

Владимирский государственный университет

А. А. МОКРОВА Р. А. КОЗЛИКОВ

**ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ:
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА,
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА
И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

Учебное пособие

Владимир 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. А. МОКРОВА Р. А. КОЗЛИКОВ

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Учебное пособие

Электронное издание



Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-2283-6

© Мокрова А. А., Козликов Р. А., 2025

УДК 539.01
ББК 22.31

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры технологического и экономического образования
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых
В. А. Игонин

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры современного образования
Российского университета кооперации (Владимирский филиал)
В. В. Красильщиков

Мокрова, А. А. Основы теоретической физики: квантовая механика, физика атомного ядра и элементарных частиц [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. А. Мокрова, Р. А. Козликов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. – 324 с. – ISBN 978-5-9984-2283-6. – Электрон. дан. (5,71 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены основные темы теоретической физики по разделам «Квантовая механика» и «Физика атомного ядра и элементарных частиц». Содержит теоретические вопросы и материал для практической работы по рассматриваемым темам.

Предназначено для студентов старших курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование. Может быть полезно широкому кругу читателей – учащимся, абитуриентам, студентам педагогических вузов, учителям.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 174. Табл. 21. Библиогр.: 27 назв.

ISBN 978-5-9984-2283-6

© Мокрова А. А.,
Козликов Р. А., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Раздел 1. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.....	16
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.....	16
1.1. Трудности классической физики, приведшие к возникновению квантовой механики	16
1.2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга, крах классической механики микромира	19
1.3. Измерения в квантовой механике	21
1.4. Функция состояния.....	23
1.5. Операторы.....	25
<i>Материалы для практической работы</i>	26
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	31
2.1. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.....	31
2.2. Операторы и их свойства	33
2.3. Операторы квантовой механики	37
2.4. Принципы построения математического аппарата квантовой механики.	41
2.5. Энергетическая диаграмма	43
<i>Материалы для практической работы</i>	48
Глава 3. МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ АТОМА	67
3.1. Строение атома – ключевая проблема.....	67
3.2. Модель атома Томпсона.....	69
3.3. Опыт Резерфорда	74
3.4. Модель атома Бора	75
3.5. Опыты Франка и Герца	77
<i>Материалы для практической работы</i>	80
Глава 4. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР	85
4.1. Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора, общий вид волновой функции.....	85

4.2. Вывод функции $f(y)$	88
4.3. Окончательный вид волновой функции	89
4.4. Квантование энергии в квантовом осцилляторе	92
<i>Материалы для практической работы</i>	97
 Глава 5. ЧАСТИЦА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЯЩИКЕ	104
5.1. Одномерный потенциальный ящик	104
5.2. Трехмерный потенциальный ящик	112
<i>Материалы для практической работы</i>	116
 Глава 6. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА	130
6.1. Уравнение Шредингера для атома водорода	130
6.2. Разделение переменных	131
6.3. Квантовые проекции момента импульса и модуля момента импульса	133
6.4. Функция состояния	135
6.5. Энергия основных состояний атома водорода	136
6.6. Выводы	137
<i>Материалы для практической работы</i>	140
 Глава 7. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ	143
7.1. Нормальный эффект Зеемана	143
7.2. Аномальный эффект Зеемана. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона	146
7.3. Принцип Паули	149
7.4. Строение электронных оболочек атомов	150
7.5. Правило Хунда. Периодическая система элементов	151
<i>Материалы для практической работы</i>	153
 Глава 8. СТРУКТУРА МОЛЕКУЛ	155
8.1. Атомные орбитали	155
8.2. Взаимодействие орбиталей. Молекулярные орбитали	158
8.3. Молекула H_2O	159
8.4. Гибридизация орбиталей CH_4 , C_2H_4 , C_2H_2 , бензола (C_6H_6)	160
<i>Материалы для практической работы</i>	167

Раздел 2. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.....	170
Глава 9. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ	170
9.1. Исторический обзор	170
9.2. Источники элементарных частиц. Ускорители	175
9.3. Детекторы частиц	180
9.4. Метод рассеяния	182
<i>Материалы для практической работы</i>	184
Глава 10. МОДЕЛИ АТОМНОГО ЯДРА.....	190
10.1. Составные элементы ядра.....	190
10.2. Ядерная зоология	193
10.3. Капельная модель ядра. Формула Вайцзеккера	195
10.4. Оболочечная модель	201
<i>Материалы для практической работы</i>	204
Глава 11. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ.....	210
11.1. Основные свойства ядерных сил.....	210
11.2. Мезонная теория ядерных сил.....	212
11.3. Полевая теория ядерных сил	215
<i>Материалы для практической работы</i>	217
Глава 12. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ	218
12.1. Общие сведения о ядерных реакциях.....	218
12.2. Механизмы ядерных реакций.....	222
12.3. Механизм спонтанного деления тяжелых ядер	223
12.4. Деление ядер под действием нейтронов	226
<i>Материалы для практической работы</i>	228
Глава 13. РАДИОАКТИВНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ.....	235
13.1. Типы радиоактивности.....	235
13.2. α -распад	238
13.3. β -превращение	240
13.4. γ -излучение	242
13.5. Закон радиоактивного распада	243
13.6. Радиоактивные ряды и трансурановые элементы	245
<i>Материалы для практической работы</i>	248

Глава 14. ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА	255
14.1. Цепные ядерные реакции	255
14.2. Ядерный реактор	258
14.3. Реакции синтеза. Термоядерный управляемый синтез	261
<i>Материалы для практической работы</i>	264
Глава 15. АНТИЧАСТИЦЫ	268
15.1. Теория Дирака	268
15.2. Пространство Минковского	270
15.3. Симметрия пространства Минковского и античастицы	275
<i>Материалы для практической работы</i>	276
Глава 16. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ	280
16.1. Классификация элементарных частиц	280
16.2. Характеристики частиц	282
16.3. Законы сохранения в физике частиц	284
16.4. Мультиплеты частиц	285
16.5. Кварковая модель	287
<i>Материалы для практической работы</i>	295
Глава 17. ЧЕТЫРЕ ТИПА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ	299
17.1. Электромагнитное взаимодействие	299
17.2. Слабое взаимодействие	304
17.3. Сильное взаимодействие	309
17.4. Теория великого объединения	312
<i>Материалы для практической работы</i>	313
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	318
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	320
ПРИЛОЖЕНИЕ	323

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассматриваются два раздела теоретической физики посвященные изучению квантовой механики и физики атомного ядра и элементарных частиц.

Изучение раздела «Квантовая физика» начинается с вопросов и затруднений, имеющих на момент создания квантовой механики как раздела физики, когда классическая физика не может дать ответа на возникающие противоречия. Материал данного раздела базируется на знаниях, полученных при изучении таких разделов как «Оптика» и «Атомная физика» в курсе обще и экспериментальной физики.

Изучение начинается с формирования и развития представлений о квантовых свойствах электро-магнитного поля в процессе излучения, его закономерностям, затем осуществляется переход к изучению состояния вещества. Уже в начале важно установить логическую связь изучаемых вопросов; квантовые свойства излучения и необходимость введения квантовых представлений для состояния вещества (дискретность энергетического спектра, квантовые переходы и др.). Все это, а также развитие представлений о волновых свойствах излучения вещества позволят сделать вывод о единстве материального мира на микроуровне.

Первоначальная модель атома Резерфорда-Бора была противоречива. С одной стороны, блестящее совпадение опытных данных по исследованию спектра водорода с теоретическим расчетом спектра, который был проведен на основе законов классической физики. С другой стороны, классические представления, которые и приводят к затруднениям при объяснении ряда явлений.

Рассматривая модель атома Резерфорда, можно заметить основную трудность этой модели – неустойчивость атома, подчеркиваем необходимость введения постулатов Бора, особенно постулата о дискретности значений энергии. Опыты Франка и Герца явились экспериментальным подтверждением теории Бора. С помощью постулатов Бора проводится анализ закономерностей в спектрах атома водорода и водородоподобных атомов, рассматриваются вопросы электронных, переходов в атоме.

Но, несмотря на успехи, достигнутые теорией Бора при описании ряда конкретных явлений, она внутренне противоречива и явля-

ется переходным этапом от классических представлений к квантовому описанию микросистем, в том числе атома. Полуклассичность теории не объясняет широкий круг явлений, например, не объясняет спектров сложных атомов.

Отличие микрообъекта от механической частицы заключается в том, что его состояние не может быть определено точным заданием координаты и импульса в один и тот же момент времени. Этот факт фиксируется волновыми свойствами микрочастиц и соотношением неопределенностей, как следствием этих свойств.

В каждый момент времени, образно говоря, микрообъект имеет целый набор возможных значений координат (Δx) и импульсов (Δp_x) среди которых он «выбирает» своё положение и направление движения случайным образом. Тогда, в соответствии с основными положениями теории вероятностей, описывающей случайные процессы, состояние движения частицы («выбор» координат и импульсов) определяется распределением вероятностей её обнаружения в единице «объёма», заданного интервалами координат ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) и импульсов ($\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$). Таким образом, функция распределения вероятностей есть следствие наличия у микрообъекта волновых свойств.

С другой стороны, волновые свойства должны быть связаны с определенным волновым процессом и волновой функцией. Отсюда следует, что волновая функция, вместе с длиной волны де Бройля должна определять функцию распределения вероятностей. Состояние движения механической (классической) частицы определялось из решения дифференциального уравнения движения, например, в форме второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Движение микрообъекта по аналогии может быть определено из уравнения волнового процесса – уравнения Шредингера

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0,$$

где $|\Psi|^2$ является функцией плотности вероятности.

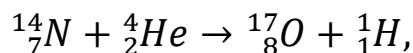
Развивается математический аппарат квантовой механики, изучаются все более сложные конструкции и явления, понятие квантового гармонического осциллятора, рассматривается частица в так называемом потенциальном ящике. Каждое из этих состояний описывается с помощью уравнения Шредингера и функции состояния. Строится

квантовая теория атома водорода, выясняется, что квантуется, энергия и импульс электронов, момент импульса и его проекция, вводятся квантовые числа, рассматривается пространственное квантование. Начинают изучаться многоэлектронные квантовые системы и структура молекул.

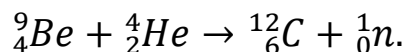
Естественным продолжением изученного является желание углубиться не только в более сложные по количеству электронов структуры, но и вглубь самого атома, в его ядро.

Так осуществляется переход к изучению второго из рассматриваемых разделов посвященного физике атомного ядра и элементарных частиц.

Из опытов Резерфорда по рассеянию α -частиц при их прохождении через тонкую металлическую фольгу следовало, что атом имеет сложную внутреннюю структуру. Понятие элементарности оказалось относительным. Открытое в опытах ядро атома водорода 1_1H или протон p , электрон e^- и фотон γ составили начальную строку новой таблицы – таблицы элементарных частиц. Возник вопрос о структуре сложных атомных ядер. Опыты по взаимодействию ядер атомов азота, бериллия и гелия позволили предположить, что в состав всех ядер входят протоны



и нейтроны



Поэтому массовое число ядра элемента A составлено из Z протонов, где Z – номер элемента в периодической системе и N нейтронов

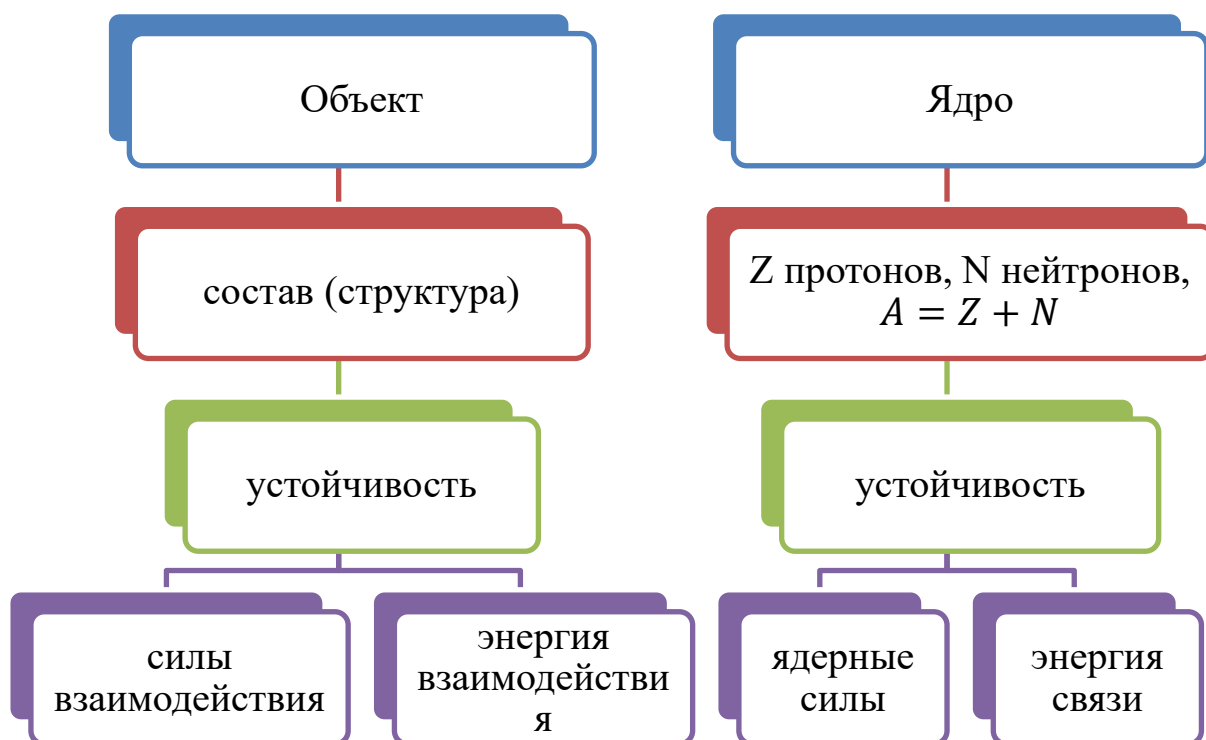
$$A = Z + N.$$

Остался открытым вопрос об устойчивости ядра. Каким образом, положительно заряженные протоны и незаряженные нейтроны могут существовать в одной микросистеме размерами 10^{-15} м?

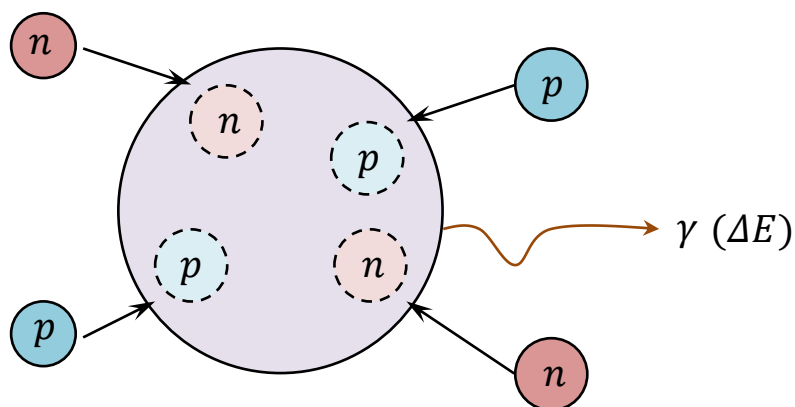
Аналогично тому, как в атомной физике вопрос об устойчивости атома был самым важным для дальнейшего развития физики микромира, устойчивость ядра оказалась ключевой проблемой ядерной физики.

Объяснить устойчивость любой физической системы, значит знать состав, структуру и взаимодействие составных частей. Поэтому

будущий учитель физики при изучении нового всегда должен иметь четкое представление материала в виде определенной схемы.



По отношению к ядру, полезно представить процесс его рождения из нуклонов (протонов и нейтронов). На примере α -частицы ядра атома гелия ${}^4_2\text{He}$ это можно изобразить следующим образом.



В момент образования ядра часть энергии ΔE выделилась, например, вылетел фотон с энергией

$$h\nu = \Delta E$$

и энергия системы частиц, оставшихся в ядре оказывалась меньше, чем энергия этих же частиц до взаимодействия.

Тогда

$$E_{\text{частиц}} > E_{\text{ядра}}$$

на величину ΔE .

Если определить энергию связи системы как такую, которую необходимо затратить для перевода частей системы из «связанного» в «свободное» состояние, то величина $\Delta E = E_{\text{св}}$ играет роль энергии связи. Это подход к описанию энергии связи через понятие дефекта масс.

В теоретической физике существует и другой подход, который рассматривается в основном в рамках капельной модели ядра, которая основана на аналогии с моделью капли жидкости. В рамках данной модели описание энергии связи $E_{\text{св}}$ может быть представлена с помощью формулы Вайцекера, которая в каждом из своих пяти слагаемых учитывает различные свойства ядер. Первое слагаемое отражает насыщенность ядерных сил и линейную зависимость энергии связи от числа частиц составляющий ядро (нуклонов). Второе слагаемое является аналогом поверхностной энергии жидкости. Третье слагаемое учитывает кулоновское отталкивание между протонами в ядре. Четвертое – стремление ядра к симметрии по количеству протонов и нейтронов. Последнее – пятое слагаемое не имеет объяснения в рамках капельной модели и отражает различную устойчивость ядер в зависимости от четности количества нуклонов.

Охарактеризовать систему и ее энергетическое состояние можно величиной удельной энергии связи, т.е. энергии связи, приходящейся на один нуклон

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

График зависимости $\varepsilon(A)$ для ядер периодической системы элементов, показывает, что наиболее устойчивы нуклоны в ядрах, принадлежащих средней части таблицы Менделеева и потому перевод их в эти состояния должен быть энергетически выгодным. Для ядер тяжелых элементов выгоден распад, а для легких элементов – слияние.

Наличие энергии связи между нуклонами в ядре, не раскрывает механизма взаимодействия нуклонов, характера ядерных сил. В посо-

бии рассматриваются основные свойства ядерных сил и два подхода к их объяснению.

Первый подход связан с мезонной теорией, которая строится на основе обменного взаимодействия нуклонов, по аналогии с взаимодействием атомов, в котором ковалентная связь объясняется обобществлением валентных электронов. В качестве частицы, которой обмениваются нуклоны рассматривается мезон (пион).

Другой подход – полевая теория ядерных сил заключается в том, что нуклон окружен пионным полем сильного взаимодействия. Попадая в него, другие нуклоны обобществляют свое пионное поле, образуя с исходным пионным полем единую систему.

На этом этапе заканчивается описание ядра по схеме описанной выше.

Мы переходим к описанию ядерных реакций их типов и механизмов, т.е. к описанию взаимодействия ядер друг с другом и частицами. Рассматриваются механизмы спонтанного деления тяжелых ядер, деления ядер под действием нейтронов, различные виды радиоактивных превращений: α -распад, β -превращение, γ -излучение. Описываются законы радиоактивного распада, радиоактивные ряды и трансурановые элементы. Для описания энергетического выхода ядерных реакций используются энергетические диаграммы.

Отдельный раздел посвящен ядерной энергетике, описанию цепных ядерных реакций, устройству и принципу действия ядерного реактора. Рассматриваются реакции синтеза и термоядерный управляемый синтез. Основным препятствием реакции синтеза является кулоновское отталкивание положительно заряженных ядер. Единственный способ преодолеть этот ядерный барьер известный на сегодняшний день – разогрев до очень высоких температур. Именно поэтому реакции синтеза и называют термоядерными. Термоядерный синтез интенсивно протекает в недрах Солнца и других звезд. Главным источником энергии в них является процесс превращения четырех протонов в ядро гелия. Этот процесс протекает в несколько стадий, которые образуют цикл.

Особое место в изложенном материале занимает описание частиц и античастиц.

В 1928 году Дираку удалось объединить квантовую механику и специальную теорию относительности. Он создал релятивистскую

квантовую механику электрона и получил уравнение связывающее энергию и импульс, из которого следовало, что энергия движущейся частицы может принимать как положительные, так и отрицательные значения

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Это вызвало противоречие, ведь с физической точки зрения отрицательная энергия не допустима. Частица, с отрицательной энергией сталкиваясь с другой частицей и передавая ей, часть своей энергии приобретала бы еще большую отрицательную энергию. В результате эта частица могла бы приобрести сколь угодно большую по модулю отрицательную энергию, совершая при этом бесконечную работу над другими телами. Решение этого затруднения привело к предсказанию существования античастиц.

Позитрон был первой античастицей, предсказанной теоретически. В 1932 году он был открыт экспериментально в космических лучах. А в 1933 году наблюдались возникновения электронно-позитронных пар и аннигиляция электрона и позитрона. В середине 30х годов возникла идея о том, что и у других частиц могут быть античастицы.

Оказалось, что существование античастиц — это проявление фундаментальных свойств симметрии физических законов.

Частиц и античастиц открывалось все больше, возникла необходимость их классификации. Основной характеристикой частиц является масса, к ней добавляются такие характеристики как спин, пространственная четность, электрический заряд, лептонный заряд, барионный заряд, изоспин и его проекция, странность, гиперзаряд, очарование.

Самой простой была идея расположения частиц в порядке возрастания массы, их основной характеристики, и выделения родственных групп, подобно тому, как это было сделано с химическими элементами. Эта идея привела к определенному успеху. Частицы разделились на три группы. В первой группе находятся кванты классических полей, к ним относится только одна реально известная частица фотон с нулевой массой. Во вторую группу входят шесть частиц электрон e и электронное нейтрино ν_e , мюон μ и мюонное нейтрино ν_μ , таон τ и таонное нейтрино ν_τ . Частицы этой группы называли лептона-

ми (от греч. leptos – легкий). Массы всех лептонов, кроме одного, таона, меньше масс всех остальных элементарных частиц.

Все остальные частицы называли адронами (от греч. hadros – большой, сильный). Адроны, в свою очередь, делятся на две группы частиц. Первая – стабильные адроны, это мезоны и барионы, вторая – резонансы, к ним относятся мезонные и барионные резонансы. К мезонам относятся адроны с нулевым или целым спином, к барионам адроны с полуцелым спином.

Физика частиц построена на законах сохранения, одни из которых являются универсальными, это законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда, лептонного и барионного заряда. Другие справедливы лишь для отдельных типов взаимодействия, например для процессов, обусловленных сильным взаимодействием, должны выполняться законы сохранения странности и изоспина.

