

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А.И. НОВОЖИЛОВ

ЗАДАЧИ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ  
(МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ)

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

Владимир 2009

УДК 531.3  
ББК 22.21  
Н74

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
Ковровской государственной технологической  
академии им. В.А. Дегтярёва  
*А.И. Леонов*

Заведующий кафедрой математического анализа,  
доктор физико-математических наук, профессор  
Владимирского государственного гуманитарного университета  
*В.В. Жиков*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Новожилов, А.И.**

Н74 **Задачи по теоретической механике (методика решения):** учеб. пособие / А.И. Новожилов; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 112 с.  
ISBN 978-5-89368-908-2

Предлагается методика решения задач по основным темам механики, которая демонстрируется на типичных примерах с подробным объяснением правил и схем решения. В конце пособия даны задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов машиностроительных и строительных специальностей заочных и дистанционных форм обучения, самостоятельно изучающих теоретическую механику. Поможет оно и при решении задач, и при выполнении курсовых работ. Может быть полезно преподавателям теоретической механики.

Ил. 55. Библиогр.: 3 назв.

ISBN 978-5-89368-908-2

УДК 531.3  
ББК 22.21

© Владимирский государственный  
университет, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
------------------	---

### МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

#### Задачи по статике

§1. Некоторые сведения из элементарной математики и механики.....	9
§2. Методика решения задач статики.....	13

#### Задачи по кинематике

§1. Исследование движения отдельных точек.....	26
§2. Исследование движения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.....	29
§3. Исследование плоскопараллельного движения тела.....	31
§4. Исследование сложного движения точки.....	38

#### Задачи по динамике

§1. Определение движения материальной точки.....	41
§2. Принцип Даламбера (метод кинетостатики).....	50
§3. Теорема об изменении кинетической энергии.....	53
§4. Уравнения Лагранжа.....	56
§5. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.....	62
§6. Теорема о движении центра масс.....	64
§7. Теорема об изменении количества движения.....	66
§8. Теорема об изменении момента количества движения.....	68

### ЗАДАЧИ

#### Статика

Система сходящихся сил.....	77
1. Плоская система сходящихся сил.....	77
2. Пространственная система сходящихся сил.....	78
Плоская система сил.....	79
1. Равновесие одного тела.....	79
2. Равновесие системы тел.....	82
Пространственная система сил.....	87
Силы, произвольно расположенные в пространстве.....	87

## **Кинематика**

Плоское движение твёрдого тела.....	90
1. Скорость точек тела при плоском движении.....	90
2. Ускорение точек тела при плоском движении.....	94
Сложное движение точки.....	96
1. Сложение скоростей точки.....	96
2. Сложение ускорений точки.....	98

## **Динамика**

Теорема об изменении кинетической энергии.....	101
Принцип Даламбера.....	105
Общее уравнение динамики. Уравнение Лагранжа.....	108
Рекомендуемый библиографический список.....	113

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Практика преподавания теоретической механики в вузах показывает, что знание теории, умение доказать и объяснить теоремы и принципы механики ещё не означает, что студент легко справится с решением практических задач. И не только при исследовании реальных проблем, при исследовании и проектировании различных конкретных конструкций, механизмов, но и при решении обычных студенческих задач, при выполнении курсовых и расчётно-графических работ. Особенно трудно приходится тем, кто изучает механику самостоятельно при заочных и дистанционных формах обучения.

Настоящее учебное пособие надо рассматривать как приложение к лекционному курсу, к различным учебникам по теоретической механике как методику, как правила и своеобразные рецепты решения задач.

В конце пособия предлагается сборник наиболее типичных задач с ответами, при решении которых студент может потренироваться и убедиться, что методика решения им освоена.

Предполагается, что студент прослушал курс лекций, у него имеется определённый багаж теоретического материала, учебник или хороший конспект лекций. Поэтому в нашем пособии нет подробного теоретического материала, а даны лишь краткие нужные сведения и определения. При необходимости делаются ссылки на конкретные параграфы и разделы учебника, где содержится нужный справочный материал.

В основу нашего пособия положена методика преподавания теоретической механики в студенческих группах нашего университета. Нам кажется, оно будет полезно не только студентам, но и преподавателям, ведущим практические занятия, и аспирантам, и инженерам в их практической работе.

Конкретные ссылки по теоретическому материалу делаются на «Краткий курс теоретической механики» А.И. Новожилова, изданный во Владимирском государственном университете в 2006 году. Можно, конечно, пользоваться и другими известными учебниками и задачками по теоретической механике.

Выражаем большую благодарность доценту кафедры А.А. Рязанову за полезные советы и ценные предложения при подготовке учебного пособия, а также декану факультета МТФ Е.А. Новиковой за советы по содержанию и помощь по оформлению пособия при подготовке его к изданию.

Необходимо выразить большую благодарность и студентам группы Ту –206 Н.В. Богатырёву, С.В. Наумкину и Ю.Г. Комарову, потратившим много времени на компьютерный набор последнего раздела пособия «Задачи».

**МЕТОДИКА  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**







# ЗАДАЧИ ПО СТАТИКЕ

---

Прежде чем приступать к решению задач по статике, да и всей механике, неплохо вспомнить некоторые сведения из школьной математики. К сожалению, эти нужные нам понятия, формулировки и правила почему-то забываются после поступления в институты. Может потому, что в школе не научили пользоваться ими при решении практических задач.

Нам в статике потребуются знания и алгебры, и геометрии с тригонометрией, потребуется умение хорошо чертить и, как это не покажется странным, грамотно и правильно писать. И само собой понятно (не смейтесь!), надо знать таблицу умножения и правила сложения простых дробей (например, сложить  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$  или не считать, что  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ).

## §1. Некоторые сведения из элементарной математики и механики

Итак. Начнём с тригонометрии. Не стоит напоминать, что такое синус, косинус, тангенс и котангенс угла. Известно, как они пишутся. А вот как ими пользоваться?

Вот, например, имеется прямоугольный треугольник с углом  $\alpha$  и со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 1). Конечно, если известна гипотенуза  $AC = a$ , то катеты будут равны:  $b = a \cos \alpha$  и  $c = a \sin \alpha$ .

А если известна сторона  $b$ , то сторона  $c = b \operatorname{tg} \alpha$  и, наоборот,  $b = c \operatorname{ctg} \alpha$ .

И ещё. Так как сумма углов в треугольнике равна  $\pi = 180^\circ$ , то угол  $\beta$  при вершине  $C$  равен  $\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ . Поэтому,  $b = a \sin \beta$  и  $c = a \cos \beta$ .

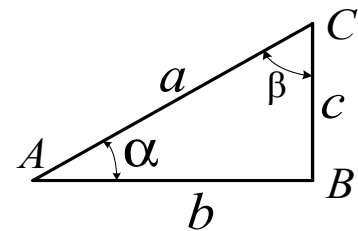


Рис. 1

Кстати,  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , а  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ . Неплохо вспомнить, что  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$ , а  $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$  и  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ .

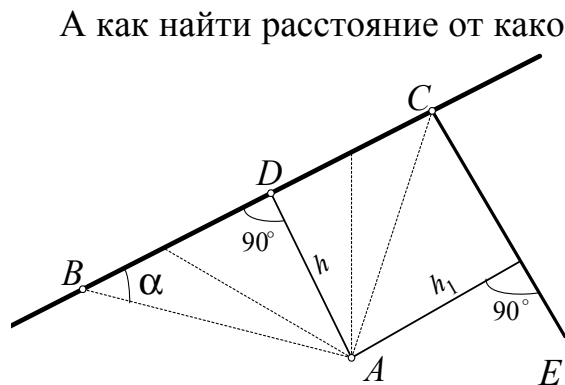


Рис. 2

перпендикулярной  $BC$ , конечно, равно  $h_1 = DC$ , где  $DC = BC - BD = BC - AB \cdot \cos \alpha$ .

А как найти расстояние от какой-нибудь точки  $A$  до прямой линии  $BC$  (рис. 2)? Конечно, все прямые, проведённые из точки  $A$  до этой прямой, будут такими расстояниями. Но *кратчайшим* расстоянием, самым коротким, будет длина  $h$  прямой  $AD$ , проведённой перпендикулярно прямой линии  $BC$ . И если известны, например, длина  $AB$  и угол  $\alpha$ , то  $h = AB \cdot \sin \alpha$ . А кратчайшее расстояние от точки  $A$  до прямой  $CE$ , перпендикулярной  $BC$ , конечно, равно  $h_1 = DC$ , где  $DC = BC - BD = BC - AB \cdot \cos \alpha$ .

Чтобы решать задачи статики, исследовать равновесие различных конструкций, нужно уметь правильно проектировать вектор силы на ось и находить момент вектора силы относительно точки и относительно оси.

Сначала вспомним, как определяется проекция силы на ось.

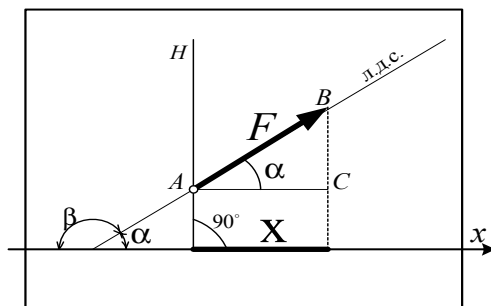


Рис. 3

Чтобы найти проекцию силы  $\vec{F}$  на ось  $x$ , если вектор силы и ось лежат в одной плоскости (рис. 3), надо из концов вектора силы опустить перпендикуляры на ось. Получим на оси отрезок прямой  $X$ , который и является проекцией этой силы на ось  $x$ . Из прямоугольного треугольника  $ABC$  следует, что  $X = AB \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \alpha$ . Конечно, угол  $\alpha$  можно определить как угол между линией действия силы (л.д.с) и осью. Причём обязательно надо использовать *острый* угол  $\alpha$ , а не  $\beta$ . На рис. 4 определена проекция силы  $\vec{F}_1$  на ось  $y$ :  $Y_1 = +F_1 \cdot \cos \alpha$ .

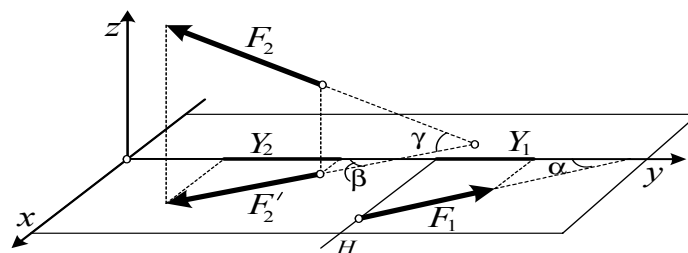


Рис. 4

Проекция силы считается положительной ( $X > 0$ ), если вектор силы и ось направлены в одну сторону от перпендикуляра  $H$  к оси, проведённого в начале вектора силы (см. рис. 3).

На том же рис. 4 показано, как надо определять проекцию силы на ось, если они, сила и ось, не расположены в одной плоскости.

В таких случаях, как видно из рисунка, приходится проектировать дважды: сначала на плоскость (получим проекцию  $F_2' = F_2 \cdot \cos \gamma$ ), а потом вектор этой проекции спроектировать, наконец, и на ось  $y$ . Получим окончательно  $Y_2 = -F_2' \cdot \cos \beta = -F_2 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta$ .

Такой способ проектирования называется *методом двойного проектирования*.

Знак проекции (+ или -) определяется направлениями оси и вектора силы. Если они направлены в одну сторону от плоскости, перпендикулярной оси, то - плюс.

Заметим ещё, что если вектор силы находится в плоскости, перпендикулярной оси, то проекция силы на ось равна нулю.

Если понятны сделанные выше определения, то, наверное, можно согласиться, что (см. рис. 4)  $X_1 = -F_1 \cdot \sin \alpha$ ;  $Z_1 = 0$ ;  $X_2 = F_2 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta$ ;  $Z_2 = F_2 \cdot \sin \gamma$ .

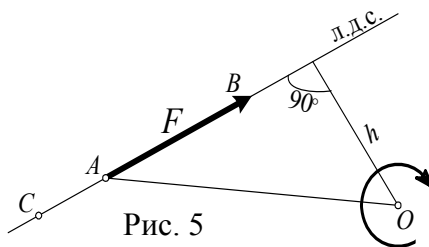


Рис. 5

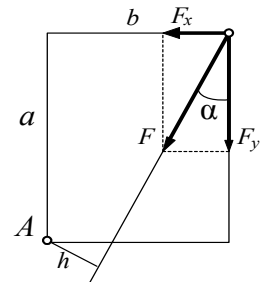
Вспоминаем далее, как определяется момент силы. Проще всего найти момент силы относительно точки, если они, сила и точка, расположены в одной плоскости (рис. 5). Это есть произведение величины, модуля, силы на плечо  $h$ . Плечо  $h$  - это кратчайшее расстояние от точки  $O$ , относительно

которой определяется момент силы, до линии действия силы, а не до точки приложения силы, *не расстояние*  $OA$ . Записывается момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  так:  $M_O(\vec{F}) = F \cdot h$ .

Конечно, момент силы относительно точки  $C$ , например, расположенной на линии действия силы, равен нулю, так как плечо силы будет равно нулю.

Величина момента считается положительной, если вектор силы вращается вокруг точки *против* направления вращения стрелок часов, и отрицательной, если *по* часовой *стрелке*:  $\oplus \ominus$  (Точнее, правильнее, надо было бы говорить о вращении *тела*, к которому приложена сила. Но не будем придираться к словам.) В данном примере (см. рис. 5) момент силы будет отрицательным.

И ещё одно маленькое, но очень полезное замечание. Если определить плечо силы не очень просто, то советуем силу  $\vec{F}$  разложить на две взаимно перпендикулярные силы  $F_x = F \sin \alpha$  и  $F_y = F \cos \alpha$ . И затем находить момент не силы  $\vec{F}$ , а сумму моментов этих двух новых сил:  $M_A(\vec{F}) = -Fh = F_x \cdot a - F_y \cdot b = Fa \sin \alpha - Fb \cos \alpha$ .



Сложнее определяется момент силы относительно оси. Общее правило такое. Чтобы найти момент, например силы  $\vec{F}_1$  относительно оси  $z$  (рис. 6), надо вектор силы спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси, и найти момент этой проекции  $\vec{F}'_1$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  и плоскости:

$$M_z(\vec{F}_1) = M_O(\vec{F}'_1) = F'_1 \cdot h = F_1 \cos \alpha \cdot h.$$

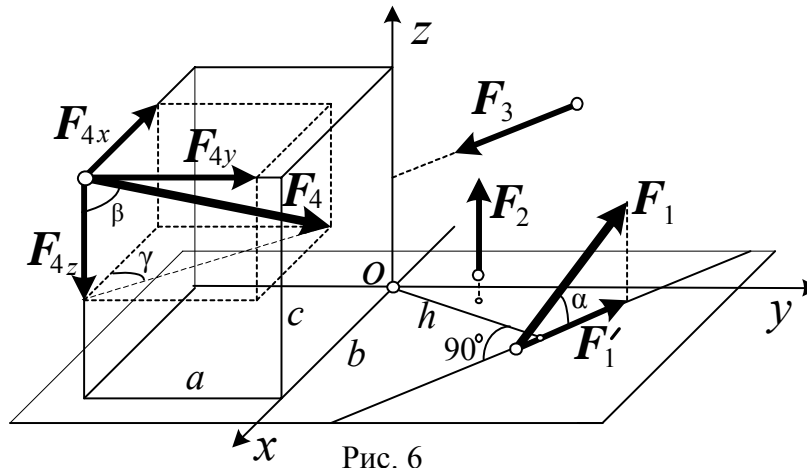


Рис. 6

Правило знака величины момента и здесь остаётся прежним. Только нужно договориться, с какой стороны от плоскости надо смотреть на силу. Смотреть надо со стороны стрелки оси. В нашем примере смотрим сверху, видим вращение силы против хода часовой стрелки. Значит, момент силы  $\vec{F}_1$  положительный.

И ещё замечание, важное и понятное. Как видно из рисунка, моменты сил  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  относительно оси  $z$  будут равны нулю, так как они не могут вращать тело (которое, кстати, на рисунке не показано) вокруг оси  $z$ . Следовательно, момент силы относительно оси равен нулю, если вектор силы параллелен оси или линия действия силы пересекает ось.

Практически, при решении задач, когда требуется находить моменты силы относительно нескольких осей, поступают немного иначе, используя теорему Вариньона. Сначала раскладывают вектор силы на составляющие, параллельные осям координат, а затем уж находят сумму моментов этих составляющих относительно соответствующей оси. Так получается проще и понятнее.

Например, чтобы найти моменты силы  $\vec{F}_4$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , раскладываем вектор этой силы на составляющие  $\vec{F}_{4x}$ ,  $\vec{F}_{4y}$  и  $\vec{F}_{4z}$  (см. рис. 6) и находим сумму моментов их относительно осей. Получим  $M_x(\vec{F}_4) = F_{4z}a - F_{4y}c$ ;  $M_y(\vec{F}_4) = F_{4z}b - F_{4x}c$ ;  $M_z(\vec{F}_4) = -F_{4x}a + F_{4y}b$ .

Модули, то есть абсолютные, положительные величины составляющих сил  $\vec{F}_{4x}$ ,  $\vec{F}_{4y}$ ,  $\vec{F}_{4z}$  находятся с помощью проекций силы  $\vec{F}_4$  на соответствующие оси:  $F_{4x} = F_4 \sin \beta \cdot \cos \gamma$ ;  $F_{4y} = F_4 \sin \beta \cdot \sin \gamma$ ;  $F_{4z} = F_4 \cos \beta$ .

При решении задач придётся учитывать действие на тело пары сил. Что такое пара сил, известно. Это две силы, равные по величине, по модулю, параллельные и направленные в противоположные стороны.

Действие пары на тело характеризуется лишь величиной момента этой пары, который определяется как произведение модуля одной из сил на плечо пары, на кратчайшее расстояние между параллельными линиями действия сил пары.

И действие пары на тело не зависит от места, где эта пара расположена на теле. Поэтому пару на чертеже обычно изображают в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения пары, а рядом указывают величину момента её  $m$ . Так поступают, если рассматриваются силы, расположенные в плоскости. Если же рассматривается система сил, расположенных в пространстве, то пара представляется вектором  $\vec{m}$ , направленным перпендикулярно плоскости, в которой пара расположена.

При составлении уравнений равновесия, когда будем решать задачи, надо помнить, что, во-первых, проекция пары на любую ось равна нулю; во-вторых, момент пары относительно любой точки равен моменту этой пары; и, в-третьих, момент пары относительно какой-то оси равен проекции вектора момента пары на эту ось (проекция вектора момента пары на ось находится по тем же правилам, что и проекция вектора силы).

## §2. Методика решения задач статики

Задачи статики решаются составлением уравнений равновесия. Поэтому полезно вспомнить, сколько и какие уравнения можно составлять. Это зависит от расположения сил, действующих на тело.

Если силы окажутся сходящимися, линии действия их пересекаются в одной точке, то составляются уравнения проекций этих сил на оси. Два уравнения для плоской системы сил, три – для пространственной.

Если получится система сил, расположенных в плоскости и произвольно, можно составить три уравнения.

Классическая форма – два уравнения проекций сил на оси и одно уравнение моментов относительно какой-либо точки (вариант I на странице 14). Причём, оси и точку в этом варианте можно выбирать произвольно. Лишь бы оси не оказались параллельными.

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_O(\vec{F}_i) = 0; \end{array} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \end{array} \right\} \text{(II)} \quad \left. \begin{array}{l} \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_C(\vec{F}_i) = 0. \end{array} \right\} \text{(III)}$$

Второй вариант (II) – уравнение проекций сил на ось и два уравнения моментов относительно точек. В этом варианте надо проследить за тем, чтобы эти точки не оказались на прямой, перпендикулярной оси.

Ну и третий вариант (III) – три уравнения моментов сил относительно трёх точек. В этом варианте точки надо назначать так, чтобы они не оказались на одной прямой.

А каким вариантом надо пользоваться? Желательно получить уравнения, каждое с одним неизвестным. Для этого рекомендуется использовать третий вариант, если удастся, составляя уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия каждой *двух неизвестных* сил.

Наконец, если получится система сил, произвольно расположенных в разных плоскостях, в пространстве, то составляется шесть уравнений равновесия, проектируя силы на оси и составляя моменты сил относительно осей. При этом надо стремиться к тому, чтобы в уравнениях оказалось меньше неизвестных, лучше – одно. Поэтому надо подумать, какие уравнения составить и как провести соответствующие оси.

И последнее замечание. Надо последить, чтобы число неизвестных в задаче не оказалось больше числа уравнений, которые можно составить. Иначе задача не имеет полного решения, является статически неопределённой. Такую задачу методами статики не решить.

Задачи из раздела статики хороши тем, что решаются они одинаково просто. По сути дела, достаточно уметь проектировать силы и находить момент силы и, конечно, знать правила алгебры и арифметики. В этом легко убедиться, рассмотрев решение нескольких задач.

Вот первая задача.

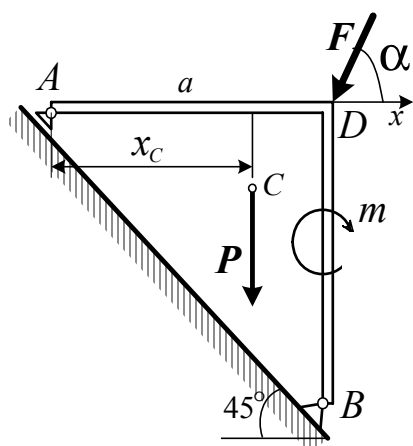


Рис. 7

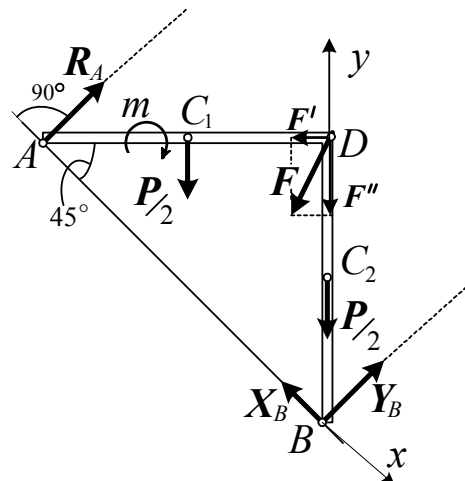


Рис. 8

Конструкция в виде равносортонного уголка  $ADB$  со сторонами, равными  $a = 2$  м, удерживается в равновесии двумя шарнирными опорами  $A$  и  $B$  (опора  $A$  – подвижная). На конструкцию действуют пара сил с моментом  $m = 20$  кН·м и в точке  $D$  – сила  $F = 3$  кН под углом  $\alpha = 60^\circ$ . Известен вес уголка  $P = 2$  кН. Определить реакции опор.

Сразу сделаем очень важное замечание: во всех задачах статики порядок решения производится по одинаковой схеме. Если следовать этой схеме, то получим простое и безошибочное решение.

1. Первое, что надо сделать, выбрать, назначить объект равновесия. То есть нужно решить, равновесие какой части конструкции следует рассмотреть, чтобы определить те неизвестные, которые требуется найти по условию задачи.

В данной задаче всё очень просто. Тут выбирать нечего. Конечно, надо рассмотреть равновесие уголка  $ADB$ . Но в некоторых задачах, возможно, потребуется исследовать равновесие конструкции, состоящей из нескольких тел. Вот тогда придётся выбирать.

Существует удобное правило, звучащее не совсем по-научному, но очень хорошо работающее. Нужно установить, реакции каких связей требуется определить, «разрушить» эти связи и посмотреть, что упадёт. Это и будет объект равновесия. Конечно, может упасть и несколько тел. Сколько упадёт, столько и будет объектов равновесия.

В нашей задаче требуется определить реакции опор  $A$  и  $B$ . Уберём их – упадёт этот уголок. Значит, правильно установили ранее, что объект равновесия – уголок  $ADB$ .

2. Строим расчётную схему. Для этого нужно нарисовать объект равновесия свободным телом, без связей. Причём, следует убрать *все* связи, а не только те, реакции которых требуется определить по условию задачи. Затем показать все силы, действующие на этот объект равновесия.

В нашей задаче (рис. 8) это, во-первых, активные задаваемые силы  $\vec{F}$ , вес  $\vec{P}$  и пара с моментом  $m$ , которая изображена дугой со стрелочкой, указывающей направление вращения, и, во-вторых, реакции связей, опор  $A$  и  $B$ .

Очень важно правильно показать реакции связей. В литературе [1] на рис. 1.4 дана таблица наиболее часто встречающихся связей и их реакций. Нужно очень строго следовать указаниям и пояснениям к этой таблице.

В нашем примере опора  $A$  – шарнирно-подвижная. Реакция её  $\vec{R}_A$  направлена перпендикулярно плоскости возможного скольжения опоры. Опора  $B$  – шарнирно-неподвижная. Реакцию её  $\vec{R}_B$  определяем как сумму двух перпендикулярных друг другу сил  $\vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$ . Направлять их можно как угодно, лишь бы они были взаимно перпендикулярны.

Силу  $\vec{F}$  для удобства рекомендуется показать иначе, точку приложения сделать в начале вектора (см. рис. 8), в точке  $D$ .

Вес уголка, силу  $\vec{P}$  надо прикладывать к центру тяжести, к точке  $C$ . Но в этой задаче будет удобнее показать вес каждой половинки, равный  $\frac{1}{2}P$ , приложенный к центру тяжести половинок посередине их длины, в точках  $C_1$  и  $C_2$ .

3. Следующий шаг, пожалуй, самый главный и не такой простой. Нужно посмотреть, какая получилась система сил, и составить соответствующие ей уравнения равновесия.

У нас получилась система сил, произвольно расположенных в одной плоскости. Для такой системы сил можно составить три уравнения равновесия. Или два уравнения проекций сил на оси и одно уравнение моментов относительно какой-нибудь точки (по варианту I). Или уравнение проекций сил на ось и два уравнения моментов их относительно двух точек (по варианту II). Или составить все три уравнения моментов сил относительно трёх разных точек (вариант III).

Как уже было рекомендовано выше, будем пользоваться третьим вариантом. Находим точки пересечения линий действия неизвестных сил. Это точка  $A$ , где пересекаются линии действия двух сил  $\vec{R}_A$  и  $\vec{X}_B$ , и точка  $B$ , где приложены две неизвестные силы  $\vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$ . А линии действия неизвестных сил  $\vec{R}_A$  и  $\vec{Y}_B$  оказались параллельными, не пересекаются. В этом случае надо составлять уравнение проекций сил на ось  $x$ , перпендикулярную им. Получается II-й вариант уравнений равновесия, причём ось  $x$  не перпендикулярна прямой  $AB$ .



Составляем уравнения равновесия, для удобства разложив силу  $\vec{F}$  на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ :

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad Y_B \cdot AB - \frac{1}{2}P \cdot a - F'' \cdot a - \frac{1}{2}P \cdot 0,5a - m = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -R_A \cdot AB - m + \frac{1}{2}P \cdot 0,5a + F' \cdot a = 0;$$

$$\sum X_i = 0; \quad P \cdot \cos 45^\circ - F' \cdot \cos 45^\circ + F'' \cdot \cos 45^\circ - X_B = 0.$$

Каждое уравнение получилось с одним неизвестным, легко решаются.

Так как  $AB = \frac{a}{\cos 45^\circ} = a\sqrt{2}$ ,  $F' = F \cos 60^\circ$ ,  $F'' = F \cos 30^\circ$ , то из перво-

го уравнения находим  $Y_B = \left( \frac{1}{2}P + F \cdot \cos 30^\circ + \frac{P}{4} + \frac{m}{a} \right) \cos 45^\circ = 9,97 \text{ кН}$ .

Из второго  $R_A = \left( -\frac{m}{a} + \frac{P}{4} + \frac{F}{2} \right) \cos 45^\circ = -5,66 \text{ кН}$ . А из третьего уравнения

находим реакцию  $X_B = (P - F \cdot \cos 60^\circ + F \cdot \cos 30^\circ) \cos 45^\circ = 2,19 \text{ кН}$ .

Обратим внимание, что реакция  $R_A$  получилась отрицательной. Это указывает на то, что эта сила на самом деле направлена в противоположную сторону. Но исправлять ничего не надо. Результат так и оставим со знаком минус.

Для проверки решения полезно составить ещё одно уравнение и посмотреть, удовлетворяется ли оно при полученных результатах. Причём желательно составить такое, чтобы в него вошло как можно больше неизвестных. В нашей задаче определим сумму проекций сил на вертикальную ось  $y$

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= R_A \cdot \cos 45^\circ - P - F \cdot \cos 30^\circ + X_B \cdot \cos 45^\circ + Y_B \cdot \cos 45^\circ = \\ &= -566 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,19 \frac{\sqrt{2}}{2} + 9,97 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0! \end{aligned}$$

Решение задачи правильное.

И ещё замечание. Уголок мы решили разделить на две равные части и показали вес каждой. Но можно было этого не делать, а найти центр тяжести всего уголка (рис. 7) по формулам (6.4) книги [1], и приложить к нему вес всего уголка  $\bar{P}$ . Для нашей задачи достаточно было найти только ко-

ординату  $x_C = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{L} = \frac{a \cdot 0,5a + a \cdot a}{2a} = \frac{3}{4}a$ .

Рассмотрим решение ещё нескольких задач.

На рис. 9 дана схема механизма, состоящего из цилиндрического барабана с грузом  $P$ , подвешенным на тросе, намотанном на барабан. Ось барабана прикреплена к стене двумя стержнями. Чтобы барабан не вращался, на него давит планка  $AB$ , нагруженная распределённой силой интенсивности  $q$ . Коэффициент трения между планкой и барабаном –  $f$ . В точке  $B$  – шарнир. Вес барабана –  $G$ . Необходимые размеры показаны на чертеже. Определить усилия в стержнях 1 и 2, максимальный вес груза  $P$ , который может удержать эта конструкция, и натяжение нити, троса, на которой висит груз.

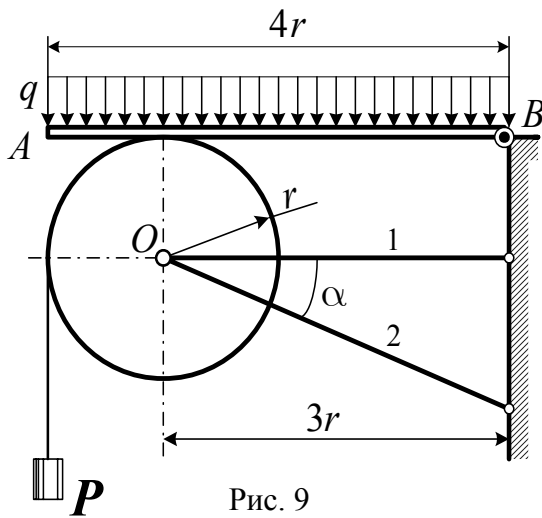


Рис. 9

Итак. Вспоминаем порядок решения задач. Сначала выбираем объект равновесия. Убираем все связи (не только те, реакции которых требуется определить), делаем тела, части конструкции, свободными: перепиливаем стержни, разрушаем шарнир  $B$ , обрезаем нить. Смотрим, что упадет. Упадут три части конструкции: планка  $AB$ , барабан и груз. Значит, придётся рассмотреть равновесие этих трёх объектов.

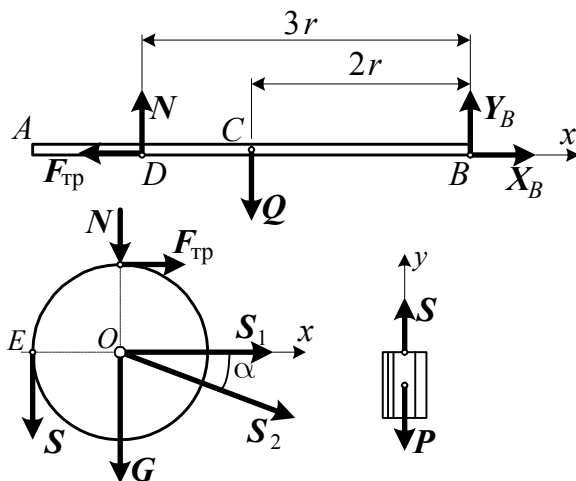


Рис. 10

Теперь надо посмотреть, какие системы сил действуют на тела. На планку и барабан действуют силы, произвольно расположенные на плоскости. Для этих тел можно составить по три уравнения равновесия. На груз действуют две силы, направленные по одной прямой. Так что для груза имеем право составить только одно уравнение.

Рисуем их отдельно свободными телами (рис. 10), и показываем все силы, действующие на них. (Вспоминаем, что усилие в стержне направляется по стержню от тела, реакция поверхности  $\vec{N}$  – перпендикулярно ей к телу. Сила трения направляется по поверхности в сторону, противоположную возможному скольжению). Получается расчётная схема.

Теперь надо посмотреть, какие системы сил действуют на тела. На планку и барабан действуют силы,

Таким образом, для решения этой задачи можно составить семь уравнений равновесия. А сколько неизвестных появилось? Считаем:  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $N$ ,  $F_{\text{тр}}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S$ ,  $P$  – восемь неизвестных. А уравнений – семь! Что, эта задача не решается? Статически неопределённая? Нет, всё нормально. Не надо забывать, что мы должны определить максимально возможную силу  $P$ , когда сила трения  $F_{\text{тр}}$  максимальна, то есть  $F_{\text{тр}} = fN$ . Это и будет восьмое дополнительное уравнение.

И ещё замечание. На расчётной схеме вместо распределённой силы показана её равнодействующая, сосредоточенная сила  $Q = q \cdot 4r$ , равная площади прямоугольника, изображающего эту нагрузку, и приложенная к центру тяжести его, то есть посередине планки, в точке  $C$ .

Составляем теперь уравнения равновесия.

Для планки  $AB$  три уравнения:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sum X_i &= 0; & X_B - F_{\text{тр}} &= 0; \\ 2) \quad \sum M_{Di} &= 0; & -Q \cdot r + Y_B \cdot 3r &= 0; \\ 3) \quad \sum M_{Bi} &= 0; & -N \cdot 3r + Q \cdot 2r &= 0. \end{aligned}$$

Для барабана тоже три:

$$\begin{aligned} 4) \quad \sum M_{Oi} &= 0; & -F_{\text{тр}} \cdot r + S \cdot r &= 0, \\ 5) \quad \sum M_{Ei} &= 0; & -N \cdot r - F_{\text{тр}} \cdot r - G \cdot r - S_2 \cdot \sin \alpha \cdot r &= 0, \\ 6) \quad \sum X_i &= 0; & F_{\text{тр}} + S_2 \cdot \cos \alpha + S_1 &= 0. \end{aligned}$$

Для груза – одно:

$$7) \quad \sum Y_i = 0; \quad S - P = 0.$$

После решения всех этих уравнений найдём из третьего уравнения  $N = \frac{2}{3}Q = \frac{8}{3}qr$ , а из второго  $Y_B = \frac{1}{3}Q = \frac{4}{3}qr$ . И так как  $F_{\text{тр}} = fN = \frac{8}{3}qfr$ ,

то из первого уравнения находим  $X_B = F_{\text{тр}} = \frac{8}{3}qfr$ , а из четвёртого

$S = F_{\text{тр}} = \frac{8}{3}qfr$  и из пятого уравнения  $S_2 = -\frac{1}{\sin \alpha} \left[ \frac{8}{3}qr(1+f) + G \right]$ . Шест-

тое уравнение определит  $S_1 = -S_2 \cdot \cos \alpha - F_{\text{тр}} = \left[ \frac{8}{3}qr(1+f) + G \right] \cdot \text{ctg} \alpha - \frac{8}{3}qfr$ .

И, наконец, из седьмого уравнения находим необходимый вес груза

$$P = S < \frac{8}{3}qfr.$$

Замечаем ещё, что усилие  $S_2$  в стержне 2 получилось отрицательным. Это означает, что сила направлена в противоположную сторону, к телу, к барабану. Значит, стержень 2 будет сжат.

Ещё одна задача, некоторые особенности решения которой часто встречаются.

Конструкция состоит из двух одинаковых рам  $ACB$  и  $CED$ , соединённых шарниром  $C$  и прикреплённых к поверхности земли шарнирными опорами  $B$  и  $D$ .

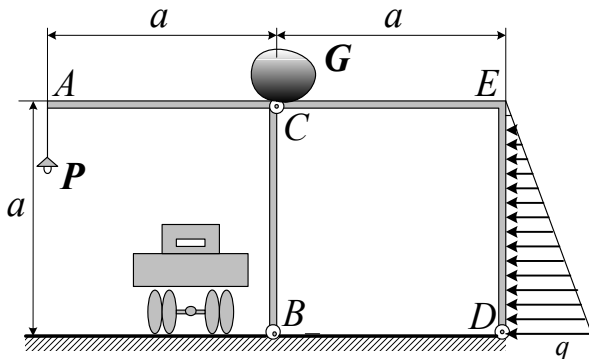


Рис 11

Определим реакции всех трёх шарниров, возникших от веса тела  $G$ , забытого на крыше, и веса фонаря  $P$ . Учтём ещё распределённую по закону треугольника силу с максимальным значением интенсивности  $q$ .

Назначаем объекты равновесия. Разрушив шарниры, устанавливаем, что для решения задачи

надо рассмотреть равновесие каждой части конструкции, каждой рамы в отдельности.

Строим расчётную схему – объекты равновесия со всеми силами, которые на них действуют (рис. 12).

