис. 17), нагруженной внутренним давлением p_1 и наружным p_2 . Боковые плоскости шайбы свободны от напряжений.

Как будет показано далее, боковые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и, следовательно, длинную трубу можно рассматривать как составленную из ряда шайб [5]. Условия работы шайбы не изменяются в зависимости от того, рассматривается ли она изолированно или как часть трубы (рис. 18).

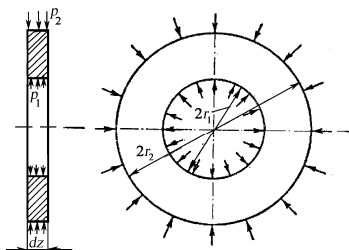


Рис. 17. Схема тонкой шайбы под действием внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений

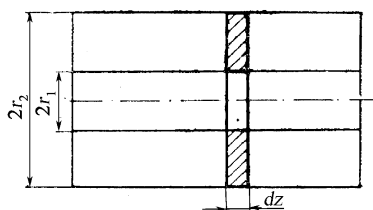


Рис. 18. Условия деформации тонкой шайбы

Радиальное перемещение u_r точки, лежащей на расстоянии r от оси цилиндра, зависит только от этого расстояния:

$$u_r = f(r).$$

Величину относительных деформаций в кольцевом и в радиальном направлениях легко выразить через смещение u_r .

Кольцевое волокно, имеющее до деформации радиус r , после деформации обращается в окружность радиуса $r + u_r$; соответственно относительное удлинение этого волокна равно

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r + u_r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}. \quad (8.1)$$

Длина dr радиального элемента AB (рис. 19) после деформации становится равной

$$A'B' = dr + \frac{du_r}{dr} dr.$$

Относительное удлинение в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{du_r}{dr}. \quad (8.2)$$

Нормальные напряжения в цилиндрическом сечении радиальные σ_r и окружные σ_θ определяются по формулам для плоского напряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Эти напряжения являются главными напряжениями, поскольку плоскость радиального сечения является плоскостью симметрии.

Рассмотрим равновесие элемента шайбы, изображенного на рис. 20 и имеющего толщину dz . Проектируя силы на радиус, имеем:

$$\sigma_r r d\theta dz + d(\sigma_r r) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \sigma_\theta r dr dz d\theta = 0$$

или

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\theta = 0. \quad (8.4)$$

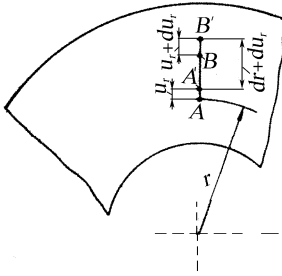


Рис. 19. Схема радиальной деформации

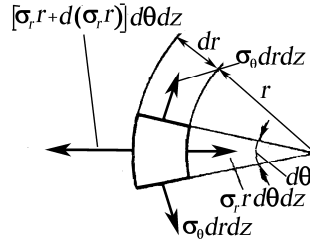


Рис. 20. Схема нагрузок, действующих на элементарный объем

Заменяя в уравнении равновесия (8.4) напряжения их выражениями через перемещения (8.3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее величину радиальных перемещений u_r :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_r}{dr} + \mu u_r \right) - \left(\frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right) = 0$$

или

$$\frac{du_r}{dr} + r \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \mu \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} - \mu \frac{du_r}{dr} = 0.$$

После деления на r получим

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0. \quad (8.5)$$

Левая часть этого уравнения тождественно равна выражению

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ru_r)}{dr} \right].$$

Таким образом, уравнение (8.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ru_r)}{dr} \right] = 0. \quad (8.5a)$$

Последовательно интегрируя это уравнение дважды, получим:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ru_r)}{dr} = 2C_1;$$

$$ru_r = C_1 r^2 + C_2,$$

откуда

$$u_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \quad (8.6)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Обычно давления на внутренней $r = r_1$ и наружной $r = r_2$ поверхностях цилиндра бывают заданы. В этом случае уравнения граничных условий можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p_1; \\ (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p_2, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где p_1 – внутреннее; p_2 – наружное давление; знаки минус в условиях (8.7) определяются правилом знаков, выбранных для напряжений, по которому положительными считаются напряжения растяжения.

Поскольку

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2, \quad (8.8)$$

то, подставив (8.6) и (8.8) в уравнения (8.3), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{EC_1}{1-\mu} - \frac{EC_2}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{EC_1}{1-\mu} + \frac{EC_2}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Введем новые постоянные A и B , связанные с C_1 и C_2 зависимостями

$$\begin{aligned} A &= \frac{E}{1-\mu} C_1; \\ B &= \frac{E}{1+\mu} C_2. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A - B \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= A + B \frac{1}{r^2}.\end{aligned}\tag{8.9}$$

Из выражений (8.9) находим, что

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2A = \text{const}$$

и, следовательно, продольная деформация

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

не зависит от радиуса r .

Таким образом, торцовые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и сделанное предположение о том, что длинный цилиндр можно рассматривать как набранный из отдельных независимо работающих шайб, является справедливым. Благодаря этому все формулы, которые будут получены ниже, в равной мере применимы как к длинным, так и к коротким цилиндрам.

Из граничных условий (8.7) следует

$$\begin{aligned}A - B \frac{1}{r^2} &= -p_1; \\ A - B \frac{1}{r^2} &= -p_2,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}A &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \\ B &= \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.\end{aligned}$$

Используя эти значения постоянных, получим следующие общие формулы для напряжений в любой точке трубы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Для радиальных перемещений, выражая в формуле (8.6) C_1 и C_2 через A и B , окончательно имеем:

$$u_r = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (8.11)$$

В случае, если цилиндр, кроме радиальных давлений, воспринимает еще и продольную силу N , то в поперечных сечениях его возникает напряжение

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad (8.12)$$

а к выражению для радиальных перемещений добавляется слагаемое

$$\Delta u_r = \varepsilon_r r = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r.$$

Напряжения σ_r и σ_θ при этом не изменяются.

Если напряжения на радиусе r цилиндра уже определены, то радиальное перемещение u_r может быть вычислено не по формуле (8.11), а по более простой зависимости (8.13), которая непосредственно следует из формулы (8.1)

$$u_r = \varepsilon_\theta r = r \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r - \mu \sigma_z). \quad (8.13)$$

В том случае, когда задано не напряжение σ_z , а продольная деформация цилиндра ε_z , удобно воспользоваться формулой

$$u_r = r \left[\frac{1-\mu^2}{E} \sigma_\theta - \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_r - \mu \varepsilon_z \right]. \quad (8.14)$$

Формула (8.14) получается путем исключения величины σ_z из выражения (8.13) и зависимости

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_\theta - \mu\sigma_r).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения цилиндра.

А. Цилиндр нагружен только внутренним давлением: $p_1 = p$; $p_2 = 0$. Из зависимостей (8.10) и (8.11) напряжения и радиальные перемещения цилиндра определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) = \frac{pk^2}{1 - k^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) = \frac{pk^2}{1 - k^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right); \end{aligned} \right\} (8.15)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{pk^2}{1 - k^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где $k = r_1/r_2$.

Проанализируем характер распределения напряжений σ_r и σ_θ по толщине толстостенной трубы при действии только внутреннего давления, используя зависимости (8.15).

При $r \rightarrow 0$ $\sigma_r \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow \infty$ $\sigma_r \rightarrow pk^2/(1 - k^2)$.

Аналогично при $r \rightarrow 0$ $\sigma_\theta \rightarrow \infty$; $r \rightarrow \infty$ $\sigma_\theta \rightarrow pk^2/(1 - k^2)$.

Асимптотами кривых σ_r и σ_θ является ось ординат и горизонтальная прямая на расстоянии $pk^2/(1 - k^2)$ от оси абсцисс.

Из зависимостей (8.15) и (8.16) напряжения и радиальные перемещения у внутренней поверхности цилиндра определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p; \\
 (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= p \frac{1+k^2}{1-k^2}; \\
 (u_r)_{r=r_1} &= \frac{pr_1}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu \right).
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

Напряжения и перемещения у наружной поверхности цилиндра ($r = r_2$) определяются формулами

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\
 (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= p \frac{2k^2}{1-k^2}; \\
 (u_r)_{r=r_2} &= \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.17, a}$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от радиуса приведены на рис. 21, на рис. 22 – то же при значении $k = r_1/r_2 = 0,5$.

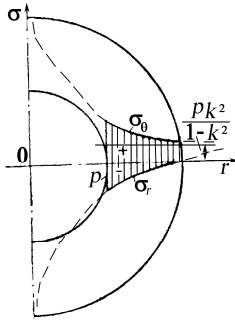


Рис. 21. Распределение радиальных σ_r и окружных σ_θ напряжений в стенке трубы при действии внутреннего давления

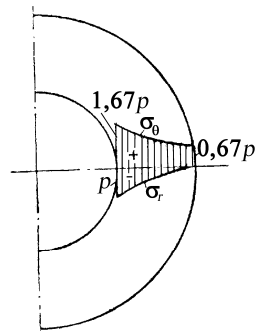


Рис. 22. Распределение радиальных σ_r и окружных σ_θ напряжений в стенке трубы при $k=0,5$

Наиболее опасной является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра, эквивалентное напряжение в которой, вычисленное по теории прочности О. Мора [6], равно:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

или

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_{\theta} - \sigma_r = p \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right) \leq [\sigma], \quad (8.18)$$

где $\nu = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тсж}}$; $\sigma_{\text{тр}}$ и $\sigma_{\text{тсж}}$ – пределы текучести материалов при растяжении и сжатии соответственно.

Если цилиндр дополнительно растягивается продольной силой (цилиндр поршневого двигателя, где внутреннее давление действует при ограничении с одной стороны головкой, а с другой – поршнем), то

$$N = p\pi r_1^2$$

и в его поперечных сечениях возникают в соответствии с зависимостью (8.12) равномерно распределенные напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = p \frac{k^2}{1-k^2}. \quad (a)$$

Расчет на прочность ведется по формуле (8.18).

Если материал цилиндра пластичный, то эквивалентное напряжение вычисляют согласно гипотезе прочности энергии формоизменения (гипотеза Губера-Мизеса-Генки) [7]

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] \quad (б)$$

При дополнительной продольной силе наиболее напряженная точка находится на внутренней поверхности. В окрестности этой точки (см. формулы (8.17) и (a))

$$\sigma_r = -p = \sigma_3; \quad \sigma_{\theta} = p \frac{1+k^2}{1-k^2} = \sigma_1; \quad \sigma_z = p \frac{k^2}{1-k^2} = \sigma_2. \quad (в)$$

Подставив значения полученных главных напряжений в соотношение (б), получим:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{p\sqrt{3}}{1-k^2} \leq [\sigma] \quad (8.18 a)$$

Из соотношения (8.18 *a*) получим

$$k^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{1 - \frac{p\sqrt{3}}{[\sigma]}}$$

Анализируя полученную зависимость, можно увидеть, что при $p = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ отношение r_1/r_2 обращается в бесконечность. Следовательно,

но, при $p \geq \frac{[\sigma]}{3}$ эквивалентное напряжение во внутренних точках цилиндра будет больше допускаемого напряжения при сколь угодно большой толщине стенки. Если же давление превысит величину $p_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$, то во внутренних точках неизбежно возникнет пластическая деформация.

Это, однако, не значит, что при больших давлениях подобрать размеры цилиндра вообще невозможно. Пластическая деформация представляет опасность только тогда, когда она распространяется на всю толщину стенки. Ниже будет показано, каким образом возможно обеспечить прочность трубы.

При отсутствии продольной силы $\sigma_z = \sigma_2 = 0$, тогда согласно (*б*) и (*в*) получим

$$\sigma_{\text{эkv.}} = \frac{p\sqrt{3+k^4}}{1-k^2} \leq [\sigma]. \quad (8.18 \text{ б})$$

Сравнивая (8.18 *a*) и (8.18 *б*) можно заметить, что при отсутствии напряжения σ_z внутреннее давление в трубе может быть повышено.

Величины радиальных перемещений на внутреннем и наружном радиусах определяются по формулам (8.13) или (8.14) и в этом случае равны

$$(u_r)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left(p \frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu p - \mu p \frac{k^2}{1-k^2} \right) = \frac{pr_1}{E} \left(\frac{1+k^2 - \mu k^2}{1-k^2} + \mu \right);$$

$$(u_r)_{r=r_2} = \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2 - \mu k^2}{1-k^2}.$$

Б. Цилиндр нагружен только внешним давлением ($p_2 = p$; $p_1 = 0$). В этом случае в соответствии с зависимостями (8.10) и (8.11) радиальные и окружные напряжения, а также радиальные перемещения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{1-k^2} + \frac{pr_1^2}{1-k^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{1-k^2} - \frac{pr_1^2}{1-k^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{pr}{1-k^2} - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{1-k^2} \cdot \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Проанализируем характер распределения напряжений σ_r и σ_θ по толщине толстостенной трубы при действии только внешнего давления, используя зависимости (8.19).

При $r \rightarrow 0$ $\sigma_r \rightarrow +\infty$; $r \rightarrow \infty$ $\sigma_r \rightarrow -p/(1-k^2)$.

Аналогично при $r \rightarrow 0$ $\sigma_\theta \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow \infty$ $\sigma_\theta \rightarrow -p/(1-k^2)$.

Асимптотами кривых σ_r и σ_θ является ось ординат и горизонтальная прямая на расстоянии $-p/(1-k^2)$ от оси абсцисс.

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от радиуса приведены на рис. 23, на рис. 24 – то же при значении $k=r_1/r_2=0,5$.

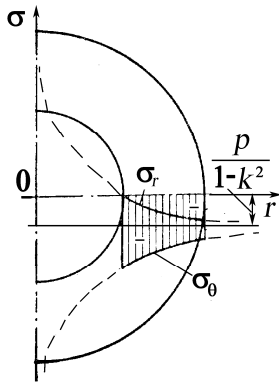


Рис. 23. Распределение радиальных σ_r и окружных σ_θ напряжений в стенке трубы при действии внешнего давления

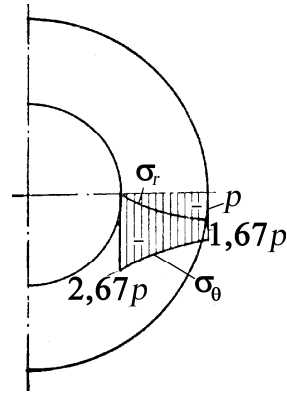


Рис. 24. Распределение радиальных σ_r и окружных σ_θ напряжений в стенке трубы при $k = r_1/r_2 = 0,5$ 12 кг

У внутренней поверхности цилиндра в соответствии с формулами (8.19) радиальные и окружные напряжения, а также перемещение на внутренней поверхности равно

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -p \frac{2}{1-k^2}; \\ (u_r)_{r=r_1} &= -\frac{pr_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

у наружной поверхности цилиндра

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= -p \frac{1+k^2}{1-k^2}; \\ (u_r)_{r=r_2} &= -\frac{pr_2}{E} \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Как и при действии внутреннего давления наиболее опасной является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра, эквивалентное напряжение в которой, вычисленное по теории прочности

О. Мора [7], равно ($\sigma_1 = \sigma_r = 0; \sigma_3 = \sigma_\theta = -p \frac{2}{1-k^2}$)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_r - \nu \sigma_\theta = p \frac{2\nu}{1-k^2} \leq [\sigma] \quad (8.23)$$

Заметим, что если вычислить окружное и радиальное напряжения для сплошного цилиндра ($r_1 = 0$) в соответствии с формулами (8.19), $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$.

8.3. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей

При прессовой или горячей посадке цилиндрических деталей прочное соединение этих деталей достигается за счет того, что внутренний диаметр охватывающей детали делается несколько меньше, чем наружный диаметр охватываемой детали (величина разности диаметров называется натягом δ). В результате после запрессовки на поверхности прилегания сопрягаемых деталей возникает контактное давление, обеспечивающее появление сил трения, препятствующих взаимному перемещению деталей. Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют одинаковую длину, то контактное давление равномерно распределено по поверхности касания, и для расчета можно воспользоваться теорией, изложенной в предыдущем параграфе.

Поскольку после соединения деталей внутренний диаметр охватывающей детали и наружный диаметр охватываемой детали становятся одинаковыми, то очевидно, что сумма абсолютных значений радиальных перемещений обеих деталей, вызванных контактным давлением, равна разности радиусов посадочных поверхностей до запрессовки (т.е. половине натяга δ):

$$|u_{r_1}| + |u_{r_2}| = \frac{\delta}{2}. \quad (8.24)$$

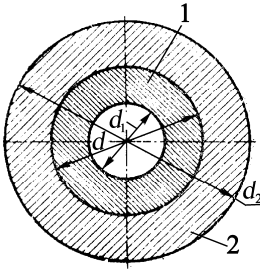


Рис. 25. Сопряжение двух деталей

Обозначим (рис. 25): d_1 – внутренний диаметр запрессовываемой детали; d – диаметр посадочной поверхности детали; $k_1 = d_1/d$ – отношение диаметров внутренней детали; E_1 – модуль упругости материала внутренней детали; μ_1 – коэффициент Пуассона для материала внутренней детали; d_2 – внешний диаметр охватываемой детали; $k_2 = d/d_2$; E_2 , μ_2 – соответствующие величины для охватываемой детали.

На основании формулы (8.22) радиальное перемещение на посадочной поверхности внутренней детали 1 (действует только внешнее давление) по абсолютной величине равно

$$|u_{r_1}| = \frac{pd}{2E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right),$$

где p – контактное давление на посадочной поверхности.

На основании формулы (8.17) радиальное перемещение на внутренней поверхности охватываемой детали 2 (действует только внутреннее давление) равно

$$|u_{r_2}| = \frac{pd}{2E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right).$$

Подставляя величины u_{r_1} и u_{r_2} в уравнение (8.24), определяем величину контактного давления p :

$$\frac{pd}{2E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{pd}{2E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) = \frac{\delta}{2},$$

откуда

$$p = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{1}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (8.25)$$

Следует иметь в виду, что поверхность деталей никогда не бывает абсолютно гладкой, на ней всегда имеются следы обработки – гребешки. В процессе запрессовки эти гребешки обминаются, поэтому действительный натяг δ всегда несколько меньше, чем определенный по замерам деталей до запрессовки (при шлифованных поверхностях разница между действительным и измеренным натягом составляет 10...20 мкм). Необходимо иметь в виду, что формула (8.25) выведена в предположении справедливости закона Гука и неприменима, если предел пропорциональности в одной из сопрягаемых деталей превзойден. В этом случае контактное давление оказывается меньшим, чем значение, полученное по формуле (8.25).

Если сопрягаемые детали изготавливаются из одинакового материала ($E_1 = E_2 = E$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$), то формула (8.25) упрощается. В этом случае

$$p = \frac{E \frac{\delta}{d}}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}}. \quad (8.25 \text{ а})$$

Если, наконец, внутренняя деталь представляет собой сплошной цилиндр ($k_1=0$), то

$$p = E \frac{\delta}{d} \cdot \frac{1-k_2^2}{2}. \quad (8.25 \text{ б})$$

Эквивалентное напряжение в деталях определяется по формулам (8.18) и (8.23).

Усилие запрессовки можно найти по формуле

$$P = f p \pi d l, \quad (8.26)$$

где f – коэффициент трения; l – длина запрессовки.

Величина коэффициента трения при наличии смазки лежит в пределах $0,06 \dots 0,1$.

Рассмотрим запрессовку сплошного цилиндра диаметром d в деталь весьма больших размеров (запрессовка штифта). В этом случае $k_1 = 0$ и $k_2 \cong 0$. Из формулы (8.25 б) контактное давление равно

$$p = E \frac{\delta}{2d}.$$

Около отверстия по внешней детали возникают напряжения (рис. 26) $\sigma_r = -p$ и $\sigma_\theta = p$ (см. формулы (8.17)).

Поскольку в рассматриваемой точке $\sigma_r = -\sigma_\theta$, то напряженное состояние представляет собой чистый сдвиг. Действительно, если выделить вблизи отверстия элементарный объем, то по граням его действуют главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_\theta = p$ и $\sigma_2 = \sigma_r = -p$ (рис. 27).

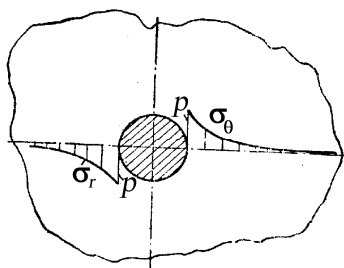


Рис. 26. Распределение напряжений около отверстия

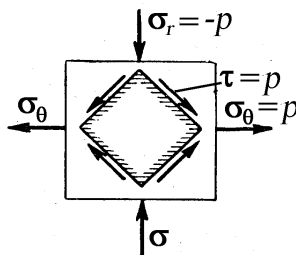


Рис. 27. Площадки с максимальными касательными напряжениями

Примем эти напряжения за исходные. Отсчитывая угол α от направления σ_1 , напишем формулы для σ_α и τ_α в произвольной площадке [8]:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (8.27)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (8.28)$$

Из (8.27) следует, что при $\alpha = \pm 45^\circ$ $\cos 2\alpha = 0$ и $\sigma_\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = \pm 1$ и касательные напряжения равны

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm p.$$

Поскольку напряжения σ_r и σ_θ изменяются по одинаковому закону (см. рис. 27) и отличаются только знаком, то напряженное состояние чистого сдвига имеет место во всех точках наружной детали.

Эквивалентное напряжение из (8.18) ($k=0$)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p(1 + \nu). \quad (8.29)$$

8.4. Скрепление цилиндров

8.4.1. Основные соображения

Из формулы (8.18), определяющей величину эквивалентного напряжения в опасной точке цилиндра, нагруженного внутренним давлением, видно, что это напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_\theta - \sigma_r = p \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right)$$

не может быть меньше определенной величины, как бы ни изменялись размеры цилиндра. Действительно, даже при $k = r_1/r_2 \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно большому наружному диаметру цилиндра (см. зависимость (8.29)), эквивалентное напряжение в опасной точке равно

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p(1 + \nu).$$

Таким образом, если руководствоваться условием, что эквивалентное напряжение не должно достигать предела текучести σ_T , то невозможно изготовить цилиндр на давление большее, чем $\sigma_T/(1+\nu)$ (для стали $\sigma_T/2$, поскольку $\nu=1$), ни при каком выборе толщины его стенок. Причиной этого является то обстоятельство, что в толстостенных цилиндрах, нагруженных внутренним давлением, напряжения σ_r и σ_θ очень быстро затухают с удалением от внутренней поверхности цилиндра и наружные слои материала являются малоак-

тивными, поэтому утолщение стенок цилиндра не сопровождается пропорциональным увеличением его прочности.

В случае если цилиндр должен выдержать весьма большое давление, его делают составным из двух или более труб, которые с натягом надевают друг на друга (обычно с помощью горячей посадки). Окружные напряжения, возникающие при посадке, во внутренней трубе являются напряжениями сжатия, а во внешней – растяжения. Эпюры распределения напряжений, возникающих после посадки, представлены на рис 28, *a*. Если теперь составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные напряжения, причем в наружном цилиндре они будут складываться с начальными напряжениями посадки, а во внутреннем – вычитаться из них.

Суммарные эпюры напряжений после приложения давления будут иметь вид, примерно представленный на рис. 28, *б* (точная эпюра напряжений зависит от соотношений давлений запрессовки и внутреннего давления).