Законы сохранения классической физики являются законами запрета. Иначе обстоит дело с законами сохранения в физике частиц, они являются законами дозволения, т.е., в классической физике, если процесс не противоречит законам сохранения, это вовсе не означает, что он реализуется, в физике частиц любой процесс, разрешенный законами сохранения, где-нибудь реализуется.

Для объяснения свойств и многообразия адронов было физиками М. Гелл-Манном и Д. Цвейгом в 1964 г. независимо друг от друга была предложена теория кварков.

Кварками называли предполагаемые «настоящие» элементарные частицы, из которых состоят все адроны. Сначала были введены три предполагаемых кварка которые обозначили u , d и s (от англ. up – вверх, down – вниз, strange – странный). Однако трех кварков оказалось недостаточно для объяснения свойств всех адронов. Предположили существование еще трех кварков, которые обозначили буквами c , b и t (от англ. charm – очарование, beauty – прелесть, красота, truth – истина). Для кварков ввели дополнительную характеристику «цветовые заряды»: красный R , зеленый G и синий B . Антикварки соответственно обладают антикрасным, антизеленым и антисиним «цветом».

После этого возник вопрос, какие силы удерживают кварки внутри адронов? Подобную проблему для случая атомного ядра уда-

лось решить на основе идеи обменного взаимодействия. В теории, описывающей цветовые взаимодействия кварков, - квантовой хромодинамике, предполагается, что сильное взаимодействие между кварками достигается за счет обмена других частиц глюонов.

В настоящее время не состоящими из других частиц считаются шесть лептонов и шесть кварков. Эти частицы называют фундаментальными элементарными частицами.

Из того факта, что у одной из частиц, отнесенных к группе лептонов (таона), масса больше, чем у многих адронов, следует, что основным признаком для деления элементарных частиц на группы является все-таки не их масса, а какие-то другие свойства. Эти свойства определяются способностью к фундаментальным взаимодействиям различного вида.

Фундаментальными называются такие взаимодействия, которые не могут быть сведены к другим, более простым видам взаимодействия. Их в настоящее время известно четыре гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

В основу единого подхода к описанию взаимодействий положены представления о взаимодействии частиц и полей. Для сильного взаимодействия вводится поле ядерных сил с квантами, этого поля глюонами. Аналогично тому, как фотоны осуществляют взаимодействие заряженных частиц, глюоны связывают, друг с другом элементарные частицы – кварки, которые, в свою очередь, составляют нуклоны. Аналогично, обобществление нуклонами пары кварк-антикварк, образующей π -мезон (пион), приводит к ядерному взаимодействию. Сами же нуклоны состоят из троек кварков.

В настоящее время ученые пытаются прийти к единой теории описания всех взаимодействий, так называемой теории великого объединения, но пока этот этап не осуществлен, в рамках обменного взаимодействия не удастся описать теорию гравитационного взаимодействия.

Для удобства работы текст издания содержит гиперссылки (выделены синим цветом). Предусмотрен возврат к оглавлению по кнопке

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Раздел 1. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Трудности классической физики, приведшие к возникновению квантовой механики](#)
- [Соотношение неопределенностей Гейзенберга, крах классической механики микромира](#)
- [Измерения в квантовой механике](#)
- [Функция состояния](#)
- [Операторы](#)
- [Материалы для практической работы](#)

1.1. Трудности классической физики, приведшие к возникновению квантовой механики

К концу XIX века система физики, основанная на механике Ньютона и электродинамике Максвелла, казалась полностью завершенной. Одним из результатов этих теорий было заключение о том, что скорость света не зависит от системы отсчета, в которой ее изучают.

Однако, оставался ряд явлений и экспериментальных фактов, которые не укладывались в эту систему.

- Особенности излучения абсолютно черного тела, попытки объяснения которых в рамках классической физики приводили к непреодолимым противоречиям.

На рис. 1.1. Представлен график зависимости плотности энергии ρ_λ от длины волны излучения λ . Причем формула Релея – Джинса хорошо описывала длинноволновый диапазон, формула Вина – коротковолновый диапазон. М. Планк стремился объединить формулы Релея-Джинса и Вина, ка бы объединить длинноволновый и коротковолновый диапазоны.

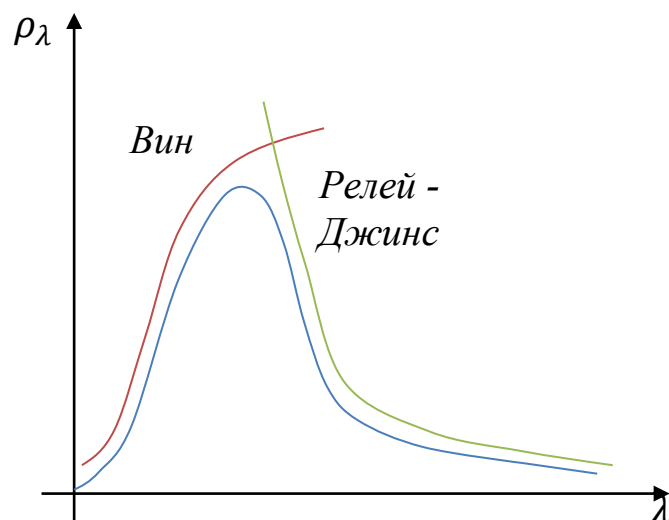


Рис. 1.1.

- Закон фотоэффекта (выделяется или поглощается поток квантов, 1 фотон передает энергию только 1 электрону, а он вылетает, если хватает энергии).
- Эффект Комптона (рассеяние света на свободных электронах) - *увеличение длины волны излучения, рассеянного на свободных электронах.*
- Линейчатые спектры излучения чистых веществ.

Разложили свет в спектр, используя установку, схематично изображенную на рис. 1.2.

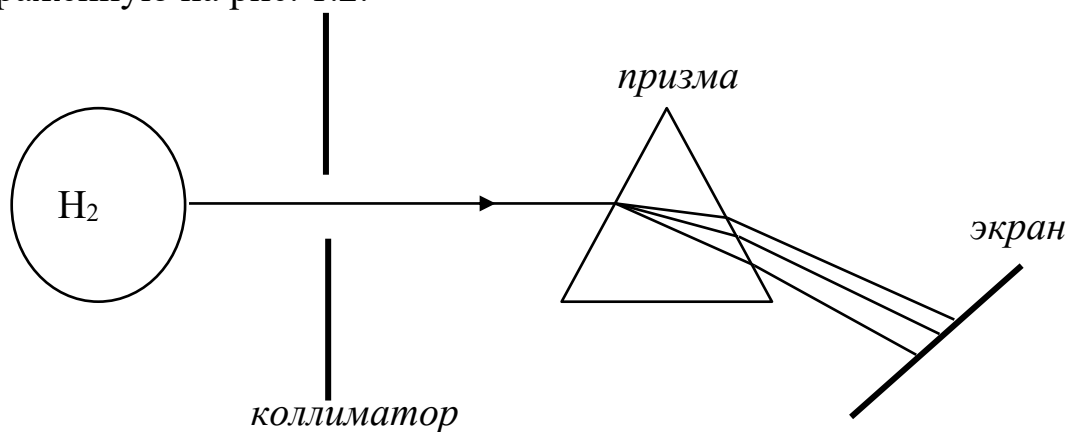


Рис. 1.2.

- Опыты Франка и Герца, доказывающие существование дискретных уровней у атома. Схема установки и результаты измерения

ния анодного тока в зависимости от подаваемого напряжения представлена на рис. 1.3.

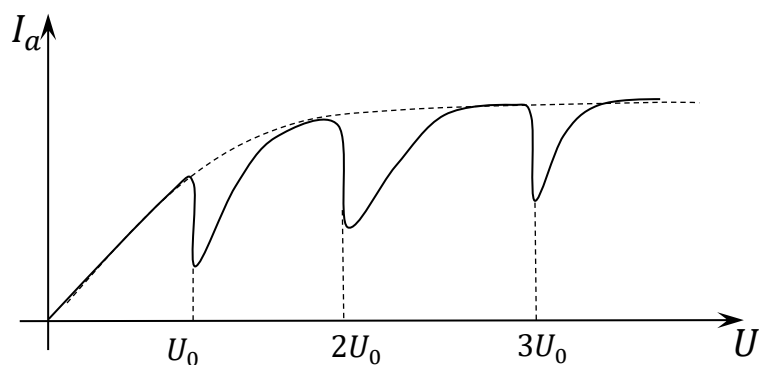
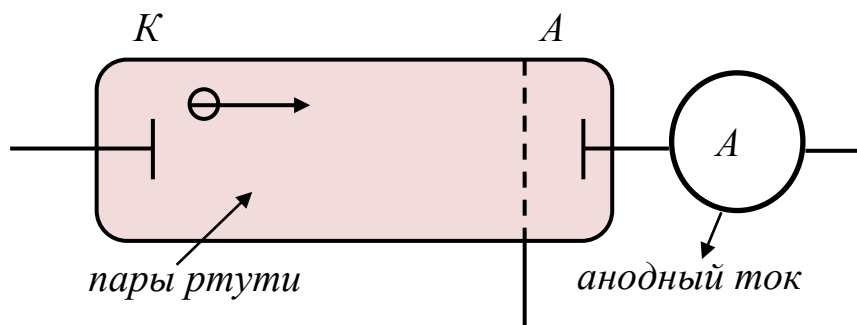


Рис. 1.3.

- Опыты Э. Резерфорда.

Возникло противоречие. Исходя из модели строения атома Резерфорда, электрон должен упасть на ядро по законам электродинамики Д. Максвелла.

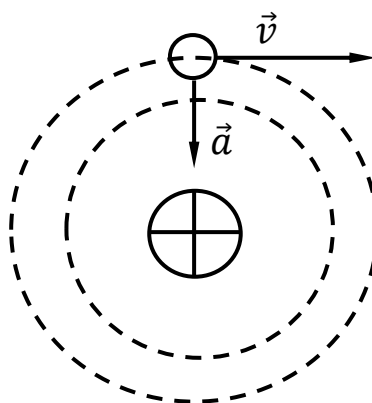


Рис. 1.4.

Т.к. электрон, движется по окружности со скоростью v и ускорением a (рис. 1.4.), следовательно электрон излучает энергию и с

каждым разом окружность будет становиться все меньше, следовательно электрон со временем упадет на ядро.

Первые три затруднения были разрешены М. Планком, высказавшим гипотезу о том, что *электромагнитное излучение осуществляется порциями энергии – квантами, величина которых пропорциональна частоте излучения.*

Эйнштейн обобщил эту гипотезу, предположив, что *электромагнитные волны не только излучаются, но и поглощаются и даже распределяются в виде квантов.*

Свет – это не только электромагнитная волна, но и поток фотонов (корпускулярно-волновой дуализм).

Три последних затруднения, были связаны со строением атома. Попытку их решения предпринял Н. Бор, который постулировал два утверждения, названные позднее *постулатами Бора.*

Попытка объяснить постулаты Бора натолкнула Л. Де Бройля на идею о том, что *корпускулярно-волновой дуализм присущ не только фотонам, но и другим микрочастицам.*

Таким образом, можно сказать, что необходимость создания новой механики для микромира была обусловлена двумя экспериментальными фактами:

- квантовыми свойствами электромагнитных волн;
- волновыми свойствами частиц.

Эти факты не укладывались в рамки классической физики и требовали принципиально нового подхода к описанию микромира: новых понятий и нового математического аппарата.

1.2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга, крах классической механики микромира

Волновые свойства микрочастиц проявляются в так называемом соотношении неопределенностей Гейзенберга, полученном в 1927 г. (это год когда квантовая механика уже была построена Шредингером и Гейзенбергом).

Соотношение неопределенностей – это экспериментальный факт.

Отступив от исторического порядка, попытаемся ввести основные понятия квантовой механики, опираясь на соотношение неопределенностей.

Соотношение неопределенностей записывают в виде неравенства

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

где

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

h - постоянна Планка.

Для микромира Δx – это неопределенность в определении координаты x , Δp_x – это неопределенность в определении проекции импульса на ось x .

Физический смысл соотношения неопределенностей: *невозможно одновременно точно измерить и координату, и проекцию импульса на эту координатную ось.*

Главный результат, заключается в том, что *поведение микрочастицы нельзя описывать так, как это делается в классической механике.*

Состояние материальной точки в классической механике описывает набор динамических переменных – три координаты x, y, z , которые определяют радиус-вектор $\vec{r}$ точки и проекции скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

или

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В классической физике все шесть параметров мы знаем, можем измерить. В микромире этого сделать нельзя.

Принципиальная невозможность одновременного точного определения обобщенной координаты q и проекции импульса $\frac{dq}{dt}$, делает бессмысленным понятие траектории движения частицы.

Траектория – это линия, вдоль которой движется тело. Линия – это множество точек.

Если измерить положение грубо, через некоторый промежуток времени, получим (рис. 1.5.).

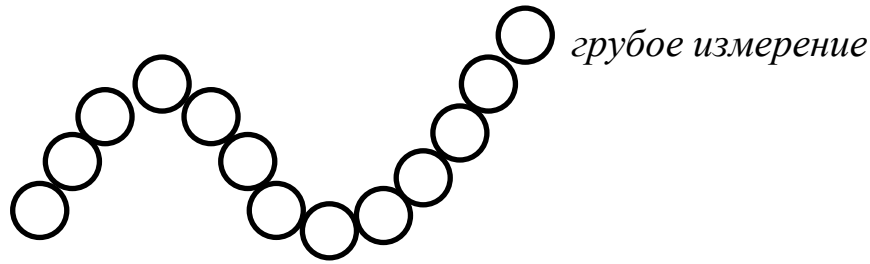


Рис. 1.5.

Но если уточнить положение (точнее измерять положение тела), получится не уточнение, а ухудшение. Не улучшает ситуацию и уточнение по времени. То есть если измерить положение микрочастицы и точнее и чаще, то хотя точки будут располагаться друг к другу ближе, но более резко будет меняться угол в получающейся ломаной. То есть для классической материальной точки существует предел, к которому стремиться, получающееся множество точек при увеличении точности и уменьшению промежутков времени.

Для реальной микрочастицы такого предела не существует, что делает понятие траектории бессмысленным. Аналогичная ситуация будет и с понятием скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\Delta t}.$$

Для микрочастицы этот предел не существует. Все это объясняет соотношение неопределенностей.

Такое необычное поведение микрочастицы, вытекающее из соотношения неопределенностей, приводит к выводу, что привычные для классической механики понятия динамических переменных в микромире теряют свой смысл. Их надо определять как-то иначе, используя при этом другой математический аппарат.

1.3. Измерения в квантовой механике

Попытка определить понятие скорости по аналогии с классической механикой результата не дает, поэтому необходимо по-другому определить само понятие физической величины. Но возникает методологическая сложность. Понятие физической величины протекает из макромира. Энергия, скорость, импульс, траектория, как характеристики микрочастицы, проявляют себя лишь при взаимодействии микрочастицы с макроскопическим телом. Другими словами, мы, как исследователи или наблюдатели, можем судить о поведении микроча-

стицы только по взаимодействию их с окружающими макротелами. Мы как бы используем эти тела в качестве измерительных приборов.

Здесь возникает принципиальное методологическое отличие квантовой механики от классической физики.

С одной стороны, классическая физика является частным (предельным) случаем квантовой механики.

С другой стороны, мы не можем более общий квантовый случай описать, не используя классических представлений.

Такой подход к определению физических величин приводит к тому, что любое измерение всегда оказывает воздействие на микроробъект, причем это воздействие нельзя сделать сколь угодно малым при заданной точности. При попытке точнее измерить одну величину (например, координату) мы неизбежно ухудшаем измерение другой величины (например, импульса).

В классической механике состояние системы описывает набор координат и скоростей всех частей, входящих в систему. В квантовой механике этот набор уменьшается, поэтому описание становится менее подробным.

Из этого вытекает еще одно принципиальное отличие квантовой механики от классической физики. Если в классическом случае в какой-то момент времени нам известны все параметры системы, мы можем однозначно предсказать параметры системы в следующий момент. В квантовой механике это невозможно. Ее задача – не предсказать точно поведение системы, а рассчитать вероятности перехода системы в различные состояния.

В квантовой механике некоторые величины можно измерить одновременно, а некоторые нет. Поэтому под полным измерением параметров системы в квантовой механике понимают измерение величин (всех), которые можно померить одновременно.

Например, для микрочастицы можно измерить все координаты и это будет полный набор. Можно измерить все проекции импульса, это тоже будет полный набор. То есть можно ввести описание поведения микрочастицы либо на основе координатного базиса, либо на основе импульсного.

1.4. Функция состояния

Задача квантовой механики – предсказывать вероятность результатов измерения, определяет основное положение квантовой механики: описание состояния системы осуществляется заданием некоторой, в общем случае комплексной, функции Ψ (*Пси*), квадрат модуля которой (в случае микрочастицы) определяет распределение вероятностей.

$$|\Psi(\vec{r})|^2 dX = d\omega$$

- это вероятность нахождения частицы в элементарном объеме dX вблизи точки с координатой $\vec{r}$.

По-другому получаем формулу плотности вероятностей

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = \frac{d\omega}{dX}.$$

Величина $d\omega$ – характеристика не очень хорошая (ее значение стремится к нулю, т.к. объем очень маленький).

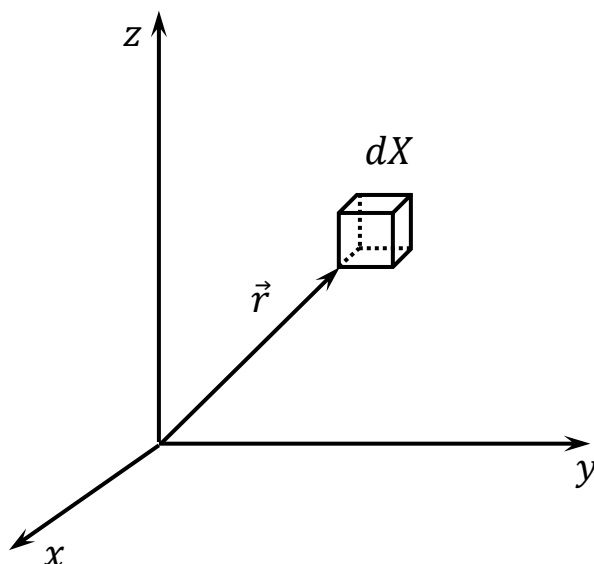


Рис. 1.6.

По аналогии с плотностью в классической механике

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$\rho = \frac{dm}{dV},$$

$$dm = \rho dV.$$

Физический смысл (в классической механике): показывает какова масса одного кубического метра.

Поделим $d\omega$ на dX , получим плотность вероятности.

Физический смысл: *плотность вероятности это физическая величина, численно равная вероятности того, что частица попадает в единичный объем вблизи заданной точки (точка, задана радиус-вектором).*

Функция $\Psi(\vec{r})$ называется *функцией состояния* или *волновой функцией*. Исходя из физического смысла $|\Psi|^2$, волновая функция должна удовлетворять следующим условиям.

1) $\int \underbrace{|\Psi|^2}_{d\omega} dX = 1$, интегрирование производится по всему пространству X . Физический смысл: частица хоть куда-то попадает, вероятность самая большая, т.е. 1.

Это условие нормировки, т.е. это условие отражает факт существования частицы.

Отметим еще несколько свойств волновой функции. Два из них очевидны.

2) Функция Ψ непрерывна и конечна во всем пространстве.

3) Непрерывны и конечны производные по всем координатам

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

(производные отражают, как быстро изменяется волновая функция).

Эти два условия называются *стандартными условиями волновой функции*.

И еще три условия, не столь очевидны.

4) Если в состоянии, которое описывает волновая функция Ψ_1 , какое-то измерение дает достоверно результат f_1 , а в состоянии Ψ_2 достоверно дает значение f_2 , то всякая функция $C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2$, где C_1 и C_2 – некоторые, в общем случае комплексные, постоянные, описывает состояние, в котором измерение даст либо f_1 , либо f_2 (*принцип суперпозиции*).

5) Пусть система состоит из двух частей. И состояние первой части описывает функция $\Psi_1(q_1)$, а состояние второй части $\Psi_2(q_2)$, где q_1, q_2 – полные наборы параметров частиц 1 и 2. Например, для системы, состоящей из двух частиц: $q_1 = \vec{r}_1, q_2 = \vec{r}_2$.

Тогда состояние всей системы описывает функция состояния

$$\Psi_{12}(q_1, q_2) = \Psi_1(q_1) \cdot \Psi_2(q_2),$$

которую можно выразить в виде произведения волновых функций частот.

б) Если со временем распределение вероятностей меняется (нестационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) \cdot \Psi(t).$$

1.5. Операторы

Пусть f – некоторая физическая величина, характеризующая состояние квантовой системы. В общем случае, эта величина может принимать несколько значений $f_1, f_2, \dots$, с некоторыми вероятностями.

Множество значений, которые может принимать физическая величина, называются *спектром физической величины*, а сами значения – *собственными значениями* физической величины.

Спектр может быть непрерывным, когда для любых двух значений существует любое третье значение, находящееся между ними. Например, для координат X частицы спектр непрерывен.

Спектр может быть и дискретным, тогда существуют значения f_i, f_j , что между ними не существует третьего значения. В случае дискретного спектра обозначим волновую функцию, описывающую состояние системы, в котором величина принимает значение f_n через Ψ_n . Будем считать, что функция Ψ_n нормирована $\int |\Psi_n|^2 dX = 1$.

Если система находится в некотором произвольном состоянии, которое описывает волновая функция Ψ , то измерение величины f , дает одно из значений f_n .

В соответствии с принципом суперпозиции можно утверждать, что

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + \dots = \sum_n a_n \Psi_n,$$

т.е. волновая функция может быть разложена по собственным значениям функции любой физической величины.

Если $\Psi = \Psi_n$ (условие выполняется тогда и только тогда, когда $a_n = 1$, а все остальные коэффициенты разложения равны нулю), тогда f достоверно, с вероятностью 1, принимает значение f_n ($f = f_n$).

Если же, наоборот, Ψ не содержит Ψ_n , т.е. $a_n = 0$, то f не может принимать значение f_n .

В произвольном случае $|a_n|^2$ определяет вероятность

$$|a_n|^2 = \omega_n.$$

В общем случае рассматриваемые числа и функции комплексные, следовательно необходимо учитывать, что

$$|a + bi|^2 = a^2 + b^2,$$

$$(a + bi)^2 = a^2 + b^2 + 2abi,$$

$$c = a + bi, \quad c^* = a - bi,$$

$$|c^2| = cc^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

здесь * показывает комплексное сопряжение.

