

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра теоретической и прикладной механики

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

*Методические указания и задания
к расчетно-графическим работам
по курсу «Прикладная механика»*

Составители:
Е.А. НОВОСЕЛОВ
О.В. ФЕДОТОВ

Владимир 2009

УДК 531.3
ББК 34.445
О-75

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
Л. М. Самсонов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Основы расчетов на прочность : метод. указания и задания
О-75 к расчетно-графическим работам по курсу «Прикладная механика» / Владим. гос. ун-т ; сост.: Е.А. Новоселов, О.В. Федотов. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 28 с.

Предназначены для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ по курсу «Прикладная механика», раздел «Основы расчетов на прочность». Включают в себя краткий теоретический материал по разделу «Основы расчетов на прочность», варианты заданий, примеры их выполнения, контрольные вопросы.

Предназначены для студентов второго, третьего курсов очной и заочной форм обучения специальностей 200201 – лазерная техника и лазерные технологии; 200503 – стандартизация и сертификация; 220301 – автоматизация технологических процессов и производств; 220501 – управление качеством; 270109 – теплогазоснабжение и вентиляция.

Табл. 4. Ил. 10. Библиогр.: 4 назв.

УДК 531.3
ББК 34.445

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа содержит методические указания для выполнения расчетно-графических и курсовых работ студентами очной и заочной форм обучения по курсу «Прикладная механика», раздел «Основы расчетов на прочность».

Её цель – научить студентов самостоятельно выполнять названные выше работы. Здесь предлагаются индивидуальные варианты расчетно-графических работ по курсу «Прикладная механика», раздел «Основы расчетов на прочность».

Для каждого задания рассмотрены примеры.

Очень коротко и ясно представлена теория, которую можно использовать и при подготовке к экзамену.

В конце методических указаний даны контрольные вопросы.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Цели настоящих методических указаний:

- обеспечить студентов едиными упорядоченными на кафедре заданиями для расчетно-графических и курсовых работ по разделу «Основы расчетов на прочность»;

- привить типовую последовательность инженерных расчетов на прочность и жесткость для наиболее часто встречающихся видов деформаций, что отражено в условиях каждой задачи.

При изучении раздела «Основы расчетов на прочность» студент знакомится с методами расчета элементов машин и приборов на прочность и жесткость, приобретает навыки выполнения этих расчетов, изучает соответствующие разделы курса и самостоятельно выполняет индивидуальные задания, которые помещены в настоящих указаниях.

При изучении материала и решении задач необходимо:

- представить физическую сущность явления;

- особое внимание обратить на единицы измерения всех встречающихся величин, учитывая, что расчеты имеют смысл, если они выполнены в одних единицах измерения.

Учитывая рабочую программу и рекомендации Государственного образовательного стандарта для курса «Прикладная механика», расчетно-графическая работа по разделу «Основы расчетов на прочность» состоит из 3-х заданий.

Оформление расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа (РГР) включает в себя пояснительную записку (ПЗ), оформленную на одной стороне листа бумаги стандартного размера А4 (297x210), включая титульный лист. Титульный лист выполняется на листе плотной бумаги формата А4.

Все листы ПЗ РГР должны иметь рамки: слева – 20 мм, сверху, справа и снизу – 5 мм. Титульный лист оформляется в соответствии с рис. 1. Надписи на титульном листе оформляют чертежным шрифтом или на компьютере. На титульном листе преподавателем проставляется отметка о защите.

<p>Федеральное агентство по образованию Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Владимирский государственный университет Кафедра теоретической и прикладной механики</p> <p>РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА по курсу «Прикладная механика» раздел «Основы расчетов на прочность» Вариант № _____</p> <p>Выполнил (а): ст-нт(ка) гр. _____ Принял: _____</p> <p>Владимир 20 ____</p>

Рис. 1. Образец оформления титульного листа ПЗ РГР

Следующий за титульным листом лист ПЗ должен иметь основную надпись по форме 2 (высота 40 мм), остальные листы ПЗ должны иметь основную надпись по форме 4 (высота 15 мм) со сквозной нумерацией страниц ПЗ. Выполненные задания РГР подшиваются под титульный лист последовательно в соответствии с порядковым номером задания.

Эпюры и чертежи строятся с числовыми размерами в удобном масштабе (с соблюдением пропорций).

Каждая задача РГР начинается с новой страницы и должна содержать краткое условие, исходные данные и решение с элементами теории по соответствующему разделу курса. Оформление задания должно соответствовать ГОСТ 2.105-79 «Основные требования к текстовым документам».

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими и грамотными пояснениями – без многословия. Арифметические вычисления ведутся с точностью, рекомендованной на занятиях (консультациях), – достаточной, но не излишней (как правило, не выше трех значащих цифр).

Выбор варианта расчетно-графической работы

В данных методических указаниях предлагаются индивидуальные варианты расчетно-графической работы по курсу «Прикладная механика», раздел «Основы расчетов на прочность».

Для выбора исходных данных индивидуального задания из таблиц надо к порядковому номеру студента по журналу добавить число, указанное преподавателем, и образовавшиеся три цифры написать дважды. Затем под шестью цифрами подписать буквы а, б, в, г, д, е.

Например, образовавшийся шифр студента 081 будет выглядеть:

0 8 1 0 8 1

а б в г д е

Числовые величины параметров задачи записаны в столбцы, обозначенные буквами.

Тогда цифра над буквой «а» укажет, какую строку следует брать из столбца а, над буквой «б» – из столбца б, и т. д.

Предлагаемая структура шифра и последовательность выбора исходных данных обеспечивает множество вариантов и их индивидуальность.

Номера задач и их содержание в работе может быть изменено и уточнено преподавателем. Основным документом, определяющим содержание курса и, следовательно, объем заданий, – рабочая программа курса.

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Расчеты на прочность и жесткость связаны с нахождением внутренних силовых факторов (ВСФ) в поперечных сечениях бруса. В сокращенном разделе «Сопротивление материалов» [2] из всех расчетных материальных тел выбирается **брус**. В сопротивлении материалов принята правая система координат XYZ , ось X проводится через центр тяжести поперечного сечения вдоль бруса.

В общем случае в поперечном сечении бруса действует 6 внутренних силовых факторов, название которых связано с их расположением относительно оси бруса и видом деформации. Величина и вид ВСФ зависят от внешней нагрузки и вычисляются из уравнений равновесия. Записывая аналитическое выражение (уравнения) для ВСФ при изменении координаты X , можно вычислить его величину в любом поперечном сечении. График изменения ВСФ по оси бруса называют **эпюрой** (от французского *epure* – график, чертеж).

Продольная сила N_x действует вдоль оси бруса и равна алгебраической сумме внешних сил, параллельных оси X , расположенных по одну сторону от текущего сечения. Второе название: N_x – **нормальная сила**, действует перпендикулярно сечению.

Поперечная сила Q_y , Q_z перпендикулярна оси бруса и численно равна алгебраической сумме внешних сил, параллельных оси Y или Z соответственно, расположенных по одну сторону от сечения.