Таким образом, благодаря скреплению удастся разгрузить внутренние волокна цилиндра за счет более интенсивного использования наружных.

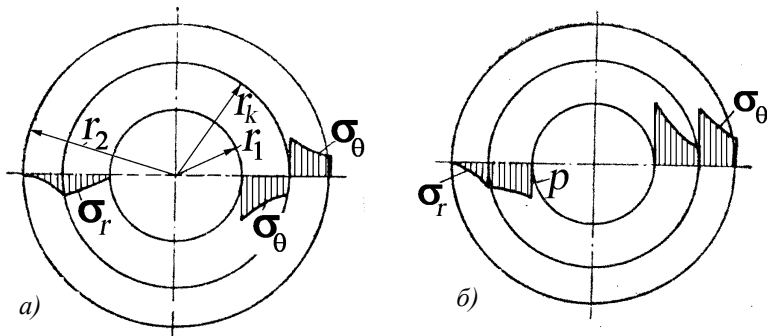


Рис. 28. Эпюры напряжений: *a* – после запрессовки двух труб; *б* – при наличии внутреннего давления

8.4.2. Расчет скрепленного цилиндра

Обозначим (см. рис. 28, а): $k_1 = \frac{r_1}{r_k}$ – отношение внутреннего

радиуса r_1 к радиусу r_k посадочной поверхности; $k_2 = \frac{r_k}{r_2}$ – отноше-

ние радиуса посадочной поверхности r_k к наружному радиусу ци-

линдра r_2 ; $k = \frac{r_1}{r_2} = k_1 k_2$ – отношение внутреннего радиуса r_1 состав-

ного цилиндра к наружному r_2 ; p_0 – контактное давление после за-
прессовки при отсутствии внутреннего рабочего давления p ; p_1 –
контактное давление на посадочной поверхности при наличии внут-
реннего давления.

Напряжения в опасной точке внутренней трубы, нагруженной
изнутри давлением p , а снаружи давлением p_1 (рис. 29), равны

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p; \\ \sigma_\theta &= \frac{pk_1^2 - p_1}{1 - k_1^2} + \frac{p - p_1}{1 - k_1^2} = \\ &= p \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2}. \end{aligned}$$

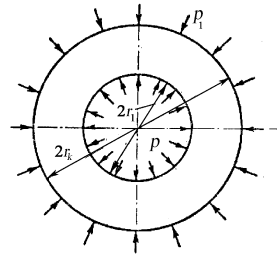


Рис. 29. Нагружение внут-
ренней трубы

Соответственно эквивалентное на-
пряжение в этой точке определяется по
формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эвл}} &= \sigma_\theta - \nu \sigma_r = p \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2} + \nu p = \\ &= p \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Для стальной трубы (при $\nu=1$)

$$\sigma_{\text{эKB1}} = (p - p_1) \frac{2}{1 - k_1^2}. \quad (8.31)$$

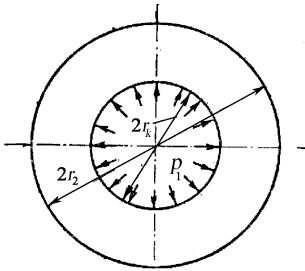


Рис. 30. Нагружение внешней трубы

Для внешней трубы, которая нагружена только контактным давлением p_1 (рис. 30) на посадочной поверхности (при наличии внутреннего давления p в запрессованной трубе, см. рис. 28, б), эквивалентное напряжение в опасной точке определяется по формуле (8.18)

$$\sigma_{\text{эKB2}} = p_1 \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu \right). \quad (8.32)$$

Для стальной трубы (при $\nu=1$)

$$\sigma_{\text{эKB2}} = p_1 \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + 1 \right) = p_1 \frac{2}{1 - k_2^2}. \quad (8.33)$$

Для того чтобы внешняя и внутренняя трубы составного цилиндра были равнопрочными, необходимо, чтобы $\sigma_{\text{эKB2}}$, определяемое в общем случае по формуле (8.32), равнялось $\sigma_{\text{эKB1}}$, определяемое по формуле (8.30). Это условие определяет желательную величину контактного давления между трубами при нагрузке цилиндра рабочим давлением p

$$p \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2} = p \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu \right). \quad (a)$$

Отсюда

$$p \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2} = p \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu \right). \quad (8.34)$$

При $\nu=1$ (для стали) из зависимости (a)

$$p_1 \frac{2}{1 - k_2^2} = (p - p_1) \frac{2}{1 - k_1^2} \quad (б)$$

или из (8.34) и (б)

$$p_1 = p \frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \quad (8.35)$$

Величину контактного давления после запрессовки p_0 (при отсутствии рабочего давления p) найдем, вычитая из давления p_1 величину радиального напряжения на радиусе r_k , соответствующего действию внутреннего давления p на цельный цилиндр с наружным радиусом r_2 . По формуле (8.10) (принимая в зависимости (8.10) обозначения $p_1 = p, p_1 = 0$) найдем это напряжение

$$|\sigma_r| = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_k^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r_k^2} - 1 \right),$$

или, используя принятые ранее обозначения,

$$|\sigma_r| = p \frac{k_1^2(1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 k_2^2}. \quad (в)$$

Необходимое для обеспечения равнопрочности труб контактное давление, осуществляемое посадкой, согласно (8.35) и (в) равно

$$p_0 = p_1 - |\sigma_r| = p \left[\frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2} - \frac{k_1^2(1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 k_2^2} \right]. \quad (8.36)$$

При заданных величинах внутреннего и наружного диаметров составного цилиндра наиболее выгодным является такой выбор диаметра посадки ($2r_k$), который соответствует наименьшей величине эквивалентного напряжения. Чтобы не усложнять выводы, в дальнейшем будем использовать все зависимости только для стальных труб (при $\nu=1$).

При правильном в соответствии с формулами (8.35) и (8.36) выборе величины контактного давления эквивалентные напряжения во внутренней и наружной трубах (см. формулы (8.31) и (8.33)) одинаковы и равны

$$\sigma_{\text{эKB1}} = \sigma_{\text{эKB2}} = (p - p_1) \frac{2}{1 - k_1^2} = p_1 \frac{2}{1 - k_2^2}.$$

Для дальнейшего вывода возьмем значение $\sigma_{\text{эKB2}}$ из (8.33), подставив в формулу только значение p_1 из (8.35):

$$\sigma_{\text{эKB}} = p \frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{2}{1 - k_2^2} = p \frac{2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \quad (z)$$

Так как отношение внутреннего радиуса составного цилиндра к наружному

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_k} \cdot \frac{r_k}{r_2} = k_1 k_2$$

является заданным, то, заменяя k_2 на k/k_1 , можно эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{эKB}}$ из (z) выразить только в зависимости от k_1

$$\sigma_{\text{эKB}} = p \frac{2}{2 - k_1^2 - \frac{k}{k_1^2}}. \quad (d)$$

Для выбора наиболее оптимального радиуса посадочной поверхности из условий прочности составной трубы продифференцируем $\sigma_{\text{эKB}}$ из (d) по k_1 и, приравнявая производную нулю, определим такое значение k_1 , которое будет соответствовать наименьшей величине $\sigma_{\text{эKB}}$:

$$\frac{d\sigma_{\text{эKB}}}{dk_1} = 2p \frac{2(k_1^4 - k^2)}{\left(2 - k_1^2 - \frac{k}{k_1^2}\right)^2 k_1^3} = 0$$

или

$$k_1^4 - k^2 = 0. \quad (e)$$

Из уравнения (e) находим $k_1 = \sqrt{k}$, т. е. при

$$r_k = \sqrt{r_1 r_2} \quad (8.37)$$

эквивалентное напряжение достигает минимума, равного

$$\sigma_{\text{экв}} = p \frac{2}{2 - k - \frac{k^2}{k}} = p \frac{1}{1 - k}. \quad (8.38)$$

Таким образом, при материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, выгодно в качестве посадочного диаметра составного цилиндра выбирать среднее геометрическое между внутренним и внешними его диаметрами.

Необходимая величина контактного давления, создаваемая при посадке, определяется в этом случае по формуле (8.36), которая при $k_1 = k_2 = \sqrt{k}$ принимает вид

$$p_0 = p \left[\frac{1 - k}{2 - k - k} - \frac{k(1 - k)}{1 - k^2} \right] = p \frac{1 - k}{2(1 + k)}, \quad (8.39)$$

где p – расчетное внутреннее давление (рабочее) в составном цилиндре.

Соответствующую величину натяга δ можно найти по формуле (8.25 а), произведя в ней необходимые подстановки

$$p_0 = \frac{E \frac{\delta}{d_k}}{\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2}} = \frac{E \frac{\delta}{2r_k}}{\frac{1 + k}{1 - k} + \frac{1 + k}{1 - k}} = \frac{E\delta(1 - k)}{r_k(1 + k)},$$

с учетом (8.39) получим

$$p \frac{1 - k}{2(1 + k)} = \frac{E\delta(1 - k)}{r_k(1 + k)}.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{p}{E} 2r_k. \quad (8.40)$$

Если радиус посадочной поверхности выбран по зависимости (8.37), то при действии на составной цилиндр внутреннего давления p эквивалентное напряжение в опасной точке определяется формулой (8.38). Сравнивая величину P со значением эк-

вивалентного напряжения в несоставном цилиндре при действии только внутреннего рабочего давления (формула (8.18) при $\nu=1$)

$$\sigma_{\text{экр.спл.}} = p \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + 1 \right) = p \frac{2}{1-k^2},$$

найдем, что их отношение равно:

$$\frac{\sigma_{\text{экр.сост.}}}{\sigma_{\text{экр.спл.}}} = \frac{p(1-k^2)}{(1-k)2p} = \frac{1+k}{2}. \quad (8.41)$$

Таким образом, изготавливая толстостенный цилиндр составным, можно почти вдвое уменьшить величину эквивалентного напряжения. Составные цилиндры из двух насаженных друг на друга труб часто применяются в качестве стволов артиллерийских орудий и в других конструкциях, испытывающих высокое давление.

Метод скрепления цилиндров является, однако, не единственным методом, позволяющим повысить их несущую способность.

Такие же примерно результаты достигаются, если изготовленный цельный цилиндр подвергать нагрузке высоким внутренним давлением так, чтобы во внутренних волокнах цилиндра возникли пластические деформации. После разгрузки в цилиндре остаются остаточные напряжения, распределенные подобно напряжениям, возникшим при насадке цилиндров с натягом (внутренние кольцевые волокна сжаты, наружные – растянуты).

Остаточные напряжения у внутренней поверхности цилиндра имеют знак, обратный знаку напряжений, возникающих при воздействии на цилиндр внутреннего давления. Благодаря этому суммарные напряжения в опасных зонах цилиндра снижаются и прочность его увеличивается. Этот метод повышения несущей способности носит название автофреттирования, или автоскрепления цилиндра.

8.5. Расчет вращающихся дисков постоянной толщины

Рассмотрим расчет вращающихся дисков постоянной толщины (рис. 31). Если внешний диаметр диска r_2 превосходит толщину

диска h в 4 раза и более, то, как показало точное решение теории упругости [8], практически можно считать, что по толщине окружных и радиальных сечений диска напряжения распределены равномерно, а отдельные круговые слои диска, деформируясь одинаковым образом, не находятся в силовом взаимодействии друг с другом, т. е. имеет место плоское напряженное состояние.

На основании изложенного в приведенном ниже инженерном методе расчета тонких дисков используются следующие допущения:

- напряжения распределены равномерно по толщине диска;
- в площадках, параллельных срединной плоскости диска (см. рис. 31, обозначены штриховой линией на поперечном сечении), напряжения отсутствуют.

Пусть диск постоянной толщины h с центральным отверстием вращается вокруг центральной оси, нормальной к чертежу, с постоянной угловой скоростью ω .

Размеры диска указаны на рис. 31. Масса единицы объема (плотность) материала ρ (кг/м^3).

Мысленно остановим диск, приложим ко всем его сечениям силы инерции и исследуем деформированное и напряженное состояние диска, считая его как бы находящимся в покое. Заметим, что рассматриваемая задача является осесимметричной, т. е. компоненты напряжений и деформации в точках диска, так же как и перемещения, являются только функциями радиуса и от полярного угла не зависят.

Выделим двумя радиальными сечениями, образующими угол $d\theta$, и двумя окружными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии dr , бесконечно малый элемент диска $abcd$ (см. рис. 31)

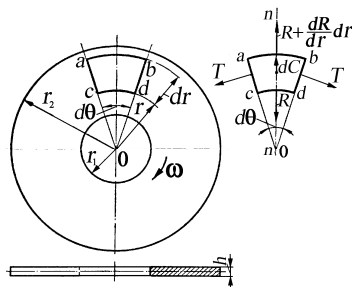


Рис. 31. Диск постоянной толщины

и, нагрузив его поверхностными и объемными силами, исследуем условия равновесия элемента. В силу симметрии элемента и нагрузки искажение углов элемента не произойдет, а поэтому касательных напряжений ни на одной из граней, ограничивающих выделенный элемент, не будет. Таким образом, по граням $ac = dr$ и $bd = dr$ действуют окружные напряжения σ_θ , а по радиальным граням $ab = (r+dr)d\theta$ и $cd = rd\theta$ – радиальные σ_r , которые являются главными напряжениями.

Таким образом, на рассматриваемый элемент $abcd$ действуют силы:

- центробежная сила инерции

$$dC = \rho h r d\theta d r r \omega^2 = \rho h r^2 \omega^2 d r d\theta, \quad (8.42)$$

где ω – угловая скорость в 1/с; ρ – плотность материала диска в кг/м³;

- радиальные силы R и $R + \frac{dR}{dr} dr$,

где
$$R = \sigma_r h r d\theta; \quad (8.43)$$

- окружные силы

$$T = \sigma_\theta h d r. \quad (8.44)$$

Выражения (8.42) и (8.43) составлены в предположении, что напряжения σ_r и σ_θ постоянны по толщине диска.

Сумма проекций всех перечисленных сил (см. (8.42) – (8.43)) на направление среднего радиуса nn (см. рис. 31) приводит к уравнению

$$dC - R + \left(R + \frac{dR}{dr} dr\right) - 2T \cos\left(90^\circ - \frac{d\theta}{2}\right) = 0. \quad (8.45)$$

Заметим, если спроектировать все силы на направление, перпендикулярное nn , а также взять сумму моментов их относительно любой точки элемента $abcd$, то в этом случае приходим к тождеству $0=0$.

Учитывая, что

$$dR = d(\sigma_r r) h d\theta, \text{ а } 2\cos\left(90^\circ - \frac{d\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{d\theta}{2} \approx d\theta,$$

окончательно получим

$$dC + \frac{dR}{dr} dr - T d\theta = 0$$

или

$$\rho h r^2 \omega^2 dr d\theta + \frac{d(\sigma_r r) h d\theta}{dr} dr - \sigma_\theta h dr d\theta = 0.$$

После сокращения получим

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_\theta + \rho r^2 \omega^2 = 0 \quad (8.46)$$

$$\text{или} \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0. \quad (8.46 \text{ a})$$

Дифференциальное уравнение (8.45) включает две неизвестные функции $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$.

Выразим последние через одну функцию $u_r(r)$, представляющую собой радиальное перемещение точки на радиусе r , в окрестности которой выделен рассматриваемый элемент.

Длина окружности произвольного радиуса r до деформации составляла величину $2\pi r$; после деформации длина этой же окружности равна $2\pi(r + u_r)$. Абсолютная деформация окружности радиуса r составляет $2\pi(r + u_r) - 2\pi r = 2\pi u_r$.

Тогда относительная окружная деформация ε_θ выражается через перемещение следующим образом:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi u_r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}. \quad (8.47)$$

Поскольку радиальное смещение точек окружности радиуса r обозначили как u_r , то радиальное смещение точек окружности $r + dr$ будет $u_r + du_r$. Следовательно, абсолютная деформация выделенного элемента dr будет равна du_r , а относительная радиальная деформация

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}. \quad (8.48)$$

Теперь в соответствии со второй принятой нами гипотезой, по которой напряжение является плоским, следуя закону Гука, используем формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r); \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Решая совместно уравнения (a) относительно σ_r и σ_θ , а также подставив значения ε_r и ε_θ из зависимостей (8.47) и (8.48), окончательно получим:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr}\right); \quad (8.49)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r}\right). \quad (8.50)$$

Для того чтобы можно было осуществить подстановку в уравнение (8.45 a) значений σ_r и σ_θ из (8.48) и (8.49), найдем предварительно $d\sigma_r/dr$. Пользуясь соотношением (8.50) имеем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2u_r}{dr^2} + \mu \frac{r \frac{du_r}{dr} - u_r}{r^2} \right). \quad (8.51)$$

Подставляя значения σ_r , σ_θ из (8.49), (8.50), а также $d\sigma_r/dr$ из (8.51) в уравнение (8.46 a), получаем:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{du_r}{dr} - \mu \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{E}{(1-\mu^2)r} \left(\frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} - \frac{u_r}{r} - \mu \frac{du_r}{dr} \right) + \rho r \omega^2 = 0.$$

Разделив полученное уравнение на $E/(1-\mu^2)$ и проведя необходимые преобразования, имеем:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho r \omega^2$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(u_r r)}{dr} \right] = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho r \omega^2. \quad (8.52)$$

Интегрируя уравнение (8.52), имеем:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(u_r r)}{dr} = C_1 - \frac{1-\mu^2}{2E} \rho r^2 \omega^2$$

или

$$\frac{d(u_r r)}{dr} = 2C_1 r - \frac{1-\mu^2}{2E} \rho r^3 \omega^2.$$

Интегрируя второй раз, получаем:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho r^3 \omega^2. \quad (8.53)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий поставленной задачи.

После определения величины функции по формулам (8.49) и (8.50) могут быть установлены значения напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от радиуса r .

Поскольку

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2,$$

то

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^2 + \mu C_1 - \mu \frac{C_2}{r^2} - \mu \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2 \right];$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2 + \mu C_1 + \mu \frac{C_2}{r^2} - \mu \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^2 \right].$$

После преобразований окончательно получим

$$\sigma_{\theta} = \frac{C_1 E}{1-\mu} + \frac{C_2 E}{(1+\mu)r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2; \quad (8.54)$$

$$\sigma_r = \frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r^2. \quad (8.55)$$

Рассмотрим частные случаи по расчету дисков постоянной толщины.

Диск без отверстия. Рассмотрим диск постоянной толщины без обода и центрального отверстия (рис. 32). Внешний радиус диска равен r_2 .

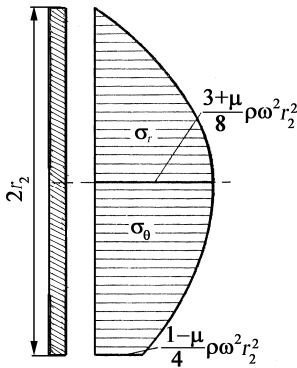


Рис. 32. Диск постоянной толщины без центрального отверстия и эпюры напряжений σ_{θ} и σ_r , возникающие в нем в связи с вращением

Решение (8.53) может существовать при $C_2 = 0$. В этом случае при $r = 0$ $u_r = 0$. Так как при $r = r_2$ $(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$, то из формулы (8.55) имеем

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{(3+\mu)(1-\mu)}{8E} \rho \omega^2 r_2^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\mu)r_2^2 - (1+3\mu)r^2]; \quad (8.56)$$

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\mu)(r_2^2 - r^2)]. \quad (8.57)$$

Графики изменения напряжений σ_{θ} и σ_r в зависимости от радиуса r представлены на рис. 32.

Из формул (8.56) и (8.57) следует, что σ_{θ} и σ_r всегда положительны (см. также рис. 32) и увеличиваются по мере приближения к центру. Наибольшее напряжение растяжения возникает в центре (при $r = 0$)

$$\sigma_{\theta \max} = \sigma_{r \max} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2 r_2^2}{8}. \quad (8.58)$$

На внешнем радиусе $r = r_2$ (σ_r) $_{r=r_2} = 0$, а окружное напряжение σ_θ равно

$$\sigma_\theta = \frac{(1-\mu)\rho\omega^2 r_2^2}{4}. \quad (8.59)$$

Диск с отверстием. Для диска с центральным отверстием без обода (рис. 33) имеем следующие граничные условия: при $r = r_1$ (σ_r) $_{r=r_1} = 0$, а при $r = r_2$ (σ_r) $_{r=r_2} = 0$. Другими словами, на внешнем и внутреннем радиусе нормальные радиальные напряжения σ_r должны обращаться в нуль.

Подставляя в формулу (8.55) $r = r_1$ и $r = r_2$, получим систему уравнений относительно двух неизвестных C_1 и C_2 :

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho\omega^2 r_1^2 = 0;$$

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho\omega^2 r_2^2 = 0.$$

Решая совместно полученные уравнения относительно C_1 и C_2 , получаем:

$$C_1 = \frac{(3+\mu)(1-\mu)}{8E} \rho\omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (б)$$

$$C_2 = \frac{(3+\mu)(1+\mu)}{8E} \rho\omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (в)$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулы (8.54) и (8.55), получаем после преобразования окончательные выражения для определения σ_θ и σ_r :

$$\sigma_\theta = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right]; \quad (8.60)$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right]. \quad (8.61)$$

Эпюры σ_θ и σ_r для вращающегося диска постоянной толщины с центральным отверстием представлены на рис. 33.

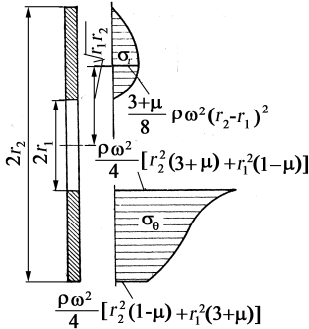


Рис. 33. Диск постоянной толщины с центральным отверстием и эпюры напряжений σ_θ и σ_r , возникающие в нем в связи с вращением

Из (8.60) следует, что напряжение σ_θ достигает наибольшего значения на внутреннем радиусе, где

$$\sigma_{\theta\max} = \frac{\rho\omega^2}{4} [r_2^2(3+\mu) + r_1^2(1-\mu)]. \quad (8.62)$$

Для определения максимального радиального напряжения σ_r , а также положения сечения, определяемого радиусом r , найдем $d\sigma_r/dr$, используя формулу (8.61):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[-\frac{2rr_1^2r_2^2}{r^4} - 2r \right] = 0.$$

Откуда

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (8.63)$$

Таким образом, из (8.63) наибольшее напряжение σ_r возникает в точках окружного сечения на радиусе $r = r_0$

$$\sigma_{r\max} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} (r_2 - r_1)^2. \quad (8.64)$$

Заметим, что $\sigma_{\theta\max} > \sigma_{r\max}$.

Обод и диск с очень малым отверстием. Этот диск может рассматриваться, как предыдущий (см. рис. 33), если радиусы r_1 и r_2 близки по величине. В этом случае диск обращается в тонкий обод радиусом R .

Формулы для определения σ_θ и σ_r получим как частные случаи формул (8.60) и (8.61), полагая в них $r_1 = r_2 = R$. Как и следовало ожидать

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \rho\omega^2 R^2; \\ \sigma_r &= 0.\end{aligned}\tag{8.65}$$

Интересно отметить, что при $r_1 \approx 0$ в радиальном сечении у кромки центрального прокола

$$\sigma_\theta = \frac{(3 + \mu)\rho\omega^2 r_2^2}{4}.\tag{8.66}$$

Из (8.66) следует, что для диска с проколом в центре окружное напряжение вдвое превышает σ_θ для сплошного диска (см. формулу (8.58)).