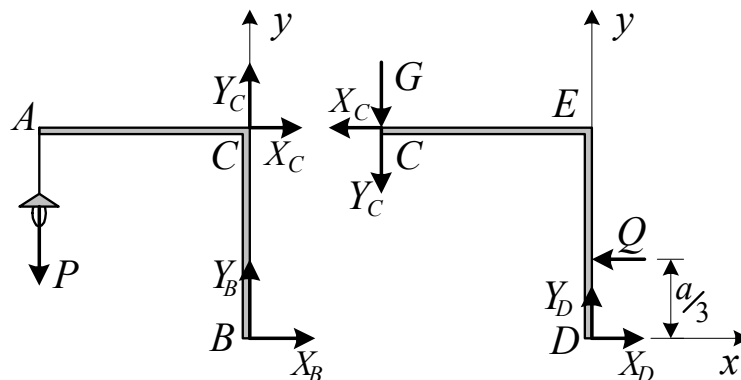


Рис. 12

Реакции шарниров – это две взаимно перпендикулярные силы. Как они направляются, знаем: в произвольно выбранных направлениях. Только у шарнира  $C$ , соединяющего обе рамы, есть особенности. Реакции  $\vec{X}_C$  и  $\vec{Y}_C$ , действующие на левую раму, направляем произвольно. Но реакции этого шарнира, действующие на правую раму, конечно, по величине будут такими же, но направленными в противоположные стороны (по известному закону Ньютона «действие равно противодействию»).

И ещё одно замечание. На шарнир  $C$  действует сила, равная весу  $G$  тела, находящегося над шарниром, над местом соединения двух рам. К какой раме надо приложить эту силу? Всё зависит от конструкции этого шарнира

и от формы и размеров тела. Поэтому, если заранее не оговорена конструкция узла  $C$ , прикладываем эту силу  $\vec{G}$  к любому понравившемуся нам объекту равновесия. Здесь мы решили приложить силу  $\vec{G}$  к правой раме.

Распределённую нагрузку заменили одной сосредоточенной силой  $\vec{Q}$ , равной площади треугольника  $Q = \frac{1}{2}qa$  и приложенной к раме в точке, расположенной напротив центра тяжести треугольника.

Составляем уравнения равновесия. Силы, действующие на рамы, произвольно расположены на плоскости. Поэтому для каждой рамы можно составить по три уравнения. Так как число неизвестных (шесть) равно числу уравнений, задача решается, статически определенная.

Но заметим, что число неизвестных сил, действующих на каждую раму, больше трёх. Поэтому все шесть уравнений невозможно сделать хорошими, с одной неизвестной.

Для левой рамы можно составить только два хороших уравнения – уравнения моментов относительно точек  $B$  и  $C$ , в которых пересекаются линии действия всех неизвестных сил, кроме одной

$$\begin{aligned}\sum M_{Bi} &= 0; & -X_C \cdot a + P \cdot a &= 0; \\ \sum M_{Ci} &= 0; & X_B \cdot a + P \cdot a &= 0.\end{aligned}$$

Лучше уравнений и не придумаешь! Сразу находим  $X_C = P$ ,  $X_B = -P$ .

Третье уравнение, содержащее только одну неизвестную, составить невозможно. Составим, например, уравнение проекций на ось  $y$ , что попроще. На ось  $x$  проектировать нельзя, так как эта ось будет перпендикулярной прямой  $BC$ , проведенной через точки, относительно которых составлены уравнения моментов:

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C + Y_B - P = 0.$$

Сложнее получаются уравнения для правой рамы. Ни одного хорошего уравнения не составить. Составим такие:

$$\begin{aligned}\sum M_{Ci} &= 0; & Y_D \cdot a + X_D \cdot a - Q \frac{2}{3}a &= 0, \\ \sum M_{Di} &= 0; & X_C \cdot a + Y_C \cdot a + Q \frac{1}{3}a + G \cdot a &= 0, \\ \sum Y_i &= 0; & -Y_C + Y_D - G &= 0.\end{aligned}$$

Придется решать систему уравнений с несколькими неизвестными.

Важное замечание и очень полезное. Чтобы облегчить решение подобных задач, можно поступить следующим образом. Нам нужно было иметь два объекта равновесия. Но совсем не обязательно рассматривать равновесие каждой рамы в отдельности. Гораздо выгоднее назвать объек-

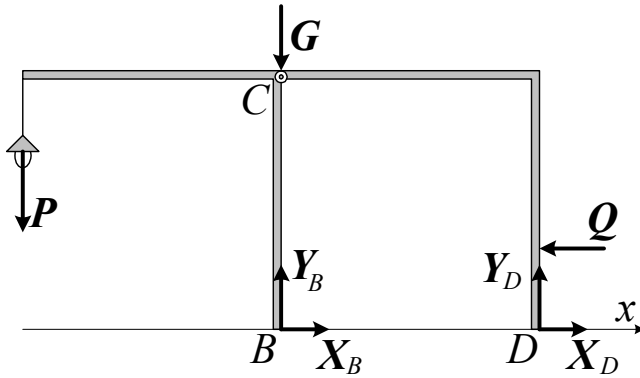


Рис. 13

тами равновесия какую-нибудь одну раму, например левую (на неё действует меньше сил), и всю конструкцию в целом (рис.13). Шарнир C, соединяющий рамы, оставим целым, неразрушенным (и реакции в нём показывать не надо).

Очевидно, для такого объекта равновесия можно составить два хороших уравнения

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad Y_D \cdot a + Q \frac{1}{3} a + P \cdot a = 0,$$

$$\sum M_{Di} = 0; \quad -Y_B \cdot a + G \cdot a + Q \frac{1}{3} a + P \cdot 2a = 0.$$

Из этих уравнений сразу находим  $Y_D = -\frac{1}{3}(Q + 3P)$ ,  $Y_B = \frac{1}{3}(Q + 3G + 6P)$ .

Третье уравнение хорошим не получится, но это уже и нестрашно

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + X_D - Q = 0.$$

Теперь все неизвестные определяются:  $X_D = Q - X_B = Q + P$ . А используя прошлые уравнения, составленные для левой рамы, находим и последнюю неизвестную  $Y_C = P - Y_B = -\left(P + G + \frac{1}{3}Q\right)$ .

Наконец, надо показать, как решаются задачи, если силы, действующие на конструкцию, не расположены в одной плоскости. Порядок и метод решения задачи остаются, конечно, прежними.

Вот такая сначала задача. Тело цилиндрической формы подвешено на трёх одинаковых тросах или нитях AD, BD и CD, длина которых равна двум радиусам r цилиндра (рис. 14).

Точки A, B и C, где прикреплены нити к цилиндру, делят окружность на три равные части. Вес цилиндра P. Определим усилия в тросах.

Назначаем объект равновесия. Если обрезать нити, усилия в которых требуется определить, упадёт цилиндр с обрывками тросов. Это и будет объект равновесия.

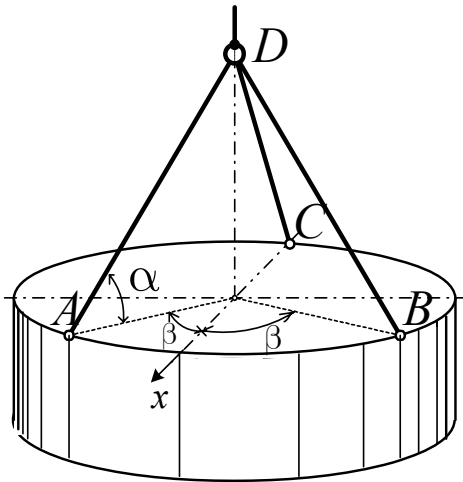


Рис. 14

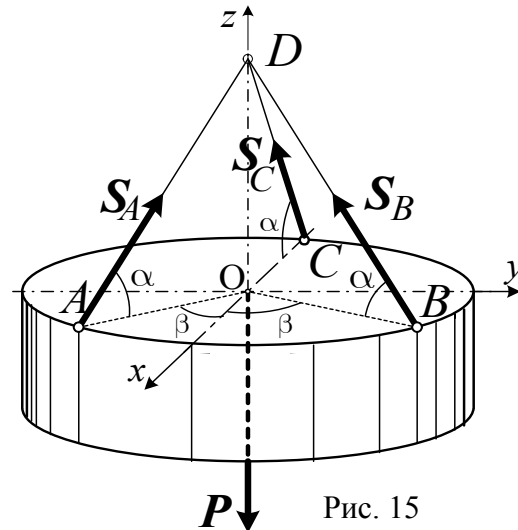


Рис. 15

Строим расчётную схему (рис. 15). На цилиндр действуют реакции – натяжение нитей  $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C$ , направленные по нитям от тела вверх, и вес цилиндрического тела, сила  $\vec{P}$ . Получилась система сходящихся сил, расположенных в пространстве. Для такой системы сил можем составить три уравнения равновесия, уравнения проекций сил на три оси.

Разберёмся сначала с углами. Так как длины нитей в два раза больше радиуса цилиндра, то углы  $\alpha$  между нитями и плоскостью тела равны  $60^\circ$ . А ось  $x$  делит угол  $\angle AOB$  пополам, то есть тоже на углы  $\beta = 60^\circ$  (см. рис. 14).

Составляем уравнения:

$$\sum X_i = 0; \quad -S_A \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - S_B \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + S_C \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_A \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - S_B \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad S_A \cdot \sin \alpha + S_B \cdot \sin \alpha + S_C \cdot \sin \alpha - P = 0.$$

При составлении уравнений пришлось воспользоваться правилом двойного проектирования.

Из второго уравнения сразу получаем  $S_A = S_B$ . Поэтому из первого, сократив на  $\cos \alpha$ , получим  $-2S_A \cdot \cos \beta + S_C = 0$ . Но  $\beta = 60^\circ$  и  $\cos 60^\circ = 0,5$ . Значит,  $S_C = S_A = S_B$  и третье уравнение даёт окончательное решение

$$S_A = S_B = S_C = \frac{P}{3 \sin \alpha} = \frac{2}{3\sqrt{3}} P = 0,385 P.$$

Теперь попробуем решить такую задачу. Тело в виде треугольной призмы поддерживается шестью стержнями (рис. 16). Размеры указаны на рисунке. Вес тела  $P$ . На тело в наклонной плоскости действует пара сил с моментом  $m$ . Определим усилия в стержнях.

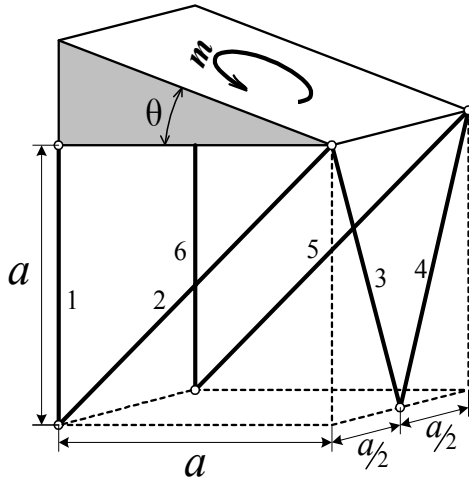


Рис. 16

Решение опять начинаем с выбора объекта равновесия. Конечно, это призма.

Расчётная схема представлена на рис. 17. Связями являются стержни. Усилия в стержнях направляем по стержню от тела, от объекта равновесия. Вес  $\vec{P}$  приложен к центру тяжести симметричного треугольного тела.

Действие пары на тело представлено вектором момента пары  $\vec{m}$ , направленным перпендикулярно плоскости действия пары по правилу «против часовой стрелки».

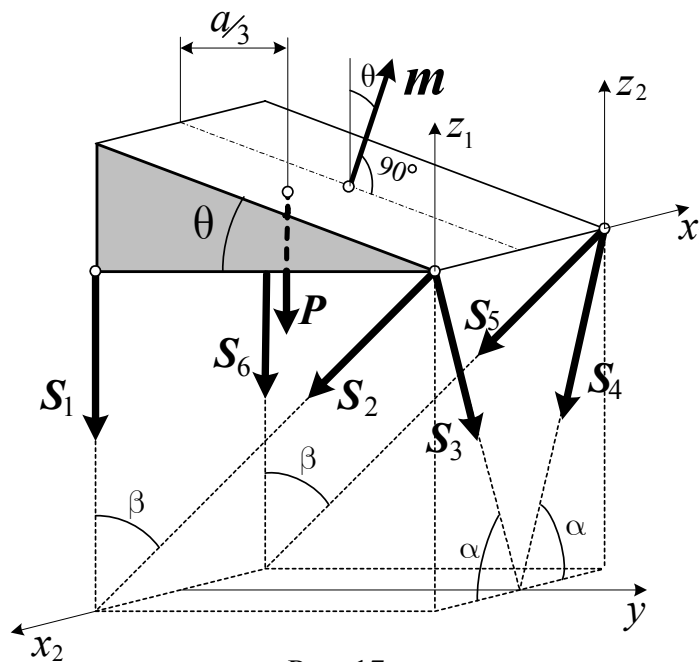


Рис. 17

Кроме тела и векторов сил, на расчётной схеме проведены дополнительные линии, которые помогают лучше представить расположение в пространстве конструкции и сил.

Так как получилась система сил, произвольно расположенных в пространстве, можно и нужно составить шесть уравнений равновесия. Число неизвестных также равно шести.



Не обязательно составлять три уравнения проекций на три оси и уравнения моментов относительно этих трёх осей. Можно составить хоть все уравнения уравнениями моментов относительно разных осей, направляя оси так, чтобы они стали параллельными неизвестным силам или пересекали бы их линии действия. Тогда моменты некоторых неизвестных сил окажутся равными нулю и уравнения станут проще, так как будут содержать меньше неизвестных.

В нашей задаче будем стараться составлять именно такие уравнения (при этом не будем забывать, что проекция пары сил на любую ось равна нулю, а момент её относительно оси равен проекции вектора момента на соответствующую ось)

$$\sum M_{x1} = 0; \quad -S_1 \cdot a - S_6 \cdot a - P \frac{2}{3} a = 0;$$

$$\sum X_1 = 0; \quad S_3 \cdot \cos \alpha - S_4 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum M_y = 0; \quad S_1 \cdot 0,5a - S_6 \cdot 0,5a + S_2 \cdot \cos \beta \cdot 0,5a - S_5 \cdot \cos \beta \cdot 0,5a + m \cdot \sin \theta = 0;$$

$$\sum M_{z1} = 0; \quad S_5 \cdot \sin \beta \cdot a + m \cdot \cos \theta = 0;$$

$$\sum M_{z2} = 0; \quad -S_2 \cdot \sin \beta \cdot a + m \cdot \cos \theta = 0;$$

$$\sum M_{x2} = 0, \quad -S_3 \cdot \sin \alpha \cdot a - S_4 \cdot \sin \alpha \cdot a - P \frac{1}{3} a = 0.$$

В этих уравнениях  $\beta = 45^\circ$ , а  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Не так трудно решаются эти уравнения. Из четвёртого и пятого уравнений сразу находим  $S_2 = -S_5 = \frac{m \cos \theta}{a \sin \beta} = \frac{m}{a} \sqrt{2} \cos \theta$ . Так как из второго уравнения  $S_3 = S_4$ , то из последнего, шестого, уравнения они легко определяются

$S_3 = S_4 = -\frac{P}{3 \sin \alpha} = -\frac{1}{6} P \sqrt{5}$ . Решая совместно уравнения

первое и третье, найдём последние две неизвестные:

$$S_1 = -\left[ \frac{1}{3} P + \frac{m}{a} (\sin \theta + \cos \theta) \right] \quad \text{и} \quad S_6 = -\left[ P + \frac{m}{a} (\sin \theta + \cos \theta) \right].$$

Обратим внимание на то, что все стержни, кроме третьего, будут сжаты, так как усилия в них оказались отрицательными.

-----

Итак, можно сделать заключение, что при решении задач статики особенных трудностей, наверно, не встретите. Если, конечно, умеете проектировать силы на ось, определять момент силы относительно точки и осей и сумеете правильно построить расчётную схему.

# ЗАДАЧИ ПО КИНЕМАТИКЕ

Задачи по кинематике обычно сводятся лишь к определению скоростей и ускорений точек тела, а иногда и траектории движения некоторых точек. При этом исследуется уже заданное движение. А почему движется тело, какие силы заставляют его двигаться, совсем неинтересно.

Решение таких задач требует знания аналитической геометрии, умения и аккуратности при черчении. При удачно и хорошо выполненной схеме механизма легче понять и представить движение отдельных её частей и определить необходимые размеры и расстояния.

## §1. Исследование движения отдельных точек

Движение точки в предлагаемых задачах чаще всего определяется заданием уравнений движения точки, или с помощью декартовых координат, или естественным способом.

Если знакомы с правилами дифференцирования, определения производных функций, никаких особых трудностей при решении задач не возникнет.

Если движение точки задано уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то уравнение траектории определяется исключением параметра времени  $t$ .

Например, из первого уравнения находим  $t = t(x)$  и подставляем его в остальные уравнения.

Пусть даны вот такие два уравнения движения точки:  $x = 3t$  и  $y = 6t + 9t^2$ .

Из первого находим  $t = \frac{x}{3}$  и подставляем

во второе  $y = 6 \frac{x}{3} + 9 \frac{x^2}{9}$ . Получаем уравнение траектории  $y = 2x + x^2$ . Это уравнение

параболы (рис. 18). Построить, начертить её нетрудно, отыскав несколько точек для некоторых моментов времени  $t$ .

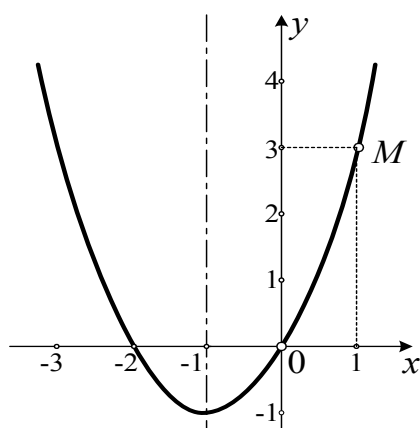


Рис. 18

её нетрудно, отыскав несколько точек для некоторых моментов времени  $t$ .

Сложнее получается построение траектории, если уравнение её содержит какие-то тригонометрические, логарифмические или другие подобные функции.

Например, если  $x = 2\sin 2t$ ,  $y = 4\cos^2 2t$ , то, имея в виду формулу тригонометрии  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ,

и, определив из первого уравнения  $\sin 2t = \frac{x}{2}$ ,

получим  $y = 4(1 - \sin^2 2t) = 4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 4 - x^2$ .

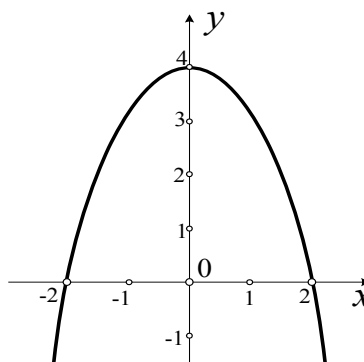


Рис. 19

Это опять получается парабола (рис. 19), симметричная относительно оси  $y$ .

А при уравнениях движения  $x = 3\sin 4t$ ,  $y = 4\cos 2t$  уравнение траектории, вспоминая формулу тригонометрии  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ , получается совсем плохим:  $y^2 = \frac{8}{3}\left(3 \pm \sqrt{9 - 8x^2}\right)$ . Кривую линию, соответствующую этому уравнению, можно построить, определив побольше точек, задав несколько значений координате  $x$ . Получится что-то вроде восьмёрки (фигура Лиссажу).

По условию задачи после построения траектории обычно требуется определить положение точки в какой-то момент времени и затем найти её скорость и ускорение в этом положении. Это делается достаточно просто, если знать правила вычисления производных.

Решим такую задачу. Уравнения движения точки:  $x = 2\sin 3t$ ,  $y = 4\cos 3t$ . Так как  $\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$ , а из уравнений следует  $\sin 3t = \frac{x}{2}$

и  $\cos 3t = \frac{y}{4}$ , то уравнение траектории получится таким  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ .

Как известно, это уравнение эллипса с полуосями  $a = 2$  см и  $b = 4$  см (рис. 20).

Теперь можно установить, что начальное положение точки  $M_0$  (при  $t = 0$  с) имеет координаты  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 4$  см. А например, при  $t = 0,2$  с  $x_{0,2} = 2 \cdot \sin 0,6 = 2 \cdot 0,56 = 1,13$  см,  $y_{0,2} = 4 \cdot \cos 0,6 = 4 \cdot 0,83 = 3,32$  см. Эти значения координат определяют соответствующее положение точки  $M$  на траектории.

Скорость точки находим с помощью проекций вектора скорости на оси:  $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 2 \cdot 3 \cos 3t = 6 \cos 3t$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = -4 \cdot 3 \sin 3t = -12 \sin 3t$ .

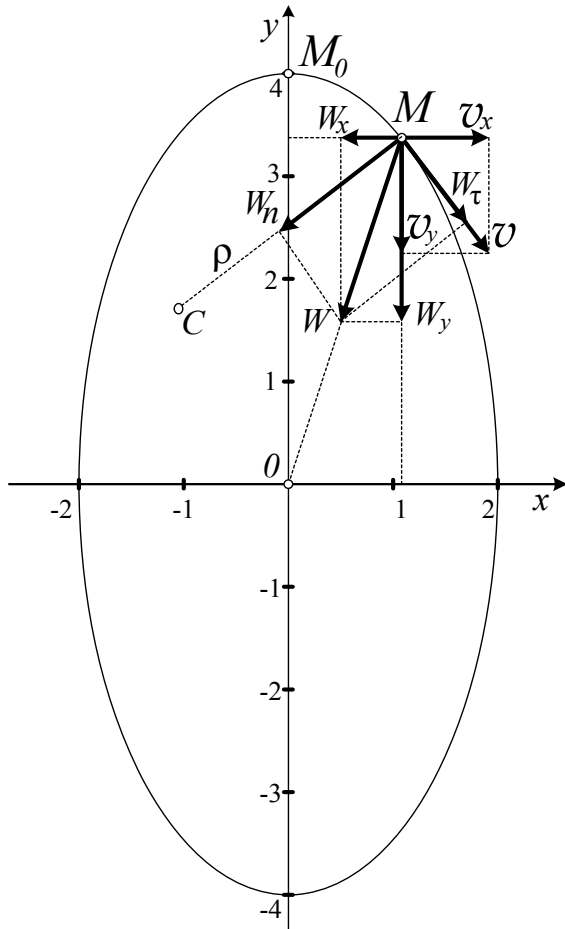


Рис. 20

И в момент времени  $t = 0,2$  с  $v_x = 6 \cdot \cos 0,6 = 6 \cdot 0,83 = 4,95 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,

$$v_y = -12 \sin 0,6 = -12 \cdot 0,56 = -6,78 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Выбрав масштаб, показываем на чертеже составляющие вектора скорости, равные по величине проекциям, и учитываем их знак. Находим затем сам вектор скорости как векторную сумму.

Модуль скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4,95^2 + 6,78^2} = 8,39 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . (Для проверки решения следует посмотреть, направлен ли вектор скорости по касательной к траектории).

И ускорение точки находим аналогично с помощью проекций вектора ускорения на оси, вычислив вторые производные по времени от уравнений движения:

$$W_x = \ddot{x} = -6 \cdot 3 \sin 3t = -18 \sin 3t \quad \text{и} \quad W_y = \ddot{y} = -12 \cdot 3 \cos 3t = -36 \cos 3t.$$

$$\text{А при } t = 0,2 \text{ с } W_x = -18 \cdot \sin 0,6 = -10,16 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \quad \text{и} \quad W_y = -36 \cos 0,6 = -29,71 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Назначив масштаб для ускорений, показываем на чертеже векторы составляющих ускорения  $\bar{W}_x$  и  $\bar{W}_y$  и находим вектор ускорения точки  $\bar{W}$  (см. рис. 20). Затем определяем его величину, модуль,  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{10,16^2 + 29,71^2} = 31,4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

В некоторых задачах требуется дополнительно найти касательное  $\bar{W}_\tau$  и нормальное  $\bar{W}_n$  ускорения точки.

Графическим способом их можно определить, проектируя найденный вектор ускорения  $\bar{W}$  на касательную к траектории (на линию действия вектора скорости  $\bar{v}$ ) и на нормаль (на ось, перпендикулярную касательной). В нашем примере, учитывая масштаб ускорений, получим  $W_\tau = 17,8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ , а  $W_n = 25,9 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Нетрудно найти эти ускорения и аналитическим, более точным методом. Так как  $W_\tau = \frac{dv}{dt}$ , а  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36\cos^2 3t + 144\sin^2 3t}$ , то

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-2 \cdot 36 \cdot 3 \cos 3t \cdot \sin 3t + 2 \cdot 144 \cdot 3 \sin 3t \cdot \cos 3t}{2\sqrt{36\cos^2 3t + 144\sin^2 3t}} = \frac{(-36 \cdot 3 + 144 \cdot 3) \cdot \sin 6t}{2v} =$$

$$= \frac{324 \sin 6t}{2v} \text{ и при } t = 0,2 \text{ с } W_\tau = \frac{324 \cdot \sin 1,2}{2 \cdot 8,39} = 18,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Так как полное ускорение  $W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2}$ , то нормальное ускорение  $W = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{31,4^2 - 18^2} = 25,73 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Полезно заметить, что в нашей задаче при движении точки по эллипсу вектор ускорения  $\vec{W}$  направлен в начало координат (попробуйте это доказать).

Иногда в условии задачи требуется найти радиус кривизны  $\rho$  траектории в данной точке. Так как  $W_n = \frac{v^2}{\rho}$ , то  $\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{8,39^2}{25,73} = 2,74 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Отложив его по главной нормали по направлению нормального ускорения, можно найти центр кривизны траектории  $C$  (см. рис. 20).

## §2. Исследование движения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Положение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется углом поворота  $\varphi$ . Если известна функция  $\varphi = \varphi(t)$ , которая называется уравнением вращения, то можно определить все характеристики движения точек тела.

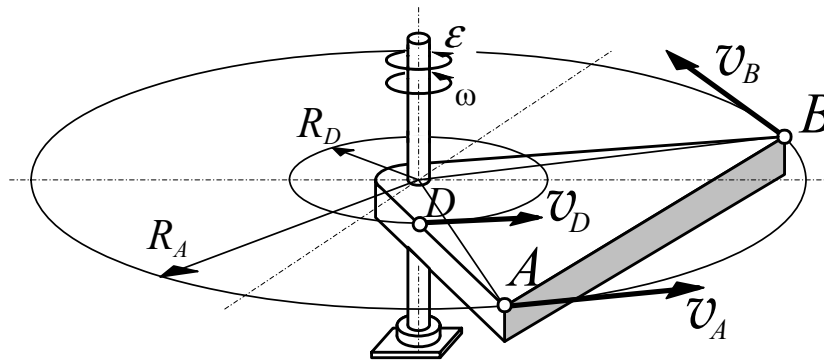


Рис. 21

Конечно, траектории движения точек — окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Радиусы их равны расстояниям от точек до оси (рис. 21).

Скорость вращения тела и точек определяется угловой скоростью  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ с}^{-1}$ . Знак (+) или (-), который получается после подстановки времени  $t$ , указывает направление вращения:  $\oplus \ominus$ .

Ускорение точек тела при неравномерном вращении определяется угловым ускорением  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \text{ с}^{-2}$ . Направление углового ускорения определяется по тому же правилу, что и направление угловой скорости.

Скорость точек тела по абсолютной величине, по модулю определяется формулой  $v = R\omega$  (в эту формулу угловая скорость  $\omega$  всегда вставляется без учёта знака, всегда положительной). Вектор скорости направляется по касательной к траектории точки в сторону движения (см. рис. 21).

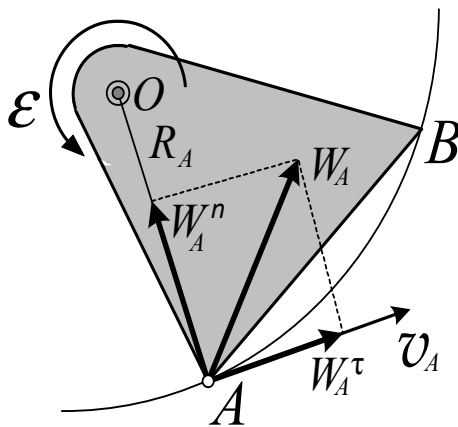


Рис. 22

Ускорения точек тела находятся как сумма векторов двух ускорений: касательного  $\bar{W}^\tau$  и нормального  $\bar{W}^n$ . Например, ускорение точки  $A$   $\bar{W}_A = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau$ . (На рис. 22 показан вид сверху тела, изображённого на рис. 21). Модули этих векторов определяются по формулам

$$W^n = R\omega^2 \quad \text{и} \quad W^\tau = R\varepsilon.$$

И ускорение точки  $A$

$$W_A = \sqrt{(W_A^n)^2 + (W_A^\tau)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Всё делается и определяется так просто, что не стоит даже показывать это на каком-то конкретном примере.

Надо, конечно, уметь брать производные и запомнить три формулы:

$$\boxed{v = R\omega} \quad \boxed{W^n = R\omega^2} \quad \boxed{W^\tau = R\varepsilon}$$

Эти формулы специально заключены в рамочки. Их следует назвать **главными формулами кинематики** (да и не только кинематики, а всей теоретической механики). Запомните их обязательно!

### §3. Исследование плоскопараллельного движения тела

Как известно, при определении скоростей и ускорений точек тела плоскопараллельное движение рассматривается как сумма двух: движения по некоторой траектории какой-то точки  $C$ , которая называется полюсом, и вращения вокруг этого полюса (рис. 23).

Поэтому скорость какой-то точки  $M$   $\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$ , а ускорение этой точки аналогично  $\bar{W}_M = \bar{W}_C + \bar{W}_{MC}$ , где  $\bar{v}_{MC}$  и  $\bar{W}_{MC}$  - скорость и ускорение точки  $M$  при вращении вокруг полюса  $C$ .

Но скорости точек гораздо проще определять как скорости при вращении вокруг оси, проходящей через точку  $C_v$ , скоростью которой в данный момент равна нулю и которая поэтому называется *мгновенным центром скоростей* (см. рис. 23), то есть определять по главной формуле (см. на с. 30):  $v = R\omega$ . Отыскать такую точку у тела не так уж трудно (прочитайте в [1] гл.IX, §3, п.1). Надо лишь знать направление векторов скоростей каких-нибудь двух точек, провести в них перпендикуляры к скоростям и найти точку пересечения этих прямых (см. рис. 23).

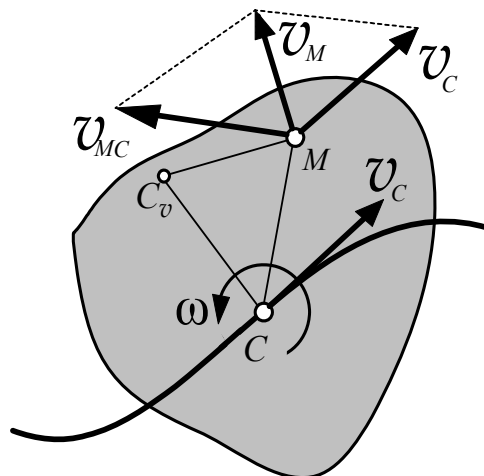


Рис. 23

Или, если тело катится без скольжения по неподвижной поверхности, то мгновенным центром скоростей  $C_v$  этого тела будет точка касания, точка контакта тела и поверхности. И ещё, при решении задач надо обязательно иметь в виду, что у *каждого тела есть свой мгновенный центр скоростей  $C_v$  и своя угловая скорость  $\omega$* .

Вот такой пример. Колесо катится по плоскости с угловой скоростью  $\omega_k = 2\text{ с}^{-1}$ . Радиус колеса  $R = 0,5\text{ м}$ , длина стержня  $AB = l = 1,0\text{ м}$ , угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис.24).

Колесо катится без скольжения. Значит, его мгновенный центр скоростей  $C_v^k$  находится в точке касания с плоскостью. Поэтому считаем, что колесо вращается вокруг оси  $C_v^k$  с известной по условию задачи угловой скоростью  $\omega_k$  и скорость его точек находится просто (см. главную формулу на с. 30).

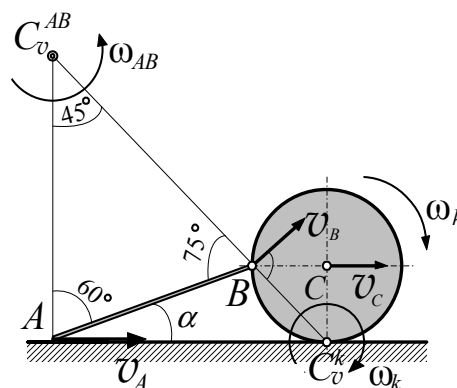


Рис. 24

Так,  $v_B = BC_v^k \cdot \omega_k = R\sqrt{2} \cdot 2 = 1,41\text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_C = CC_v^k \cdot \omega_k = R \cdot \omega_k = 0,5 \cdot 2 = 1,0\text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Теперь можно найти мгновенный центр скоростей  $C_v^{AB}$  стержня  $AB$ . Направление векторов скоростей точек  $B$  и  $A$  известно, проводим к ним перпендикуляры и находим  $C_v^{AB}$  в точке пересечения перпендикуляров.

Вектор скорости  $\vec{v}_B$  указывает направление вращения всего стержня  $AB$  вокруг  $C_v^{AB}$ , направление его угловой скорости  $\omega_{AB}$  и тем самым определяет точное направление вектора скорости  $\vec{v}_A$ . Теперь можно найти и их величины (см. главные формулы):  $\omega_{AB} = \frac{v_B}{BC_v^{AB}}$  и  $v_A = AC_v^{AB} \cdot \omega_{AB}$ .

Дальше простая арифметика. Определяем нужные углы (см. рис. 24).

По известным формулам тригонометрии  $\frac{BC_v^{AB}}{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$  и

$$\frac{AC_v^{AB}}{AB} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \quad \text{находим} \quad BC_v^{AB} = AB \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 1,0 \frac{0,87}{0,71} = 1,23 \text{ м},$$

$$AC_v^{AB} = AB \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 1,0 \frac{0,97}{0,71} = 1,37 \text{ м}. \quad \text{Поэтому} \quad \omega_{AB} = \frac{1,41}{1,23} = 1,15 \text{ с}^{-1},$$

$v_A = 1,37 \cdot 1,15 = 1,58 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . При желании с помощью первой главной формулы можно найти скорости любых точек, и стержня, и колеса.

И ещё, полезно вспомнить теорему о равенстве проекций векторов скоростей двух точек тела на прямую, проходящую через эти точки. Эта теорема позволяет проще найти скорость точки  $A$  в этой задаче, так как

$$v_A \cdot \cos 30^\circ = v_B \cdot \cos 15^\circ, \text{ то } v_A = v_B \frac{\cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,41 \frac{0,97}{0,866} = 1,58 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

На всякий случай решим ещё одну задачу, чтобы убедиться, что скорости точек всегда находятся очень просто с помощью мгновенных центров скоростей и главной формулы.

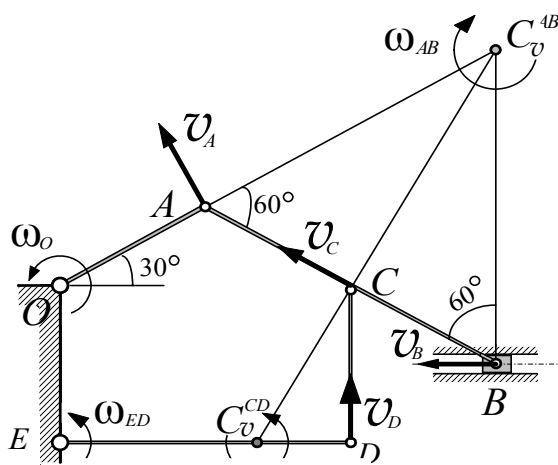


Рис. 25

На рис. 25 дана схема механизма, состоящего из четырёх звеньев,  $OA = a$ ,  $AB = 2a$ ,  $CD = a$ ,  $ED = a\sqrt{3}$ , соединенных шарнирами, и ползуна  $B$ . Стержень  $OA$  вращается вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega_0 = \text{const}$ . Требуется определить скорости всех обозначенных точек и угловые скорости звеньев.

Прежде всего находим мгновенные центры скоростей звеньев  $AB$  и  $CD$ . (У звеньев  $OA$  и  $DE$  их искать не надо, в точках  $O$  и  $E$  — их



постоянные центры скоростей). Вектор скорости  $\bar{v}_A$  точки  $A$  направлен перпендикулярно  $OA$  в сторону вращения; вектор скорости  $\bar{v}_B$  ползуна направлен, конечно, горизонтально. Перпендикуляры к ним пересекаются в точке  $C_v^{AB}$  в мгновенном центре скоростей звена  $AB$ . Теперь можно показать вектор скорости  $\bar{v}_C$  точки  $C$ , он будет направлен перпендикулярно расстоянию  $CC_v^{AB}$ , и определить направление вращения и угловую скорость  $\omega_{AB}$  звена  $AB$  вокруг  $C_v^{AB}$  (см. рис. 25). Точка  $C$  в то же время принадлежит стержню  $CD$ , а точка  $D$  его, принадлежа и звену  $ED$ , вращается вокруг оси  $E$ . Значит, вектор  $\bar{v}_D$  перпендикулярен  $ED$ . Проведя к векторам  $\bar{v}_C$  и  $\bar{v}_D$  перпендикуляры, найдём их точку пересечения – это и будет мгновенный центр скоростей  $C_v^{CD}$  звена  $CD$ . Векторы скоростей указывают направление, в котором вращается это звено, и направление его угловой скорости  $\omega_{CD}$ .