Крутящий момент M_x перпендикулярен оси X бруса, **изгибающие моменты** M_y , M_z действуют в плоскостях, проходящих через продольную ось бруса, и численно равны алгебраической сумме соответствующих моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

Знаки ВСФ связаны с видом деформации и не зависят от направления оси X :

- N_x растягивает (сжимает) брус; при растяжении $N_x > 0$, при сжатии $N_x < 0$;

- Q_y связана с деформацией сдвига; если под действием внешних сил участок бруса вращается по часовой стрелке (сдвигается по оси Y), то $Q_y > 0$, если наоборот, то $Q_y < 0$;

- M_y, M_z возникают при изгибе бруса; если участок бруса под действием внешних сил изгибается выпуклостью вверх, то $M_y < 0, M_z < 0$; если участок бруса изгибается выпуклостью вниз, то $M_y > 0, M_z > 0$;

- M_x возникает при скручивании бруса; если под действием внешних вращающих моментов брус скручивается по часовой стрелке, то $M_x > 0$.

Характеристиками прочности в машиностроении являются **напряжения**. Проектные и проверочные расчёты при различных нагрузках бруса выполняются чаще всего из условий прочности по опасным наиболее напряженным сечениям:

$$\text{растяжение} \quad \sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} \leq [\sigma]; \quad (1)$$

$$\text{кручение} \quad \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau]; \quad (2)$$

$$\text{плоский изгиб} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma], \quad (3)$$

где $[\sigma], [\tau]$ – допускаемые нормальные и касательные напряжения; F – площадь поперечного сечения, мм^2 ; W_p – полярные моменты сопротивления.

Определение **деформаций** (перемещений) выполняется исходя из условий жесткости:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l]; \quad (4)$$

$$\Phi_{\max} \leq [\Phi]; \quad (5)$$

$$f_{\max} \leq [f], \quad (6)$$

где $[\Delta l], [\Phi], [f]$ – допускаемые удлинение, угол закручивания и прогиб бруса при соответствующей деформации,

Для упрощения инженерных расчетов часто деформации растяжения, кручения, изгиба рассматриваются отдельно, с учетом допущения о независимости действия сил, что достаточно точно согласуется с практикой. Полная деформация вычисляется соответствующим сложением с учетом направления составляющих. При необходимости применяют поправочные экспериментальные коэффициенты, уточненные формулы теории упругости или эмпирические зави-

симости, что в сокращенном варианте раздела «Сопротивление материалов» не рассматривается.

Правила контроля эпюр

Для самостоятельной проверки правильности построения эпюр студент должен выучить правила контроля по курсу лекций или по соответствующим учебникам [1, 2]:

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре сил возникает «скачок» на величину силы, по направлению соответствующий знаку силы;

- в сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре моментов имеем «скачок» на величину момента;

- на участке с равномерно распределенной нагрузкой на эпюре сил имеем наклонную прямую, а на эпюре моментов – кривую второго порядка;

- убывание, возрастание и кривизна эпюр определяется правилами дифференциальной зависимости (теорема Журавского):

эпюра $q \rightarrow y''$; эпюра $Q_y \rightarrow y'$; эпюра $M \rightarrow y$;

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ

Задание 1

Поперечное сечение бруса (рис. 2) состоит из двух частей, соединенных в одно целое.

Требуется:

1. Вычертить схему в удобном масштабе, на которой показать положение всех осей и все размеры.

2. Найти положение центра тяжести всего сечения.

3. Определить центральные осевые и центробежные моменты инерции сечения.

4. Найти значения главных моментов инерции, положение главных центральных осей, проверить правильность вычисления моментов инерции.

Исходные данные приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1

Номер		Равнобокий уголок, мм, (ГОСТ 8509 – 72)	Швеллер (ГОСТ 8240 – 72)	Полоса, мм
строки	схемы			
1	1	80x80x8	12	140x8
2	2	90x90x8	14	160x8
3	3	90x90x9	16	160x10
4	4	100x100x8	16а	180x10
5	5	100x100x10	18	200x8
6	6	100x100x12	18а	200x10
7	7	100x100x14	20	200x12
8	8	110x110x8	20а	220x10
9	9	125x125x10	24	250x10
0	0	125x125x12	24а	250x12
	б	д	а	г

Справка

Центробежный момент инерции уголка может быть вычислен по формуле:

$$J_{xy} = |0,5(J_{\max} - J_{\min})|.$$

Знак J_{xy} зависит от расположения уголка относительно собственных центральных осей: если большая площадь уголка находится в 1-й и 3-й четвертях, то $J_{xy} > 0$, во 2-й и 4-й четвертях – $J_{xy} < 0$.

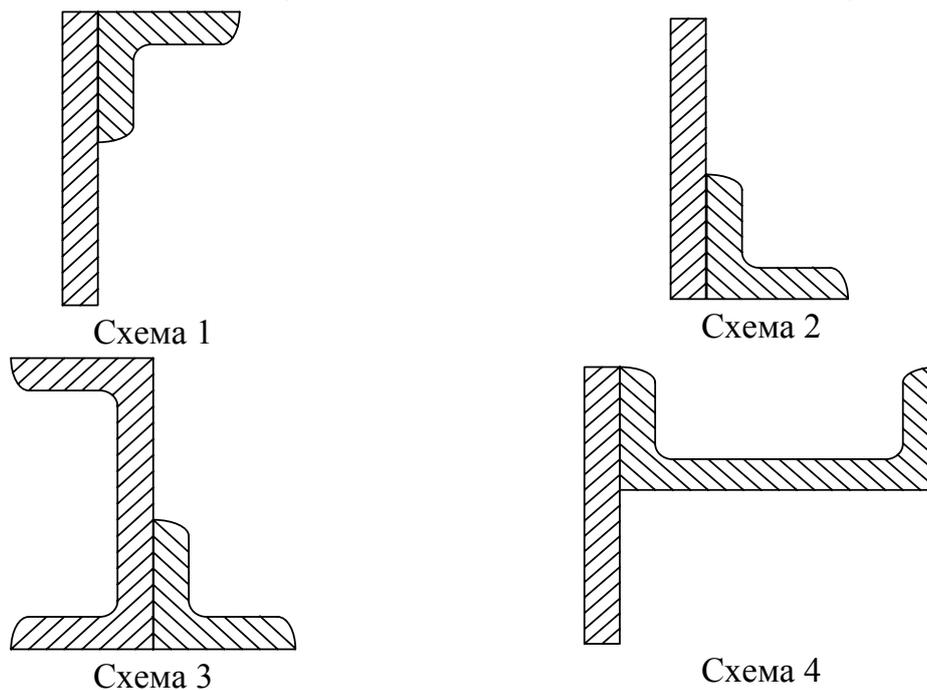


Рис. 2. Варианты схем (начало)