Учитывая, что прокол можно рассматривать как источник местных напряжений, из сравнения формул (8.58) и (8.66) устанавливаем, что коэффициент концентрации напряжений в этом случае равен 2.

Полученные результаты по расчету дисков постоянной толщины с центральным отверстием могут быть широко использованы при расчете шлифовальных кругов, которые часто изготавливаются в форме таких дисков.

Так как при вращении дисков с центральным отверстием наибольшие окружные напряжения σ_θ возникают в радиальных сечениях у внутренней кромки, то при установке шлифовальных кругов для обеспечения надежности необходимо обеспечить не только центральную посадку круга, но и не снизить прочность его.

Обычно шлифовальные круги зажимаются между плоскими кольцевыми фланцами. Под фланцы должна ставиться прокладка из упругого материала (картон, резина, кожа и др.), чтобы предохранить поверхность шлифовального круга от каких-либо повреждений в связи с нажимом фланцев. Одна из конструкций креплений такого рода приведена на рис. 34.

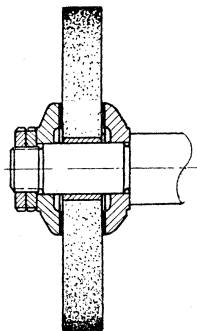


Рис. 34. Конструкция крепления шлифовального круга

Круги диаметром 0,15 м и более, предназначенные для работы с окружными скоростями $v \geq 15$ м/с, перед установкой на шлифовальный станок необходимо испытывать вращением при скорости, на 50 % превышающей максимально допустимую скорость, установленную для рабочего режима диска.

Испытание шлифовальных кругов на прочность, обеспечивающее безопасное проведение этой операции, производят путем их вращения на специальном станке.

В эксплуатационных условиях шлифовальные круги должны быть защищены специальными кожухами.

Контрольные вопросы

1. Какой вид напряженно-деформированного состояния возникает при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением ?
2. Как учитываются осевые напряжения при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
3. Чему равно радиальное напряжение на внутреннем радиусе при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
4. Чему равно радиальное напряжение на внешнем радиусе при нагружении толстостенной трубы внешним давлением?
5. Как определяется контактное давление при прессовой посадке двух сопрягаемых деталей?
6. Как вычисляется эквивалентное напряжение при прессовой посадке двух сопрягаемых деталей?
7. Почему при прессовой посадке двух труб увеличивается прочность внутренней трубы?
8. Какие методы повышают несущую способность толстостенной трубы?

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА 9. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**9.1. Сущность вариационных методов решения
дифференциальных уравнений**

Решение большинства задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Точного решения очень многих важных для практики задач до сих пор не получено, так как удается решать их лишь приближенными методами, среди которых важное место занимают вариационные методы и в первую очередь те, которые основаны на применении начала возможных перемещений Лагранжа.

В последние годы большое количество решений задач прикладной теории упругости получено с помощью метода конечных элементов, рассмотренного нами в гл. 10.

Широкое использование вычислительных машин существенно увеличило возможности численных методов решения дифференциальных уравнений, таких как конечно-разностный метод (метод сеток), метод конечных объемов, граничных элементов и др.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь наиболее часто применяемые при решении задач прикладной теории упругости вариационные методы (Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, Канторовича – Власова).

Прежде чем излагать суть вариационных методов поясним некоторые основные понятия. В инженерной практике наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции

$y = f(x)$, встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной Z , которая сама зависит от выбора функции $f(x)$. Такие переменные Z называются *функционалами*.

В простейшем случае функционал Z представляется в виде интеграла $Z = \int_a^b F(x, y, y') dx$, где a, b определяют интервал изменения аргумента x .

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции $y(x)$, а вторая – от величины аргумента x . В одном случае, изменяя вид функции $y(x)$, т. е. варьируя саму функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором – изменяя величину независимого переменного x , влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента x , которое сообщает функции $y(x)$ максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции $y(x)$, при котором функционал Z приобретает максимальное или минимальное значение.

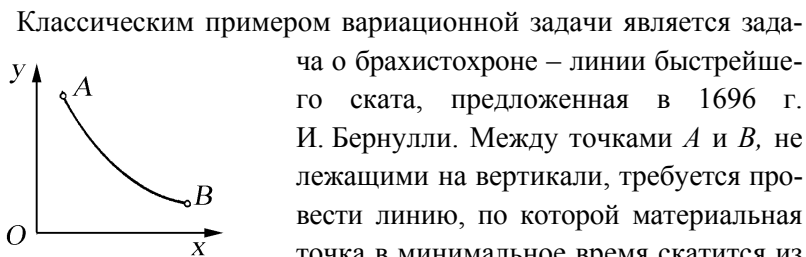


Рис. 35. Линия быстрого ската

Классическим примером вариационной задачи является задача о брахистохроне – линии быстрого ската, предложенная в 1696 г. И. Бернулли. Между точками A и B , не лежащими на вертикали, требуется провести линию, по которой материальная точка в минимальное время скатится из точки A в точку B (рис. 35). Здесь роль функционала выполняет время t перемещения из точки A в точку B , а уравнение $y(x)$ кривой, проходящей через точки A и B , – искомая функция.

Отметим, что методы решения вариационных задач, т. е. задач отыскания функций, сообщающих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному x дается приращение $\Delta x = x - x_1$, равное дифференциалу dx . В вариационных задачах дается приращение (или вариация) δu искомой функции $y(x)$, равное $\delta u = y(x) - y_1(x)$.

Как в дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента Δx часть приращения функции, так и в вариационном исчислении вариация функционала δZ представляет собой линейную по отношению к вариации функции δu часть функционала.

Если функция $y = f(x)$ достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента x , дифференциал функции $dy = 0$. Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю: $\delta Z = 0$.

Приближенные методы, которые позволяют найти решение задачи минуя процесс интегрирования дифференциальных уравнений либо сводя их к решению системы алгебраических уравнений, относятся к так называемым *прямым методам*.

Перейдем к непосредственному рассмотрению некоторых прямых вариационных методов.

9.2. Метод Рэлея – Ритца

Метод Рэлея – Ритца является одним из наиболее мощных прямых методов вариационного исчисления. Он основан на использовании известного из курса теоретической механики принципа возможных перемещений: для того чтобы система, подчиненная идеальным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ

всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

Пусть работа внешних сил (объемных и поверхностных) на каком-либо возможном перемещении равна δA . Под действием внешних сил происходит деформация упругого тела, а внутренние силы при этом выполняют работу δU , которая представляет собой приращение потенциальной энергии системы на том же возможном перемещении (взятом с обратным знаком по отношению к работе внешних сил). Тогда принцип возможных перемещений для тела, находящегося в равновесии, можно представить следующим образом

$$\delta A - \delta U = 0. \quad (a)$$

Определим значения δA и δU из условия, что на систему действуют объемные силы X , Y и Z , а также поверхностные силы X_v , Y_v и Z_v (v – нормаль к некоторой поверхности s , на которой действуют указанные поверхностные силы). Дадим частицам тела возможные перемещения, составляющие которых δu_x , δu_y , δu_z . Подсчитаем работу внешних сил на этих возможных перемещениях. Элементарная работа составляющей объемных сил X , приходящейся на единицу объема, равна произведению этой силы на объем бесконечно малого элемента $dx dy dz$ и на возможное перемещение δu_x в направлении этой силы:

$$X \cdot dx dy dz \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определим элементарные работы составляющих объемных сил Y и Z (и в направлении этих сил) на соответствующих возможных перемещениях δu_y и δu_z

$$Y \cdot dx dy dz \cdot \delta u_y, \quad Z \cdot dx dy dz \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая объемными силами во всем объеме тела V , равна интегралу по этому объему от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих объемной силы:

$$\iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz. \quad (б)$$

Элементарная работа составляющей поверхностных сил p_{xv} , которая действует на бесконечно малом элементе поверхности ds , равна произведению равнодействующей этой составляющей на площадке ds на возможное перемещение δu_x в направлении этой составляющей:

$$p_{xv} \cdot ds \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определяются и элементарные работы двух других составляющих поверхностных сил

$$p_{yv} \cdot ds \cdot \delta u_y, \quad p_{zv} \cdot ds \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая поверхностными силами, действующими на всей поверхности тела s , равна интегралу по всей поверхности тела от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих поверхностных сил:

$$\iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \quad (\epsilon)$$

Таким образом, возможная работа всех внешних сил на возможных перемещениях равна сумме работ объемных (δ) и поверхностных (ϵ) сил

$$\begin{aligned} \delta A = & \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz + \\ & + \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \end{aligned} \quad (\zeta)$$

При вычислении возможной работы внешних сил варьировались только перемещения u_x , u_y и u_z , а объемные и поверхностные силы оставались постоянными, поэтому оператор δ в формуле (ζ) можно вынести из-под знаков интеграла, сделав общим для обоих интегралов:

$$\begin{aligned} \delta A = & \delta \left[\iiint_V (X u_x + Y u_y + Z u_z) dx dy dz + \right. \\ & \left. + \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds \right]. \end{aligned} \quad (\theta)$$

Поскольку потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, вычисляется по формуле $U = \iiint_V W dx dy dz$ [1], то приращение

потенциальной энергии δU в формуле (а) равно:

$$\delta U = \iiint_V \delta W dx dy dz, \quad (e)$$

где $W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) -$

удельная потенциальная энергия.

Представляя в соотношение (а) оператор δ общим для обоих слагаемых, получаем:

$$\delta(A - U) = 0. \quad (ж)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой работу всех внешних и внутренних сил, приложенных к телу. Эта величина, взятая с обратным знаком, является потенциальной энергией системы внешних и внутренних сил, действующих на упругое тело:

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (9.1)$$

Вводя это обозначение вместо условия (ж), получаем следующее соотношение:

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (з)$$

Так как первая вариация δ с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка равна первому дифференциалу, то вместо условий (е) можно написать

$$d\mathcal{E} = 0.$$

Полученное условие означает, что при равновесии упругой системы потенциальная энергия \mathcal{E} достигает экстремального значения.

На основании теоремы Лагранжа-Дирихле [10] можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения,*

удовлетворяющие условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.

Таким образом, потенциальная энергия системы \mathcal{E} (9.1)

$$\mathcal{E} = U - A = \min. \quad (9.2)$$

При этом потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, определяется по формуле (ж), а работа объемных и поверхностных сил согласно формуле (д):

$$A = \iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dx dy dz + \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \quad (u)$$

В соответствии с методом Рэлея – Ритца представим перемещения u_x , u_y и u_z в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Пусть, например,

$$u_x = \sum_k a_k \Phi_k(x, y, z); \quad u_y = \sum_k b_k \Psi_k(x, y, z); \quad (9.3)$$

$$u_z = \sum_k c_k \chi_k(x, y, z),$$

где Φ_k , Ψ_k , χ_k – функции, удовлетворяющие граничным условиям, а a_k , b_k , c_k – произвольные параметры, подлежащие определению из условий стационарности энергии (з) ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

Потенциальная энергия деформаций W может быть представлена через перемещения u_x , u_y и u_z . Действительно, если в уравнении (е) [1]

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]$$

компоненты деформации заменить через перемещения u_x , u_y и u_z согласно формулам Коши [1], а также использовать постоянные Ламе

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

то после преобразований получим для W следующее выражение:

$$W = G \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (9.4)$$

Теперь полная энергия системы \mathcal{E} может быть представлена как некоторая функция параметров a_k, b_k, c_k , т. е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_k, b_k, c_k).$$

Как следует из (u) работа внешних сил A является линейной функцией параметров a_k, b_k, c_k , а приращение потенциальной энергии U , как и потенциальная энергия \mathcal{E} (что следует из (9.4)) является квадратичной функцией этих же параметров.

Из условия стационарности энергии $\delta\mathcal{E} = 0$, имея в виду, что все параметры a_k, b_k, c_k произвольны, следует, что нулю должны равняться частные производные от энергии \mathcal{E} по всем варьируемым параметрам a_k, b_k, c_k , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} = 0. \quad (9.5)$$

В итоге получим столько уравнений, сколько произвольных параметров содержится в выражениях (9.3).

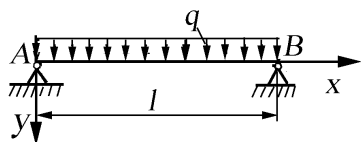


Рис. 36. Балка со свободно опертыми концами и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

В качестве примера применения метода Рэлея – Ритца рассмотрим задачу об изгибе свободно опертого по концам стержня постоянной изгибной жесткости EI , длиной l , нагруженного равномерно распределенной поперечной нагрузкой q (рис. 36).

Для прогиба u_y применим выражение³ $u_z = a \sin(\pi x/l)$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям (прогибы и моменты на опорах в сечениях A и B равны нулю, см. рис. 36):

при $x = 0$ (сечение A) и $x = l$ (сечение B) $u_y = 0$, $\frac{d^2 u_y}{dx^2} = 0$.

Потенциальная энергия изгиба стержня равна

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_z^2 dx.$$

Но $EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M_z$, тогда

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

После подстановки $u_y = a \sin(\pi x/l)$ в выражение для W и интегрирования получим

$$W = \frac{EI}{2} \cdot \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4}.$$

Работа внешних сил

$$A = \int_0^l q u_y dx = qa \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = 2qa \frac{l}{\pi}.$$

Окончательно для энергии \mathcal{E} получим

$$\mathcal{E} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4} - 2qa \frac{l}{\pi}.$$

³ Нетрудно заметить, что u_z аппроксимируется таким образом, чтобы при $x = l/2$ прогиб был максимальный.

Далее из условия $\partial\mathcal{E}/\partial a = 0$ получим значение параметра a – максимального прогиба стержня в середине пролета

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial a} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{a\pi^4}{l^3} - 2q \frac{l}{\pi} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Как известно [8, 17], при интегрировании упругой линии балки⁴

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = -\frac{ql}{2} x + \frac{qx^2}{2} \quad (\kappa)$$

максимальный прогиб в середине пролета равен

$$\frac{5ql^4}{384EI} = 0,013021 \frac{ql^4}{EI}.$$

Сравнение с решением, полученным вариационным методом (путем замены выражения для прогиба полуволной синусоиды) показывает, что ошибка составляет около 0,4 %.

Таким образом, метод Рэлея – Ритца позволяет заменить задачу о нахождении решения дифференциального уравнения (например (κ)) задачей о нахождении минимума потенциальной энергии. Такая замена возможна в связи с тем, что как дифференциальное уравнение (κ) прогиба упругой линии балки, так и вариационное уравнение (ε) являются уравнениями равновесия упругого тела. Покажем, что вариационное уравнение (ε) включает в себя дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности. Рассматривая вариационное уравнение (ε) в форме

$$\delta\mathcal{E} = \delta U - \delta A = 0, \quad (\varepsilon)$$

внесем в него выражения потенциальной энергии (e) , подставив в него компоненты деформаций. Кроме того, учтем, что в соответствии с формулами Коши

⁴ На рис. 36 координата u направлена вниз для того, чтобы максимальное перемещение u_z имело положительный знак, как и при решении методом Рэлея – Ритца.

$$\delta \varepsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x),$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_y),$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_y) + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_z) + \right. \\ & + \tau_{xy} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_y) \right] + \tau_{yz} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\delta u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_z) \right] + \\ & \left. + \tau_{zx} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_x) \right] \right\} dx dy dz - \\ & - \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz - \\ & - \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds = 0. \end{aligned} \quad (м)$$

Возьмем первый из тройных интегралов в уравнении (м) и проинтегрируем его по частям по x

$$\iiint_V \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x) dx dy dz = \iint_s \sigma_x \delta u_x dy dz - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x \delta u_x dx dy dz. \quad (н)$$

В правой части соотношения (н) первый интеграл – поверхностный интеграл второго типа. Его можно преобразовать в поверхностный интеграл первого типа по известной из курса математического анализа формуле

$$\iint_s (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \iint_s (Pl + Qm + Rn) ds. \quad (о)$$

Здесь функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ должны быть непрерывными вместе с первыми частными производными внутри объема V , ограниченного поверхностью s ; l, m, n – направляющие косинусы нормали к поверхности s ; ds – дифференциал поверхности s .

Используя соотношение (о), преобразовываются и остальные восемь первых тройных интегралов в уравнении (м). После их преобразования и группировки по составляющим возможных перемещений вместо уравнения (м) получаем

$$\begin{aligned}
 & \iint_s \left[(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xv}) \delta u_x + \right. \\
 & + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_{yv}) \delta u_y + \\
 & \left. + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zv}) \delta u_z \right] ds - \\
 & - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u_x + \right. \\
 & + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta u_y + \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta u_z \right] dx dy dz = 0.
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

В полученном уравнении возможные перемещения $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ ничем между собой не связаны. Поэтому, чтобы уравнение (9.6) обращалось в тождество при любых значениях возможных перемещений, должны обращаться в нуль коэффициенты при этих возможных перемещениях, стоящие в скобках. Таким образом, получим шесть уравнений: три уравнения представляют (под интегралом по поверхности) собой условия на поверхности

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\
 p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\
 p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n,
 \end{aligned} \right\}$$

а следующие три уравнения – дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, вариационное уравнение (9.6) включает в себе дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия. Отсюда следует, что при использовании вариационного уравнения (9.6) для приближенного решения задач при выборе функций $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ обязательными являются только геометрические граничные условия, а статические граничные условия и дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются автоматически.

Рассмотрим применение метода Рэля – Ритца к решению задач изгиба пластин. Пусть, например, прямоугольная пластинка со сторонами a, b и толщиной h свободно оперта по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением $q = q_0$.

Представим прогиб срединной плоскости пластинки в виде двойного ряда

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (n)$$

Как было показано в (9.3), функции $\varphi_{kl} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ ($m, n = 1, 2, 3 \dots \infty$) удовлетворяют всем граничным условиям шарнирного опирания пластинки – и геометрическим и статическим.

Для определения коэффициентов ряда a_{mn} подсчитаем потенциальную энергию системы (см. формулу (7.44))

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 u_z)^2 dx dy = \frac{D}{2} \iint_s \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy.$$

Подсчитаем оператор Лапласа над функцией (n) $u_{zmn}(x, y)$

$$\begin{aligned}\nabla^2 w_{mn} &= \frac{\partial^2 u_{zmn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{zmn}}{\partial y^2} = \\ &= -\pi^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в формулу для потенциальной энергии U , получим:

$$U = \frac{\pi^4 D}{2} \iint_{00}^{ab} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 dx dy. \quad (9.7)$$

Возведение в квадрат двойного ряда, стоящего под интегралом в квадратных скобках, равносильно перемножению двух многочленов, где каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда. Чтобы отличить члены одного ряда от членов другого ряда, в одном из них индексы k и l заменим соответственно на c и d . Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в формуле (9.7), сведется к следующему ряду:

$$\begin{aligned}& \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 = \\ & \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right] \times \\ & \times \left[\sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{cd} \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \\ & \times \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Подставим полученное решение в формулу (9.7). Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также вынося постоянные величины за знак интеграла, получаем:

$$U = \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy. \quad (9.8)$$

Подсчитаем входящие сюда интегралы. Первый из них равен

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} dx = \begin{cases} = 0 & \text{при } k \neq c, \\ \neq 0 & \text{при } k = c. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл отличен от нуля только при $k = c$ и равен

$$\int_0^a \sin^2 \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}. \quad (9.9)$$

Рассматривая второй интеграл в формуле (9.8) и решив его аналогично первому, получаем:

$$\int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy = \begin{cases} = 0 & \text{при } l \neq d, \\ \neq 0 & \text{при } l = d. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл отличен от нуля только при $l = d$ и равен

$$\int_0^b \sin^2 \frac{l\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (9.10)$$

Подставляя полученные значения интегралов (9.9) и (9.10) в формулу (9.8) и учитывая, что они отличны от нуля только при значении индексов суммирования $c = k$ и $d = l$, находим:

$$U = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2. \quad (9.11)$$

Работу внешних сил при изгибе пластинки под действием поперечной нагрузки можно подсчитать по формуле (2), пренебрегая объемными силами, а из составляющих поверхностных сил отлична от нуля только одна $-p_v = q$. Подставляя это выражение в формулу (2) и выбирая элемент поверхности ds в виде прямоугольника со сторонами dx и dy , получаем работу внешних сил при изгибе пластинки:

$$A = \int_0^a \int_0^b q u_z dx dy = q \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} dy.$$

Интегрируя, получаем (четные индексы дадут значения коэффициентов $a_{kl} = 0$):

$$A = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{a_{kl}}{kl} \quad (9.12)$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n).$$

Подставив соотношения (9.11) и (9.12) в формулу (9.1), сохраняя в том и другом ряду только члены, содержащие нечетные индексы k и l :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \sum_k \sum_l \left[\frac{\pi^4 Dab}{8} a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \cdot \frac{a_{kl}}{kl} \right] \\ (k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n). \end{aligned}$$

Коэффициенты a_{kl} нужно выбирать так, чтобы потенциальная энергия системы имела минимум, а значит, должны выполняться условия (9.5). Применительно к пластинкам оно в данном случае примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{mn}}{\partial a_{kl}} = 0 \quad (9.13)$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n).$$

Вычисляя производные полученной функции \mathcal{E} по a_{kl} и приравнивая их нулю, находим:

$$\Theta = \sum_k \sum_l \left[\frac{\pi^4 Dab}{8} 2a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \cdot \frac{1}{kl} \right] \quad (9.14)$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n).$$

После деления соотношения (9.14) на величину ab получаем следующую систему уравнений для определения постоянных a_{kl} :

$$\frac{\pi^4 D}{4} a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4q}{\pi^2 kl} = 0$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n),$$

откуда находим значения постоянных коэффициентов ряда (n):

$$a_{kl} = \frac{16q}{\pi^6 Dkl} \frac{1}{\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2}$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n).$$

Если ограничиться одним членом ряда, то в итоге получим

$$a_{11} = \frac{16q}{\pi^6 D} \frac{a^4}{\left(1 + a^2/b^2 \right)^2}.$$

Подставим значение коэффициентов a_{kl} в уравнение прогибов (p) и вынесем за знак суммы постоянный множитель a^4

$$u_z = \frac{16qa^4}{\pi^4 D} \sum_k \sum_l \frac{\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}}{kl \left(k^2 + \frac{a^2}{b^2} l^2 \right)^2} \quad (9.15)$$

$$(k=1, 3, 5, \dots, m; l=1, 3, 5, \dots, n).$$

Если в формуле (9.15) взять бесконечно большое число членов, т. е. положить $m = n = \infty$, то получим решение задачи, совпадающее с точным [3, 4].

