Владимирский государственный университет

В.А. Скляренко А.Г. Сорокина Е.В. Филинова

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум

Владимир 2004

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Владимирский государственный университет

В. А. Скляренко А. Г. Сорокина Е. В. Филинова

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум

Владимир 2004

УДК 517.312.001.2(075)
С43

Рецензенты:
Кандидат физ.-мат. наук,
и.о. профессора кафедры высшей и прикладной математики
Владимирского института бизнеса
В.Д. Бурков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент,
зам. зав. кафедрой ФИПМ ВлГУ
В.Г. Прокошев

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

С43 **Скляренко В. А. Сорокина А. Г. Филинова Е. В.**
Неопределенные интегралы: Практикум /Владим. гос. ун-т. Владимир, 2004. 36с. ISBN 5-89368-529-6

Издание соответствует программе курса высшей математики. Содержатся необходимые теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

Издание может использоваться студентами технических и физико-математических специальностей.

Библиогр.: 8 назв. УДК 517.312.001.2(075)

ISBN 5-89368-529-6

Предисловие

Практикум содержит краткий теоретический материал, подробно разобранные примеры решения заданий и 720 задач к типовому расчету по неопределенным интегралам, теме, входящей в традиционный курс высшей математики, читаемой студентам инженерных специальностей ВлГУ во втором семестре первого курса.

Задачи разбиты на шесть разделов:

- Использование линейной замены переменных.
- Подведение под знак дифференциала и метод подстановки.
- Использование формулы интегрирования по частям.
- Интегрирование рациональных функций.
- Интегралы, сводящиеся к интегралам от рациональных функций.
- Некоторые специальные приемы нахождения интегралов.

В каждом разделе по четыре задания.

Для более глубокого и детального освоения темы можно использовать литературу из приведенного в конце практикума списка.

Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* непрерывной функции $f(x)$ на интервале (a, b), если при всех $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется ее *неопределенным интегралом*. Если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Так как операции неопределенного интегрирования и дифференцирования взаимно обратны:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \qquad \int dF(x) = dF(x) + C,$$

то *правила неопределенного интегрирования* и *таблица неопределенных интегралов* вытекают из правил дифференцирования и таблицы производных.

Правила неопределенного интегрирования

1. *Свойство линейности*: для непрерывных на общем интервале функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx. \qquad (1)$$

2. *Формула интегрирования по частям*: если $u(x)$ и $v(x)$ две функции, имеющие на одном интервале непрерывные производные, то

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \qquad (2)$$

3. *Правило замены переменной*: если $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \Longrightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (3)$$

Таблица неопределенных интегралов

На каждом из промежутков, принадлежащих области определения подынтегральной функции, выполняются равенства:

1. $\int 0\,dx = C,$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

4'. $\int e^x\,dx = e^x + C,$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C,$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$
9. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| dx + C,$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

Эти интегралы примем за табличные.

Сведение интеграла к табличному

Как и при вычислении производных, при нахождении неопределенных интегралов исходный интеграл с помощью правил сводится к табличным. Есть, впрочем, и различия. Не у каждой элементарной функции первообразная элементарна, например, интегралы $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int e^{x^2}dx$, $\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx$, где $R(x, y)$ — рациональная функция x и y, не выражаются через элементарные функции. Но и в тех случаях, когда первообразная элементарна, алгоритм ее получения можно сформулировать лишь для отдельных классов функций.

Некоторые общие рекомендации все же можно дать.

Чтобы найти неопределенный интеграл, нужно, разложив подынтегральную функцию на сумму более простых, интеграл от каждого из слагаемых либо непосредственно найти по таблице, либо свести к табличному, используя формулу интегрирования по частям или замену переменных. В сложных случаях может понадобиться проведение преобразований в несколько этапов. При желании полученный результат можно проверить, используя соотношение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Longleftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Например:

$$\int \frac{3x^5 - xe^x + \sqrt{x}}{x}\,dx = 3\int x^4 dx - \int e^x\,dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{3}{5}x^5 - e^x + 2x^{1/2} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{5}x^5 - e^x + 2\sqrt{x} + C\right)' = \frac{3}{5}5x^4 - e^x + \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^5 - xe^x + \sqrt{x}}{x},$$

значит интеграл найден верно.

Использование линейной замены переменных

Важнейшим частным случаем формулы замены переменных (3) является линейная замена

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Longrightarrow \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Пример 1. Найти интегралы

a. $\int \frac{3\,dx}{\sin^2(1-4x)}$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

c. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+15}$; d. $\int \cos\frac{x}{3}\sin 5x\cos 2x\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{3\,dx}{\sin^2(1-4x)} = \frac{3}{-4}\int \frac{d(1-4x)}{\sin^2(1-4x)} = \frac{3}{4}\operatorname{ctg}(1-4x) + C; \qquad \text{a.}$$

$$\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{3}{2}\arcsin(2x) + C; \qquad \text{b.}$$

$$\int \frac{dx}{4x^2-12x+15} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x-3/2}{\sqrt{3/2}} + C = \frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-3/2}{\sqrt{3/2}} + C; \qquad \text{c.}$$

$$\int \cos\frac{x}{3}\sin 5x\cos 2x\,dx = \int \tfrac{1}{2}\left(\sin(5+\tfrac{1}{3})x + \sin(5-\tfrac{1}{3})x\right)\cos 2x\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{16}{3}x\cos 2x\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{14}{3}x\cos 2x\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{2}\left(\sin(\tfrac{16}{3}+2)x + \sin(\tfrac{16}{3}-2)x\right)dx +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{2}\left(\sin(\tfrac{14}{3}+2)x + \sin(\tfrac{14}{3}-2)x\right)dx =$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \sin\tfrac{22}{3}x\,dx + \tfrac{1}{4}\int \sin\tfrac{10}{3}x\,dx + \tfrac{1}{4}\int \sin\tfrac{20}{3}x\,dx + \tfrac{1}{4}\int \sin\tfrac{8}{3}x\,dx =$$

$$= -\tfrac{3}{88}\cos\tfrac{22}{3}x - \tfrac{3}{40}\cos\tfrac{10}{3}x - \tfrac{3}{80}\cos\tfrac{20}{3}x - \tfrac{3}{32}\cos\tfrac{8}{3}x + C. \qquad \text{d.}$$

Ответ. a. $\frac{3}{4}\operatorname{ctg}(1-4x) + C$;
b. $\frac{3}{2}\arcsin(2x) + C$;
c. $\frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-3/2}{\sqrt{3/2}} + C$;
d. $-\frac{3}{88}\cos\frac{22}{3}x - \frac{3}{40}\cos\frac{10}{3}x - \frac{3}{80}\cos\frac{20}{3}x - \frac{3}{32}\cos\frac{8}{3}x + C$.

Подведение под знак дифференциала и метод подстановки

Существуют разные варианты использования правила замены переменной (3).

Пример 2. Найти интегралы

a. $\int \frac{dx}{x^3\cos^2\frac{x^2-1}{x^2}}$; b. $\int \cos(3\cdot 7^x + 5)\cdot 7^x\,dx$;

c. $\int \frac{7x-3}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\,dx$; d. $\int \frac{\cos x\,dx}{4-\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^3\cos^2\frac{x^2-1}{x^2}} = \left|\begin{array}{l} z = \frac{x^2-1}{x^2}, \\ x = \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \\ dx = \frac{dz}{2(1-z)^{3/2}}, \end{array}\right| = \int \frac{(1-z)^{3/2}\,dz}{2(1-z)^{3/2}\cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} z + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{x^2} + C; \qquad \text{a.}$$

$$\int \cos(3\cdot 7^x + 5)\cdot 7^x\,dx = \left|\begin{array}{l} z = 3\cdot 7^x + 5, \\ x = \log_7\left(\frac{z-5}{3}\right), \\ dx = \frac{dz}{(z-5)\ln 7}, \end{array}\right| = \int \cos z\cdot\frac{z-5}{3}\cdot\frac{dz}{(z-5)\ln 7} =$$

$$= \frac{1}{3\ln 7}\int \cos z\,dz = \frac{1}{3\ln 7}\cdot\sin z + C = \frac{1}{3\ln 7}\cdot\sin(3\cdot 7^x+5)+C; \qquad \text{b.}$$

$$\int \frac{7x-3}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\,dx = \int \frac{\frac{-7}{2}(-2x-4)-17}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\,dx =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{(-2x-4)\,dx}{\sqrt{-x^2-4x+12}} - 17\int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+16}} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{d(-x^2-4x+12)}{\sqrt{-x^2-4x+12}} - 17\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{4^2-(x+2)^2}} =$$

$$= -\frac{7}{2}\cdot 2\sqrt{-x^2-4x+12} - 17\arcsin\frac{x+2}{4} + C =$$

$$= -7\sqrt{-x^2-4x+12} - 17\arcsin\frac{x+2}{4} + C; \qquad \text{c.}$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{4-\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{3+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + C. \qquad \text{d.}$$

Ответ. a. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{x^2}+C$;
b. $\frac{1}{3\ln 7}\cdot\sin(3\cdot 7^x+5)+C$;
c. $-7\sqrt{-x^2-4x+12}-17\arcsin\frac{x+2}{4}+C$;
d. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C$.