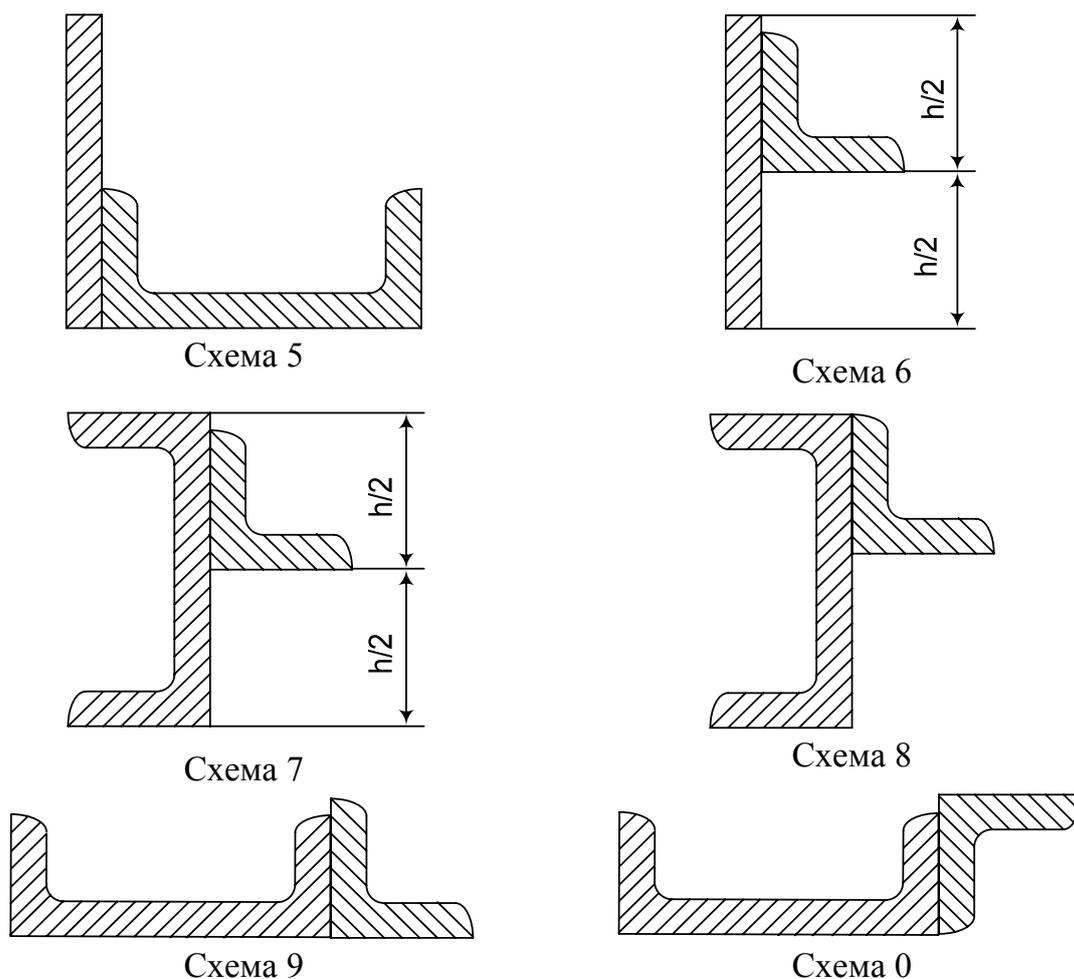


Рис. 2. Варианты схем (окончание)

Задание 2

Вертикальный стальной брус закреплен с одного конца. На рис. 3 и 4 показаны схемы бруса, расположение опоры и размеры. На рисунках обозначены: L – общая длина бруса; F_1 ; F_2 – постоянные площади поперечного сечения на указанных участках. В сечении, отстоящем на расстоянии s от свободного конца, действует сила P . Вес единицы объема материала $j = 7,8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, модуль упругости

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Требуется:

1. Выполнить схематический чертеж.
2. Составить для каждого участка уравнения продольной силы N_x и нормального напряжения σ_x при текущей координате x с учетом собственного веса бруса. Построить эпюры N_x , σ_x .

3. Составить для каждого участка уравнения перемещений Δl_x , вычислить величину перемещения на границах участков, построить эпюру Δl_x .

Исходные данные приведены в табл. 2.

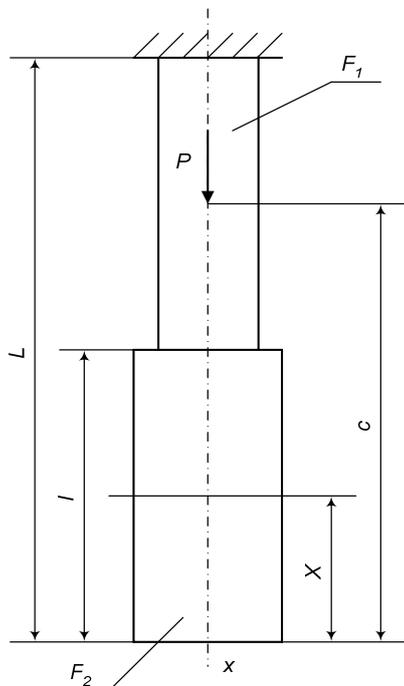


Рис. 3. Схема 1

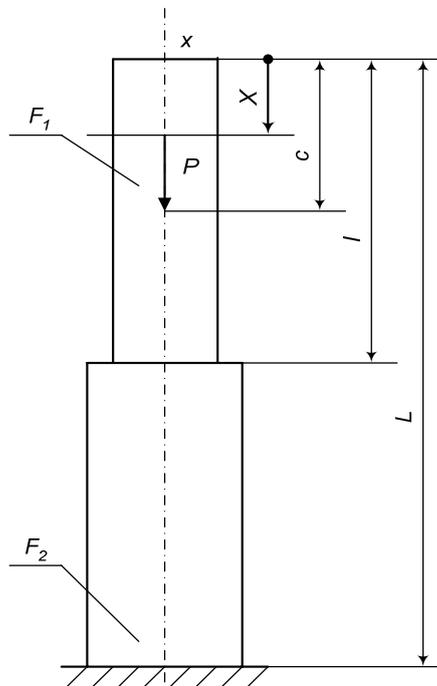


Рис. 4. Схема 2

Таблица 2

Номер		$L, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$\frac{l}{L}$	$F_1, \text{ см}^2$	$F_2, \text{ см}^2$	$P, \text{ кН}$
строки	схемы						
1	1	6	1	0,80	40	100	0,6
2	2	4	2	0,75	60	120	0,7
3	1	5	3	0,70	80	160	0,8
4	2	6	1	0,60	100	180	0,9
5	1	4	2	0,50	120	200	1,0
6	2	5	3	0,40	100	140	1,1
7	1	6	1	0,30	80	120	1,2
8	2	4	2	0,25	60	160	1,3
9	1	5	3	0,20	80	180	1,4
0	2	6	1	0,10	40	200	1,5
	б	д	г	а	е	е	в

Задание 3

Стальной вал (рис. 5) закручивается двумя парами сил, действующими в крайних сечениях. Момент каждой пары сил M .