Возьмем приближенное решение, ограничиваясь одним членом ряда. Тогда из формулы (9.14) получим

$$u_{z11} = \frac{16 qa}{\pi^6 D} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}. \quad (9.16)$$

Максимальный прогиб срединной плоскости возникает в центре пластинки при $x = a/2$ $y=b/2$, где он равен

$$\max u_{z11} = \frac{16 qa^4}{\pi^6 D} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

В случае квадратной пластинки, когда $a/b = 1$, максимальный прогиб равен

$$\max u_{z11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 D}.$$

Подставляя в это соотношение выражение цилиндрической жесткости $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ и принимая коэффициент Пуассона

$\mu=0,3$, находим:

$$\max u_{z11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 Eh^3} 12(1-\mu^2) = 0,0455 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Это приближенное отличается от точного, равного

$$\max w = 0,0443 \frac{qa^4}{Eh^3}, \text{ всего на } 2,7 \text{ \%}.$$

Погонные изгибающие моменты найдем по формулам (7.9). Подставляя в эти формулы функцию прогибов в первом приближении (9.16), получаем:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{1 + \mu \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2} + \mu}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при $x = a/2$ и $y = b/2$, где они равны

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{1 + \mu \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2},$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2} + \mu}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

В случае квадратной пластинки, т. е. при отношении сторон $a/b = 1$, находим

$$\max M_x = \max M_y = \frac{4qa^2}{\pi^4} (1 + \mu) = 0,0535qa^2.$$

Точное значение максимальных изгибающих моментов для квадратной пластинки, приводимое в справочниках, равно:

$$\max M = 0,0479qa^2.$$

Следовательно, максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки, подсчитанный в первом приближении, отличается

от точного значения на 11, 7 %. Поэтому при вычислении изгибающих моментов в рассматриваемой пластинке следует брать еще несколько членов ряда (9.15). Еще менее точный результат получается при вычислении в первом приближении погонных поперечных сил.

9.3. Метод Бубнова-Галеркина

9.3.1. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина

Если в вариационном уравнении (9.6) вместо вариаций перемещений $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ подставить выражения

$$\delta u_x = \sum_k \delta a_k \varphi_k(x, y, z); \quad \delta u_y = \sum_k \delta b_k \psi_k(x, y, z);$$

$$\delta u_z = \sum_k \delta c_k \chi_k(x, y, z)$$

и учесть, что вариации параметров $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$ произвольны и линейно независимы между собой, то в связи с этим каждый член, имеющий множители $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ уравнения (9.6), должен быть равен нулю. В результате получим систему из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s \left[(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xv}) \varphi_k(x, y, z) \right] ds = 0; \right. \\ & \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz - \\ & \left. - \iint_s \left(\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_{yv} \right) \psi_k(x, y, z) ds = 0; \right. \\ & \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz - \\ & \left. - \iint_s \left(\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zv} \right) \chi_k(x, y, z) ds = 0 \right. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Полученные уравнения и есть уравнения *обобщенного метода Бубнова – Галеркина*.

В основе этого метода, как и метода Рэлея – Ритца, лежит принцип возможных перемещений. Выражения для перемещений (9.6) при использовании обобщенного метода Бубнова – Галеркина могут, как и в методе Рэлея – Ритца, не удовлетворять силовым граничным условиям: достаточно лишь выполнение кинематических граничных условий на части поверхности s .

Таким образом, обобщенный метод Бубнова – Галеркина и метод Рэлея-Ритца являются двумя различными формами записи принципа возможных перемещений. Их использование приводит к одной и той же системе разрешающих уравнений для определения неизвестных параметров a_k, b_k, c_k в выражении (9.6). И все же в вычислительном отношении обобщенный метод Бубнова – Галеркина проще, поскольку позволяет сразу выписать систему разрешающих уравнений без вычисления потенциальной энергии.

Процедура применения обобщенного метода Бубнова – Галеркина для решения задач теории упругости на базе использования уравнений (9.17) состоит в следующем. Сначала задаемся компонентами перемещений u_x, u_y, u_z в форме рядов (9.6). Используя далее кинематические соотношения между перемещениями u_x, u_y, u_z и деформациями (формулы Коши), определяем компоненты деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Подставляя найденные значения компонентов деформации в закон Гука (или принятый физический закон связи между компонентами деформаций и компонентами напряжений), получаем выражения для компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ в каждой точке тела как некоторые сложные функции неизвестных параметров a_k, b_k, c_k .

Подставляя теперь найденные выражения для компонентов напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ непосредственно в уравнения

метода (9.16) и выполняя все необходимые операции (дифференцирование и интегрирование по объему и части поверхности тела), находим необходимое число алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k .

Для линейной задачи, т.е. когда материал тела подчиняется закону Гука и используются соотношения линейной теории упругости, эта система уравнений линейна.

9.3.2. Применение метода Бубнова – Галеркина

Если выбранные выражения для перемещений наряду с кинематическими граничными условиями удовлетворяют также и силовым условиям (7.9), то в уравнениях (9.17) поверхностные интегралы исчезают и они принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \right. \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \\ \left. \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz = 0 \right\} \quad (9.18) \end{aligned}$$

$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$

Приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании зависимостей вида (9.18), предложили в 1913 г. И.Г. Бубнов в своем отзыве на одну из работ С.П. Тимошенко и независимо от И.Г. Бубнова в 1915 г. Б.Г. Галеркин.

Уравнения (9.18) принято называть *уравнениями метода Бубнова – Галеркина* [8]. Они получены из принципа возможных перемещений, в силу чего может показаться, что этот метод применим лишь для краевых задач, связанных с некоторой вариационной проблемой.

Можно показать, что указанный метод применим для приближенного решения дифференциальных уравнений, не обязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой [11].

Пусть рассматриваемая краевая задача описывается дифференциальным уравнением $2m$ -го порядка (в некотором объеме V)

$$L^{(2m)}[u_z(x, y, z)] - q(x, y, z) = 0 \quad (9.19)$$

при граничных условиях (на некоторой поверхности S)

$$Q_i[u_z(x, y, z)] = f_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9.20)$$

где $L^{(2m)}$ и Q_i – заданные дифференциальные операторы; $q(x, y, z)$ и $f_i(x, y, z)$ – заданные функции⁵.

Пусть при приближенном решении дифференциального уравнения (9.18) запишем выражение для $u_z(x, y, z)$ в форме суммы

$$u_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x, y, z). \quad (9.21)$$

Систему линейно независимых функций $\Phi_i(x, y, z)$ выберем так, чтобы все граничные условия (9.20) тождественно выполнялись. Параметры a_i подлежат определению.

Дальнейшее решение основано на свойстве ортогональности функций. В курсе математического анализа дается следующее определение ортогональности функций: если имеется семейство непрерывных функций

$$\Psi_0(x), \Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_k(x), \dots, \Psi_n(x) \quad (a)$$

и интеграл от произведения любых двух различных функций этого семейства в промежутке $[a, b]$ равен нулю

$$\int_a^b \Psi_k(x) \Psi_i(x) dx = 0, \quad (9.22)$$

⁵ В качестве уравнения (9.19) можно представить, например, уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 36).

то функции (а) образуют в промежутке $[a, b]$ ортогональную систему.

Например, семейство тригонометрических функций

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (б)$$

является ортогональной системой в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

Действительно, интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lxdx &= 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lxdx &= 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lxdx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

удовлетворяют условию (9.22).

Это исчерпывает все возможные варианты комбинирования двух различных функций семейства (б) и доказывает, что оно образует ортогональную систему в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

На основании леммы из курса математического анализа следует, что если одна из функций тождественно равна нулю, например $\psi_k(x) \equiv 0$, то она ортогональна ко всем без исключения функциям, так как условие (9.22) выполняется. В качестве примера такой функции можно привести уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 36).

Продифференцировав уравнение упругой балки дважды [8], получим:

$$\psi_k(x) = E I u_z^{IV} - q = 0. \quad (г)$$

Эта функция – тождественный нуль при любых значениях x и, следовательно,

$$\int_0^l (E I u_z^{IV} - q) \psi_i(x) dx \equiv 0. \quad (9.23)$$

Здесь интеграл берется вдоль всей длины балки l , а значит, функция (z) ортогональна в промежутке $[0, l]$ к любой функции.

Если функцию $u_z(x)$ заменить ее приближенным значением в форме ряда (9.20) $u_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y, z)$, то функция (z) уже не

будет тождественно равна нулю, а значит, и не будет ортогональна в промежутке (вдоль прямой) $[0, l]$ к любой функции ряда (9.21).

Можно потребовать, чтобы полученная функция была ортогональна хотя бы к ограниченному классу функций, например, φ_i , составляющих ряд (9.20), т. е. чтобы

$$\int_0^l (E l u_z^{IV} - q) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (9.24)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

В результате получаем N линейных уравнений для определения постоянных параметров a_i , входящих в ряд (9.21).

На использовании системы уравнений (9.24) для определения постоянных параметров a_i основан метод Бубнова – Галеркина.

Решение (9.23) можно трактовать по-другому с точки зрения начала возможных перемещений. Действительно уравнение (9.23) можно расписать в таком виде:

$$\int_0^l E l u_z^{IV} \psi_i(x) dx - \int_0^l q(x) \psi_i(x) dx \equiv 0.$$

Полученное равенство можно трактовать как интегральное условие равенства нулю работ внутренних $\int_0^l E l u_z^{IV} \psi_i(x) dx$ и

внешних $\int_0^l q(x) \psi_i(x) dx$ сил (и моментов) на соответствующих

возможных перемещениях. С этой точки зрения равенство (9.23) не будет удовлетворено в виду приближенного выбора функции для u_z . Условие же равенства нулю работ суммы работ внутренних

и внешних нагрузок на возможных перемещениях можно записать в виде

$$\int_0^l (EIu_z^{IV} - q)\delta a_i \varphi_i(x) dx = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Так как δa_i – произвольная вариация и не равна нулю, то, вынося ее из-под знака интеграла, получим решение (9.24).

Покажем использование метода Бубнова – Галеркина в задаче об изгибе балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертой по краям (см. рис. 36). Уравнение упругой линии оси балки при изгибе имеет вид

$$EI \frac{d^4 u_z}{dx^4} - q = 0.$$

Граничные условия задачи при $x = 0$, $x = l$, прогибы и изгибающие моменты отсутствуют $u_z = 0$, $d^2 u_z / dx^2 = 0$. В качестве аппроксимирующей функции прогиба балки, как и прежде, примем $u_z = a \sin(\pi x / l)$.

Так как $\frac{d^4 u_z}{dx^4} = a \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l}$, то, используя процедуру (9.24) ($i=1$), получим:

$$\int_0^l \left(EIa \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} - q \right) dx = 0.$$

После интегрирования получим

$$EIa \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2} - q \frac{2l}{\pi} = 0.$$

$$\text{Откуда } a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Таким образом, получен тот же результат, что и ранее при решении этой задачи методом Рэлея – Ритца.

Все рассуждения, приведенные для функции одного аргумента, можно применить и к функции двух и более аргументов. В качестве примера такой задачи рассмотрим изгиб прямоугольной в плане пластинки, свободно опертой всеми четырьмя кромками. Будем полагать, что пластинка нагружена равномерно распределенным поперечным давлением $q = q_0$. Размеры пластинки в направлении осей x и y равны соответственно a и b .

Дифференциальное уравнение срединной поверхности при изгибе имеет вид

$$D\nabla^4 u_z - q = 0.$$

Для двумерной задачи уравнение метода Бубнова – Галеркина примет вид

$$\iint_{00}^{ab} (D\nabla^4 u_z - q) \delta u_z dx dy = 0. \quad (9.25)$$

В первом приближении для прогиба пластинки примем выражение $u_z = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

Тогда

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u_z &= D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2 \partial^2 y} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = \\ &= D a_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

$$\text{а } \delta u_z = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Так как a_{11} – неопределенный параметр, δa_{11} – произвольная вариация этого параметра, то, используя метод Бубнова – Галеркина, получим:

$$\int_0^a \int_0^b \left[Da_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0 \right] \times$$

$$\times \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0. \quad (9.26)$$

После интегрирования (9.26) получим

$$Da_{11} \frac{\pi^4 ab}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - q_0 \frac{4ab}{\pi^2} = 0$$

или

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D \left(1 + a^2/b^2 \right)^2}. \quad (9.27)$$

В результате решения задачи методом Бубнова – Галеркина мы получили ту же величину для параметра a_{11} , что и ранее при решении задачи методом Рэля – Ритца.

Рассмотрим решение этой же задачи во втором приближении. Пусть

$$u_z = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}.$$

При этом

$$D\nabla^4 u_z - q_0 = D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q_0 \right] = X, \quad (9.28)$$

$$\delta u_z = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (9.29)$$

Подставляя (9.28) и (9.29) в (9.25), имеем:

$$\int_0^a \int_0^b X \left(\delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) dx dy = 0.$$

Учитывая, что a_{11} и a_{13} являются независимыми варьируемыми параметрами, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy &= 0. \end{aligned} \tag{9.30}$$

После интегрирования (9.30) получим следующие выражения:

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2}, \quad a_{13} = \frac{16q_0 a^4}{3\pi^6 D (1 + 9a^2/b^2)^2}.$$

Нетрудно заметить, что если в решении (n) Рэлея – Ритца взять только два члена ряда a_{11} и a_{13} , то их значения совпадают с полученным.

В задачах строительной механики и теории упругости дифференциальные уравнения, которые подлежат интегрированию, часто представляют собой уравнения равновесия. Так было, например, в рассмотренных выше задачах, где методом Бубнова – Галеркина интегрировались дифференциальные уравнения упругой оси стержня и упругой срединной поверхности пластинки при поперечном изгибе. Эти уравнения (9.24) и (9.25) являются уравнениями равновесия элемента стержня и элемента пластинки соответственно. При этом вариация искомой функции δu_z представляет собой возможное перемещение, а уравнение (9.26) может трактоваться как вариационное уравнение Лагранжа при условии, что массовые силы отсутствуют, а работа поверхностных сил на возможных перемещениях равна нулю. Для того чтобы работа поверхностных сил на возможных перемещениях была равна нулю, необходимо, чтобы функции, аппроксимирующие перемещения точек тела, удовлетворяли не только геометрическим, но и статическим граничным условиям.

В рассмотренных нами примерах решения задачи методами Рэлея – Ритца и Бубнова – Галеркина используются одни и те же аппроксимирующие функции прогиба, причем эти функции удовлетворяют всем геометрическим (по краям пластинки при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ – перемещения $u_z = 0$), а также статическим (при $x = 0$, $x = a - \partial^2 u_z / \partial x^2 = 0$, а при $y = 0$, $y = b - \partial^2 u_z / \partial y^2 = 0$) условиям задачи.

Поскольку и в том и в другом методе уравнение решаемой задачи в конечном счете сводится к одному и тому же вариационному уравнению Лагранжа, то, естественно, что при одинаковых аппроксимирующих прогиб функций u_z результаты решения задач методом Рэлея – Ритца и Бубнова – Галеркина будут совпадать.

В большинстве случаев использование метода Бубнова – Галеркина при решении такого рода задач приводит к менее громоздким выкладкам, чем применение метода Рэлея – Ритца. Однако следует помнить, что в случае применения метода Бубнова – Галеркина в той форме, которая была нами рассмотрена, функция u_z обязательно должна удовлетворять как геометрическим, так и статическим граничным условиям.

В случае изгиба гибких пластин их поведение описывается двумя уравнениями – совместности деформаций и равновесия, из которых получено уравнение Софи Жермен. При этом возможно применение метода Бубнова – Галеркина либо по способу П.Ф. Папковича, либо по способу В.З. Власова.

В первом случае задаются только видом аппроксимирующей функции прогиба u_z , удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, а функцию напряжений ϕ определяют интегрированием дифференциального уравнения Софи Жермен (совместности деформаций). Затем найденную функцию ϕ и выбранную функцию u_z подставляют в уравнение равновесия и к нему уже применяют процедуру Бубнова – Галеркина, которая была описана выше.

Во втором случае (при решении задачи по способу В.З. Власова) необходимо задаваться видом обеих функций u_z и φ , подставлять их в уравнения Софи Жермен и применять процедуру Бубнова – Галеркина к обоим уравнениям. Функции φ и u_z должны обязательно удовлетворять всем геометрическим и статическим условиям задачи. Не останавливаясь на вопросе о сходимости процесса, отметим, что при определенных условиях ряды, которыми аппроксимируются функции u_z и φ , сходятся к истинному решению задачи при безграничном увеличении числа членов ряда.

9.4. Метод Канторовича – Власова

В 1933 г. Л.В. Канторовичем предложен метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла, который позволяет свести двумерную задачу к задаче одномерной. Позже в 1946 г. В.З. Власовым идея метода Л.В. Канторовича применена к решению задач строительной механики пластин и оболочек. Для сведения двумерной задачи изгиба пластин и оболочек к одномерной функция прогиба представляется в виде суммы произведений функций, одна из которых по одной переменной считается известной (задается), а другая (по другой переменной) подлежит определению.

Уравнения равновесия для пластин получены им из вариационного уравнения Лагранжа – начала возможных перемещений.

Таким образом, в отличие от метода Бубнова – Галеркина, при котором интегрирование дифференциального уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений, по методу Канторовича – Власова интегрирование дифференциального уравнения в частных производных заменяется интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если задача линейная, то получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примерах решения задач изгиба жестких пластин сущность метода Канторовича – Власова и его отличие от метода Бубнова – Галеркина.

Представим прогиб пластинки u_z в виде ряда

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} Y_m(y) \Phi_m(x), \quad (9.31)$$

где $\Phi_m(x)$ – известные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям на кромках пластинки при $x = 0$ и $x = a$. В качестве функции $\Phi(x)$ В.З. Власов предлагает принимать так называемые балочные функции, т. е. формы собственных колебаний балки при тех же граничных условиях, что и у пластинки.

Например, если пластинка на кромках ($x = 0$ и $x = a$) свободно оперта, то в качестве функций $\Phi_m(x)$ следует брать выражение $\sin \frac{m\pi x}{a}$. Тогда распределенную по поверхности пластинки нагрузку $q(x, y)$ также можно представить в виде ряда

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (9.32)$$

Если далее применить процедуру Бубнова – Галеркина к уравнениям равновесия пластинки, т. е.

$$\int_0^a \left[D \nabla^4 u_z - q(x, y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0,$$

так как

$$D \nabla^4 u_z - q(x, y) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

то после интегрирования и сокращения получим

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \left[Y_m^{\text{IV}}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) = 0. \quad (9.33)$$

Поскольку функции $Y_m(y)$ являются линейно независимыми, то из (32) следует

$$Y_m^{\text{IV}}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) = \frac{q_m(y)}{D}. \quad (9.34)$$

В рассмотренном нами примере оказалось, что в результате применения метода Власова мы получили уравнение (9.34), совпадающее с тем, которое было получено ранее по методу М. Леви. Это объясняется тем, что пример относится к случаю, когда две стороны пластинки свободно оперты. Именно в этом случае функция $\varphi(x)$ может быть представлена рядом синусов. При других случаях опирания пластинки, когда метод М. Леви не может быть применен, можно использовать для решения задачи метод Власова.

Рассмотрим, например, случай изгиба квадратной пластинки, защемленной по контуру, равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q(x,y) = q_0$ (рис. 37). Представим прогиб срединной плоскости в виде

$$u_z = Y(y)\varphi(x), \quad (9.35)$$

где $\varphi(x) = 1 - \cos \frac{2\pi x}{a}$.

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям: при $x = 0$ и $x = a$ $u_z = 0$, $\partial u_z / \partial x = 0$. Если подставить функцию $\varphi(x)$ в уравнение Софи Жермен, то получим

$$\begin{aligned}
 X &= D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) - q_0 = \\
 &= D \left[Y^{IV}(y) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + 2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 Y''(y) \cos \frac{2\pi x}{a} - \right. \\
 &\quad \left. - Y(y) \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \right] - q_0.
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

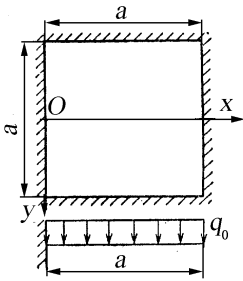


Рис. 37. Квадратная пластинка с жестко закрепленными краями

Применяя процедуру Бубнова – Галеркина к уравнению (9.36), получим:

$$\int_0^a X \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx = 0. \tag{9.37}$$

Подставляя вместо X выражение (9.36) и производя интегрирование, получим следующее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y^{IV}(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 Y''(y) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \tag{9.38}$$

Введем обозначение $k^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2$. Тогда (9.38) можно записать в виде

$$Y^{IV}(y) - 2k^2 Y''(y) + 3k^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \tag{9.39}$$

Корни характеристического уравнения r_i ($i=1, 2, 3, 4$) оказываются комплексными

$$r_{1,2} = \pm(1,355 \frac{\pi}{a} + 0,698 \frac{\pi}{a} i),$$

$$r_{3,4} = \pm(1,355 \frac{\pi}{a} - 0,698 \frac{\pi}{a} i).$$

Общее решение уравнения (9.39) запишем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} Y(y) = & C_1 \operatorname{ch}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \cos(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \\ & + C_2 \operatorname{ch}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \sin(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \\ & + C_3 \operatorname{sh}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \cos(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \\ & + C_4 \operatorname{sh}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \sin(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Примем во внимание то, что в силу симметрии рассматриваемой задачи функция $Y(y)$ должна быть симметричной. Тогда из (9.39) следует, что $C_2 = C_3 = 0$, и для $Y(y)$ получим выражение

$$\begin{aligned} Y(y) = & C_1 \operatorname{ch}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \cos(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \\ & + C_4 \operatorname{sh}(1,355 \frac{\pi y}{a}) \sin(0,698 \frac{\pi y}{a}) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Постоянные C_1 и C_4 найдем из граничных условий.

При $y = a/2$ $Y(y) = 0$ и $Y'(y) = 0$. Для C_1 и C_4 получим следующие значения:

$$C_1 = -0,501 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}, \quad C_4 = -0,0057 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}.$$

Подставляя найденные выражения для C_1 и C_4 в (9.40) и принимая во внимание (9.35), получим следующее выражение для функции прогибов u_z :

$$u_z = \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D} \left[1 - 0,501 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) - \right. \\ \left. - 0,0057 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) \right] \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (9.42)$$

Максимальный прогиб в центре квадратной пластинки при $x = a/2$ и $y = 0$ оказывается равным $u_{z \max} = 0,00128 q_0 a^4 / D$, что отличается от точного значения менее чем на 2 %.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под прямыми вариационными методами?
2. В чем суть метода Рэлея – Ритца?
3. Какие требования предъявляются к аппроксимирующим функциям для перемещений в методе Рэлея – Ритца?
4. В чем приближенность метода Рэлея – Ритца?
5. В чем заключается идея метода Бубнова – Галеркина?
6. Удовлетворяются ли уравнения равновесия при использовании метода Бубнова – Галеркина?
7. Какие требования к выбору аппроксимирующих функций для перемещений предъявляются при применении метода Бубнова – Галеркина?
8. Чем отличается метод Канторовича – Власова от метода Бубнова – Галеркина?
9. К каким уравнениям сводится решение задачи при применении метода Канторовича – Власова?

ГЛАВА 10. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

10.1. Основные соотношения теории упругости в матричной форме

10.1.1. Пространственная задача

В основе любого метода расчета на прочность, в том числе метода конечных элементов (МКЭ), лежат уравнения теории упругости. Так как при применении МКЭ используются матричные методы, представим основные соотношения теории упругости, которые используются при определении напряженно-деформированного состояния, в матричной форме, используя выводы, полученные в работе [1].