Определив по чертежу необходимые углы и размеры с помощью главной формулы  $\boxed{v = R\omega}$ , находим скорости всех точек.

$$\text{Так, } v_A = OA \cdot \omega_0 = a\omega_0. \text{ Поэтому } \omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v^{AB}} = \frac{a\omega_0}{2a} = \frac{1}{2}\omega_0. \text{ И тогда}$$

$$v_B = BC_v^{AB} \cdot \omega_{AB} = 2a \frac{1}{2} \omega_0 = a\omega_0; \quad v_C = CC_v^{AB} \cdot \omega_{AB} = 2a \sin 60^\circ \frac{1}{2} \omega_0 = 0,5\sqrt{3} a\omega_0.$$

Теперь, рассматривая движение стержня  $CD$ , уже имея его мгновенный центр скоростей, находим его угловую скорость  $\omega_{CD} = \frac{v_C}{CC_v^{CD}}$ .

$$\text{Так как } CC_v^{CD} = \frac{CD}{\cos 30^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \text{ то } \omega_{CD} = \frac{3}{4}\omega_0. \text{ Можно найти и скорость}$$

$$\text{точки } D \quad v_D = DC_v^{CD} \cdot \omega_{CD} = CD \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \omega_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a\omega_0, \text{ и угловую скорость}$$

$$\text{звена } ED \quad \omega_{ED} = \frac{v_D}{ED} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{a\omega_0}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\omega_0.$$

Итак, умея находить мгновенные центры скоростей звеньев с помощью главной формулы  $\boxed{v = R\omega}$ , легко определить и скорости точек, и угловые скорости звеньев.

Теперь посмотрим, как определяется ускорение точек при плоскопараллельном движении тела.

Обычный метод определения ускорений сначала покажем на простом примере. Рассмотрим качение колеса по горизонтальной прямой (рис. 26). Пусть известны скорость  $\bar{v}_C$  и ускорение  $\bar{W}_C$  центра колеса. Назовём центр колеса  $C$  полюсом. Тогда ускорение, например точки  $A$  (вспомни рис. 22),  $\bar{W}_A = \bar{W}_C + \bar{W}_{AC} = \bar{W}_C + \bar{W}_{AC}^n + \bar{W}_{AC}^t$ . Показываем эти три вектора у точки  $A$  на чертеже (см. рис. 26).

Ускорение  $\bar{W}_C$  известно по условию задачи. Ускорение  $\bar{W}_{AC}^n$  по одной из главных формул равно по величине  $W_{AC}^n = AC \cdot \omega^2$ . Мгновенный центр скоростей  $C_v$  колеса легко находится, поэтому  $\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{R}$  и  $W_{AC}^n = R \cdot \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{v_C^2}{R}$ .

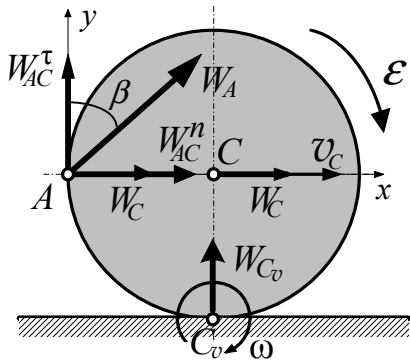


Рис. 26

Ускорение  $W_{AC}^tau = R\epsilon$ . Но так как угловое ускорение  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_C}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{W_C}{R}$ , то

$$W_{AC}^tau = R \frac{W_C}{R} = W_C. \text{ Заметим, что колесо катится}$$

ускоренно (векторы  $\bar{v}_C$  и  $\bar{W}_C$  имеют одинаковое направление). Поэтому угловое ускорение  $\epsilon$  будет направлено так же, как и угловая скорость  $\omega$ .

Следовательно, вектор  $\bar{W}_{AC}^tau$  направлен вверх. Осталось сложить эти три вектора. Можно это сделать графическим способом, отложив векторы в масштабе, и построить многоугольник векторов (как в «Статике» при сложении сил). А проще это сделать аналитическим методом, каким раньше находили модуль равнодействующей.

Проводим оси  $x$  и  $y$  и находим проекции вектора  $\bar{W}_A$  на эти оси

$$W_{Ax} = \sum W_{ix} = W_C + W_{AC}^n = W_C + \frac{v_C^2}{R};$$

$$W_{Ay} = \sum W_{iy} = W_{AC}^tau = W_C.$$

И тогда величина ускорения 
$$W_A = \sqrt{(W_{Ax})^2 + (W_{Ay})^2} = \sqrt{\left( W_C + \frac{v_C^2}{R} \right)^2 + W_C^2}.$$

Направление вектора  $\bar{W}_A$  можно найти, отложив в масштабе проекции вектора и построив на них прямоугольник. А можно с помощью тангенса угла  $\beta$  между вектором  $\bar{W}_A$  и осью  $y$ :  $\text{tg} \beta = \frac{W_{Ax}}{W_{Ay}}$  (см. рис. 26).

Нетрудно таким же способом найти ускорение мгновенного центра скоростей колеса. Попробуйте это сделать сами. Окажется, что вектор ускорения этой точки колеса не равен нулю, направлен перпендикулярно

плоскости качения и величина, модуль его  $W_{C_v} = W_{C_v C}^n = \frac{v_C^2}{R} = R\omega^2$ .

На примере следующей задачи покажем методику решения более сложных задач.

Вернёмся к механизму (см. рис. 25), у которого находили скорости точек. Попробуем теперь найти ускорения хотя бы трёх его точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Поскольку будем определять ускорения только трёх точек, то весь механизм рисовать не будем, покажем только нужную часть его (рис. 27). И чтобы немного усложнить задачу, вместо ползуна к точке  $B$  присоединим стержень  $BK = a$ . Так как скорость точки  $B$  была ранее уже найдена, то угловая скорость этого стержня  $\omega_{BK} = \frac{v_B}{BK} = \frac{a\omega_0}{a} = \omega_0$  окажется равной  $\omega_{OA}$ .

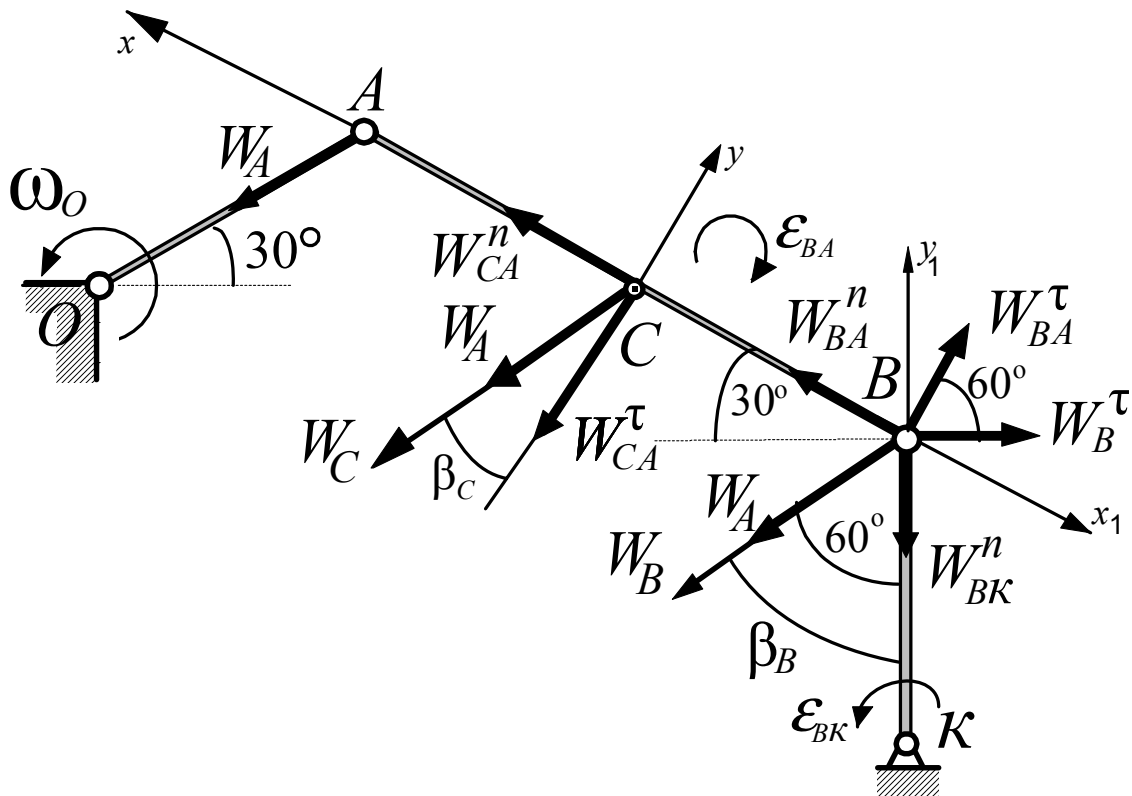


Рис. 27

Ускорение точки  $A$ , вращающейся вокруг неподвижной оси, находить уже умеем (см. рис. 22). Так как  $\omega_0 = \text{const}$ , то угловое ускорение звена  $OA$   $\epsilon_{OA} = \dot{\omega}_0 = 0$  и касательное ускорение точки  $A$   $W_{AO}^\tau = OA \cdot \epsilon_{OA} = 0$ . Следовательно, ускорение  $W_A = W_{AO}^n = AO \cdot \omega_0^2 = a\omega_0^2$ . Показываем его на рисунке.

Рассматриваем точку  $A$  как полюс звена  $AB$ , ускорение точки  $B$

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^n + \vec{W}_{BA}^\tau. \quad (1)$$

Вспоминая главные формулы, находим  $W_{BA}^n = BA \cdot \omega_{AB}^2 = 2a \frac{\omega_0^2}{4} = \frac{1}{2} a \omega_0^2$ .

Последнее ускорение  $W_{BA}^\tau = BA \cdot \varepsilon_{AB}$  пока неизвестно. Показываем эти три вектора на чертеже. Направлением неизвестного вектора  $\bar{W}_{BA}^\tau$  задаемся, направим, например, вверх, но обязательно перпендикулярно  $AB$ . Поэтому по формуле (1) ускорение  $\bar{W}_B$  пока не можем найти.

Но точка  $B$  принадлежит и стержню  $BK$ . Поэтому её ускорение можно попробовать найти как ускорение при вращении вокруг оси  $K$ , как сумму двух ускорений

$$\bar{W}_B = \bar{W}_{BK}^n + \bar{W}_{BK}^\tau. \quad (2)$$

В этой формуле ускорение  $W_{BK}^n = BK \cdot \omega_{BK}^2 = a \omega_0^2$ , но касательное ускорение  $W_{BK}^\tau = BK \cdot \varepsilon_{BK}$  тоже ещё неизвестно. Показывая эти векторы у точки  $B$ , опять направим касательное ускорение произвольно, но перпендикулярно  $BK$ .

Формула (2) также не даёт решения. Но, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим векторное уравнение с двумя неизвестными:  $\bar{W}_A + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau = \bar{W}_{BK}^n + \bar{W}_{BK}^\tau$ . Спроектировав его на две оси  $x_1$  и  $y_1$ , получим два скалярных уравнения, и задача может быть решена.

Чтобы каждое уравнение получилось с одним неизвестным, оси надо направлять перпендикулярно неизвестным векторам, то есть в данном случае по стержням  $AB$  и  $BK$ . Проектируем уравнение на эти оси.

$$\text{Проекция на ось } x_1: -W_A \cos 60^\circ - W_{BA}^n = W_{BK}^n \cos 60^\circ + W_{BK}^\tau.$$

$$\text{Проекция на ось } y_1: -W_A \cos 60^\circ + W_{BA}^n \cos 60^\circ + W_{BA}^\tau \cos 30^\circ = -W_{BK}^n.$$

Из первого уравнения находим, подставив уже известные значения ускорений,  $W_{BK}^\tau = -(W_A + W_{BK}^n) \operatorname{tg} 30^\circ - W_{BA}^n \frac{1}{\cos 30^\circ} = -1,73 a \omega_0^2$ .

$$\text{Из второго уравнения } W_{BA}^\tau = -W_{BK}^n \frac{1}{\cos 30^\circ} - (W_{BA}^n - W_A) \operatorname{tg} 30^\circ = -0,87 a \omega_0^2.$$

Отрицательные значения касательных ускорений указывают на то, что их векторы на самом деле направлены в противоположные стороны. Но исправлять чертежи не надо.

Теперь можно найти абсолютные значения угловых ускорений звеньев  $AB$  и  $BK$ . Так,  $\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB} = \frac{0,87 a \omega_0^2}{2a} = 0,44 \omega_0^2$ , а  $\varepsilon_{BK} = \frac{W_{BK}^\tau}{BK} = \frac{1,73 a \omega_0^2}{a} = 1,73 \omega_0^2$ . Направления угловых ускорений указываем дугой со стрелочкой (см. рис. 27).

Находим и модуль ускорения точки  $B$

$$W_B = \sqrt{(W_{BK}^n)^2 + (W_{BK}^t)^2} = \sqrt{(a\omega_0^2)^2 + (1,73a\omega_0^2)^2} = 2a\omega_0^2. \text{ Направлен этот вектор}$$

под углом  $\beta_B$ , тангенс которого  $\operatorname{tg}\beta_B = \frac{W_{BK}^t}{W_{BK}^n} = \frac{1,73a\omega_0^2}{a\omega_0^2} = 1,73$  и  $\beta_B = 60^\circ$ .

Переходим к определению ускорения точки  $C$ , выбрав за полюс опять точку  $A$ :  $\bar{W}_C = \bar{W}_A + \bar{W}_{CA}^n + \bar{W}_{CA}^t$ , где  $W_A = a\omega_0^2$ ,  $W_{CA}^n = AC \cdot \omega_{AB}^2$ ,  $W_{CA}^t = AC \cdot \varepsilon_{AB}$  и  $AC = 2a$ . Показываем эти векторы на рис. 27 у точки  $C$ . Направления их теперь точно известны.

Проводим на схеме взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$ , находим проекции вектора  $\bar{W}_C$  на эти оси:

$$W_{Cx} = \sum W_{ix} = W_{CA}^n + W_A \cdot \cos 60^\circ = 0,75a\omega_0^2,$$

$$W_{Cy} = \sum W_{iy} = -W_{CA}^t - W_A \cdot \cos 30^\circ = -1,31a\omega_0^2.$$

$$\text{Поэтому } W_C = \sqrt{(W_{Cx})^2 + (W_{Cy})^2} = \sqrt{(0,75a\omega_0^2)^2 + (1,31a\omega_0^2)^2} = 1,5a\omega_0^2.$$

Направление вектора этого ускорения находим по тангенсу  $\operatorname{tg}\beta_C = \frac{W_{Cx}}{W_{Cy}} = \frac{0,75a\omega_0^2}{1,31a\omega_0^2} = 0,57$ . Тогда угол между осью  $y$  и вектором ускорения точки  $C$  оказывается равным  $\beta_C = 29,8^\circ$ .

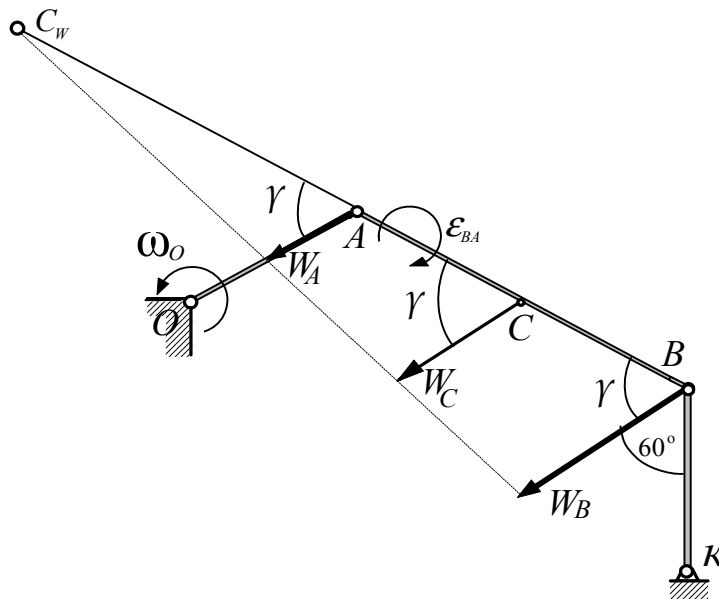


Рис. 28

Точность решения задачи можно проверить с помощью мгновенного центра ускорений  $C_w$ . Он находится, например, от точки  $A$  на расстоянии,

равном  $AC_W = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(0,44\omega_0^2)^2 + (0,5\omega_0)^4}} = 1,98a$ , под углом,

тангенс которого  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \frac{0,44\omega_0^2}{0,25\omega_0^2} = 1,76$ , и угол  $\gamma = 60,4^\circ$  (рис. 28).

В нашем примере мгновенный центр ускорений  $C_W$  случайно оказался почти на одной прямой со звеном  $AB$ . Векторы ускорений  $\bar{W}_A$ ,  $\bar{W}_B$  и  $\bar{W}_C$  направлены под одинаковыми углами  $\gamma$  к этой прямой, и их модули пропорциональны расстояниям до  $C_W$ . Следовательно, задача решена правильно.

#### §4. Исследование сложного движения точки

Здесь имеется в виду сложное движение не в смысле трудное, а как движение точки, состоящее из нескольких, в частности, двух независимых движений. Эти движения называются переносным и относительным. А в результате их сложения получается движение, которое называется абсолютным.

Названия этих движений достаточно точно определяют их существо. Переносное – это движение какой-то среды, которая «переносит» на себе другое движение. А это, другое, называется относительным, так как оно совершается относительно первого, переносного. Результирующее движение, которое видит неподвижный наблюдатель, – движение относительно неподвижной системы и называется абсолютным.

Естественно, абсолютная скорость точки  $\bar{v}$  складывается из двух-переносной скорости  $\bar{v}_e$  и относительной  $\bar{v}_r$ :  $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ . А абсолютное ускорение оказывается состоит из трёх:  $\bar{W} = \bar{W}_e + \bar{W}_r + \bar{W}_{cor}$ . Последнее, третье ускорение называется ускорением Кориолиса, по имени учёного, который впервые его обнаружил.

Как определяются эти характеристики движения. Относительные скорость и ускорение – это скорость и ускорение в относительном движении точки по среде. Переносные скорость и ускорение определяются несколько иначе. Это есть абсолютные скорость и ускорение той точки среды, того места среды, где движущаяся точка находится в данный момент.

При определении всех этих скоростей и ускорений хорошо помогает «правило остановки». Чтобы определить характеристики относительного

движения, надо остановить переносное. И тогда мы увидим только одно это относительное движение. И, наоборот, чтобы определить переносное движение и соответствующие скорость и ускорение, надо остановить относительное движение, движение точки по среде.

Ускорение Кориолиса удобно определять по правилу Н.Е. Жуковского. Как это делается, покажем на первом же примере.

Точка  $M$  движется по образующей конуса, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega_e$  и угловым ускорением  $\epsilon_e$ . Это вращение будет переносным движением точки  $M$  (рис. 29). Относительным движением точки будет движение по прямой линии, по образующей конуса и так, что  $OM = s(t)$ .

Определим все скорости и ускорения точки  $M$  в момент, когда точка окажется на дне конуса, при  $s = l$ .

В этой задаче относительные скорость и ускорение определяются как при движении по прямой линии  $v_r = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$  и

$W_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ . Направляются их векторы по прямой траектории с учётом знака их величин в этот момент времени.

Переносная скорость и переносное ускорение точки – это скорость и ускорение той точки конуса, где находится точка  $M$  в данный момент времени. Так как эта точка конуса движется по окружности, то (см. §2 и главные формулы), переносная скорость равна  $v_e = R\omega_e$  и вектор её направлен по касательной к траектории, к окружности основания конуса в сторону вращения.

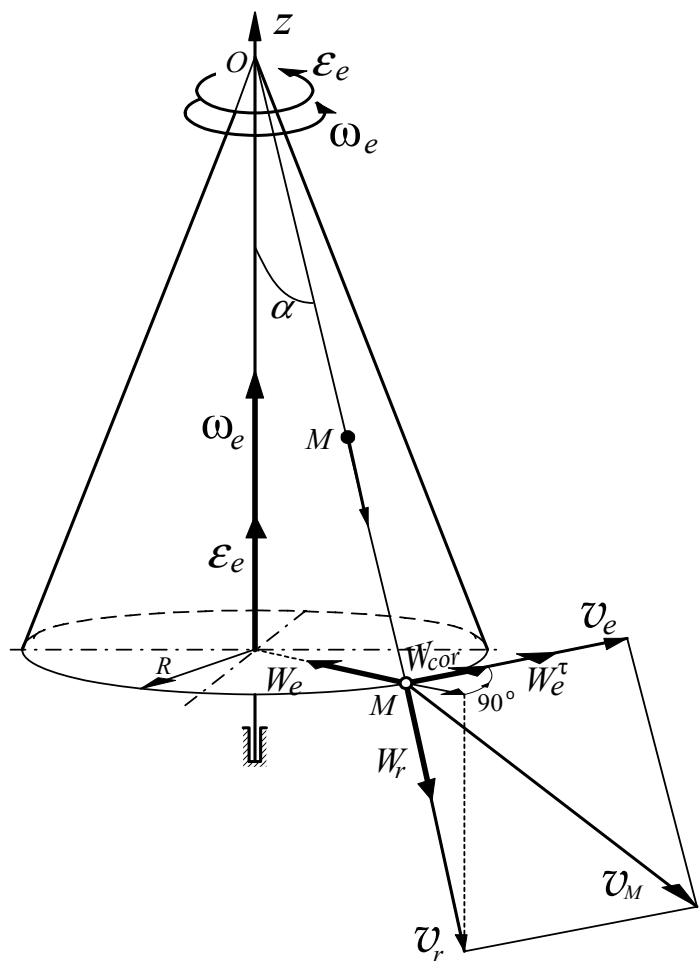


Рис. 29

А переносное ускорение есть сумма  $\bar{W}_e = \bar{W}_e^n + \bar{W}_e^\tau$ , где, вспоминая опять главные формулы, нормальное ускорение  $W_e^n = R\omega_e^2$  и касательное  $W_e^\tau = R\varepsilon_e$  (направление их смотри на рис. 29).

Абсолютная скорость как сумма здесь двух перпендикулярных векторов находится просто:  $v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{R^2\omega_e^2 + \dot{s}^2}$ .

А чтобы найти абсолютное ускорение, надо прежде определить кориолисово ускорение. Величина его определяется просто:  $W_{cor} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - острый угол между вектором  $\bar{v}_r$  и осью переносного вращения  $z$ , вектором  $\bar{\omega}_e$ . Направление вектора ускорения Кориолиса определяется по правилу Жуковского. Сначала вектор относительной скорости  $\bar{v}_r$  проецируем на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения (на плоскость основания конуса в нашей задаче). А потом поворачиваем этот вектор проекции на  $90^\circ$  по направлению переносного вращения, по направлению  $\bar{\omega}_e$ . В нашем примере вектор  $\bar{W}_{cor}$  окажется направленным по вектору  $\bar{v}_e$ .

Абсолютное ускорение точки  $M$  найдём как векторную сумму четырёх векторов так же, как в «Статике» определяли равнодействующую сходящихся сил.

Так как векторы расположены не в одной плоскости, необходимо провести три оси. Ось  $x$  направим по вектору  $\bar{v}_e$ , ось  $y$  – по радиусу основания конуса от центра, а ось  $z$  уже имеется на рис. 29 (оси на схеме не показаны, чтобы не усложнять чертёж).

Проекции абсолютного ускорения точки  $\bar{W}_M$  на указанные оси равны сумме проекций всех векторов ускорений на эти оси.

$$W_x = W_{cor} + W_e^\tau = 2\omega_e \dot{s} \sin \alpha + R\varepsilon_e,$$

$$W_y = W_r \sin \alpha - W_e^n = \dot{s} \sin \alpha - R\omega_e^2,$$

$$W_z = -W_r \cos \alpha = -\dot{s} \cos \alpha.$$

Модуль вектора ускорения находим по формуле  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$ . Если бы в условии задачи были даны цифровые значения величин, то мы смогли бы вычислить и величину ускорения, и величину скорости, и точное направление их векторов.

Мы решили довольно сложную задачу, познакомились с методом её решения. Аналогично решаются и другие задачи при исследовании движения и более сложных систем. Надо лишь хорошо разобраться с движением точек, выявить их переносное и относительное движения и правильно воспользоваться главными формулами кинематики.



# ЗАДАЧИ ПО ДИНАМИКЕ

---

Если в разделе «Статика» мы научились складывать силы, познакомились с методами их сложения, а в разделе «Кинематика» научились определять характеристики движущегося тела, то в «Динамике» не должно возникнуть особых трудностей в определении зависимостей между силами, действующими на тела при их движениях. Нужно лишь суметь воспользоваться специальными теоремами динамики, законами и принципами, устанавливающими зависимости между силами, действующими на тело, и движением, которое оно будет совершать.

Конечно, задачи динамики более интересные, более нужные, но и более сложные.

## §1. Определение движения материальной точки

Материальной точкой называется тело, обладающее массой, но размеры которого при исследовании движения можно не учитывать. Так что это тело, эта точка характеризуются лишь массой  $m$ , которая определяется её

весом  $P$ , силой тяжести:  $m = \frac{P}{g}$ .

Положение точки при движении определяется обычно либо координатами  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , либо так называемым естественным способом, когда задаётся траектория движения точки и её закон движения по этой траектории  $s = s(t)$ .

При исследовании движения точки приходится решать две задачи. Первая – известно движение точки, надо определить силы, которые заставляют её так двигаться; вторая (обратная) – известны силы, действующие на точку, требуется определить её движение.

### *Решение первой задачи динамики*

Первую задачу динамики проще и понятнее решать *методом кинестатики*. Чтобы воспользоваться этим методом, надо ввести понятие силы инерции точки. Силой инерции точки  $\bar{F}^{\text{ин}}$  называется сила, равная по величине произведению массы точки на её ускорение  $F^{\text{ин}} = mW$ . Направляется вектор этой силы в сторону, противоположную ускорению  $\bar{F}^{\text{ин}} = -m\bar{W}$ .

Для определения этой силы надо, конечно, уметь определять ускорение точки (вспомни «Кинематику» и её главные формулы). На рис. 30 дан пример, который показывает, как это можно сделать.

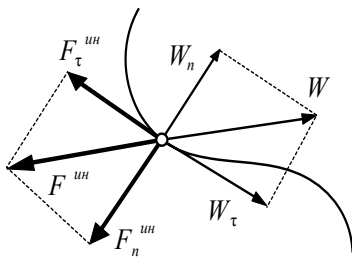


Рис. 30

А сам метод кинестатики позволяет задачу динамики решать как задачу статики, составляя уравнения равновесия. Для этого надо, кроме обычных сил, приложить к точке её силы инерции.

Вот первая задача (рис. 31). Маятник, состоящий из шарика  $M$  весом  $P$ , подвешенного на нити длиной  $l$ , качается в вертикальной плоскости.

В начале движения угол был  $\varphi_0 = 60^\circ$  и маятник был неподвижен. Попробуем определить натяжение нити при таком движении.

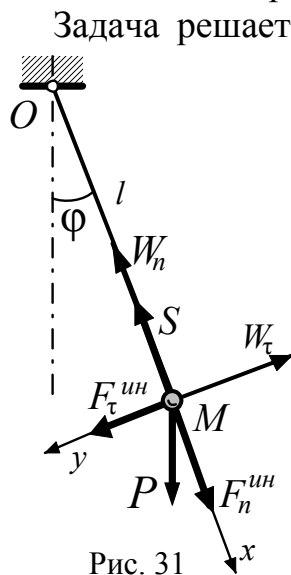


Рис. 31

Задача решается по знакомой схеме решения задач статики (с. 15). Выбираем тело, точку  $M$ , движение которого будем рассматривать, и предполагаем, что оно находится в равновесии под действием сил инерции.

На шарик действуют обычные силы: вес  $\bar{P}$  и натяжение нити  $\bar{S}$ . Добавляем ещё силы инерции шарика. Он движется по дуге окружности, вращается вокруг  $O$ . Вспоминая главные формулы кинематики, находим ускорения  $\bar{W} = \bar{W}_n + \bar{W}_\tau$ , где  $W_n = l\omega^2 = l\dot{\varphi}^2$ ,  $W_\tau = l\varepsilon = l\ddot{\varphi}$ . Получилась плоская система четырёх сходящихся сил. Можно составить два уравнения равновесия

$$\sum X_i = 0; \quad -S + P \cos \varphi + F_n^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad P \sin \varphi + F_\tau^{\text{ин}} = 0.$$

Или после подстановки сил инерции и преобразований получим  $S = P \cos \varphi + \frac{P}{g} l \dot{\varphi}^2$  и  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ . Последнее уравнение нетрудно проин-

тегрировать. Так как  $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ , то  $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi$  и, проинте-

грировав, получим  $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} \cos \varphi + C$ . По начальным условиям при  $t = 0$

$\dot{\varphi}_0 = 0$  и  $\varphi = \varphi_0 = 60^\circ$  находим  $C = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0$  и тогда  $\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ .

Теперь можно найти и натяжение нити  $S = P(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$ , а в начале движения, т.е. при  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $S = P(3 \cos \varphi - 1)$ .

Полезно заметить, что этот метод кинестатики позволяет решать и вторую задачу динамики. Составив второе уравнение равновесия (см. рис. 31), мы получили дифференциальное уравнение движения маятника. Решив его окончательно, получим и закон колебаний этого маятника.

### Решение второй задачи динамики

Наибольший интерес для практики представляет умение решать вторую задачу динамики, задачу на определение движения материальной точки под действием известных заданных сил.

Вот такая задача. Какую надо сообщить скорость  $v_0$  и под каким углом должен быть нанесён удар ракеткой по мячу, чтобы он пролетел расстояние  $l$  (рис. 32)?

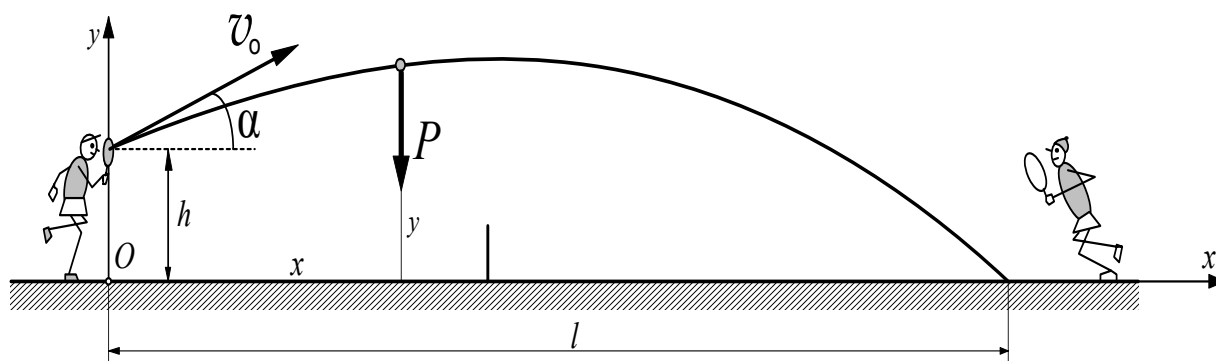


Рис. 32

Чтобы правильно и быстро решить вторую задачу динамики, надо действовать по определённой схеме.

1. Сначала выбираем оси координат (их количество, направление и начало координат). Хотя это сделать и просто, но очень важно. При неудачно выбранных осях решение может оказаться сложным.

В нашей задаче оси выбраны удачно, всего две. И их достаточно, так как движение мяча происходит в одной вертикальной плоскости.

2. Показываем любое промежуточное положение точки мяча (не начальное и не конечное), но обязательно такое, чтобы координаты его были положительными.

3. Показываем силы, действующие на точку в этом промежуточном положении. Но не забыть ни одной силы и не показать лишние. Силы инерции не показывать. В нашей задаче на точку действует одна единственная сила – вес мяча  $\bar{P}$ . Сопротивление воздуха учитывать не будем.

4. Составляем дифференциальные уравнения движения по форме

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Sigma X_i, \\ m\ddot{y} = \Sigma Y_i, \\ m\ddot{z} = \Sigma Z_i. \end{cases}$$

В нашей задаче достаточно составить лишь два уравнения

$$\begin{cases} \frac{P}{g}\ddot{x} = 0, \\ \frac{P}{g}\ddot{y} = -P \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$

Решение этих дифференциальных уравнений очень простое

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + D_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = C_1t + C_2, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1t + D_2. \end{cases}$$

Чтобы определить постоянные интегрирования  $C_1, C_2, D_1, D_2$ , нужно выявить начальные условия. Обычно это положение точки и её скорость в начале движения при  $t = 0$ .

У нас координаты точки в начале движения, при  $t = 0, x_0 = 0, y_0 = h$ . Проекции скорости на оси  $v_x = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, v_y = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$ . Подставляя их значения в последние четыре уравнения, находим постоянные  $C_1 = v_0 \cos \alpha, C_2 = 0, D_1 = v_0 \sin \alpha, D_2 = h$ . Поэтому уравнения движения

мяча получаются такими 
$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + h. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим время полёта мяча  $t_{\text{п}}$ . Полагая там  $x = l$ , получаем  $t_{\text{п}} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$ .

Из второго уравнения определяем зависимость между скоростью  $v_0$  и углом  $\alpha$ . Так как в конце полёта координата мяча  $y = 0$ , то, учитывая значение  $t_{\text{п}}$ , получаем зависимость  $0 = -\frac{1}{2} \frac{gl^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{v_0 l}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha + h$ . Отсюда начальная скорость, необходимая для того чтобы мяч пролетел нужное расстояние  $l$ , должна быть  $v_0^2 = \frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg} \alpha + h) \cos^2 \alpha}$ .

Ещё одна задача. В плоскости стола сделали отверстие и положили на отверстие шарик весом  $P$ . Снизу к шарiku прикрепили резиновую нить, а нижний конец её в нерастянутом состоянии привязали к полу. Затем шарик сместили по плоскости стола на расстояние  $a$  и сообщили ему скорость  $\bar{u}$  перпендикулярно направлению  $a$  (рис. 33). Определим траекторию движения шарика. Сопротивления движению не учитываем.

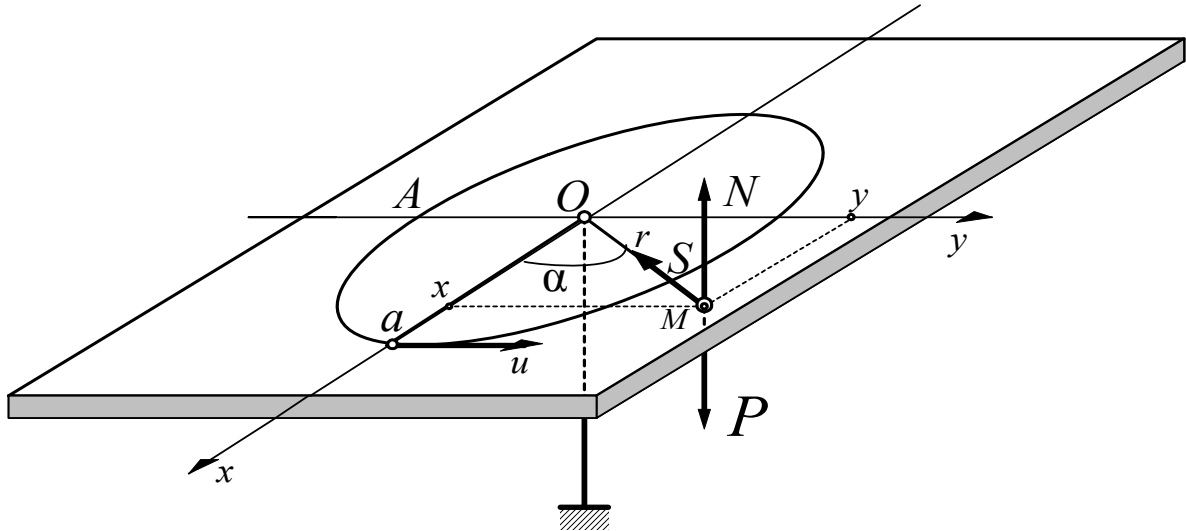


Рис. 33

Порядок решения мы уже знаем. Назначаем две оси с началом в отверстии  $O$ . Показываем промежуточное положение шарика  $M$  с положительными координатами  $x$  и  $y$ . Силы, действующие на шарик в этом положении, – вес  $\bar{P}$ , нормальная реакция плоскости стола  $\bar{N}$  и натяжение нити  $\bar{S}$ . Причём эта сила пропорциональна удлинению нити  $S = cr$  ( $c$  – коэффициент пропорциональности, жесткость нити). Сила направлена по нити под углом  $\alpha$ , таким, что  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ .

Составляем два дифференциальных уравнения в стандартном виде. И после подстановки сил и углов, после тригонометрических преобразова-

ний получим

$$\begin{cases} \frac{P}{g} \ddot{x} = -S \cos \alpha, \\ \frac{P}{g} \ddot{y} = -S \sin \alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0, \\ \ddot{y} + k^2 y = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{cg}{P}.$$

Математика даёт методы решения таких однородных дифференциальных уравнений второго порядка, линейных и с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение их известно:  $\lambda^2 + k^2 = 0$ . Корни получаются мнимые:  $\lambda_{1,2} = \pm ik$ . Поэтому решение уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \\ y = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \\ \dot{y} = -D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt. \end{cases}$$

Вспоминаем начальные условия: при  $t=0$   $x=a$   $y=0$ ,  $v_x = \dot{x}=0$ ,  $v_y = \dot{y}=u$ . Поэтому, подставив их в последние четыре уравнения, получим значения постоянных:  $C_1 = a$ ,  $D_2 = \frac{u}{k}$ ,  $C_2 = D_1 = 0$  и решение уравнений

получится таким 
$$\begin{cases} x = a \cos kt, \\ y = \frac{u}{k} \sin kt. \end{cases}$$
 С помощью формулы тригонометрии

$\sin^2 kt + \cos^2 kt = 1$  исключим время  $t$  и получим уравнение траектории  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{u}{k}\right)^2} = 1$ . Это уравнение эллипса с полуосями  $a$  и  $\frac{u}{k}$  (см. рис. 33).