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
 2. Определить моменты сопротивлений и момент инерции при кручении для сечений I, II, III.
 3. Вычислить величину напряжений на поверхности вала для каждого участка. Построить эпюру изменения напряжений по длине вала.
 4. По наиболее опасному сечению найти допускаемую величину момента.
 5. Построить эпюры распределения касательных напряжений по поперечным сечениям I, II, III, отметив опасные точки.
 6. Построить эпюру углов закручивания, приняв начало отсчета на левом торце вала. Модуль упругости при сдвиге $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.
- Исходные данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номер строки	D , мм	$\frac{d}{D}$	a , см	c , см	τ_{τ} , МПа
1	110	0,3	30	80	90,0
2	120	0,4	35	90	95,0
3	130	0,5	40	100	100,0
4	40	0,6	45	120	105,0
5	50	0,8	50	140	110,0
6	60	0,3	55	150	90,0
7	70	0,4	60	160	95,0
8	80	0,5	65	170	100,0
9	90	0,6	70	175	105,0
0	100	0,8	75	180	110,0
	е	д	а	б	в

Примечание: Сечение III приближенно считать квадратным со стороной $0,71D$, т.к. срезы углов незначительны. Коэффициент запаса прочности $n = 2$.

Задание 4

Для схем балок I, II (рис. 6, 7) требуется:

1. Вычертить расчетные схемы, указав числовые значения размеров и нагрузок.
2. Вычислить опорные реакции и проверить их.
3. Составить уравнения изменения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z , построить их эпюры. На эпюрах указать числовые значения параметров в характерных сечениях.
4. Руководствуясь эпюрой M_z , показать для обеих схем приближительный вид изогнутых осей балок.
5. По опасному сечению подобрать размеры поперечного сечения:
 - а) прямоугольного при $h/b = 1,5$; где h, b – высота и ширина;
 - б) двутаврового (ГОСТ 8239-72), приняв $\sigma_T = 210$ МПа (сталь), $K = 1,5$ – коэффициент запаса.

Исходные данные приведены в табл. 4.

Таблица 4

Номер строки	Схема I (вариант)	Схема II (вариант)	$\frac{c}{a}$	$\frac{P}{ga}$	$\frac{m}{ga^2}$	$a, \text{ м}$	$q, \text{ кН/м}$
1	1	1	1,2	0,6	0,2	0,5	10
2	2	2	1,4	0,5	0,4	1,0	12
3	3	3	1,6	0,8	0,6	1,5	14
4	4	4	1,8	1,2	0,8	2,0	16
5	5	5	2,0	1,5	1,0	2,5	18
6	6	6	1,2	1,6	0,2	1,5	20
7	7	7	1,4	1,8	0,4	2,0	18
8	8	8	1,6	2,0	0,6	1,0	16
9	9	9	1,8	2,4	0,8	2,5	14
0	0	0	2,0	1,0	1,0	0,5	10
	а	б	г	д	е	а	г