Статические соотношения. Как известно [1], к статическим соотношениям относятся дифференциальные равновесия (уравнения Навье)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

и формулы для напряжений в наклонных площадках

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Здесь $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ – компоненты напряжений в площадке, перпендикулярной оси x ; $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}$ – компоненты напряжений в площадке, перпендикулярной оси y ; $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ – компоненты напря-

жений в площадке, перпендикулярной оси z ; l, m, n – косинусы углов между внешней нормалью к наклонной площадке и координатными осями x, y, z ; p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} – проекции полного напряжения в наклонной площадке на координатные оси x, y, z .

Если наклонная площадка совпадает с граничной поверхностью с нормалью v , то p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} можно рассматривать как составляющие вектора поверхностной нагрузки.

Напомним, что равенства (10.2) устанавливают связь между поверхностными силами и компонентами напряжений вблизи поверхности тела, другими словами, выражает так называемые статические граничные условия.

Введем следующие матрицы-столбцы:

$$\begin{aligned} \{\sigma_x\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; & \{\sigma_y\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}; & \{\sigma_z\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}; \\ \{R\} &= \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \end{Bmatrix}; & \{p\} &= \begin{Bmatrix} p_{xv} \\ p_{yv} \\ p_{zv} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{a}$$

Тогда с учетом (a) равенства (10.1) и (10.2) могут быть представлены матричными соотношениями [1]

$$\frac{\partial \{\sigma_x\}}{\partial x} + \frac{\partial \{\sigma_y\}}{\partial y} + \frac{\partial \{\sigma_z\}}{\partial z} + \{R\} = 0; \tag{10.3}$$

$$\{p\} = \{\sigma_x\}l + \{\sigma_y\}m + \{\sigma_z\}n. \tag{10.4}$$

В правильности полученных соотношений (10.3) и (10.4) можно убедиться, если использовать операции дифференцирования и сложения матриц.

Геометрические соотношения (формулы Коши). Они устанавливают связь между компонентами деформации и перемеще-

ний. Если деформации и перемещения малы, то между ними имеет место линейная зависимость, выражаемая уравнениями Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$; u_x, u_y, u_z – относительные линейные деформации и перемещения в направлении осей x, y, z соответственно; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – относительные угловые деформации между соответствующими направлениями (по направлению координатных осей x, y, z).

Соотношения (10.5) можно представить одним матричным равенством

$$\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\}, \quad (10.6)$$

где $\{\varepsilon\} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{vmatrix}; \quad \{L\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \{u\} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix}. \quad (б)$

Через $\{L\}$ в (10.6) обозначен матричный дифференциальный оператор. Соответственно $\{\varepsilon\}$ и $\{u\}$ – матрицы-столбцы относительных деформаций и перемещений.

Как известно [12, 13, 14, 15], компоненты матрицы $\{\varepsilon\}$ связаны между собой шестью дифференциальными соотношениями, которые называются условиями совместности (или неразрывности) деформаций Сен-Венана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Физические соотношения. Сюда относятся соотношения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями. В пределах упругости эта связь выражается законом Гука, согласно которому компоненты деформации являются линейными функциями компонент напряжения. Для изотропного тела закон Гука имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

где E – модуль упругости материала; G – модуль сдвига; μ – коэффициент Пуассона; упругие постоянные материала E , G и μ связаны между собой равенством $E = 2(1 + \mu)G$.

Введем матрицу-столбец напряжений $\{\sigma\}$ (для экономии места используем строчечную запись, как мы условились)

$$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{vmatrix},$$

а также значения матрицы-столбца относительных деформаций $\{\varepsilon\}$, запишем (10.7) в форме одного матричного равенства

$$\{\varepsilon\} = \{\Phi\}\{\sigma\}, \quad (10.8)$$

где

$$\{\Phi\} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix}. \quad (10.9)$$

Матрицу $\{\Phi\}$ обычно называют матрицей упругих постоянных, или матрицей упругости.

Закон Гука можно представить в так называемой форме Ляме (обратная форма закона Гука)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}; \quad (10.11)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Константы λ и G называются упругими постоянными Ляме.

В матричной форме соотношение (10.10) имеет вид

$$\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\varepsilon\}, \quad (10.12)$$

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{vmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Очевидно, что матрица $\{\kappa\}$ является обратной матрице $\{\Phi\}$ и также является матрицей упругих коэффициентов

$$\{\kappa\} = \{\Phi\}^{-1}.$$

Как было доказано ранее [1], совокупность дифференциальных уравнений равновесия (10.3), геометрических (10.6) и физических ((10.8) или (10.12)) соотношений образует систему из 15 уравнений, в которые входят 6 компонент напряжения, 6 компонент деформации и 3 компоненты перемещения. Таким образом, получается замкнутая система уравнений.

Соотношения (10.6) выступают в качестве статических граничных условий.

10.1.2. Плоская задача

Существует широкий класс важных в практическом отношении задач, в которых перемещения, деформации и напряжения зависят лишь от двух координат – x и y . Этот класс задач под общим названием «плоская задача теории упругости» подразделяется на плоскую деформацию и обобщенное напряженное состояние [1, 13].

Если в процессе нагружения все точки тела перемещаются только параллельно одной плоскости (например плоскости xOy),

то соответствующее деформированное состояние называется *плоской деформацией*. Таким образом, для плоской деформации имеем $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$, $u_z = 0$. В соответствии с уравнениями Коши (10.5), деформации ε_z , γ_{yz} , γ_{zx} оказываются равными нулю, а из закона Гука (10.10) вытекает, что касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} также равны нулю. Остальные компоненты деформации и напряжения являются функциями только координат x и y .

Если же тонкая пластинка, параллельная плоскости xOy , нагружена объемными и поверхностными (только по контуру) силами, параллельными ее плоскости и равномерно распределенными по толщине, то такое напряженное состояние называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

В этом случае можно пренебречь компонентами напряжения σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} , а σ_x , σ_y , τ_{xy} считать постоянными по толщине

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

Из закона Гука (10.7) имеем, что при обобщенном плоском напряженном состоянии деформации сдвига $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, а остальные компоненты деформации представляются как функции только координат x и y .

Выпишем основные уравнения теории упругости применительно к плоской задаче. Из трех дифференциальных уравнений равновесия (10.1) остаются два; в матричной записи они имеют вид

$$\frac{\partial \{\sigma_x\}}{\partial x} + \frac{\partial \{\sigma_y\}}{\partial y} + \{R\} = 0, \quad (10.14)$$

$$\text{где } \{\sigma_x\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma_y\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}.$$

Для напряжений в наклонных площадках из (10.2) имеем

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Матричная форма статических граничных условий будет

$$\{p\} = \{\sigma_x\}l + \{\sigma_y\}m, \quad (10.16)$$

где $\{p\} = |p_{xv} \ p_{yv}|$.

Из уравнений Коши (10.5) остаются только три соотношения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (10.17)$$

Обозначив для плоской задачи

$$\{\varepsilon\} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}; \quad \{L\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \{u\} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix}, \quad (10.18)$$

соотношения (10.17) с учетом (10.18) принимают как и (10.6) вид

$$\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\}.$$

Однако в этом случае значение матриц $\{\varepsilon\}$, $\{L\}$, $\{u\}$ берется из (10.18).

Из условия совместности деформаций (10.7) остается только одно соотношение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (10.19)$$

Закон Гука по-прежнему можно записать в форме (10.8)

$$\{\varepsilon\} = \{\Phi\}\{\sigma\} \text{ или в форме (12) } \{\sigma\} = \{\kappa\}\{\varepsilon\}, \text{ где } \{\sigma\} = |\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}|.$$

При этом для плоской задачи имеем

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{vmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{vmatrix}; \quad (10.20)$$

$$\{\Phi\} = \frac{1+\mu}{E} \begin{vmatrix} 1-\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad (10.21)$$

а для обобщенного плоского напряженного состояния

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix}; \quad (10.22)$$

$$\{\Phi\} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix}. \quad (10.23)$$

Как отмечалось ранее [1, 13], в случае плоской деформации нормальное напряжение σ_z отлично от нуля, но оно не имеет самостоятельного значения, поскольку выражается через σ_x и σ_y ,

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Точно так же в обобщенном плоском напряженном состоянии деформация ε_z может быть найдена через ε_x и ε_y ,

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Решение плоской задачи теории упругости удобно выполнять в напряжениях [1]. При постоянных объемных силах X и Y оно сводится к отысканию некоторой функции $\varphi(x,y)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Напряжения вычисляются через функцию $\varphi(x,y)$ посредством формул

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Кроме того, полученные решения должны быть удовлетворены еще граничным условиям (10.2) на боковой поверхности.

10.2. Основные понятия метода конечных элементов

10.2.1. Дискретизация тела

Метод конечных элементов является мощным современным средством приближенного решения разнообразных задач математической физики, ориентированным на эффективное использование ЭВМ. В задачах теории упругости он позволяет распространить принципы расчета стержневых систем на случай непрерывных тел и сложных конструкций. С другой стороны, его можно трактовать как специфическую форму метода Рэлея – Ритца, что дает ключ к теоретическому обоснованию метода конечных элементов.

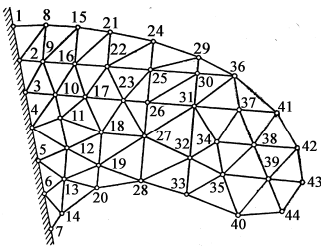


Рис. 38. Пример разбиения на элементы двумерного тела и нумерация узлов

Рассмотрим тело, которое нагружено произвольной нагрузкой. С помощью секущих плоскостей (или криволинейных поверхностей) разобьем его на отдельные части (рис. 38). Получаемые подобласти имеют хотя и малые, но все же конечные размеры, откуда и происходит их название «конечные элементы».

Таким образом, непрерывное тело представляется в виде совокупности конечных элементов, жесткостные свойства каждого из которых рассматриваются затем независимо от остальных. На границах между конечными элементами выбираются некоторые точки – узлы; перемещения узлов в направлении координатных осей (а иногда и производные от перемещений) принимаются в качестве основных неизвестных. Такое решение в строительной механике называют методом перемещений. Существует разновидность метода конечных элементов, в которой в качестве основных неизвестных принимают силы взаимодействия между элементами (метод сил); возможна также смешанная формулировка.

Поскольку за основные неизвестные принимаются узловые перемещения, то этот метод может быть легко реализован для стержневых систем. Для случая непрерывных (сплошных) тел возникает целый ряд затруднений, которые можно преодолеть лишь с помощью некоторых введенных гипотез.

Прежде всего встает вопрос о том, как найти перемещения (а следовательно, деформации и напряжения) внутри каждого конечного элемента, зная перемещения принадлежащих ему узлов. Для случая стержневых систем расчет может базироваться на использовании технической теории растяжения, изгиба и кручения бруса, которая позволяет выразить перемещения и напряжения в любом сечении бруса через узловые перемещения. Для сплошного тела эта задача может быть решена только приближенно, если сделать те или иные предположения о характере поля перемещений в элементе. Точнее, необходимо выбрать некоторые функции, которые смогли бы аппроксимировать поле перемещений внутри конечного элемента по известным узловым перемещениям. Выбор аппроксимирующих функций является одним из наиболее ответственных и важных этапов в методе конечных элементов. Заметим, что такая функция не может являться единственно возможной, так как это зависит также от погрешности вычисления, возможности вычис-

ления концентраторов напряжений и т. д.⁶. Если такой выбор сделан, то, как будет показано ниже, деформированное и напряженное состояние элемента будет однозначно определяться узловыми перемещениями. Поэтому под *конечным элементом* следует понимать не просто некоторую малую область тела, а область тела в совокупности с заданными в ней аппроксимирующими функциями.

Вторая трудность возникает при объединении конечных элементов в единую систему (для всего тела). Если бы мы рассчитывали стержневые конструкции, то объединение производилось бы путем составления уравнений равновесия для узловых точек, в которых конструктивные элементы соединяются друг с другом. В сплошном теле число точек соединения между узловыми точками бесконечно. Поэтому, задаваясь распределением перемещений внутри каждого конечного элемента, тем самым задаем и распределение напряжений во всех его точках, в том числе и в узловых. Однако на границах раздела смежных элементов напряжения, найденные для каждого из них независимо, не будут совпадать. Следовательно, не будет обеспечено выполнение условий равновесия на всей поверхности раздела конечных элементов.

Чтобы обойти возникшее затруднение, можно напряжения, действующие по границе каждого элемента, условно заменить эквивалентными сосредоточенными узловыми силами; тогда уравнения равновесия узловых сил в направлении узловых перемещений (или координатных осей) могут быть составлены обычным образом (как равенство нулю суммы проекций узловых сил на выбранное направление).

При этом для каждого элемента *эквивалентные узловые силы определяются из условия: производимая ими на узловых перемещени-*

⁶ В работе [16] только для 9 различных типов конечных элементов приводится свыше 20 аппроксимирующих функций.

ях работа должна равняться работе действительных напряжений на перемещениях точек граничной поверхности элемента.

Еще одна трудность связана с нагружением упругого тела распределенными поверхностными и объемными силами. Эти силы могут быть учтены также заменой их на эквивалентные узловые силы, если их работа на действительных перемещениях будет равна работе узловых сил на соответствующих узловых перемещениях.

После введения указанных упрощений тело можно рассматривать как дискретную систему, т. е. как совокупность элементов, соединенных между собой в узловых точках. Разбиение конструкции на подобласти и выбор аппроксимирующих функций для каждой из них можно осуществить различными способами. При этом должны быть учтены особенности геометрии тела и обеспечена хорошая аппроксимация перемещений, деформаций и напряжений для всего тела в целом. В этом случае решение, полученное по методу конечных элементов, будет в пределе (при уменьшении размеров элементов) стремиться к точному.

10.2.2. Типы конечных элементов

При решении задачи методом конечных элементов используются конечные элементы различных типов.

Простейшим среди элементов является одномерный элемент. Схематически он обычно изображается в виде отрезка (рис. 39, а), хотя и имеет поперечное сечение. Площадь поперечного сечения может изменяться по длине, но во многих встречающихся задачах она считается постоянной.

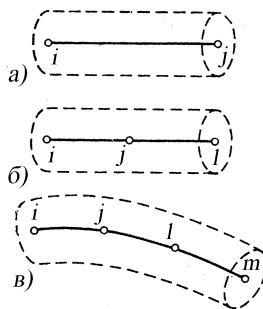


Рис. 39. Одномерные конечные элементы: а – линейный двухузловой; б – квадратичный трехузловой; в – кубический четырехузловой

Наиболее часто такой элемент используется в одномерных задачах распространения тепла и в задачах строительной механики при расчете стержневых систем.

Простейший одномерный элемент имеет два узла, по одному на каждом конце. Элементы более высокого порядка, трехузловые (квадратичные) и четырехузловые (кубические)⁷ изображены на рис. 39, б и в. Одномерный элемент может быть криволинейным (рис. 39, в) при условии, что длина дуги входит в уравнения, определяющие элементы.

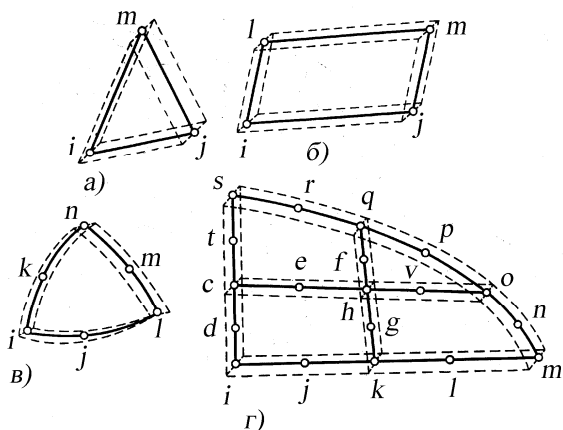


Рис. 40. Некоторые двумерные конечные элементы: а – треугольный, 3 узла; б – прямоугольный, 4 узла; в – криволинейный треугольный, 6 узлов; г – сочетание элементов

При построении дискретной модели двумерной области (например плоской задачи теории упругости) используются два основных семейства элементов: треугольники и четырехугольники. Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии (рис. 40, а). Квадратичные и кубические элементы

⁷ Как будет показано ниже, название конечных элементов (квадратичное или кубическое) определяется видом аппроксимирующей функции.

могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные стороны или те и другие. Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если только они имеют одинаковое число узлов на стороне (см. рис. 40, *в*). Толщина элемента может быть или постоянной, или являться функцией координат.

Наиболее часто встречающимися трехмерными элементами являются тетраэдр и параллелепипед (рис. 41). В обоих случаях линейные элементы ограничены прямолинейными сторонами (плоскостями), тогда как элементы более высокого порядка могут иметь в качестве границ криволинейные поверхности. При разбиении трехмерного тела трудно наглядно представить расположение элементов в дискретной модели, поэтому более желательным из этих двух типов элементов является параллелепипед.

На рис. 42 показан другой вид элементов, которые используются при рассмотрении осесимметричных тел. Эти элементы подобны двумерному треугольнику и позволяют учесть изменение напряжений или деформаций вдоль третьей координаты.

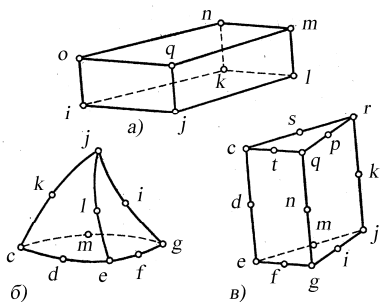


Рис. 41. Некоторые трехмерные конечные элементы: а – параллелепипед, 8 узлов; б – тетраэдр, 10 узлов; в – пентаэдр, 15 узлов

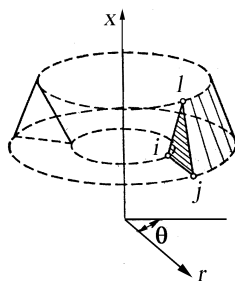


Рис. 42. Осесимметричный конечный элемент (треугольной линейный кольцевого типа)

Действительно, в случае симметричной задачи, к которой сводится расчет, например, днища поршня бензинового двигателя, втулки и клапана, конечно-элементная модель образуется поворотом на 360° треугольника (см. рис. 42) или прямоугольника, являясь, таким образом, телом вращения. Важно подчеркнуть, что осесимметричные задачи относятся к классу двумерных, так как переменными являются только две координаты r и x , хотя аппроксимируемая область является пространственной.

После выбора в соответствии с классом задачи типа элемента производится разбиение тела на элементы и нумерация элементов и их узлов. На рис. 43 приведен пример разбивки меридионального сечения клапана на элементы треугольного типа. При разбиении тело сначала делится на зоны с каким-либо характерным признаком (особенностью геометрии, нагружения, свойствами материала и т. д.).

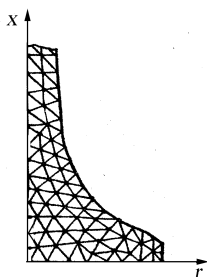


Рис. 43. Разбивка на конечные элементы треугольного типа меридионального сечения клапана

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковую форму и размеры, обычно не проводится, потому что при решении задач механики твердого тела необходимо учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты и т. п. Так, например, при расчете днища головки цилиндров потребуется более мелкая разбивка в районах межклапанных перемычек и отверстия под форсунку. Точно так же при расчете поршня потребуется более мелкая разбивка на конечные элементы в районе кольцевых канавок. Возможность варьировать размеры элемента – важное достоинство метода конечных элементов. Наиболее простой способ существенного изменения размеров элементов заключается в применении четырехугольных подобластей с неравным числом узлов на противоположных сторонах.

10.2.3. Перемещения, деформации и напряжения в конечном элементе

Рассмотрим типовой конечный элемент упругого тела, имеющий узлы i, j, \dots . Обозначим через v_i, v_j, \dots матрицы перемещений соответствующих узлов. Количество элементов в этих матрицах зависит от характера задачи. Так, в случае пространственной задачи матрица v_r обычно включает в себя три компоненты

$$\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{Bmatrix},$$

где v_{rx}, v_{ry}, v_{rz} – проекции перемещений узла r на координатные оси x, y, z (рис. 44).

В плоской задаче компонентами матрицы $\{v_r\}$ будут v_{rx}, v_{ry} . В некоторых конечных элементах матрицы $\{v_r\}$ содержат помимо линейных также и угловые перемещения или производные от перемещений. Все узловые перемещения элемента образуют матрицу-столбец⁸

$$\{v^e\} = \left[\{v_i\} \{v_j\} \dots \right].$$

Рассмотрим теперь произвольную точку внутри элемента. Перемещения этой точки в направлении координатных осей образуют матрицу-столбец, которую обозначим $\{u\}$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

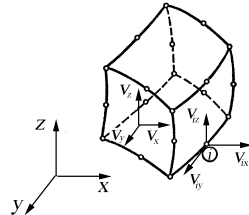


Рис. 44. Трехмерный 20-узловой конечный элемент в общей системе координат

⁸ В матрице $\{v^e\}$ индекс «e» означает, что данный параметр относится к единичному конечному элементу.

где u_x, u_y, u_z – смещение рассматриваемой точки в направлении осей x, y, z (см. рис. 44).

В плоской задаче матрица $\{u\}$ содержит два элемента. Подчеркнем, что компоненты матрицы $\{u\}$ представляют собой функции координат.

Как говорилось выше, в методе конечных элементов принимается допущение, согласно которому перемещения всех точек элемента однозначно определяются его узловыми перемещениями. В матричных обозначениях это означает существование равенства

$$\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\} \quad (10.24)$$

Здесь $\{\alpha\}$ – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы $\{u\}$, а количество столбцов – числу компонент матрицы $\{v^e\}$. Элементами матрицы $\{\alpha\}$ являются некоторые функции координат (аппроксимирующие функции). Выбор подходящих функций, как отмечалось ранее, представляет собой важный этап в методе конечных элементов. Для некоторых элементов этот вопрос будет рассмотрен ниже. На данном этапе изучения теоретических основ метода конечных элементов будем предполагать, что аппроксимирующие функции нам уже известны.

Воспользовавшись формулами Коши, можно выразить деформации в каждой точке конечного элемента через его узловые перемещения. По формуле (10.6) имеем $\{\varepsilon\} = \{L\} \{u\}$, что с учетом (10.24) дает $\{\varepsilon\} = \{L\} \{\alpha\} \{v^e\}$. Эту связь между $\{\varepsilon\}$ и $\{v^e\}$ будем записывать в виде

$$\{\varepsilon\} = \{\beta\} \{v^e\}, \quad (10.25)$$

где через $\{\beta\}$ обозначена прямоугольная матрица

$$\{\beta\} = \{L\} \{\alpha\}. \quad (10.26)$$

Число строк матрицы $\{\beta\}$ равно числу компонент матрицы $\{\varepsilon\}$.