Использование формулы интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям (2), в сокращенном виде

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x),$$

позволяет перебросить операцию дифференцирования с одного сомножителя в подынтегральной функции на другой и применяется, как правило, в тех случаях, когда при этом интеграл упрощается. Например, если под интегралом стоит произведение многочлена на синус, косинус или экспоненту, то за u берется многочлен, а если произведение многочлена на логарифм, арксинус, арккосинус, арктангенс или арккотангенс, то логарифм или соответствующая обратная тригонометрическая функция. Возможно при этом, что формулу (2) нужно будет применять несколько раз.

Пример 3. Найти интегралы

a. $\int(6x-1)\cos 3x\,dx$; b. $\int(x^2+x+1)e^{-x}\,dx$;

c. $\int(3x^2+x)\operatorname{arctg}2x\,dx$; d. $\int(x^2+2x+2)\ln(x+2)\,dx$.

Решение.

$$\int(6x-1)\cos 3x\,dx = \left|\begin{matrix} u=6x-1, & dv=\cos 3x\,dx;\\ du=6\,dx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x;\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}(6x-1)\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 6\,dx =$$

$$= \frac{6x-1}{3}\sin 3x - 2\int\sin 3x\,dx = \frac{6x-1}{3}\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x + C; \qquad \text{a.}$$

$$\int(x^2+x+1)e^{-x}\,dx = \left|\begin{matrix} u=x^2+x+1, & dv=e^{-x}\,dx;\\ du=(2x+1)\,dx, & v=-e^{-x};\end{matrix}\right| =$$

$$= -(x^2+x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}(2x+1)\,dx = -(x^2+x+1)e^{-x} +$$

$$+ \int e^{-x}(2x+1)\,dx = \left|\begin{matrix} u=(2x+1)\,dx, & dv=e^{-x}\,dx;\\ du=2\,dx, & v=-e^{-x};\end{matrix}\right| =$$

$$= -(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}2\,dx =$$

$$= -(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C =$$

$$= -(x^2+3x+4)e^{-x} + C; \qquad \text{b.}$$

$$\int(3x^2+x)\operatorname{arctg}2x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}2x, & dv=(3x^2+x)\,dx;\\ du=\frac{2\,dx}{4x^2+1}, & v=x^3+\frac{x^2}{2};\end{matrix}\right| =$$

$$= \left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{arctg}2x - \int\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\frac{2\,dx}{4x^2+1} =$$

$$= \left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{arctg}2x - \int\frac{2x^3+x^2}{4x^2+1}\,dx =$$

выделяем целую часть дроби

$$= \left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{arctg}2x - \int\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{4x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{2x^3+x^2}{2}\operatorname{arctg}2x - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{4x^2+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{4x^2+1} =$$

$$= \frac{2x^3+x^2}{2}\operatorname{arctg}2x - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\int\frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1} + \frac{1}{8}\int\frac{d(2x)}{(2x)^2+1} =$$

$$= \frac{2x^3+x^2}{2}\operatorname{arctg}2x - \frac{x^2+x}{4} + \frac{1}{16}\ln(4x^2+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x + C; \qquad \text{c.}$$

$$\int(x^2+2x+2)\ln(x+2)\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+2), & dv = (x^2+2x+2)\,dx; \\ du = \dfrac{dx}{x+2}, & v = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x; \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)\ln(x+2) - \int\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+6x}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3+3x^2+6x}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+6x}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{3}\int\frac{(x^2+x+4)(x+2)-8}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+6x}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{3}\int(x^2+x+4)\,dx + \frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+6x}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x\right) + \frac{8}{3}\ln(x+2) + C =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+6x+8}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C. \qquad \text{d.}$$

Ответ. a. $\frac{6x-1}{3}\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x + C$;
b. $-(x^2+3x+4)e^{-x} + C$;
c. $\frac{2x^3+x^2}{2}\operatorname{arctg}2x - \frac{x^2+x}{4} + \frac{1}{16}\ln(4x^2+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x + C$;
d. $\frac{x^3+3x^2+6x+8}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C$.

Интегрирование рациональных функций

Для интегрирования рациональной функции — отношения двух многочленов $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$ выделяем, если это необходимо, целую часть, раскладывая неправильную дробь на сумму многочлена и правильной дроби, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{S_r(x)}{Q_n(x)}$, $r < n$, а правильную дробь раскладываем, в свою очередь, на сумму простейших дробей — дробей вида $\frac{a}{x-b}$, $\frac{a}{(x+b)^k}$, $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$, $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}$, где $k > 1$, $c^2 - 4d < 0$. Интегралы первых трех типов легко сводятся к табличным, для интегрирования дробей четвертого

типа следует воспользоваться рекуррентным соотношением

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}} + (2k-3)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}\right). \qquad (4)$$

В частности, $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$.

Пример 4. Найти интегралы

a. $\int\frac{x^4-5x^3+x^2+6x-14}{(x-4)(x^2+3)}\,dx$; b. $\int\frac{2x^3-3x^2-6x-9}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$;
c. $\int\frac{3x^3-16x^2+12x+45}{(x^2+2)(x^2-8x+17)}\,dx$; d. $\int\frac{4x^4+2x^3+2x^2-x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$.

Решение. a. Дробь $\frac{x^4-5x^3+x^2+6x-14}{(x-4)(x^2+3)} = \frac{x^4-5x^3+x^2+6x-14}{x^3-4x^2+3x-12}$ не является правильной, поэтому предварительно выделим целую часть.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x - 14 & x^3 - 4x^2 + 3x - 12 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12x} \phantom{{}-14} & x - 1 \\ -x^3 - 2x^2 + 18x - 14 & \\ \underline{-x^3 + 4x^2 - 3x + 12} & \\ -6x^2 + 21x - 26 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^4-5x^3+x^2+6x-14}{(x-4)(x^2+3)}\,dx = \int\left(x - 1 - \frac{6x^2-21x+26}{(x-4)(x^2+3)}\right)dx.$$

Разложим правильную дробь $\frac{6x^2-21x+26}{(x-4)(x^2+3)}$ на сумму простейших. Каждому из множителей знаменателя отвечает простейшая дробь, степень числителя которой на единицу меньше степени знаменателя.

$$\frac{6x^2-21x+26}{(x-4)(x^2+3)} = \frac{a}{x-4} + \frac{bx+c}{x^2+3} = \frac{a(x^2+3)+(bx+c)(x-4)}{(x-4)(x^2+3)} =$$

$$= \frac{(b+a)x^2 + (c-4b)x + (3a-4c)}{(x-4)(x^2+3)}.$$

Так как знаменатели правой и левой частей равенства совпадают, то должны совпадать и числители, а следовательно, и коэффициенты при следовательно,

$$\begin{cases} a+b=4, \\ b+c=2, \\ 2a+b+c+d=2, \\ b+c+d+e=-1, \\ a+c+e=-1; \end{cases}$$

$$a=1,\quad b=3,\quad c=-1,\quad d=-2,\quad e=-1.$$

Итак,

$$\int \frac{4x^4+2x^3+2x^2-x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{3x-1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1} - \int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x\right) + C =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x-2}{2(x^2+1)} + C,$$

где последнее слагаемое найдено по формуле (4) для $a=1$, $k=2$.

Ответ. a. $\frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x-4| - 2\ln(x^2+3) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$;
b. $-2\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + C$;
c. $\ln(x^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln(x^2-8x+17) + \operatorname{arctg}(x-4) + C$;
d. $\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x-2}{2(x^2+1)} + C$.

Интегралы, сводящиеся к интегралам от рациональных функций

Интегралы от некоторых типов функций сводятся с помощью соответствующей замены к интегралам от рациональных функций.

Например, интегралы вида $\int R(e^x)\,dx$, где $R(e^x)$ — рационально зависит от e^x, сводятся к интегралам от рациональных функций при помощи замены $z=e^x$.

Для нахождения интегралов $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ используется *универсальная тригонометрическая подстановка* $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. В тех случаях, когда рациональное выражение $R(\cos x, \sin x)$ меняет знак при смене знака $\cos x$, к более простым интегралам приводит замена $z=\sin x$; если

$R(\cos x, \sin x)$ меняет знак при смене знака $\sin x$, следует воспользоваться заменой $z=\cos x$; если же $R(\cos x, \sin x)$ не меняется при одновременной смене знака $\sin x$ и $\cos x$, интеграл берется заменой $z=\operatorname{tg} x$.

Для вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right)dx$ следует использовать подстановку $z=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$.

Пример 5. Найти интегралы

a. $\int \frac{3e^{2x}+18e^x-25}{e^{2x}+2e^x-15}\,dx$; b. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}(x-1)}\,dx$;
c. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}\,dx$; d. $\int \frac{\cos x\,dx}{3-\cos^2 x}$.