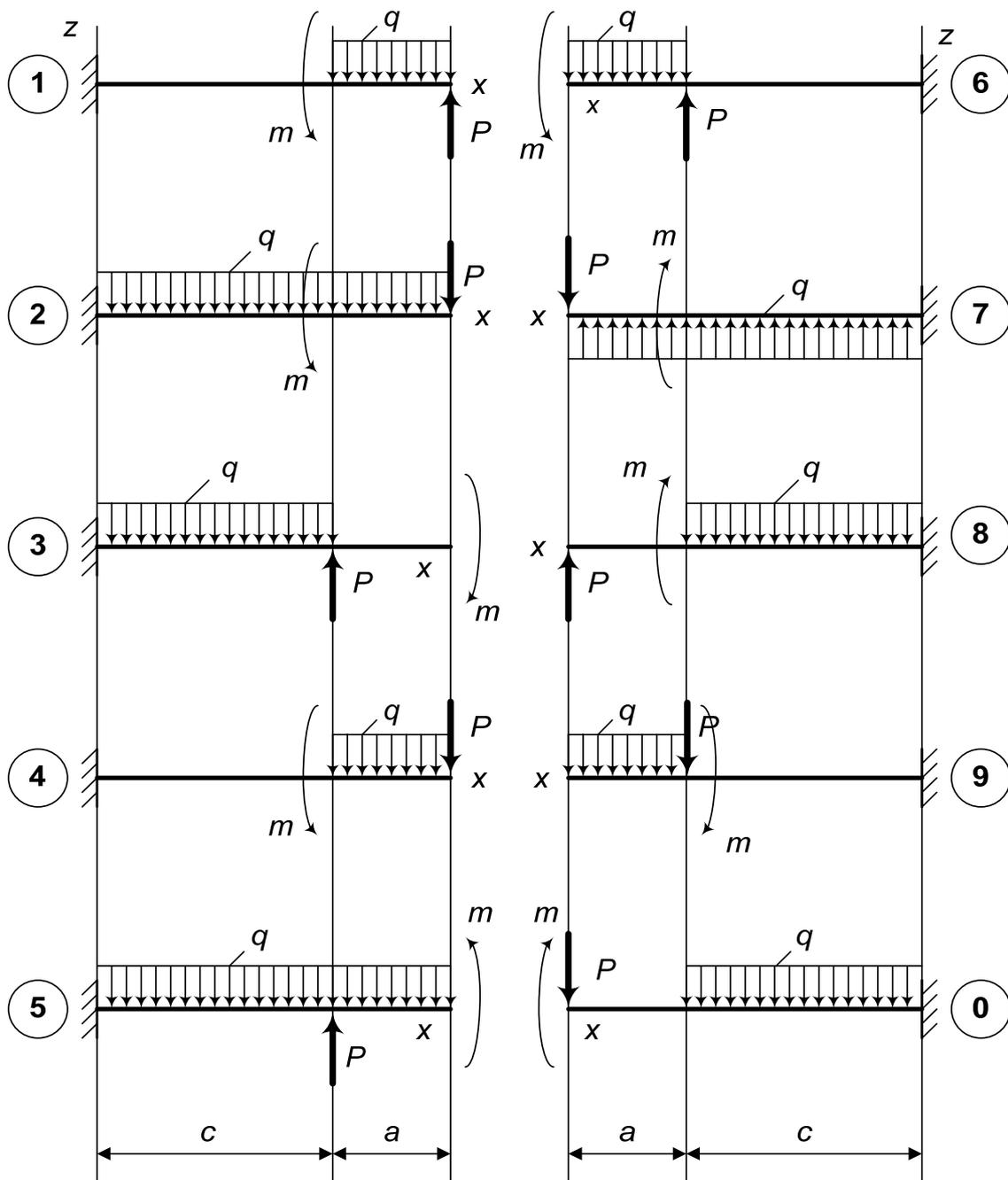


Рис. 6. Варианты схемы I

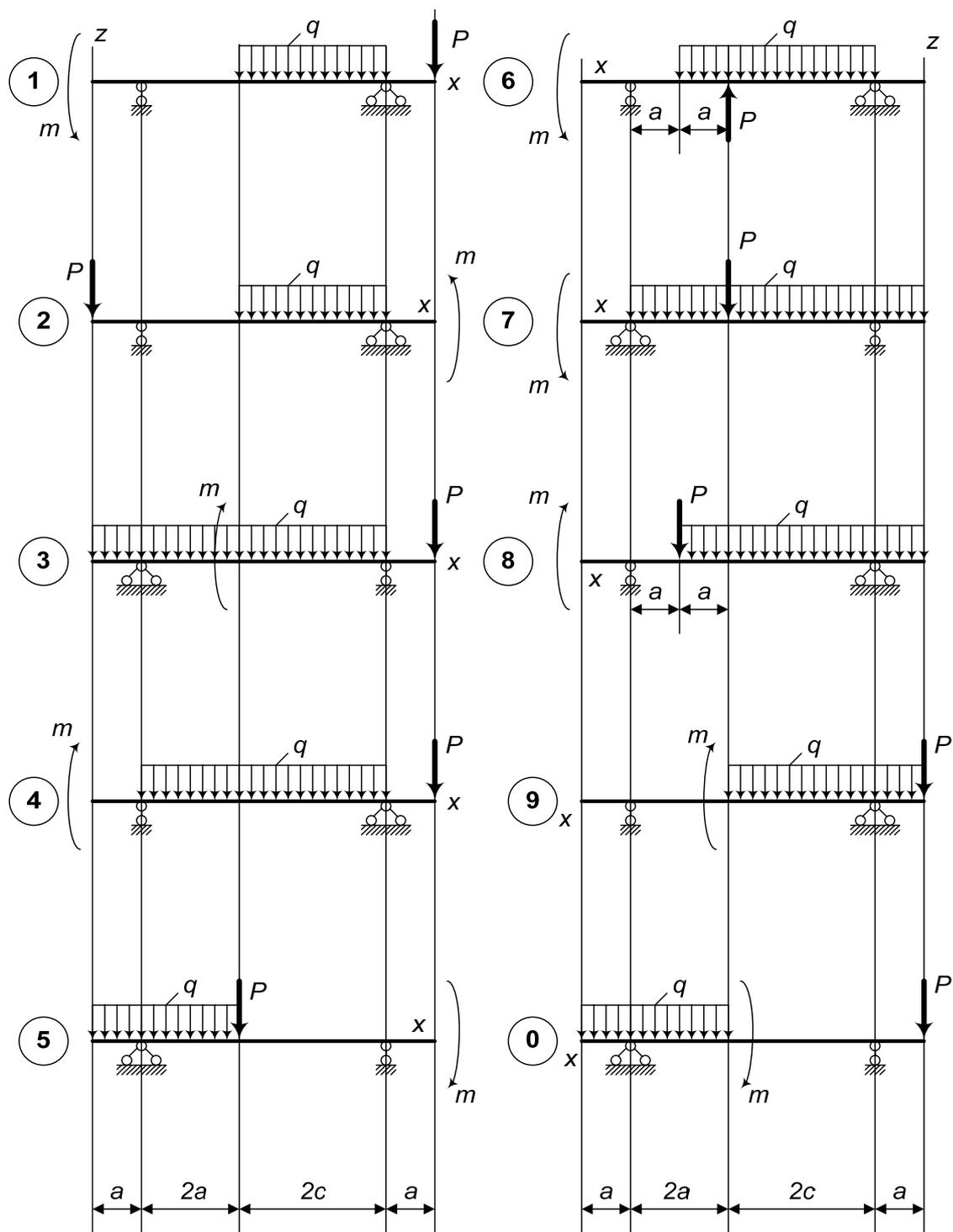


Рис. 7. Варианты схемы II

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Пример выполнения задания 2

Стальной вертикальный брус закреплен с одного конца (рис. 8). Площади сечений по соответствующим участкам $F_1 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, $F_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, вес единицы объема материала $j = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$, $P = 1000 \text{ Н}$.

Решение:

1. Находим интенсивность распределенной нагрузки на участках:

$$q_1 = j \cdot F_1 = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 93,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$q_2 = j \cdot F_2 = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 156 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

2. Разбиваем брус на участки, границами которых являются сечения, где приложены сосредоточенные силы и происходит резкое изменение поперечных размеров бруса. В примере брус разбиваем на три участка. Составляем для каждого участка уравнение продольной силы N_x и нормальных напряжений σ_x . Так как брус имеет жесткую опору (заделку) с одного конца, то удобнее, не определяя реакции, расчет вести со свободного конца. Строим эпюры N_x и σ_x .

$$x_1 \in (0 \dots c); N_1 = q_2 x_1; \sigma_1 = \frac{N_1}{F_2}$$

$$\text{при } x_1 = 0: N_1 = 0 \text{ Н};$$

$$\sigma_1 = 0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\text{при } x_1 = c = 1: N_1 = 156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 1 \text{ м} = 156 \text{ Н};$$

$$\sigma_1 = \frac{156 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 78 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$x_2 \in (c \dots l); N_2 = q_2 x_2 + P; \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2};$$

при $x_2 = c = 1$: $N_2 = 156 \text{ Н} + 1000 \text{ Н} = 1156 \text{ Н}$;

$$\sigma_2 = \frac{1156 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 578 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

при $x_2 = l = 4,8$: $N_2 = 156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 4,8 \text{ м} + 1000 \text{ Н} = 1748,8 \text{ Н}$;

$$\sigma_2 = \frac{1748,8 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 874,4 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$x_3 \in (0 \dots 1,2); N_3 = q_2 l + P + q_1 \cdot x_3; \sigma_3 = \frac{N_3}{F_1};$$

при $x_3 = 0$: $N_3 = 4,8 \text{ м} \cdot 156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} + 1000 \text{ Н} = 1748,8 \text{ Н}$;

$$\sigma_3 = \frac{1748,8 \text{ Н}}{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1457,3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

при $x_3 = 1,2$: $N_3 = 4,8 \text{ м} \cdot 156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} + 1000 \text{ Н} + 93,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 1,2 \text{ м} = 1861,1 \text{ Н}$;

$$\sigma_3 = \frac{1861,1 \text{ Н}}{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1550,9 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

3. Запишем уравнения перемещения Δl для каждого участка. Найдем их величину на границах участков. Построим эпюру Δl .

$$\Delta l_1 = \int_0^c \frac{q_2 x_1 dx}{EF_2} = \frac{q_2 x_1^2}{2EF_2} \Big|_0^1 = \frac{156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot (1 \text{ м})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 19,5 \cdot 10^{-9} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \int_c^l \frac{(q_2 x_2 + P) dx}{EF_2} = \Delta l_1 + \frac{q_2 x_2^2 + 2Px}{2EF_2} \Big|_1^{4,8} = 19,5 \cdot 10^{-9} \text{ м} +$$

$$+ \frac{156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot (4,8 \text{ м})^2 + 2 \cdot 1000 \text{ Н} \cdot 4,8 \text{ м}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1399,3 \cdot 10^{-9} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \int_0^{L-l} \frac{(q_2 l + P + q_1 x_3) dx}{EF_1} = \Delta l_2 + \frac{2x(q_2 l + P) + q_1 x^2}{2EF_1} \Big|_0^{1,2} =$$

$$= 1399,3 \cdot 10^{-9} \text{ м} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 1,2 \text{ м} \cdot (156 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 4,8 \text{ м} + 1000 \text{ Н}) + 93,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot (1,2 \text{ м})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1940 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