Среднее значение $\bar{f}$ физической величины выражается через вероятности суммированием:

$$\bar{f} = \sum_n f_n |a_n|^2.$$

Это же выражение удастся записать через саму функцию Ψ .

Введем оператор $\hat{f}$, $\hat{f}\Psi$ – результат действия оператора на функцию Ψ .

$\hat{f}$ называют оператором величины f , если $\bar{f} = \int \Psi^* \hat{f} \Psi dX$.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на следующие вопросы.

1. Какие явления и экспериментальные факты не удавалось объяснить с точки зрения классической физики?
 - a) Особенности излучения абсолютно черного тела.
 - b) Линейчатые спектры излучения чистых веществ.
 - c) Результаты опытов Франка и Герца.
 - d) Все выше перечисленное.
2. Кто из ученых выдвинул гипотезу о квантовании энергии электрона в атоме?
 - a) Макс Планк.
 - b) Эрнест Резерфорд.
 - c) Альберт Эйнштейн.
 - d) Нильс Бор.
3. Что демонстрирует соотношение неопределенностей Гейзенберга?
 - a) Для микрочастицы можно точно измерить координату и проекцию импульса на эту координатную ось одновременно.

b) Для микрочастицы невозможно одновременное точное измерение ее координаты и проекции импульса на эту координатную ось.

c) Траектория микрочастиц известна.

d) Все микрочастицы движутся по классическим законам.

4. Как определяется состояние микрочастицы в квантовой механике?

a) С помощью набора точных координат, и проекций импульса на соответствующие оси координат.

b) Через давление, объем и температуру.

c) С помощью волновой функции.

d) Любым из вышеперечисленных способов.

5. Какое из нижеперечисленных условий является условием нормировки волновой функции?

a) $\int |\Psi|^2 dX = 0$.

b) $\int |\Psi|^2 dX = 1$.

c) $\Psi = 1$.

d) $\int |\Psi|^2 dX = \infty$.

6. Какой физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции?

a) Определяет скорость частицы после взаимодействия.

b) Определяет вероятности нахождения частицы в единичном объеме заданной точки.

c) Определяет электромагнитную силу.

d) Определяет вероятность существования частицы.

7. Необходимость создания квантовой механики была обусловлена двумя экспериментальными фактами, какими?

a) Квантовыми свойствами электромагнитных волн.

b) Волновыми свойствами электромагнитных волн.

c) Квантовыми свойствами частиц.

d) Волновыми свойствами частиц.

8. Спектр физической величины в квантовой механике может быть

a) дискретным;

b) непрерывным;

- с) или дискретным, или непрерывным;
- д) у физической величины не может быть спектра.

9. Операцию $\hat{f}$ называют оператором величины f , если

- а) $\bar{f} = \int \Psi^* \hat{f} \Psi dX$;
- б) $\bar{f} = \hat{f} \Psi$;
- с) $\hat{f} = f$;
- д) $\bar{f} = \hat{f}$.

10. В общем случае функция состояния может быть...

- а) рациональной;
- б) иррациональной;
- с) комплексной;
- д) действительной.

Энергия и импульс фотонов. Давление света.

Минимальное количество энергии, которое система может излучать или поглотить, называется квантом энергии. Энергия кванта определяется формулой

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка; ν – частота, Гц; λ – длина волны, c – скорость света.

Кванты электромагнитного излучения получили название *фотонов*.

Масса фотона m находится из закона взаимосвязи массы и энергии

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}.$$

Фотон имеет только релятивистскую массу, масса покоя фотона равна нулю. Импульс фотона

$$p = mc = \frac{h}{\lambda}.$$

Так как фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на поверхность, должен оказывать на нее давление. Пусть за время Δt на поверхность падает ΔN фотонов, коэффициент отражения света от поверхности ρ . Сила давления света F численно равна импульсу, который фотоны передают поверхности в единицу времени

$$F = (1 + \rho) \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \frac{h}{\lambda}.$$

Задание 2. Решите задачи. В конце задач приведен ответ для самопроверки.

1. Определите энергию E , массу m и импульс p фотонов рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 100$ пм.

$$\left[\begin{aligned} E = h \frac{c}{\lambda} &= 1,99 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}; m = \frac{E}{c^2} = 2,2 \cdot 10^{-32} \text{ кг}; \\ p &= \frac{E}{c} = 6,625 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \end{aligned} \right].$$

2. Найдите импульс p и энергию W : а) рентгеновского фотона с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$; б) электрона, длина волны де Бройля которого $1 \text{ \AA}$.

$$\left[\begin{aligned} \text{а) } p &= 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}; W = 1,24 \cdot 10^4 \text{ эВ}, \\ \text{б) } p &= 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}; W = 1,51 \cdot 10^2 \text{ эВ}, \end{aligned} \right].$$

3. При какой температуре T средняя кинетическая энергия теплового движения молекул одноатомного газа равна энергии фотонов рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 0,1 \text{ нм}$?

$$\left[T = \frac{2hc}{3k\lambda} = 96 \cdot 10^6 \text{ К} \right].$$

4. Рубиновый лазер излучает в одном импульсе энергию $W = 50$ Дж. Определите число фотонов N в одном импульсе, если длина волны излучаемого света $\lambda = 698,3 \text{ нм}$.

$$\left[N = \frac{W \cdot \lambda}{hc} = 1,75 \cdot 10^{20} \right].$$

5. Фотон излучения с длиной волны λ сталкивается с покоящимся электроном и при упругом, взаимодействии теряет 20% своей энергии. Определите длину волны λ' фотона после рассеяния.

$$[\lambda' = 1,25\lambda].$$

6. Мощность газового лазера, работающего в непрерывном режиме, равна P . Перпендикулярно направлению светового пучка расположена мишень. Определите силу F_1 давления светового пучка лазера на мишень, полностью поглощающую его излучение. Какой будет сила F_2 , если мишень отражает все падающие на нее лучи? Какова сила F_3 при коэффициенте отражения ρ ?

$$\left[F_1 = \frac{P}{c}; F_2 = \frac{2P}{c}; F_3 = \frac{(1 + \rho)P}{c}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right]$$

Фотоэффект

Испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения называется *внешним фотоэффектом*.

Законы внешнего фотоэффекта.

1. Число электронов, выбиваемых из фотокатода, прямо пропорционально интенсивности света.

2. Кинетическая энергия электронов не зависит от интенсивности света, а определяется его частотой (длиной волны).

3. Для каждого материала фотокатода существует некоторая минимальная частота $\nu_{\text{кр}}$, называемая красной границей фотоэффекта, ниже которой фотоэффект невозможен.

Закономерности фотоэффекта могут быть объяснены на основе квантовой теории фотоэффекта, предложенной А. Эйнштейном. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2},$$

энергия фотона $h\nu$ расходуется на совершение работы выхода $A_{\text{вых}}$ и сообщение ему кинетической энергии. С уменьшением частоты света кинетическая энергия электронов уменьшается, предельная частота $\nu_{\text{кр}}$ определяется как

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h}.$$

Задание 3. Решите задачи. В конце задач приведен ответ для самопроверки.

1. Изолированная металлическая пластинка освещается светом с длиной волны $\lambda = 450$ нм. Работа выхода электронов из металла $A_{\text{вых}} = 2$ эВ. До какого потенциала φ зарядится пластинка при непрерывном действии света?

$$\left[\varphi = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}}{|e|} = 0,75 \text{ В} \right].$$

2. Металлический шар радиусом $R = 2$ см освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 140$ нм. Определите макси-

мальный заряд q шара. Красная граница фотоэффекта для материала шара $\lambda_0 = 278$ нм.

$$\left[q = \frac{4\pi\varepsilon_0 R \cdot hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 9,8 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \right].$$

3. Красная граница фотоэффекта для платины лежит около $\lambda_1 = 198$ нм. Если платину прокалить при высокой температуре, то красная граница фотоэффекта станет равной $\lambda_2 = 220$ нм. На сколько прокаливание уменьшает работу выхода электронов?

$$\left[\Delta A_{\text{вых}} = hc \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 0,6 \text{ эВ} \right].$$

4. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 83$ нм. На какое максимальное расстояние l от поверхности электрода может удалиться фотоеlectron, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 7,5$ В/см? Красная граница для алюминия соответствует длине волны $\lambda_0 = 332$ нм.

$$\left[l = \frac{hc}{E|e|} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \right].$$

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Соотношение неопределенностей Гейзенберга](#)
- [Операторы и их свойства](#)
- [Операторы квантовой механики](#)
- [Принципы построения математического аппарата квантовой механики](#)
- [Энергетическая диаграмма](#)
- [Материалы для практической работы](#)

2.1. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Открытие волновых свойств микрочастиц (волн де Бройля) поставило вопрос, как описывать движение частиц, учитывая их волновые свойства.

Первое, что пришло в голову – объяснить волновые свойства наличием некоторого материального поля, волны которого способны переносить частицу, аналогично тому, как волны на поверхности воды переносят бумажный кораблик. Однако до сих пор такие материальные волны в отсутствии частицы обнаружить не удалось.

Другой подход основан на представлении микрочастицы в виде волнового пакета, сгустка электро-магнитных волн, который возникает при наложении большого числа волн разной частоты.

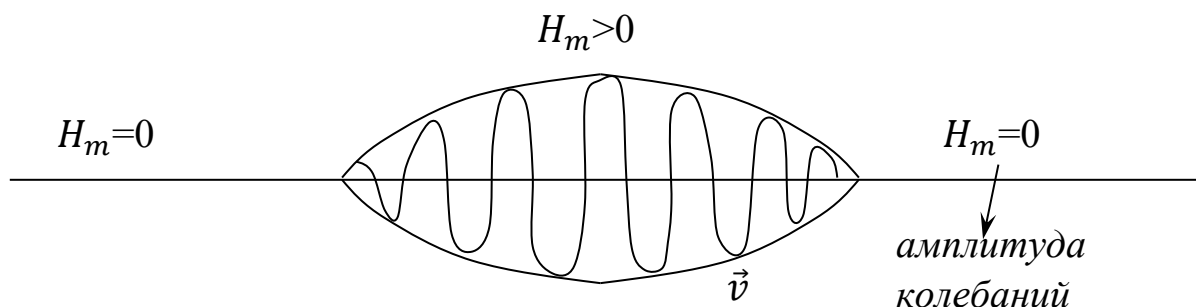


Рис. 2.1.

Однако более строгие вычисления на основе электродинамики Максвелла показывают, что этот волновой пакет очень быстро разваливается.

Третий подход основан на отказе от материализации волн де Бройля. Рассмотрим эксперимент по дифракции электронов на щели.

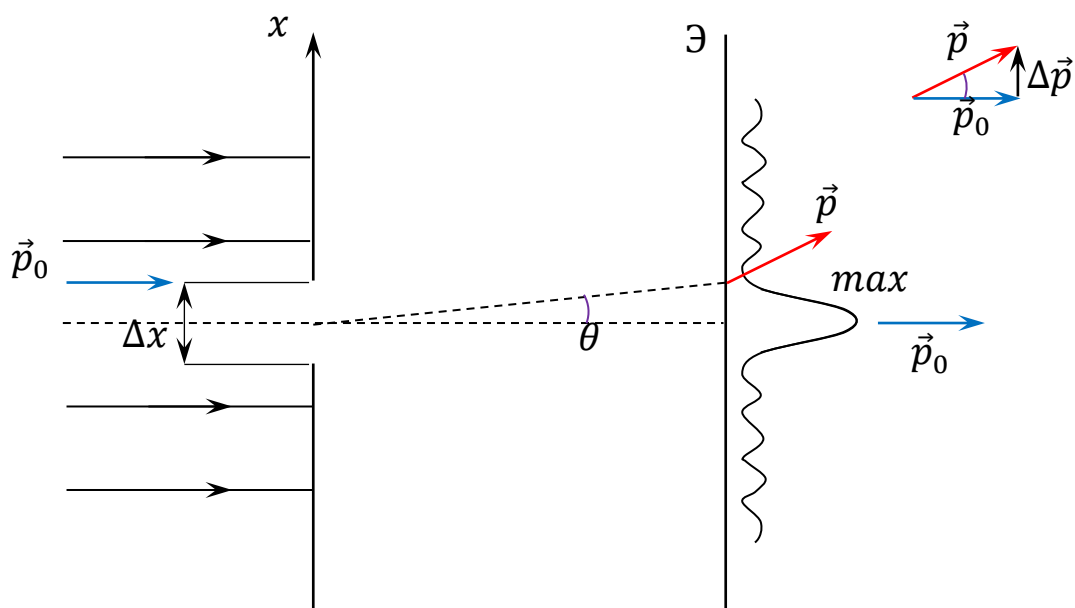


Рис. 2.2

Если ось направить вертикально, то для электронов, попавших на экран, ширина щели определяет неопределенность в определении координаты Δx .

Из оптики известно, что условие первого минимума определяется формулой

$$b \sin \theta = \lambda,$$

где b – ширина щели.

В нашем случае

$$b = \Delta x, \quad \lambda = \lambda_B = \frac{h}{p},$$

тогда

$$\Delta x \sin \theta = \frac{h}{p_0}.$$

С другой стороны, из треугольника импульсов, имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta p_x}{p_0}.$$

Так как угол θ мал, то $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta$. Тогда получаем

$$\frac{h}{p_0 \Delta x} = \frac{\Delta p_x}{p_0} \Rightarrow \Delta x \Delta p_x = h.$$

Так как электроны могут оказаться за пределами первого максимума, то

$$\Delta x \Delta p_x \geq h.$$

Более строгие расчеты показывают

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar.$$

Это и есть *соотношение неопределенностей Гейзенберга*.

2.2. Операторы и их свойства

Соотношение неопределенностей Гейзенберга убедительно показывает, что привычная для классической физики математика не дает в микромире нужного результата. Оказалось, что к решению многих проблем описания микромира, удобно применять математический аппарат, основанный на линейных операторах.

Оператором $\hat{F}$ будем называть правило, по которому одной функции ставится в соответствие другая функция

$$\hat{F}\Psi = \varphi.$$

Читается: результат действия оператора $\hat{F}$ на функцию Ψ совпадает с функцией φ .

Пример 1. $\hat{F} = \frac{\hat{a}}{dx}$ – первая производная по x .

Пример 2. $\hat{F} = \hat{x}$ – умножение на независимую переменную x .
 $\hat{F}\Psi(x) = \hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x)$.

В квантовой механике в общем случае будем использовать комплексные функции. Поэтому и операторы могут быть комплексными.

Оператор $\hat{F}$ называется линейным, если для любых функций Ψ_1 и Ψ_2 , и любых комплексных множителей c_1 и c_2 справедливо равенство

$$\hat{F}(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) = c_1\hat{F}\Psi_1 + c_2\hat{F}\Psi_2.$$

Читается: результат действия оператора $\hat{F}$ на любую комбинацию любых двух функций совпадает с линейной комбинацией результатов действия оператора $\hat{F}$ на эти же функции с теми же коэффициентами.

Это свойство легко обобщается на случай линейной комбинации любого числа функций.

Суммой операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ называют оператор $\hat{F} + \hat{G}$, такой что

$$(\hat{F} + \hat{G})\Psi = \hat{F}\Psi + \hat{G}\Psi.$$

Результат действия этого оператора на любую функцию совпадает с суммой результатов действия каждого из слагаемых на эту функцию.

Произведением оператора $\hat{F}$ на комплексное число c называют оператор $c\hat{F}$, такой что

$$c\hat{F}\Psi = c(\hat{F}\Psi).$$

Результат действия этого оператора на любую функцию совпадает с (определяется как) произведением результата действия оператора $\hat{F}$ на эту функцию и числа c .

Произведением двух операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ оператор $\hat{F}\hat{G}$, такой что

$$(\hat{F}\hat{G})\Psi = \hat{F}(\hat{G}\Psi).$$

Результат действия этого оператора на любую функцию совпадает с результатом последовательного действия на эту функцию сна-

чала второго множителя, а затем первого. Иногда в левой части скобки не ставятся.

В общем случае *произведение операторов некоммутативно*, т.е. может зависеть от порядка множителей.

Для того, чтобы узнать является ли произведение операторов коммутативным, нужно подействовать на произвольную функцию сначала произведением с одним порядком множителей, а затем с другим. Если результаты действия совпадают, говорят, что эти операторы *коммутируют*, если не совпадает – не коммутируют.

Пример 3. $\hat{F} = \frac{\widehat{d}}{dx}, \hat{G} = \hat{x}$. Возьмем произвольную функцию Ψ .

$$\hat{F}\hat{G}\Psi = \left(\frac{\widehat{d}}{dx}\hat{x}\right)\Psi = \frac{\widehat{d}}{dx}(\hat{x}\Psi) = \frac{\widehat{d}}{dx}(x\Psi) = \frac{dx}{dx} \cdot \Psi + x \frac{d\Psi}{dx} = \Psi + x \frac{d\Psi}{dx}.$$

$$\hat{G}\hat{F}\Psi = \left(\hat{x}\frac{\widehat{d}}{dx}\right)\Psi = \hat{x}\left(\frac{\widehat{d}}{dx}\Psi\right) = \hat{x}\frac{d\Psi}{dx} = x \frac{d\Psi}{dx}.$$

Результаты действия операторов не совпадают, $\hat{F}\hat{G} \neq \hat{G}\hat{F}$, операторы не коммутируют.

Оператор $\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$ называют *коммутатором операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$* .

Если коммутатор равен нулю, то операторы коммутируют, если не равен нулю – не коммутируют.

Функция Ψ называется *собственной функцией оператора $\hat{F}$* , если

$$\hat{F}\Psi = \lambda\Psi,$$

где λ – некоторое, в общем случае комплексное, число, которое называется *собственным значением*.

Читается: результат действия оператора на функцию Ψ отличается от самой функции на некоторый постоянный множитель, либо совпадает с функцией с точностью до постоянного множителя.

Обычно говорят, что функция Ψ – это *собственная функция оператора $\hat{F}$* , принадлежащая собственному значению λ .

Множество всех собственных значений оператора называют его *спектром*.

Оператор $\hat{F}^*$ называют сопряженным оператору $\hat{F}$, если для любых двух функций Ψ и φ справедливо равенство

$$\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int (\hat{F}^* \Psi)^* \varphi dX.$$

Интегрирование проводится по всему пространству X , $*$ — комплексное сопряжение.

Следует отметить, что сам оператор $\hat{F}$ по отношению к оператору $\hat{F}^*$ также является сопряженным. Поэтому говорят обычно, что операторы $\hat{F}$ и $\hat{F}^*$ сопряженные операторы.

Если $\hat{F} = \hat{F}^*$, это означает, что оператор сопряжен сам с собой (самосопряженный оператор или эрмитов оператор).

Для самосопряженных операторов имеем

$$\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int (\hat{F} \Psi)^* \varphi dX,$$

так как

$$(\hat{F} \Psi)^* = \hat{F}^* \Psi^*,$$

получаем

$$\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int \hat{F}^* \Psi^* \varphi dX. \quad (2.1)$$

Важнейшим свойством самосопряженных операторов является то, что их собственные значения действительные числа. Докажем это.

Пусть φ — собственная функция самосопряженного оператора $\hat{F}$, принадлежащая собственному значению λ , т.е.

$$\hat{F} \varphi = \lambda \varphi.$$

Определение самосопряженного оператора (2.1) справедливо для любых функций Ψ и φ , значит оно справедливо и для случая, когда $\Psi = \varphi$, т.е.

$$\int \varphi^* \hat{F} \varphi dX = \int \varphi (\hat{F} \varphi)^* dX.$$

Преобразуем левую часть

$$\int \varphi^* \hat{F} \varphi dX = \int \varphi^* \lambda \varphi dX = \lambda \int \varphi^* \varphi dX.$$

Преобразуем правую часть

$$\int \varphi (\hat{F} \varphi)^* dX = \int \varphi (\lambda \varphi)^* dX = \lambda^* \int \varphi \varphi^* dX = \lambda^* \int \varphi^* \varphi dX.$$

Приравнявая левую и правую часть, получаем

$$\lambda \int \varphi^* \varphi dX = \lambda^* \int \varphi^* \varphi dX \Rightarrow \lambda = \lambda^*.$$

$$\lambda = a + bi, \quad \lambda^* = a - bi, \quad a + bi = a - bi,$$

$$2bi = 0, \Rightarrow b = 0.$$

Следовательно λ – действительное число ($\lambda \in \mathbb{R}$).

2.3. Операторы квантовой механики

Так как микрочастицы обладают волновыми свойствами, естественно предположить, что функция состояния микрочастицы должна напоминать уравнение волны. В оптике уравнение волны, распространяющейся вдоль оси Ox , имеет вид

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (2.2)$$

где k модуль волнового вектора и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

ω – циклическая частота.

Выразим в этом уравнении k и ω через энергию E и импульс $\vec{p}$ микрочастицы.

Аналогично фотону энергия микрочастицы

$$E = h\nu,$$

$$\omega = 2\pi\nu,$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow E = \frac{h\omega}{2\pi}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow$$

$$E = \hbar\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar},$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = k\hbar \Rightarrow$$

$$k = \frac{p}{\hbar}.$$

В случае, когда частица движется вдоль оси Ox , имеем

$$k = \frac{p_x}{\hbar}.$$

Тогда для уравнения (2.2) получим

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}. \quad (2.3)$$

Функция (2.3) – это функция состояния микрочастицы, движущейся вдоль оси Ox .

Проведенные нами рассуждения нельзя рассматривать как вывод этой функции, но дальнейшее развитие квантовой механики подтверждает эти рассуждения.

Каждой динамической переменной в квантовой механике соответствует *эрмитов* оператор. Операторы действуют на функции состояния (волновые функции). При этом собственные значения оператора соответствуют возможным численным значениям физической величины, заданной оператором. При этом собственная функция, принадлежащая собственному значению оператора, описывает состояние системы в момент измерения.

Предположим, что, полученная нами функция Ψ является собственной функцией оператора энергии E и оператора проекции импульса p_x на ось Ox . Если это так, то выполняются условия

$$\begin{cases} \hat{E}\Psi = E\Psi, \\ \hat{p}_x\Psi = p_x\Psi. \end{cases} \quad (2.4)$$

Если мы сможем продифференцировать такую функцию, то сможем найти операторы.