Решение. Детали разложения рациональных функций на сумму простейших дробей здесь опущены.

$$\int\frac{3e^{2x}+18e^x-25}{e^{2x}+2e^x-15}\,dx = \left|\begin{array}{c} z=e^x \\ x=\ln z \\ dx=\dfrac{dz}{z}\end{array}\right| = \int\frac{3z^2+18z-25}{z^2+2z-15}\cdot\frac{dz}{z} =$$

$$= \int\frac{3z^2+18z-25}{z(z-3)(z+5)}\,dz = \frac{5}{3}\int\frac{dz}{z}+\frac{7}{3}\int\frac{dz}{z-3}-\int\frac{dz}{z+5} = \frac{5}{3}\ln|z| +$$

$$+\frac{7}{3}\ln|z-3| - \ln|z+5| + C = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}\ln|e^x-3| - \ln(e^x+5) + C. \qquad \text{a.}$$

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}(x-1)}\,dx = \left|\begin{array}{c} z=\sqrt[4]{x} \\ x=z^4 \\ dx=4z^3\,dz\end{array}\right| = \int\frac{1+z^2}{z(z^4-1)}4z^3\,dz = 4\int\frac{z^2}{z^2-1}\,dz =$$

$$= 4\int\frac{(z^2-1)+1}{z^2-1}\,dz = 4\int dz + 4\int\frac{dz}{z^2-1} = 4z + 2\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left|\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\right| + C. \qquad \text{b.}$$

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} z=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \\ x=2\operatorname{arctg} z & dx=\frac{2\,dz}{1+z^2} \\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2} & \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}\end{array}\right| = \int\frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$$

$$= -2\int\frac{dz}{z^2-2z-1} = -2\int\frac{d(z-1)}{(z-1)^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(z-1)}{\sqrt{2}-(z-1)}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C. \qquad \text{c.}$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{3 - \cos^2 x} = \left| \begin{array}{r} z = \sin x \\ x = \arcsin z \\ dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ \cos x = \sqrt{1 - z^2} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{1 - z^2}}{2 + z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} =$$

$$= \int \frac{dz}{2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C. \qquad \text{d.}$$

Ответ. a. $\frac{5}{3}x + \frac{7}{3} \ln |e^x - 3| - \ln(e^x + 5) + C$;
b. $4\sqrt[4]{x} + 2 \ln \left| \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} \right| + C$;
c. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C$;
d. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C$.

Некоторые специальные приемы нахождения интегралов

Вычисление некоторых интегралов требует использования специальных приемов.

Так, *подстановки Эйлера* применяются при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$. Такие интегралы сводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t, если сделать подходящую замену, а именно

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x \pm t$, если $a > 0$.
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$.
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$, если подкоренное выражение имеет действительные корни x_1 и x_2.

В первом и втором случаях знак плюс или минус перед t выбирается произвольно.

Выражение $x^m(a + bx^n)^p \, dx$, где m, n и p — рациональные числа, называется *дифференциальным биномом*. Интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p \, dx$ сводится к интегралу от рациональной функции лишь в одном из трех случаев:

- p — целое число, применив формулу бинома Ньютона, сведем интеграл к сумме интегралов от степенных функций;
- $\frac{m+1}{n}$ — целое число, замена $z = (a + bx^n)^{1/k}$, где k — знаменатель дроби p;
- $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, замена $z = \left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{1/k}$, где k — знаменатель дроби p.

Для нахождения ряда интегралов бывает полезно использование рекуррентных соотношений, одним из которых является (4).

При вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ вместо подстановок Эйлера можно, выделив, если нужно, полный квадрат из квадратного трехчлена, использовать тригонометрические подстановки, сводящие исходный интеграл к интегралу от рациональной тригонометрической функции:

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$ — используется замена $x = a \sin z$;
- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$ — используется замена $x = \frac{a}{\cos z}$;
- $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, dx$ — используется замена $x = a \operatorname{tg} z$.

Пример 6. Найти интегралы

a. $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x-x^2}} \, dx$; b. $\int \sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{x}}{x^5}} \, dx$;

c. $\int \frac{dx}{(x^2+8x+18)^2}$; d. $\int \frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{x^5} \, dx$.

Решение. a. Здесь $a = -1 < 0$, $c = 4 > 0$, $\sqrt{c} = 2$ — второй вариант подстановки Эйлера. Сделаем замену по формуле

$$\sqrt{4 + x - x^2} = xt - 2.$$

После возведения в квадрат получим

$$4 + x - x^2 = x^2t^2 - 4xt + 4,$$
$$x - x^2 = x^2t^2 - 4xt,$$
$$1 - x = xt^2 - 4t.$$

Отсюда

$$x = \frac{4t+1}{t^2+1}, \qquad dx = \frac{-4t^2-2t+4}{(t^2+1)^2}\,dt, \qquad t = \frac{\sqrt{4+x-x^2}+2}{x}.$$

Выполняя в интеграле подстановку, получим

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4+x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{4t+1}{t^2+1}\left(\frac{4t^2+t}{t^2+1}-2\right)} \cdot \frac{-2(2t^2+t-2)}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{2t^2+t-2}{\frac{4t+1}{t^2+1}\cdot\frac{4t^2+t-2t^2-2}{t^2+1}} \cdot \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -2\int \frac{(2t^2+t-2)\,dt}{(4t+1)(2t^2+t-2)} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{4t+1} = -\frac{1}{2}\ln|4t+1| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4\sqrt{4+x-x^2}+8}{x}+1\right| + C.$$

b. Здесь $\int \sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{x}}{x^5}}\,dx = \int x^{-5/3}(2-x^{1/2})^{1/3}\,dx$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-5/3+1}{1/2} = -\frac{4}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1$. Целым является лишь третье число, и следует сделать замену $z = \left(\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{1/3}$, $x = \frac{4}{(z^3+1)^2}$, $dx = -\frac{24z^2\,dz}{(z^3+1)^3}$. Заметим, что

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{x}}{x^5}}\,dx = \int \left(\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}\,dx =$$

$$= \int z \cdot \left(\frac{(z^2+1)^2}{4}\right)^{3/2} \cdot \frac{-24z^2\,dz}{(z^3+1)^3} = -3\int z^3\,dz =$$

$$= -\frac{3}{4}z^4 + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{(2-\sqrt{x})^4}{x^2}} + C.$$

c. Используя следствие из формулы (4), получим при $a^2 = 2$

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+18)^2} = \int \frac{d(x+4)}{((x+4)^2+2)^2} = \left|z = x+4\right| =$$

$$= \int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{x+4}{4(x^2+8x+18)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}} + C.$$

d. Соответствует второму варианту использования тригонометрической подстановки

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{x^5}\,dx = \left|\begin{array}{r} x = \dfrac{2}{\cos z} \\ z = \arccos\dfrac{2}{x} \\ dx = \dfrac{2\sin z}{\cos^2 z}\,dz \\ x^2 - 4 = \dfrac{4\sin^2 z}{\cos^2 z} \end{array}\right| = \int \sqrt{\left(\frac{4\sin^2 z}{\cos^2 z}\right)^3} \cdot \frac{\cos^5 z}{32} \cdot \frac{2\sin z}{\cos^2 z}\,dz =$$

$$= \int \frac{16\sin^4 z\cos^5 z}{32\cos^5 z}\,dz = \frac{1}{2}\int \sin^4 z\,dz = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2z)\right)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{8}\int(1 - 2\cos 2z + \cos^2 2z)\,dz = \frac{1}{8}\int\left(1 - 2\cos 2z + \frac{1}{2}(1+\cos 4z)\right)dz =$$

$$= \frac{1}{16}\int(3 - 4\cos 2z + \cos 4z)\,dz = \frac{1}{16}\left(3z - 2\sin 2z + \frac{1}{4}\sin 4z\right) + C.$$

Для упрощения результата обратной замены выразим полученный ответ через $\cos z = \frac{2}{x}$.

$$\sin 2z = 2\cos z\sqrt{1-\cos^2 z} = \frac{4}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}},$$

$$\sin 4z = 2\sin 2z\cos 2z = 4\cos z\sqrt{1-\cos^2 z}(2\cos^2 z - 1) = \frac{8}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\left(\frac{8}{x^2}-1\right),$$

и окончательно

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{x^5}dx = \frac{1}{16}\left(3\arccos\frac{2}{x} - 4\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\frac{2}{x} + \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\frac{2}{x}\left(\frac{8}{x^2}-1\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{16}\left(3\arccos\frac{2}{x} - 10\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + 16\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\right) + C.$$

Ответ. a. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4\sqrt{4+x-x^2}+8}{x}+1\right| + C$;

b. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{(2-\sqrt{x})^4}{x^2}} + C$;

c. $\frac{x+4}{4(x^2+8x+18)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}} + C$;

d. $\frac{1}{16}\left(3\arccos\frac{2}{x} - 10\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + 16\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\right) + C$.

Задания к типовому расчету

Задача 1. Найти интегралы, используя линейную замену переменной.

1.a. $\int \frac{5\,dx}{\cos^2(3-2x)}$; b. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3-2x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+25}$; d. $\int \sin\frac{x}{2}\cos 5x\cos 3x\,dx$.