Естественно, точка  $M$ , показанная в промежуточном, произвольном, положении шарика, на траектории не оказалась. Мы же не знали заранее эту траекторию.

Если требуется определить движение точки по заданной траектории естественным способом, решение выполняется аналогично. Только вместо декартовых координат  $x$  и  $y$  используются естественные оси  $N, T, B$ .

Вот такой пример. Лыжник съезжает по горе, имеющей форму четверти окружности радиусом  $R$ . Определим движение лыжника, но не учитывая трение скольжения (рис. 34).

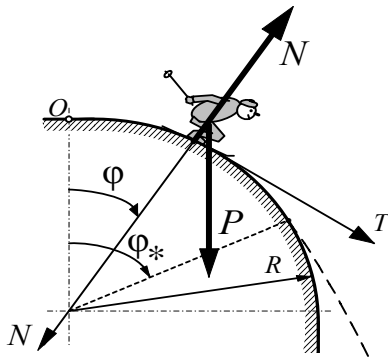


Рис. 34

Порядок решения остаётся прежним. Выбираем оси, но оси естественные –  $N$  и  $T$ . (Ось  $B$ , бинормаль, показывать не надо, так как она перпендикулярна плоскости, в которой расположена траектория). Затем показываем промежуточное положение лыжника на расстоянии, равном дуге  $s$  от начала отсчёта  $O$ . И в этом положении показываем силы: вес лыжника  $\bar{P}$  и нормальную реакцию поверхности  $\bar{N}$ .

Дифференциальные уравнения составляем по форме 
$$\begin{cases} m\ddot{s} = \Sigma F_{iT}, \\ m \frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{iN}, \end{cases}$$

где  $\rho$  - радиус кривизны траектории, равный радиусу окружности  $R$ .

Уравнения получаются такими:  $m\ddot{s} = P \sin \varphi$  и  $m \frac{v^2}{R} = -N + P \cos \varphi$ .

Первое дифференциальное уравнение оказывается нелинейным. Полагая  $m = \frac{P}{g}$ , оно получается таким:  $\ddot{s} - g \sin \varphi = 0$ . Так как длина дуги

$s = R\varphi$ , то уравнение получится в более удобном виде  $\ddot{\varphi} - \frac{g}{R} \sin \varphi = 0$ .

Это нелинейное уравнение можно один раз проинтегрировать. Так как  $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ , то уравнение получится с разделяющимися переменными:

$\dot{\varphi} d\varphi = \frac{g}{R} \sin \varphi \cdot d\varphi$ , которое легко интегрируется:  $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{R} \cos \varphi + C_1$ .

В начале движения угловая скорость была  $\dot{\varphi} = 0$  и угол  $\varphi = 0$ . Поэтому постоянная  $C_1 = \frac{g}{R}$ . Значит, уравнение становится таким:  $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{R}(1 - \cos \varphi)$ .

Второй раз его проинтегрировать в элементарных функциях не удастся. Ну, и не будем. Найдём лишь скорость лыжника как функцию положения, угла  $\varphi$ :  $v = R\dot{\varphi} = \sqrt{2R(1 - \cos \varphi)g}$ .

С помощью второго дифференциального уравнения можно определить давление лыжника на поверхность горы тоже в зависимости от места

$$N = P \cos \varphi - \frac{P}{g} \frac{v^2}{R} = P \cos \varphi - \frac{P}{g} \frac{2R(1 - \cos \varphi)g}{R} = P(3 \cos \varphi - 2).$$

Интересно, что при  $\cos \varphi = \frac{2}{3}$  давление  $N = 0$ . То есть лыжник отделится от горы. И произойдёт это при угле  $\varphi_* = \arccos \frac{2}{3} = 48,2^\circ$  со скоростью

$v_* = \sqrt{\frac{1}{3}Rg}$ . Затем начнётся его свободный полёт по параболе, который можно определить так же, как определяли полёт теннисного мяча в прошлой задаче.

#### *Определение относительного движения материальной точки*

До сих пор мы определяли абсолютное движение материальной точки относительно неподвижной системы или неподвижной среды. Нередко приходится определять движение относительно системы, которая сама движется. О таком движении мы говорили ещё в разделе «Кинематика» (§4). Относительное движение определяется так же, как абсолютное, надо только кроме обычных сил учитывать две силы инерции — переносную силу

инерции  $\bar{F}_e^{\text{ин}} = -m\bar{W}_e$  и кориолисову  $\bar{F}_{\text{cor}}^{\text{ин}} = -m\bar{W}_{\text{cor}}$ . А как определяются соответствующие ускорения мы уже знаем.

Вот, например, такая задача. Трубка  $OA$  вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной неподвижной оси  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Внутри трубки движется поршень, соединённый пружиной с осью  $O$  (рис. 35). Определим движение поршня в трубке. Сопротивления движению учитывать не будем.

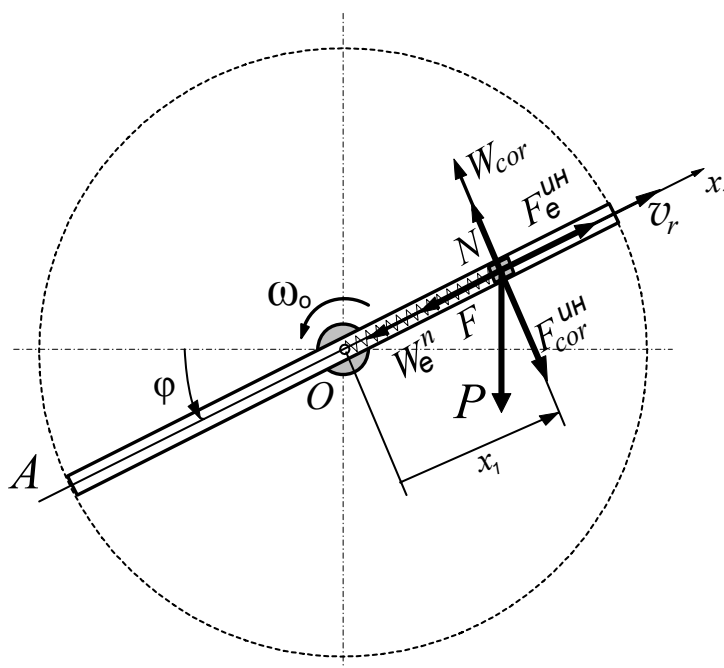


Рис. 35

Порядок решения задачи на определение относительного движения такой же, как и при решении второй задачи при исследовании абсолютного движения.

Сначала выбираем оси. Но оси надо проводить по среде, относительно которой определяется движение точки. В данной задаче – по трубке. Так как относительно трубки поршень движется по прямой линии, то достаточно только одной оси, оси  $x_1$ . Начало её назначим на неподвижной оси вращения в точке  $O$ . Затем показываем промежуточное положение поршня с координатой  $x_1$ . Прикладываем к нему обычные силы: вес  $\bar{P}$ , реакцию трубки  $\bar{N}$  и упругую силу пружины  $F=cx_1$ . Потом добавляем силы инерции. Так как переносное движение – вращение вокруг оси, то переносное ускорение поршня состоит из двух  $\bar{W}_e = \bar{W}_e^n + \bar{W}_e^{\tau}$ , (они определяются по



главным формулам кинематики). Но так как  $\omega_e = \omega_o = \text{const}$ , то  $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0$  и  $W_e^r = x_1 \cdot \varepsilon_e = 0$ . Значит,  $W_e = W_e^n = x_1 \omega_o^2$ . Ускорение Кориолиса определим по правилу Жуковского. Вектор относительной скорости  $\bar{v}_r$  расположен в плоскости, перпендикулярной оси вращения, поэтому поворачиваем его в этой плоскости по направлению вращения на угол  $90^\circ$  и получаем вектор  $\bar{W}_{cor}$ . Величина соответствующей силы инерции поршня  $F_{cor}^{ин} = m W_{cor} = \frac{P}{g} 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \frac{P}{g} \omega_o \dot{x}_1$ , а вектор её направлен противоположно ускорению Кориолиса перпендикулярно трубке и оси  $x_1$ . Получается, что все силы, действующие на поршень, расположены в вертикальной плоскости, в плоскости вращения трубки.

Составляем обычное дифференциальное уравнение движения точки. Получаем  $m\ddot{x}_1 = -F - P \sin \varphi + F_e^{ин}$  или  $\frac{P}{g} \ddot{x}_1 = -cx_1 - P \sin \omega_o t + \frac{P}{g} x_1 \omega_o^2$ .

И окончательно запишем его в компактном виде  $\ddot{x}_1 + (k^2 - \omega_o^2)x_1 = g \sin \omega_o t$ , где  $k^2 = \frac{cg}{P}$ .

Решения этого уравнения интересны. Так, в частном случае, когда скорость вращения трубки такова, что  $\omega_o = k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$ , дифференциальное уравнение будет очень простым:  $\ddot{x}_1 = g \sin \omega_o t$ . При нулевых начальных условиях легко находится и его решение  $x_1 = \frac{g}{\omega_o^2} (\omega_o t - \sin \omega_o t)$ . Поршень будет удаляться от оси, колеблясь с частотой, равной  $\omega_o$ , и амплитудой  $A = \frac{g}{\omega_o^2}$  до тех пор, пока пружина не вытянется на полную длину и движение поршня не прекратится.

Если  $\omega_o \neq k$ , то поршень будет совершать сложное колебательное движение внутри трубки относительно оси вращения.

Но в этом случае мы не будем решать дифференциальные уравнения. Это уже задачи математики.

## §2. Принцип Даламбера (метод кинетостатики)

Принцип Даламбера – это по сути уже знакомый нам метод кинетостатики, только распространенный на систему материальных тел и точек. Различие и сложность решения задач заключается лишь в том, что этих тел и точек может быть много, и в том, что надо уметь показывать силы инерции не только точек, но и тел, имеющих массу, немалые размеры и различную форму.

Так как тело – это сумма материальных точек с действующими на них силами инерции, то надо уметь складывать эти силы, находить их главный вектор  $\bar{R}'_{ин}$  и главный момент  $\bar{M}_o^{ин}$ , а иногда и равнодействующую  $\bar{R}_{ин}$ .

А способы решения задач остаются прежними – методами статики с выбором объектов равновесия и составлением уравнений равновесия.

Итак. Вспомним сначала, как определяются силы инерции твёрдых тел. Всё зависит от вида их движения.

Если тело движется поступательно, то можно сразу найти равнодействующую сил инерции точек этого тела. Она равна по величине  $R^{ин} = MW_C$  произведению массы тела на ускорение любой его точки (но лучше использовать ускорение центра масс), прикладывается к центру масс и направляется противоположно его ускорению.

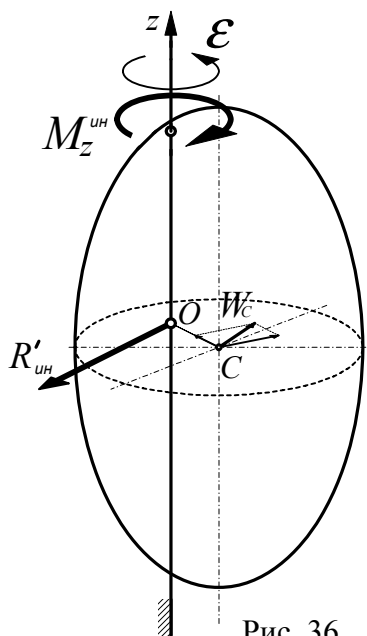


Рис. 36

При вращении тела вокруг неподвижной оси сначала определяем его главный вектор сил инерции по аналогичной формуле  $\bar{R}'_{ин} = -M\bar{W}_C$ . Если тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, то центр масс и главный вектор сил инерции будут находиться в этой плоскости и его можно приложить к оси. А направлен главный вектор будет противоположно  $\bar{W}_C$  (рис. 36). Если центр масс окажется на оси вращения, то главный вектор будет равен нулю.

Затем добавляем главный момент сил инерции относительно оси вращения  $M_z^{ин} = J_z \epsilon$ , направляя его в сторону, противоположную угловому ускорению  $\epsilon$ . В этой формуле  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ . Его можно найти для любого тела в справочниках.

Например, моменты инерции цилиндра, диска и стержня, которые чаще всего встречаются при решении задач, даны на рис. 37.

Подробности о моментах инерции тел смотри в учебниках.

При плоскопараллельном движении тела, так же как и при вращении вокруг оси, определяют главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции относительно оси по аналогичным формулам  $\vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_C$  и  $M_c^{ин} = J_c \varepsilon$ . Только главный вектор обязательно прикладывают к центру масс, а главный момент определяют относительно оси, проходящей через центр масс.

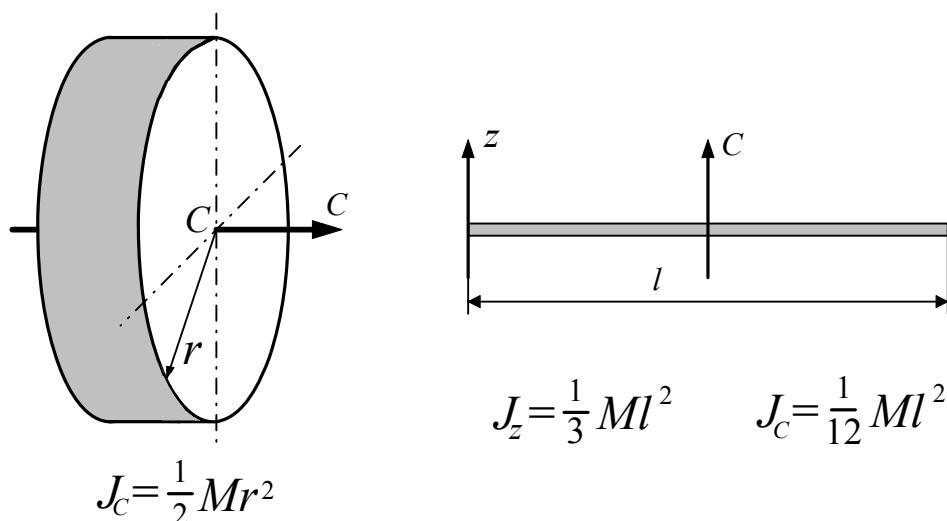


Рис. 37

Посмотрим, как решаются задачи с помощью принципа Даламбера. Простой пример можно посмотреть в [1] на с. 127 (пример 16.1).

Попробуем решить задачу посложнее. Через круглый барабан, который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , перекинута нить (рис. 38). К одному концу её подвешен груз весом  $P$ , другой конец прикреплен к стержню, который тоже вращается вокруг той же оси. Поскольку проскальзывания нити по барабану нет, то и стержень, и барабан будут вращаться вместе с одинаковой скоростью. Вес барабана –  $G$ , вес стержня –  $Q$ , длина его  $l = 2r$  равна двум радиусам барабана. Определим ускорение груза и натяжение нити на двух участках как функцию угла  $\varphi$ .

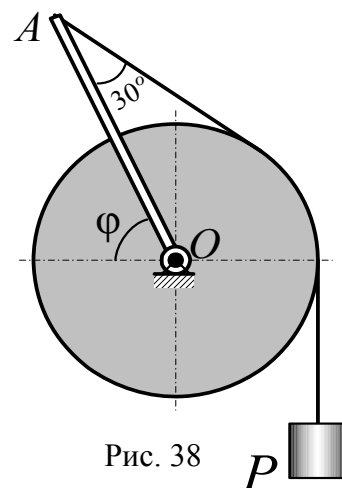


Рис. 38

Принцип Даламбера позволяет решать задачу, как мы уже отмечали, методами статики. Прежде всего выбираем объекты равновесия. Их придётся назначить три, каждое тело в отдельности. И соответственно строим три расчётные схемы, не забывая, конечно, показать и силы инерции. Расчётные схемы даны на рис. 39.

Неизвестных получилось семь (шесть сил и ускорение груза  $W$ ). Но по условию требуется определить только три. Попробуем обойтись тремя уравнениями равновесия.

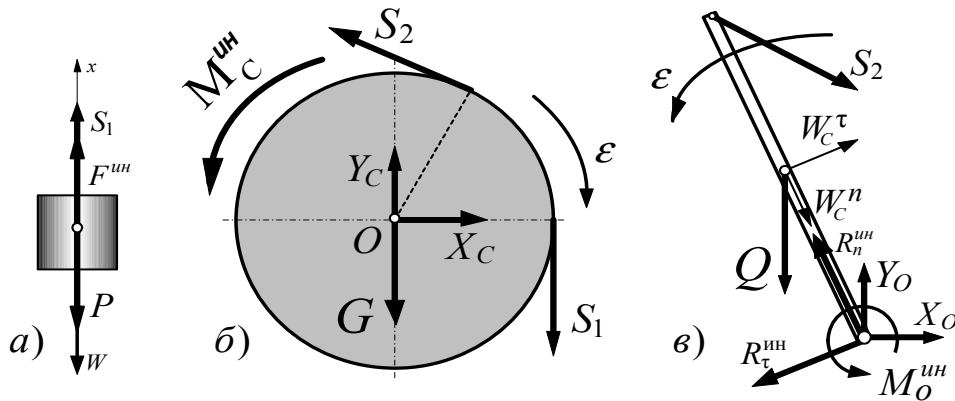


Рис. 39

Для груза составляем одно уравнение проекций, полагая  $F^{nn} = \frac{P}{g}W$ :

$$\Sigma X_i = 0; S_1 + F^{nn} - P = 0.$$

Для блока тоже одно, уравнение моментов относительно оси, учитывая  $M_c^{nn} = J_c \epsilon = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \frac{W}{r} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} rW$ :

$$\Sigma M_{oi} = 0; -S_1 \cdot r + S_2 \cdot r + M_o^{nn} = 0.$$

И для стержня одно, уравнение моментов относительно той же оси, имея в виду  $M_o^{nn} = J_o \epsilon = \frac{1}{3} \frac{Q}{g} l^2 \epsilon = \frac{1}{3} \frac{Q}{g} 4r^2 \frac{W}{r} = \frac{4}{3} \frac{Q}{g} rW$ :

$$\Sigma M_{oi} = 0; -S_2 \cdot r + Q \cdot r \cos \varphi + M_o^{nn} = 0.$$

Реакции оси в наши уравнения не вошли, так как они приложены к оси, относительно которой находили моменты сил.

Теперь осталась только математика. Из первого уравнения находим  $S_1 = P - \frac{P}{g}W$ . Из второго, подставив туда найденное значение  $S_1$ , опреде-

ляем  $S_2 = S_1 - \frac{1}{2} \frac{G}{g}W = P - \frac{2P+G}{2g}W$ . И из третьего находим то же усилие

$$S_2 = Q \cos \varphi + \frac{4}{3} \frac{Q}{g}W. \text{ Приравнявая их } P - \frac{2P+G}{2g}W = Q \cos \varphi + \frac{4}{3} \frac{Q}{g}W,$$

найдем ускорение груза  $W = \frac{6(P - Q \cos \varphi)}{6P + 3G + 8Q}g$ .

Теперь легко вычислить и усилия, возникающие в нитях:

$$S_1 = P - \frac{P}{g}W = P \frac{3G+2Q(4+3\cos\varphi)}{6P+3G+8Q} \quad \text{и} \quad S_2 = P - \frac{3(P-Q\cos\varphi)}{6P+3G+8Q}(2P+G).$$

При необходимости можно было бы определить и реакции оси. Для этого надо составить ещё четыре уравнения равновесия. Например, уравнения проекций на оси, по два для каждого объекта равновесия.

### §3. Теорема об изменении кинетической энергии

Эта теорема формулируется просто и понятно.

*При перемещении материальной системы из одного положения в другое изменение кинетической энергии равно работе сил, действующих на систему, на этом перемещении системы.*

И соответствующая формула очень проста и коротка:  $T_2 - T_1 = A$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – кинетическая энергия системы в первом и втором положениях;  $A$  – работа активных сил, всех сил кроме реакций связей, на этом перемещении.

Конечно, чтобы решать задачи, надо уметь определять кинетическую энергию тел и вычислять работу различных сил. Вообще-то делается это не так сложно. Надо лишь вспомнить несколько формул и уметь находить скорости точек тела, то есть вспомнить кинематику.

Вот несколько нужных формул.

☉ При поступательном движении тела кинетическая энергия его  $T_{\text{пост}} = \frac{1}{2}Mv^2$ , где  $M$  – масса тела,  $v$  – скорость любой точки его.

☉ При вращении тела вокруг неподвижной оси  $T_{\text{вр.о}} = \frac{1}{2}J_z\omega^2$ . Здесь тоже каждая буква знакома,  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость тела.

☉ При плоскопараллельном движении  $T_{\text{пл.}} = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$ , где  $J_C$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения.

☉ Ну, и в самом общем случае  $T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2)$ , где  $J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции тела относительно осей, поступательно движущихся вместе с центром масс тела, а  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  тела на эти оси.

Работа сил тоже вычисляется по определённым формулам. Если сила  $\vec{F}$  постоянна по величине и по направлению, то работа её  $A = \pm F s \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – острый угол между вектором силы и прямой линией, по которой движется точка приложения силы. Знак определяется направлениями вектора силы и перемещения. Если они совпадают (+), если противоположны, то (-). Конечно, если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

В самом общем случае вычисляется сначала элементарная работа  $dA = Xdx + Ydy + Zdz$ . Здесь  $X, Y, Z$  – проекции вектора силы на оси,  $dx, dy, dz$  – дифференциалы координат точки приложения вектора силы.

И ещё две простые, но нужные формулы. Если к телу приложена пара сил, то работа пары при повороте тела вокруг оси на угол  $\phi$  равна  $A = \pm M_z \cdot \phi$ , где  $M_z$  – проекция вектора момента пары на ось  $z$ .

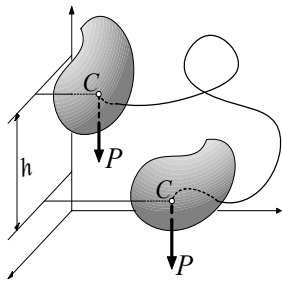


Рис. 40

Наконец, самая простая и самая «сложная» формула. Работа веса тела  $A = Ph$ , где  $h$  – высота, на которую поднимется или опустится центр тяжести тела  $C$ . Работа силы тяжести, веса тела, не зависит от траектории перемещения центра тяжести (рис. 40).

Остальные подробности и пояснения к вычислению работы силы или кинетической энергии можно найти в [1].

Теперь посмотрим, как решаются задачи с помощью этой теоремы.

Вот первая задача, попроще. Балка  $AB$  падает, скользя концами по стене и полу. Вес её –  $P$ , длина –  $l$ . Определим скорость верхнего конца  $A$  как функцию угла  $\phi$  (рис. 41). Вначале балка стояла вертикально.

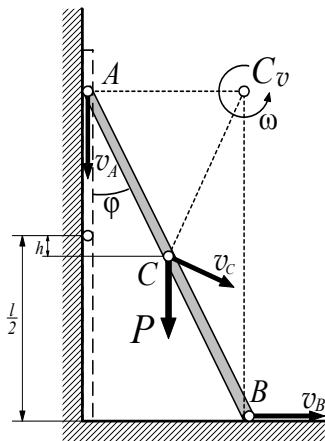


Рис. 41

Так как требуется определить скорость, то эту задачу надо решать с помощью теоремы об изменении кинетической энергии  $T_2 - T_1 = A$ .

Сначала балка была неподвижной, поэтому  $T_1 = 0$ . Во втором положении, изображённом на чертеже, когда угол наклона стал  $\phi$  и балка совершает плоскопараллельное движение,

$$T_2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2.$$

Мгновенный центр скоростей  $C_v$  находится на пересечении прямых, перпендикулярных векторам скоро-

стей  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$ . Поэтому  $\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$ , скорость центра масс

$$v_c = CC_v \cdot \omega = \frac{l}{2} \frac{v_A}{l \sin \varphi} = \frac{1}{2} \frac{v_A}{\sin \varphi}. \quad \text{И тогда} \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2 \frac{v_A^2}{l^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{1}{4} \frac{v_A^2}{\sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{P}{g} \frac{v_A^2}{\sin^2 \varphi}. \quad \text{Работу, совершённую лишь силой } \bar{P}, \text{ находим по формуле}$$

$$A = Ph = P \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} Pl(1 - \cos \varphi).$$

В результате, используя теорему, получаем уравнение  $\frac{1}{6} \frac{P}{g} \frac{v_A^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} Pl(1 - \cos \varphi)$  и искомую скорость  $v_A = \sqrt{3lg(1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi}$ .

Интересно, что в конце движения на полу, когда  $\varphi = 90^\circ$ ,  $v_A = \sqrt{3lg}$ .

Покажем, как решаются задачи посложнее при исследовании систем, состоящих из нескольких тел.

Конструкция, наверное, понятна из чертежа (рис. 42). Малое колесо радиусом  $r$  и весом  $\bar{P}$  касается внутри большого колеса на поводке  $OC$ , вес которого  $\bar{G}$ , а длина  $l = R - r$ . Определить угловую скорость  $\omega$  поводка как функцию угла  $\varphi$ . В начале движения малое колесо находилось наверху и было неподвижно.

Опять воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии  $T_2 - T_1 = A$ . И в этой задаче также  $T_1 = 0$ . Находим  $T_2$ , сумму кинетических энергий поводка

$$T_{\text{пов}} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 \quad \text{и} \quad \text{малого} \quad \text{колеса}$$

$$T_{\text{кол}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_{\text{кол}}^2. \quad \text{Так как} \quad v_C = OC \cdot \omega = l\omega = (R - r)\omega,$$

$$\text{а} \quad \text{угловая} \quad \text{скорость} \quad \text{малого} \quad \text{колеса} \quad \omega_{\text{кол}} = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{R - r}{r} \omega, \quad \text{то}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (R - r)^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \frac{P}{g} r^2 \frac{(R - r)^2}{r^2} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \frac{G}{g} (R - r)^2 \omega^2 = \frac{9P + 2G}{12g} (R - r)^2 \omega^2.$$

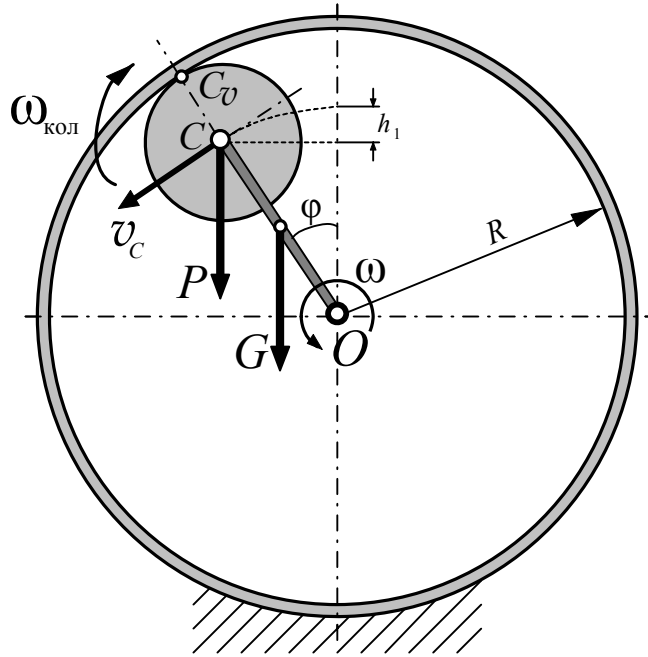


Рис. 42

Работа сил при перемещении системы из начального положения в указанное на чертеже  $A = Ph_1 + Gh_2 = P[(R-r) - (R-r)\cos\varphi] + G\left[\frac{R-r}{2} - \frac{R-r}{2}\cos\varphi\right] =$   
 $= \frac{1}{2}(2P+G)(R-r)(1-\cos\varphi)$ .

Поэтому по теореме, приравнявая  $T_2 = A$ , находим угловую скорость поводка  $\omega = \sqrt{\frac{6(2P+G)}{(9P+2G)(R-r)}} g(1-\cos\varphi)$ . Например, в самом низу при

$\varphi = \pi$  угловая скорость  $\omega = \sqrt{\frac{12(2P+G)}{(9P+2G)(R-r)}} g$ . Если ещё пренебречь и весом поводка ( $G = 0$ ), то  $\omega = \sqrt{\frac{8g}{3(R-r)}}$ .

#### §4. Уравнения Лагранжа

Самым совершенным методом исследования движения систем с несколькими степенями свободы в теоретической механике являются уравнения Лагранжа. Они позволяют сравнительно просто составить дифференциальные уравнения, описывающие движение таких систем. Но основная трудность, пожалуй, заключается в умении пользоваться правилами дифференциальной математики, в умении находить полные и частные производные сложных функций.

Попробуем вспомнить правила вычисления таких производных. Вот, например, функция  $F = f_1 \cdot f_2$ . Это сложная функция, состоящая в данном случае из произведения двух функций, которые сами являются непростыми функциями времени  $t$ . Полная производная такой функции вычисляется по правилу  $\frac{dF}{dt} = \frac{df_1}{dt} f_2 + f_1 \frac{df_2}{dt}$ . Пусть, например,  $f_1 = x^2$ , а  $f_2 = \sin^2 at$ .

Тогда  $\frac{df_1}{dt} = \frac{d}{dt} x^2 = 2x \frac{dx}{dt} = 2x\dot{x}$  и  $\frac{df_2}{dt} = \frac{d}{dt} (\sin^2 at) = 2\sin at \cdot \frac{d}{dt} \sin at =$   
 $= 2\sin at \cdot \cos at \cdot \frac{d}{dt} at = 2\sin at \cdot \cos at \cdot a = a \sin 2at$ . Следовательно, искомая

производная  $\frac{dF}{dt} = 2x\dot{x} \cdot \sin^2 at + x^2 \cdot a \sin 2at$ .

Кроме такой полной производной, надо уметь находить частные производные от функции нескольких переменных.



Например,  $F = x^2 \sin y + x y^2 s$ . Найдём частную производную  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . Если остальные переменные не являются функциями  $x$ , то, считая их постоянными,  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \cdot \sin y + y^2 s$ . Аналогично рассуждая, находим другие частные производные:  $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cdot \cos y + x \cdot 2y \cdot s$  и  $\frac{\partial F}{\partial s} = x y^2$ .

А от частных производных придётся потом находить полные производные по времени  $t$ . Например,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 2\dot{x} \sin y + 2x \cos y \cdot \dot{y} + 2y\dot{y}s + y^2 \dot{s}$ .

Надо разобраться во всех этих математических премудростях. Хотя кафедра высшей математики наверняка учила вас этому.

Теперь поговорим об уравнениях Лагранжа. Прежде чем начать решать задачи, следует хорошо разобраться в движениях исследуемой системы, прикинуть, с помощью каких параметров, *обобщённых координат*, можно определить положение всех деталей этой системы. Минимальное количество этих параметров, которых достаточно, чтобы определить положение системы, называется *числом степеней свободы*. Каково число степеней свободы  $s$ , столько же придётся составлять и уравнений.

Если координаты обозначить буквой  $q$ , то уравнение Лагранжа записывается так:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$ , где  $k$  – номер координаты,  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

В этой формуле  $T = T(q_k, \dot{q}_k)$  – знакомая нам кинетическая энергия системы,  $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$  – обобщённая скорость, соответствующая  $k$ -й координате,

$Q_k$  – обобщённая сила, соответствующая  $k$ -й координате, то есть для каждой координаты вычисляется своя обобщенная сила. Вычисляется она так. Даём приращение данной координате, увеличиваем её на величину  $\delta q_k$ , оставляя все остальные обобщённые координаты неизменными, находим сумму работ всех активных сил на перемещениях, которые получились, и делим её на приращение  $\delta q_k$ :  $Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos \alpha_i$ .

Если система консервативная, движется под действием только потенциальных сил, то обобщённые силы вычисляются проще:  $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$  и

уравнение Лагранжа тогда запишется так:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$ .

Методика решения задач с помощью уравнений Лагранжа довольно проста и понятна. Покажем её на примере решения известной и ставшей уже классической задачи.

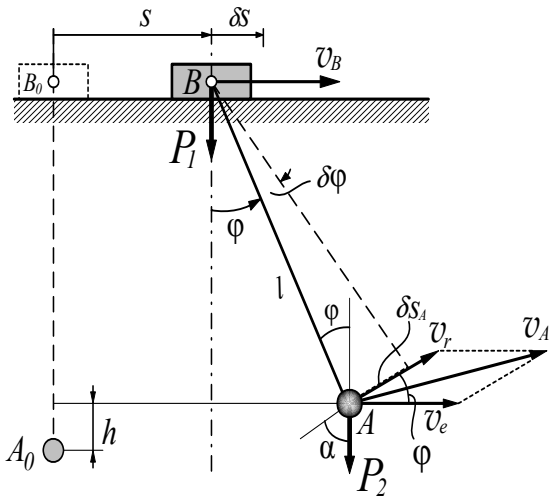


Рис. 43

Маятник  $AB$  качается, вращаясь вокруг точки  $B$ , принадлежащей телу, которое скользит по горизонтальной плоскости (рис. 43). Вес этого тела  $\bar{P}_1$ , вес точки  $A$  маятника  $\bar{P}_2$ , Вес стержня  $AB$  маятника учитывать не будем. Длина маятника  $l$ .

Очевидно, положение этой системы характеризуется двумя параметрами, двумя обобщёнными координатами, углом  $\varphi$ , определяющим отклонение маятника от вертикали, и расстоянием  $s$ , определяющим положение тела, его точки  $B$ . Поскольку

положение конструкции определяется лишь двумя координатами, то система имеет две степени свободы. И следует составлять только два уравнения Лагранжа.

Начнём с определения кинетической энергии. Тело  $B$  совершает поступательное движение, значит,  $T_B = \frac{1}{2} M_B v_B^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{s}^2$ . Кинетическая энер-

гия маятника, точки  $A$ ,  $T_A = \frac{1}{2} M_A v_A^2$ . Эта точка совершает сложное движение, поэтому  $\bar{v}_A = \bar{v}_e + \bar{v}_r$  (равна сумме переносной скорости и относительной). Переносная скорость  $v_e = v_B = \dot{s}$ . Относительная скорость, скорость вращения вокруг оси  $B$   $v_r = l\omega = l\dot{\varphi}$ . Абсолютную скорость определим как диагональ параллелограмма (см. рис. 43)  $v_A^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \varphi = \dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi$ . Кинетическая энергия всей системы будет равна

$T = T_B + T_A = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi)$  как функция обобщённых координат и скоростей.

Теперь займёмся вычислением обобщённых сил. Сначала определим обобщённую силу  $Q_s$ , соответствующую координате  $s$ . Даём приращение этой координате, увеличиваем её на малую величину  $\delta s$ , а координату  $\varphi$  оставляем неизменной. Так как перемещение  $\delta s$  оказалось перпендику-

лярным векторам  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , то работа этих сил будет равна нулю, значит, и обобщённая сила  $Q_s = \frac{1}{\delta s} \Sigma \delta A_i = 0$ .

Вычисляем вторую обобщённую силу  $Q_\varphi$ , соответствующую координате  $\varphi$ . Даём этой координате приращение, увеличиваем её на  $\delta\varphi$  (координату  $s$  оставляем неизменной). Точка приложения силы  $\bar{P}_1$  не переместится, а точка  $A$  получит перемещение  $\delta s_A = l \delta\varphi$ . Теперь определяем силу  $Q_\varphi = \frac{1}{\delta\varphi} \Sigma \delta A_i = \frac{1}{\delta\varphi} (-P_2 \delta s_A \cos \alpha) = -\frac{1}{\delta\varphi} P_2 l \delta\varphi \sin \varphi = -P_2 l \sin \varphi$ .

Прежде чем переходить к составлению уравнений Лагранжа, попробуем найти обобщённые силы с помощью потенциальной энергии, так как на систему действуют только потенциальные силы, силы тяжести. Потенциальная энергия равна работе этих сил при возвращении системы из данного положения в нулевое, где все обобщённые координаты равны нулю. Работу совершит только сила  $\bar{P}_2$ , значит,  $\Pi = -P_2 h = -P_2(l - l \cos \varphi) = -P_2 l(1 - \cos \varphi)$ .

И тогда  $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0$ ,  $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi$ . Как видите, таким способом определять обобщённые силы проще.

Переходим к составлению уравнений Лагранжа. Сначала для первой координаты  $s$ :  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s$ . Находим необходимые производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P_1}{g} \dot{s} + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (2\dot{s} + 2l\dot{\varphi} \cos \varphi) = \frac{P_1 + P_2}{g} \dot{s} + \frac{P_2}{g} l\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

затем полную производную  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{s} + \frac{P_2}{g} l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})$ . И ещё одну производ-

ную, второй член уравнения, но она окажется равной нулю  $\frac{\partial T}{\partial s} = 0$ . Под-

ставляя все найденные производные и обобщённую силу в уравнение Лагранжа, получим окончательно  $\frac{P_1 + P_2}{P_2} \ddot{s} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0$ .