Продифференцируем (2.3) по времени t

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)} \cdot \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = -\frac{i}{\hbar}E\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar}E\Psi. \end{aligned}$$

Поделим обе части на выражение $\left(-\frac{i}{\hbar}\right)$

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

Учитывая условие (2.4), получаем

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t},$$

или

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) выражает *оператор энергии микрочастицы*.

Аналогично можно получить вид оператора $\hat{p}_x$, продифференцируем функцию (2.3) по координате x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)} \cdot \left(-\frac{i}{\hbar}(-p_x)\right) = \frac{i}{\hbar}p_x\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)},$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi.$$

Учитывая условие (2.4), получаем

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

или

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) выражает *оператор проекции импульса микрочастицы*.

В квантовой механике действует *принцип соответствия*, одним из следствий которого является тот факт, что соотношения между операторами в квантовой механике соответствуют соотношениям между физическими величинами в классической физике.

Например,

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

В классической механике

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}.$$

Между операторами будет такая же зависимость

$$\hat{p} = \hat{p}_x \vec{i} + \hat{p}_y \vec{j} + \hat{p}_z \vec{k} = -i\hbar \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

получаем

$$\hat{p} = -i\hbar \text{grad} = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

где $\vec{\nabla}$ – оператор набла.

В классической механике кинетическая энергия выражается

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Из принципа соответствия

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad p^2 = \vec{p}^2, \quad \hat{p}^2 = -i\hbar \vec{\nabla}^2.$$

Подействуем оператором $\hat{p}^2$ на функцию Ψ

$$\begin{aligned} (\hat{p})^2 \Psi &= (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi = -i\hbar \vec{\nabla} (-i\hbar \vec{\nabla}) \Psi = \\ &= (-i\hbar)^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla} \Psi = -\hbar^2 \vec{\nabla}^2 \Psi = -\hbar^2 \Delta \Psi, \\ (\hat{p})^2 \Psi &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta,$$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

где Δ – оператор Лапласа.

В классической механике, как правило, потенциальная энергия выражается как некоторая функция, заданная в каждой области пространства, т.е. с точки зрения математики

$$U = U(x, y, z).$$

Динамическим переменным в квантовой механике соответствуют операторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ умножения на независимые переменные x , y , z соответственно. Поэтому, если потенциальная энергия является функцией x, y, z , то ее оператор будет представлять собой умножение на эту функцию

$$\hat{U} = U(x, y, z).$$

Рассмотрим полную энергию

$$H = T + U,$$

тогда

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U},$$

где оператор Гамильтона (гамильтониан)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z).$$

Можно предположить, что результат действия оператора Гамильтона на функцию состояния совпадает с результатом действия на ту же функцию оператора полной энергии $\hat{E}$

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi.$$

Получили *нестационарное уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

В квантовой механике это уравнение выполняет роль уравнения движения, оно позволяет описывать изменение состояния системы со временем.

В стационарном случае

– функция состояния не меняется со временем $\psi = \psi(\vec{r})$, при обозначения использовать ψ (строчный символ) для отличия от нестационарного случая Ψ (заглавный символ);

– результат действия оператора $\hat{E}$ на ψ равен нулю $\hat{E}\psi = 0$.

Таким образом, *стационарное уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi = 0.$$

Уравнение Шредингера, как и другие основные уравнения физики нельзя строго вывести из других законов. Мы получили его, используя некоторые логические рассуждения, а его правильность подтверждает поведение микрообъектов.

Таким образом, при описании микросистем необходимо решая уравнение Шредингера, получить волновую функцию Ψ , которая в свою очередь полностью описывает состояние системы.

Таблица 2.1

Динамическая переменная	Оператор квантовой механики
x, y, z	$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (умножение на независимую переменную)
p_x, p_y, p_z	$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$
$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$	$\hat{p} = -i\hbar \text{grad} = -i\hbar \vec{\nabla}$
$T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
$U = U(x, y, z)$	$\hat{U} = U(x, y, z)$
$H = T + U$	$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)$
E	$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

2.4. Принципы построения математического аппарата квантовой механики

1. *Принцип существования* – существует функция состояния (волновая функция) микрообъекта Ψ , являющаяся решением уравнения Шредингера, имеющая тот смысл, что квадрат ее модуля совпадает с плотностью вероятности, т.е. вероятностью обнаружить микрообъект в единичном объеме вблизи заданной точки. Исходя из этого физического смысла $\int |\Psi|^2 dX = 1$ – условие нормировки.

2. *Принцип суперпозиции* – существует набор функций состояния $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ (базис), определяющий все возможные независимые состояния. Тогда любое состояние системы описывает волновая функция

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots$$

Коэффициенты c_i этого разложения определяют вероятность реализации i -го независимого состояния

$$\omega_i = |c_i|^2.$$

Для любых двух функций базиса справедливо соотношение

$$\int \Psi_i \Psi_j^* dX = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

– определяет ортогональность базисных функций.

3. *Принцип соответствия* – всякая квантовая теория, например, квантовая механика, содержит старую (классическую физику) как частный, предельный случай. Всегда существует предельный переход от квантовых свойств к классическим при рассмотрении состояния макрообъектов.

Применительно к квантовой механике принцип соответствия можно сформулировать несколько иначе. Каждой динамической переменной в классической физике соответствует оператор квантовой механики, при этом соотношения между операторами аналогичны соотношениям между соответствующими величинами в классической физике.

4. *Принцип дополнительности* – соотношение неопределенностей Гейзенберга для микрообъекта показывает, что в квантовой механике не удастся одновременно точно измерить координаты микрочастицы и проекции импульса на соответствующую ось, поэтому описание поведения микрообъекта можно ввести либо на основе координатного базиса, либо на основе импульсного. Эти способы являются дополнительными по отношению друг к другу. Принцип дополнительности можно сформулировать и по-другому, волновые свойства микрообъектов являются дополнительными к квантовым свойствам и совместно описывают его поведение (кратко это называется корпускулярно-волновой дуализм).

Таблица 2.2

	<i>Понятия в классической физике</i>			<i>Что им соответствует в квантовой механике</i>
1.	Состояние системы.	→	1.	Ψ – функция состояния (волновая функция): $\Psi(\vec{r}, t)$ – описывает нестационарное состояние, $\Psi(\vec{r})$ – описывает стационарное состояние.
2.	Динамическая переменная (физическая величина).	→	2.	Линейный эрмитов оператор.
3.	Числовое значение физической величины.	→	3.	Собственное значение оператора.
4.	Состояние системы в момент измерения величины λ .	→	4.	Собственная функция оператора, соответствующая собственному значению λ .
5.	Множество всех возможных значений физической величины.	→	5.	Спектр оператора.
6.	Две физические величины можно измерить одновременно.	→	6.	Операторы коммутируют.
7.	Две физические величины нельзя измерить одновременно.	→	7.	Операторы не коммутируют.

2.5. Энергетическая диаграмма

В конкретных задачах мы на основе уравнения Шредингера будем пытаться определить вид волновой функции Ψ , которая, будучи определенной, полностью описывает поведение микрообъектов. Однако иногда хочется представить результат не только аналитически, но и более наглядно – графически. Есть несколько способов сделать это.

1 способ – диаграммы (схемы) энергетических уровней,

2 способ – построение графика $|\Psi(\vec{r})|^2$,

3 способ – построение энергетической диаграммы с использованием потенциальных кривых.

Мы остановимся на третьем способе.

Пример 1. Классический линейный осциллятор (например, тело движется вдоль прямой и совершает колебания – пружинный маятник).

На графике (рис. 2.3.) показано изменение энергии. Максимум потенциальной энергии (кинетическая энергия равна 0) в точке $x = A$, спускаемся вниз вдоль кривой, потенциальная энергия уменьшается до 0 (кинетическая – максимальна) в точке $x = 0$, затем поднимаемся вдоль кривой, потенциальная энергия снова возрастает до максимума (кинетическая – убывает до 0) в точке $x = -A$.

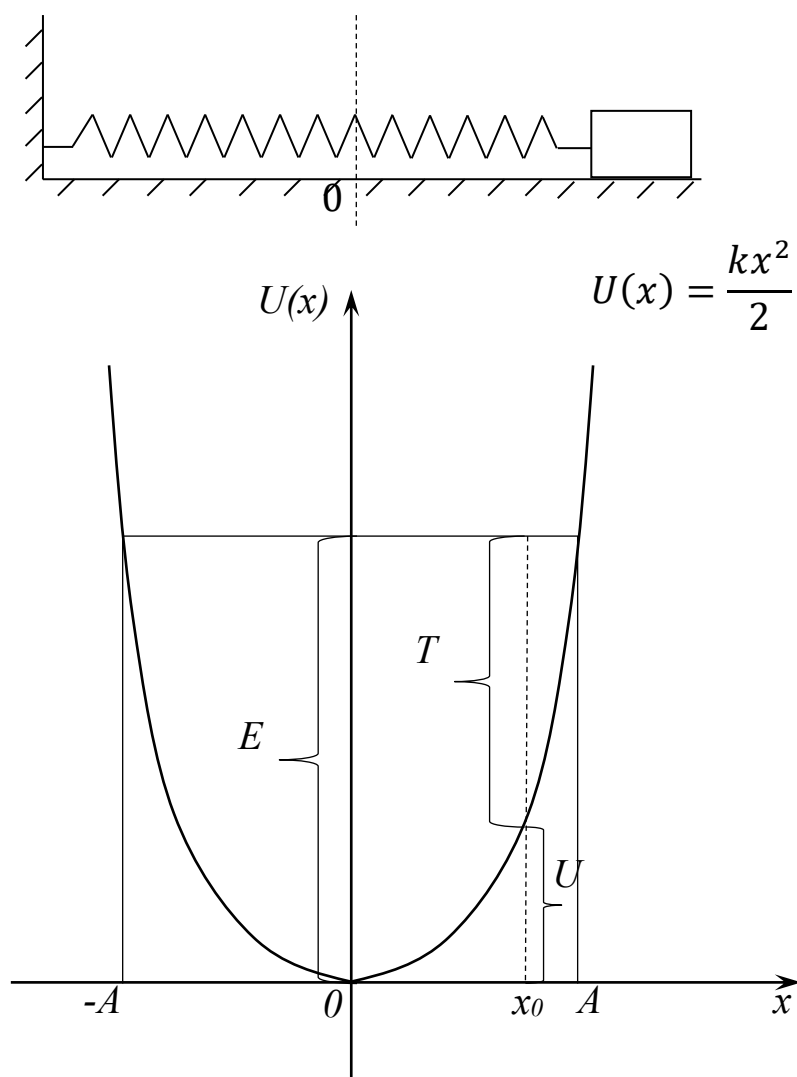


Рис.2.3

Пример 2. Электрон в кулоновском поле ядра.

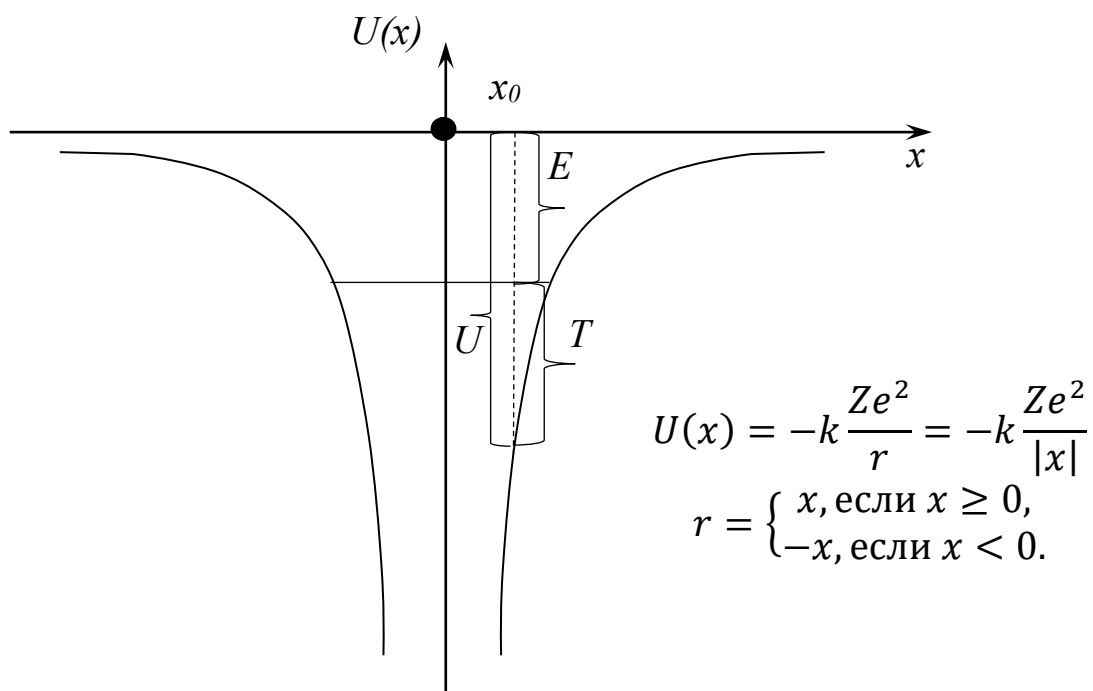


Рис. 2.4.

Пример 3. Одномерная кристаллическая решетка.

Пунктиром показаны электроны, которые могут преодолеть барьер. Внутренние электроны локализованы внутри атома.

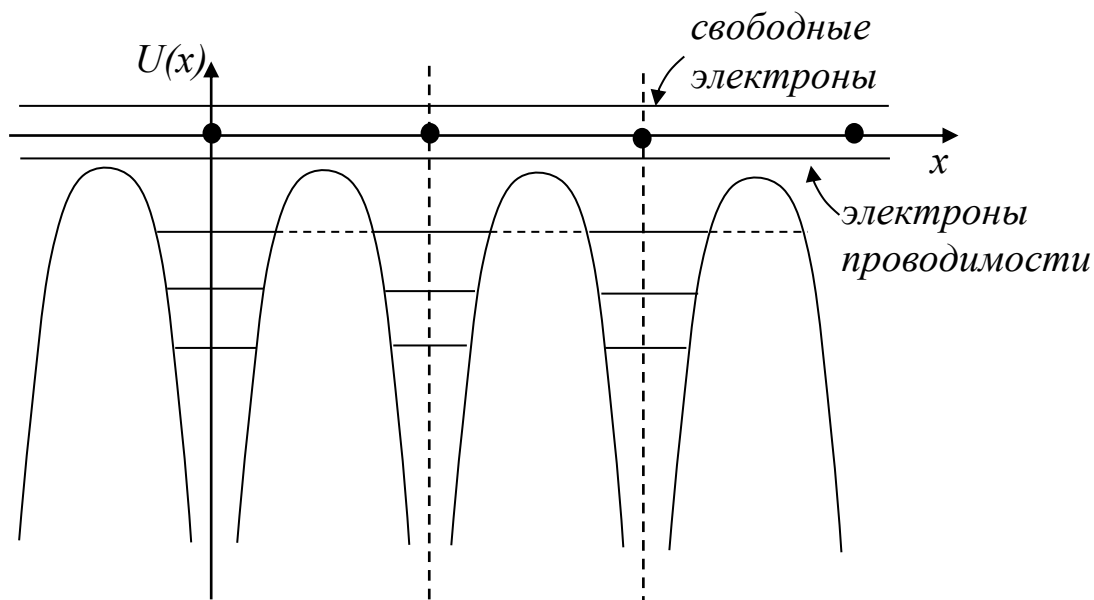


Рис. 2.5.

Для валентных электронов возможен туннельный эффект – преодоление электроном потенциального барьера, «высота» которого превышает энергию электрона.

Пример 4. Ионная связь на примере NaCl.

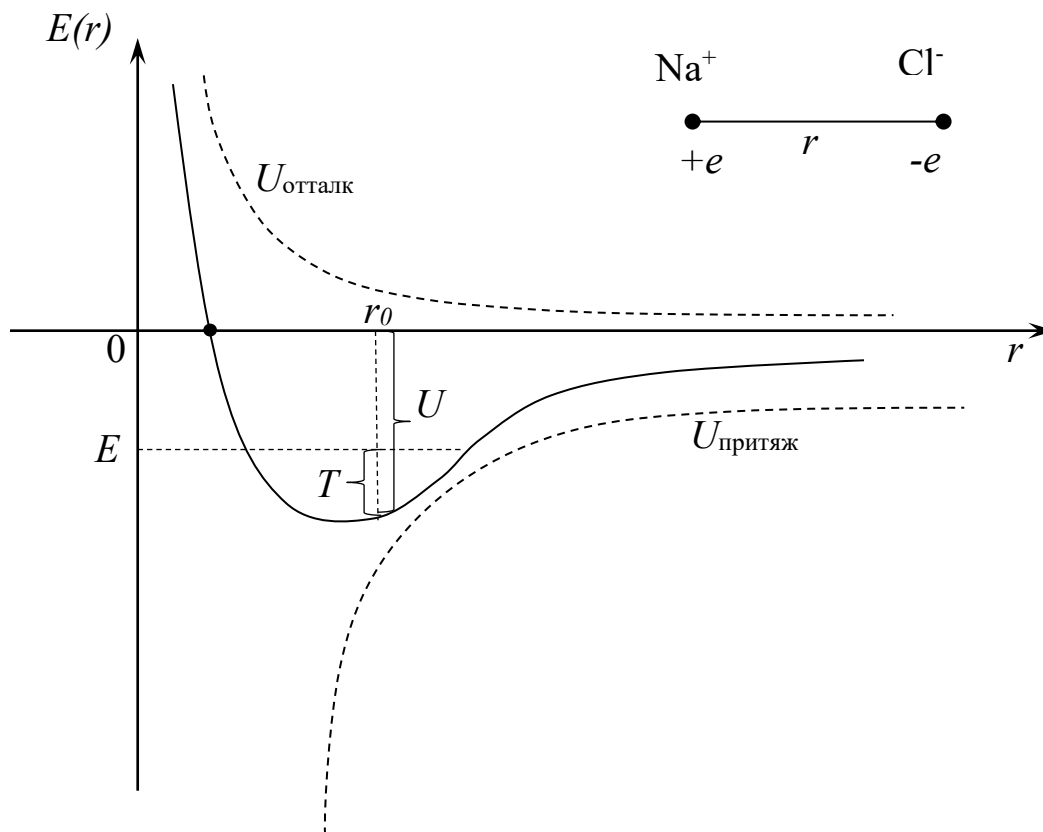


Рис. 2.6.

При сближении ионов возникает кулоновское отталкивание одноименно заряженных электронных облаков. Энергетические оценки показывают, что энергия отталкивания

$$U_{\text{оттлк}} = \frac{\alpha}{r^n}, \quad n \geq 2, \quad n = 5.$$

Энергия притяжения

$$U_{\text{притяж}} = -k \frac{e^2}{r}.$$

При r_0 – минимальное равновесное расстояние.

$$U = U_{\text{притяж}} + U_{\text{оттлк}}.$$

Эта диаграмма показывает, почему при повышении температуры равновесное расстояние увеличивается. Кристалл нагревается и расширяется.

Пример 5. α – частица в ядре (взаимодействие α – частицы с ядром).

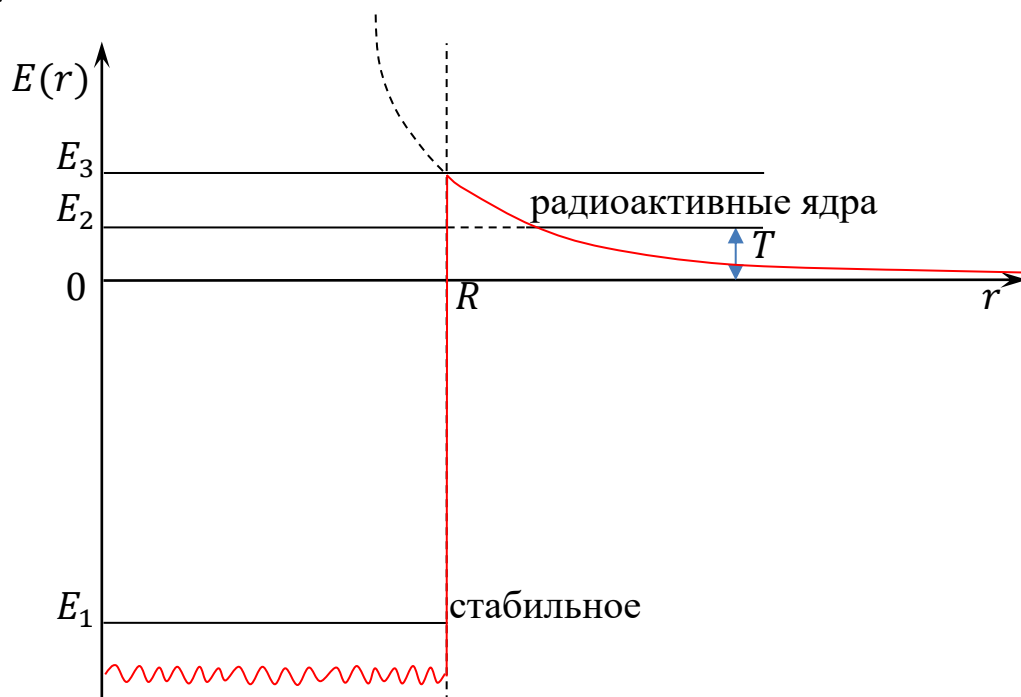


Рис. 2.7

На диаграмме (рис. 2.7) r – расстояние от центра ядра до α -частицы.

Ядерные силы – короткодействующие. Если $R < r$, то можно считать, что возникает электростатическое отталкивание α – частицы и ядра, которое потеряло α – частицу. Энергия этого взаимодействия (отталкивания) положительна

$$U_{\text{отталкивание}} = \frac{2(Z-2)e^2}{r}.$$

Если энергия α -частицы в ядре отрицательна $E_1 < 0$. Может ли вылететь α -частица? Не может, так как потенциальный барьер этой α – частицы имеет бесконечную ширину. Вероятность того, что α – частица преодолеет барьер, равна нулю.

Если энергия $E_2 > 0$, то потенциальный барьер будет иметь конечную высоту и ширину. Тогда существует вероятность туннельного эффекта. В классической физике такого нет. И когда α – частица вылетает и преодолевает этот барьер, имеет энергию T .

Если $E_3 > E_2$. Высота и ширина барьера меньше, следовательно, вероятность туннельного эффекта возрастает. А значит, возрастает вероятность α – распада.