2.a. $\int 2\sqrt{3x+7}\,dx$; b. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3x^2+7}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+5}$; d. $\int \cos 5x\sin 2x\cos 3x\,dx$.

3.a. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{1-3x}}$; b. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$; d. $\int \sin^2\frac{x}{2}\sin 4x\,dx$.

4.a. $\int 2\sin(2x+5)\,dx$; b. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2x^2+5}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+16x+41}$; d. $\int \cos\frac{2x}{3}\cos 6x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

5.a. $\int 8\cos(1-2x)\,dx$; b. $\int \frac{8\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2-10x+21}$; d. $\int \cos^2 3x\sin 4x\,dx$.

6.a. $\int 4\cdot 3^{5x-2}\,dx$; b. $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{5x^2-2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+12x-7}$; d. $\int \sin x\sin 5x\cos 2x\,dx$.

7.a. $\int \frac{3\,dx}{\cos^2(2x-4)}$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{2x^2-4}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$; d. $\int \cos 2x\cos 3x\sin 5x\,dx$.

8.a. $\int 7\sin(4x+5)\,dx$; b. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{4x^2+5}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2-20x+9}$; d. $\int \cos^2 7x\cos^2 3x\,dx$.

9.a. $\int \frac{4\,dx}{\sin^2(3x+5)}$; b. $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{3x^2+5}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2-8x+12}$; d. $\int \sin\frac{x}{2}\cos^2 3x\,dx$.

10.a. $\int 4e^{1-5x}\,dx$; b. $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{1-5x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+8x+12}$; d. $\int \sin x\sin 5x\cos\frac{2x}{3}\,dx$.

11.a. $\int 9\cos(5-\frac{x}{2})\,dx$; b. $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{5-\frac{1}{2}x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; d. $\int \sin 2x\cos 7x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

12.a. $\int 3\cdot 5^{2x-1}\,dx$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{2x^2-1}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+10x+21}$; d. $\int \sin^2\frac{2x}{3}\cos x\,dx$.

13.a. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$; b. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+20x+41}$; d. $\int \cos 6x\cos x\sin 4x\,dx$.

14.a. $\int 6\cos(\frac{x}{2}-7)\,dx$; b. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-7}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+4x-12}$; d. $\int \sin\frac{x}{2}\sin 2x\sin 3x\,dx$.

15.a. $\int \frac{7\,dx}{\cos^2(4+3x)}$; b. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{4+3x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+13}$; d. $\int \cos 7x\cos x\cos\frac{2x}{3}\,dx$.

16.a. $\int \frac{6\,dx}{\sin^2(3x-5)}$; b. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{3x^2-5}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+20x+21}$; d. $\int \sin^2 2x\sin 7x\,dx$.

17.a. $\int 3\sin(\frac{x}{2}+5)\,dx$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+5}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2-20x+29}$; d. $\int \sin^2 5x\sin^2 7x\,dx$.

18.a. $\int 2\cos(\frac{x}{2}-9)\,dx$; b. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-9}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$; d. $\int \sin^2 4x\cos 8x\,dx$.

19.a. $\int 9\cdot 5^{8-5x}\,dx$; b. $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{8-5x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$; d. $\int \cos 6x\sin\frac{x}{2}\cos 5x\,dx$.

20.a. $\int 4\sqrt[4]{3-5x}$; b. $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{3-5x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2-20x+41}$; d. $\int \sin 4x\sin 5x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

21.a. $\int 3\sin(4x-5)\,dx$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{4x^2-5}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$; d. $\int \cos 5x\cos 4x\sin 3x\,dx$.

22.a. $\int \frac{4\,dx}{\sin^2(3+2x)}$; b. $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{3+2x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+8x-21}$; d. $\int \sin^2 x\cos^2 7x\,dx$.

23.a. $\int \frac{3\,dx}{(6-\frac{x}{2})^{5/6}}\,dx$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{6-\frac{1}{2}x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$; d. $\int \sin^2 6x\cos 5x\,dx$.

24.a. $\int 4e^{1-7x}$; b. $\int \sin 2x\sin 7x\cos 3x\,dx$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}$; d. $\int \sin 3x\sin 2x\cos 4x\,dx$.

25.a. $\int 7\sin(5-\frac{x}{2})\,dx$; b. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{5-\frac{1}{2}x^2}}$;
c. $\int \frac{dx}{x^2+6x+18}$; d. $\int \sin 2x\cos 7x\cos 5x\,dx$.

26.a. $\int \frac{3\,dx}{5^{2x-6}}$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{2x^2-6}}$;
c. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+25}$; d. $\int \sin^2 7x\sin 6x\,dx$.

27.a. $\int \frac{3\,dx}{\cos^2(7-5x)}$; b. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{7-5x^2}}$;

c. $\int \frac{dx}{4x^2+20x+9}$;

d. $\int \sin^2 3x \cos^2 5x\, dx$.

28.a. $\int 6(3-4x)^{3/5}\, dx$;

b. $\int \frac{6\, dx}{\sqrt{3-4x^2}}$;

c. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

d. $\int \sin 3x \sin \frac{2x}{3} \cos x\, dx$.

29.a. $\int \frac{3\, dx}{\sin^2(5x+8)}$;

b. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{5x^2+8}}$;

c. $\int \frac{dx}{4x^2-20x+21}$;

d. $\int \cos x \cos 3x \cos 6x\, dx$.

30.a. $\int 7e^{5x-2}\, dx$;

b. $\int \frac{7\, dx}{\sqrt{5x^2-2}}$;

c. $\int \frac{dx}{4x^2+20x+9}$;

d. $\int \cos^2 x \sin 7x\, dx$.

Задача 2. Найти интегралы, используя подходящую замену переменной.

1.a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+9x}}$;

b. $\int \sin x \sqrt{\cos^3 x}\, dx$;

c. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2x-15}}\, dx$;

d. $\int \frac{2^x\, dx}{4^x+3}$.

2.a. $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{2+3\sqrt{x^3}}\, dx$;

b. $\int \frac{e^x\, dx}{5e^{2x}-2}$;

c. $\int \frac{4x-8}{\sqrt{-x^2+6x+16}}\, dx$;

d. $\int e^{2\cos x} \sin x\, dx$.

3.a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$;

b. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x+5}\, dx}{\cos^2 x}$;

c. $\int \frac{6x-8}{\sqrt{x^2-4x+5}}\, dx$;

d. $\int \frac{3\sin 2x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

4.a. $\int \frac{\sqrt[7]{5+\frac{1}{x^2}}\, dx}{x^3}$;

b. $\int \frac{\cos x\, dx}{(3-2\sin x)^2}$;

c. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-24}}\, dx$;

d. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^{2x}+2}}$.

5.a. $\int \frac{dx}{x^2\sin^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}$;

b. $\int \cos(3e^x+5)\cdot e^x\, dx$;

c. $\int \frac{10x+6}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin x\, dx}{2-\sin^2 x}$.

6.a. $\int (x+1)\, 5^{x^2+2x}\, dx$;

b. $\int \frac{\sin x\, dx}{3+2\cos x}$;

c. $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-6x}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt[3]{5+2\cos^2 x}}$.

7.a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{5-\sqrt{x}}}$;

b. $\int \frac{e^x\, dx}{\sin^2(e^x)}$;

c. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-5}}\, dx$;

d. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1-\sin x}$.

8.a. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$;

b. $\int \frac{\arccos^4 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

c. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{-x^2-2x+15}}\, dx$;

d. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt[3]{1-2e^x}}$.

9.a. $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\, dx$;

b. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x-5}$;

c. $\int \frac{8x-17}{\sqrt{x^2-6x}}\, dx$;

d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+3}\cdot(1+x^2)}$.

10.a. $\int \frac{(\ln^2 x+5)\, dx}{x}$;

b. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{3e^{2x}+5}}$;

c. $\int \frac{10x+17}{\sqrt{-x^2-8x-12}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin x\, dx}{(2\cos x+7)^3}$.

11.a. $\int \sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}\,\frac{dx}{x^4}$;

b. $\int \frac{(\cos x-1)\, dx}{\sqrt{x-\sin x}}$;

c. $\int \frac{2x+10}{\sqrt{-x^2-10x-9}}\, dx$;

d. $\int \frac{e^x\, dx}{2e^{2x}-3}$.

12.a. $\int \sqrt{\frac{5-\sqrt{x}}{x}}\, dx$;

b. $\int \frac{\operatorname{tg}^3(x-2)\, dx}{2\cos^2(x-2)}$;

c. $\int \frac{8x+15}{\sqrt{x^2+6x}}\, dx$;

d. $\int e^x \sqrt{3-7e^x}\, dx$.

13.a. $\int \frac{\sqrt[3]{5-2\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}$;

b. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+3}\, dx}{1+x^2}$;

c. $\int \frac{10x+9}{\sqrt{-x^2-4x+5}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x+4}$.

14.a. $\int \sqrt{x}\cdot 4^{\sqrt{x^3}}\, dx$;

b. $\int \frac{2\arcsin x+3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

c. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\, dx$;

d. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[3]{3e^{2x}+5}}$.