Замечание к составленному уравнению. Так как в кинетическую и потенциальную энергии координата  $s$  явно не входит и, следовательно, производные по  $s$  от  $T$  и  $\Pi$  оказались равными нулю, то последнюю производную не вычисляют и уравнение записывают в окончательном виде так:

$$\frac{d}{dt} \left[ (P_1 + P_2) \dot{s} + P_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] = 0. \text{ Отсюда легко получается первый интеграл}$$

$(P_1+P_2)\dot{s} + P_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C$ . Такая координата называется циклической и соответствующее дифференциальное уравнение получается проще.

Составляем второе уравнение для координаты  $\varphi$   $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$ .

Вычисляем все необходимые производные  $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P_2}{g} (l^2 \dot{\varphi} + l \dot{s} \cos \varphi)$ ,

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P_2}{g} (l^2 \ddot{\varphi} + l \ddot{s} \cos \varphi - l \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi)$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{P_2}{g} l \dot{\varphi} \dot{s} \sin \varphi$ , подставляем их

в уравнение  $\frac{P_2}{g} l (l \ddot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi - \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \frac{P_2}{g} l \dot{\varphi} \dot{s} \sin \varphi = -P_2 l \sin \varphi$  и после алгебраических преобразований получим  $l \ddot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0$ .

Следует записать результат решения задачи в виде системы полученных дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} l \ddot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0, \\ (P_1+P_2)\dot{s} + P_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C. \end{cases}$$

Решим ещё одну задачу (рис. 44). На барабан  $A$  намотана нить, другой конец её намотан на цилиндр  $B$ , центр которого прикреплён пружиной к неподвижной поверхности. Барабан вращается парой сил с постоянным моментом  $M$  и с помощью нити заставляет цилиндр  $B$  катиться по наклонной плоскости. Вес барабана  $P_A$ , цилиндра  $P_B$ . Жёсткость пружины –  $c$ . Радиусы тел указаны на чертеже.

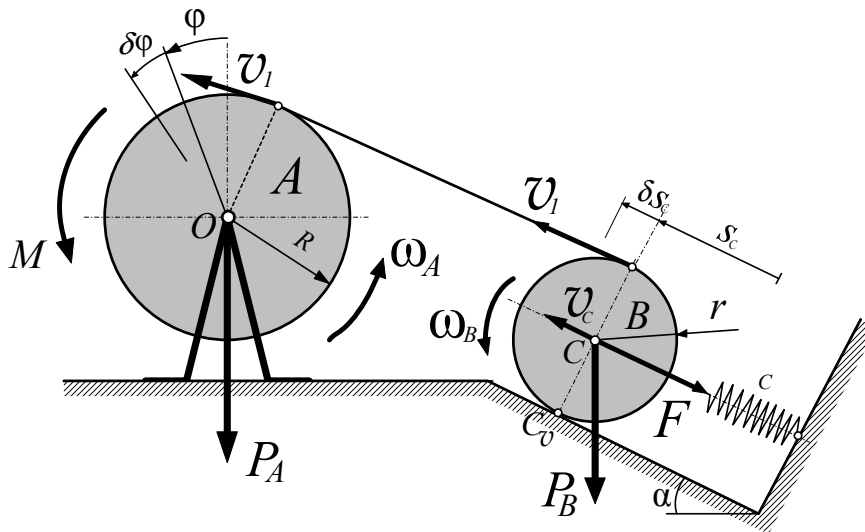


Рис. 44

В начале движения система была неподвижна и пружина была не растянута. Определим вращение барабана.

Система имеет одну степень свободы. Обобщённой координатой назовём угол поворота барабана  $\varphi$ .

Вычисляем кинетическую энергию системы. Барабан вращается вокруг неподвижной оси, значит,  $T_A = \frac{1}{2} J_O \omega_A^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{P_A}{g} R^2 \dot{\varphi}^2$ . Цилиндр  $B$  совершает плоскопараллельное движение, поэтому

$$T_B = \frac{1}{2} \frac{P_B}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_B^2.$$

Так как  $v_1 = R\omega_A = R\dot{\varphi}$  и  $\omega_B = \frac{v_1}{2r} = \frac{R}{2r}\dot{\varphi}$ , то  $v_C = r\omega_B = \frac{1}{2}R\dot{\varphi}$ . Следова-

тельно,  $T_B = \frac{1}{2} \frac{P_B}{g} \frac{R^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{P_B}{g} r^2 \frac{R^2}{4r^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{16} \frac{P_B}{g} R^2 \dot{\varphi}^2$ . И кинетическая

$$\text{энергия всей системы } T = T_A + T_B = \frac{1}{4} \frac{P_A}{g} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{16} \frac{P_B}{g} R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{4P_A + 3P_B}{16g} R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Имея в виду, что деформация пружины в этом положении системы  $S_C = \frac{R\varphi}{2}$  и  $\delta S_C = \frac{1}{2}R \delta\varphi$ , а упругая сила пружины  $F = c S_C = \frac{1}{2}cR\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \text{то обобщённая сила } Q_\varphi &= \frac{1}{\delta\varphi} (M \delta\varphi - P_B R \delta S_C \sin \alpha - F \delta S_C) = \\ &= \frac{1}{\delta\varphi} \left( M \delta\varphi - P_B \frac{R}{2} \delta\varphi \sin \alpha - \frac{1}{2} c R \varphi \frac{1}{2} R \delta\varphi \right) = M - \frac{1}{2} P_B R \sin \alpha - \frac{1}{4} c R^2 \varphi. \end{aligned}$$

Вычисляем все необходимые производные:  $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4P_A + 3P_B}{8g} R^2 \dot{\varphi}$ ,

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4P_A + 3P_B}{8g} R^2 \ddot{\varphi}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$  и составляем уравнение Лагранжа по форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \text{ Получается } \frac{4P_A + 3P_B}{8g} R^2 \ddot{\varphi} = M - \frac{1}{2} P_B R \sin \alpha - \frac{1}{4} c R^2 \varphi.$$

$$\text{Или окончательно } \ddot{\varphi} + \frac{2cg}{4P_A + 3P_B} \varphi = \frac{4(2M - P_B R \sin \alpha)}{(4P_A + 3P_B) R^2} g.$$

Получилось дифференциальное уравнение колебательного движения с частотой  $k = \sqrt{\frac{2cg}{4P_A + 3P_B}}$ . При желании с помощью правил высшей математики можно найти и решение  $\varphi = \varphi(t)$  этого уравнения.

## §5. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики

Возможным перемещением точки, принадлежащей какой-либо системе, называется бесконечно малое перемещение, которое допускается связями. И это только *возможное* перемещение, а не действительное. Мы сами его задаём. Так как оно очень маленькое, то заменяем его отрезком касательной к траектории возможного движения, то есть направляется как *вектор скорости* этой точки. А как направляется вектор скорости, помним из раздела «Кинематика».

На рис. 45 показано несколько примеров возможных перемещений точек  $\delta S$  или возможных поворотов тел  $\delta\varphi$ . Зависимость между ними аналогична зависимости между скоростями, скоростями точек и угловыми скоростями.

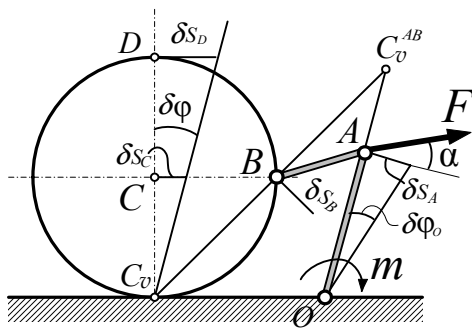


Рис. 45

Например, на этой картинке  $\delta S_C = R\delta\varphi$ ,

$$\delta S_B = BC_v \cdot \delta\varphi, \quad \delta\varphi_{AB} = \frac{\delta S_B}{BC_v^{AB}} = \frac{BC_v}{BC_v^{AB}} \delta\varphi,$$

$$\delta S_A = AC_v^{AB} \delta\varphi_{AB}, \quad \delta\varphi_0 = \frac{\delta S_A}{AO}.$$

Силы, приложенные к телам на этих перемещениях, совершают работу, которая определяется по общим правилам. Например, работа силы  $\vec{F}$  на возможном перемещении точки приложения (рис. 45)  $\delta A = F \delta S_A \cos \alpha$ , а пара с моментом  $m$  совершает работу  $\delta A = m \cdot \delta\varphi_0$ .

С помощью принципа возможных перемещений можно решать обычные задачи статики, а вспоминая принцип Даламбера (§2) и учитывая силы инерции, решать и задачи динамики. В этом случае этот принцип называется *общим уравнением динамики*, утверждающим, что сумма работ обычных сил и сил инерции на возможном перемещении равна нулю:

$$\sum F_i \delta S_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{ин} \delta S_i \cos \beta_i = 0.$$

Сразу заметим, что этот принцип хорош тем, что при решении задач реакции связей не учитываются, так как сумма работ реакций идеальных связей всегда на любом возможном перемещении равна нулю.

На следующем примере убедимся, что этот метод решения задач прост и понятен.

Конструкция механизма дана на рис. 46. Прямоугольная плита весом  $G$  скользит по наклонной плоскости и заставляет цилиндр катиться вниз, вправо по верхней плоскости. Вес цилиндра –  $P$ , радиус –  $R$ . Требуется определить ускорение плиты  $W_B$ .

Показываем силы  $\bar{P}, \bar{G}$  (реакции связей, плоскостей показывать не надо). Добавляем силы инерции тел. Как это делается см. в §2. У плиты показываем равнодействующую сил инерции

$$R_{\text{ин}} = \frac{G}{g} W_B, \text{ у цилиндра главный}$$

вектор  $R'_{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_C = \frac{P W_B}{g \cdot 2}$  и

главный момент сил инерции относительно оси  $C$  равен

$$M_C^{\text{ин}} = J_C \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \cdot \frac{W_C}{R} = \frac{1}{4} \frac{P}{g} R W_B. \text{ Даём системе возможное перемещение (см. рис. 46). Сместим плиту, центр её, вниз на } \delta S_B. \text{ Тогда цилиндр повернётся вокруг своего мгновенного центра скоростей } C_v \text{ на угол}$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta S_B}{2R}, \text{ а центр масс его сместится на } \delta S_C = \frac{1}{2} \delta S_B.$$

Составляем уравнение работ, определяем сумму работ всех показанных сил на этих перемещениях

$$G \delta S_B \sin \alpha + P \delta S_C \sin \alpha - R_{\text{ин}} \delta S_B - R'_{\text{ин}} \delta S_C - M_C^{\text{ин}} \delta\varphi = 0.$$

Подставляем сюда значения сил и возможных перемещений

$$G \delta S_B \sin \alpha + P \frac{\delta S_B}{2} \sin \alpha - \frac{G}{g} W_B \delta S_B - \frac{P W_B}{g \cdot 2} \delta S_B - \frac{1}{4} \frac{P}{g} R W_B \frac{\delta S_B}{2R} = 0.$$

Из этого уравнения, сократив на  $\delta S_B$ , находим ускорение плиты:

$$W_B = \frac{2G+P}{4(8G+5P)} g \sin \alpha.$$

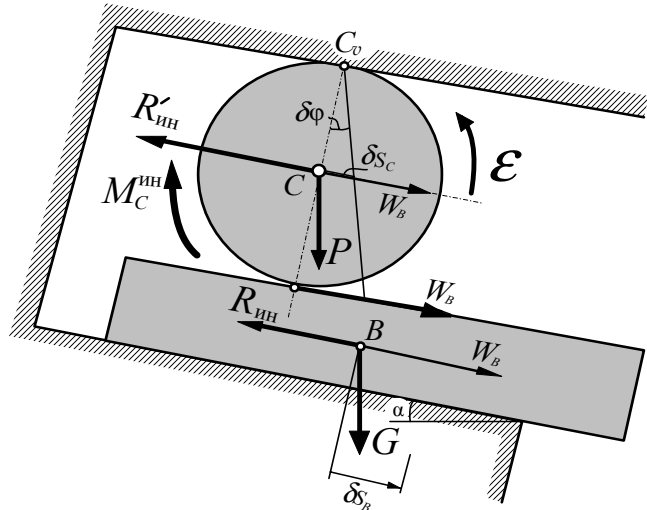


Рис. 46

## §6. Теорема о движении центра масс

Эта теорема позволяет довольно просто оценить движение материальной системы в целом и определить движение отдельных частей системы. Для этого надо лишь помнить, что, как утверждает теорема, *движение центра масс системы определяется так же, как движение обычной материальной точки* составлением известных дифференциальных уравнений (см. §1). И, что замечательно, неприятные внутренние силы не учитываются. Уравнения составляются по форме:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \Sigma X_i^{(e)}, \\ M\ddot{y}_c = \Sigma Y_i^{(e)}, \\ M\ddot{z}_c = \Sigma Z_i^{(e)}. \end{cases}$$

И порядок решения остаётся таким же, что и при определении движения материальной точки.

Причём очень часто в этих задачах сумма проекций внешних сил на оси оказывается равной нулю. Значит, координаты центра масс – постоянные и задача будет сводиться лишь к решению алгебраических уравнений.

В качестве примера рассмотрим движение системы из §4, рис. 43. Определим движение центра масс  $C$  этой системы (рис. 47). Он расположен на стержне в точке, где выполняется ус-

ловие  $\frac{CB}{CA} = \frac{P_2}{P_1}$ . Если обозначить  $CB = l_B$ ,

то  $CA = l - l_B$ . И тогда  $l_B = \frac{P_2}{P_1 + P_2} l$ . Опре-

делим движение центра масс с помощью его координаты  $x_c$ , составив дифференциальное уравнение  $M\ddot{x}_c = \Sigma X_i^{(e)}$ . Получим  $\frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{x}_c = 0$ ,

так как все внешние силы вертикальные. Отсюда следует  $x_c = \text{const}$ , если считать, что вначале система неподвижна. Значит, центр масс будет двигаться только по вертикали. Направим по ней ось  $y$ . Тогда  $x_c = 0$ .

Если тело  $B$  скользит влево со скоростью  $v_B = \dot{x}_B$ , то, зная, что центр масс дви-

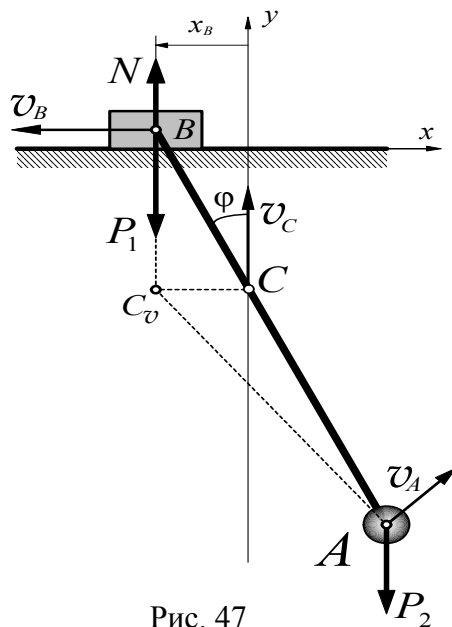


Рис. 47

жется по вертикальной траектории, легко находим мгновенный центр скоростей  $C_v$ , проведя перпендикуляры к векторам скоростей  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_C$ .



Легко находим угловую скорость  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{v_B}{l_B \cos \varphi} = \frac{(P_1 + P_2) \dot{x}_B}{P_2 l \cos \varphi}$

и получаем дифференциальное уравнение, аналогичное тому уравнению, которое было при решении такой же задачи с помощью уравнения Лагранжа в §4:  $(P_1 + P_2) \dot{x}_B - P_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = 0$  (здесь получился второй член со знаком минус потому, что ось  $x$  направлена в противоположную сторону).

Этот пример оказался не слишком простым. Обычно с помощью этой теоремы, теоремы о движении центра масс, решаются задачи другого типа. Одна из них решена в [1] (гл. XIX, §1, с. 149). Решим ещё одну типичную задачу.

Определить движение корпуса электродвигателя на гладкой плоскости, если на оси его с угловой скоростью  $\omega$  вращается стержень с шаром на конце. Вес двигателя  $P_2$ , шара —  $P_1$ . Длина стержня  $l$  (рис. 48).

Показываем промежуточное положение двигателя на расстоянии  $s$ , действующие на него внешние силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  и нормальную реакцию плоскости  $\bar{N}$ .

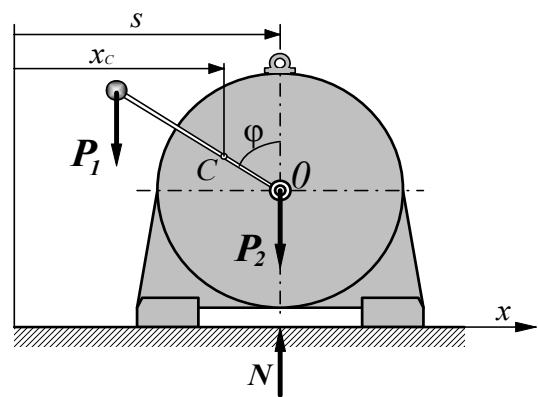


Рис. 48

Составляем дифференциальное уравнение  $M \ddot{x}_c = \Sigma X_i^{(e)}$ , где  $x_c$  — координата

центра масс всей конструкции. Так как сумма проекций  $\Sigma X_i^{(e)} = 0$ , то  $\ddot{x}_c = 0$

и  $x_c = \text{const} = s_0$ . Значит,  $x_c = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{P_2 s + P_1 (s - l \sin \varphi)}{P_1 + P_2} = s - \frac{P_1}{P_1 + P_2} l \sin \varphi = s_0$ . И так

как  $\varphi = \omega t$ , то движение электродвигателя будет колебательным около некоторого начального положения  $s_0$  по закону  $s = s_0 + \frac{P_1}{P_1 + P_2} l \sin \omega t$ .

Решим ещё одну простую задачу. Рабочему поручили перетаскать жидкость весом  $P$  из одного бака в такой же на другом конце платформы (рис. 49). Вес платформы  $G$ , длина  $l$ . Когда он выполнил свою задачу и решил вернуться на землю, обнаружил, что приставленная раньше лестница оказалась довольно далеко от платформы и ему пришлось спрыгивать. Определим, на какое расстояние  $s$  отъехала платформа от лестницы. Все необходимые размеры указаны на чертеже. Сопротивления движению учитывать не будем.

Определим движение центра масс всей этой системы. Так как все внешние силы вертикальные и сумма проекций их на горизонтальную ось  $x$  равна нулю, то координата центра масс  $x_c = \text{const}$ .

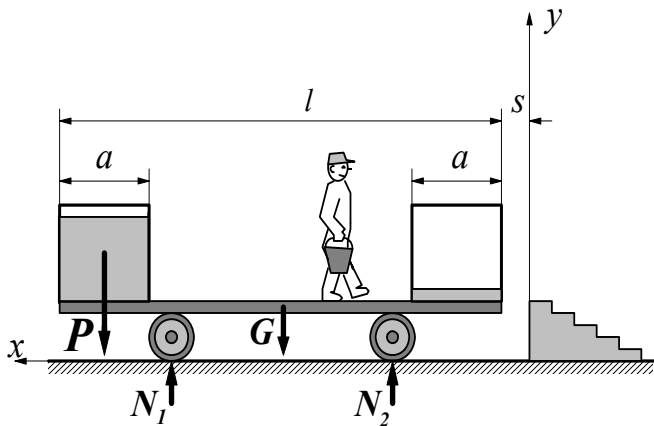


Рис. 49

В первом положении, когда вся жидкость находилась в левом баке и платформа была у лестницы ( $s = 0$ ), координата

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{G \cdot 0,5a + P(l - 0,5a)}{G + P}.$$

Во втором положении, когда уже вся жидкость оказалась в правом баке и платформа

отъехала на расстояние  $s$ , формула, определяющая ту же координату, станет такой:  $x_c = \frac{G(s + 0,5l) + P(s + 0,5a)}{G + P}$ . Приравнивая значения координат,

получим уравнение  $0,5Gl + Pl - 0,5Pa = Gs + 0,5Gl + Ps + 0,5Pa$ ,

из которого находим перемещение платформы  $s = \frac{P}{P + G}(l - a)$ .

## §7. Теорема об изменении количества движения

Чтобы удачно решать задачи на эту тему, надо научиться правильно определять количество движения.

Количество движения материальной точки или тела, которое движется поступательно, определяется просто:  $\bar{K} = M\bar{v}$ , где  $M$  – масса тела,  $\bar{v}$  – скорость любой его точки. Лучше использовать скорость центра масс  $\bar{v}_c$ , так как при поступательном движении скорости всех точек одинаковы. Направляется вектор количества движения по направлению скорости и прикладывается к центру масс.

При другом виде движения тела количество движения его определяется несколько иначе. Главный вектор количества движения находится так же  $\bar{K} = M\bar{v}_c$ , а точку приложения его приходится определять специально. Но при решении задач с помощью теоремы об изменении количества движения это и не потребуется.

Обычно эту теорему записывают так:  $\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \sum \bar{S}_i^{(e)}$ , где  $\bar{K}_1$  и  $\bar{K}_2$  – количества движения системы в двух положениях, а  $\bar{S}_i^{(e)}$  – импульс внешних сил  $\bar{F}_i^{(e)}$ . Если вектор силы постоянен и по величине, и по направле-

нию, то  $\bar{S} = \bar{F}t$ , где  $t$  – время действия силы за время перехода системы из первого положения во второе. Если же сила  $\bar{F}_i^{(e)}$  не постоянная, меняется, то импульс силы определяется интегрированием  $\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{(e)} dt$ .

При решении задач обычно используются проекции векторного уравнения на оси. Например, проектируя на ось  $x$ , получим  $K_{2x} - K_{1x} = \Sigma S_{ix}^{(e)}$ .

Вот первый пример, не очень сложный. Снаряд движется в стволе орудия со скоростью  $\bar{u}$  (рис. 50). Определим скорость отката орудия в противоположную сторону по горизонтальной плоскости. Выстрел произведён под углом  $\alpha$ . Вес снаряда  $P$ , орудия –  $G$ . Воспользуемся этой теоремой в форме  $K_{2x} - K_{1x} = \Sigma S_{ix}^{(e)}$ .

В первом положении вся установка была неподвижна, значит  $\bar{K}_1 = 0$ . Во втором положении, изображённом на рисунке, количество движения  $\bar{K}_2$  складывается из количества движения самой пушки  $\bar{K}_n = \frac{G}{g} \bar{v}_n$  и количества

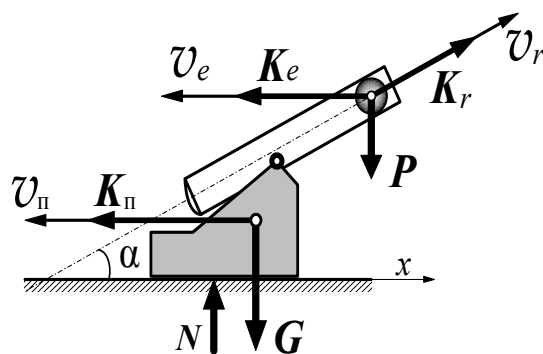


Рис. 50

движения снаряда. Но скорость снаряда состоит из двух, переносной скорости  $\bar{v}_e = \bar{v}_n$  и относительной  $\bar{v}_r = \bar{u}$ . Следовательно, вектор количества движения снаряда надо рассматривать как сумму двух векторов, вектора при переносном движении  $\bar{K}_e = \frac{P}{g} \bar{v}_n$  и вектора при относительном движе-

нии  $\bar{K}_r = \frac{P}{g} \bar{v}_n$ . Поэтому проекция вектора количества движения  $\bar{K}_2$

на ось  $x$  (см. рис. 50) будет равна  $K_{2x} = -K_n - K_e + K_r \cos \alpha = -\frac{G}{g} v_n - \frac{P}{g} v_n + \frac{P}{g} u \cos \alpha$ .

Все внешние силы, действующие на систему, вертикальны. Значит, и импульсы их будут вертикальны. Поэтому  $\Sigma S_{ix}^{(e)} = 0$ .

Осталось подставить всё в формулу теоремы  $-\frac{G+P}{g} v_n + \frac{P}{g} u \cos \alpha - 0 = 0$

и найти скорость отката орудия  $v_n = \frac{P}{G+P} u \cos \alpha$ .

Теорему об изменении количества движения удобно использовать при определении зависимостей между перемещениями тел, изменениями их массы и скоростями. Эта теорема позволяет анализировать движение и жидкости, и других сплошных тел, например в трубах.

Вот такая задача. Жидкость движется в трубе диаметром  $d$  со скоростью  $v$ . Определим горизонтальную реакцию  $N$  опоры на колено трубы.

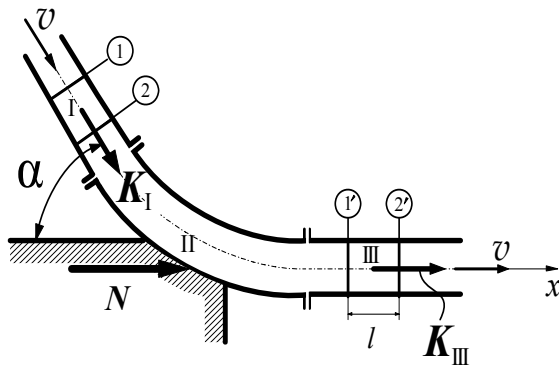


Рис. 51

Прежде всего, надо решить, какое количество жидкости будем рассматривать. Конечно, не всю жидкость, а только часть её.

В нашей задаче рассмотрим движение части жидкости, расположенной в трубе между сечениями 1 и 1' (рис. 51). Это будет её первое положение. Через некоторое время  $t$  жидкость займёт новое положение между сечениями 2 и 2'.

В первом положении количество движения  $\bar{K}_1$  складывается из количеств движения объёмов I и II, то есть  $\bar{K}_1 = \bar{K}_I + \bar{K}_{II}$ . Во втором положении  $\bar{K}_2 = \bar{K}_{II} + \bar{K}_{III}$ . Поэтому изменение количества движения  $\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \bar{K}_{II} + \bar{K}_{III} - \bar{K}_I - \bar{K}_{II} = \bar{K}_{III} - \bar{K}_I$ .

И уравнение по теореме примет вид  $\bar{K}_{III} - \bar{K}_I = \Sigma \bar{S}_i^{(e)}$ . Так как диаметр трубы одинаков во всех сечениях, то  $K_I = K_{III} = Mv = \frac{\pi d^2}{4} l \rho v$ , где  $l = vt$ ,  $\rho$  – плотность жидкости.

Если составить уравнение, спроектировав его на горизонтальную ось  $x$  и имея в виду, что импульсы сил тяжести вертикальны, а импульс силы  $\bar{N}$  равен  $S = Nt$ , получим  $\frac{\pi d^2}{4} \rho v^2 t - \frac{\pi d^2}{4} \rho v^2 t \cos \alpha = Nt$ . И отсюда находим результат  $N = 0,25 \pi d^2 \rho v^2 (1 - \cos \alpha)$ .

## §8. Теорема об изменении момента количества движения

Эта теорема применяется главным образом при анализе движения системы, где основное тело совершает вращение. Движение системы определяется составлением дифференциального уравнения в виде

$$\text{или } \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \quad \text{или } \frac{dL_c}{dt} = M_c^{(e)},$$

где  $L_z$  – главный момент количества движения системы относительно неподвижной оси вращения  $z$ ,  $L_c$  – относительно оси  $C$ , проходящей через центр масс. А  $M_z^{(e)}$  и  $M_c^{(e)}$  – главные моменты (сумма моментов) внешних сил относительно тех же осей.

Важно помнить, что если эти главные моменты сил окажутся равными нулю, то главные моменты количества движения относительно соответствующих осей будут постоянными  $L_z = \text{const}$  и  $L_c = \text{const}$ .

Чтобы успешно решать задачи, надо уметь находить главные моменты количества движения. Вообще, например,  $L_z = \sum l_z(\bar{k}_i)$  – сумма моментов векторов количества движения всех точек системы относительно оси  $z$ . А для твёрдых тел главные моменты количества движения находятся по известным формулам, например,  $L_z = J_z \omega$ , где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси,  $\omega$  – его угловая скорость.

С помощью теоремы об изменении момента количества движения решаются задачи на исследование различных движений системы. И поэтому предложить какие-то типичные задачи, в которых давался бы единый метод использования этой теоремы, невозможно. Но схема решения, во всяком случае начало решения, одинаковая – составляем указанные выше уравнения.

Несколько примеров дано в [1] (гл. XIX, §3, 4, 5). Но продемонстрируем всё же использование этой теоремы ещё на ряде задач.

Вот первая задача. Через блок перекинут канат. За концы каната ухватились два студента одинакового веса  $P$ . Студент  $B$  стал подниматься по канату со скоростью  $v$ . А второй студент  $A$  просто держится за канат (рис. 52). Определим скорости студентов. Вес блока  $G$ , радиус –  $r$ .

Находим главный момент количества движения относительно оси  $O$ , предполагая, что студент  $A$  стал подниматься вместе с канатом со скоростью  $v_A$ . Тогда скорость студента  $B$  будет  $v_B = v - v_A$ . И главный момент будет равен

$$L_o = -J_o \omega + K_B \cdot r - K_A \cdot r = -\frac{1}{2} r^2 \frac{v_A}{r} + \frac{P}{g} (v - v_A) r - \frac{P}{g} v_A \cdot r = \frac{r}{2g} [-G v_A + P(v - v_A) - P v_A] = \frac{r}{2g} [-(G+2P)v_A + P v].$$

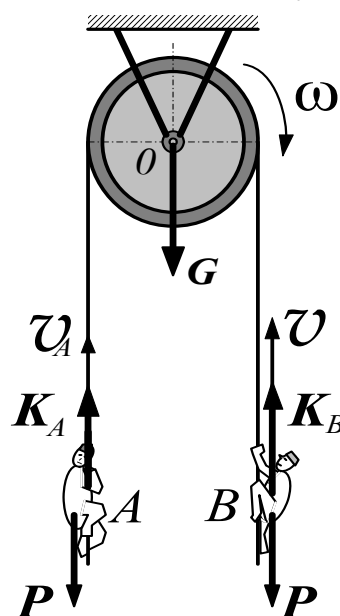


Рис. 52

Так как сумма моментов всех внешних сил относительно оси  $O$  равна  $M_o^{(e)} = 0$ , то  $L_o = \text{const}$ , и главный момент количества движения будет равен нулю, потому что вначале вся система была неподвижна. Тогда из последнего уравнения следует  $v_A = \frac{P}{G+2P}v$ , а скорость студента  $B$  окажется равной  $v_B = v - v_A = v - \frac{Pv}{G+2P} = \frac{G+P}{G+2P}v$ . Следовательно, оба студента будут подниматься. Только у студента  $B$  скорость будет больше.

Если же пренебречь весом блока  $G$ , то окажется, что скорости их будут одинаковы  $v_A = v_B = \frac{v}{2}$ . То есть они одновременно достигнут потолка, только студент  $A$  окажется хитрее.

Вот ещё задача. В плоскости диска, который может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси  $O$ , сделан диаметральный паз. Внутри паза движется шарик  $A$  (рис. 53). В начале движения шарик находился в центре диска. Вес диска  $G$ , шарика —  $P$ , радиус диска  $r$ .

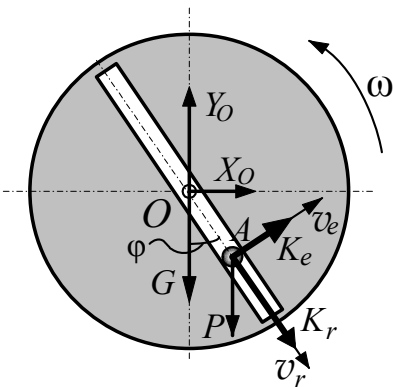


Рис. 53

Определим возможное движение этой конструкции. Записываем уравнение, определяющее вращение всей системы вокруг оси  $O$ :

$$\frac{dL_o}{dt} = M_o^{(e)}$$

Главный момент количества движения относительно оси вращения складывается из момента количества движения диска, равного

$$L_d = J_o \omega = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \omega,$$

и момента количества движения шарика. Шарик совершает сложное движение. Переносное движение при вращении вместе с диском со скоростью  $v_e = s \omega$ , где  $s = OA$ . И относительное движение внутри паза со скоростью  $v_r$ . Соответственно получим две составляющих количества движения шарика  $K_e = \frac{P}{g} v_e = \frac{P}{g} s \omega$  и

$$K_r = \frac{P}{g} v_r.$$

Момент количества движения шарика даст только вектор  $\bar{K}_e$ :

$$L_{ш} = K_e \cdot s = \frac{P}{g} s^2 \omega.$$

Поэтому главный момент количества движения

$$L_o = L_d + L_{ш} = \frac{1}{2g} (Gr^2 + Ps^2) \omega.$$

А главный момент внешних сил

$$M_o^{(e)} = -Pa \sin \varphi.$$

Подставляем найденные значения моментов в уравнение, имея в виду, что  $\omega = \dot{\varphi}$ . Получим дифференциальное уравнение, определяющее вращение диска  $(Gr^2 + Ps^2)\ddot{\varphi} + 2Pgs \sin \varphi = 0$ .

К сожалению, в уравнение вошло переменное расстояние  $s = f(\varphi)$ . Чтобы его определить, надо составить ещё одно дополнительное уравнение, рассмотрев относительное движение шарика. Но это уже задача на другую тему, которую мы научились решать ещё в §1.

Теорему об изменении главного момента количества движения используют и для определения вращательного движения при плоскопараллельном движении тела. В этом случае после некоторых преобразований теорема примет форму дифференциального уравнения  $J_{C_v}\ddot{\varphi} + K \cdot \ddot{a} = M_{C_v}^{(e)}$ , где  $J_{C_v}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей,  $K$  – количество движения тела, вектор которого приложен к центру масс, а величина  $a = CC_v$ . Часто оказывается  $a = \text{const}$ , тогда уравнение получается проще  $J_{C_v}\ddot{\varphi} = M_{C_v}^{(e)}$ .

Вот небольшой пример. Диск обкатывается в горизонтальной плоскости с помощью поводка  $OA$  и пары с моментом  $M$  по неподвижному большому колесу (рис. 54). Вес диска равен  $P$ , вес поводка учитывать не будем. Радиусы указаны на чертеже. Определим угловое ускорение  $\varepsilon_o$  поводка.

Так как  $a = CC_v = r = \text{const}$ , используем последнее уравнение.

Определяем  $J_{C_v} = J_C + \frac{P}{g}r^2 =$

$$= \frac{1}{2} \frac{P}{g}r^2 + \frac{P}{g}r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g}r^2.$$

Так как сила, с которой поводок действует

на ось диска  $F = \frac{M}{R+r}$ , то

$$M_{C_v}^{(e)} = F \cdot r = \frac{M}{R+r}r. \text{ Уравнение получается таким: } \frac{3}{2} \frac{P}{g}r^2\ddot{\varphi} = \frac{M}{R+r}r \text{ или}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3} \frac{Mg}{Pr(R+r)}. \text{ Здесь } \ddot{\varphi} = \varepsilon - \text{угловое ускорение диска. А так как}$$

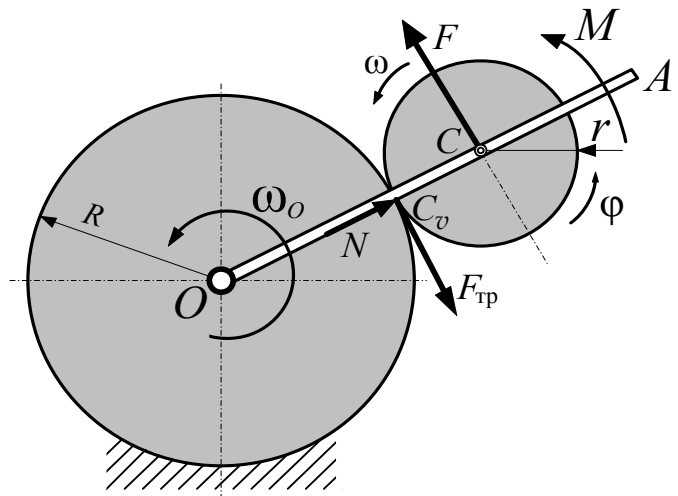


Рис. 54

$v_c = r\omega = (R+r)\omega_0$ , то, продифференцировав, получим  $r\varepsilon = (R+r)\varepsilon_0$  и тогда нужное угловое ускорение поводка  $\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{Mg}{P(R+r)^2}$ .

Используя теорему о моменте количества движения системы, попробуем решить более масштабную задачу.

В последнее время в связи с изменением климата на Земле стали много уделять внимания поискам причин этого явления. В частности, одной из причин всё чаще называют изменение скорости вращения нашей планеты, увеличением земных суток. Так, в одной из газет даже заявили, ссылаясь на Международную службу вращения Земли (IEPS) в Париже, что с 1972 года сутки якобы увеличились на 20 секунд. И объясняют это увеличением массы Земли «за счёт миллионов тонн космической пыли, выпадающей ежегодно».

Попробуем с помощью теоретической механики оценить это предположение.

Так как внешними силами, действующими на Землю, можно пренебречь, то главный момент количества движения её  $L_z = \text{const}$ .

Если в этом году  $L_z = J_z \omega_1 = \frac{2}{5} MR^2 \omega_1$ , то в будущем за счёт увеличения массы на величину  $m$  радиус Земли увеличится на величину  $h$ , образующей сферу такой толщины. А момент количества движения Земли увеличится по известной формуле, определяющей момент инерции сферической поверхности, на величину  $\frac{2}{5} m \frac{(R+h)^5 - R^5}{(R+h)^3 - R^3} \omega_2$ . Поэтому, имея в виду, что  $L_z = \text{const}$ , получим такое уравнение:

$$\frac{2}{5} MR^2 \omega_1 = \frac{2}{5} MR^2 \omega_2 + \frac{2}{5} m \frac{(R+h)^5 - R^5}{(R+h)^3 - R^3} \omega_2.$$

Время полного оборота Земли вокруг своей оси равно  $T = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 8,64 \cdot 10^4$  с. Поэтому угловая скорость в настоящее время

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , а в предполагаемом будущем, когда это время увеличится на 1 с,

угловая скорость станет равной  $\omega_2 = \frac{2\pi}{T+1}$ .