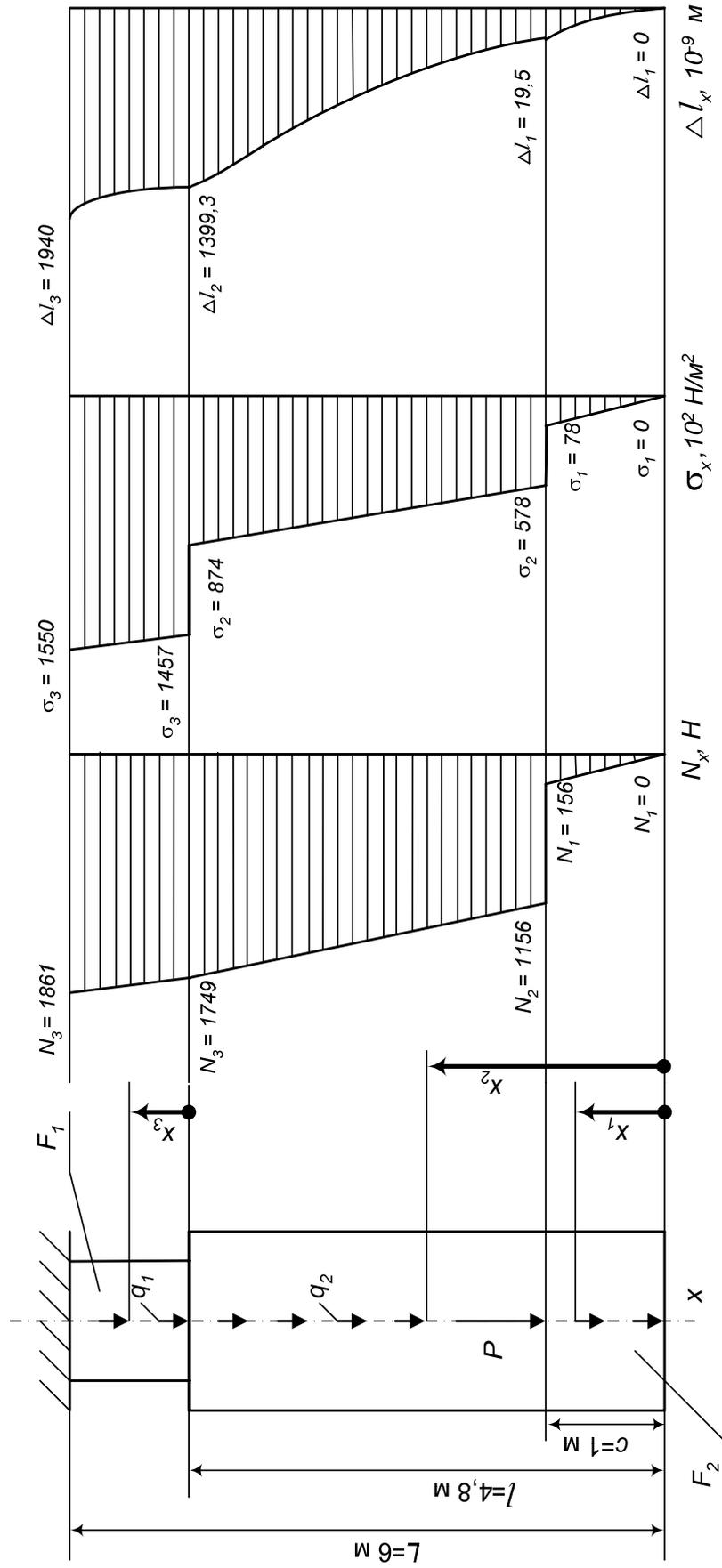


Рис. 8. Схема к решению задания 2

Пример выполнения задания 3

Записываем условие задания и свои исходные данные. Для примера: $D = 50$ мм; $\frac{d}{D} = 0,3$; $a = 30$ см; $c = 80$ см; $\tau_T = 110$ МПа. При вычислении приводим их к принятым единицам измерения.

Решение:

1. Считаем, условно, что левый участок неподвижен. Разбиваем вал на участки.

2. Так как величина крутящего момента M_x постоянна по всей длине вала, то эпюра M_x – прямая, параллельная оси вала. Найдем моменты сопротивления по участкам:

$$W_{p1} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ м})^3}{16} (1 - (0,3)^4) = 24,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{p2} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ м})^3}{16} = 24,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{p3} = \alpha \cdot b^3 = 0,21 \cdot (35,5 \cdot 10^{-3})^3 = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

3. Вычисляем касательные напряжения на поверхности вала по участкам при постоянной величине M_x .

$$\tau_1 = \frac{M}{W_{p1}} = \frac{M}{24,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 4,1 \cdot 10^4 \cdot M;$$

$$\tau_2 = \frac{M}{W_{p2}} = \frac{M}{24,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 4 \cdot 10^4 \cdot M;$$

$$\tau_3 = \frac{M}{W_{p3}} = \frac{M}{9,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 10,6 \cdot 10^4 \cdot M.$$

4. Строим эпюру касательных напряжений τ по длине бруса. Из эпюры τ видим, что наиболее опасным является III-й участок. Из напряжений этого участка, используя условие прочности при кручении, находим максимальный крутящий момент с учетом зависимости $M_{\max} = W_p[\tau]$:

$$M_{\max} = W_{p3}[\tau] = 9,4 \cdot 10^4 \text{ м}^3 \cdot 55 \cdot 10^6 \text{ Па} = 517 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Действительная величина касательных напряжений на поверхности вала по участкам

$$\tau_1 = 4,1 \cdot 10^4 \cdot 517 = 21 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$\tau_2 = 4,0 \cdot 10^4 \cdot 517 = 20,7 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$\tau_3 = 10,6 \cdot 10^4 \cdot 517 = 55 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Построим эпюры распределения касательных напряжений по сечениям I, II, III.

6. Определим углы закручивания участков вала и построим эпюру φ_i . Находим момент инерции сечений вала по участкам:

$$J_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ м})^4}{32} (1 - (0,3)^4) = 60,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{p2} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ м})^4}{32} = 61,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{p3} = \beta \cdot b^4 = 0,14 \cdot (35,5 \cdot 10^{-3} \text{ м})^4 = 22,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{\max} \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = \frac{517 \text{ Па} \cdot \text{м}^3 \cdot 0,3 \text{ м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 60,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 3,2 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{M_{\max} \cdot a}{G \cdot J_{p2}} = 3,2 \cdot 10^{-3} + \frac{517 \text{ Па} \cdot \text{м}^3 \cdot 0,3 \text{ м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 61,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = \\ &= 3,2 \cdot 10^{-3} + 3,1 \cdot 10^{-3} = 6,3 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_2 + \frac{M_{\max} \cdot c}{G \cdot J_{p3}} = 6,3 \cdot 10^{-3} + \frac{517 \text{ Па} \cdot \text{м}^3 \cdot 0,8 \text{ м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 22,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = \\ &= 6,3 \cdot 10^{-3} + 23,3 \cdot 10^{-3} = 29,6 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

Допускаемые касательные напряжения

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n} = \frac{110}{2} = 55 \text{ МПа},$$

где τ_T – предел текучести стали (выбираем по номеру строки);

$n = 2$ – коэффициент запаса прочности.

Оформление графической части примера показано на рис. 9.