15.a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-\ln^2 x}}$;

b. $\int \frac{\sin x\, dx}{7\cos x-1}$;

c. $\int \frac{10x-24}{\sqrt{-x^2+8x-15}}\, dx$;

d. $\int \frac{\arcsin^3 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16.a. $\int 7^{1/x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$;

b. $\int \frac{e^x\, dx}{5-6e^{2x}}$;

c. $\int \frac{8x-15}{\sqrt{-x^2+8x-7}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt[3]{5\sin^2 x+4}}$.

17.a. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x+7}}$;

b. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^2 x+3}$;

c. $\int \frac{10x+15}{\sqrt{x^2+8x-9}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sqrt[3]{8-\operatorname{arctg} 2x}\, dx}{4x^2+1}$.

18.a. $\int \cos\frac{2x-3}{5x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

b. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}+3}}$;

c. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+2x+15}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin x\, dx}{1-3\cos x}$.

19.a. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x^2+x^{5/2}}}$;

b. $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{4^x-3}}$;

c. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{x^2-6x+18}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{2+3\cos x}}$.

20.a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$;

b. $\int \frac{3^x\, dx}{9^{x+1}-2}$;

c. $\int \frac{10x-19}{\sqrt{x^2-8x+12}}\, dx$;

d. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt[3]{3-\cos^2 x}}$.

21.a. $\int \frac{(\ln x+5)^2\,dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; b. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}$;
c. $\int \frac{8x-13}{\sqrt{x^2-6x-7}}\,dx$; d. $\int 2^{\cos x-1}\sin x\,dx$.

22.a. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$; b. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{2-\sin x}}$;
c. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+4x+21}}\,dx$; d. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x+1}\,dx}{\cos^2 x}$.

23.a. $\int \frac{x^2\,dx}{\sin^2(x^3)}$; b. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+5}\,dx}{\sin^2 x}$;
c. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{-x^2+4x+21}}\,dx$; d. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{7-3e^{6x}}$.

24.a. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$; b. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{\sin 2x+3}}$;
c. $\int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; d. $\int \frac{2^{3x}\,dx}{5\cdot 4^{3x}+7}$.

25.a. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-7x^6}}$; b. $\int \frac{(2\operatorname{tg} x+3)^3\,dx}{\sin^2 x}$;
c. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$; d. $\int \frac{5^x\,dx}{\sqrt{7-5^{x+1}}}$.

26.a. $\int \frac{x^5\,dx}{3+2x^{12}}$; b. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{5-\cos^2 x}}$;
c. $\int \frac{10x+20}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$; d. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt[5]{2-2^{x+1}}}$.

27.a. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{3x^8+5}}$; b. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\ln\cos x}$;
c. $\int \frac{10x+15}{\sqrt{x^2+8x+32}}\,dx$; d. $\int \frac{e^{\arccos x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

28.a. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x^3}}{x}\,dx$; b. $\int e^x\sqrt[5]{7-e^{x-2}}\,dx$;
c. $\int \frac{2x-2}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\,dx$; d. $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{(x+\sin x)^5}$.

29.a. $\int \frac{2x^3\,dx}{3x^4-5}$; b. $\int \frac{(x-\sin x)\,dx}{\sqrt{x^2+2\cos x}}$;
c. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; d. $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{5-9^{x-1}}}$.

30.a. $\int \frac{x^5\,dx}{\cos^2(3x^6-7)}$; b. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{2-e^x}}$;
c. $\int \frac{10x-19}{\sqrt{-x^2+8x+9}}\,dx$; d. $\int \frac{(5\cos x-2\sin x)\,dx}{\sqrt{5\sin x+2\cos x}}$.

Задача 3. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

1.a. $\int (4x-1)\sin 2x\,dx$; b. $\int x^2e^{-3x}\,dx$;
c. $\int (2x+3)\operatorname{arctg} x\,dx$; d. $\int (3x^2-1)\ln(5-x)\,dx$.

2.a. $\int (6-5x)\cos\frac{x}{3}\,dx$; b. $\int (2x^2-x)e^{2x}\,dx$;

c. $\int \arcsin 2x\,dx$; d. $\int \frac{\ln x}{(x+3)^2}\,dx$.

3.a. $\int (2x+7)\sin\frac{x}{4}\,dx$; b. $\int (1-x^2)e^{-x}\,dx$;
c. $\int \arccos 3x\,dx$; d. $\int (3x^2+2x)\ln(x+2)\,dx$.

4.a. $\int (4-x)\cos 4x\,dx$; b. $\int (2x^2+3)e^{x/2}\,dx$;
c. $\int x^2\operatorname{arcctg} x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}\,dx$.

5.a. $\int (3x+7)\sin 3x\,dx$; b. $\int (x^2+3)e^{-2x}\,dx$;
c. $\int (3x^2+4)\operatorname{arctg} 2x\,dx$; d. $\int (4x-9)\ln(3-2x)\,dx$.

6.a. $\int (6x-2)\cos\frac{x}{6}\,dx$; b. $\int (x-x^2)e^{-x/3}\,dx$;
c. $\int \arcsin 4x\,dx$; d. $\int (6x^2-4x)\ln x\,dx$.

7.a. $\int (4x-5)\sin\frac{x}{3}\,dx$; b. $\int (3x^2+5)e^{-3x}\,dx$;
c. $\int \arccos\frac{x}{2}\,dx$; d. $\int \frac{\ln x}{(4x-1)^2}\,dx$.

8.a. $\int (4x+3)\cos 5x\,dx$; b. $\int (2x^2+x)e^{3x}\,dx$;
c. $\int (3x^2+2x)\operatorname{arcctg} x\,dx$; d. $\int x\ln(2x+7)\,dx$.

9.a. $\int (2-5x)\sin 3x\,dx$; b. $\int (x^2-5x)e^{2x}\,dx$;
c. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(3x-2)}{(3x-2)^4}\,dx$.

10.a. $\int (4-5x)\cos\frac{x}{3}\,dx$; b. $\int (x-2x^2)e^{-2x}\,dx$;
c. $\int \arcsin\frac{x}{3}\,dx$; d. $\int (2x+3)\ln(x+3)\,dx$.

11.a. $\int (5x-1)\sin\frac{x}{2}\,dx$; b. $\int (x^2+2x)e^{4x}\,dx$;
c. $\int \arccos 2x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(4-x)}{(x+2)^2}\,dx$.

12.a. $\int (3x-5)\cos 4x\,dx$; b. $\int (x^2-3)e^{-x/2}\,dx$;
c. $\int \operatorname{arcctg} 3x\,dx$; d. $\int (6x+5)\ln(3x-2)\,dx$.

13.a. $\int (7-2x)\sin 4x\,dx$; b. $\int (6x^2+4x)e^{x/3}\,dx$;
c. $\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(2x-7)}{(2x-7)^2}\,dx$.

14.a. $\int (3x-1)\cos\frac{x}{2}\,dx$; b. $\int (5x^2-2)e^{-4x}\,dx$;
c. $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$; d. $\int x\ln(4x+6)\,dx$.

15.a. $\int (3x-2)\sin\frac{x}{4}\,dx$; b. $\int (6-x^2)e^{3x}\,dx$;
c. $\int \arccos\frac{x}{3}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(x+5)}{(3x+1)^2}\,dx$.

16.a. $\int (3-4x)\cos 2x\,dx$; b. $\int (x^2-4x)e^{x/4}\,dx$;
c. $\int (4+3x^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\,dx$; d. $\int (4x-1)\ln(2x+9)\,dx$.

17.a. $\int (6x-1)\sin 2x\,dx$; b. $\int (2x^2+7)e^{x/3}\,dx$;
c. $\int (3x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(3x-1)}{(3x-2)^2}\,dx$.

18.a. $\int (2x+5)\cos\frac{x}{3}\,dx$; b. $\int (3x^2+x)e^{2x}\,dx$;
c. $\int \arcsin 3x\,dx$; d. $\int (6x+5)\ln(1-3x)\,dx$.

19.a. $\int (3x+4)\sin\frac{x}{6}\,dx$; b. $\int (5x^2-2x)e^{4x}\,dx$;
c. $\int \arccos 6x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(4x+1)}{(4x+1)^4}\,dx$.

20.a. $\int (8x-3)\cos 4x\,dx$; b. $\int (6-2x^2)e^{-x/2}\,dx$;
c. $\int \mathrm{arcctg}\,2x\,dx$; d. $\int (9x^2-16x)\ln(3x-8)\,dx$.

21.a. $\int (6-4x)\sin 4x\,dx$; b. $\int (x^2+x)e^{-x/3}\,dx$;
c. $\int \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(5x-2)}{(x+4)^2}\,dx$.

22.a. $\int (3-6x)\cos\frac{x}{2}\,dx$; b. $\int (2x^2-5x)e^{5x}\,dx$;
c. $\int \arcsin\frac{x}{5}\,dx$; d. $\int (3x^2-2x)\ln(x+3)\,dx$.

23.a. $\int (7-2x)\sin\frac{x}{3}\,dx$; b. $\int (x-2x^2)e^{-x}\,dx$;
c. $\int \arccos 4x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(2x+11)}{(2x+11)^3}\,dx$.