Подставив эти значения угловых скоростей в последнее уравнение и проделав не очень сложные алгебраические преобразования, найдём массу выпавшей на Землю космической пыли:

$$m = \frac{MR^2}{T} \frac{(R+h)^3 - R^3}{(R+h)^5 - R^5}.$$



Так как масса Земли как однородного шара  $M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ , а масса пустотелой сферы толщиной  $h$ , образованной космической пылью,  $m = \rho \frac{4}{3} \pi [(R+h)^3 - R^3]$ , где  $\rho$  – средняя плотность земной породы и такая же плотность выпавшей космической пыли, то по последнему уравнению находим толщину  $h$  слоя космической пыли, накрывшей Землю (рис. 55).

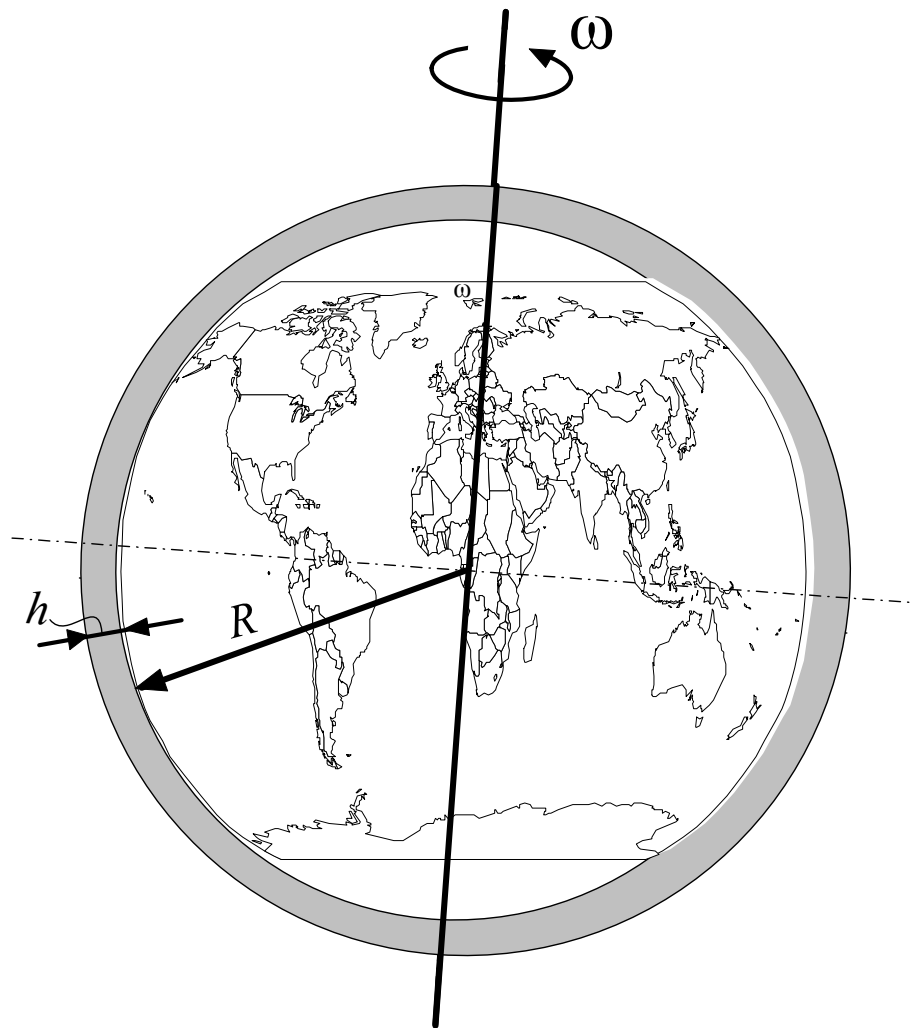


Рис. 55

Получается на первый взгляд сложное уравнение

$$\rho \frac{4}{3} \pi [(R+h)^3 - R^3] = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot R^2 \frac{1}{T} \frac{[(R+h)^3 - R^3]}{[(R+h)^5 - R^5]}.$$

Но оно даёт неожиданно простое решение  $h = R \left( \sqrt[5]{\frac{T+1}{T}} - 1 \right)$ .

Подставляя сюда значение времени суток  $T = 8,64 \cdot 10^4$  с и радиус Земли  $R = 6,4 \cdot 10^6$  м, определяем величину  $h = 14,816$  м.

Значит, эта довольно твёрдая и тяжёлая пыль должна равномерно покрыть земной шар «одеялом» толщиной почти 15 метров!

Вряд ли такое предположение реально, что оно может объяснить увеличение земных суток на 1 секунду. Скорее всего, причиной всему является перераспределение внутренней массы земного шара, отдельных её частей, в том числе и за счёт интенсивной добычи полезных ископаемых, нефти и газа, строительства множества многоэтажных высотных зданий и прочих массивных сооружений.

# ЗАДАЧИ





# СТАТИКА

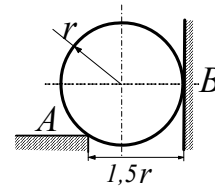
---

## СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

### 1. Плоская система сходящихся сил

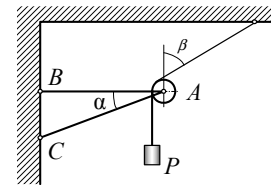
1.1. Определить давление шара, вес которого  $P$ , на угол  $A$  и вертикальную плоскость  $B$ .

Ответ:  $N_A = P \frac{2}{\sqrt{3}}, N_B = P \frac{1}{\sqrt{3}}$ .



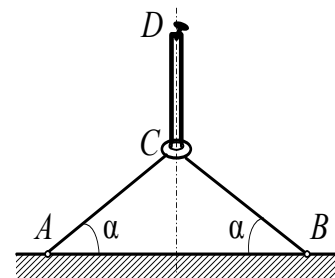
1.2. Определить усилия в стержнях  $AB$  и  $AC$  от веса груза  $P$ , подвешенного на нити, перекинутой через блок  $A$ .

Ответ:  $S_{AC} = P \frac{\cos \beta - 1}{\sin \alpha}; S_{AB} = P \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ .



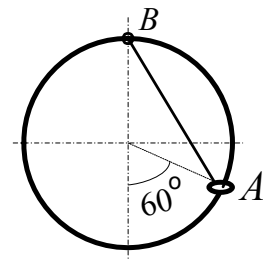
1.3. На нить, прикрепленную концами к точкам  $A$  и  $B$  и перекинутую через гвоздь  $D$ , надето колечко  $C$  весом  $P$ . Определить натяжение нити, если известен угол  $\alpha$ , составленный концами нити с горизонтальной плоскостью.

Ответ:  $S = \frac{0,5P}{1 - \sin \alpha}$ .

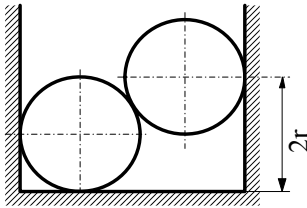


1.4. Колечко  $A$  весом  $P$  надето на гладкое проволочное кольцо и удерживается на нём нитью  $AB$ . Найти натяжение нити и давление колечка  $A$  на большое проволочное кольцо.

Ответ:  $S = P\sqrt{3}, N = P$ .

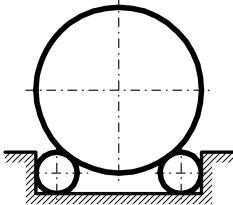


1.5. Два шара одинакового веса  $P$  и радиуса  $r$  опущены в цилиндрическое отверстие с горизонтальным дном и расположены так, как показано на рисунке. Определить давление шаров на дно, на вертикальные стенки и друг на друга.



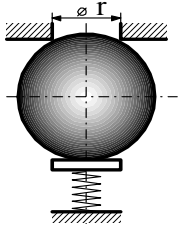
Ответ:  $N_1 = 2P$ ,  $N_2 = N_3 = P\sqrt{3}$ ,  $N = 2P$ .

1.6. Цилиндр радиусом  $R = 4r$  и весом  $P$  положен на два одинаковых катка радиусом  $r$ . Расстояние между центрами катков  $6r$ . Определить давление цилиндра на катки, давление катков на вертикальные стенки и на дно паза, в котором они находятся.



Ответ:  $N_1 = 0,625P$ ,  $N_2 = 0,47P$ ,  $N_3 = 0,5P$ .

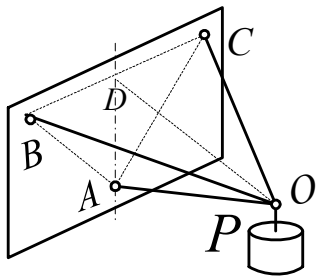
1.7. Шар весом  $P$  прижимается пружиной к отверстию диаметром, равным радиусу шара. Определить давление на единицу длины кромки отверстия. Упругая сила пружины равна  $F$ .



Ответ:  $N = \frac{2}{\pi r \sqrt{3}}(F - P)$ .

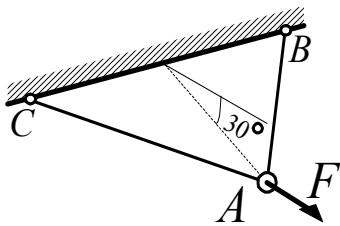
## 2. Пространственная система сходящихся сил

2.1. Груз весом  $P$  прикреплен к вертикальной плоскости тремя стержнями. Известно, что  $BO = CO = BC$ ,  $AD = AO$  и  $AO$  перпендикулярно  $AD$ . Определить усилия в стержнях.



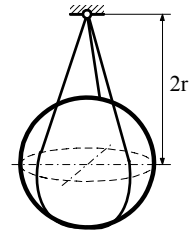
Ответ:  $S_A = -P$ ,  $S_C = S_B = P\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

2.2. Шарик  $A$  весом  $P$  подвешен на двух нитях одинаковой длины, перпендикулярных друг другу. Какую горизонтальную силу  $F$  надо приложить к шарiku, чтобы плоскость треугольника  $ABC$  составила угол  $30^\circ$  с плоскостью горизонта? Определить и натяжение нитей.



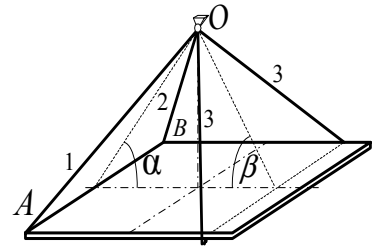
Ответ:  $F = P\sqrt{3}$ ,  $S_{AB} = S_{AC} = P\sqrt{2}$ .

2.3. Шар подвешен на трёх нитях, расстояние между которыми одинаковы. Вес шара –  $P$ , радиус –  $r$ . Определить натяжение нитей.



Ответ:  $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}P$ .

2.4. Прямоугольная плита весом  $P$  удерживается в горизонтальном положении нитями 1 и 2, длина которых  $a$ , прикрепленными к углам  $A$  и  $B$ , и нитью 3, охватывающей плиту снизу. Углы  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ . Сторона плиты  $AB = a$ . Определить натяжение нитей.

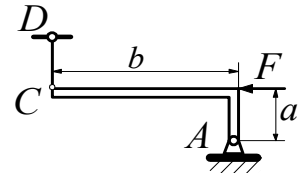


Ответ:  $S_1 = S_2 = P \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$ ,  $S_3 = 1,5P \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$ .

### ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

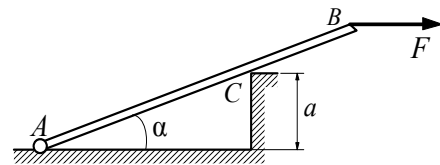
#### 1. Равновесие одного тела

1.1. Найти реакции шарнира  $A$  и усилие в стержне  $DC$ , вызываемые силой  $F$ , приложенной к балке  $AC$ , имеющей форму уголка.



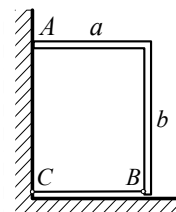
Ответ:  $X_A = -F$ ,  $Y_A = F \frac{a}{b}$ ,  $S = F \frac{a}{b}$ .

1.2. Балочка  $AB$  прикреплена к плоскости шарниром  $A$  под углом  $\alpha = 30^\circ$ . Длина балочки равна  $3a$ . Определить реакции связей в шарнире  $A$  и угла  $C$ , возникающие от горизонтальной силы  $F$ .



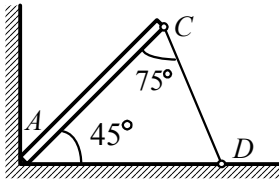
Ответ:  $N_C = 0,75 F$ ,  $X_A = 0,62 F$ ,  $Y_A = 0,65 F$ .

1.3. Балка  $AB$  в виде уголка опирается на две плоскости и удерживается в равновесии нитью  $CB$ . Вес единицы длины равен  $q$ . Определить давление на плоскости и натяжение нити.



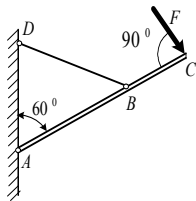
Ответ:  $N_A = S = \frac{1}{2}q \frac{a^2}{b}$ ,  $N_B = q(a + b)$ .

1.4. Определить реакции плоскостей на балку  $AC$  и усилие в стержне  $CD$ , возникающие от веса балки  $P$ .



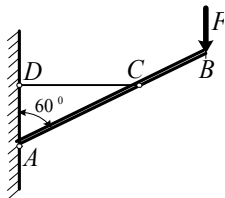
Ответ:  $N_1 = 0,683P$ ,  $N_2 = 0,183P$ ,  $S = -0,366P$ .

1.5. Балочка  $AC$  прикреплена к стене шарниром  $A$  и нитью  $BD$ . Длина нити равна  $AB$ , а  $BC = \frac{1}{3}AC$ . Найти натяжение нити и реакции шарнира, вызванные силой  $F$ .



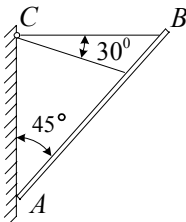
Ответ:  $X_A = F$ ,  $Y_A = 0$ ,  $S = F\sqrt{3}$ .

1.6. Балочка  $AB$  прикреплена к стене шарниром  $A$  и горизонтальной нитью  $CD$ . На балочку действует вертикальная сила  $F$ . Определить реакции шарнира и натяжение нити, если  $BC = \frac{1}{3}AB$ .



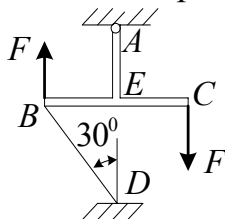
Ответ:  $X_A = S = 1,5\sqrt{3}F$ ,  $Y_A = F$ .

1.7. Балочка  $AB$  весом  $P$  прикреплена к стене двумя стержнями и опирается на нее концом  $A$ . Определить усилия, возникающие в стержнях, и давление на стенку.



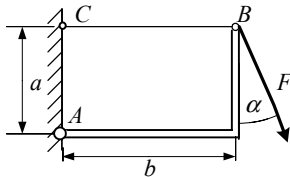
Ответ:  $S_1 = -1,23P$ ,  $S_2 = 2P$ ,  $N = 0,5P$ .

1.8. Определить реакции шарнира  $A$  и усилие в стержне  $BD$ , возникающие от двух равных сил  $F$ , приложенных к Г-образной конструкции, при  $BC = AE$ .



Ответ:  $X_A = 0,536F$ ,  $Y_A = 0,928F$ ,  $S = 1,07F$ .

1.9. Определить усилие в стержне  $BC$  и реакцию шарнира  $A$ , возникающие от силы  $F$ . Вес конструкции не учитывать.

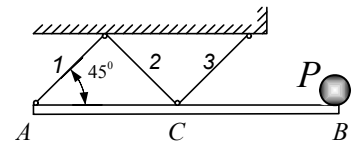


Ответ:  $S = F\left(\frac{b}{a}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$ ,  $X_A = F\frac{b}{a}\cos\alpha$ ,  $Y_A = F\cos\alpha$ .



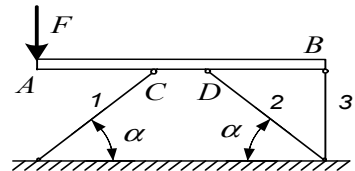
1.10. Балочка  $AB$  подвешена горизонтально на трех стержнях. Стержни перпендикулярны друг другу и  $AC = CB$ . Определить усилия в стержнях, возникающие от веса  $P$  груза, помещенного на конце балки.

Ответ:  $S_1 = -1,41P$ ,  $S_2 = 0,71P$ ,  $S_3 = 1,06P$ .



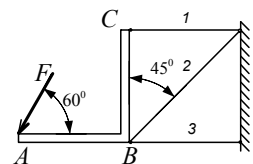
1.11. На горизонтальную балку  $AB$  действует вертикальная сила  $F$ . Балка удерживается тремя стержнями, причем  $AC = CD = DB$ . Определить усилия в стержнях.

Ответ:  $S_1 = S_2 = -\frac{F}{\sin \alpha}$ ,  $S_3 = F$ .



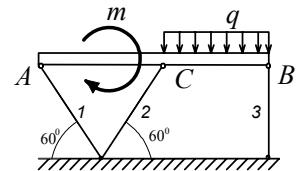
1.12. На уголок  $ABC$  действует сила  $F$ . Определить усилие в трех стержнях, удерживающих уголок. Уголок равносторонний и невесомый.

Ответ:  $S_1 = 0,866F$ ,  $S_2 = 1,22F$ ,  $S_3 = -1,23F$ .



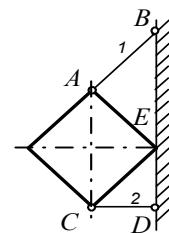
1.13. На горизонтальную балку  $AB=2a$  действуют распределенная нагрузка интенсивности  $q$  и пара сил с моментом  $m$ . Определить усилия в трех стержнях, удерживающих балку.

Ответ:  $S_1 = S_2 = 0,19\left(\frac{2m}{a} - qa\right)$ ,  $S_3 = -\frac{2}{3}\left(\frac{m}{a} + qa\right)$ .



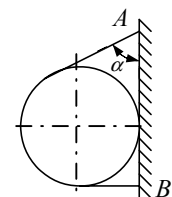
1.14. Квадратная плита весом  $P$  прикреплена к стене двумя стержнями  $AB$  и  $CD$  и упирается в нее углом  $E$ . Определить усилия в стержнях и давление плиты на стенку, если  $AB$  перпендикулярна стороне квадрата, а  $CD$  – горизонтальна.

Ответ:  $S_1 = P$ ,  $S_2 = P\sqrt{2}$ ,  $N = 2P$ .



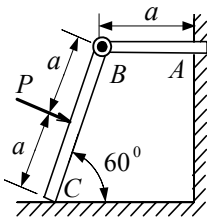
1.15. Цилиндр весом  $P$  вложен в плоскую ленту, прикрепленную к вертикальной плоскости в точках  $A$  и  $B$ . Определить натяжение ленты и давление на плоскость.

Ответ:  $S = \frac{P}{\cos \alpha}$ ,  $N = P \operatorname{ctg} \beta$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ .



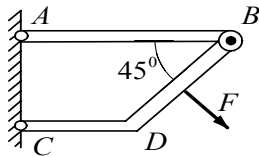
## 2. Равновесие системы тел

2.1. Найти реакции заделки  $A$ , давление балки  $BC$  на горизонтальную плоскость и реакции шарнира  $B$ , вызываемые силой  $P$ . Вес балок не учитывать.



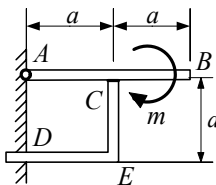
Ответ:  $X_A = X_B = 0,5P\sqrt{3}$ ,  $Y_A = Y_B = 0,5P$ ,  $N_C = P$ ,  $m_A = 0,5Pa$ .

2.2. Определить реакции в шарнирах  $A$ ,  $B$  и  $C$ , возникающие от силы  $F$ , приложенной перпендикулярно  $BD$  посередине её ( $AB = 3a$ ,  $CD = 2a$ ).



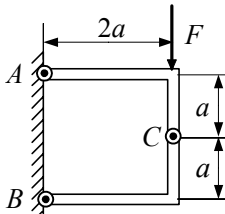
Ответ:  $X_A = X_B = 1,5F\sqrt{2}$ ,  $Y_A = Y_B = 0$ ,  
 $X_C = F\sqrt{2}$ ,  $Y_C = 0,5F\sqrt{2}$ .

2.3. Определить реакции заделки  $D$  и шарнира  $A$  конструкции, находящейся под действием пары с моментом  $m$ . Горизонтальная балка  $AB$  опирается серединой на уголок  $CED$ . Вес конструкции не учитывать.



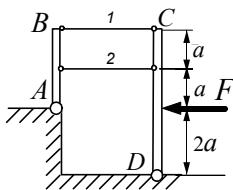
Ответ:  $X_A = X_D = 0$ ,  $m_D = m$ ,  $Y_A = Y_D = \frac{m}{a}$ .

2.4. Определить реакции в шарнирах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  симметричной конструкции, вызванные силой  $F$ . Вес конструкции не учитывать.



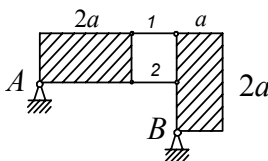
Ответ:  $X_A = X_B = X_C = F$ ,  $Y_A = Y_B = Y_C = 0,5F$ .

2.5. Две вертикальные балки соединены двумя стержнями и прикреплены шарнирами  $A$  и  $D$  к поверхности. Определить усилия в стержнях и реакции шарниров от силы  $F$ .



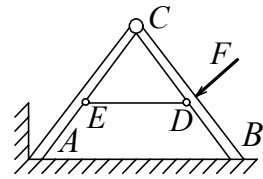
Ответ:  $S_1 = F$ ,  $S_2 = -2F$ ,  $X_A = F$ ,  $Y_A = Y_D = X_D = 0$ .

2.6. Два одинаковых прямоугольных тела весом  $P$  соединены двумя стержнями. Определить усилия в этих стержнях и реакции в шарнирах  $A$  и  $B$ .



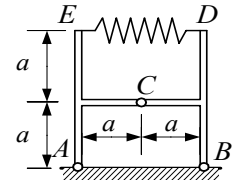
Ответ:  $S_1 = -P$ ,  $S_2 = 1,5P$ ,  $X_A = X_B = 1,5P$ ,  $Y_A = Y_B = P$ .

2.7. Две одинаковые балки, соединенные посередине стержнем  $ED$ , а наверху – шарниром  $C$ , поставлены на горизонтальную плоскость. На конструкцию действует сила  $F$  перпендикулярно  $BC$ . Определить реакции шарнира, плоскостей и стержня, если  $AB = AC = CB$ .



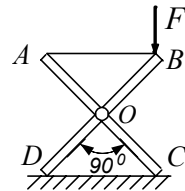
Ответ:  $X_C = F\frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $X_A = 0,5F\sqrt{3}$ ,  $Y_A = Y_C = 0,5F$ ,  $S = -2F\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $N_B = 0$ .

2.8. Определить реакции шарнирных опор  $A$  и  $B$ , шарнира  $C$  составной рамы, вызываемые пружиной, сила натяжения которой равна  $F$ .



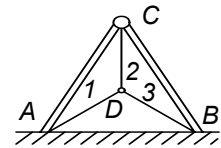
Ответ:  $X_A = X_B = F$ ,  $X_C = 2F$ ,  $Y_A = Y_B = Y_C = 0$ .

2.9. Две балки одинаковой длины соединены посередине шарниром  $O$ , нитью  $AB$  и поставлены на горизонтальную плоскость. Определить реакции шарнира  $O$  и натяжение нити. На балку  $BD$  действует сила  $F$ . Вес балок не учитывать.



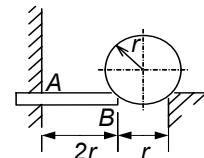
Ответ:  $Y_O = X_O = F$ ,  $S = F$ .

2.10. Две одинаковые балочки весом  $P$ , соединенные шарниром  $C$  и тремя стержнями равной длины, поставлены на горизонтальную плоскость ( $AB = AC = CB$ ). Определить усилия в стержнях.



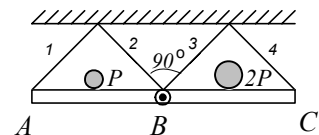
Ответ:  $S_1 = S_2 = S_3 = 0,5P$ .

2.11. Определить реакции заделки  $A$  в стене на конец балки, возникающие от веса  $P$  цилиндра.



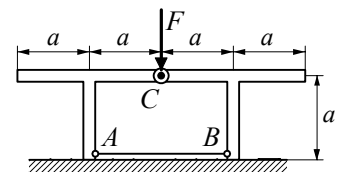
Ответ:  $X_A = 0,289P$ ,  $Y_A = 0,5P$ ,  $m_A = Pr$ .

2.12. Две одинаковые балочки, соединенные шарниром  $B$ , подвешены на четырех стержнях равной длины. Посередине балочек находятся грузы весом  $P$  и  $2P$ . Определить усилия в стержнях.



Ответ:  $S_1 = S_2 = 0,5P\sqrt{2}$ ,  $S_3 = S_4 = P\sqrt{2}$ .

2.13. Определить реакции шарнира  $C$  и усилие в стержне  $AB$ , вызванные действием силы  $F$ , приложенной к шарниру, соединяющему две Т-образные рамы.



Ответ:  $X_C = Y_C = S = 0,5F$ .

2.14. Определить давление шара на вертикальную и горизонтальную плоскости. Вес шара равен  $P$ , вес балки –  $2P$ , радиус шара –  $r$ , длина балки –  $4r$ .

Ответ:  $N_D = 0,46P$ ,  $N_C = 1,8P$ .

2.15. Определить давление балки  $AB$  на вертикальную и горизонтальную плоскости. Вес шара равен  $P$ , радиус шара –  $r$ , длина балки –  $4r$ . Вес балки не учитывать.

Ответ:  $N_A = P$ ,  $X_B = 0,42P$ ,  $Y_B = P$ .

2.16. К симметричной трехшарнирной арке приложены две пары сил с одинаковыми моментами  $m$ . Определить реакции шарниров  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Высота арки  $h$ . Вес арки не учитывать.

Ответ:  $R_A = R_B = R_C = \frac{m}{h}$ .

2.17. Определить давление подвижной опоры  $B$  на горизонтальную плоскость и конца  $A$  балки  $AB$  на стенку. Вес метра погонной длины балок –  $p$ . Длина балки  $CB$  равна  $a$  метров, угол  $\alpha = 30^\circ$ .

Ответ:  $R_B = 1,65pa$ ,  $N_A = pa$ .

2.18. Два одинаковых равноплечных уголка  $ACB$  и  $BCD$ , соединенные шарниром  $C$ , положены на опоры  $A$  и  $D$ . К шарниру подвешен груз  $P$ . Определить давление уголков друг на друга в точке  $B$ .

Ответ:  $N_B = 0,5P$ .

2.19. Определить давление частей составной конструкции друг на друга в точке  $D$  и реакции шарнира  $C$ . На правую часть конструкции действует вертикальная сила  $F$ .

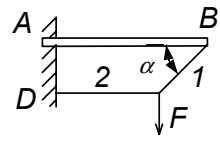
Ответ:  $N_D = X_C = 0,5F$ ,  $Y_C = 0,25F$ .

2.20. Определить реакции в шарнирах  $A$  и  $B$ , усилие в стержне  $CD$  и давление верхней части конструкции на нижнюю в точке  $E$ . Вес груза, поставленного на конструкцию, равен  $P$ .

Ответ:  $X_A = X_B = 2P \frac{a}{b}$ ,  $Y_A = P$ ,  $Y_B = 2P$ ,  $N_E = 4P$ ,  
 $S = 2P \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ .

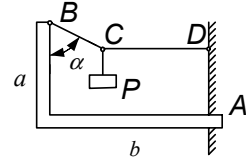
2.21. Определить реакции заделки  $A$  и усилия в стержнях 1 и 2, вызванные силой  $F$ . Длина балки  $AB$  равна  $l$ , вес ее не учитывать.

Ответ:  $X_A = S_Z = F \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $Y_A = F$ ,  $m_A = Fl$ ,  $S = \frac{F}{\sin \alpha}$ .



2.22. Определить реакции стены в точке  $A$  от груза весом  $P$ .

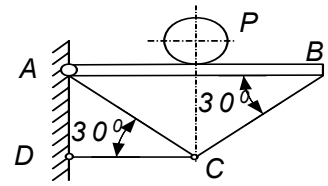
Ответ:  $X_A = P \operatorname{tg} \alpha$ ,  $Y_A = P$ ,  $m_A = P(b - a \operatorname{tg} \alpha)$ .



2.23. Определить реакции шарнира  $A$  и усилия в трех стержнях  $AC$ ,  $BC$  и  $DC$ , возникающие от веса груза  $P$ , положенного на середину балки  $AB$ .

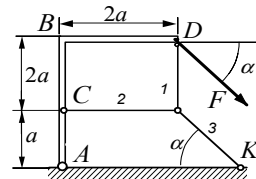
Ответ:  $X_A = S_{DC} = -2P$ ,  $Y_A = P$ ,

$$S_{AC} = -S_{BC} = 2P \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



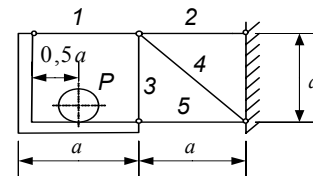
2.24. Определить реакции шарнира  $A$  и усилия в трех стержнях. На конструкцию в точке  $D$  действует сила  $F$  под углом  $\alpha = 45^\circ$ .

Ответ:  $X_A = Y_A = F \frac{\sqrt{2}}{3}$ ,  $S_3 = -\frac{5F}{3}$ ,  $S_1 = S_2 = -\frac{5\sqrt{2}F}{6}$ .



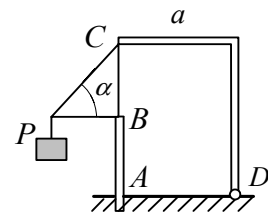
2.25. Определить усилия в пяти стержнях, возникающие от груза весом  $P$ .

Ответ:  $S_1 = 0,5P$ ,  $S_2 = 1,5P$ ,  $S_3 = P$ ,  
 $S_4 = -P\sqrt{2}$ ,  $S_5 = -0,5P$ .



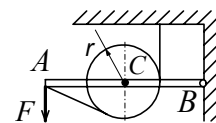
2.26. Определить реакции заделки  $A$  и шарнира  $D$  конструкции, вызываемые весом  $P$  груза, подвешенного на трех стержнях. Положить  $AB = AD = BC = a$ .

Ответ:  $X_A = X_D = P \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $Y_D = 2P \operatorname{ctg} \alpha$ ,  
 $Y_A = P(1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha)$ ,  $m_A = Pa \operatorname{ctg} \alpha$ .

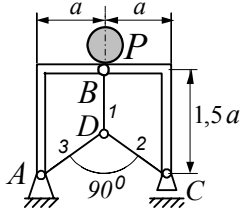


2.27. Определить натяжение нити и реакции шарниров  $B$  и  $C$ , возникающие от силы  $F$ , если  $AC = CB = 2r$ .

Ответ:  $X_B = 0$ ,  $Y_B = 3F$ ,  $X_C = 2F\sqrt{3}$ ,  $Y_C = 6F$ ,  $S = 4F$ .

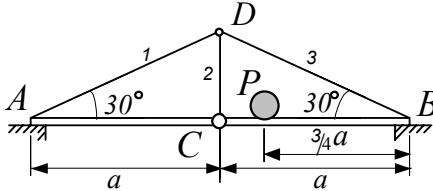


2.28. Определить усилия в трех стержнях, реакции шарнирных опор  $A$  и  $C$  составной конструкции. На верхний шарнир  $B$  положен груз весом  $P$ . Вес конструкции не учитывать.



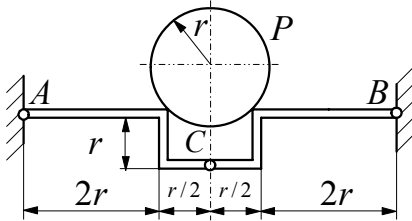
Ответ:  $X_A = 0$ ,  $Y_A = Y_C = 0,5P$ ,  $S_1 = 2P$ ,  $S_2 = S_3 = P\sqrt{2}$ .

2.29. Две одинаковые балки соединены шарниром  $C$  и тремя стержнями. Вся конструкция расположена на опорах  $A$  и  $B$ . На правой балке находится груз весом  $P$ . Определить усилия в стержнях, реакции шарнира и опор.



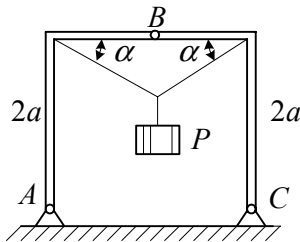
Ответ:  $N_A = 0,375P$ ,  $N_B = 0,625P$ ,  $X_C = 0,65P$ ,  $Y_C = 0$ ,  $S_1 = S_2 = -0,75P$ ,  $S_3 = 0,75P$ .

2.30. Шар поставлен на две одинаковые зигзагообразные балки  $AC$  и  $BC$ , соединенные между собой шарниром  $C$ . Шарниры  $A$  и  $B$  прикреплены к неподвижным поверхностям. Вес шара -  $P$ , вес балок не учитывать. Определить реакции шарниров.



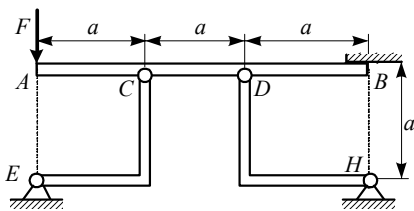
Ответ:  $X_A = X_B = 0,71P$ ,  $X_C = P$ ,  
 $Y_A = Y_B = 0,5P$ ,  $Y_C = 0$ .

2.31. К симметричной конструкции, состоящей из двух уголков, соединенных шарниром  $B$ , подвешен на двух нитях груз весом  $P$ . Определить реакции шарнира  $B$  и шарниров  $A$  и  $C$ , которыми прикреплена конструкция к неподвижной плоскости.



Ответ:  $X_B = P(0,25 - \text{ctg } \alpha)$ ,  $X_A = 0,25P$ ,  
 $X_C = 0,25P$ ,  $Y_A = Y_B = Y_C = 0,5P$ .

2.32. Определить давление балки  $AB$  на упор  $B$ , вызываемое силой  $F$ . В точках  $E, C, D$  и  $H$  - шарниры.



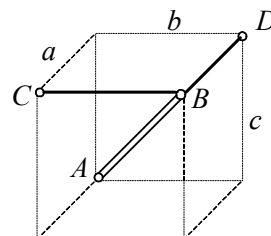
Ответ:  $N_B = F$ .

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### Силы, произвольно расположенные в пространстве

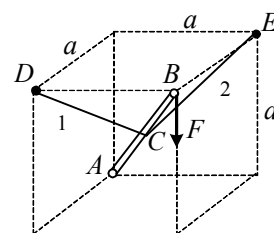
1. Балочка  $AB$  весом  $P$  удерживается шаровым шарниром  $A$  и двумя стержнями. Определить усилия в стержнях и реакции шарнира.

Ответ:  $Y_A = S_C = 0,5P \frac{b}{c}$ ,  $X_A = S_D = 0,5P \frac{a}{c}$ ,  $Z_A = P$ .



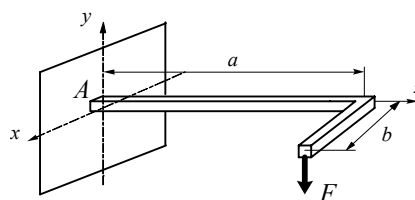
2. Балочка  $AB$  удерживается шаровым шарниром  $A$  и двумя стержнями 1 и 2, прикрепленными к ее середине в точке  $C$ . Определить реакции связей, возникающие от вертикальной силы  $F$ , приложенной к концу  $B$  балочки.

Ответ:  $X_A = Z_A = 0$ ,  $Y_A = F$ ,  
 $S_1 = S_2 = F\sqrt{3}$ .



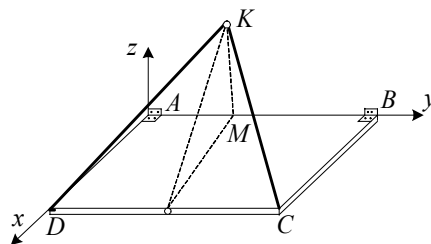
3. Определить реакции заделки  $A$  у Г-образной балки при действии на нее вертикальной силы  $F$ . Вес балки не учитывать.

Ответ:  $X_A = Z_A = 0$ ,  $Y_A = F$ ,  
 $m_x = Fa$ ,  $m_z = -Fb$ ,  $m_y = 0$ .



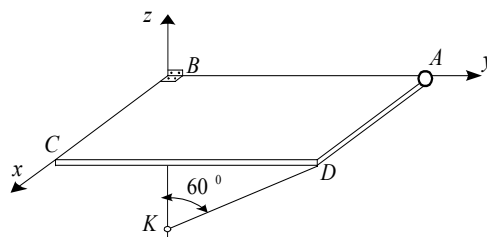
4. Прямоугольная плита удерживается в горизонтальном положении двумя стержнями  $KD$  и  $KC$  и шарнирами-петлями. Определить реакции связей, если вес плиты -  $P$ , а  $KD = KC = CD$  и  $KM = BC$ .