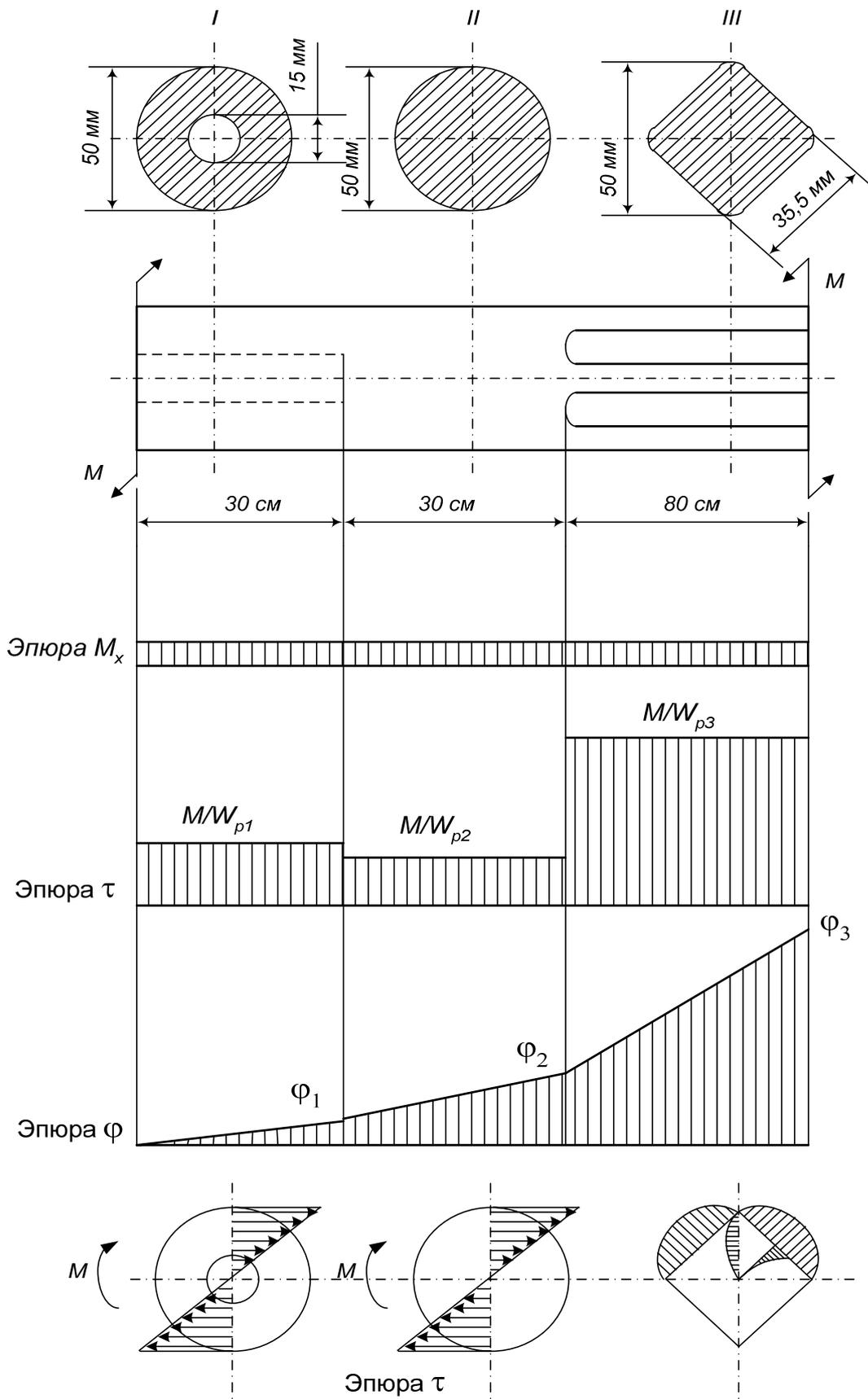


Рис. 9. Схема к решению задания 3

Пример выполнения задания 4

Задана балка с нагрузкой (рис.10), ее размеры: $a = 0,5$ м, $c = 0,6$ м.

Интенсивность распределенной нагрузки $q = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Сосредоточен-

ная сила $P = 0,6 \cdot q \cdot a = 1,8 \cdot 10^3$ Н. Момент $M = q \cdot a^2 = 1,5 \cdot 10^3$ Н·м.

Решение:

1. Находим реакции опор:

$$\sum M_A = 0: M - 2qc(2a + c) + B(2c + 2a) - P(3a + 2c) = 0;$$

$$B = \frac{P(3a + 2c) + 2qc(2a + c) - M}{2c + 2a} =$$
$$= \frac{1,8 \cdot 10^3(1,5 + 1,2) + 6 \cdot 10^3 \cdot 1,2(1 + 0,6) - 1,5 \cdot 10^3}{2,2} = 6,76 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0: M - A(2a + 2c) + 2qc \cdot c - P \cdot a = 0;$$

$$A = \frac{M + 2qc^2 - Pa}{2a + 2c} = \frac{1,5 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^3 \cdot (0,6)^2 - 1,8 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2,2} =$$
$$= 2,24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0;$$

$$A - q \cdot 2c + B - P = 2,24 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^3 + 6,76 \cdot 10^3 - 1,8 \cdot 10^3 = 0.$$

Для консольной балки по схеме I (см. рис. 6, с.15) реакции опор можно не вычислять, если дальнейший расчет выполнять со свободного конца балки.

2. Разбиваем балку на участки. Показываем начало и направление отсчета. Для каждого участка составляем уравнение поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z . Строим эпюры Q_y и M_z (см. рис. 10).

$$\underline{x_1 \in (0 \dots a)}$$

$$Q_1 = 0;$$

$$M_1 = -M = -1,5 \cdot 10^3 \text{ Нм}.$$

$$\underline{x_2 \in (0 \dots 2a)}$$

$$Q_2 = A = 2,24 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$M_2 = -M + A \cdot x_2;$$

$$M_{x_2=0} = -M = -1,5 \cdot 10^3 \text{ Нм};$$

$$M_{x_2=2a} = -1,5 \cdot 10^3 + 2,24 \cdot 10^3 \cdot 1 = 0,74 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

$$\underline{x_3 \in (0 \dots 2c)}$$

$$Q_3 = A - qx;$$

$$Q_{x_3=2c} = 2,24 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 \cdot 1,2 = -4,96 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$M_3 = -M + A(2a + x) - 0,5qx^2;$$

$$M_{x_3=2c} = -1,5 \cdot 10^3 + 2,24 \cdot 10^3 \cdot 2,2 - 0,5 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot (1,2)^2 =$$

$$= -0,892 \cdot 10^3 = -0,9 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

Найдем на участке 3 место, где поперечная сила $Q_y = 0$:

$$Q_3 = 2,24 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 \cdot x = 0;$$

$$x = \frac{2,24 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} = 0,37 \text{ м, тогда при } x = 0,37$$

$$M_3 = -1,5 \cdot 10^3 + 2,24 \cdot 10^3(1 + 0,37) - 0,5 \cdot 6 \cdot 10^3(0,37)^2 =$$

$$= 1,16 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

Экстремальное положение изгибающего момента может быть найдено из подобия треугольников эпюры сил.

$$\underline{x_4 \in (0 \dots a)}$$

$$Q_4 = P = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$M_4 = -P \cdot x_4;$$

$$M_{x_4=0} = 0;$$

$$M_{x_4=a} = -1,8 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = -0,9 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

3. Из эпюры M_z видим, что наиболее нагруженным (опасным) является первый участок. Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

найдем размеры поперечного сечения балки.