24.a. $\int (12x+5)\cos 6x\,dx$; b. $\int (3x^2+8)e^{x/3}\,dx$;
c. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{3}\,dx$; d. $\int (6x-7)\ln(3x+8)\,dx$.

25.a. $\int (9x-11)\sin 3x\,dx$; b. $\int (4x^2+3)e^{-x/4}\,dx$;
c. $\int \arcsin 5x\,dx$; d. $\int \frac{\ln(x-4)}{(2x+1)^2}\,dx$.

26.a. $\int (3x+8)\cos\frac{x}{4}\,dx$; b. $\int (x-4x^2)e^{6x}\,dx$;
c. $\int (2x^3+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; d. $\int (8x-3)\ln(4x+1)\,dx$.

27.a. $\int (2x-9)\sin\frac{x}{5}\,dx$; b. $\int (3-4x^2)e^{-4x}\,dx$;
c. $\int \arcsin\frac{x}{4}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(3x-1)}{(3x-1)^6}\,dx$.

28.a. $\int (4-10x)\cos 5x\,dx$; b. $\int (2x^2+6x)e^{-x}\,dx$;
c. $\int \arccos\frac{x}{5}\,dx$; d. $\int (12x+5)\ln(6x-5)\,dx$.

29.a. $\int (12x-1)\sin 6x\,dx$; b. $\int (5x^2-4)e^{x/3}\,dx$;
c. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{4}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(x-7)}{(2x-3)^2}\,dx$.

30.a. $\int (4x-9)\cos\frac{x}{5}\,dx$; b. $\int (x^2-4x)e^{-2x}\,dx$;
c. $\int (2x+x^3)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\,dx$; d. $\int \frac{\ln(2x+9)}{(2x+9)^4}\,dx$.

Задача 4. Найти интегралы от рациональных функций.

1.a. $\int \frac{2x^4+9x^3+14x^2+62x+4}{(x+4)(x^2+5)}\,dx$; b. $\int \frac{2x^3+17x^2+39x+36}{(x+4)(x+2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{6x^3+2x^2+15x+59}{(x^2+4)(x^2-6x+13)}\,dx$; d. $\int \frac{4x^4-5x^3+2x^2+13x-8}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

2.a. $\int \frac{2x^4-x^3-5x^2-6x-64}{(x+2)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{-5x^3+9x^2+24x-19}{(x+3)(x-2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{6x^3+2x^2+15x+59}{(x^2+4)(x^2-6x+13)}\,dx$; d. $\int \frac{3x^4-10x^3-6x^2-8x-3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

3.a. $\int \frac{x^4-4x^3-5x^2+2x-39}{(x-5)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{-x^3+12x^2-42x+53}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{5x^3+6x^2+19x-16}{(x^2+1)(x^2+2x+10)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4+x^3+4x^2-x-2}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$.

4.a. $\int \frac{4x^4+2x^3+27x^2+10x+5}{(x+1)(x^2+5)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3+4x^2-32x+5}{(x-5)(-1+x)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{8x^3+3x^2+7x-5}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4+6x^3+4x^2+12x+1}{(2+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

5.a. $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2-4x+18}{(x+3)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{5x^3+8x^2-17x-1}{(x+4)(-1+x)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{2x^3-6x^2+43x-9}{(x^2+4)(x^2-10x+29)}\,dx$; d. $\int \frac{9x^4+10x^3+14x^2+4x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$.

6.a. $\int \frac{x^4+4x^3-3x^2+28x-14}{(x+5)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{4x^3-7x+9}{(x-2)(x+1)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{2x^3-7x^2+29x+27}{(x^2+5)(x^2-10x+29)}\,dx$; d. $\int \frac{3x^4+22x^3+10x^2+12x-3}{(x+3)(x^2+1)^2}\,dx$.

7.a. $\int \frac{4x^4+6x^3+9x^2+9x-2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{4x^3-5x^2+3x+4}{(x+2)(-1+x)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{4x^3-13x^2+39x-43}{(x^2+1)(10-2x+x^2)}\,dx$; d. $\int \frac{4x^4-5x^3+7x^2-21x+11}{(x-3)(x^2+1)^2}\,dx$.

8.a. $\int \frac{3x^4-5x^3+21x^2-36x-31}{(x-2)(x^2+7)}\,dx$; b. $\int \frac{6x^3+21x^2+10x-24}{(x-2)(x+2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{4x^3-19x^2+34x-26}{(x^2+2)(x^2-4x+8)}\,dx$; d. $\int \frac{9x^4-11x^3+6x^2-9x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

9.a. $\int \frac{x^4-x^2-17x-51}{(x-3)(x^2+6)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3-14x^2+48x-17}{(x+4)(-1+x)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{4x^3-9x^2+15x+18}{(x^2+1)(x^2-8x+20)}\,dx$; d. $\int \frac{x^4+10x^3-2x^2+34x+9}{(x+3)(x^2+1)^2}\,dx$.

10.a. $\int \frac{4x^4-11x^3+16x^2-29x+11}{(x-2)(x^2+3)}\,dx$; b. $\int \frac{6x^3-19x^2+10x+16}{(x+2)(x-2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{2x^3-5x^2-3x-1}{(x^2+4)(x^2-4x+5)}\,dx$; d. $\int \frac{9x^4-9x^3+13x^2-3x+2}{(-1+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

11.a. $\int \frac{3x^4+5x^3-14x^2-2}{(x+3)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{8x^3-24x^2+23x-9}{(x-2)(-1+x)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{x^3+6x^2+41x+50}{(x^2+1)(x^2+8x+41)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4+10x^3-6x^2-10x-11}{(x+3)(x^2+1)^2}\,dx$.

12.a. $\int \frac{2x^4+9x^3+13x^2+33x+6}{(x+4)(x^2+2)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3-13x^2-22x-18}{(x-4)(x+1)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{7x^3-7x^2+3x+21}{(x^2+1)(x^2-4x+5)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4-x^3-3x^2+6x-44}{2(x+1)(x^2+4)^2}\,dx$.

13.a. $\int \frac{4x^4+18x^3-4x^2+38x-38}{(x+5)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{2x^3-10x^2+16x+1}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$;
c. $\int \frac{4x^3+9x^2+16x+12}{(x^2+3)(x^2+2x+2)}\,dx$; d. $\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-9x-7}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

14.a. $\int \frac{3x^4-5x^3+6x^2-20x-37}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3-20x^2+43x-27}{(-1+x)(x-2)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{5x^3-x^2+27x-47}{(x^2+1)(17-2x+x^2)}\,dx$; d. $\int \frac{9x^4-11x^3+14x^2-15x-7}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

15.a. $\int \frac{2x^4+5x^3+12x^2+26x+22}{(x+2)(x^2+6)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3+5x^2-2x-14}{(x-4)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{x^3-5x^2-5x+56}{(x^2+1)(x^2-10x+29)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4+7x^3+14x^2+33x-4}{(x+1)(x^2+4)^2}\,dx$.

16.a. $\int \frac{x^4-x^3+2x^2+5x+14}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3+8x^2-2x-9}{(x+1)(x+2)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{9x^3+13x^2+53x-18}{(x^2+5)(8+4x+x^2)}\,dx$; d. $\int \frac{4x^4+11x^3-2x^2+3x-12}{(2+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

17.a. $\int \frac{2x^4+x^3+9x^2+8x+4}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$; b. $\int \frac{5x^3-25x^2+33x-12}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{x^3-4x^2+27x-45}{(x^2+5)(x^2-6x+25)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4-3x^3+2x^2-7x+2}{(-1+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

18.a. $\int \frac{4x^4-10x^3+23x^2-57x-26}{(x-3)(x^2+7)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+4x^2+3x-1}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3-x^2+9x+17}{(x^2+3)(5-2x+x^2)}\,dx$; d. $\int \frac{3x^4+7x^3-2x^2+33x-36}{(x+1)(x^2+4)^2}\,dx$.

19.a. $\int \frac{4x^4+8x^3+2x^2+18x-36}{(x+3)(x^2+3)}\,dx$; b. $\int \frac{7x^3-30x^2+25x-1}{(x+4)(x-3)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3-3x^2+21x-61}{(x^2+5)(x^2+2x+17)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4-7x^3+4x^2-17x-8}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

20.a. $\int \frac{2x^4+x^3+3x^2+8x-29}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+10x^2+20x-19}{(x+2)(x+5)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{4x^3+x^2+12x-13}{(x^2+3)(x^2+2x+5)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4-4x^3+4x^2+2x-3}{(-1+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

21.a. $\int \frac{4x^4+3x^3+7x^2+3x+10}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$; b. $\int \frac{2x^3-5x^2-21x+61}{(x-5)(x-2)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{2x^3+10x^2+41x+37}{(x^2+1)(x^2+6x+34)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4+3x^3+4x^2+5x+13}{(2+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

22.a. $\int \frac{x^4-4x^3+14x^2-27x+22}{(x-1)(x^2+5)}\,dx$; b. $\int \frac{2x^3-22x^2+62x-1}{(x+4)(x-5)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3-2x^2+13x+21}{(x^2+3)(x^2-4x+13)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4+x^3-7x^2+14x-60}{(-1+x)(x^2+4)^2}\,dx$.