В общем случае пространственного тела, когда матрица $\{u\}$ содержит три компонента u_x, u_y, u_z , из зависимости (10.24) следует, что матрицу $\{\alpha\}$ можно представить в виде

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \\ \{\alpha_z\} \end{Bmatrix}. \quad (10.27)$$

В этой записи $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – матрицы-строки, элементами которых являются известные аппроксимирующие функции. Матричный оператор $\{L\}$ дается в этом случае выражением

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \\ \{\alpha_z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial y + \{\partial\alpha_y\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial z \end{Bmatrix}. \quad (10.28)$$

В плоской задаче компонентами $\{u\}$ являются перемещения u_x, u_y , а матрица $\{\alpha\}$ имеет соответственно две строки

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix}. \quad (10.29)$$

Матрица $\{L\}$ в этом случае определяется выражением

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \end{Bmatrix}. \quad (10.30)$$

Воспользуемся далее законом Гука в так называемой форме Ляме (обратная форма закона Гука) $\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\epsilon\}$, где $\{\sigma\}$ – матрица-столбец напряжений; $\{\kappa\}$ – матрица упругих постоянных. Подставляя сюда соотношение $\{\epsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}$, имеем:

$$\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\beta\}\{v^e\} \quad (10.31)$$

Формулы (10.24), (10.25), (10.31) показывают, что при известной матрице аппроксимирующих функций $\{\alpha\}$ напряженное и деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется узловыми перемещениями $\{v^e\}$.

10.2.4. Матрица жесткости конечного элемента

Рассмотрим упругое равновесие деформированного конечного элемента. Внешними нагрузками для него являются напряжения, возникающие на его границе в результате взаимодействия со смежными элементами, объемные силы $\{R\}$ и, возможно, поверхностные нагрузки $\{p\}$ (если часть его поверхности совпадает с поверхностью, ограничивающей тело). Предположим, что узловые перемещения $\{v^e\}$ получили произвольные бесконечно малые приращения, определяемые матрицей

$$\{\delta v^e\} = \left| \{\delta v_i\} \{\delta v_j\} \dots \right|$$

Поскольку перемещения $\{u\}$ точек элемента связаны с узловыми перемещениями равенством $\{u\} = \{\alpha\}\{v^e\}$, то они получают приращения $\{\delta u\} = \{\alpha\}\{\delta v^e\}$. Работу внешних нагрузок на перемещениях $\{\delta u\}$ обозначим через δA^e , а изменение потенциальной энергии деформации конечного элемента – через δU^e . Согласно принципу возможных перемещений должно выполняться равенство $\delta U^e = \delta A^e$.

Заменим напряжения, определяемые (10.8) на поверхности элемента эквивалентными им сосредоточенными узловыми силами, действующими в направлении узловых перемещений:

$$\{P^e\} = \left| \{P_i^e\} \{P_j^e\} \dots \right|$$

где $\left| \{P_i^e\} \{P_j^e\} \dots \right|$ – матрицы сил для узлов i, j, \dots .

Объемные $\{R\}$ и поверхностные $\{p\}$ силы также заменим эквивалентными узловыми силами

$$\{\tilde{P}^e\} = \left[\{\tilde{P}_i^e\} \{\tilde{P}_j^e\} \dots \right].$$

Силы $\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\}$ будем считать эквивалентными действительным нагрузкам, если их работа на перемещениях $\{\delta v^e\}$ равна δA^e , т. е. если выполняется равенство

$$\delta A^e = \{\delta v^e\}^T \left(\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\} \right) \quad (10.32)$$

Подсчитаем теперь изменение потенциальной энергии δU^e , если узловые перемещения получили бесконечно малые перемещения $\{\delta v^e\} = \left[\{\delta v_i\} \{\delta v_j\} \dots \right]$. Так как деформации связаны с узловыми перемещениями $\{v^e\}$ соотношением $\{\epsilon\} = \{\beta\} \{v^e\}$, то изменение узловых перемещений вызовет приращение деформаций

$$\{\delta \epsilon\} = \{\beta\} \{\delta v^e\}. \quad (10.33)$$

Поскольку вариация удельной потенциальной энергии деформации определяется как [1] $\delta W = \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\}$, то, проинтегрировав по всему объему конечного элемента τ^e , окончательно имеем:

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} \delta W d\tau = \int_{\tau^e} \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} d\tau,$$

где τ^e – объем, занимаемый конечным элементом.

Подставив в подынтегральное выражение (10.31) и (10.33), получим:

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} \left(\{\beta\} \{\delta v^e\} \right)^T \{\kappa\} \{\beta\} \{v^e\} d\tau.$$

В силу постоянства элементов матриц $\{\delta v^e\}$ и $\{v^e\}$ их можно вынести за знак интеграла

$$\delta U^e = \{\delta v^e\}^T \left[\int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau \right] \{v^e\}.$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, представляет собой квадратную матрицу (в силу перемножения матриц $\{\beta\}^T$ и $\{\beta\}$). Ее элементы получаются интегрированием элементов симметричной матрицы $\{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\}$. Введем обозначение

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau. \quad (10.34)$$

Тогда выражение для δU^e можно представить в виде

$$\delta U^e = \{\delta v^e\}^T \{k^e\} \{v^e\}. \quad (10.35)$$

Приравнявая (10.32) к (10.35) и учитывая независимость элементов матрицы $\{\delta v^e\}$, получаем:

$$\{\delta v^e\}^T \{k^e\} \{v^e\} = \{\delta v^e\}^T (\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\})$$

или

$$\{k^e\} \{v^e\} = \{P^e\} + \{\tilde{P}^e\}. \quad (10.36)$$

Это соотношение связывает узловые силы с узловыми перемещениями, а поэтому матрицу $\{k^e\}$, определяемую по уравнению (10.34), можно назвать матрицей жесткости конечного элемента. Из (10.34) следует, что при известной геометрии конечного элемента (интегрирование по τ^e) и заданных упругих характеристиках материала матрица жесткости вполне определяется выбором аппроксимирующих функций.

Матрица узловых перемещений имеет блочную структуру (квазиматрица) $\{\delta v^e\} = \left[\{\delta v_i\} \{\delta v_j\} \dots \right]$, поскольку каждый из компонентов может быть разложен по координатным осям. В соответствии с выражением $\{\varepsilon\} = \{\beta\} \{v^e\}$ матрицу $\{\beta\}$ можно также разбить на блоки

$$\{\beta\} = \left[\{\beta_i\} \{\beta_j\} \dots \right].$$

Тогда на основании (10.34) получим

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \left[\begin{array}{c} \{\beta_i\}^T \\ \{\beta_j\}^T \\ \vdots \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \{k\} \{\beta_i\} \{\beta_j\} \dots \\ \vdots \end{array} \right] d\tau.$$

Из этой записи вытекает следующее блочное представление матрицы жесткости конечного элемента

$$\{k^e\} = \begin{Bmatrix} \{k_{ii}^e\} \{k_{ij}^e\} \dots \\ \{k_{ji}^e\} \{k_{jj}^e\} \dots \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad (10.37)$$

где

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{k\} \{\beta_s\} d\tau. \quad (10.38)$$

10.2.5. Понятие о физическом смысле матрицы жесткости

Для того чтобы определить физический смысл матрицы жесткости, рассмотрим балку на двух опорах (рис. 45, а).

Найдем вертикальное перемещение точки приложения силы P_1 Δ_{11} , используя, например, метод начальных параметров [17].

Если принять, что момент инерции поперечного сечения балки равен J , а модуль упругости материала балки E , то уравнение для определения вертикальных перемещений в произвольной точке ν может быть записано в виде (см. рис. 45, а, где кроме приложенной силы приведены реакции на левой и правой опорах)

$$EJ\Delta = EJ\Delta_0 + EJ\theta_0 x + \frac{2P_1}{3} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-l)^3}{6}, \quad (a)$$

где Δ_0 , θ_0 – начальный прогиб (вертикальное перемещение левого конца балки) и начальный угол поворота при $x = 0$ (из граничных условий $\Delta_0 = 0$).

Начальный угол поворота θ_0 найдем из граничных условий, так как при $x = 3l$ вертикальное перемещение $\Delta = 0$:

$$EJ\Delta = EJ\theta_0(3l) + \frac{2P_1}{3} \frac{(3l)^3}{6} - \frac{P(2l)^3}{6} = 0,$$

откуда получим $EJ\theta_0 = -\frac{5l^2}{9}$.

Подставив в уравнение (а) последовательно $x = l$ и $x = 2l$, найдем вертикальные перемещения в сечениях 1 и 2 соответственно:

$$\Delta_{11} = -\frac{4P_1l^3}{9EJ}; \quad \Delta_{12} = -\frac{7P_1l^3}{18EJ}. \quad (б)$$

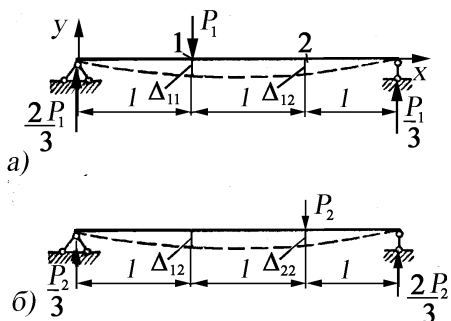


Рис. 45. Перемещения от сил: а – первого состояния P_1 ; б – второго состояния P_2

Знак минус означает, что вертикальное перемещение происходит против направления оси y (см. рис. 45, а).

Если взять абсолютное значение перемещения Δ_{11} из выражения (б), то из этой формулы можно найти силу, необходимую для создания пе-

ремещения Δ_{11} : $P_1 = \frac{9EJ}{4l^3} \Delta_{11}$ или $P_1 = k_{11} \Delta_{11}$,

где $k_{11} = \frac{9EJ}{4l^3}$. Коэффициент k_{11} называется *коэффициентом жесткости* двухопорной балки в сечении 1. Если положить $\Delta_{11} = 1$, то сила P_1 будет равна k_{11} . Отсюда вытекает физический смысл коэффициента жесткости: k_{11} есть сила, которую необходимо приложить в сечении 1, чтобы прогиб в этом сечении равнялся бы единице.

Пусть далее к двухопорной балке приложены силы, как показано на рис. 45. Перемещения Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} представляют собой:

Δ_{11} – перемещение по направлению силы P_1 от действия этой же силы;

Δ_{12} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;

Δ_{21} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

Работу силы P_1 первого состояния на вызванных ею перемещениях обозначим A_{11} , а величина ее равна

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (6)$$

Аналогично работу силы P_2 второго состояния на вызванных ею перемещениях равна

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь случай статического нагружения той же системы (см. рис. 45) силами P_1 и P_2 в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила P_1 (рис. 46, а). Когда процесс ее статического нарастания закончен (прогиб под силой P_1 равен Δ_{11}), на систему начинает действовать также статически нарастающая сила P_2 (см. рис. 46, а).

В процессе нарастания силы P_2 от нуля до ее конечного значения сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$.

Полная работа сил первого состояния при последовательном нагружении системы силами P_1 и P_2 с учетом (6) и (7) равна

$$A = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12}. \quad (8)$$

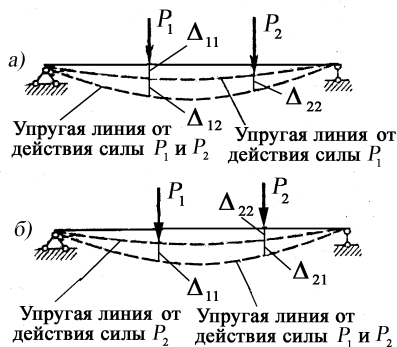


Рис. 46. Упругая линия балки при действии: а – сил первого состояния P_1 и P_2 ; б – второго состояния P_2 и P_1

С другой стороны, можно изменить порядок приложения сил. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила P_2 (рис. 46, б). Когда процесс ее статического нарастания закончен (прогиб под силой P_2 равен Δ_{22}), на систему начинает действовать также статически нарастающая сила P_1 (см. рис. 46, б). В процессе нарастания силы P_1 от нуля до ее конечного значения сила P_2 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{21} и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную $A_{21} = P_2\Delta_{21}$. Полная работа сил второго состояния (см. рис. 46, б) при последовательном нагружении системы силами P_2 и P_1 с учетом (в) и (з) равна

$$A = \frac{P_1\Delta_{11}}{2} + \frac{P_2\Delta_{22}}{2} + P_2\Delta_{21}. \quad (e)$$

Так как выполненная работа не зависит от порядка приложения сил (деформация находится в пределах упругости), то, приравнявая друг другу выражения (d) и (e), получаем:

$$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}. \quad (10.39)$$

Таким образом, *работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванным силами первого состояния.*

Этот вывод носит название *теоремы о взаимности работ, или теоремы Бетти.*

Из (10.39) можно получить другое заключение. Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила $P_1 = 1$, а во втором – сила $P_2 = 1$ (рис. 47).

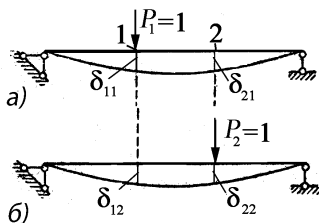


Рис. 47. Нагружение балки единичными силами: а – в сечении 1; б – в сечении 2

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами

(или моментами) знаком δ – в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице, обозначаемых знаком Δ . В соответствии с этим перемещение в рассматриваемой системе по направлению единичной силы $P_2 = 1$ (в сечении 2, см. рис. 47, а) в первом состоянии (т. е. вызванное силой $P_1 = 1$) обозначим δ_{21} , а перемещение по направлению единичной силы $P_1 = 1$ (в сечении 1) во втором состоянии (т. е. вызванное силой $P_2 = 1$) – δ_{12} . Из (10.39) получим

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как $P_1 = P_2 = 1$, то $\delta_{12} = \delta_{21}$ или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (10.40)$$

Равенство (10.40) носит название теоремы о взаимности перемещений (*теоремы или принципа Максвелла*): для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

Таким образом, если на двухопорную балку действуют силы P_1 и P_2 (рис. 48) (порядок приложения этих сил роли не играет), то перемещение сечения 1 под силой P_1 равно сумме

$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}$, а сечения 2 под силой P_2 – $\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}$ (см. рис. 48).

Но поскольку $\Delta_{11} = P_1 \delta_{11}$; $\Delta_{12} = P_2 \delta_{12}$; $\Delta_{22} = P_2 \delta_{22}$; $\Delta_{21} = P_1 \delta_{21}$, то

$$\Delta_1 = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2; \quad (10.41)$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2,$$

где δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – перемещение в направлении Δ_i под действием единичной силы, направленной по P_j .

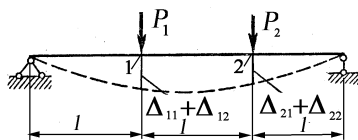


Рис. 48. Перемещения под действием двух сил P_1 и P_2

Величины δ_{ij} , называемые коэффициентами влияния, зависят от геометрических параметров балки и от модуля упругости материала. Действительно, из уравнения (б) найдем

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{9EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{18EI}.$$

Из рис. 48 следует, что $\Delta_{11} = (4P_1l^3)/(9EI)$; $\Delta_{12} = (7P_2l^3)/(18EI)$; $\Delta_{21} = (7P_1l^3)/(18EI)$; $\Delta_{22} = (4P_2l^3)/(9EI)$. Таким образом, суммарное перемещение под каждой силой равно

$$\Delta_1 = \frac{4P_1l^3}{9EI} + \frac{7P_2l^3}{18EI}; \quad \Delta_2 = \frac{7P_1l^3}{18EI} + \frac{4P_2l^3}{9EI}.$$

Из (10.41) следует, что связь между перемещениями и силами в матричной форме

$$\{v\} = \{\delta\} \{P\}. \quad (10.42)$$

Здесь введены матрицы-столбцы сил и перемещений

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}; \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix},$$

а через $\{\delta\}$ обозначена матрица податливости

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}.$$

Если воспользоваться зависимостью (10.42), то суммарные вертикальные перемещения точек 1 и 2 (см. рис. 48) будут равны

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4l^3}{9EI} & \frac{7l^3}{18EI} \\ \frac{7l^3}{18EI} & \frac{4l^3}{9EI} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4P_1l^3}{9EI} + \frac{7P_2l^3}{18EI} \\ \frac{7P_1l^3}{18EI} + \frac{4P_2l^3}{9EI} \end{Bmatrix}.$$

Если принять, что перемещения $\{v\}$ известны, то из (10.42) можно найти силы $\{P\}$, вызывающие эти перемещения:

$$\{\delta\}^{-1} \{v\} = \{P\}.$$

Полагая $\{k\} = \{\delta\}^{-1}$, придадим последнему равенству вид

$$\{k\} \{v\} = \{P\}.$$

Введенная здесь матрица $\{k\}$ имеет размер 2×2 и называется матрицей жесткости рассматриваемой системы. Согласно теореме Максвелла о взаимности перемещений (10.40), матрица податливости $\{\delta\}$ является симметричной. Поэтому обратная к ней матрица $\{k\}$ будет также симметричной. В общем случае, когда на произвольное упругое тело действует система m сил (рис. 49), которую представим матрицей-столбцом

$$\{P\} = |P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_m|.$$

Пусть перемещения $\{v\}$ точек приложения сил $\{P\}$ (узловые точки) в направлении этих сил образуют матрицу

$$\{v\} = |v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_m|.$$

Здесь принято, что все перемещения $\{v\}$ отличны от нуля. Если в некоторых из рассмотренных точек тело закреплено, то соответствующие элементы матрицы $\{v\}$ будут равны нулю. Например, если рассмотреть вертикальные перемещения сечений балки, показанной на рис. 48, то перемещения на левой и правой опорах будут равны нулю.

Предположим, что перемещения $\{v\}$ заданы; тогда силы, необходимые для создания этих перемещений, определяются для линейно-упругого тела соотношением

$$\{P\} = \{k\} \{v\}. \quad (10.43)$$

Матрица $\{k\}$, связывающая силы $\{P\}$ с соответствующими им перемещениями $\{v\}$, называется матрицей жесткости рассматриваемого тела.

Представим (10.43) в развернутом виде

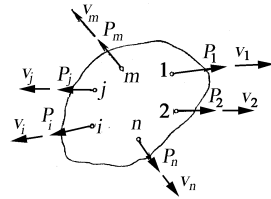


Рис. 49. Нагружение упругого тела произвольной системой сил

$$\begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_i \\ \cdot \\ \cdot \\ P_m \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1j} \ \dots \ k_{1m} \\ k_{21} \ k_{22} \ \dots \ k_{2j} \ \dots \ k_{2m} \\ \dots \\ \dots \\ k_{i1} \ k_{i2} \ \dots \ k_{ij} \ \dots \ k_{im} \\ \dots \\ \dots \\ k_{m1} \ k_{m2} \ \dots \ k_{mj} \ \dots \ k_{mm} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_j \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{array} \right\|
 \end{array} \quad (10.44)$$

и выпишем i -ю строку этого матричного равенства

$$\{P_i\} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{ij}v_j + \dots + k_{im}v_m. \quad (\text{жс})$$

Физический смысл коэффициента k_{ij} можно выяснить, полагая перемещения в равенстве (жс) $v_j = 1$, а все остальные перемещения равными нулю; тогда получим $P_i = k_{ij}$.

Отсюда следует, что коэффициент жесткости k_{ij} представляет собой силу, возникающую в узловой точке i , когда перемещение v_j равно единице, а все остальные перемещения равны нулю. Иначе говоря, если закрепить тело во всех узлах, кроме узла j , и приложить такую силу P_j , чтобы перемещение v_j равнялось единице, то реакция на тело в узловой точке j будет равна k_{ij} (при этом величина самой силы P_i определит значение коэффициента k_{ij}).

Применяя теорему Бетти (10.39) о взаимности работ внешних сил, можно показать, что матрица жесткости всегда симметрична.

Если силы P_i имеют произвольные направления, то удобно разложить эти силы по координатным осям x , y , z и ввести для каждого узла i матрицу-столбец сил $\{P_i\} = \begin{vmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{vmatrix}$. Тогда v_j будет также матрицей-столбцом, элементы которой – перемещения узла i по ко-

ординатным осям: $\{v_i\} = |v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}|$. Связь между силами и перемещениями по-прежнему можно определять соотношением вида (10.44) только элементами $\{k_{ij}\}$ матрицы $\{k\}$, которая теперь уже является квазиматрицей (блочной матрицей). Заметим, что элементами этой блочной матрицы будут квадратные подматрицы размером 3×3 .

10.2.6. Учет внеузловой нагрузки

Выведем теперь зависимость для вычисления матрицы $\{\bar{P}^e\}$, которая определяет узловые силы, эквивалентные объемным и поверхностным силам. Рассмотрим такой конечный элемент, часть поверхности которого совпадает с внешней поверхностью, ограничивающей тело.

Придадим узловым перемещениям конечного элемента $\{v^e\}$ возможные бесконечно малые приращения $\{\delta v^e\}$. Как известно, приращения перемещений $\{\delta u\}$ точек внутри конечного элемента определяются при этом формулой $\{\delta u\} = \{\alpha\} \{\delta v^e\}$. Вычислим работу $\delta \tilde{A}^e$ объемных сил $\{R\}$, действующих на некоторой поверхности τ^e , а также поверхностных сил $\{p\}$, действующих на некоторой поверхности ω^e , на перемещениях $\{\delta u\}$. Поскольку матрицы $\{R\}$, $\{p\}$ и $\{\delta u\}$ – матрицы-столбцы, то для их перемножения необходимо транспонировать матрицу $\{\delta u\}$ и проинтегрировать⁹ полученные значения на поверхности τ^e и по объему ω^e :

$$\delta \tilde{A}^e = \int_{\tau^e} \{\delta u\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\delta u\}^T \{p\} d\omega. \quad (a)$$

Внося в зависимость (a) значение $\{\delta u\} = \{\alpha\} \{\delta v^e\}$, получим:

$$\delta \tilde{A}^e = \{\delta v^e\}^T \left(\int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega \right). \quad (б)$$

⁹ Интегрировать здесь необходимо потому, что в общем случае $\{R\}$, $\{p\}$ и $\{\delta u\}$ могут изменяться внутри элемента.

Поскольку узловые силы $\{\bar{P}^e\}$ должны быть эквивалентны объемным и поверхностным силам, то их работа на узловых перемещениях, равная

$$\delta \tilde{A}^e = \{\delta v^e\}^T \{\tilde{P}^e\}, \quad (6)$$

должна быть равна действительной работе объемных и поверхностных сил на соответствующих перемещениях или равна (δ)

$$\{\delta v^e\}^T \{\tilde{P}^e\} = \{\delta v^e\}^T \left(\int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega \right).$$

Это приводит к равенству

$$\{\tilde{P}^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega. \quad (10.45)$$

Учитывая, что матрица $\{v^e\}$ – квазиматрица или имеет блочную структуру $\{v^e\} = \left| \{v_i\} \{v_j\} \dots \right|$ (каждый компонент такой матрицы определяет перемещения по трем направлениям x, y, z) в соотношении $\{u, \dots, \dots, \dots, \alpha\}^{10}$ также может быть представлена в блочном виде (в зависимости от числа узлов) $\{\alpha\} = \left| \{\alpha_i\} \{\alpha_j\} \dots \right|$. Тогда узловые силы $\{\bar{P}^e\}$ также можно представить в блочном виде

$$\{\tilde{P}^e\} = \left| \{\tilde{P}_i^e\} \{\tilde{P}_j^e\} \dots \right|,$$

где

$$\{\tilde{P}_r^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha_r\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha_r\}^T \{p\} d\omega \quad (r = i, j, \dots). \quad (10.46)$$

Формула (10.46) определяет вклад, который вносит каждый конечный элемент в эквивалентные силы в узле r . Аналогично приводятся к узловым силам нагрузки, приложенные к другим конечным элементам (с учетом их расположения – внутри или на

¹⁰ Заметим, что вид матрицы $\{\alpha\}$ нами пока не определен.