Очевидно, что период полураспада уменьшается. Эксперимент показывает, что период полураспада у разных радиоактивных ядер варьируется от миллионов лет до нескольких миллисекунд. Чем меньше период полураспада, тем больше кинетическая энергия.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Выражение оператора Гамильтона (гамильтониана) включает
 - a) только кинетическую энергию;
 - b) только потенциальную энергию;
 - c) сумму кинетической и потенциальной энергии;
 - d) разность кинетической и потенциальной энергии.
2. Для соотношения неопределенностей Гейзенберга верно утверждение(я)
 - a) соотношение неопределенностей применимо только к микрочастицам;
 - b) соотношение неопределенностей запрещает одновременное точное измерение координаты и импульса;
 - c) соотношение неопределенностей следует из волновых свойств частиц;
 - d) все вышеперечисленное.
3. Соотношение неопределённости Гейзенберга для импульса и координаты
 - a) $\Delta x p_x \geq \hbar$;
 - b) $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$;
 - c) $x p_x \geq \hbar$;
 - d) $\Delta x \Delta p_x \geq \lambda$.
4. Собственные значения эрмитова оператора всегда являются
 - a) комплексными числами.
 - b) действительными числами.
 - c) мнимыми числами.
 - d) иррациональными числами.
5. Выражение для оператора кинетической энергии микрочастицы
 - a) $\hat{E} = \hbar \frac{\partial}{\partial t}$;
 - b) $\hat{E} = x \hat{p}_x$;

с) $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t};$

д) $\hat{E} = \lambda \frac{\partial}{\partial t}.$

6. Выберите принципы построения математического аппарата квантовой механики

- а) принцип существования;
- б) принцип возникновения;
- с) принцип суперпозиции;
- д) принцип соответствия;
- е) Принцип неопределённости;
- ф) принцип дополнительности;

7. На основе какого уравнения можно определить вид волновой функции Ψ , которая, будучи определенной, полностью описывает поведение микрообъектов?

- а) соотношение неопределённости Гейзенберга;
- б) уравнение Шредингера;
- с) оператор Гамильтона;
- д) оператор Лапласа.

8. Установите соответствие между утверждениями классической физики и соответствующими утверждениями квантовой механики.

Понятия классической физики:

- (1) состояние системы;
- (2) динамическая переменная (физическая величина);
- (3) числовое значение физической величины;
- (4) состояние системы в момент измерения величины λ ;
- (5) множество всех возможных значений физической величины;
- (6) две физические величины можно измерить одновременно;
- (7) две физические величины нельзя измерить одновременно.

Понятия квантовой механики:

- а) линейный эрмитов оператор;
- б) операторы коммутируют;
- с) собственная функция оператора, соответствующая собственному значению λ ;
- д) операторы не коммутируют;
- е) Ψ – функция состояния (волновая функция);
- ф) собственное значение оператора;

g) спектр оператора.

9. Выражение для оператора проекции импульса микрочастицы

a) $\hat{p}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$;

b) $\hat{p}_x = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}$;

c) $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$;

d) $\hat{p}_x = -\lambda \hat{E}$.

10. Туннельный эффект возможен, если

a) энергия частицы больше высоты барьера;

b) энергия частицы меньше высоты барьера;

c) частица движется со скоростью света;

d) барьер отсутствует.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Ранее было рассмотрено, как проявляет себя соотношение неопределенностей Гейзенберга на примере дифракции электронов на щели. Рассмотрим еще один пример проявления соотношения неопределенностей в процессе простейшего измерения.

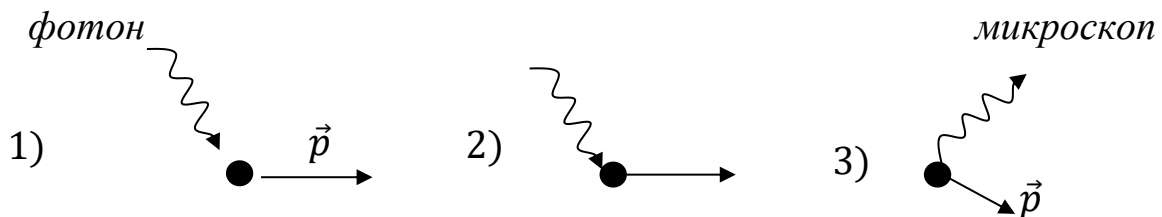


Рис. 2.8.

Чтобы определить местоположение электрона, наблюдатель должен его хотя бы увидеть, для этого нужно направить на него хотя бы один фотон, который отразившись от электрона, попадет в объектив микроскопа и укажет местоположение электрона.

При отражении фотон, который имеет импульс $\frac{h}{\lambda}$, изменяет импульс электрона на величину соизмеримую с $\frac{h}{\lambda}$. Для простоты будем считать, что $\Delta p = \frac{h}{\lambda}$ – изменение импульса в худшем случае. Погрешность в измерении координаты электрона Δx определяется волновыми свойствами света. Из оптики известно, что эта погрешность соизме-

рима с длиной волны света. Будем считать, что $\Delta x = \lambda$. Тогда $\Delta x \Delta p = h$, соизмеримо

$$\Delta x \Delta p = \hbar.$$

Физический смысл: чтобы точнее измерить координату, следует взять фотон с меньшей длиной волны, но тогда неопределенность в определении импульса возрастает. И, наоборот, при попытке точнее измерить импульс, т.е. при увеличении λ , ухудшается точность в определении координаты.

Примеры выполнения заданий.

1. Координата тела массой $m = 1$ г определяется с точностью до 1 мкм (10^{-6} м). Оценить погрешность в определении скорости.

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\geq \hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p = \hbar, \\ \Delta x &= 1 \text{ мкм}, \Delta p = m \Delta v, \Delta x m \Delta v = \hbar, \\ \Delta v &= \frac{\hbar}{\Delta x m} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \cdot 10^{-3}} = 10^{-25} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Можно считать, что скорость такого тела определяется из соотношения неопределенностей абсолютно точно по сравнению с возможностью измерения.

Общий вывод: для макротел соотношение неопределенностей не играет никакой роли.

2. Оценить неопределенность в определении скорости электрона в атоме водорода (H_2).

Размер атома $\Delta x = 10^{-10}$ м.

$$\Delta v = \frac{\hbar}{\Delta x m} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость электрона на первой боровской орбите равна $2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Т.е. погрешность соизмерима с величиной скорости.

Вывод: электрон в атоме водорода нельзя рассматривать только как частицу, следовательно, необходимо учитывать, что электрон волна.

3. Есть ли в атомном ядре электроны?

Размер ядра порядка 10^{-14} м. Поэтому, если электрон находится в ядре, то неопределенность в определении его координаты можно принять $\Delta x = 10^{-14}$ м. Тогда

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-14}} \approx 10^{-20} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Раз неопределенность такого порядка, значит, и сам импульс должен быть не меньше этой величины. Тогда учитывая релятивистский характер движения электронов, кинетическая энергия

$$T = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2},$$

так как $T \gg m_0 c^2$, то

$$T \approx pc = 10^{-20} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 3 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \text{ эВ} = 2 \cdot 10^7 \text{ эВ} = 20 \text{ МэВ}.$$

Но, вылетающий из атома электроны (β – радиоактивное излучение) имеют энергию много меньше этой величины, поэтому можно сделать вывод, что электронов в ядре нет.

Задания для самостоятельной работы.

1. α – частица, испускаемая радием имеет энергию 4,8 МэВ. Пользуясь соотношением неопределенностей, выяснить при какой точности положения α – частицы еще можно пренебречь неопределенностью в определении импульса Δp в сравнении с самим импульсом ($\frac{\Delta p}{p} \sim 1\%$, $\Delta x = ?$).

2. Проверить, может ли электрон находиться в атоме. Размер атома $\Delta x = 10^{-10}$ м. Релятивистский характер можно не учитывать. Энергию посчитать из соотношения $W = \frac{p^2}{2m}$.

Соотношение неопределенностей в школьном курсе физики

Рассмотрим некоторые вопросы, которые могут быть объяснены на школьном уровне изучения физики.

Случайно ли параметры атомов близки к 10^{-10} м или это закономерно? Каков характер движения частиц вещества вблизи абсолютного нуля? Почему свойства электронного газа не похожи на свойства идеального газа?

Этот материал мог бы послужить темой для кружков или факультативных занятий. Строгое рассмотрение указанных вопросов возможно только на базе квантовой механики. Однако если поступиться строгостью решения и довольствоваться не истинными значениями, а лишь порядком интересующих нас величин, то решение задач существенно упрощается. Оказывается, что целый ряд интересных сведений можно получить, если к известным учащимся законам и

соотношениям, изучение которых предусмотрено действующей программой, добавить еще одно – соотношение неопределенностей.

Ниже предлагается элементарный расчет ряда величин, характеризующих некоторые свойства веществ (или процессы, происходящие в веществе) на основе этого соотношения.

В 1927 г. В. Гейзенберг пришел к замечательному выводу, который называется соотношением неопределенностей и записывается следующим образом

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar, \quad (2.7)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05443 \cdot 10^{-34}$ Дж · сек, h – постоянная Планка; Δ – неопределенность координаты; Δp_x – неопределенность проекции импульса на данную ось координат.

Смысл этого соотношения заключается в том, что невозможно одновременно и сколь угодно точно определить координату частицы и проекцию её импульса на данную ось координат.

Не следует думать, что соотношение неопределенностей как-то связано с процедурой измерения искомых величин или с погрешностями измерительных приборов. Оно является следствием двойственной корпускулярно-волновой природы частиц вещества и фотонов.

Обратимся к рассмотрению некоторых важных следствий, вытекающих из соотношения неопределенностей.

Энергия локализованной частицы. Пусть частица массы m находится в некоторой области пространства размером a – как говорят, локализована в этой области.

Тогда неопределенность ее координаты примерно равна размерам этой области:

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a. \quad (2.8)$$

Согласно соотношению неопределенностей, неопределенности проекции ее импульса на оси координат определяются так

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx p_z \approx \frac{\hbar}{a}. \quad (2.9)$$

Естественно считать, что импульс частицы не меньше, чем его неопределенность, т. е. справедливо соотношение:

$$p \geq \frac{\hbar}{a}. \quad (2.10)$$

В самом деле, рассмотрим два каких-либо возможных значения проекции импульса на ось Ox : p_{1x} и p_{2x} . Неопределенность соответствующей проекции

$$\Delta p_x \approx |p_{1x} - p_{2x}|.$$

Как известно, сумма модулей не меньше модуля разности

$$|p_{1x}| + |p_{2x}| \geq |p_{1x} - p_{2x}| \approx \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{a}.$$

Но эти проекции не могут существенно отличаться друг от друга, следовательно

$$|p_x| \geq \frac{\hbar}{2a}.$$

То же справедливо и для остальных проекций. Для импульса имеем

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \geq \sqrt{\frac{3\hbar^2}{4a^2}} \approx \frac{\hbar}{a},$$

т.е. соотношение (2.10) выполняется.

Кинетическая энергия частицы

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (2.11)$$

Итак, если частица локализована в некоторой области пространства размером a , то ее кинетическая энергия не может быть меньше величины

$$K \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Для микрочастицы с малой массой, локализованной в малой области, эта энергия может оказаться достаточно большой, несмотря на исключительную малость постоянной Планка.

Энергия нулевых колебаний. Пусть частица совершает гармонические колебания с амплитудой A (это могут быть, например, колебания атома в узле кристаллической решетки).

Полная энергия такого осциллятора равна максимальному значению кинетической энергии

$$\mathcal{E} = K_{\text{макс}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2, \quad (2.12)$$

где ω – собственная круговая частота осциллятора.

Область локализации частицы совпадает с амплитудой колебаний: $a \approx A$. Записав формулу (2.11) в виде

$$K \geq \frac{\hbar^2}{2mA^2}$$

и умножив ее на (2.12), получим

$$K_{\text{макс}}^2 \geq \frac{\hbar^2 \omega^2}{4}.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{E} = K_{\text{макс}} \geq \frac{\hbar \omega}{2}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) вытекает, что минимальная энергия, которую может иметь гармонический осциллятор, равна $\frac{\hbar \omega}{2}$. Ее называют нулевой энергией осциллятора

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar \omega}{2}. \quad (2.14)$$

Колебания частиц вещества (атомов, молекул), не прекращающиеся и при абсолютном нуле, называются нулевыми колебаниями. Их энергия выражается формулой (2.14).

Несмотря на приближенный характер рассуждений, мы получили точный результат. Наличие нулевых колебаний подтверждается опытами по рассеянию света в кристаллах при температурах, очень близких к абсолютному нулю.

Абсолютный ноль. Как известно, средняя кинетическая энергия молекулы

$$\bar{\mathcal{E}}_k = \frac{3}{2} kT. \quad (2.15)$$

Исходя из этой формулы, иногда определяют абсолютный ноль как температуру, при которой прекращается молекулярное движение. Как видно из предыдущего, это неверно, ибо даже при абсолютном нуле сохраняются нулевые колебания частиц в узлах кристаллической решетки.

Формула (2.15) имеет ограниченную область применения. Она справедлива лишь до тех пор, пока энергия теплового движения kT много больше энергии нулевых колебаний $\frac{\hbar \omega}{2}$.

Что же такое абсолютный ноль? Для него возможны разные определения, например: абсолютным нулем называется нулевой уро-

вень температуры по абсолютной шкале. Ему соответствует температура $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ по Международной практической температурной шкале.

Но никоим образом недопустимо связывать понятие абсолютно-го нуля с прекращением движения частиц вещества.

Температура вырождения. Заменяв в формуле (2.11) кинетическую энергию частицы средней кинетической энергией, согласно формуле (2.15), получим

$$\frac{3}{2}kT \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Величина

$$T_{\text{выр}} = \frac{\hbar^2}{3kma^2} \quad (2.16)$$

называется температурой вырождения. Она характеризует состояние вещества, при котором нарушается прямая пропорциональная зависимость между средней кинетической энергией частиц вещества и температурой.

Итак, при температурах $T \gg T_{\text{выр}}$ средняя энергия хаотического движения частиц пропорциональна абсолютной температуре и выражается формулой (2.15). При температурах ниже $T_{\text{выр}}$ выражение (2.15) непригодно и должно быть заменено другими.

График зависимости средней кинетической энергии частиц вещества от температуры представлен на рис. 2.9. Сплошной линией показана зависимость, вытекающая из квантовой теории, пунктиром – зависимость, вытекающая из классической теории.

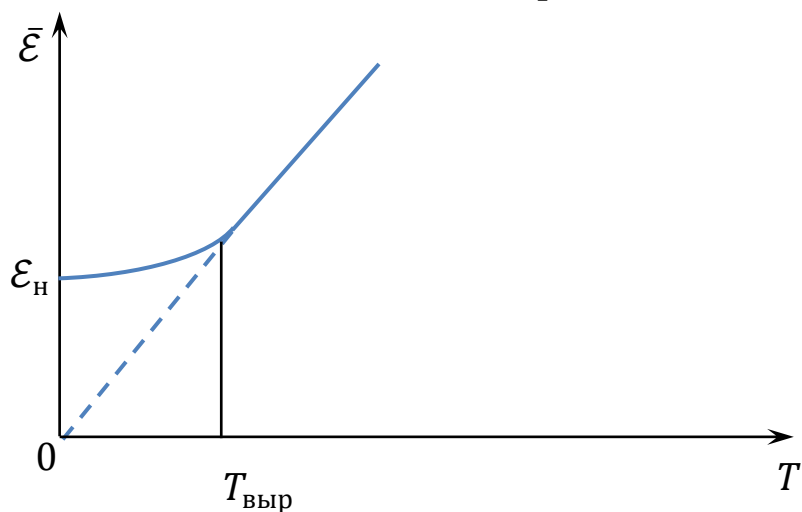


Рис. 2.9

Температуру вырождения можно выразить через концентрацию частиц. Учитывая, что расстояние между частицами a и концентрация частиц n связаны соотношением $n = \frac{1}{a^3}$, из формулы (2.16) получаем

$$T_{\text{выр}} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{3km}. \quad (2.17)$$

Оценим порядок этой величины для нескольких конкретных случаев.

1. Концентрация частиц в парах гелия при температурах, близких к абсолютному нулю, составляет примерно $n \approx 10^{24} \text{ м}^{-3}$. Масса атома He^4 равна $m = 0,67 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$. Подставив числовые величины в (2.17), найдем, что $T_{\text{выр}} \approx 10^{-3} \text{ К}$.

Для всех других веществ (исключая водород), температура вырождения еще ниже, ибо их атомная масса больше атомной массы гелия, а с ростом массы частицы, как это видно из (2.16), температура вырождения уменьшается.

2. Концентрация частиц в жидком гелии $n \approx 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Температура вырождения $T_{\text{выр}} \approx 3 \text{ К}$.

3. Для электронного газа в металлах $n \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$ и $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$. Температура вырождения $T_{\text{выр}} \approx 5000 \text{ К}$.

Принято называть газ вырожденным, если его температура $T \leq T_{\text{выр}}$, вследствие чего средняя энергия частиц, из которых он состоит, не выражается формулой (2.15). Если же температура газа много больше $T_{\text{выр}}$ и средняя энергия его частиц пропорциональна его абсолютной температуре, то говорят, что газ не вырожден.

Итак, молекулярный газ не вырожден до температур, отличающихся от абсолютного нуля всего на тысячные доли градуса. Следовательно, его можно рассматривать как идеальный почти при любых температурах и пользоваться для расчета энергии формулой

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT.$$

Лишь вблизи абсолютного нуля это выражение становится непригодным.

Наоборот, электронный газ в металлах всегда вырожден, и его нельзя считать обычным идеальным газом. Это приводит к ряду важных следствий.

В частности, по этой причине нагрев металла не вызывает изменения энергии электронного газа, хотя меняет энергию кристаллической решетки. Это означает, что наличие электронного газа в металле никак не влияет на его теплоемкость. Как раз при объяснении этого факта классическая теория оказалась несостоятельной, а квантовая теория дала предварительный результат, соответствующий опытным данным.

Размер атома. Попробуем вычислить минимальный радиус электронной орбиты в атоме водорода, что позволит оценить по порядку величины размер любого атома. Предположим, что электрон движется по орбите радиуса r со скоростью v , тогда кулоновская сила выполняет роль центростремительной, т. е.:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

При этом для кинетической энергии получаем выражение

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.18)$$

Записав формулу (2.11) в виде

$$K \geq \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

и подставим в нее значение кинетической энергии (2.18), имеем

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \geq \frac{\hbar^2}{2mr^2}.$$

Откуда

$$r \geq \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Или, приняв

$$\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = a_0, \quad (2.19)$$

получаем

$$r \geq a_0.$$

т. е. радиус любой электронной орбиты не меньше величины a_0 .

Величина a_0 , выражаемая формулой (2.19), называется первым боровским радиусом в честь Н. Бора, который в 1913 г. Вывел эту формулу. Заметим, что и здесь, несмотря на приближенный характер расчета, мы получили точный результат.

Подставив в формулу (2.19) значения мировых констант

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \frac{\Phi}{\text{М}},$$

$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ и $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, получим

$$a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,529 \text{ \AA}.$$

Естественно, что разные атомы из-за различия в заряде ядра имеют несколько разные размеры, но порядок этой величины один и тот же, около $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$.

Плотность вещества. В твердых телах и жидкостях частицы (молекулы, атомы, ионы) плотно упакованы. Следовательно, чтобы оценить плотность вещества в этом состоянии, нужно разделить массу атома на его объем. Поскольку при этом ведется расчет приближенный, оценочный, то можно пренебречь точными значениями величин и коэффициентов, учитывая лишь их порядок. Тогда

$$\rho \approx \frac{m}{a^3} = \frac{A}{Na^3}, \quad (2.20)$$

где m – масса атома, A – атомная масса и $N = 6 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$ – число Авогадро.

Для водорода (в кристаллическом или жидком состоянии)

$$\rho \approx \frac{1}{6 \cdot 10^{26} \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-30}} \approx 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Мы вновь получили по порядку величины правильный результат: плотности твердых тел и жидкостей лежат в пределах $10^3 - 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

В газах при обычных давлениях расстояния между молекулами примерно в 10 раз превосходят расстояния между частицами в жидкостях и твердых телах, поэтому плотность газов в тысячу раз меньше и составляет около $1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Этот результат также соответствует экспериментальным данным.

Размер и состав ядра. Представляется заманчивой попытка оценить размеры ядра так же, как мы оценили размеры атома. Однако в этом случае аналогичным методом пользоваться нельзя. Дело в том, что взаимодействие электрона с ядром осуществляется через электрическое поле и описывается с помощью закона Кулона. Взаимодействие же частиц внутри ядра осуществляется через π -мезонное поле

(«сильное взаимодействие»), и для его описания такого простого закона, как закон Кулона, нет.

Воспользуемся эмпирическими данными о размерах ядра. Опыт показывает, что радиус ядра

$$r_{\text{я}} = \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad (2.21)$$

где A – атомная масса (точнее – массовое число, но здесь это различие несущественно).

Для ядра урана ($A=238$) получим

$$r_{\text{я}} = \sqrt[3]{238} \cdot 10^{-15} \text{ м} = 6,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Радиусы более легких ядер, соответственно, значительно меньше, но по порядку величины равны 10^{-15} м, ибо $\sqrt[3]{A} \leq \sqrt[3]{238}$, т.е. $\sqrt[3]{A} \leq 6$.

Одна из причин, по которой в ядре нет электронов, как раз и заключается в том, что в столь малой области пространства он должен был бы согласно формуле (1.2.10) иметь слишком большой импульс

$$p \approx \frac{\hbar}{r_{\text{я}}} \approx 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$$

и, соответственно, слишком большую энергию.

В самом деле, согласно теории относительности, кинетическая энергия частицы

$$K = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + \varepsilon_0^2} - \varepsilon_0, \quad (2.22)$$

где $\varepsilon_0 = m_0 \cdot c^2$ – энергия покоя. Умножив и разделив (2.22) на $\sqrt{p^2 \cdot c^2 + \varepsilon_0^2} + \varepsilon_0$, получим:

$$K = \frac{p^2 c^2 + \varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^2}{\sqrt{p^2 c^2 + \varepsilon_0^2} + \varepsilon_0} = \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + \varepsilon_0^2} + \varepsilon_0}. \quad (2.23)$$

В классическом приближении, когда скорость частицы меньше скорости света, её импульс мал, и величина $pc \ll \varepsilon_0$. Отбрасывая в знаменателе выражения (2.23) малую величину pc , получим

$$K \approx \frac{p^2 c^2}{2\varepsilon_0} = \frac{p^2 c^2}{2m_0 c^2} = \frac{p^2}{2m_0},$$

т.е. классическое выражение для кинетической энергии.