23.a. $\int \frac{x^4-7x^3+17x^2-40x+59}{(x-4)(x^2+5)}\,dx$; b. $\int \frac{4x^3+21x^2+41x+26}{(x+3)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3+8x^2+30x+29}{(x^2+1)(x^2+6x+10)}\,dx$; d. $\int \frac{2x^4-x^3+2x^2-4x+1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

24.a. $\int \frac{4x^4+12x^3-12x^2+x-9}{(x+4)(x^2+1)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+6x^2+11x+9}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{8x^3-29x^2+35x+28}{(x^2+1)(x^2-6x+10)}\,dx$; d. $\int \frac{7x^4-4x^3+8x^2-6x+7}{(-1+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

25.a. $\int \frac{x^4-7x^3+8x^2-15x+29}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+2x^2-9x-2}{(x-5)(-1+x)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3-x^2-10}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}\,dx$; d. $\int \frac{x^4+x^3-9x^2-10x-56}{(2+x)(x^2+4)^2}\,dx$.

26.a. $\int \frac{2x^4+2x^3-2x^2+9x-24}{(x+3)(x^2+4)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3-13x^2-53x-22}{(x-4)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{7x^3-11x^2+32x-16}{(x^2+5)(2-2x+x^2)}\,dx$; d. $\int \frac{5x^4+16x^3+18x^2+24x-1}{(2+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

27.a. $\int \frac{2x^4+x^3+5x^2+3x-1}{(x+1)(x^2+3)}\,dx$; b. $\int \frac{2x^3-12x^2+20x-3}{(x-3)(x-2)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{3x^3+2x^2-5x+64}{(x^2+3)(x^2-6x+13)}\,dx$; d. $\int \frac{3x^4+3x^3+3x^2+3x-4}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$.

28.a. $\int \frac{3x^4+7x^3+21x^2+49x-16}{(x+3)(x^2+7)}\,dx$; b. $\int \frac{3x^3+18x^2+39x+32}{(x+1)(x+3)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{4x^3+15x^2+43x+24}{(x^2+2)(x^2+8x+20)}\,dx$; d. $\int \frac{x^4+7x^3-3x^2+5x+2}{(-1+x)(x^2+1)^2}\,dx$.

29.a. $\int \frac{x^4+6x^3+15x^2+17x+20}{(x+2)(x^2+3)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+12x^2-11x-14}{(x+5)(-1+x)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{5x^3-15x^2+32x+3}{(x^2+4)(x^2-6x+10)}\,dx$; d. $\int \frac{7x^4-14x^3+16x^2-20x+1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

30.a. $\int \frac{x^4+3x^3+x^2+21x-24}{(x+4)(x^2+5)}\,dx$; b. $\int \frac{x^3+31x^2+37x-5}{(x-5)(x+1)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{x^3+5x^2+13x-9}{(x^2+1)(x^2+8x+25)}\,dx$; d. $\int \frac{8x^4-5x^3+28x^2-24}{(2+x)(x^2+4)^2}\,dx$.

Задача 5. Найти интегралы, сведя их к интегралам от рациональных функций.

1.a. $\int \frac{8e^{2x}-17e^x+6}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$;

c. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x+3}$; d. $\int \frac{6\,\mathrm{tg}^4 x+14\,\mathrm{tg}^3 x+41\,\mathrm{tg}^2 x+14\,\mathrm{tg}\,x+35}{(\mathrm{tg}\,x+4)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

2.a. $\int \frac{2e^{2x}-e^x-6}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{(\sqrt[6]{x}+1)\,dx}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}$;

c. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$; d. $\int \frac{(3\sin^2 x-9\sin x+15)\cos x}{(\sin x+1)(\sin x-2)^2}\,dx$.

3.a. $\int \frac{3e^{2x}-3e^x-2}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\,\sqrt[4]{x}}$;

c. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$; d. $\int \frac{(3\sin^2 x+9\sin x+15)\cos x}{(\sin x+4)(\sin x+1)^2}\,dx$.

4.a. $\int \frac{3e^{2x}-5e^x-4}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$; b. $\int \sqrt{\frac{3-2x}{2+3x}}\,\frac{dx}{x+1}$;

c. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{5\,\mathrm{tg}^4 x-10\,\mathrm{tg}^3 x+15\,\mathrm{tg}^2 x-10\,\mathrm{tg}\,x+10}{(\mathrm{tg}\,x-4)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

5.a. $\int \frac{2e^{2x}-8e^x+12}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

c. $\int \frac{1+\cos x}{(1-\sin x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{(3\sin^2 x+14\sin x+2)\cos x}{(\sin x-5)(\sin x+2)^2}\,dx$.

6.a. $\int \frac{5e^{2x}-10e^x-6}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x+5}$;

c. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[4]{x}-27}$; d. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$.

7.a. $\int \frac{6e^{2x}+14e^x+4}{e^{2x}+4e^x+4}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$;

c. $\int \frac{(1+3\sqrt[3]{x})\,dx}{x+\sqrt[3]{x^4}}$; d. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

8.a. $\int \frac{5e^{2x}-1}{e^{2x}-1}\,dx$; b. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

c. $\int \frac{dx}{2-3\cos x}$; d. $\int \frac{5\,\mathrm{tg}^4 x-8\,\mathrm{tg}^3 x+40\,\mathrm{tg}^2 x-8\,\mathrm{tg}\, x+35}{(\mathrm{tg}\, x-2)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

9.a. $\int \frac{3e^{2x}+12e^x+6}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

c. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x}-1}$; d. $\int \frac{4\,\mathrm{tg}^4 x-5\,\mathrm{tg}^3 x-5\,\mathrm{tg}\, x-4}{(\mathrm{tg}\, x-4)(\mathrm{tg}^2 x+4)}\,dx$.

10.a. $\int \frac{6e^{2x}+7e^x-4}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$; b. $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})\,dx}{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{x^5}}$;

c. $\int \frac{1-\cos x}{(1-\sin x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{(2+\mathrm{tg}\, x)\,dx}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

11.a. $\int \frac{3e^{2x}+15e^x-6}{e^{2x}+2e^x-3}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{3\cos x-\sin x+5}$;

c. $\int \frac{(1-\sqrt[3]{x})\,dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$; d. $\int \frac{5\,\mathrm{tg}^4 x+16\,\mathrm{tg}^3 x+39\,\mathrm{tg}^2 x+16\,\mathrm{tg}\, x+34}{(\mathrm{tg}\, x+4)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

12.a. $\int \frac{2e^{2x}+5e^x+4}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x-1}$;

c. $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{x})\,dx}{5x-6\sqrt[4]{x^3}}$; d. $\int \frac{5\,\mathrm{tg}^4 x+9\,\mathrm{tg}^3 x+36\,\mathrm{tg}^2 x+9\,\mathrm{tg}\, x+31}{(\mathrm{tg}\, x+4)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

13.a. $\int \frac{7e^{2x}-10e^x-9}{e^{2x}-2e^x-3}\,dx$; b. $\int \frac{(3+\sqrt[3]{x})\,dx}{\sqrt[6]{x}(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x})}$;

c. $\int \frac{1+\cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{dx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

14.a. $\int \frac{2e^{2x}+13e^x-12}{e^{2x}-e^x-6}\,dx$; b. $\int \frac{(\sqrt[5]{x}+\sqrt[10]{x})\,dx}{x(\sqrt[10]{x^3}-1)}$;

c. $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{dx}{\sin^4 x-1}$.

15.a. $\int \frac{6e^{2x}-19e^x+9}{e^{2x}-4e^x+3}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{\sin 2x+4}$;

c. $\int \frac{(4+\sqrt[3]{x})\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; d. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

16.a. $\int \frac{2e^{2x}-e^x+3}{e^{2x}+2e^x-3}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{x^2}+x\sqrt{x}}$;

c. $\int \frac{3+\sin x}{(1+\cos x)^3}\,dx$; d. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\mathrm{tg}\, x+1}$.

17.a. $\int \frac{2e^{2x}+3e^x+3}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx$; b. $\int \frac{3\cos x}{(1+\cos x)^3}\,dx$;

c. $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+2\sqrt[3]{x}}$; d. $\int \frac{dx}{2+2\,\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{tg}\, x}$.

18.a. $\int \frac{7e^{2x}-6e^x-27}{e^{2x}-9}\,dx$; b. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}$;

c. $\int \frac{(4-\sin x)\,dx}{4+\sin x}$; d. $\int \frac{4\,\mathrm{tg}^4 x-8\,\mathrm{tg}^3 x+2\,\mathrm{tg}^2 x-8\,\mathrm{tg}\, x-2}{(\mathrm{tg}\, x-5)(\mathrm{tg}^2 x+4)}\,dx$.

19.a. $\int \frac{5e^{2x}+8e^x+2}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{(\sqrt{1+x}+x^2)\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

c. $\int \frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\sin x}$; d. $\int \frac{6\,\mathrm{tg}^4 x-13\,\mathrm{tg}^3 x+22\,\mathrm{tg}^2 x-13\,\mathrm{tg}\, x+16}{(\mathrm{tg}\, x-4)(\mathrm{tg}^2 x+4)}\,dx$.