Ответ:  $X_A = X_B = Z_A = Z_B = 0,25P$ ,  
 $S_1 = S_2 = \frac{P}{\sqrt{6}}$ .

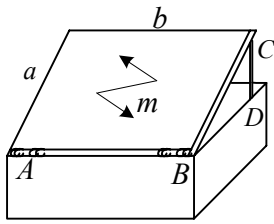


5. Однородная квадратная плита весом  $P$ , прикреплённая к стене, удерживается в горизонтальном положении стержнем  $DK$ . Определить усилие в стержне, реакции петли  $B$  и шарового шарнира  $A$ .

Ответ:  $X_A = Z_A = 0$ ,  $Z_B = 0,5P$ ,  
 $X_B = Y_A = 0,25P\sqrt{6}$ ,  $S = -P$ .



6. Определить реакции в петлях  $A$  и  $B$  и в вертикальном стержне  $CD$ , удерживающем крышку под углом  $\alpha$ , возникающие от пары сил с моментом  $m$ , действующей в плоскости крышки.

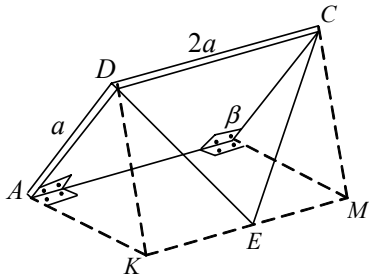


$$X_A = X_B = \frac{m}{b} \cos \alpha, \quad S = 0,$$

Ответ:

$$Z_A = Z_B = \frac{m}{b} \sin \alpha.$$

7. Прямоугольная плита весом  $P$  удерживается в наклонном положении двумя стержнями и двумя шарнирами (петлями). Определить реакции связей, полагая  $AD = DK = AK = KE = EM = a$ .

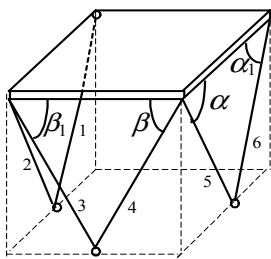


$$Y_A = Y_B = 0,072P,$$

Ответ:  $Z_A = Z_B = 0,375P,$

$$S_1 = S_2 = -0,2P.$$

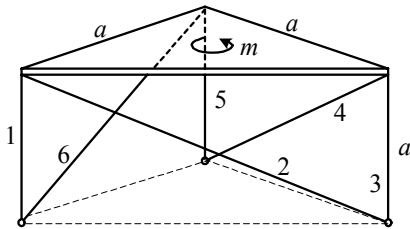
8. Прямоугольная плита удерживается в горизонтальном положении шестью стержнями. Определить усилия в этих стержнях. Вес плиты равен  $P$ .



Ответ:  $S_1 = S_2 = S_5 = S_6 = -\frac{P}{4 \sin \alpha},$

$$S_3 = S_4 = 0.$$

9. Треугольная равносторонняя плита установлена горизонтально на шести стержнях. Определить усилия в стержнях, возникающие от действия пары сил с моментом  $m$  в плоскости плиты.

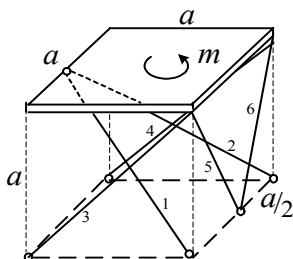


$$S_1 = S_3 = S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m}{a}$$

Ответ:

$$S_2 = S_4 = S_6 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m}{a}.$$

10. Горизонтальная квадратная плита удерживается шестью стержнями. На плиту действует пара сил с моментом  $m$ . Определить усилия в стержнях. Вес плиты не учитывать.

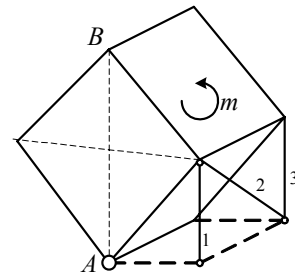


Ответ:

$$S_1 = -S_2 = -0,75 \frac{m}{a}, \quad S_3 = -S_4 = \frac{m\sqrt{2}}{2a}, \quad S_5 = -S_6 = -\frac{m\sqrt{5}}{4a}.$$

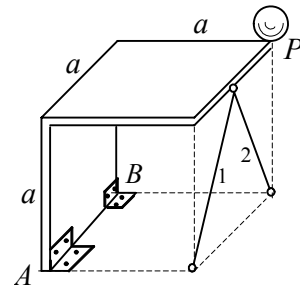


11. Куб со стороной  $a$ , поставленный так, что диагональ  $AB$  вертикальна, удерживается тремя стержнями и шаровой опорой  $A$ . Определить реакции связей при действии на куб пары сил с моментом  $m$ .



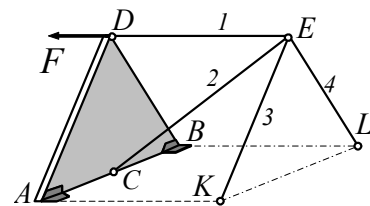
Ответ:  $X_A = \frac{m}{a}, Y_A = Z_A = 0,$   
 $S_1 = -\frac{m\sqrt{2}}{2a}, S_2 = -\frac{m}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}, S_3 = \frac{m\sqrt{2}}{a}.$

12. Прямоугольный уголок, составленный из плоскостей, удерживается двумя петлями  $A$  и  $B$  и двумя стержнями одинаковой длины. Определить реакции петель и усилия в стержнях, возникающие от груза весом  $P$ .



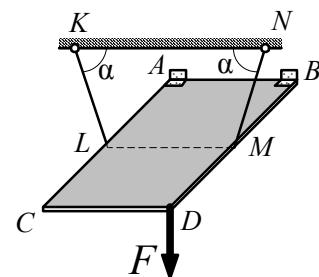
Ответ:  $Y_A = Y_B = 0, Z_A = Z_B = 0,5P,$   
 $S_1 = S_2 = -0,25P\sqrt{5}.$

13. Треугольная равносторонняя плита  $ADB$  установлена вертикально с помощью двух петель и четырёх стержней. Определить усилия в стержнях и реакции петель. На плиту действует сила  $F$  перпендикулярно плите. Известно, что  $AD = DB = AB = DE = AK = BL = KE = EL = KL$  и  $AC = CB$ .



Ответ:  $S_1 = F, S_2 = -0,5\sqrt{7}F, S_3 = S_4 = X_A = X_B = 0,5F,$   
 $Z_A = Z_B = 0,25\sqrt{3}F.$

14. Однородная прямоугольная плита  $ABDC$  удерживается в горизонтальном положении петлями  $A$  и  $B$  и нитью  $KLMN$  длиной  $3a$ , прикрепленной в точках  $K$  и  $N$  к потолку. Определить реакции петель и натяжение нити от вертикальной силы  $F$ , приложенной к углу  $D$  плиты. Известно, что  $DM = MB = CL = LA = a$  и  $KN = 2a$ .



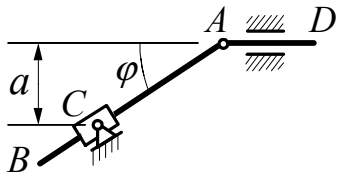
Ответ:  $X_A = X_B = Z_B = 0, Z_A = F, S = \frac{F}{\sin\alpha}.$

# КИНЕМАТИКА

## ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

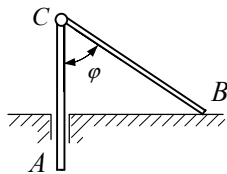
### 1. Скорость точек тела при плоском движении

1.1. Стержень  $AD$  скользит в горизонтальных направляющих со скоростью  $u$  и заставляет стержень  $AB$  двигаться внутри муфты  $C$  и поворачиваться вместе с ней. Определить угловую скорость стержня  $AB$ .



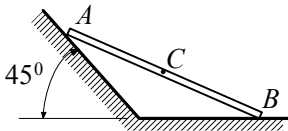
Ответ:  $\omega = \frac{u}{a} \sin^2 \varphi$ .

1.2. Стержень  $AC$  движется вниз в вертикальных направляющих со скоростью  $u$ . Определить как функцию угла  $\varphi$  угловую скорость стержня  $CB$ , вращающегося вокруг шарнира  $C$  и скользящего концом  $B$  по горизонтальной плоскости. Длина стержня  $CB$  равна  $a$ .



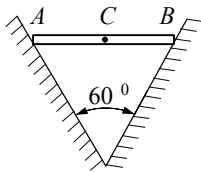
Ответ:  $\omega = \frac{u}{a \sin \varphi}$ .

1.3. Балочка скользит концами по двум плоскостям. Скорость точки  $B$  постоянна и равна  $u$ . Определить скорость точки  $A$  и середины балочки  $C$  в момент падения на горизонтальную плоскость.



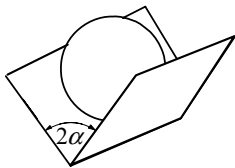
Ответ:  $v_A = u\sqrt{2}$ ,  $v_C = 0,5u\sqrt{5}$ .

1.4. Балочка скользит концами  $A$  и  $B$  по наклонным плоскостям так, что скорость точки  $A$  постоянна и равна  $u$ . Определить скорость середины балочки  $C$  и её угловую скорость в горизонтальном положении ( $AB = 2a$ ).



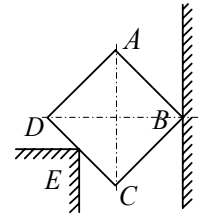
Ответ:  $v_C = 0,5u$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2a}u$ .

1.5. Шар катится по желобу, составленному из двух плоскостей. Скорость его центра –  $u$ . Определить скорости верхней и нижней точек шара.



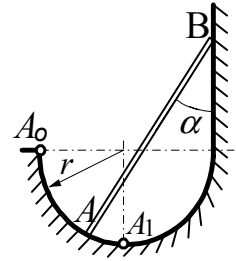
Ответ:  $v = u \left( \frac{1}{\sin \alpha} \pm 1 \right)$ .

1.6. Квадрат со стороной, равной  $a$ , своим углом  $B$  скользит со скоростью  $u$  по вертикальной стене, а стороной  $DC$  – по углу  $E$ . Определить угловую скорость квадрата и скорость его вершин в положении, когда диагональ  $DB$  горизонтальна и угол  $E$  делит  $DC$  пополам.



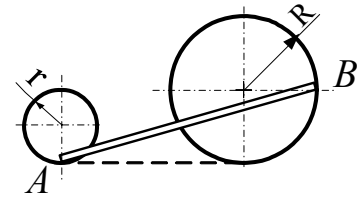
Ответ:  $v_A = v_B = v_C = v_D = u$ ,  $\omega = \frac{u}{a}\sqrt{2}$ .

1.7. Стержень  $AB$  длиной  $3r$  нижним концом  $A$  скользит со скоростью  $u$  по дуге окружности радиусом  $r$ . Определить скорости верхнего конца  $B$ , когда конец  $A$  будет находиться в положениях  $A_0$  и  $A_1$  и в момент, когда  $\alpha = 30^\circ$ .



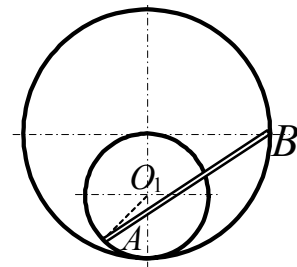
Ответ:  $v_0 = u$ ,  $v_1 = \frac{u}{2\sqrt{2}}$ ,  $v_3 = 0$ .

1.8. Стержень  $AB$  длиной  $l$  движется в плоскости так, что концы его скользят по двум неподвижным окружностям. Определить угловую скорость стержня и скорость конца  $B$  в указанном на рисунке положении, если скорость  $v_A = u$ .



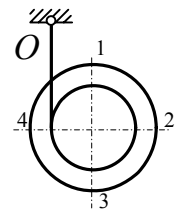
Ответ:  $\omega = \frac{u}{R}$ ,  $v_B = \frac{u}{R}\sqrt{l^2 - R^2}$ .

1.9. Прямой стержень  $AB$  скользит концами по неподвижным окружностям радиусами  $r$  и  $2r$ . Определить угловую скорость стержня и скорость его точки  $B$ , если в указанном на рисунке положении (радиус  $AO_1$  составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом),  $v_A = u$ .



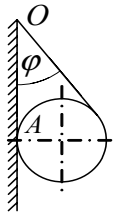
Ответ:  $\omega = \frac{u}{r(1+\sqrt{2})}$ ,  $v_B = \frac{u}{1+\sqrt{2}}$ .

1.10. Нить, намотанная на катушку, прикреплена к неподвижной точке  $O$ . Катушка движется вниз так, что скорость её центра вертикальна и равна  $v$ . Найти скорость точек 1, 2, 3 и 4. Радиус большого диска -  $R$ , радиус среднего цилиндра -  $r$ .



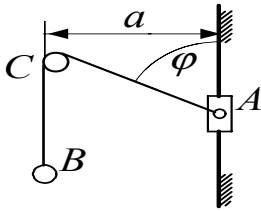
Ответ:  $v_1 = v_3 = v\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}}$ ,  $v_4 = v\left(\frac{R}{r} - 1\right)$ ,  $v_2 = v\left(1 + \frac{R}{r}\right)$ .

- 1.11. На цилиндр радиусом  $r$  намотана нить, прикрепленная концом  $O$  к стене. Цилиндр движется вниз, скользя по стене и вращаясь с угловой скоростью  $\omega$ . Определить скорость скольжения точки касания  $A$  по стене.



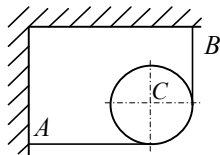
Ответ:  $v_A = r\omega \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ .

- 1.12. Конеч нити с грузом  $B$ , перекинутой через неподвижный блок  $C$ , движется со скоростью  $u$  вниз. Другим концом нить прикреплена к муфте  $A$  и движет ее по вертикальной прямой. Определить скорость муфты  $A$  и угловую скорость поворота нити на участке  $AC$ .



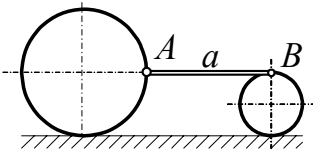
Ответ:  $v_A = \frac{u}{\cos\varphi}$ ,  $\omega = \frac{u}{a} \cdot \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi$ .

- 1.13. Цилиндр радиусом  $r$  катится с угловой скоростью  $\omega$  по нити, прикрепленной концами  $A$  и  $B$  к неподвижным поверхностям. Найти скорость центра  $C$  цилиндра в положении, когда один конец нити горизонтален, другой - вертикален.



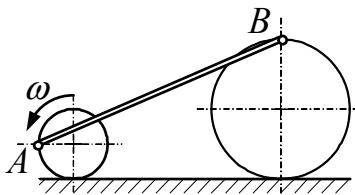
Ответ:  $v_C = r\omega\sqrt{2}$ .

- 1.14. Два колеса, соединенные шарнирами со стержнем  $AB$ , катятся без скольжения по плоскости. Угловая скорость малого колеса –  $\omega_1$ . Определить угловые скорости большого колеса  $\omega$  и стержня  $\omega_{AB}$  в момент, когда стержень  $AB$  горизонтален.



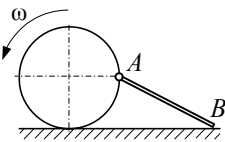
Ответ:  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega_{AB} = 2\frac{r}{a}\omega_1$ .

- 1.15. Малое колесо радиусом  $r$  катится с угловой скоростью  $\omega$  и заставляя с помощью стержня  $AB$  катиться большое колесо радиусом  $R$  в указанном на рисунке положении, полагая  $R = 2r$ ,  $AB = 5r$ .



Ответ:  $\omega_1 = 0,4375\omega$ .

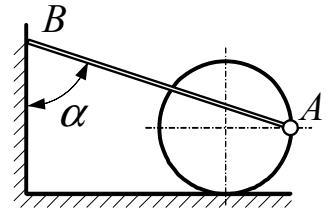
- 1.16. Колесо радиусом  $r$  катится по горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . К колесу шарниром прикреплен стержень  $AB$  длиной  $2r$ . Определить угловую скорость стержня и скорость скольжения конца  $B$  его по плоскости в положении, указанном на рисунке.



Ответ:  $\omega_{AB} = 0,577\omega$ ,  $v_B = 1,577 \cdot r\omega$ .

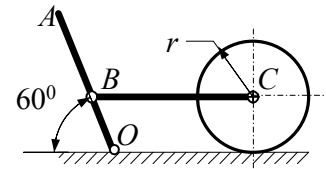
1.17. Колесо радиусом  $r$  катится по горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$  и заставляет стержень, прикрепленный к колесу шарниром  $A$ , скользить другим концом  $B$  по вертикальной стене. Определить скорость точки  $B$  в указанном положении.

Ответ:  $v_B = r\omega(1 + \operatorname{tg}\alpha)$ .



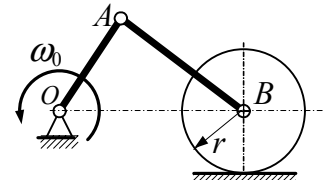
1.18. Стержень  $AO$ , вращаясь вокруг оси  $O$ , заставляет колесо катиться по плоскости. Определить скорость центра колеса в положении, при котором стержень  $BC$  горизонтален. Скорость конца  $A$  равна  $u$ , а  $AO = 3r$ .

Ответ:  $v_C = \frac{1}{3}u$ .



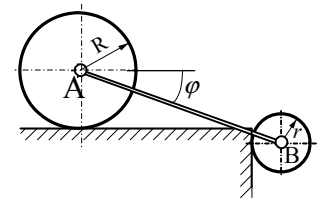
1.19. Кривошип  $AO$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  и с помощью шатуна  $AB$  заставляет колесо катиться по горизонтальной плоскости. Определить угловую скорость колеса в положении, когда кривошип перпендикулярен шатуну. Известно, что  $AO = 30\text{см}$ ,  $AB = 40\text{см}$ ,  $r = 25\text{см}$ .

Ответ:  $\omega = 1,5 \omega_0$ .



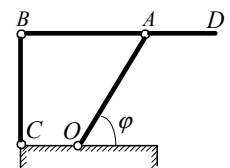
1.20. Два колеса, центры которых соединены стержнем  $AB$ , катятся по взаимно перпендикулярным плоскостям. Скорость  $v_A = u$ . Определить угловые скорости колес. Размеры указаны на рисунке.

Ответ:  $\omega_1 = \frac{u}{R}$ ,  $\omega_2 = \frac{u}{r} \operatorname{ctg}\varphi$ .



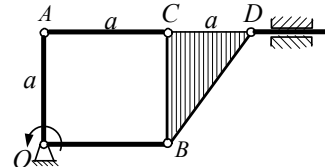
1.21. Определить скорость точки  $D$  звена  $BD$  механизма в тот момент, когда  $\varphi = 60^\circ$ , а звено  $BC$  будет перпендикулярно звену  $BD$ . Звено  $AO$  имеет угловую скорость  $\omega$ . Кроме того, известны размеры:  $AO = a$ ,  $AB = a$ ,  $BD = a\sqrt{3}$ .

Ответ:  $v_D = a\omega\sqrt{1,5}$ .

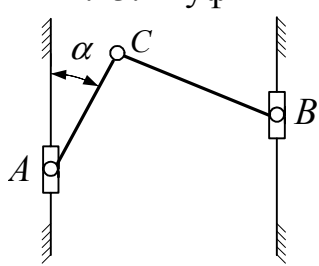


1.22. Стержень  $OA$  плоского механизма вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг  $O$ . Определить скорости всех обозначенных точек и угловые скорости всех звеньев механизма в указанном на чертеже положении.

Ответ:  $v_A = v_B = v_D = a\omega$ ,  $v_C = a\omega\sqrt{2}$ ,  
 $\omega_{AB} = \omega_{AC} = \omega_{BCD} = \omega$ .

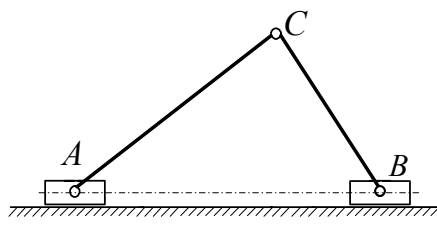


1.23. Муфты  $A$  и  $B$ , соединенные стержнями  $AC$  и  $CB$ , движутся вниз по параллельным прямым со скоростями  $v_A$  и  $v_B$  ( $v_A \neq v_B$ ). Определить скорость шарнира  $C$ , когда угол  $\alpha$  станет равным  $30^\circ$  и  $AC$  будет перпендикулярен  $CB$ .



Ответ:  $v_C = 0,5\sqrt{3v_A^2 + v_B^2}$ .

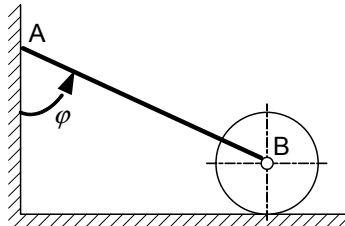
1.24. Ползуны  $A$  и  $B$  движутся влево по плоскости со скоростями  $v_A = u$  и  $v_B = 2u$ . Ползуны соединены шарнирами с двумя стержнями  $AC$  и  $CB$ . Определить скорость шарнира  $C$  и угловые скорости стержней в положении, когда  $\angle CAB = 30^\circ$ , а  $\angle ACB = 90^\circ$ . Известно, что  $CB = a$ .



Ответ:  $\omega_{AC} = \frac{u}{2a\sqrt{3}}$ ,  $\omega_{CB} = \frac{u}{a} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $v_C = \sqrt{1,15}u$ .

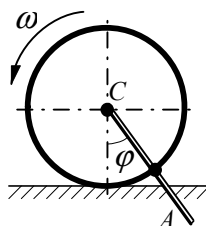
## 2. Ускорение точек тела при плоском движении

2.1. Стержень  $AB$  концом  $A$  скользит по вертикальной стене так, что  $\varphi = \varphi(t)$ , и заставляет колесо катиться по горизонтальному полу. Определить ускорение точек  $A$  и  $B$ . Длина  $AB = a$ .



Ответ:  $W_A = a(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi)$ ,  
 $W_B = a(\ddot{\varphi} \sin\varphi - \dot{\varphi}^2 \cos\varphi)$ .

2.2. Колесо радиусом  $r$  с жёстко прикрепленным к нему стержнем  $CA = 2r$  катится по горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти скорость и ускорение точки  $A$  стержня.



Ответ:  $v_A = r\omega\sqrt{5 - 4\cos\omega t}$ ,  $W_A = 2r\omega^2$ .

2.3. Используя условие задачи 1.2, определить ускорение точки  $B$  и угловое ускорение стержня  $CB$ , считая  $u = \text{const}$ .

Ответ:  $W_B = \frac{u^2}{a \sin^3 \varphi}$ ,  $\varepsilon = \frac{u^2 \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}$ .

2.4. Используя условия задачи 1.7, найти ускорение точки  $B$ , угловое ускорение и угловую скорость стержня при  $\alpha = 30^\circ$ , считая  $v_A = u = \text{const}$ .

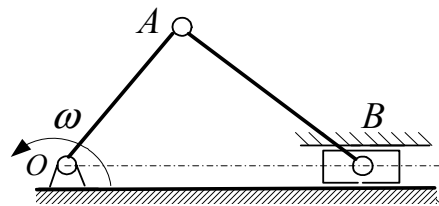
Ответ:  $W_B = \frac{4}{9}\sqrt{3}\frac{u^2}{r}$ ,  $\varepsilon = \frac{2}{27}\sqrt{3}\frac{u^2}{r^2}$ ,  $\omega = \frac{u}{r^2}$ .

2.5. Используя условие задачи 1.4, определить ускорение точки  $B$  и угловое ускорение балочки.

Ответ:  $W_A = a \left[ 2\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg}(\varphi - \frac{\pi}{4}) \right]$ ,  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ .

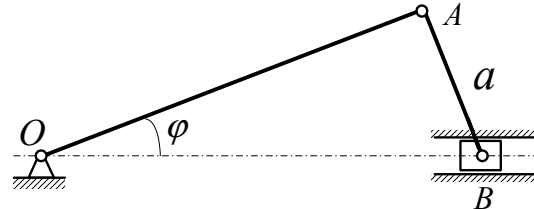
2.6. Длины кривошипа  $OA$  и шатуна  $AB$  одинаковы и равны  $a$ . Определить ускорение ползуна  $B$  как функцию расстояния  $OB = s$  и времени. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Ответ:  $W_B = s\omega^2 = 2a\omega^2 \cos\omega t$ .



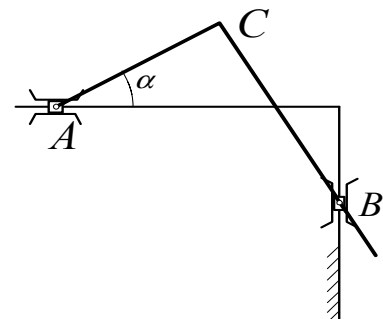
2.7. Поршень  $B$  движется с постоянной скоростью и шатуном  $AB$  вращает кривошип  $AO$  вокруг оси  $O$ . Определить угловые ускорения звеньев  $AO$  и  $AB$  в положении, когда они перпендикулярны друг другу и  $\varphi = 30^\circ$ .

Ответ:  $\varepsilon_{AO} = \frac{3u^2}{4a^2}$ ,  $\varepsilon_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{u^2}{a^2}$ .



2.8. Прямоугольный уголок  $ACB$  скользит прикрепленными к нему муфтами  $A$  и  $B$  по взаимно перпендикулярным прямым. Скорость конца  $A$  равна  $u = \text{const}$ . Определить ускорение муфты  $B$ , когда угол  $\alpha$  станет равным нулю ( $AC = a$ ,  $CB = b$ ).

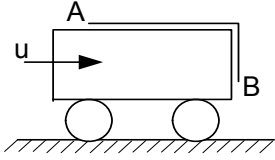
Ответ:  $W_B = \frac{a^2 + b^2}{b^3} u^2$ .



## СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

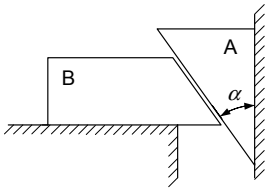
### 1. Сложение скоростей точки

1.1. Тележка движется со скоростью  $u$ . По кузову съезжает гибкая нить с такой же скоростью. Определить абсолютные скорости концов  $A$  и  $B$  нити.



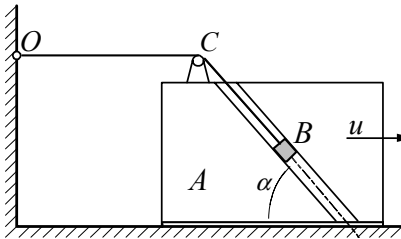
Ответ:  $v_A = 2u$ ,  $v_B = u\sqrt{2}$ .

1.2. Клин  $A$  опускается, скользя по вертикальной плоскости со скоростью  $v_A$ . Определить скорость клина  $B$ , движущегося по горизонтальной плоскости.



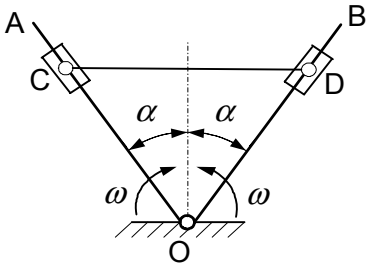
Ответ:  $v_B = v_A \operatorname{tg} \alpha$ .

1.3. Прямоугольное тело с наклонным цилиндрическим отверстием внутри движется со скоростью  $u$ . Определить абсолютную скорость поршня  $B$  внутри отверстия. К поршню прикреплена нить, перекинутая через блок  $C$  и привязанная к неподвижной стенке.



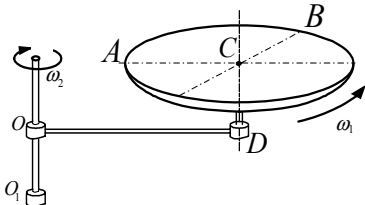
Ответ:  $v_B = 2u \sin \frac{\alpha}{2}$ .

1.4. Стержни вращаются вокруг оси  $O$  навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $\omega = \text{const}$ . Стержень  $CD = 2a$  с муфтами на концах, надетыми на стержни  $AO$  и  $BO$ , будет двигаться поступательно. Найти скорость его точек.



Ответ:  $v = \frac{a\omega}{\sin^2 \alpha}$ .

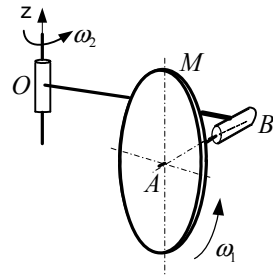
1.5. Диск радиусом  $r$  вращается вокруг вертикальной оси  $CD$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  и вместе с этой осью вращается вокруг неподвижной оси  $OO_1$  с угловой скоростью  $\omega_2 = \text{const}$ . Длина  $OD = 2r$ . Найти скорости точек  $A$  и  $B$ , расположенных на концах перпендикулярных диаметров.



Ответ:  $v_B = r\sqrt{4\omega_2^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}$ ,  $v_A = r(\omega_1 - \omega_2)$ .

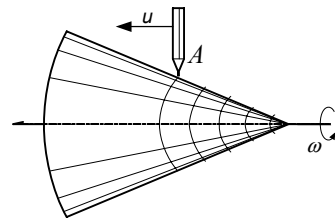


1.6. Диск радиусом  $r$  вращается вокруг горизонтальной оси  $AB$  с угловой скоростью  $\omega_1$  и вместе с ней вращается вокруг неподвижной вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_2$ . Определить скорость верхней точки  $M$  диска, если  $AB = a$ ,  $OB = b$ ,  $AB \perp OB$ .



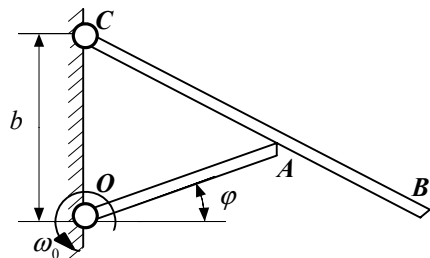
Ответ:  $v_M = \sqrt{(r\omega_1 - a\omega_2)^2 + b^2\omega_2^2}$ .

1.7. Карандаш  $A$  движется поступательно с постоянной скоростью  $u$  в плоскости, совпадающей с осью вращения конуса, и чертит на нем спираль, начиная от вершины. Определить относительную скорость карандаша. Конус вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Угол при вершине конуса равен  $2\alpha$ .



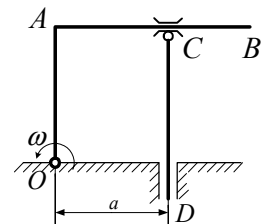
Ответ:  $v_r = \frac{u}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin^2 \alpha}$ .

1.8. Стержень  $OA = a$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси  $O$  и заставляет поворачиваться вокруг оси  $C$  стержень  $BC$ . Определить угловую скорость стержня  $BC$  как функцию угла  $\varphi$ .



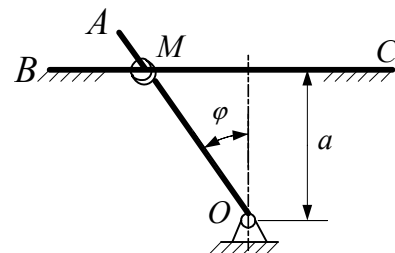
Ответ:  $\omega_{BC} = \frac{a(a - b \sin \varphi)}{a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi} \omega_0$ .

1.9. Уголок  $OAB$  с перпендикулярными сторонами вращается вокруг  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и заставляет стержень  $CD$  двигаться в вертикальных направляющих. Определить скорость точек стержня  $CD$  в момент, когда сторона  $OA = a$  будет вертикальна.

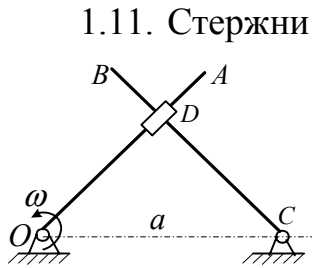


Ответ:  $v_C = a\omega$ .

1.10. Стержень  $OA$  вращается вокруг оси  $O$  и заставляет колечко  $M$ , надетое на него, скользить по неподвижному стержню  $BC$ . Определить абсолютную скорость колечка.

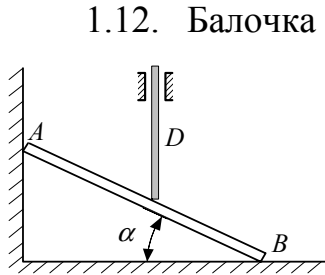


Ответ:  $v_M = \frac{a\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi}$ .



1.11. Стержни  $OA$  и  $BC$  пропущены через муфту  $D$  перпендикулярно друг другу. Звено  $OA$  вращается вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , звено  $BC$  – вокруг оси  $C$ . Определить скорость муфты  $D$  и угловую скорость звена  $BC$ , если  $OC = a$ .

Ответ:  $v_D = a\omega$ ,  $\omega_{BC} = \omega$ .

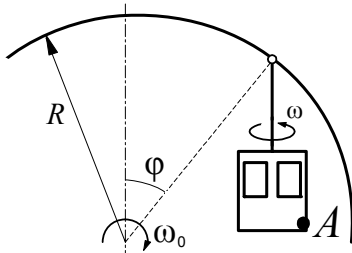


1.12. Балочка  $AB$  движется, скользя концами по взаимно перпендикулярным плоскостям. Точка  $B$  имеет скорость  $u$ . На балочку опирается штырь  $D$ , который скользит в вертикальных направляющих. Определить скорость штыря в момент, когда конец его будет на середине балочки.

Ответ:  $v = u \operatorname{ctg} \alpha$ .

## 2. Сложение ускорений точки

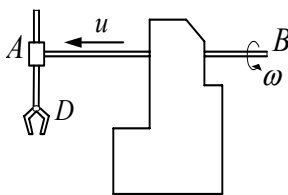
2.1. “Колесо обозрения” радиусом  $R$  вращается в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ .



Угловая скорость кабины вокруг вертикальной оси также постоянна и равна  $\omega$ . Найти ускорение точки  $A$  кабины, расположенной в одной плоскости с “колесом”. Радиус кабины –  $r$ .

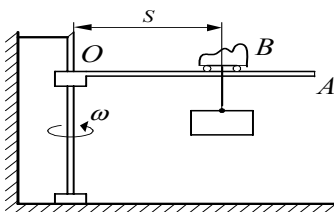
Ответ:  $W_A = \sqrt{r^2\omega^4 + R^2\omega_0^4 + 2rR\omega_0^2\omega^2\sin\varphi}$ .

2.2. Рука  $AB$  робота выдвигается со скоростью  $u = u(t)$  и в то же время вращается вокруг своей горизонтальной оси  $AB$  с угловой скоростью  $\omega = \omega(t)$ . Найти абсолютное ускорение схвата  $D$ , если  $s = AD = \text{const}$ .



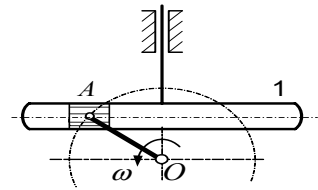
Ответ:  $W_D = \sqrt{\dot{u}^2 + s^2(\dot{\omega}^2 + \omega^4)}$ .

2.3. Стрела  $OA$  консольного крана вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. По стреле движется тележка  $B$  с грузом так, что  $OB = s = a(1 + \sin \omega t)$ . Определить абсолютное ускорение тележки.



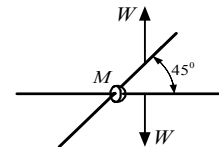
Ответ:  $W_B = a\omega^2\sqrt{5 + 4\sin\omega t}$ .

2.4. Найти ускорение поступательно движущейся кулисы 1, если кривошип  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и длина его равна  $a$ . В начале движения кривошип располагался вертикально.



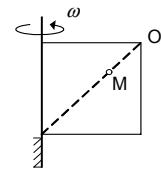
Ответ:  $W = a\omega^2 \cos \omega t$ .

2.5. Две прямые перемещаются поступательно в одной плоскости с одинаковыми ускорениями  $W$ . Определить абсолютное ускорение кольца  $M$ , надетого на эти прямые.



Ответ:  $W_M = W \sqrt{5}$ .

2.6. Точка  $M$  движется по диагонали квадрата со стороной  $a$  так, что  $OM = a\sqrt{2}t$ . Определить ускорение точки  $M$  при  $t = 1$ с. Квадрат вращается вокруг оси, проходящей по стороне с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ .

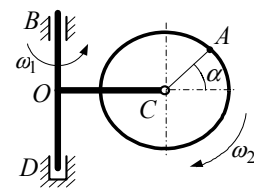


Ответ:  $W = 2a\omega$ .

2.7. Используя условие задачи 1.5, определить ускорение точек  $A$  и  $B$  диска.

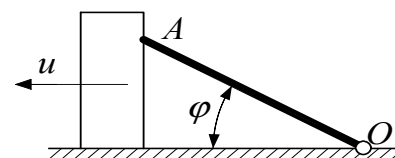
Ответ:  $W_A = (\omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2)r$ ,  $W_B = r\sqrt{4\omega_2^4 + (\omega_1 - \omega_2)^4}$ .

2.8. Диск радиусом  $r$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  в вертикальной плоскости вокруг оси  $C$ , которая также вращается вокруг вертикальной оси  $BD$  с угловой скоростью  $\omega_1 = 0,5\omega_2$ . Найти абсолютное ускорение точки  $A$  диска. Длина  $OC = 2r$ .



Ответ:  $W_A = r\omega_1^2 \sqrt{(2 + 5 \cos \alpha)^2 + 32 \sin^2 \alpha}$ .