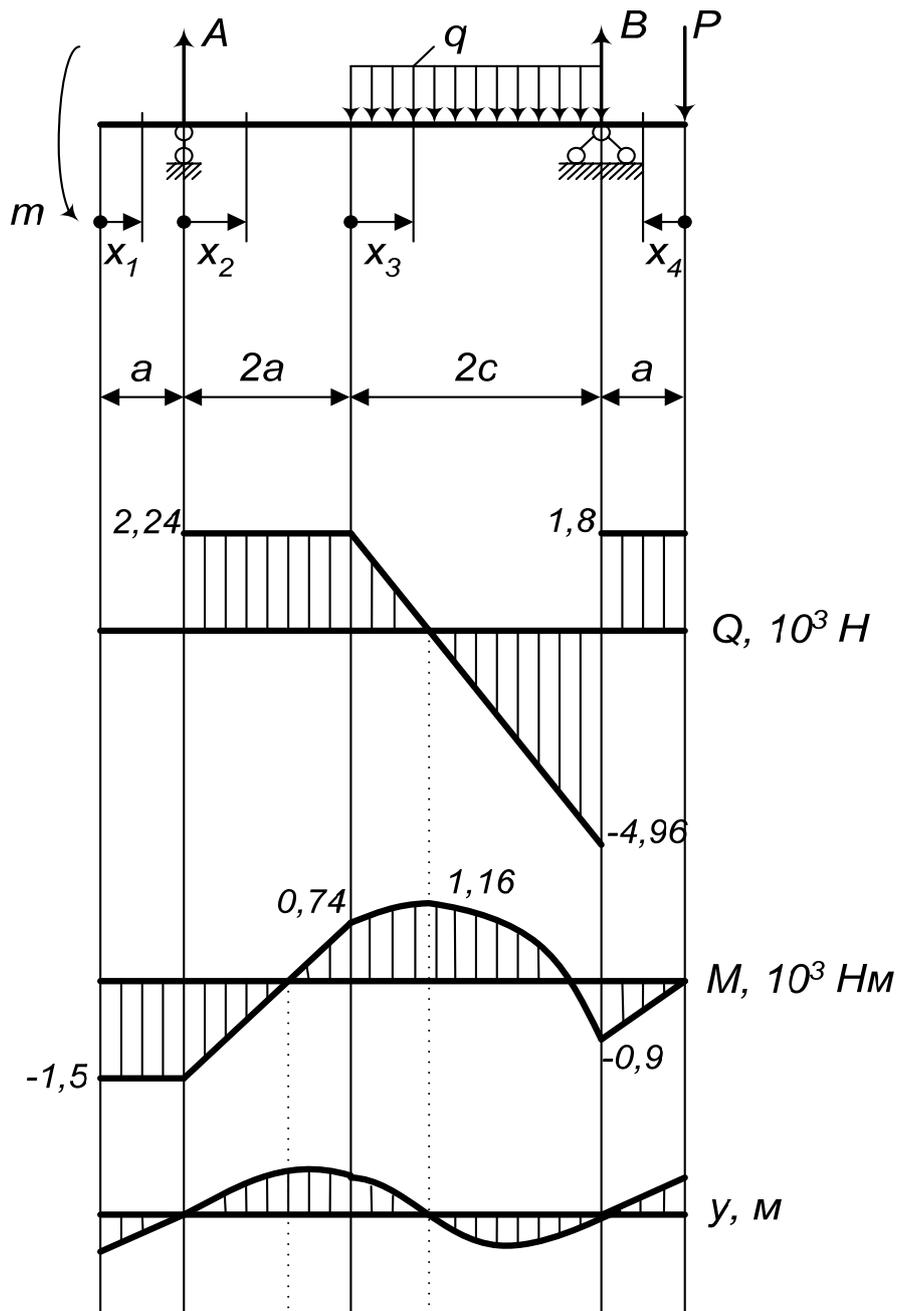


Рис. 10. Схема к решению задания 4

Находим размеры двутаврового поперечного сечения:

- допускаемое нормальное напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{240 \cdot 10^5 \cdot 9,81 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}{1,5} = 156,96 \text{ МПа};$$

- требуемый расчетный осевой момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{156,96 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 9,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 9,56 \text{ см}^3.$$

По справочнику наиболее близкое значение $W_z^c = 39,7 \text{ см}^3$, что соответствует балке двутавровой №10.

Рассчитываем размеры прямоугольного сечения, где $h = 2b$:

$$W_z^c = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z^c} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 39,7 \text{ см}^3} = 3,9 \text{ см};$$

$$h = 2 \cdot 3,9 \text{ см} = 7,8 \text{ см}.$$

Примечание: самостоятельно определить вес одного погонного метра балок двутаврового и прямоугольного сечения.

4. По эпюре M_z показываем примерный вид изогнутой оси балки. Учитываем, что изогнутая ось балки – эпюра прогибов «у» – не должна иметь переломов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется продольной силой, поперечной силой, крутящим моментом, изгибающим моментом?
2. Как определяются знаки N_x, Q_y, M_z ?
3. Как находится величина соответствующего внутреннего силового фактора в произвольном сечении бруса?
4. Какой брус называют валом, балкой?
5. Какой характеристикой оценивается прочность?
6. По какой зависимости находят величину напряжений при растяжении, кручении, изгибе?
7. Как определяется знак напряжений?
8. Что понимают под деформацией растяжения, сжатия, изгиба, кручения?
9. Как распределены напряжения по поперечному сечению бруса при растяжении, кручении, изгибе? Показать на эпюре.
10. Что понимают под допускаемым напряжением?
11. Объясните рациональность применения полых валов и двутавровых балок.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК*

1. *Степин, П. А.* Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высш. шк., 1987. – 368 с.
2. *Ицкович, Г. М.* Сопротивление материалов : учеб. для машиностроительных техникумов / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 1986. – 352 с.
3. *Ицкович, Г. М.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г. М. Ицкович [и др.]. – М. : Высш. шк., 1981. – 245 с.
4. *Аркуша, А. И.* Техническая механика : учеб. для машиностроительных техникумов / А. И. Аркуша. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

*Для выполнения заданий может быть использована любая дополнительная литература по сопротивлению материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ.....	3
Оформление расчетно-графической работы	4
Выбор варианта расчетно-графической работы	5
ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ.	
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	6
СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ	8
Задание 1	8
Задание 2	10
Задание 3	12
Задание 4	14
ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ	17
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	26
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	27

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ
Методические указания и задания к расчетно-графическим работам
по курсу «Прикладная механика»

Составители
НОВОСЕЛОВ Евгений Анатольевич
ФЕДОТОВ Олег Владимирович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В. Козырев

Подписано в печать 19.02.09.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,63. Тираж 300 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.