20.a. $\int \frac{5e^{2x}+17e^x+12}{e^{2x}+5e^x+6}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\cos x}$;

c. $\int \frac{5\sqrt{x}\,dx}{x\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x^{11}}}$; d. $\int \frac{(2\sin^2 x+15\sin x+30)\cos x}{(\sin x+4)(\sin x+3)^2}\,dx$.

21.a. $\int \frac{7e^{2x}-7e^x-6}{e^{2x}-2e^x-3}\,dx$; b. $\int \frac{3\cos x}{(3+5\cos x)}\,dx$;

c. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{5x-4}}\,dx$; d. $\int \frac{dx}{16\sin^2 2x+\cos^2 2x}$.

22.a. $\int \frac{5e^{2x}+5e^x-6}{e^{2x}+2e^x-3}\,dx$; b. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})\,dx}{x+\sqrt[3]{x^4}}$;

c. $\int \frac{2\sin x}{(5+2\sin x)}\,dx$; d. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\,dx}{4\cos 2x+5}$.

23.a. $\int \frac{6e^{2x}-e^x-12}{e^{2x}+e^x-6}\,dx$; b. $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})\,dx}{x+2\sqrt[6]{x^5}}$;

c. $\int \frac{12}{(5+2\cos x)\cos x}\,dx$; d. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\,dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$.

24.a. $\int \frac{3e^{2x}+4e^x+1}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$; b. $\int \frac{(5+\sqrt[4]{x})\,dx}{25\sqrt{x}-x}$;

c. $\int \frac{\cos x\,dx}{3+2\cos x}$; d. $\int \frac{5\,\mathrm{tg}^4 x-7\,\mathrm{tg}^3 x+35\,\mathrm{tg}^2 x-7\,\mathrm{tg}\, x+30}{(\mathrm{tg}\, x-3)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

25.a. $\int \frac{5e^{2x}+13e^x+6}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx$; b. $\int \frac{12}{(5+2\sin x)\sin x}\,dx$;

c. $\int \frac{\sqrt{1+4x}\,dx}{x^2}$; d. $\int \frac{(1+2\,\mathrm{tg}\, x)\,dx}{(\cos x+2\sin x)^2}$.

26.a. $\int \frac{2e^{2x}+11e^x+12}{e^{2x}+5e^x+6}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$;

c. $\int \frac{dx}{3\cos x+5}$; d. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}\, x-\mathrm{ctg}\, x}$.

27.a. $\int \frac{5e^{2x}-18e^x+12}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx$; b. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+\sin x+1}$;

c. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x^2})\sqrt{x}}$; d. $\int \frac{(3\sin^2 x-9\sin x+18)\cos x}{(\sin x+2)(\sin x-2)^2}\,dx$.

28.a. $\int \frac{e^{2x}-e^x-1}{e^{2x}-e^x-6}\,dx$; b. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$;

c. $\int \frac{dx}{\sin 2x-\cos 2x}$; d. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos^5 x}$.

29.a. $\int \frac{3e^{2x}-6e^x+4}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{1+x}+x^2\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$;

c. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; d. $\int \frac{4\,\mathrm{tg}^4 x+7\,\mathrm{tg}^3 x+7\,\mathrm{tg}^2 x+7\,\mathrm{tg}\, x+3}{(\mathrm{tg}\, x+5)(\mathrm{tg}^2 x+9)}\,dx$.

30.a. $\int \frac{4e^{2x}+19e^x+18}{e^{2x}+5e^x+6}\,dx$; b. $\int \frac{(1+\sqrt[4]{x})\,dx}{\sqrt{x}+x}$;

c. $\int \frac{(\sin x+1)\,dx}{\sin x(\cos x+1)}$; d. $\int \frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}$.

Задача 6.

(a) Вычислить интеграл с помощью подстановок Эйлера.

(b) Вычислить интеграл от дифференциального бинома.

(c) Вычислить интеграл, используя рекуррентные соотношения.

(d) Вычислить интеграл с помощью тригонометрической подстановки.

1.a. $\int \frac{1}{2x+\sqrt{x^2+4x-1}}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+4x+8)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-9)^3}}\,dx$.

2.a. $\int \frac{1}{2x-\sqrt{x^2-x+2}}\,dx$; b. $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^5}}\,dx$.

3.a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}}{x}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-6x+25)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^3}}\,dx$.

4.a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-1}-2x}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2\sqrt[4]{x}-1}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-4x+13)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{36-x^2}\,dx$.

5.a. $\int \frac{1}{2x+\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-6}}{x}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+2x+10)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(9+x^2)^3}}\,dx$.

6.a. $\int \frac{1}{2x+\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$; b. $\int x^2\sqrt{4-\sqrt{x}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,dx$; d. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$.

7.a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+4}-2x}\,dx$; b. $\int \sqrt{x(\sqrt[4]{x}+3)}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+8x+17)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$.

8.a. $\int \frac{1}{2x-\sqrt{x^2+x+4}}\,dx$; b. $\int \sqrt{x(\sqrt[4]{x^3}-1)}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-6x+18)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{(16-x^2)^3}\,dx$.

9.a. $\int \frac{1}{3x+\sqrt{x^2-9x-1}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{\sqrt{x(\sqrt[4]{x}+2)}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-4x+20)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-25)^3}}\,dx$.

10.a. $\int \frac{1}{3x-\sqrt{x^2+9x-1}}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-8x+20)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}\,dx$.

11.a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-11x-3}-3x}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\sqrt{x}+5}}\,dx$;

c. $\int \frac{1}{(x^2-2x+17)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}}\,dx$.

12.a. $\int \frac{1}{3x-\sqrt{x^2+7x+1}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x(\sqrt[3]{x}-7)}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{49-x^2}\,dx$.

13.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[3]{x}+1)}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(16+x^2)^3}}\,dx$.

14.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[6]{x}+3)}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-6x+10)^2}\,dx$; d. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$.

15.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{9-7x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-8x+25)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-4)^3}}\,dx$.

16.a. $\int \frac{1}{x-\sqrt{4-7x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-2x+26)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(16+x^2)^5}}\,dx$.

17.a. $\int \frac{1}{x-\sqrt{9+7x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+10x+26)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\,dx$.

18.a. $\int \frac{1}{x-\sqrt{9-3x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-8x+32)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{100-x^2}\,dx$.

19.a. $\int \frac{1}{x-\sqrt{16-4x-x^2}}\,dx$; b. $\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-10x+34)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}\,dx$.

20.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{4+7x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2-6x+45)^2}\,dx$; d. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx$.

21.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$; b. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3(1+\sqrt[3]{x})}}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+10x+29)^2}\,dx$; d. $\int \sqrt{(36-x^2)^3}\,dx$.

22.a. $\int \frac{1}{x+\sqrt{25-5x-x^2}}\,dx$; b. $\int \sqrt[3]{x+4x^3}\,dx$;
c. $\int \frac{1}{(x^2+6x+34)^2}\,dx$; d. $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-16)^3}}\,dx$.

23.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x-2-x^2}}\,dx;$ b. $\int \sqrt[3]{\frac{x}{(1+8x^2)^2}}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2-4x+40)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{1}{\sqrt{(9+x^2)^5}}\,dx.$

24.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{\sqrt{3+4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2+10x+50)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{1}{\sqrt{(36-x^2)^3}}\,dx.$

25.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{5x-4-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2+4x+29)^2}\,dx;$ d. $\int \sqrt{81-x^2}\,dx.$

26.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{6x-5-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-4)^2}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2-10x+41)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{1}{\sqrt{(36+x^2)^3}}\,dx.$

27.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{10-3x-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}(\sqrt[4]{x}+2)}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2+2x+37)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx.$

28.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{1}{x(\sqrt[3]{x}-3)^3}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2+10x+61)^2}\,dx;$ d. $\int \sqrt{(25-x^2)^3}\,dx.$

29.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{6-5x-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+8}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2-4x+53)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx.$

30.a. $\int \frac{1}{x\sqrt{7-6x-x^2}}\,dx;$ b. $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x}-9)^2}\,dx;$

c. $\int \frac{1}{(x^2-8x+41)^2}\,dx;$ d. $\int \frac{1}{\sqrt{(25+x^2)^5}}\,dx.$

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1980.

2. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.* — М.: Наука, 1966. Т. 2.

3. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для втузов: В 2 т.* — М.: Наука, 1985. Т. 1.

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2 т.* — М.: Высш. шк., 2000. Т. 1.

5. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977.

6. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* — М.: Наука, 1977.

7. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа* / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

8. Кузнецов Л.А. *Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)* — М.: Высш. шк., 1983.

Оглавление

Учебное издание

СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич
СОРОКИНА Александра Георгиевна
ФИЛИНОВА Елена Викторовна

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
Практикум

Редактор Е.П. Викулова

ЛР 020275. Подписано в печать 20.09.04.
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 500 экз.
Заказ 316-2004г
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.