поверхности упругого тела). Суммируя вклады отдельных элементов, найдем для каждого узла r матрицу:

$$\{\tilde{P}_r\} = \sum_r \{\tilde{P}_r^e\}. \quad (10.47)$$

Здесь знак \sum_r означает суммирование по всем элементам, сходящимся в узле r .

Заметим, что в случае равномерно распределенных объемных и поверхностных сил внеузловая нагрузка может учитываться довольно просто введением матрицы уравнивающих сил – матрицы, которая содержит реакции на элемент от действия внеузловой нагрузки при полном закреплении узлов. Так, например, для треугольного плоского элемента толщиной h от объемных сил в каждом из трех узлов по соответствующему направлению прикладывается сила $\tilde{R}^e = \frac{1}{3} F^e h \rho$, где F^e – площадь конечного элемента; ρ – его плотность.

Для такого же элемента, у которого на некоторой грани i - j действует равномерно распределенная нагрузка q , внеузловые силы в узлах i и j будут равны $\frac{ql}{2}$, где l – расстояние между узлами i и j . Если в узле сходятся несколько элементов, то узловые силы от каждого из них суммируются.

10.2.7. Определение узловых перемещений

Выполнив дискретизацию упругого тела, можно теперь составить уравнения равновесия узлов и прийти к системе уравнений относительно перемещений $\{v\} = \{v_1\} \{v_2\} \dots \{v_n\}$, где n – общее число узлов при принятой схеме дискретизации. Если в узлах тела приложены сосредоточенные силы, то из них можно образовать матрицу $\{P\} = \{P_1\} \{P_2\} \dots \{P_n\}$. Типовой элемент $\{P_r\}$ этой матри-

цы представляет собой подматрицу сил, действующих в узле r в направлении перемещений v_r .

Узловые силы, эквивалентные внеузловой нагрузке, также объединим в матрицу $\{\tilde{P}\} = \left\{ \tilde{P}_1 \right\} \left\{ \tilde{P}_2 \right\} \dots \left\{ \tilde{P}_n \right\}$. Отметим, что $\{P_i\}$ может также являться матрицей, если узловые силы раскладываются на направление координатных осей.

Уравнения равновесия для каждого узла составляются теперь согласно соотношению (10.48). Объединяя все эти уравнения, получим зависимость между внешними узловыми силами и узловыми перемещениями в виде

$$\{K\} \{v\} = \{P\} + \{\tilde{P}\}. \quad (10.48)$$

Здесь $\{K\}$ – матрица жесткости всего тела, которая может быть представлена в форме

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} \{k_{11}\} & \{k_{12}\} & \dots & \{k_{1n}\} \\ \{k_{21}\} & \{k_{22}\} & \dots & \{k_{2n}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{k_{n1}\} & \{k_{n2}\} & \dots & \{k_{nn}\} \end{Bmatrix} \quad (10.49)$$

Типовая подматрица $\{k_{rs}\} = \sum_e k_{rs}^e$ получается, как и прежде, суммированием подматриц $\{k_{rs}^e\}$ по всем конечным элементам, содержащим одновременно узлы r и s .

Составление матрицы жесткости упругого тела поясним на простейшем примере. Пусть плоская область (рис. 50) разделена нами на четыре конечных элемента a, b, c, d . Номера узлов обозначены цифрами (1, 2, 3, 4, 5).

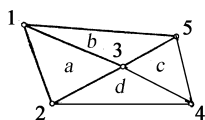


Рис. 50. Плоское тело, состоящее из четырех конечных элементов

Запишем матрицы жесткости отдельных конечных элементов из выделенной группы в блочном виде. Напом-

ним, что $\{k_{ij}\}$ представляет собой силу, возникающую в узловой точке i , когда перемещение v_j равно единице, а остальные равны нулю. Поэтому для плоской задачи подматрица $\{k_{ij}\}$ имеет порядок 2×2 , для трехмерной – 3×3 . В общем виде имеем

$$\{k^a\} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \{k_{11}^a\} & \{k_{12}^a\} & \{k_{13}^a\} \\ \{k_{21}^a\} & \{k_{22}^a\} & \{k_{23}^a\} \\ \{k_{31}^a\} & \{k_{32}^a\} & \{k_{33}^a\} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\|; \quad \{k^b\} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \{k_{11}^b\} & \{k_{13}^b\} & \{k_{15}^b\} \\ \{k_{31}^b\} & \{k_{33}^b\} & \{k_{35}^b\} \\ \{k_{51}^b\} & \{k_{52}^b\} & \{k_{55}^b\} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \end{array} \end{array} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right\|;$$

$$\{k^c\} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \{k_{33}^c\} & \{k_{34}^c\} & \{k_{35}^c\} \\ \{k_{43}^c\} & \{k_{44}^c\} & \{k_{45}^c\} \\ \{k_{53}^c\} & \{k_{54}^c\} & \{k_{55}^c\} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array} \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right\|; \quad \{k^d\} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \{k_{22}^d\} & \{k_{24}^d\} & \{k_{23}^d\} \\ \{k_{42}^d\} & \{k_{44}^d\} & \{k_{43}^d\} \\ \{k_{32}^d\} & \{k_{34}^d\} & \{k_{33}^d\} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array} \end{array} \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right\|.$$

В написанных матрицах цифры сбоку и снизу определяют номера узлов каждого элемента, если обход проводится против хода часовой стрелки, начиная с наименьшего номера. В общем случае обход проводится, как условливаются заранее.

Матрица (квазиматрица) жесткости всего тела (см. рис. 50) в соответствии с общим числом узлов имеет в блочной записи порядок 5×5 . Суммируя подматрицы отдельных конечных элементов, имеющих одинаковые индексы, получим:

$$\{K\} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} \{k_{11}^a\} + \{k_{11}^b\} & \{k_{12}^a\} & \{k_{13}^a\} + \{k_{13}^b\} & 0 & \{k_{15}^b\} \\ \{k_{21}^a\} & \{k_{22}^a\} + \{k_{22}^d\} & \{k_{23}^a\} + \{k_{23}^d\} & \{k_{24}^d\} & 0 \\ \{k_{31}^a\} + \{k_{31}^b\} & \{k_{32}^a\} + \{k_{32}^d\} & \{k_{33}^a\} + \{k_{33}^b\} + \{k_{33}^c\} + \{k_{33}^d\} & \{k_{34}^c\} + \{k_{34}^d\} & \{k_{35}^b\} + \{k_{35}^c\} \\ 0 & \{k_{42}^d\} & \{k_{43}^c\} + \{k_{43}^d\} & \{k_{44}^c\} + \{k_{44}^d\} & \{k_{45}^c\} \\ \{k_{51}^b\} & 0 & \{k_{53}^b\} + \{k_{53}^c\} & \{k_{54}^c\} & \{k_{55}^b\} + \{k_{55}^c\} \end{array} \right\| \end{array}$$

Дадим некоторые пояснения к формированию приведенной выше матрицы жесткости системы (см. рис. 50). Узел 3 является общим для всех четырех конечных элементов. Поэтому подматрица $\{k_{33}\}$ является суммой соответствующих подматриц всех четырех элементов. Узел 1 принадлежит элементам a и b , вследствие чего $\{k_{11}\} = \{k_{11}^a\} + \{k_{11}^b\}$. Узел 2 принадлежит элементам a и d , вследствие чего $\{k_{22}\} = \{k_{22}^a\} + \{k_{22}^d\}$ и т. д. Наконец, такие узлы, как 1 и 4, 2 и 5 непосредственно не связаны между собой ни одним из элементов, поэтому $\{k_{14}\}=0$; $\{k_{25}\}=0$.

В уравнении (10.48) матрицу узловых перемещений $\{v\}$ разделим на две подматрицы

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{v_\alpha\} \\ \{v_\beta\} \end{Bmatrix}.$$

В подматрицу $\{v_\beta\}$ включаются известные из граничных условий перемещения; все неизвестные перемещения составляют подматрицу $\{v_\alpha\}$. Аналогично представляются и матрицы сил

$$\|P\| = \begin{Bmatrix} \{P_\alpha\} \\ \{P_\beta\} \end{Bmatrix}; \quad \|\tilde{P}\| = \begin{Bmatrix} \{\tilde{P}_\alpha\} \\ \{\tilde{P}_\beta\} \end{Bmatrix}.$$

Если заданные перемещения $\{v_\beta\}=0$, то приходим к уравнению

$$\{k_{\alpha\alpha}\} \{v_\alpha\} = \{P_\alpha\} + \{\tilde{P}_\alpha\}, \quad (10.50)$$

решение которого дает матрицу неизвестных узловых перемещений.

Матрица $\{k_{\alpha\alpha}\}$ получается из матрицы жесткости $\{K\}$ вычеркиванием строк и столбцов, соответствующим известным перемещениям. После определения узловых перемещений

$$\{v_\alpha\} = \{k_{\alpha\alpha}\}^{-1} [\{P_\alpha\} + \{\tilde{P}_\alpha\}].$$

По формулам (10.25) и (10.29) можно вычислить деформации и напряжения в каждом конечном элементе.

10.3. Конечные элементы сплошной среды

10.3.1. Плоский треугольный элемент

В п. 10.2.2 показаны некоторые из конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости, а также для расчета трехмерных тел. Основное различие между ними заключается в характере аппроксимации перемещений, а также в способе описания геометрии. Естественно, что наилучшим способом является выбор таких аппроксимирующих функций, описание геометрии и деформации которых проводится помощью одних и тех же соотношений. Это позволяет построить одно-, двух- и трехмерные конечные элементы произвольной конфигурации, обеспечивающие совместность конечноэлементной модели.

Рассмотрим простейший конечный элемент, применяемый для решения плоской задачи теории упругости – треугольный с тремя узлами, расположенными в вершинах треугольника (рис. 51). Матрица перемещений для каждого узла состоит из двух компонент¹¹. Так, для узла i имеем

$$\{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{Bmatrix}.$$

При составлении матрицы $\{v^e\}$ условимся обходить узлы против часовой стрелки. Тогда $\{v^e\} = \{\{v_i\} \{v_j\} \{v_m\}\}$.

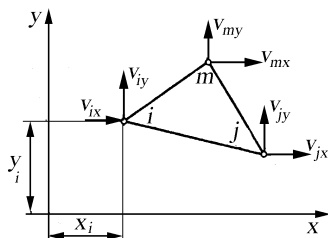


Рис. 51. Треугольный конечный элемент в общей системе координат

¹¹ Мы не рассматриваем характеристики каждого конечного элемента в местной системе координат, а также матрицу преобразования координат для перехода к общей системе [16], поскольку в современных вычислительных комплексах это делается автоматически. В переводной литературе местную систему координат называют локальной, а общую – глобальной.

Точки конечного элемента получают перемещения u_x, u_y в направлении осей x, y . Поэтому матрица $\{u\}$ имеет вид

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}.$$

Для получения матрицы $\{a\}$, связывающей $\{u\}$ и $\{v^e\}$, предположим, что перемещения u_x и u_y в пределах конечного элемента аппроксимируются простейшим законом

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y, \quad (10.51)$$

где f – некоторые постоянные.

В вершинах треугольника перемещения u_x и u_y должны совпадать с узловыми перемещениями. Это дает шесть уравнений для определения постоянных f_r ($r = 1 \dots 6$)

$$\left. \begin{array}{l} f_1 + f_2x_i + f_3y_i = v_{ix}; \\ f_1 + f_2x_j + f_3y_j = v_{jx}; \\ f_1 + f_2x_m + f_3y_m = v_{mx}; \end{array} \right\} (a) \quad \left. \begin{array}{l} f_4 + f_5x_i + f_6y_i = v_{iy}; \\ f_4 + f_5x_j + f_6y_j = v_{jy}; \\ f_4 + f_5x_m + f_6y_m = v_{my}. \end{array} \right\} (b)$$

Решая первую группу уравнений (a), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx}), \end{aligned} \quad (10.52)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= x_m - x_j; & a_j &= x_i - x_m; & a_m &= x_j - x_i; \\ b_i &= y_j - y_m; & b_j &= y_m - y_i; & b_m &= y_i - y_j; \\ c_i &= x_j y_m - x_m y_j; & c_j &= x_m y_i - x_i y_m; & c_m &= x_i y_j - x_j y_i. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Выражения для f_4, f_5 и f_6 имеют вид

$$\begin{aligned}
 f_4 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{iy} + c_j v_{jy} + c_m v_{my}); \\
 f_5 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{iy} + b_j v_{jy} + b_m v_{my}); \\
 f_6 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{iy} + a_j v_{jy} + a_m v_{my}).
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

В выражениях (10.52) и (10.54) величина F^e – площадь треугольника ijm (см. рис. 51) может быть вычислена через координаты узлов x_r и y_r ($r = i, j, m$) с помощью определителя

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \tag{10.55}$$

Если раскрыть определитель (10.55), то с учетом (10.53) получим

$$2F^e = c_i + c_j + c_m. \tag{10.56}$$

Подставляя в (10.51) формулы (10.52), получим:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) v_{ix} + (c_j + b_j x + a_j y) v_{jx} + \\
 &\quad + (c_m + b_m x + a_m y) v_{mx}];
 \end{aligned} \tag{10.57}$$

$$\begin{aligned}
 u_y &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) v_{iy} + (c_j + b_j x + a_j y) v_{jy} + \\
 &\quad + (c_m + b_m x + a_m y) v_{my}].
 \end{aligned} \tag{10.58}$$

Формулы (10.57) и (10.58) позволяют найти перемещения u_x и u_y в любой точке конечного элемента через его узловые перемещения x_r и y_r ($r = i, j, m$).

Представим (10.57) и (10.58) в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix} \{v^e\},$$

где

$$\{\alpha_x\} = \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y) \quad 0] \mapsto (\varepsilon)$$

$$\mapsto (c_m + b_m x + a_m y) \quad 0];$$

$$\{\alpha_y\} = \frac{1}{2F^e} [0 \quad (c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y)] \mapsto (\varepsilon)$$

$$\mapsto 0 \quad (c_m + b_m x + a_m y)].$$

Равенства (ε) и (ε) перепишем в другой форме, поскольку подматрицы $\{\alpha_x\}$ и $\{\alpha_y\}$ можно представить в виде блоков, зависящих от координат узловых точек конечного элемента

$$\{\alpha_x\} = \left\| \{\alpha_{xi}\} \quad \{\alpha_{xj}\} \quad \{\alpha_{xm}\} \right\|; \quad \{\alpha_y\} = \left\| \{\alpha_{yi}\} \quad \{\alpha_{yj}\} \quad \{\alpha_{ym}\} \right\|, \quad (10.59)$$

где

$$\{\alpha_{xr}\} = \left\| \psi_r \quad 0 \right\|; \quad \{\alpha_{yr}\} = \left\| 0 \quad \psi_r \right\|; \quad (10.60)$$

$$\psi_r = \frac{1}{2F^e} (c_r + b_r x + a_r y) \quad (r = i, j, m). \quad (10.61)$$

Формулы (10.59) – (10.61) определяют искомую матрицу аппроксимирующих функций

$$\{\alpha\} = \left\| \left\| \{\alpha_x\} \right\| \right\|$$

$$\left\| \left\| \{\alpha_y\} \right\| \right\|,$$

которую представим в блочном виде, зависящих от координат узловых точек

$$\{\alpha\} = \left\| \{\alpha_i\} \quad \{\alpha_j\} \quad \{\alpha_m\} \right\|,$$

где

$$\{\alpha_r\} = \left\| \begin{matrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{matrix} \right\| \quad (r = i, j, m).$$

Далее по (10.30) вычисляем матрицу $\{\beta\}$

$$\{\beta\} = \left\| \begin{matrix} \partial\{\alpha_x\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x + \partial\{\alpha_x\}/\partial y \end{matrix} \right\|.$$

С учетом (10.59) – (10.61) получим

$$\{\beta\} = \left\{ \{\beta_i\} \ \{\beta_j\} \ \{\beta_m\} \right\},$$

где

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_r & 0 \\ 0 & a_r \\ a_r & b_r \end{vmatrix} \quad (r = i, j, m). \quad (10.62)$$

В данном случае элементы матрицы $\{\beta\}$ не зависят от координат. Это означает, что деформации (следовательно, и напряжения) в пределах рассматриваемого конечного элемента постоянны, а при переходе от одного элемента к другому они изменяются скачком.

Теперь найдем матрицу жесткости элемента, пользуясь формулой

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau.$$

Поскольку матрица $\{\beta\}$ представлена в стандартной блочной форме, то в соответствии с (10.37), (10.38) для матрицы жесткости рассматриваемого треугольного элемента получим

$$\{k^e\} = \begin{vmatrix} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{mm}^e\} \end{vmatrix},$$

где типовая подматрица

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau.$$

Подынтегральное выражение не зависит здесь от координат и может быть вынесено за знак интеграла. В случае обобщенного плоского напряженного состояния рассматриваемый конечный элемент представляет собой пластину. Если его толщина постоянна и равна h^e , то объем элемента τ^e площадью F^e равен $F^e h^e$. Таким образом, в этом случае

$$\{k_{rs}^e\} = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} \quad (r, s = i, j, m). \quad (10.63)$$

Формулой (10.63) можно воспользоваться для вычисления матрицы жесткости конечного элемента гладкой пластины. Элементы типовой подматрицы $\{k_{rs}^e\}$ представим в аналитической форме. Как известно, для обобщенного плоского напряженного состояния матрица упругости имеет вид

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix}.$$

Подставляя в выражение для $\{k_{rs}^e\}$ формулы для отдельных подматриц, получаем:

$$\begin{aligned} \{k_{rs}^e\} &= F^e h^e \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} = \\ &= \frac{Eh^e}{4F^e(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} a_r a_s & \mu b_r a_s + \frac{1-\mu}{2} a_r b_s \\ \mu a_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r a_s & a_r a_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

В работе [12] матрица упругости $\{\kappa\}$ представлена в виде двух слагаемых

$$\{\kappa\} = \{\kappa_E\} + \{\kappa_G\},$$

где

$$\{\kappa_E\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \{\kappa_G\} = G \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.65)$$

Здесь модуль сдвига G

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Тогда

$$\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G, \quad (10.66)$$

где

$$\{k_{rs}^e\}_E = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\}; \quad \{k_{rs}^e\}_G = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\}. \quad (d)$$

Подставляя в (d) формулы для отдельных подматриц, получаем:

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh^2}{4(1-\mu^2)F^e} \begin{vmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{vmatrix}, \quad (10.67)$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh^e}{4F^e} \begin{vmatrix} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{vmatrix}. \quad (10.68)$$

Матрицы $\{k_{rs}^e\}_E$, $\{k_{rs}^e\}_G$ представляют собой вклады, даваемые соответственно деформациями от действия нормальных напряжений и деформациями сдвига в матрицу $\{k_{rs}^e\}$.

Для того чтобы получить матрицу жесткости для случая плоской деформации, следует принять $h^e = 1$ и заменить в (10.64) и (10.67) модуль упругости E на $E/(1-\mu^2)$, а коэффициент Пуассона μ – на $\mu/(1-\mu)$.

Перемещения u_x и u_y , определяемые выражением (10.31), изменяются по линейному закону вдоль любой прямой в плоскости xu , в том числе по сторонам треугольника. Линейная функция полностью определяется какими-либо двумя ее параметрами. Значит, перемещения u_x и u_y на каждой стороне треугольника будут однозначно определены, если известны их значения в узлах, лежащих на соответствующей стороне. Так как узловые перемещения являются общими для соседних элементов, то при переходе от одного элемента к другому перемещения не будут иметь разрыва. Следова-

вательно, треугольные элементы с линейным полем перемещений относятся к категории совместных.

Недостатком рассмотренного элемента является то, что напряжения в пределах треугольника постоянны, и поэтому для получения достаточной точности решения часто приходится использовать весьма густую сетку (особенно в областях с быстроменяющимся напряженным состоянием). Это может привести к системе уравнений слишком высокого порядка и соответственно к чрезмерным затратам времени на решение задачи. Тем не менее этот элемент широко используется, поскольку он очень прост и позволяет составлять конечно-элементные модели для плоских тел довольно сложной конфигурации (например шатуна поршневого двигателя [18]).

10.3.2. Совместный прямоугольный элемент

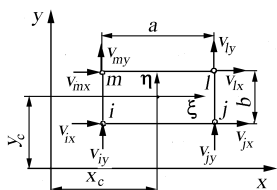


Рис. 52. Прямоугольный четырехузловой плоский элемент

Рассмотрим прямоугольный четырехузловой плоский элемент (рис. 52). Матрица узловых перемещений такого элемента может быть записана в виде

$$\{v^e\} = \left\{ \{v_i\} \quad \{v_j\} \quad \{v_l\} \quad \{v_m\} \right\},$$

где

$$\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{Bmatrix} \quad (r = i, j, l, m).$$

Для приближенного представления поля перемещений конечного элемента возьмем функции

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y + f_4xy; \quad u_y = f_5 + f_6x + f_7y + f_8xy, \quad (10.69)$$

в которых содержится восемь постоянных. Для их определения можно также, как и в случае треугольного элемента, записать в каждом узле условия равенства перемещений u_x и u_y

их узловым значениям. Тогда снова появятся две группы уравнений относительно неизвестных f_1, f_2, f_3, f_4 через перемещения v_{rx} ($r=i, j, l, m$), а f_5, f_6, f_7, f_8 — через v_{ry} . В этом случае матрица аппроксимирующей функции $\{\alpha\} = \left\{ \{\alpha_i\} \{\alpha_j\} \{\alpha_l\} \{\alpha_m\} \right\}$ будет иметь такие же блоки, как и в случае треугольного элемента

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix}, \quad (10.70)$$

где через ψ_r обозначены некоторые функции координат.

В работе [12] показано, что, используя (10.70) ψ_r можно найти путем подбора. Для этого запишем зависимость $\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\}$ в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{lx} \\ v_{ly} \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{Bmatrix}. \quad (10.71)$$

Из полученного матричного соотношения после перемножения получим следующее выражение для u_x :

$$u_x = \psi_i v_{ix} + \psi_j v_{jx} + \psi_l v_{lx} + \psi_m v_{mx}. \quad (a)$$

Представим, что $v_{ix} = 1$, а перемещения остальных узлов равны нулю. Тогда из (a) получим, что $u_x = \psi_i$. Следовательно, ψ_i — функция координат x и y , которая дает распределение перемещений в конечном элементе при единичном смещении узла i и при неподвижных остальных узлах. Обобщая эти рассуждения, можно сказать, что каждая из функций ψ_r дает распределение перемещений в

конечном элементе (рис. 53) при единичном смещении узла r и при неподвижных остальных узлах.

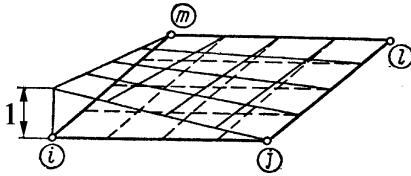


Рис. 53. Схема деформации конечного элемента

Чтобы записать функции ψ_r , перейдем к системе безразмерных координат ξ и η , начало которой находится в центре масс (точка C) прямоугольника (см. рис. 52). Примем

$$\xi = 2(x - x_c)/a; \quad \eta = 2(y - b)/b, \quad (б)$$

где a и b – размеры сторон прямоугольника; x_c и y_c – координаты его центра масс.