Если скорость и импульс частицы очень велики, т.е. $pc \ll \varepsilon_0$, можно в знаменателе выражения (2.23) пренебречь малой величиной ε_0 и кинетическая энергия частицы будет равна $K \approx pc$.

Для электрона при импульсе

$$p \approx \frac{\hbar}{r_{\text{я}}} \approx 10^{-19} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$
$$pc \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 200 \text{ МэВ}.$$

Эта величина значительно больше его энергии покоя

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 10^{-31} \text{ кг} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \approx 8 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,5 \text{ МэВ}.$$

Следовательно, кинетическая энергия электрона в этом случае

$$K \approx pc \approx 200 \text{ МэВ}.$$

Итак, электрон может проникнуть в ядро, если его энергия равна сотням мегаэлектронвольт. Такую энергию электрону могут сообщить ускорители, но не электрические поля внутри атома. Действительно, потенциал электрического поля внутри атома

$$\varphi \leq \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{я}}} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-15}} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ В}.$$

Следовательно, оно способно сообщить электрону энергию лишь около 1,5 МэВ, которой недостаточно, чтобы электрон проник в ядро.

У протонов и нейтрона масса покоя

$$m_n = m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1840 m_e;$$

энергия покоя

$$\mathcal{E}_0 = m_p c^2 = 940 \text{ МэВ}.$$

Для нуклонов

$$pc \approx 200 \text{ МэВ}$$

значительно меньше энергии покоя, и можно пользоваться классическим приближением для кинетической энергии $K = \frac{p^2}{2m}$. Кинетическая энергия протона и нейтрона, согласно формуле (2.11), окажется равной

$$K \geq \frac{\hbar^2}{2m_p r_{\text{я}}^2} \approx 8,56 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 0,5 \text{ МэВ},$$

что почти в 2000 раз меньше их энергии покоя. Это позволяет утверждать, что протоны и нейтроны могут входить в состав ядра.

Свойства операторов

Задание 2. Найти результат действия оператора $\hat{F}$ на функцию $\sin x$, если

$$\text{a)} \quad \hat{F} = \left(\frac{\hat{a}}{dx} \hat{x} \right)^2,$$

$$\text{б)} \quad \hat{F} = \left(\hat{x} \frac{\hat{a}}{dx} \right)^2.$$

Решение (б).

$$\begin{aligned} \hat{F}\Psi &= \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right)^2 \sin x = \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right) \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right) \sin x = \\ &= \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right) \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \sin x \right) = \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right) (\hat{x} \cos x) = \\ &= \left(\hat{x} \frac{\hat{d}}{dx} \right) (x \cos x) = \hat{x} \left(\frac{\hat{d}}{dx} (x \cos x) \right) = \hat{x} (\cos x - x \sin x) = \\ &= x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

Задание 3. Доказать, что операторы $\hat{F} = \hat{x}$ и $\hat{G} = \frac{\hat{d}}{dy}$ коммутируют.

ют.

Задание 4. Выяснить коммутируют ли операторы

$$\text{a)} \quad \hat{F} = \hat{x} \text{ и } \hat{G} = \hat{y}, \Psi = \Psi(x, y),$$

$$\text{б)} \quad \hat{F} = \hat{x} \text{ и } \hat{G} = \frac{\hat{d}^2}{dx^2}, \Psi = \Psi(x).$$

Решение (а).

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{x} \text{ и } \hat{G} = \hat{y}, \\ \Psi &= \Psi(x, y), \\ \hat{F}\hat{G}\Psi &= \hat{x}\hat{y}\Psi = \hat{x}y\Psi = xy\Psi, \\ \hat{G}\hat{F}\Psi &= \hat{y}\hat{x}\Psi = \hat{y}x\Psi = yx\Psi. \end{aligned}$$

Результат действия операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ на некоторую функцию $\Psi = \Psi(x, y)$ одинаков, т.е. операторы коммутируют.

Задание 5. Выразить оператор (указание: применить его к функции Ψ)

$$\text{a)} \quad \hat{F} = \left(\frac{\hat{a}}{dx} + 1 \right)^2, \Psi = \Psi(x),$$

$$\text{б)} \quad \hat{F} = \left(\frac{\hat{a}}{dx} + \frac{\hat{a}}{dy} \right)^2, \Psi = \Psi(x, y),$$

$$\text{в)} \quad \hat{F} = \left(\frac{\hat{a}}{dx} + \hat{x} \right)^2, \Psi = \Psi(x,),$$

$$\text{г)} \quad (\hat{F} + \hat{G})(\hat{F} - \hat{G}),$$

$$\text{д)} \quad (\hat{F} - \hat{G})(\hat{F} + \hat{G}).$$

Решение (а).

Поддействуем оператором $\hat{F}$ на некоторую функцию $\Psi = \Psi(x)$

$$\begin{aligned}\hat{F}\Psi &= \left(\frac{\hat{d}}{dx} + 1\right)^2 \Psi = \left(\frac{\hat{d}}{dx} + 1\right) \left(\frac{\hat{d}}{dx} + 1\right) \Psi = \\ &= \left(\frac{\hat{d}}{dx} + 1\right) \left(\frac{d\Psi}{dx} + \Psi\right) = \frac{\hat{d}}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dx} + \Psi\right) + \left(\frac{d\Psi}{dx} + \Psi\right) = \\ &= \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} + \Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + 2\frac{d\Psi}{dx} + \Psi.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\hat{F} = \frac{\widehat{d^2}}{dx^2} + 2\frac{\hat{d}}{dx} + 1.$$

Задание 6. Найти коммутатор операторов $\hat{F} = \frac{\hat{d}}{dx}$ и $\hat{G} = \hat{x}$.

Задание 7. Доказать, что если $\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 1$, то $\hat{F}\hat{G}^2 - \hat{G}^2\hat{F} = 2\hat{G}$.

Сопряженные операторы. Собственные функции и собственные значения

Каждому оператору $\hat{F}$ можно поставить в соответствие оператор $\hat{F}^+$ сопряженный ему.

Если для любых двух функций Ψ и φ выполняется равенство

$$\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int (\hat{F}^+ \Psi)^* \varphi dX, \quad (*)$$

то $\hat{F}$ и $\hat{F}^+$ сопряженные операторы (интегрирование производится по всему пространству X , $*$ - комплексное сопряжение).

Самосопряженный (эрмитов) оператор: $\hat{F}^+ = \hat{F}$. Для него (*) перепишется в виде

$$\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int (\hat{F} \Psi)^* \varphi dX. \quad (1)$$

Для самосопряженного оператора собственное значение – действительное число.

Задание 8. Доказать, что оператор умножения на независимую переменную $\hat{F} = \hat{x}$ эрмитов.

Задание 9. Найти оператор сопряженный оператору $\hat{F} = \frac{\hat{d}}{dx}$.

Задание 10. Является ли самосопряженным оператор (i – комплексная единица)

$$\text{а) } \hat{F} = -\widehat{i \frac{d}{dx}},$$

$$\text{б) } \hat{F} = \widehat{i \frac{d}{dx}},$$

$$\text{в) } \hat{F} = -\widehat{\frac{d^2}{dx^2}}.$$

Теорема. Если $\hat{F}$ и $\hat{G}$ – два самосопряженных коммутирующих оператора, то $\hat{F}\hat{G}$ – самосопряженный оператор.

Доказательство.

$$\int \Psi^* \hat{F} \hat{G} \varphi dX = \int \Psi^* \hat{F} (\hat{G} \varphi) dX,$$

теперь оператор $\hat{F}$ действует на функцию $(\hat{G}\varphi)$ и можно воспользоваться определением

$$\int \Psi^* \hat{F} (\hat{G} \varphi) dX = \int (\hat{F} \Psi)^* \hat{G} \varphi dX,$$

снова воспользуемся определением, но теперь для оператора $\hat{G}$, действующего на функцию φ

$$\int (\hat{F} \Psi)^* \hat{G} \varphi dX = \int (\hat{G} \hat{F} \Psi)^* \varphi dX = \int (\hat{F} \hat{G} \Psi)^* \varphi dX,$$

так как $\hat{F}\hat{G}$ – коммутирующий, то $\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$. Получили

$$\int \Psi^* \hat{F} \hat{G} \varphi dX = \int (\hat{F} \hat{G} \Psi)^* \varphi dX,$$

следовательно $\hat{F}\hat{G}$ – самосопряженный. ■

Задание 11. Доказать, что если $\hat{F}$ и $\hat{G}$ – самосопряженные и $\hat{F} + \hat{G}$ тоже самосопряжен, то $\hat{F}\hat{G} + \hat{G}\hat{F}$ – самосопряжен (замечание: условия, что операторы коммутируют нет).

Функция называется собственной функцией оператора $\hat{F}$, если

$$\hat{F}\Psi = \lambda\Psi,$$

где λ – некоторое, в общем случае комплексное, число, его называют собственным значением оператора.

Множество всех собственных значений оператора называют спектром оператора.

Задание 12. Доказать, что Ψ собственная функция оператора $\hat{F}$

$$\text{а) } \Psi = \cos 4x, \hat{F} = -\widehat{\frac{d^2}{dx^2}},$$

$$\text{б) } \Psi = e^{-\frac{x^2}{2}}, \hat{F} = -\widehat{\frac{d^2}{dx^2}} + \widehat{x^2},$$

$$в) \quad \Psi = x e^{-\frac{x^2}{2}}, \hat{F} = -\frac{\widehat{d^2}}{dx^2} + \widehat{x^2}.$$

Задание 13. Найти спектр оператора $\hat{F} = \frac{1}{i} \frac{\widehat{d}}{dx}$.

Соотношение коммутативности операторов

Одним из отличий квантовой механики от классической является то, что в квантовой механике некоторые величины не могут быть измерены одновременно.

Поставим вопрос. При каком условии с точки зрения математического аппарата квантовой механики две величины можно измерить одновременно?

Каждой физической величине в квантовой механике соответствует линейный эрмитов оператор. Численным значениям величины соответствуют собственные значения оператора. А собственные функции определяют состояние системы в момент измерения, при чем, каждая собственная функция определяет состояние системы при условии, что численное значение совпадает с собственным значением соответствующим этой собственной функции.

Из этого следует: *если две величины можно измерить одновременно, то у них должны быть общие собственные функции.*

Теорема 1. Если операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ имеют общие собственные функции, то они коммутируют.

Доказательство. Пусть Ψ -функция является собственной функцией и для оператора $\hat{F}$ и для оператора $\hat{G}$, т.е.

$$\hat{F}\Psi = \lambda\Psi,$$

$$\hat{G}\Psi = \mu\Psi.$$

Нужно доказать, что операторы коммутируют $\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$.

Подействуем операторами $\hat{F}\hat{G}$ и $\hat{G}\hat{F}$ на функцию Ψ и сравним полученный результат. Учтем, что λ и μ – вещественные числа, так как операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ – эрмитовы.

$$\hat{F}\hat{G}\Psi = \hat{F}(\hat{G}\Psi) = \hat{F}(\mu\Psi) = \mu\hat{F}\Psi = \mu\lambda\Psi,$$

$$\hat{G}\hat{F}\Psi = \hat{G}(\hat{F}\Psi) = \hat{G}(\lambda\Psi) = \lambda\hat{G}\Psi = \lambda\mu\Psi = \mu\lambda\Psi,$$

результаты совпали, т.е. операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ коммутируют. Теорема доказана. ■

Теорема 2. Если операторы коммутируют, то они имеют общие собственные функции.

Доказательство. Имеем $\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$.

Пусть Ψ – собственная функция оператора $\hat{F}$, т.е. $\hat{F}\Psi = \lambda\Psi$, тогда

$$\begin{aligned}\hat{F}\hat{G}\Psi &= \hat{F}(\hat{G}\Psi) = \hat{G}\hat{F}\Psi = \hat{G}(\hat{F}\Psi) = \hat{G}(\lambda\Psi) = \lambda(\hat{G}\Psi) \Rightarrow \\ \hat{F}\hat{G}\Psi &= \lambda(\hat{G}\Psi),\end{aligned}$$

т.е. $\hat{G}\Psi$ – собственная функция оператора $\hat{F}$.

Две собственные функции, принадлежащие одному собственному значению оператора совпадают с точностью до постоянного множителя, т.е.

$$\hat{G}\Psi = \mu\Psi.$$

Ψ – собственная функция оператора $\hat{G}$. Теорема доказана. ■

Таким образом, для того, чтобы две величины могли быть измерены одновременно, необходимо и достаточно, чтобы их операторы коммутировали.

Задание 14. Могут ли быть измерены одновременно две величины

- а) x и y ;
- б) p_x и p_y ;
- в) x и p_x ;
- г) y и p_x ;
- д) T и p_x ;
- е) T и x .

Где величине координаты x соответствует оператор $\hat{x}$, величине проекции импульса p_x на ось Ox соответствует оператор

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

величине кинетической энергии T соответствует оператор

$$\hat{T} = -i \frac{\hbar^2}{2m} \Delta,$$

где Δ – оператор Лапласа, в трехмерном случае в декартовой системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Глава 3. МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ АТОМА

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Строение атома – ключевая проблема](#)
- [Модель атома Томпсона](#)
- [Опыт Резерфорда](#)
- [Модель атома Бора](#)
- [Опыты Франка и Герца](#)
- [Материалы для практической работы](#)

3.1. Строение атома – ключевая проблема

Гипотеза Планка о квантовом излучении и поглощении света объяснила ряд экспериментальных фактов. Однако, оставалась целая серия явлений, которые не ясно как можно было объяснить.

Это эксперимент по изучению спектрального состава излучения чистых веществ (рис. 3.1.).

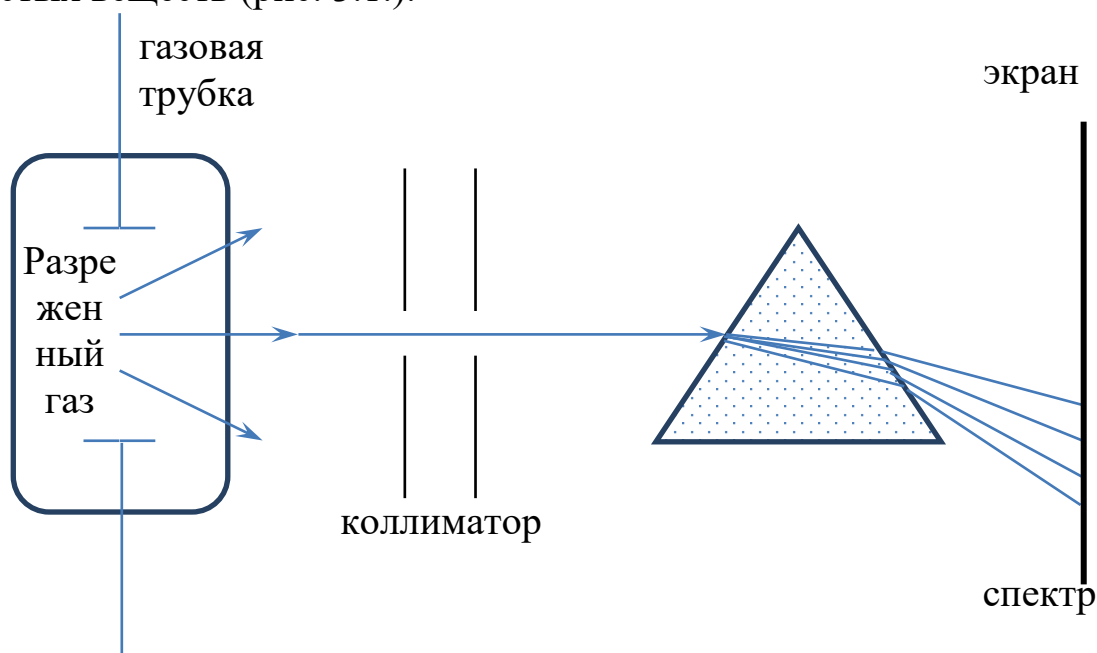


Рис. 3.1.

Серия Бальмера для водорода (видимый свет)

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Серия Лаймана (ультрафиолетовый диапазон)

$$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}, \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Позже были обнаружены серии Пашена, Бреккетта, Пфунда, соответственно

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Аналогичные закономерности спектра возникали в более сложных атомах. Объяснить эти особенности спектров излучений можно было бы, выяснив, как устроен объект, который производит излучение – атом.

Ко времени зарождения квантовой механики были известны следующие факты.

1. Все вещества состоят из мельчайших частиц – атомов и молекул. Косвенным свидетельством этого факта явился закон Дальтона в химии.

2. Закон Фарадея для электролиза приводит к понятию ионов – заряженных атомов.

3. Существование тока в вакууме приводит к факту существования электронов – отрицательно заряженных частиц, но не ионов.

4. Оценены размеры атома, порядка $10^{-10} \text{ м} = 1 \text{ Å}$.

5. Расположения атомов в твердых телах косвенно указывало на сферичность атома. Уже возникли модели строения металлов, в которых расположение атомов определяется плотной/плотнейшей упаковкой шаров.

Исходя из этих фактов, можно предложить следующие модели атома (рис. 3.2).

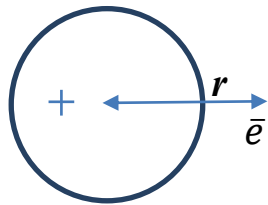
Первая модель не возможна из-за кулоновского притяжения электрона к иону. Не понятно, по какой причине электрон удерживается на каком-то расстоянии.

Вторая модель противоречит существованию электрона в вакууме.

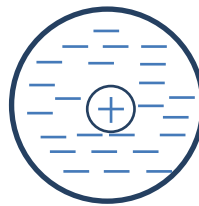
Третья модель – модель атома Томсона («пудинг с изюмом»).

Четвертая модель – планетарная.

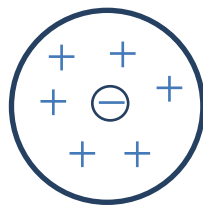
1. статический диполь
ион-электрон



2.



3.



4. планетарная
модель

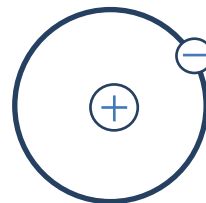


Рис. 3.2.

3.2. Модель атома Томпсона

Рассмотрим взаимодействие α – частицы с атомом Томпсона (3).
Отклонение α -частиц в атоме Томпсона могут вызывать

- 1) электроны;
- 2) распределенный по шару положительный заряд.

Оценим максимальное отклонение, которое может произойти при однократном взаимодействии с атомом Томпсона.

1. Влияние электронов на движение α -частиц при лобовом соударении (рис. 3.3)

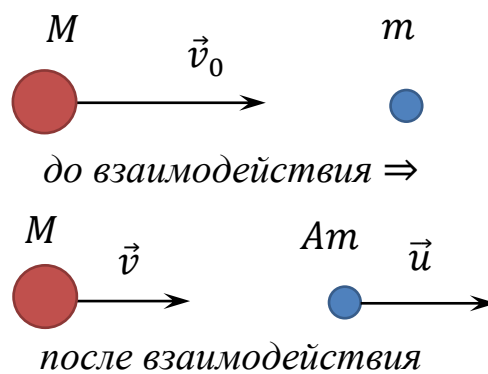


Рис. 3.3.

По закону сохранения импульса имеем

$$Mv_0 = Mv + tu.$$

Если считать удар абсолютно упругим, то по закону сохранения энергии

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{tu^2}{2}.$$

Таким образом получили систему из двух уравнений

$$\begin{cases} M(v_0 - v) = tu, \\ M(v_0^2 - v^2) = tu^2. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое, получим

$$v_0 + v = u,$$

следовательно

$$v = u - v_0.$$

Подставим полученное выражение для скорости в первое уравнение системы

$$\begin{aligned} M(v_0 - u + v_0) &= tu, \\ 2Mv_0 - Mu &= tu, \\ u(M + t) &= 2Mv_0. \end{aligned}$$

Таким образом получили

$$u = \frac{2M}{M + t} v_0.$$

Учитывая, что $M \gg t$ следовательно $u = 2v_0$.

Значит при лобовом соударении α -частица передает электрону импульс

$$\Delta p = tu = 2v_0 t.$$

Очевидно, что при лобовом соударении α -частица не отклоняется, но при скользящем – отклоняется и это отклонение зависит от величины импульса α -частицы.

Если электрон неподвижен. Изменение импульса будет перпендикулярно направлению движения α -частицы и будет меньше Δp .

Чтобы оценить максимальное отклонение θ , будем считать, что это максимально возможное изменение импульса происходит в перпендикулярном направлении (рис. 3.4).

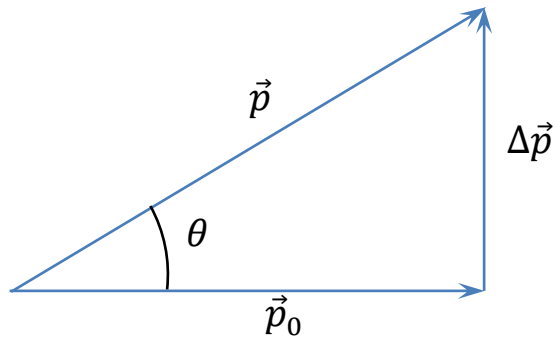


Рис. 3.4.

$$\theta = \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2mv_0}{Mv_0} = \frac{2m}{M} = \frac{2}{7000} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

2) Рассмотрим действие распределенного по шару положительного заряда (рис. 3.5).