2.9. Прямоугольник скользит по плоскости с постоянной скоростью  $u$ , а прислоненный к нему стержень  $OA$  поворачивается вокруг шарнира  $O$ . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.



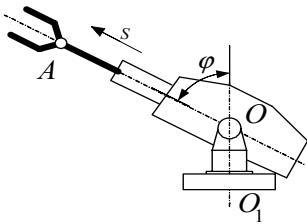
Ответ:  $\omega = \frac{u}{a \sin \varphi}$ ,  $\varepsilon = \frac{u^2 \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}$ .

2.10. Используя условие задачи 1.6, определить ускорение точки  $M$ , полагая  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\omega_2 = \text{const}$ .

Ответ:  $W_M = \sqrt{r^2 \omega_1^4 + b^2 \omega_2^4 + \omega_2^2 (2r\omega_1 - a\omega_2)^2}$ .

2.11. В задаче 1.10 определить ускорение колечка  $M$ .

Ответ:  $W_M = \frac{a(\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \text{tg}\varphi)}{\cos^2 \varphi}$ .

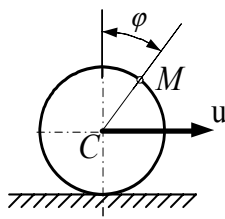


2.12. Рука робота вращается вокруг горизонтальной оси  $O$  так, что  $\varphi = \varphi(t)$ . В то же время она выдвигается по закону  $AO = s = s(t)$ . Определить абсолютное ускорение точки  $A$  оси схвата.

Ответ:  $W_A = \sqrt{(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2)^2 + (s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi})^2}$ .

2.13. Рука робота (см. рис. к задаче 2.12) вращается вокруг вертикальной оси  $OO_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  и выдвигается по закону  $AO = s = s(t)$ . Определить абсолютное ускорение точки  $A$  при  $\varphi = \text{const}$ .

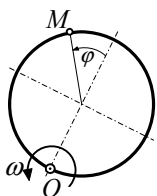
Ответ:  $W_A = \sqrt{[4\dot{s}^2 \omega_0^2 + (s\omega_0^2 - \ddot{s})^2] \cdot \sin^2 \varphi + \dot{s}^2 \cos^2 \varphi}$ .



2.14. Колесо радиусом  $r$  катится без скольжения по плоскости с постоянной скоростью центра, равной  $u$ . С такой же скоростью и в том же направлении по ободу колеса движется точка  $M$ . Найти ее абсолютные скорость и ускорение в зависимости от положения точки, определяемого углом  $\varphi$ .

Ответ:  $v = u\sqrt{1 + 8 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ ,  $W = 4\frac{u^2}{r}$ .

2.15. Диск радиусом  $r$  вращается в плоскости вокруг оси  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . По ободу диска движется точка  $M$  так, что  $\varphi = \varphi(t)$ . Определить переносное, относительное и кориолисово ускорения точки  $M$ .



Ответ:  $W_e = 2r\omega^2 \cos \frac{\varphi}{2}$ ,  $W_k = 2r\omega\dot{\varphi}$ ,  $W_r = r\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$ .

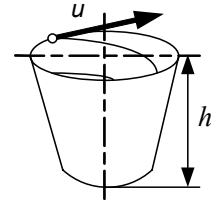
# ДИНАМИКА

---

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

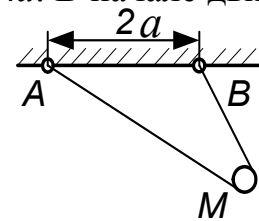
1. Точке сообщили горизонтальную скорость  $u$ , и она стала опускаться по поверхности конуса, описывая спираль. Какова будет скорость точки на дне конуса?

Ответ:  $v = \sqrt{2gh + u^2}$ .



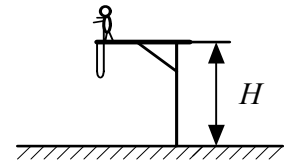
2. Тяжёлое колечко  $M$  надето на нить  $AB$  длиной  $4a$ . В начале движения колечко находилось на прямой  $AB$ . Определить его скорость в самом нижнем положении, предполагая, что нить всё время остаётся натянутой.

Ответ:  $v = \sqrt{2ag\sqrt{3}}$ .



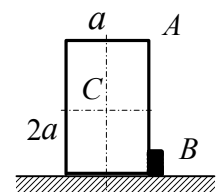
3. Какова должна быть жёсткость резинового жгута, привязанного к спортсмену, чтобы у поверхности земли скорость прыгнувшего спортсмена была равна нулю? Длина жгута  $-l$ , вес спортсмена  $-P$ .

Ответ:  $c = \frac{2PH}{(H-l)^2}$ .



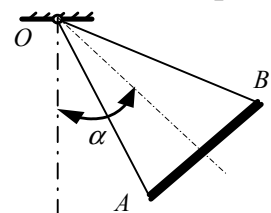
4. Какую минимальную скорость надо сообщить точке  $A$  прямоугольного тела, чтобы оно опрокинулось, вращаясь вокруг упора  $B$ ?  $C$  какой скоростью точка  $A$  ударится об пол? Момент инерции тела  $J_C = \frac{5}{12}ma^2$ .

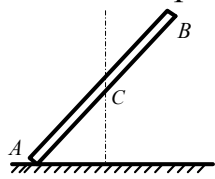
Ответ:  $v_{min} = \sqrt{2,4(\sqrt{5} - 2)ag}$ ,  $v = \sqrt{2,4(\sqrt{5} - 1)ag}$ .



5. Какую угловую скорость надо сообщить качелям в положении равновесия, чтобы они отклонились на угол  $\alpha$ ? Вес доски  $AB$  равен  $P$ , длина её  $2l$ , длина верёвок  $OA$  и  $OB$  одинакова и равна  $3l$ .

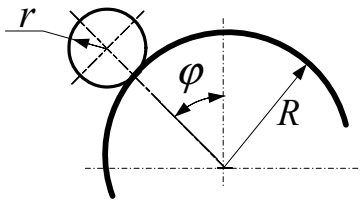
Ответ:  $\omega = \sqrt{0,48\sqrt{2} \frac{g}{l} (1 - \cos\alpha)}$ .





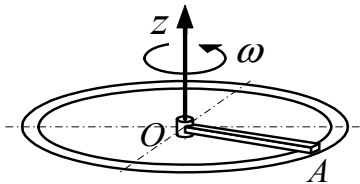
6. Стержень  $AB = l$  падает из вертикального положения, скользя концом  $A$  по горизонтальной гладкой плоскости. Определить скорость конца  $B$  в момент падения на плоскость. Центр масс стержня, точка  $C$ , движется по вертикали.

Ответ:  $v = \sqrt{3gl}$ .



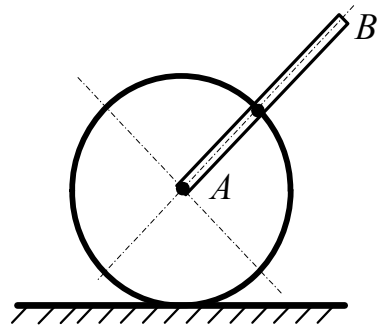
7. Шар скатывается без скольжения по цилиндрической поверхности. Определить его угловую скорость как функцию угла  $\varphi$ .

Ответ:  $\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10}{7}(R+r)(1-\cos\varphi)g}$ .



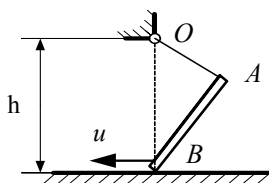
8. Горизонтальный стержень  $OA$  может вращаться вокруг вертикальной оси  $Oz$ , скользя концом  $A$  по неподвижному кольцу. Вес стержня –  $P$ , длина –  $l$ , коэффициент трения скольжения стержня по кольцу –  $f$ . Сколько оборотов до остановки сделает стержень, если в начальный момент ему сообщить угловую скорость  $\omega$ ?

Ответ:  $n = \frac{\omega^2 l}{6\pi g f}$ .



9. Однородный диск с прикреплённым к нему стержнем  $AB$  движется, перекатываясь без скольжения по горизонтальной плоскости. Определить скорость конца  $B$  стержня в момент удара его о плоскость. В начале движения стержень был вертикален и неподвижен. Вес диска и стержня одинаковы. Длина стержня равна двум радиусам диска  $r$ .

Ответ:  $v_B = \sqrt{\frac{54}{17}} gr$ .

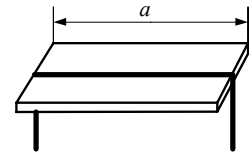


10. Концу  $B$  балочки  $AB$ , скользящему по горизонтальной плоскости, сообщили скорость  $u$  в указанном на рисунке положении. Определить скорость конца  $B$  в момент, когда стержень  $OA$  станет вертикальным. Известно, что  $h = 50$  см,  $OA = 30$  см,  $AB = 40$  см.

Ответ:  $v_B = \sqrt{12g + 0,573u^2}$ .

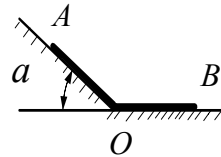
11. На горизонтальной полке шириной  $a$  неподвижно висит тяжёлая нить. Затем она начинает скользить вправо. Определить скорость нити в момент, когда её левый конец покинет полку. Длина нити  $l = 3a$ .

Ответ:  $v = \sqrt{\frac{7}{3}ga}$ .



12. Однородная тяжёлая нить длиной  $l$  спускается, скользя по гладким плоскостям. В начальный момент скорость нити была равна нулю и конец  $B$  находился в точке  $O$ . Определить скорость нити в момент, когда в точке  $O$  окажется конец  $A$ .

Ответ:  $v = \sqrt{gl\sin\alpha}$ .

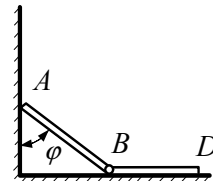


13. К задним колёсам автомобиля приложена пара сил с постоянным моментом  $M$ . Вес автомобиля –  $G$ , вес каждого из четырёх колёс –  $P$ , радиус –  $r$ . Колёса считать однородными дисками. Определить, на каком пройденном расстоянии  $s$  скорость автомобиля станет равной  $v$ ?

Ответ:  $s = \frac{1}{2gM}(6P + G)rv^2$ .

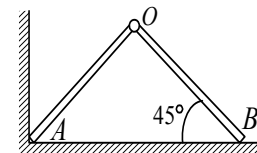
14. Две одинаковые балочки длиной  $l$  движутся из указанного положения под действием веса так, что точка  $A$  всё время скользит по вертикальной стене. Определить скорость точки  $A$  в момент падения её на горизонтальную плоскость. В начале движения система была неподвижной.

Ответ:  $v = \sqrt{3gl\cos\varphi}$ .



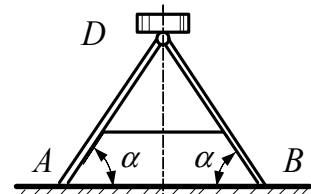
15. Два одинаковых стержня соединены шарниром  $O$ . Конец  $B$  скользит по горизонтальной плоскости. Определить угловую скорость стержня  $OA$  в момент, когда он упадёт на плоскость. Движение началось из положения, показанного на рисунке. Длина стержней –  $l$ , масса –  $m$ .

Ответ:  $\omega = \sqrt{1,5\sqrt{2}\frac{g}{l}}$ .

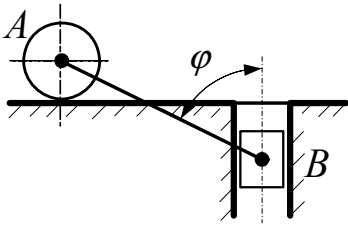


16. Две одинаковые балочки  $AD$  и  $DB$  соединены шарниром  $D$  и нитью. На шарнире укреплён груз весом  $P$ . После обрыва нити балочки начали падать, скользя концами по горизонтальной плоскости (шарнир  $D$  движется по вертикали). Определить скорость груза в момент падения на плоскость. Вес балочек –  $P$ , длина –  $l$ .

Ответ:  $v_D = \sqrt{2,4gl\sin\alpha}$ .

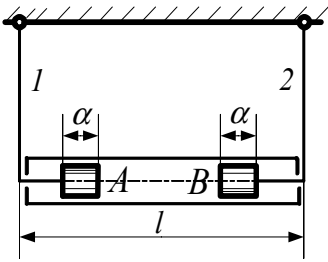


17. Центру цилиндра  $A$ , когда он находился над вертикальным пазом, в котором находится поршень  $B$ , сообщили горизонтальную скорость  $u$ . Определить скорость поршня  $B$  в зависимости от угла  $\varphi$ . Вес цилиндра и поршня одинаков, длина стержня  $AB$  равна  $l$ .



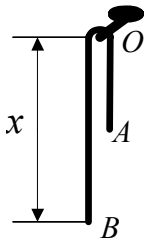
Ответ:  $v_B^2 = \frac{3u^2 - 4l(1 - \cos\varphi)g}{2 + 3\text{ctg}^2\varphi}$ .

18. Трубка с двумя одинаковыми поршнями  $A$  и  $B$  движется вниз под действием веса, а поршни разъезжаются с помощью нитей 1 и 2. Определить скорость трубки в момент, когда поршни упрутся в её торцы. В начале движения поршни были посередине трубки и касались друг друга. Масса трубки –  $M$ , поршня –  $m$ .



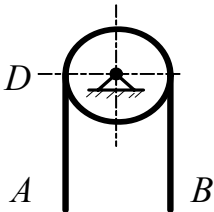
Ответ:  $v = \sqrt{\frac{M + 2m}{M + 4m}}(l - 2a)g$ .

19. Тяжёлая однородная нить длиной  $l$ , сложенная вдвое, висела неподвижно на гвозде  $O$ . В результате малых возмущений нить стала съезжать с гвоздя. Определить её скорость как функцию длины  $x$ .



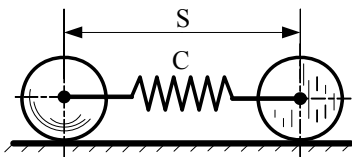
Ответ:  $v = (2x - l)\sqrt{\frac{g}{2l}}$ .

20. Тяжёлая однородная нить весом  $P$  и длиной  $l$  перекинута через блок, вес которого  $2P$  и радиус  $r$ . Определить скорость нити в момент, когда конец  $A$  поднимется до точки  $D$ . Вначале система была неподвижна.



Ответ:  $v = 0,5(l - \pi r)\sqrt{\frac{g}{l}}$ .

21. Какова зависимость между угловыми скоростями шара и цилиндра,  $\omega_{\text{ш}}$  и  $\omega_{\text{ц}}$ , в момент встречи? В начале движения они были неподвижными и расстояние между центрами было равно  $s$ . Вес и радиус их одинаковы –  $P$  и  $r$ . Жесткость пружины –  $c$ .

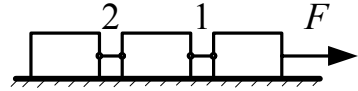


Ответ:  $1,5\omega_{\text{ц}}^2 = \frac{cg}{P}\left(4 - \frac{s^2}{r^2}\right) - 1,4\omega_{\text{ш}}^2$ .



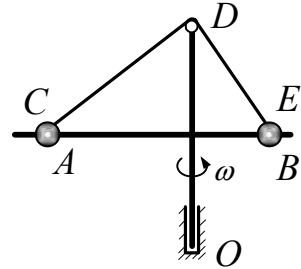
## ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1. Три одинаковых тела, связанные нитями, движутся по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы  $F$ . Определить натяжение нитей. Вес каждого тела -  $P$ .



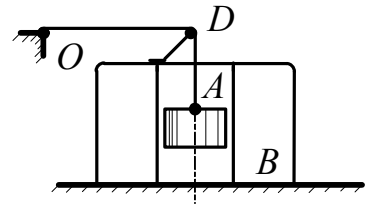
Ответ:  $S_1 = \frac{1}{3}F$ ,  $S_2 = \frac{1}{3}F$ .

2. Шарики  $A$  и  $B$  весом  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, надетые на горизонтальный стержень  $CE$ , связаны нитью, перекинутой через блок  $D$ . Определить натяжение нити при установившемся равновесии. Длина нити -  $l$ . Вся конструкция вращается вокруг вертикальной оси  $OD$  с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ .



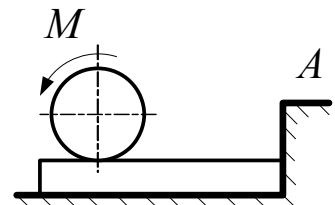
Ответ:  $S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} \frac{l \omega^2}{g}$ .

3. В теле  $B$  сделан вертикальный канал, в котором спускается поршень  $A$ , укрепленный на нити  $ODA$ , перекинутой через блок  $D$ . Тело  $B$  при этом скользит по горизонтальной плоскости. Определить натяжение нити, если вес поршня -  $P$ , тела -  $G$ .



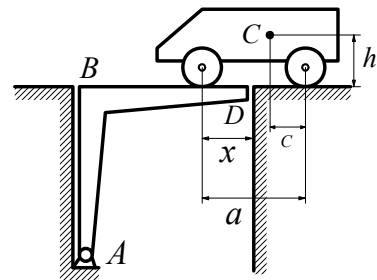
Ответ:  $S = \frac{P(P + G)}{G + 2P}$ .

4. Плита лежит на горизонтальной гладкой плоскости. По ней катится без скольжения цилиндр под действием пары с постоянным моментом  $M$ . Вес цилиндра -  $P$ , радиус -  $r$ . Найти давление плиты на выступ  $A$ .



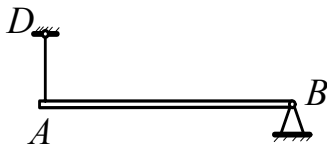
Ответ:  $N = \frac{2}{3} \frac{M}{r}$ .

5. Автомобиль весом  $P$  въезжает на мост с ускорением  $W$ . Определить дополнительное давление от автомобиля на опору  $D$  в зависимости от расстояния  $x$ , если  $AB = BD = l$ .



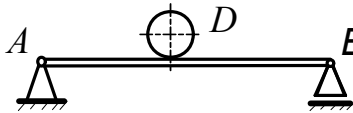
Ответ:  $N = P \frac{cg - hW}{ag} (l - x)$ .

6. Определить реакцию шарнира  $B$  в момент обрыва вертикальной нити  $AD$ , удерживающей балочку  $AB$  в горизонтальном положении. Вес балочки равен  $P$ .



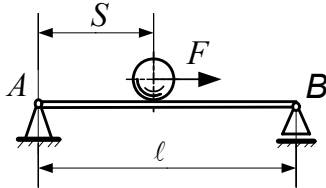
Ответ:  $R_B = 0,25P$ .

7. Тело  $D$  лежит посередине балочки, опирающейся на две шарнирные опоры. Определить давление тела на балочку в момент удаления одной из опор. Вес тела и балочки одинаков и равен  $P$ .



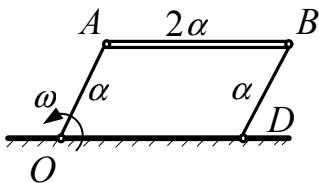
Ответ:  $N = \frac{1}{7}P$ .

8. Шар весом  $P$  катится по балке под действием силы  $F$ . Определить реакции опор как функцию расстояния  $s$ .



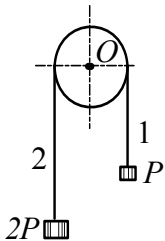
Ответ:  $X_A = \frac{2}{7}F$ ,  $Y_A = P(1 - \frac{s}{l})$ ,  $Y_B = P\frac{s}{l}$ .

9. Механизм  $OABD$  движется в горизонтальной плоскости, звено  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить усилие в стержне  $BD$ . Учитывать лишь массу звена  $AB$ , равную  $m$ .



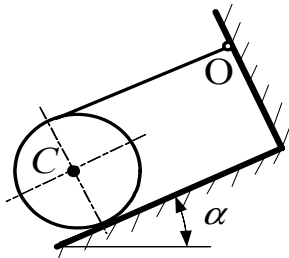
Ответ:  $S = 0,5ma\omega^2$ .

10. Нить, к концам которой прикреплены грузы весом  $P$  и  $2P$ , переброшена через блок. Определить натяжение нити слева и справа и реакции оси  $O$ . Вес блока –  $P$ .



Ответ:  $S_1 = \frac{9}{7}P$ ,  $S_2 = \frac{10}{7}P$ ,  $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = \frac{26}{7}P$ .

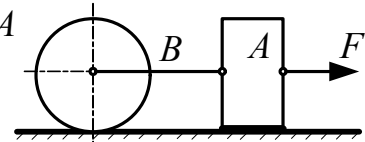
11. Определить натяжение нити, намотанной на цилиндр и прикрепленной другим концом к точке  $O$ . Вес цилиндра –  $P$ , радиус –  $R$ . Цилиндр, вращаясь, скользит без трения по наклонной плоскости.



Ответ:  $S = \frac{1}{3}P \sin \alpha$ .

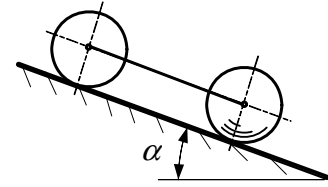
12. Определить натяжение нити, связывающей два тела одинакового веса. Цилиндр  $B$  катится без скольжения. К телу  $A$  приложена сила  $F$ .

Ответ:  $S = 0,6F$ .



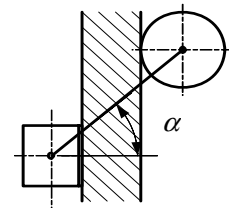
13. Цилиндр и шар с одинаковыми радиусами, соединённые стержнем, скатываются без скольжения по наклонной плоскости. Вес тел одинаков, равен  $P$ . Определить усилие в стержне.

Ответ:  $S = \frac{1}{29} P \sin \alpha$ .



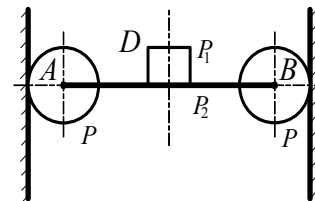
14. Кубик скользит без трения, а цилиндр катится без скольжения по вертикальной плоскости. Определить усилие в стержне, соединяющем центры масс этих тел. Вес тел одинаков, равен  $P$ .

Ответ:  $S = 0,2 \frac{P}{\sin \alpha}$ .



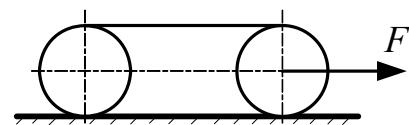
15. У платформы  $AB$  имеются два цилиндрических колеса весом  $P$ , которые катятся без скольжения по вертикальным прямым. Посередине платформы установлен груз  $D$ , вес которого  $P_1$ . Определить его давление на платформу при движении системы вниз под действием веса. Платформа весом  $P_2$  опускается горизонтально.

Ответ:  $N = \frac{P_1 P_2}{(3P + P_1 + P_2)}$ .



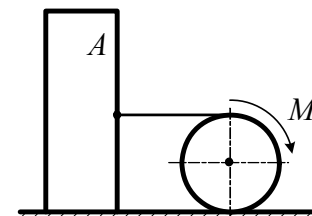
16. Два цилиндра одинаковой массы, соединённые намотанной на них нитью, катятся по плоскости под действием силы  $F$ . Определить натяжение нити.

Ответ:  $S = 0,25F$ .

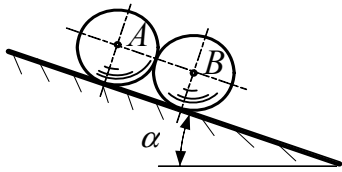


17. Цилиндр катится под действием пары с моментом  $M$  и заставляет с помощью нити, намотанной на него, скользить тело  $A$  по горизонтальной плоскости. Определить натяжение нити. Вес тела  $A$  равен  $G$ , вес цилиндра —  $P$ , радиус —  $r$ , коэффициент трения скольжения —  $f$ .

Ответ:  $S = \frac{3Prf + 4M}{(3P + 8G)r} G$ .

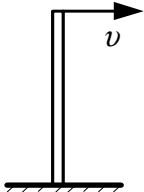


18. Стальной шар  $A$  и деревянный  $B$  с одинаковыми радиусами скатываются по наклонной плоскости. Определить их давление друг на друга. Трение в точке касания не учитывать.



Ответ:  $N=0$ .

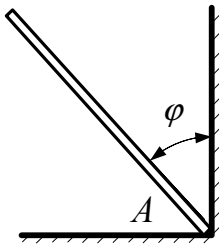
19. Верхнему концу стержня, поставленного вертикально, сообщили скорость  $v$ . Определить давление стержня на плоскость в начале движения. Вес стержня  $-P$ , длина  $-l$ .



Ответ:  $N = P(1 - \frac{v^2}{lg})$ .

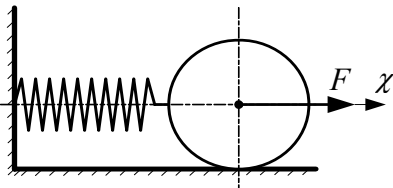
### ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА

1. Определить угловое ускорение балочки, которая падает из вертикального положения, вращаясь вокруг конца  $A$ , как функцию угла  $\varphi$ . Вес и длина балочки известны.



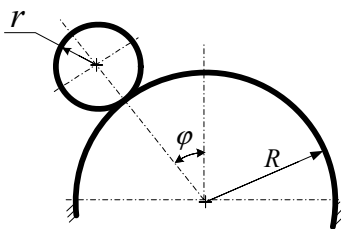
Ответ:  $\varepsilon = \frac{3g}{2l} \sin\varphi$ .

2. Составить дифференциальное уравнение движения цилиндра, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости под действием переменной силы  $F=F(t)$ . Жёсткость пружины  $-c$ , вес цилиндра  $-P$ .



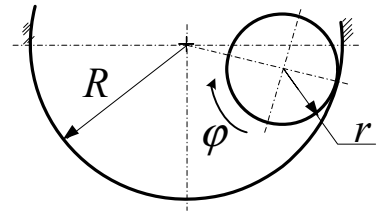
Ответ:  $\ddot{x} + k^2 x = \frac{2g}{3P} F$ ,  $k^2 = \frac{2cg}{3P}$ .

3. Составить дифференциальное уравнение движения цилиндра, который скатывается без скольжения по неподвижной цилиндрической поверхности.



Ответ:  $\ddot{\varphi} - \frac{2g}{3(R+r)} \sin\varphi = 0$ .

4. Составить дифференциальное уравнение движения цилиндра при качении без скольжения внутри цилиндрической поверхности. Обобщённой координатой назначить угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

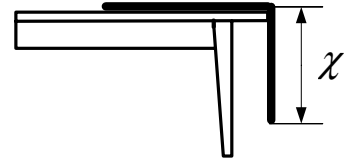


Ответ:  $\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3r} \sin\left(\frac{r}{R-r}\varphi\right) = 0$ .

5. Составить дифференциальное уравнение движения нити, используя условие задачи 19, с. 104.

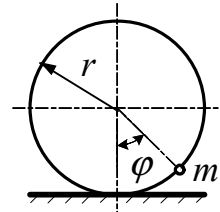
Ответ:  $\ddot{x} - 2\frac{g}{l}x + g = 0$ .

6. Составить дифференциальное уравнение движения тяжёлой нити, съезжающей с гладкой горизонтальной поверхности стола. Длина нити -  $l$ .



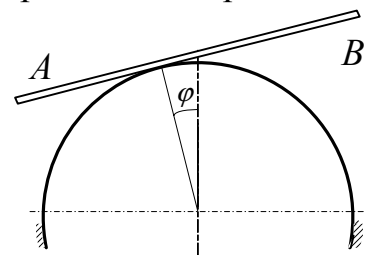
Ответ:  $\ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0$ .

7. Невесомый обруч катается без скольжения по горизонтальной плоскости. На обруче укреплена тяжёлая точка  $m$ . Составить дифференциальное уравнение движения обруча.



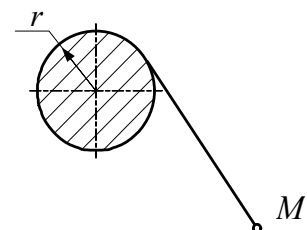
Ответ:  $2\ddot{\varphi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} = 0$ .

8. Составить дифференциальное уравнение вращения стержня  $AB$ , качающегося на цилиндрической поверхности радиусом  $r$ . Длина стержня равна  $l$ . В положении равновесия стержень расположен горизонтально.



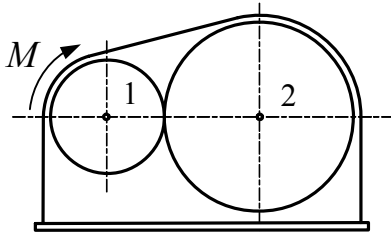
Ответ:  $\left(\frac{1}{12}l^2 + r^2\varphi^2\right)\ddot{\varphi} + r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + gr\varphi \cos\varphi = 0$ .

9. Составить дифференциальное уравнение колебаний материальной точки  $M$  на нити, намотанной на неподвижный цилиндр. В положении равновесия свешивается нить длиной  $l$ .



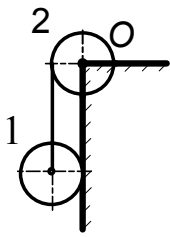
Ответ:  $(l + r\varphi)\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi}^2 + g \sin\varphi = 0$ .

10. К малому колесу редуктора приложена пара сил с моментом  $M$ . Определить угловое ускорение большого колеса. Вес и радиус колёс равны соответственно  $P_1, P_2, r_1, r_2$ .



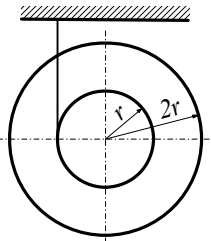
Ответ:  $\varepsilon_2 = \frac{2M}{r_1 r_2 (P_1 + P_2)} g$ .

11. Цилиндр 1 катится без скольжения по вертикальной плоскости и с помощью нити заставляет цилиндр 2 вращаться вокруг своей оси  $O$ . Определить ускорение центра цилиндра 1, полагая вес и радиус цилиндров одинаковыми.



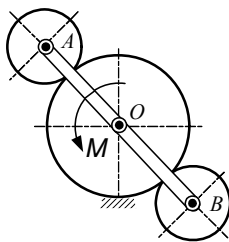
Ответ:  $W = 0,5g$ .

12. На средний цилиндр катушки намотана нить и свободным концом прикреплена к неподвижной поверхности. Определить ускорение центра катушки. Вес каждого диска -  $G$ , вес среднего цилиндра -  $P$ . Радиусы указаны на чертеже.



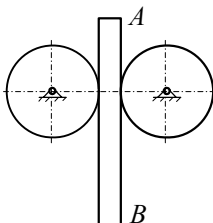
Ответ:  $W = \frac{2P + 2G}{3P + 4G} g$ .

13. Стержень  $AB$  весом  $G$  вращается парой сил с моментом  $M$  вокруг оси  $O$  и заставляет два одинаковых колеса, вес которых  $P$ , кататься по большому неподвижному колесу. Радиусы колёс -  $r$  и  $R$  соответственно. Движение происходит в горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение стержня.



Ответ:  $\varepsilon = \frac{3Mg}{(G + 9P)(R + r)^2}$ .

14. Плитка  $AB$  падает вниз, заставляя вращаться прижатые к нему диски. Определить ускорение плитки. Вес дисков и плитки одинаков.

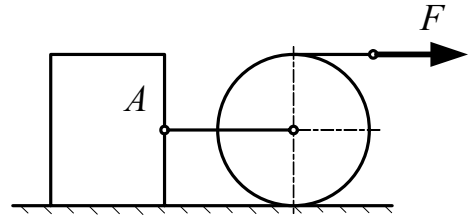


Ответ:  $W = 0,5g$ .

15. Используя условие задачи 14, с. 107, найти ускорение центра цилиндра.

Ответ:  $W = 0,8g$ .

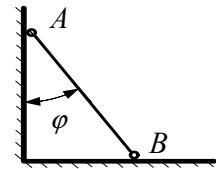
16. Система, состоящая из цилиндра и тела  $A$ , соединённых стержнем, движется по горизонтальной плоскости под действием силы  $F$ , которая приложена к нити, намотанной на цилиндр. Найти ускорение центра цилиндра. Масса цилиндра  $m_1$ , масса груза -  $m_2$ . Коэффициент трения скольжения равен  $f$ .



Ответ:  $W = 8 \frac{F - m_2 g f}{8m_1 + 3m_2}$ .

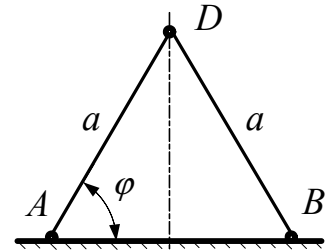
17. Невесомый стержень с тяжёлыми материальными точками  $A$  и  $B$  на концах скользит без трения по стене и полу. Составить дифференциальное уравнение движения стержня, если  $AB = l$ , а масса точек одинакова.

Ответ:  $\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ .



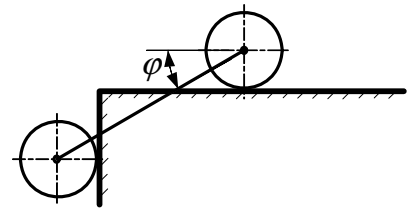
18. Точки  $A$ ,  $B$  и  $D$ , соединённые невесомыми стержнями одинаковой длины (в точке  $D$  – шарнир), падают в вертикальной плоскости. При этом точки  $A$  и  $B$  скользят по гладкой горизонтальной плоскости. Составить дифференциальное уравнение, определяющее угол  $\varphi$ . Масса точки  $D$  в два раза больше массы точек  $A$  и  $B$ .

Ответ:  $\ddot{\varphi} + \frac{a}{g} \cos \varphi = 0$ .



19. Два одинаковые цилиндра, соединённые стержнем, катятся без скольжения по горизонтальной и вертикальной плоскостям. Определить угловое ускорение стержня. Длина стержня -  $l$ , вес стержня не учитывать.

Ответ:  $\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{g}{l} \cos \varphi$ .

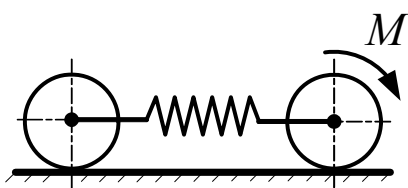


20. Составить дифференциальные уравнения движения двух одинаковых тел массой  $m$ , соединённых пружиной, под действием силы  $F$ . Жесткость пружины -  $c$ .



Ответ:  $m\ddot{x}_1 + c(x_2 - x_1) = 0$ ,  $m\ddot{x}_2 - c(x_2 - x_1) = F$ .

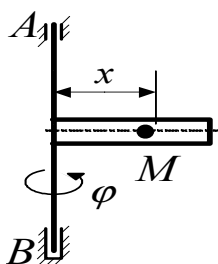
21. Два цилиндра, соединённые пружиной, катятся без скольжения



под действием пары с моментом  $M$ . Составить дифференциальные уравнения движения системы. Масса каждого из цилиндров равна  $m$ , радиус -  $r$ . Жесткость пружины -  $c$ .

Ответ:  $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = \frac{2}{3} \frac{M}{mr^2}$ ;  $3m\ddot{\varphi}_2 - 2c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ .

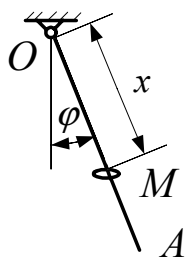
22. Определить скорость шарика  $M$  внутри горизонтальной трубки и угловую скорость вращения этой трубки вокруг вертикальной оси  $AB$ .



В начале движения, когда шарик находился на расстоянии  $x = a$ , угловая скорость вращения трубки была  $\omega_0$ . Масса шарика -  $m$ , момент инерции трубки относительно оси  $AB$  равен  $J$ . Сопротивление движению не учитывать.

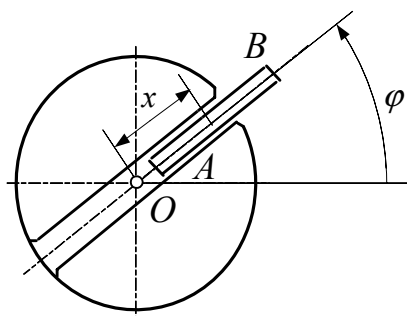
Ответ:  $\dot{x} = \sqrt{\dot{\varphi} \omega_0 (x^2 - a^2)}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{J + ma^2}{J + mx^2} \omega_0$ .

23. Однородный стержень длиной  $OA = l$  качается как маятник в вертикальной плоскости вокруг оси  $O$ . По стержню спускается колечко  $M$ . Составить дифференциальное уравнение движения системы, пренебрегая трением и считая массы стержня и колечка равными.



Ответ:  $\ddot{x} - \dot{\varphi}^2 x + g \cos \varphi = 0$ ;  
 $2(l^2 + 3x^2)\ddot{\varphi} + 12x\dot{x}\dot{\varphi} + 3(2x + l)g \sin \varphi = 0$ .

24. Дыску сообщили угловую скорость, и он начал вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси  $O$ . В радиальном пазу диска свободно движется стержень  $AB$ , длина его равна радиусу диска  $r$ . Составить дифференциальное уравнение движения системы. Сопротивление движению не учитывать. Массы диска и стержня одинаковы.



Ответ:  $\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 = 0$ ;  $(7r^2 + x^2)\dot{\varphi} = C$ .



## Рекомендуемый библиографический список

1. **Новожилов, А. И.** Краткий курс теоретической механики / А.И. Новожилов; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006, – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.
2. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. –М.: Наука, 1970, – 369 с.
3. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики: В 2 т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высш. шк., 1971.

Учебное издание

**Новожилов Альберт Иванович**

**ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**  
(методика решения)

Учебное пособие

Подписано в печать 16.01.09.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 300 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.