Тогда новые координаты ξ и η будут принимать на сторонах прямоугольного конечного элемента значения ± 1 . Так, например, для узла i можем записать

$$x_c = x_i + a/2; \quad y_c = y_i + b/2; \quad \xi_i = \frac{2[x_i - (x_i + a/2)]}{a} = -1;$$

$$\eta_i = \frac{2[y_i - (y_i + b/2)]}{b} = -1.$$

Таким образом, в новой системе $\xi\eta$ узловые точки имеют координаты: $\xi_j = -1; \eta_j = -1; \xi_l = 1; \eta_l = -1; \xi_m = 1; \eta_m = 1$.

Учитывая, что перемещения согласно (10.69) должны изменяться по линейному закону вдоль прямых $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$, можно функции ψ_r искать в виде произведений $(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$. Условия в узлах будут удовлетворены, если в каждой узловой точке принять значения ψ_r ($r = i, j, l, m$)

$$\psi_i = (1 - \xi)(1 - \eta)/4; \quad \psi_j = (1 + \xi)(1 - \eta)/4;$$

$$\psi_l = (1 + \xi)(1 + \eta)/4; \quad \psi_m = (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \quad (в)$$

Действительно, если, например, в первое соотношение из (в) подставить значения $\xi_i = -1$ и $\eta_i = -1$, то получим из (а) $u_x = v_{ix}$ и т.д.

Поэтому все эти функции можно записать с помощью одного выражения (с учетом того, что ξ_r и η_r в каждом узле принимают значения ± 1)

$$\psi_r = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta) / 4 \quad (r = i, j, l, m). \quad (10.72)$$

Вычислим далее матрицу $\{\beta\} = \left\{ \{\beta_i\} \quad \{\beta_j\} \quad \{\beta_l\} \quad \{\beta_m\} \right\}$. По формуле (10.30) имеем

$$\{\beta\} = \left\| \begin{array}{c} \{\partial \alpha_x\} / \partial x \\ \{\partial \alpha_y\} / \partial y \\ \{\partial \alpha_x\} / \partial x + \{\partial \alpha_y\} / \partial y \end{array} \right\|,$$

где $\{\alpha_x\}$ и $\{\alpha_y\}$ – соответственно первая и вторая строки матрицы $\{\alpha\}$.

Из соотношения (б) получим $dx = (a/2)d\xi$; $dy = (b/2)d\eta$. Учитывая блочную структуру матрицы $\{\alpha\}$ (см. формулу (10.48)), для типовой подматрицы $\{\beta_r\}$ получим:

$$\{\beta_r\} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{a} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \\ \frac{2}{b} \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} & \frac{2}{a} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \end{array} \right\|. \quad (z)$$

Подставляя в (z) значения ψ_r из (10.49), получим:

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a & 0 \\ 0 & \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b \\ \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b & \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_r(\eta) & 0 \\ 0 & a_r(\xi) \\ a_r(\xi) & b_r(\eta) \end{array} \right\|, \quad (10.73)$$

где

$$a_r(\xi) = \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b; \quad b_r(\eta) = \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a. \quad (10.74)$$

Тогда матрица жесткости рассматриваемого конечного элемента для случая обобщенного плоского напряженного состояния

$$\{k^e\} = \begin{Bmatrix} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{il}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jl}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{li}^e\} & \{k_{lj}^e\} & \{k_{ll}^e\} & \{k_{lm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{ml}^e\} & \{k_{mm}^e\} \end{Bmatrix},$$

где

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\xi d\eta. \quad (10.75)$$

Так же как и в случае треугольного элемента, удобно разбить подматрицу $\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G$.

Здесь

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\} d\xi d\eta;$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\} d\xi d\eta,$$

где матрицы упругих коэффициентов $\{\kappa_E\}$ и $\{\kappa_G\}$ определены равенствами (10.65). Подстановка выражений для $\{\kappa_E\}$, $\{\beta_r\}$ и $\{\beta_s\}$ в формулу для $\{k_{rs}^e\}_E$ дает

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{Bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{Bmatrix} d\xi d\eta = \frac{Ehab}{16(1-\mu^2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{Bmatrix} d\xi d\eta.$$

Вычислим необходимые интегралы, учитывая (10.74):

$$\int_{-1}^1 a_r(\xi) d\xi = \frac{\eta_r}{b} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi) d\xi = \frac{2\eta_r}{b};$$

$$\int_{-1}^1 a_r(\xi) a_s(\xi) d\xi = \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi)(1 + \xi_s \xi) d\xi =$$

$$= \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \left(1 + \frac{\xi_r \xi_s}{3} \right).$$

Аналогично вычисляются интегралы по η от $b_r(\eta)$ и от произведения $b_r(\eta) b_s(\eta)$

$$\int_{-1}^1 b_r(\eta) d\eta = \frac{\xi_r}{a} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta) d\eta = \frac{2\xi_r}{a};$$

$$\int_{-1}^1 b_r(\eta) b_s(\eta) d\eta = \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta)(1 + \eta_s \eta) d\eta =$$

$$= \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \left(1 + \frac{\eta_r \eta_s}{3} \right).$$

В итоге для $\{k_{rs}^e\}_E$ имеем

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \left\| \begin{array}{cc} c\xi_r \xi_s (1 + \eta_r \eta_s / 3) & \mu \xi_r \eta_s \\ \mu \eta_r \xi_s & (1/c) \eta_r \eta_s (1 + \xi_r \xi_s / 3) \end{array} \right\|, \quad (10.76)$$

где через $c=b/a$ – отношение сторон элемента.

Подобным же образом находим

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\| \begin{array}{ccc} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{array} \right\| G \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \times$$

$$\times \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_s & 0 \\ 0 & a_s \end{array} \right\| d\xi d\eta = \frac{Ghab}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\| \begin{array}{cc} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{array} \right\| d\xi d\eta,$$

откуда

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh}{4} \left\| \begin{array}{cc} (1/c)\eta_r\eta_s(1 + \xi_r\xi_s/3) & \eta_r\xi_s \\ \xi_r\eta_s & c\xi_r\xi_s(1 + \eta_r\eta_s/3) \end{array} \right\|. \quad (10.77)$$

В рассмотренном прямоугольнике перемещения u_x и u_y , определяемые формулой (10.69), изменяются по линейному закону вдоль прямых $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ и, в частности, вдоль его сторон. Рассуждая так же, как и в случае треугольных элементов, заключаем, что введенные выше прямоугольные конечные элементы являются совместными. Заметим, что они совместны также с треугольными элементами, так как перемещения вдоль сторон изменяются по линейному закону.

Треугольные и прямоугольные конечные элементы являются одними из простейших. Однако прямоугольный конечный элемент при одинаковом числе узлов (т. е. при одинаковом порядке полученных уравнений) дает более точное решение, чем при идеализации тела прямоугольными элементами. Однако с помощью одних только прямоугольников можно идеализировать лишь такие области, которые ограничены прямыми линиями, параллельными осям x и y . Для более сложных областей можно использовать прямоугольные элементы в сочетании с треугольными, но это усложняет подготовку исходных данных. Поэтому для расчета тел произвольной формы обычно применяют конечные элементы в виде четырехугольников произвольной формы.

В работе [13] показано, что прямоугольный конечный элемент дает заниженное значение при определении углов поворота, т. е. является слишком жестким. Источником чрезмерной жесткости конечного элемента при изгибе является появление деформаций сдвига γ_{xy} , которые в точном решении равны нулю. Для удовлетворительного решения необходимо увеличить количество конечных элементов или использовать так называемый несовместный элемент [13]. При составлении конечно-элементной модели

сложной формы часто приходится использовать разнообразные конечные элементы [19...22], поскольку аппроксимировать детали сложной формы простейшими элементами часто не удастся. Достаточно подробно об этом можно прочитать в книге [16].

10.3.3. Четырехузловой изопараметрический элемент

Часто приходится рассматривать четырехугольный конечный элемент произвольной формы (рис. 54, а). Построим систему аппроксимирующих функций, обеспечивающих совместность элементов. Как было показано ранее, для этого необходимо, чтобы вдоль каждой стороны элемента перемещения u_x и u_y изменялись по линейному закону.

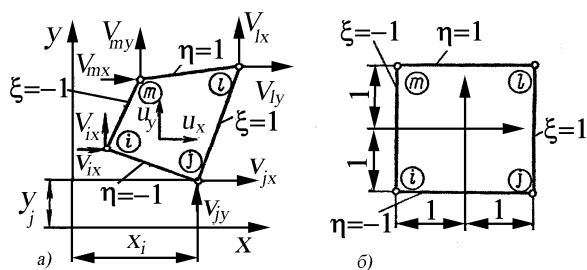


Рис. 54. Четырехузловой изопараметрический элемент

Введем вспомогательный квадрат со стороной, равной 2, и отнесем его к системе безразмерных координат ξ и η , начало которой помещается в середине квадрата (рис. 54, б). На сторонах квадрата переменные ξ и η принимают значения ± 1 . Пусть требуется аппроксимировать в пределах какую-либо функцию $\Phi(\xi, \eta)$, для которой известны ее значения $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_l, \Phi_m$ в угловых точках. Для квадратного конечного элемента (рис. 54, б) такую аппроксимацию мы уже проводили с помощью функций (10.72)

$$\psi_r = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta) / 4 \quad (r = i, j, l, m),$$

которые уже использовались ранее для аппроксимации перемещений в плоском треугольном конечном элементе. Функция ψ_r , определяемая таким образом, принимает единичное значение в узле r и обращается в нуль во всех остальных узлах, изменяясь вдоль сторон квадрата по линейному закону. Функции ψ_r называют иногда функциями *формы* [23].

Выражение

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\Phi_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\Phi_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Phi_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\Phi_m \end{aligned} \quad (10.78)$$

дает такую аппроксимацию функции Φ , которая удовлетворяет граничным условиям в узловых точках. При этом $\Phi(\xi, \eta)$ изменяется по линейному закону вдоль прямых $\xi = \text{const}$ или $\eta = \text{const}$, в том числе вдоль сторон квадрата.

Подставим теперь в соответствие каждой точке квадрата некоторую точку исходного четырехугольника, полагая $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$. В вершинах четырехугольника функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ должны совпадать с координатами узлов. Используя свойства аппроксимации (10.78), можно сразу записать искомые зависимости:

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_m; \\ y = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_m. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Примем, например, $\xi=1$. Тогда из (10.79) получим

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}(1-\eta)x_j + \frac{1}{2}(1+\eta)x_l; \\
 y &= \frac{1}{2}(1-\eta)y_j + \frac{1}{2}(1+\eta)y_l.
 \end{aligned}
 \tag{10.80}$$

Эти соотношения определяют прямую в плоскости x, y . При $\eta = -1$ имеем $x = x_j, y = y_j$, а при $\eta = +1$ получим также $x = x_l, y = y_l$. Следовательно, изменяя η от -1 до $+1$, получаем координаты узловых точек, которые ограничивают одну из сторон четырехугольника. Рассуждая подобным образом, нетрудно убедиться, что формулы (10.79) действительно дают отображение квадрата на рассматриваемый четырехугольник.

Переходя далее к аппроксимации перемещений u_x, u_y , выразим их также через переменные ξ, η . Это позволяет получить функции с требуемыми свойствами

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_{ix} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_{jx} + \\
 &+ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_{lx} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_{mx}; \\
 u_y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_{iy} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_{jy} + \\
 &+ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_{ly} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_{my}.
 \end{aligned}
 \tag{10.81}$$

Рассмотрим, например, характер изменения перемещения u_x вдоль стороны jl , полагая снова $\xi=1$. Из (10.81) имеем

$$u_x = \frac{1}{2}(1-\eta)v_{ix} + \frac{1}{2}(1+\eta)v_{lx}. \tag{10.82}$$

Отсюда видно, что, во-первых, при $\eta = -1$ и $\eta = +1$ (т. е. в узлах j и l) перемещение u_x совпадает с v_{jx} и v_{lx} . Во-вторых, формулы

(10.80) и (10.82) определяют в пространстве x, y и u_x прямую, заданную в параметрическом виде:

$$x = a_1 + a_2\eta; y = b_1 + b_2\eta; u_x = c_1 + c_2\eta.$$

Из полученного соотношения следует, что вдоль стороны jl перемещение u_x изменяется по линейному закону. Аналогичные рассуждения показывают, что формулы, аналогичные (10.82), обеспечивают аппроксимацию перемещений внутри конечного элемента с линейным законом изменения вдоль всех сторон.

Полагая

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}; \{v^e\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_l \\ v_m \end{Bmatrix},$$

где квазиматрица $\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{Bmatrix}$ ($r = i, j, l, m$), представим (10.81) в

матричном виде $\{u\} = \{\alpha\}\{v^e\}$. Здесь $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_l \\ \alpha_m \end{Bmatrix}$, а типовая под-

матрица $\{\alpha_r\}$ включает в себя функции (10.72)

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{rx} \\ \alpha_{ry} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix}.$$

Матрица $\{\beta\}$ имеет вид

$$\{\beta\} = \begin{pmatrix} \{\beta_i\} \\ \{\beta_j\} \\ \{\beta_l\} \\ \{\beta_m\} \end{pmatrix}.$$

При этом типовая подматрица $\{\beta_r\}$ из строк матрицы $\{\alpha_r\}$ по формуле

$$\{\beta_r\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\{\alpha_{rx}\}}{\partial x} \\ \frac{\partial\{\alpha_{ry}\}}{\partial y} \\ \frac{\partial\{\alpha_{ry}\}}{\partial x} + \frac{\partial\{\alpha_{rx}\}}{\partial y} \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$\{\beta_r\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial y} & \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (10.83)$$

Входящие в (10.83) производные $\partial\psi_r/\partial x$ и $\partial\psi_r/\partial y$ нельзя найти непосредственным дифференцированием, так как ψ_r не зависит в явном виде от переменных x и y . Можно было бы воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций, но при этом у нас отсутствует явная зависимость переменных ξ , η от x и y , поскольку в (10.79) имеется только обратная зависимость.

Поэтому для вычисления требуемых производных необходимо воспользоваться формулами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Полученные зависимости запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \{J(\xi, \eta)\} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (10.84)$$

В соотношении (10.84) $\{J(\xi, \eta)\}$ обозначена так называемая *матрица Якоби*

$$\{J(\xi, \eta)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (10.85)$$

Элементы матрицы Якоби в (10.85) легко находятся по (10.79). Поскольку левая часть равенства (10.84) легко может быть определена из (10.72), то найти искомые производные можно из равенства (10.84), умножив слева левую и правую части его на обратную матрицу $\{J(\xi, \eta)\}^{-1}$. В итоге получим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{pmatrix} = \{J(\xi, \eta)\}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (10.86)$$

В соотношении (10.86)

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} = \frac{\xi_r}{4} (1 + \eta_r \eta); \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} = \frac{\xi_r}{4} (1 + \xi_r \xi).$$

В матрицу $\{J(\xi, \eta)\}$ входят функции

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [-(1-\eta)x_i + (1-\eta)x_j + (1+\eta)x_l - (1+\eta)x_m];$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [-(1-\xi)x_i - (1+\xi)x_j + (1+\xi)x_l + (1-\xi)x_m];$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [-(1-\eta)y_i + (1-\eta)y_j + (1+\eta)y_l - (1+\eta)y_m];$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [-(1-\xi)y_i - (1+\xi)y_j + (1+\xi)y_l + (1-\xi)y_m].$$

Вычисление матрицы жесткости рассматриваемого элемента проводится на ПЭВМ с помощью численного интегрирования. При этом матрицу $\{\beta\}$ определяют в отдельных точках области в соответствии с используемым правилом интегрирования. В этих точках определяют матрицу $\{J(\xi, \eta)\}$, а затем обратную к ней матрицу $\{J(\xi, \eta)\}^{-1}$. В тех же точках по (10.86) вычисляют матрицу производных $\partial \psi_r / \partial x$ и $\partial \psi_r / \partial y$ ($r = i, j, l, m$), из которых может быть сформирована матрица $\{\beta\}$ в соответствии с (10.83).

Типовой блок $\{k_{rs}^e\}$ матрицы жесткости $\{k^e\}$ находится по формуле

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{k\} \{\beta_s\} d\tau,$$

где интегрирование ведется по всему объему τ^e конечного элемента. Интегрирование легче проводить по переменным ξ, η , поскольку при этом получаются простые пределы (от -1 до +1). В работе [23] показано, что для переменных ξ, η элементарный объем выражается в виде

$$d\tau = h \{J(\xi, \eta)\} d\xi d\eta,$$

где h – толщина элемента, а $\{J(\xi, \eta)\}$ – определитель матрицы Якоби, называемой *якобианом*. Таким образом, в случае обобщенного плоского напряженного состояния матрицу $\{k_{rs}^e\}$ находим по формуле

$$\{k_{rs}^e\} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{J(\xi, \eta)\} d\xi d\eta. \quad (10.87)$$

В существующих программах по расчету МКЭ интегрирование проводится ПЭВМ.

Приведение распределенных нагрузок к узловым силам выполняется обычным образом. Так, если в плоскости элемента действуют объемные силы $\{\bar{R}\}$, то их заменяют узловыми по формуле

$$\{\tilde{P}^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{\bar{R}\} d\tau.$$

Полагая, что

$$\{\tilde{P}^e\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{P}_i^e\} \\ \{\tilde{P}_j^e\} \\ \{\tilde{P}_l^e\} \\ \{\tilde{P}_m^e\} \end{Bmatrix},$$

после перехода к интегрированию по ξ, η в плоскости элемента, приходим к следующему выражению для типовой подматрицы эквивалентных узловых сил:

$$\{\tilde{P}_r^e\} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\alpha_r\}^T \{\bar{R}\} \{J(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \quad (r = i, j, l, m). \quad (10.88)$$

Матрица $\{\alpha_r\}$ в (10.88) в точках интегрирования находится по формулам (10.72).

Получаемые таким образом конечные элементы являются совместными. Характерной особенностью здесь является то, что для задания перемещений u_x, u_y и координат x, y через безразмерные координаты ξ, η используются одинаковые выражения. Это предполагает, в частности, что для определения геометрии конечного элемента требуется столько же параметров (координат узлов x_r, y_r), сколько параметров (узловых перемещений v_{rs}, v_{ry}) необходимо для задания поля перемещений. Такие элементы называются *изопараметрическими*. Если геометрия совместных элементов определяется меньшим числом параметров, чем поле перемещений, то такие конечные элементы называют иногда *субпараметрическими* [23].

Аналогично для расчета пространственных тел используются трехмерные конечные элементы, простейшим из которых является тетраэдр с четырьмя узлами [14, 16, 23].

Контрольные вопросы

1. Какой смысл вкладывается в понятие «конечный элемент»?
2. Как в методе конечных элементов учитываются внешние и объемные силы?
3. Каким образом определяются перемещения произвольных точек конечного элемента?
4. Что такое матрица жесткости конечного элемента?
5. Какой физический смысл матрицы жесткости конечного элемента?
6. Как определяются узловые перемещения?
7. Каковы достоинства и недостатки плоского треугольного конечного элемента?
8. В чем смысл совместного прямоугольного конечного элемента?
9. Какие конечные элементы называются изопараметрическими?
10. Что представляет собой матрица Якоби?
11. Что называют якобианом?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены методы решения прикладных задач теории упругости: расчет тонких пластинок и прессовых посадок. Подобные задачи встречаются при конструировании и расчете деталей тепловых двигателей, например, при расчете поршневой головки шатуна поршневого двигателя.

Рассмотрены также вариационные методы расчета, которые широко используются не только при прочностных расчетах конструкций. В частности, многие инженерные расчеты нестационарных процессов, гидродинамики и газовой динамики успешно проводятся именно благодаря использованию вариационных методов [24].

Наконец, рассмотрены основы метода конечных элементов. Большие универсальные программы (например система ANSYS [25]), реализующие метод конечных элементов, позволяют расчетчику значительно упростить введение исходных данных. Однако пользователь также должен стремиться к сокращению исходной информации путем наиболее рациональной идеализации конструкции. В настоящем пособии вопросы реализации конечных элементов на ПЭВМ не затронуты, поскольку они достаточно полно освещены в литературе [13, 14, 16, 23, 25].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоц, А. Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие: В 2 ч. Ч.1 / А. Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 154 с. – ISBN 978-5-89368-970-9.
2. Филоненко-Бородич, М. М. Теория упругости / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
3. Галеркин, Б. Г. Упругие тонкие плиты / Б.Г. Галеркин. – М.: Госстройиздат, 1933. – 324 с.
4. Варвак, П. М. Таблицы для расчета прямоугольных плит / П.М. Варвак, И.О. Губерман, М.М. Мирошниченко. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959. – 453 с.
5. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении: В 3 т. Т. 2 / С.Д. Пономарев [и др.]; под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – 975 с.
6. Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
7. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении: В 3 т. Т. 1 / С.Д. Пономарев [и др.]; под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.
8. Смирнов, А. Ф. Сопrotивление материалов / А.Ф. Смирнов [и др.]; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1968. – 595 с.
9. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении: В 3 т. Т. 3 / С.Д. Пономарев [и др.]; под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1959. – 1118 с.
10. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Физматгиз, 1963. – 478 с.
11. Михлин, С. М. Численная реализация вариационных методов / С.М. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
12. Филин, А. П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ / А.П. Филин. – М.: Стройиздат, 1966. – 438 с.

13. Образцов, И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
14. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир. – 1979. – 392 с.
15. Борзин, Ю. В. Матричные методы расчета конструкций: В 2 ч. Ч. 1. Статика плоских стержневых систем. Линейные задачи / Ю. В. Борзин, А. Н. Гоц. – Владимир: ВПИ. – 1977. – 48 с.
16. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров [и др.]; под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг. – 1982. – 480 с.
17. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 3-е изд. – М.: Высш. шк. – 1969. – 734 с.
18. Гоц, А. Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. – 118 с. – ISBN 5-89368-550-4.
19. Гоц, А. Н. Повышение надежности поршня с воздушным охлаждением / А. Н. Гоц, С. В. Папонов, В. К. Фомин // Двигателестроение. – 1988. – № 10. – С. 23 – 27.
20. Гоц, А. Н. Снижение теплонапряженности головки цилиндров дизеля с воздушным охлаждением / А.Н. Гоц, О.А. Григорьев, С.И. Некрасов // Двигателестроение. – 1988. – № 7. – С. 13 – 17.
21. Гоц, А. Н. Анализ теплонапряженного состояния деталей ДВС с использованием МКЭ / А.Н. Гоц, А.С. Вольфович, О.А. Григорьев // Системный анализ динамики и прочности машин: сб. тр.– Иркутск: ВИНТИ. – 1988.– С. 45 – 49.
22. Гоц, А. Н. Основные принципы построения автоматизированной системы расчетов прочности ДВС / А. Н. Гоц, О. А. Григорьев, С. Ю. Уваров // Автоматизация, конструирование и проектирование технологических процессов в машиностроении: сб. докл. V Междунар. конф.– Пловдив: НРБ.– 1988.– С. 24 – 27.

23. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ.; под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир. – 1975. – 542 с.

24. Шехтер, Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р. С. Шехтер: пер. с англ. – М.: Мир. – 1971. – 291 с.

25. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды: практ. рук. / под ред. А.К. Любимова. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. – 2006. – 227 с.– ISBN 5-85746-928-7.

Учебное издание

Гоц Александр Николаевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ**

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

Подписано в печать .

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 11,62. Тираж 100 экз.

Заказ №

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, г. Владимир, ул. Горького, 87