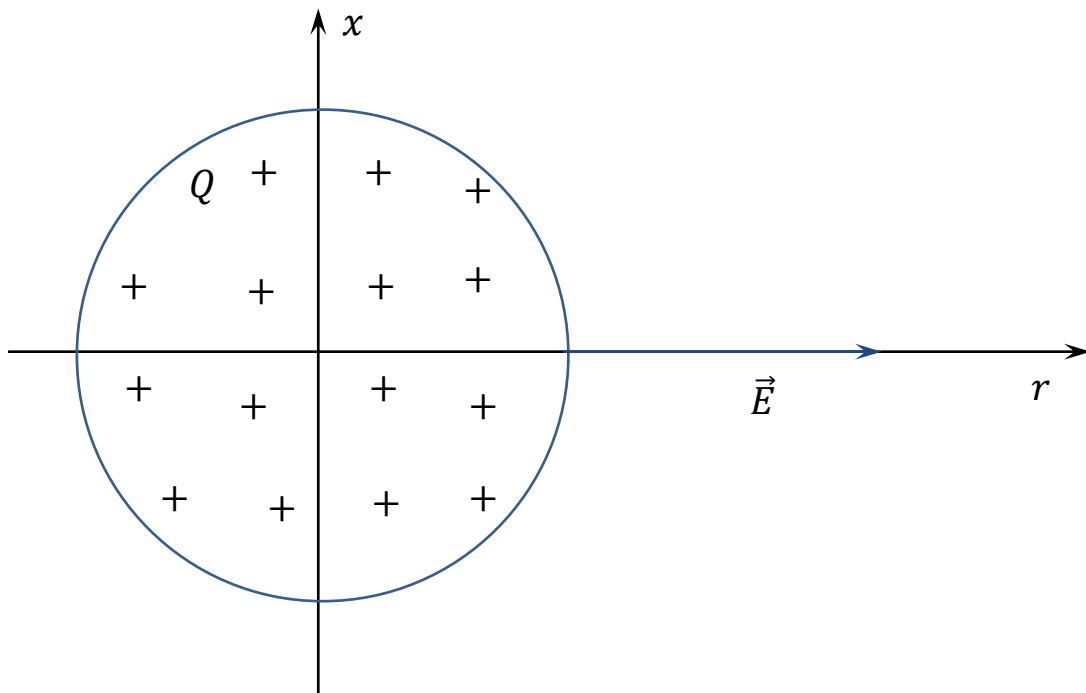


Рис. 3.5.

Напряженность вне шара

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2},$$

$$E_{\text{вне}} = \frac{k}{r^2} \sum \Delta q = \frac{kQ}{r^2},$$

внутри шара $E = k \frac{q}{r^2}$, q – заряд маленький внутренней части.

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q r^3}{R^3},$$

$$E_{\text{внутри}} = k \frac{Q r}{R^3}.$$

График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 3.6.

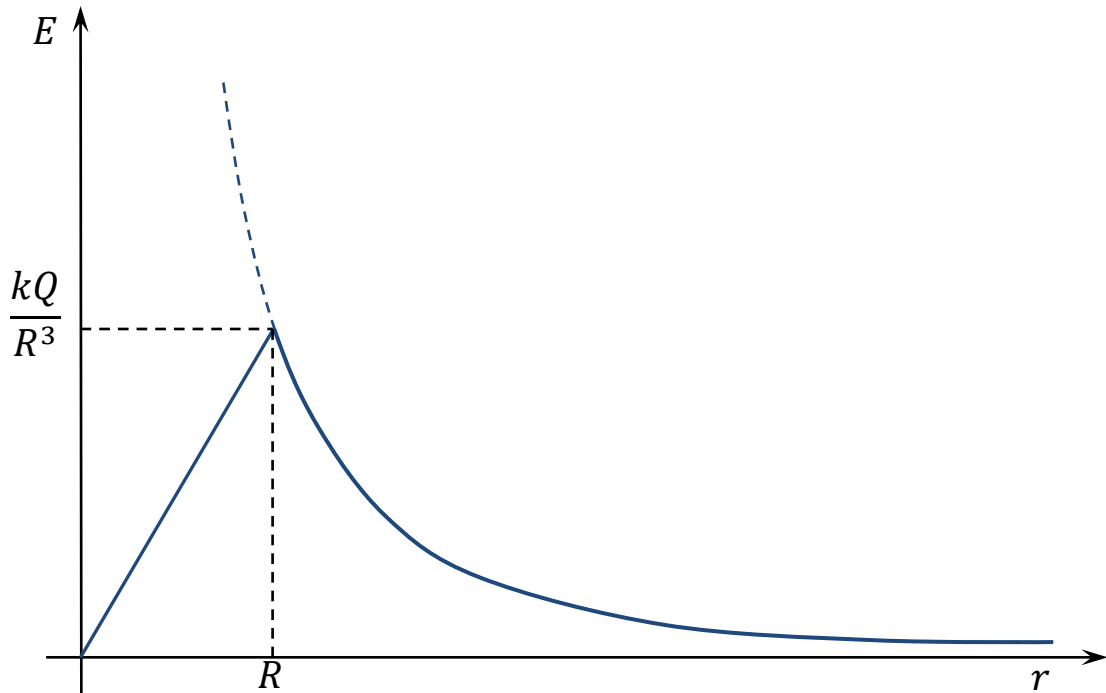


Рис. 3.6.

Если α -частица движется по касательной, тогда будет самое большое отклонение (на границе F_{max} , т.к. E_{max}) т.е. максимальное отклонение возникает, когда α -частица слегка касается шара (ядра) (рис. 3.7)

На расстоянии R сила максимальна (см. рис. 3.6) и она достаточно быстро убывает с увеличением расстояния.

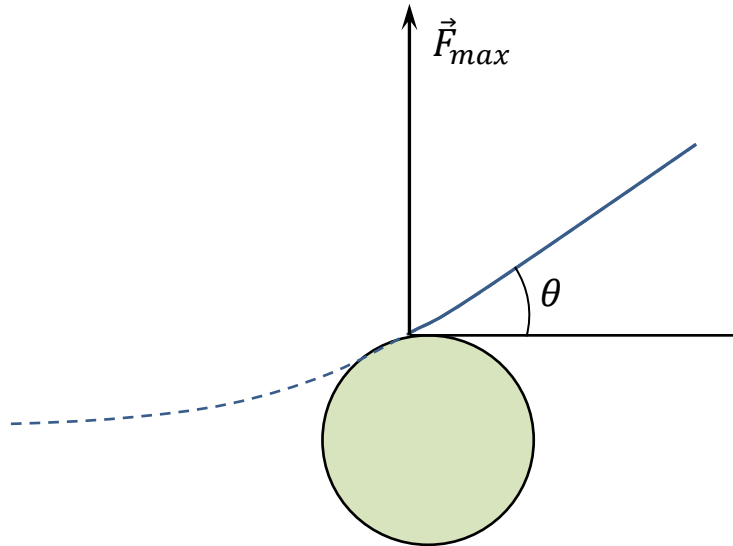


Рис.3.7.

Для качественной оценки будем считать, что на α -частицу действует максимальная сила F_{max} на некотором небольшом расстоянии L сравнимом с диаметром атома

$$L \approx 2R,$$

тогда изменение импульса α -частицы

$$\Delta p = F_{max} \Delta t,$$

где Δt – время взаимодействия $\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{2R}{v}$,

$$F_{max} = E_{max} 2e = k \frac{2eQ}{R^2},$$

$$\Delta p = k \frac{2eQ}{R^2} \frac{2R}{v} = k \frac{4eQ}{Rv}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta p}{p_0} = k \frac{4eQ}{Rv^2(Mv)} = k \frac{4eQ}{RMv^2} = \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-10} \cdot 6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 4 \cdot 10^{14}} = 275 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \\ &\approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}, \\ \theta &\approx 0,02^\circ. \end{aligned}$$

Учитывая, что в эксперименте использовалась золотая фольга

$$Q = Ze = 79e,$$

$$M = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

$$R = 10^{-10} \text{ м},$$

$$v = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Можно сделать вывод о том, что при однократном взаимодействии α -частицы с одним атомом Томпсона, ее максимальное отклонение составляет порядка $0,02^\circ$, а среднее отклонение $0,01^\circ$.

Используя статистические методы, в частности теорию случайного блуждания удастся показать, что если N число соударений (слов, атомов), то среднее отклонение составляет

$$\bar{\theta} = \sqrt{N}\theta,$$

где θ – среднее отклонение при одном соударении.

В опыте Резерфорда фольга имела порядка 10 000 слоев, откуда получаем

$$N = 10^4 \Rightarrow \bar{\theta} \approx 1^\circ.$$

Среднее значение угла отклоняется в эксперименте было примерно таким же, однако некоторые частицы отклоняются на значительно большие углы.

Например, на угол 90° и больше отклонялась одна частица из 8000 ($\frac{1}{8000} \approx 10^{-4}$).

Из теории блужданий вероятность отклонения на угол больший $\bar{\theta}$ составляет

$$p(\gg \theta) = \exp\left(-\left(\frac{\theta}{\bar{\theta}}\right)^2\right) = e^{-90^2} = e^{-8100} \approx 10^{-3500}.$$

Эта вероятность настолько мала, что ее можно считать равной нулю.

Таким образом, в ходе проведенной оценки выяснено, что фольга состоящая из атомов Томпсона не могла отклонить α -частицу на углы значительно превышающие несколько градусов. Это могли сделать только малые массивные, положительно заряженные ядра атомов.

3.3. Опыт Резерфорда

Если верна *третья* модель – модель Томпсона, то отклонение α – частиц можно объяснить их взаимодействием с электронами, входящими в состав атома и с распределенным по шару положительным зарядом. И в том, и в другом случае максимальное отклонение при взаимодействии с одним атомом составляет порядка $0,01^\circ - 0,02^\circ$.

Так как в фольге α – частицы взаимодействуют с большим количеством атомов Томпсона, расположенных примерно в 10 000

атомных слоях, используя теорию случайного блуждания, удается показать, что среднее отклонение α – частицы составляет $1^\circ - 2^\circ$. Этот результат соответствует эксперименту. Однако, в эксперименте наблюдались α – частицы, отклонившиеся на углы, значительно превышающие среднее значение. Наблюдались даже частицы, рассеянные под углом большим 90° , вплоть до 180° . Согласно той же теории блуждания, вероятность такого рассеяния исчезающе мала. Этот экспериментальный факт означал, что фольга состоит не из атомов Томпсона. На большие углы α – частица может отклоняться только при взаимодействии с малым массивным ядром, в котором сосредоточена почти вся масса атома. Таким образом, опыты Резерфорда, стали предпосылкой к созданию планетарной модели атома (модели атома Резерфорда).

3.4. Модель атома Бора

Четвертая модель – планетарная модель или модель атома Резерфорда противоречила электродинамике Максвелла, согласно которой, электрон, двигаясь по орбите с ускорением ($a_{ц.с.}$) должен излучать электромагнитные волны, а значит терять энергию и очень быстро упасть на ядро.

Выход из сложившейся ситуации предложил Нильс Бор. Он предложил постулировать два утверждения.

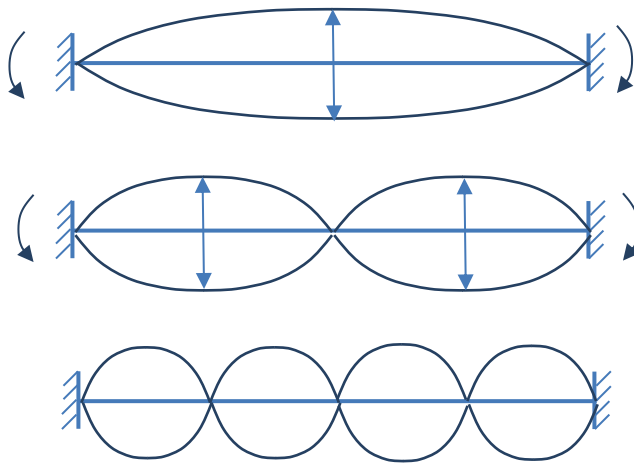
Постулаты Бора.

1) *Существуют такие стационарные орбиты, находясь на которых, электрон, двигаясь вокруг ядра, не излучает электромагнитные волны.*

2) *Излучение и поглощение электромагнитных волн происходит при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.*

Несколько позже были открыты волновые свойства электронов. Вполне естественно было объяснить существование стационарных орбит этими волновыми свойствами.

Двигаясь по стационарной орбите, электрон-волна, накладываясь сама на себя (интерферируя), образует стоячую волну, аналогично тому, как возникает стоячая волна при колебаниях струны.



Делаем из струны круг
(кратные точки соедине-
ны)

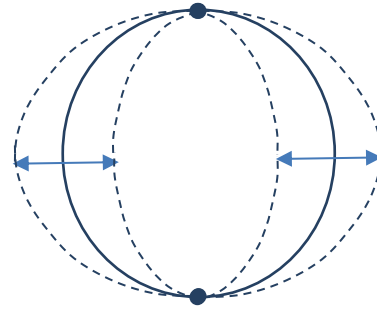


Рис. 3.8.

Стойкая волна на орбите возникает при условии, что на орбите укладывается целое число длин волн де Бройля.

$$\left. \begin{aligned} n\lambda &= 2\pi r_n \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi r_n}{n}, \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \end{aligned} \right\} \Rightarrow mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

где mv – импульс, mvr – момент импульса относительно ядра (r – плечо),

$$mv_n r_n = n\hbar.$$

Рассматриваемая модель приводит к выводу, что в атоме момент импульса электрона принимает значения кратные постоянной Планка, т.е. квантуем, или принимает ряд дискретных значений, которые определяются номером стационарной орбиты (*квантовое число*).

Иногда этот факт называют *квантовым постулатом*. Исходя из квантового постулата, а также закона сохранения энергии и II закона Ньютона для атома водорода, удастся показать, что квантуема и энергия.

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{mv_n^2}{2} - k \frac{e^2}{r_n}, \\ \frac{mv_n^2}{2} &= k \frac{e^2}{r_n}, \\ mv_n r_n &= n\hbar. \\ E_n &= \frac{E_1}{n^2}, r_n = r_1 n^2, v_n = \frac{v_1}{n}. \end{aligned}$$

Энергетическая диаграмма

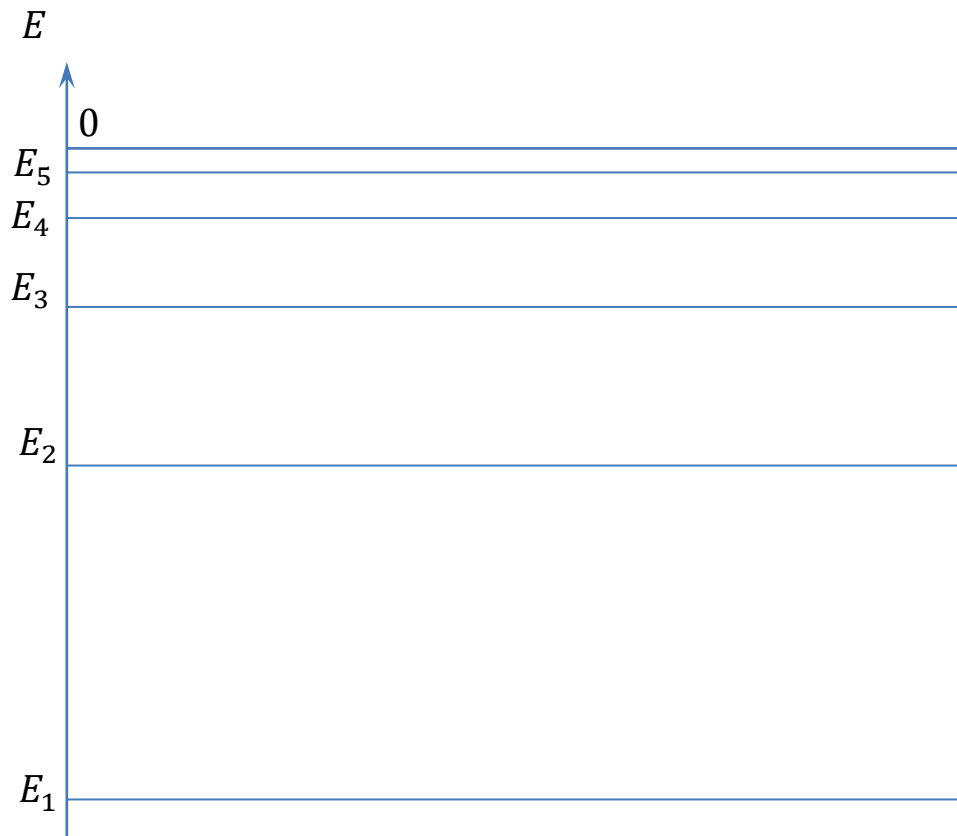


Рис. 3.9.

Постулаты Бора и возникшая при этом модель хорошо объясняли линейчатые спектры излучения для водорода и водородоподобных атомов.

Однако для более сложных атомов модель Бора не давала количественных результатов. Поэтому модель Бора можно рассматривать как промежуточную между классической и квантовой.

3.5. Опыты Франка и Герца

Стационарные состояния атомов хорошо объясняли линейчатые спектры излучения газов, но хотелось получить другие непосредственные экспериментальные подтверждения существования этих стационарных состояний. Такими экспериментальными подтверждениями явились опыты Франка и Герца.

Существуют два способа возбуждения атома.

1) поглощение атомом фотона, причем энергия фотона должна в точности совпадать с разностью энергий двух стационарных состояний (этот способ реализуется в спектрах поглощения).

2) столкновение атома с другой частицей, при котором атом поглощает часть кинетической энергии. Почти сразу после такого поглощения (через время порядка $t = 10^{-8}$ с) атом излучает один или несколько фотонов, переходя в основное состояние.

Опыты Франка и Герца основаны на втором способе возбуждения атома. Схема опыта представлена на рис. 3.10.

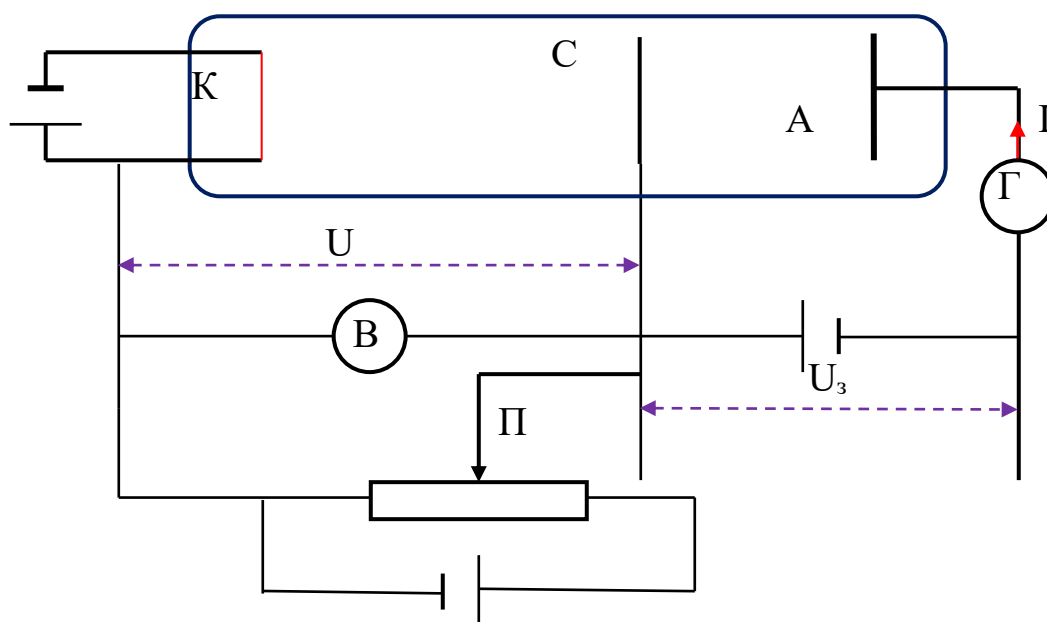


Рис. 3.10.

На рис. 3.10 К – катод, А – анод, С – сетка, П – потенциометр В – вольтметр, Г – гальванометр, U – ускоряющая разность потенциалов между катодом и сеткой, U_3 – тормозящая разность потенциалов между сеткой и анодом, I – анодный ток

– Линии напряженности направлены от большего потенциала к меньшему.

– Электроны разгоняются, проходя задерживающее напряжение U_3 (сетку) и фиксируются на аноде.

– При столкновении с атомом пара возможны два различных случая:

а) упругое соударение (т.е. без потерь кинетической энергии), а учитывая, что $m_{\text{атом}} \gg m_{\text{электрон}}$, при таком соударении не ме-

няется кинетическая энергия электрона, меняется лишь направление его движения.

б) атом поглощает часть кинетической энергии электрона (неупругое соударение). Электроны вылетают с катода и разгоняются напряжением U .

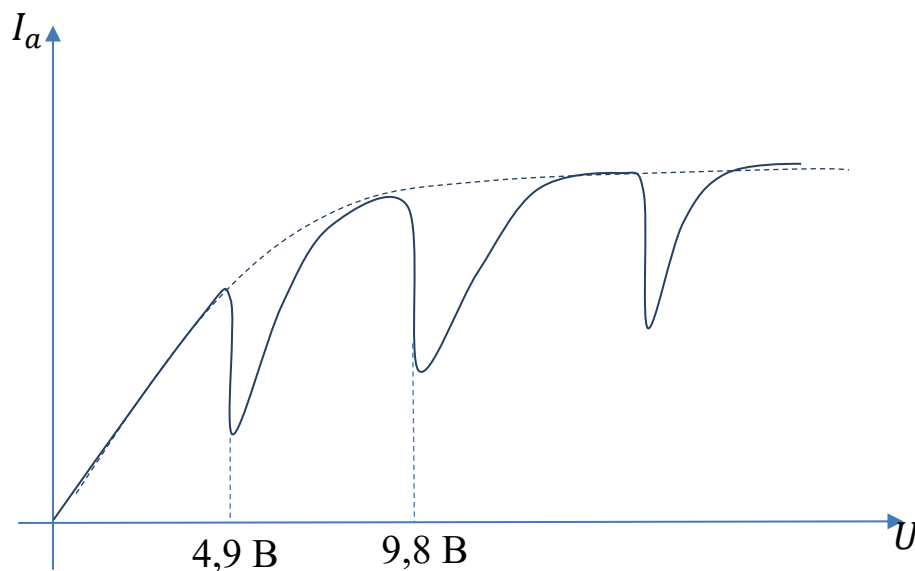


Рис. 3.11.

Если неупругих соударений нет, все электроны, долетающие до сетки, имеют $E_k = eU$ и если этой энергии достаточно для преодоления задерживающего напряжения U_z , электроны попадут на собирающий анод, создавая анодный ток. С увеличением напряжения U все большее число электронов способно достичь анода и поэтому анодный ток растет.

Однако, если кинетическая энергия электрона достигает энергии возбуждения начинают происходить неупругие соударения, что приводит к уменьшению числа электронов, достигающих анода, и как следствие к уменьшению анодного тока.

Дальнейшее увеличение напряжения U снова будет увеличивать анодный ток, так как после неупругого соударения электрон успевает приобрести энергию, достаточную для преодоления задерживающего напряжения.

Следующий провал анодного тока будет при напряжении ровно в два раза больше первого.

Все эти рассуждения справедливы при условии существования стационарных состояний атомов, разность энергий которых и определяет значение энергии возбуждения атомов.

Возбуждение атомов сопровождается излучением фотонов с частотой

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

Например, в опытах с парами ртути происходило излучение с длиной волны $\lambda = 2\,536\text{ \AA}$ (ультрафиолетовый диапазон).

Тогда энергия возбуждения

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2\,536 \cdot 10^{-10}} = 4,9\text{ эВ}.$$

Для первого провала анодного тока

$$\frac{mv^2}{2} = eU = 4,9\text{ эВ}.$$

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Выберите из представленных моделей модели атома

- a) модель Томпсона;
- b) модель Резерфорда;
- c) модель Максвелла;
- d) модель Бора;
- e) модель Фарадея.

2. Какая из серий спектра водорода соответствует видимому диапазону?

- a) серия Лаймана;
- b) серия Бальмера;
- c) серия Пашена;
- d) серия Бреккета.

3. Явление, которое в опыте Резерфорда опровергло модель атома Томсона

- a) равномерное рассеяние α -частиц;
- b) отклонение α -частиц на углы больше 90° ;
- c) полное поглощение α -частиц фольгой;
- d) отсутствие рассеяния.

4. Для стационарных орбит в атоме характерно то, что

a) на них электрон всегда находится в состоянии покоя;
b) на них электрон постоянно меняет свою энергию;
c) на них электрон может находиться бесконечно долго без излучения;

d) на них электрон всегда излучает энергию.

5. В опыте Франка и Герца при увеличении напряжения наблюдалось

- a) монотонный рост анодного тока;
- b) периодические провалы анодного тока;
- c) полное исчезновение тока;
- d) хаотические колебания тока.

6. Модель Резерфорда противоречила электродинамике Максвелла так как

- a) электрон не мог двигаться по орбите;
- b) ядро не могло быть положительным;
- c) орбиты были слишком большими;
- d) электрон должен был излучать и падать на ядро.

7. В опытах Франка и Грца происходит уменьшение числа электронов, достигающих анода при условии

- a) увеличения температуры;
- b) уменьшения напряжения;
- c) уменьшения массы;
- d) наличия неупругих соударений.

8. В модели атома Бора для возникновения стоячей эелектрон-волны необходимо чтобы

- a) на орбите укладывалось целое число длин волн де Бройля;
- b) электрон двигался со скоростью света;
- c) орбита была идеально круговой;
- d) электрон не взаимодействовал с ядром.

9. Серии Лаймана соответствует диапазон излучения

- a) видимый;
- b) ультрафиолетовый;
- c) инфракрасный;
- d) рентгеновский.

10. Данное утверждение иногда называют квантовым постулатом

- a) в атоме момент импульса электрона квантуется;

- b) в атоме есть стационарные орбиты;
- c) атом состоит из ядра и электронов;
- d) электрон может рассматриваться как частица и как волна.

*Электронная орбита атома водорода
(сугубо классический подход)*

С точки зрения классической механики, атом водорода представляет собой систему, состоящую из двух материальных точек:

- неподвижного ядра – протона;
- электрона, движущегося вокруг ядра в простейшем случае по круговой орбите радиуса r .

В качестве центростремительной силы выступает электрическая сила.

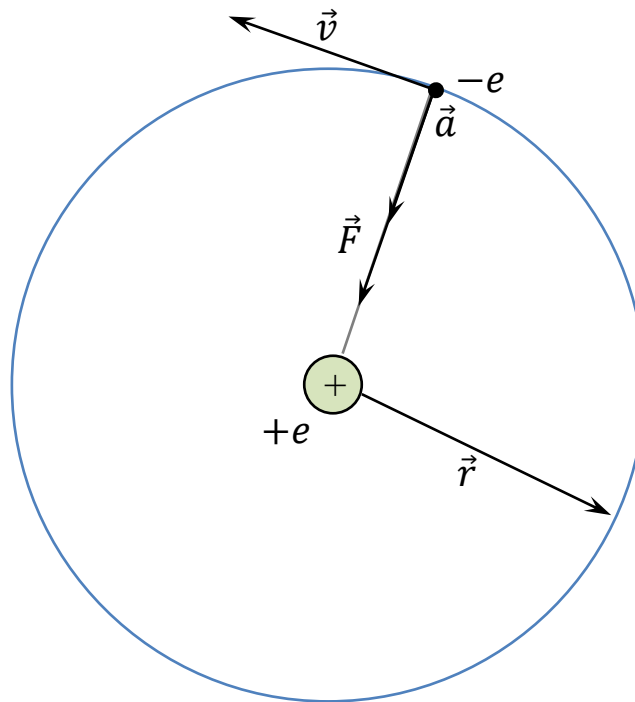


Рис. 3.12.

Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr}.$$

Выразим полную энергию атома

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + \left(-k \frac{e^2}{r}\right) = \\ &= \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{r} = k \frac{e^2}{2r} - k \frac{e^2}{r} = -k \frac{e^2}{2r}, \\ E &= -k \frac{e^2}{2r}. \end{aligned}$$

Можно сделать вывод, что энергия атома отрицательна, это означает, что электрон связан с ядром. Энергия связи всегда отрицательна. Чтобы освободить электрон от протона (ионизация, сделать электрон свободным) необходимо чтобы энергия системы стала хотя бы равной нулю. Значит минимальная энергия, которая для этого нужна – энергия ионизации

$$E_{\text{ион}} = k \frac{e^2}{2r}.$$

Эксперимент показывает, что для атома водорода (H_2) $E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Это позволяет оценить радиус орбиты

$$\begin{aligned} r &= \frac{ke^2}{2E}, \\ r &= \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м.} \end{aligned}$$

Результат хорошо согласуется с оценками, полученными экспериментально (диаметр атома водорода порядка $1\text{\AA}$).

Волновые свойства частиц

В начале прошлого века (1905 г.) Планк, затем Эйнштейн, показали, что электромагнитные волны обладают свойствами частиц.

Свет это не только электромагнитная волна, но и поток фотонов (корпускулярно-волновой дуализм).

Но, только в 1924 г. было высказано предположение, о волновых свойствах обычных частиц. Это сделал Луи Де Бройль.

Импульс частицы

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Следовательно

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Он высказал предположение, что $p = mv$, следовательно $\lambda = \frac{h}{mv}$. Через три года формула Де Бройля была экспериментально подтверждена в опытах по дифракции электронов на кристалле.

Волны Де Бройля и Постулаты Бора

Чтобы как-то объяснить стационарные состояния атома (первый постулат) Бор предположил учесть волновые свойства движущихся по орбите электронов. Он предположил, что электрон не будет излучать электромагнитных волн, если он, двигаясь по орбите, образует стоячую волну:

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{mr}} e,$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{me} \sqrt{\frac{mr}{k}} = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{r}{mk}}.$$

Учитывая, что $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м, получим

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{5,3 \cdot 10^{-11}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^9}} = 3,56 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{3,56 \cdot 10^{-10}}{5,3 \cdot 10^{-11}} \approx 2\pi \Rightarrow$$

$$\lambda = 2\pi r.$$

На круговой орбите укладывается ровно длинна волны Де Бройля движущегося по орбите электрона.

Этот факт послужил отправным пунктом объяснения стационарных состояний атома Бора:

Электрон вращается вокруг ядра неопределенно долго, не излучая электромагнитных волн, если на орбите укладывается целое число волн Де Бройля вращающегося электрона.

Глава 4. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора, общий вид волновой функции](#)
- [Вывод функции \$f\(y\)\$](#)
- [Окончательный вид волновой функции](#)
- [Квантование энергии в квантовом осцилляторе](#)
- [Материалы для практической работы](#)

4.1. Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора, общий вид волновой функции

Будем называть линейным осциллятором систему, в которой тело движется вдоль прямой, например, вдоль оси Ox под действием квазиупругой силы, точнее в поле квазиупругой силы

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Так как в квантовом осцилляторе мы будем иметь дело с вероятностями обнаружения частицы в некотором интервале вблизи точки, с заданной координатой, то рассмотрим, как выглядит функция плотности вероятности для классического осциллятора (маятника)

$$f(x) = \frac{d\omega}{dx},$$

где $d\omega$ – вероятность обнаружить частицу в интервале от x до dx (в интервале с шириной dx до координаты x), $\frac{d\omega}{dx}$ – вероятность обнаружить частицу в единичном интервале вблизи точки с координатой x .

Учитывая

$$d\omega = f(x)dx,$$

вероятность обнаружить частицу на интервале от a до b

$$\omega(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx,$$

тогда условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

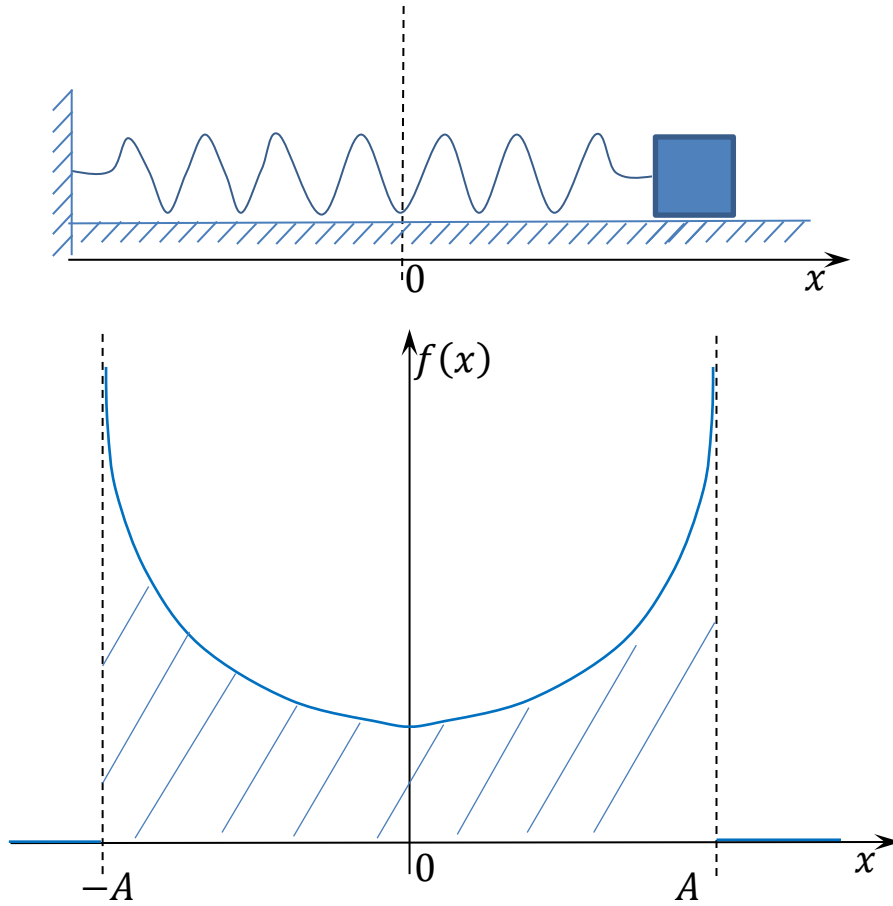


Рис. 4.1.

Для квантового осциллятора, когда под действием квазиупругой силы движется частица, необходимо записать уравнение Шредингера, решив которое, получить волновую функцию (функцию состояния), которая и описывает поведение микрочастицы.

В общем виде стационарное уравнение Шредингера выглядит следующим образом

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

Так как движение происходит вдоль оси Ox , оператор Лапласа Δ в одномерном случае превращается во вторую производную по x

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2},$$

учитывая

$$U = U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

тогда уравнение Шредингера примет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{kx^2}{2} \right) \Psi = 0.$$

Обозначим

$$\alpha^2 = \frac{mk}{\hbar^2}, \beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

и проведем замену переменных

$$y = \sqrt{\alpha}x, \quad y^2 = \alpha x^2,$$

тогда

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} \frac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d\Psi}{dy}, \quad \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \alpha \frac{d^2\Psi}{dy^2}.$$

Производим замену

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2\Psi}{dy^2} + (\beta - \alpha^2 x^2) \Psi &= 0, \\ \alpha \frac{d^2\Psi}{dy^2} + (\beta - \alpha y^2) \Psi &= 0, \end{aligned}$$

разделим на α

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - y^2 \right) \Psi = 0. \quad (4.1)$$

Получили уравнение, аналогичное тому, что рассматривалось в [материалах для практической работы в главе 2](#) для спектра оператора.

При $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, потенциальным слагаемым $\frac{\beta}{\alpha}$ в скобках можно пренебречь и уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + y^2 \Psi = 0.$$

Подходит функция

$$\Psi_{\infty} = e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (4.2)$$

Функция $e^{-\frac{y^2}{2}}$ – тоже является решением уравнения, но волновая функция при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$, должна обращаться в ноль, а для этой функции условие не выполняется.

Формула (4.2) – асимптотическая формула волновой функции, тогда общий вид волновой функции

$$\Psi = \Psi_{\infty} f(y) = f(y) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

4.2. Вывод функции $f(y)$

Выразим $\frac{d^2\Psi}{dy^2}$.

$$\begin{aligned}\Psi(y) &= f(y) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = f e^{-\frac{y^2}{2}}, \\ \frac{d\Psi}{dy} &= \frac{df}{dy} e^{-\frac{y^2}{2}} + f e^{-\frac{y^2}{2}} (-y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{df}{dy} - f y \right), \\ \frac{d^2\Psi}{dy^2} &= -y e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{df}{dy} - f y \right) + e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy} y + f \right) \right) = \\ &= e^{-\frac{y^2}{2}} \left(-y \frac{df}{dy} + f y^2 + \frac{d^2f}{dy^2} - \frac{df}{dy} y - f \right) = \\ &= e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{d^2f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + f y^2 - f \right).\end{aligned}$$

Подставим, полученное выражение в уравнение (4.1) и сократим на $e^{-\frac{y^2}{2}}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + f y^2 - f + \frac{\beta}{\alpha} f - y^2 f &= 0, \\ \frac{d^2f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) f &= 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Будем искать функцию $f(y)$ в виде степенного ряда

$$f(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n,$$

$$\frac{df}{dy} = 0 + A_1 + 2A_2 y + 3A_3 y^2 + \dots,$$

$$y \frac{df}{dy} = 0 + A_1 y + 2A_2 y^2 + 3A_3 y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n y^n,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 0 + 2A_2 + 6A_3 y + 12A_4 y^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) A_{n+2} y^n.$$

Подставляем, полученное решение в (4.3), и учитывая, что во всех слагаемых пределы суммирования одинаковы, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)A_{n+2} - 2nA_n + \frac{\beta}{\alpha}A_n - A_n \right) y^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)A_{n+2} - \left(2n+1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_n \right) y^n = 0. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) представляет степенной ряд, в скобках $(\dots)$ расположены коэффициенты этого степенного ряда.

Дифференциальное уравнение должно быть верно при любом y . Многочлен равен нулю при любом y только, если все его коэффициенты равны нулю, т.е.

$$(n+1)(n+2)A_{n+2} = \left(2n+1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_n,$$

Откуда получаем рекуррентную формулу

$$A_{n+2} = \frac{\left(2n+1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Последовательность $A_0, A_1, A_2, \dots$, определяющую функцию $f(y)$ с помощью этой рекуррентной формулы можно задать, если задать первые два члена A_0 и A_1 .

4.3. Окончательный вид волновой функции

Функция $\Psi(y)$ найдена:

$$\Psi(y) = f(y) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}},$$

где $f(y)$ определяется коэффициентами A_0 и A_1 и рекуррентной формулой

$$A_{n+2} = \frac{\left(2n+1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Перепишем

$$\Psi(y) = \frac{f(y)}{e^{\frac{y^2}{2}}} \rightarrow \begin{matrix} \text{степенной ряд} \\ \text{показательная функция} \end{matrix}.$$

В общем случае при $y \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) многочлен $f(y)$ стремится к бесконечности быстрее чем экспонента $e^{\frac{y^2}{2}}$, то есть в общем случае волновая функция $\Psi(y)$ стремится к бесконечности при $y \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$), а должна стремиться к нулю.

Волновая функция $\Psi(y)$ будет стремиться к нулю, только при условии того, что степенной ряд имеет конечное число членов.

Для этого необходимо:

1) либо A_0 , либо A_1 взять равным нулю, тогда в многочлене не будет либо четных, либо нечетных членов;

2) но оставшийся ряд должен где-то обрываться, при некотором n должен обращаться в ноль числитель рекуррентной формулы

$$\left(2n + 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) A_n = 0,$$

при нечетном n , если $A_0 = 0$, или при четном n , если $A_1 = 0$. Значит

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2n + 1.$$

Таким образом, получаем ряд функций, удовлетворяющих этому требованию.

Если ненулевой коэффициент $A_0 = 1$, а ненулевой коэффициент $A_1 = 2$, можно получить последовательность функций, которую называют полиномы Эрмита

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad H_0 = 1, \\ n = 1, & \quad H_1 = 2y, \\ n = 2, & \quad H_2 = 4y^2 - 2, \\ n = 3, & \quad H_3 = 8y^3 - 12y, \\ n = 4, & \quad H_4 = 16y^4 - 48y^2 + 12. \end{aligned}$$

Но сами полиномы Эрмита не могут выступать в качестве волновой функции, так как не будет выполняться условие нормировки, поэтому к полиному Эрмита нужно добавить нормирующий множитель. Тогда возвращаясь от переменной y к переменной x , общий вид волновой функции:

$$\Psi_n(x) = C_n H_n e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Например, при $n = 0$,

$$\Psi_0(x) = C_0 H_0 e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Чтобы найти нормирующий множитель, запишем условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} C_0^2 H_0^2 e^{-\alpha x^2} dx = 1.$$

Учитывая $H_0 = 1$, имеем

$$C_0^2 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx}, \quad C_0^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}.$$

Тогда

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},$$

окончательный вид волновой функции.

Для других n

$$C_n = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2} \cdot 2^n \cdot n!}}.$$

Зная волновую функцию можно построить график функции плотности вероятности, как модуля квадрата функции вероятности (рис. 4.2).

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},$$

$$|\Psi_0|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}.$$

Для классического осциллятора

$$E = \frac{kA^2}{2}, \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

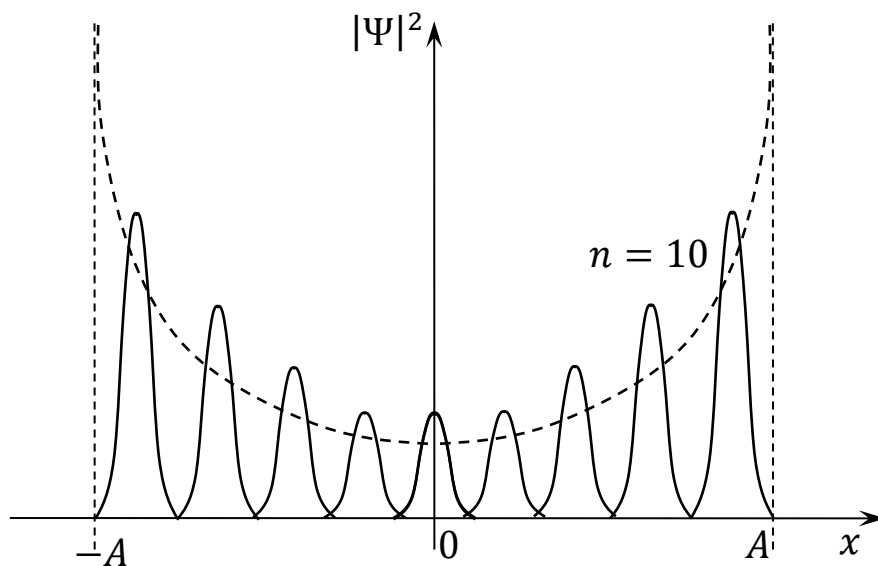
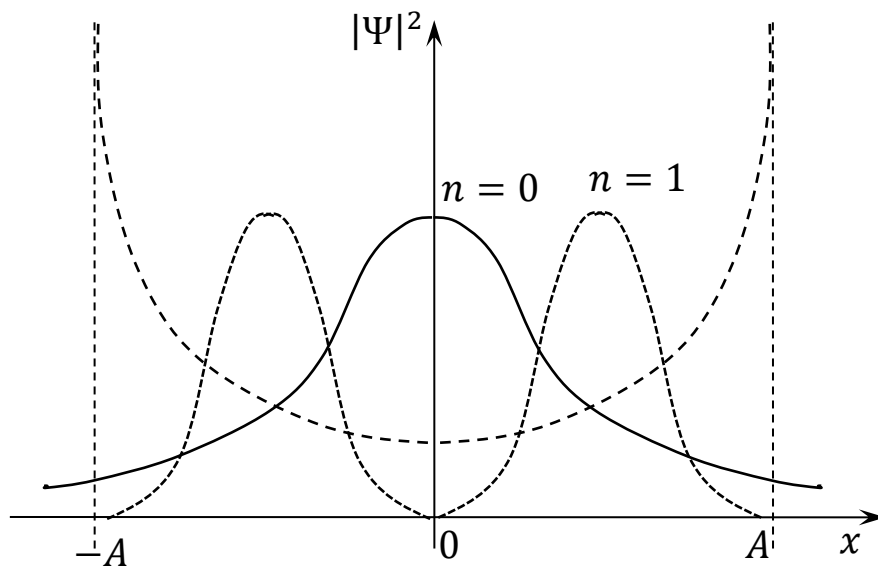


Рис. 4.2.

4.4. Квантование энергии в квантовом осцилляторе

Условие обрыва ряда

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2n + 1.$$

Вспомним, что

$$\beta = \frac{2mE_n}{\hbar^2}, \quad \alpha^2 = \frac{mk}{\hbar^2},$$

тогда

$$\alpha = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} = \frac{\sqrt{mm \frac{k}{m}}}{\hbar} = \frac{\sqrt{m^2 \omega_0^2}}{\hbar} = \frac{m\omega_0}{\hbar},$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar}{m\omega_0} = \frac{2E_n}{\hbar\omega_0},$$

это выражение подставим в условие обрыва ряда, получим

$$\frac{2E_n}{\hbar\omega_0} = 2n + 1,$$

отсюда

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

следовательно энергия квантуется.

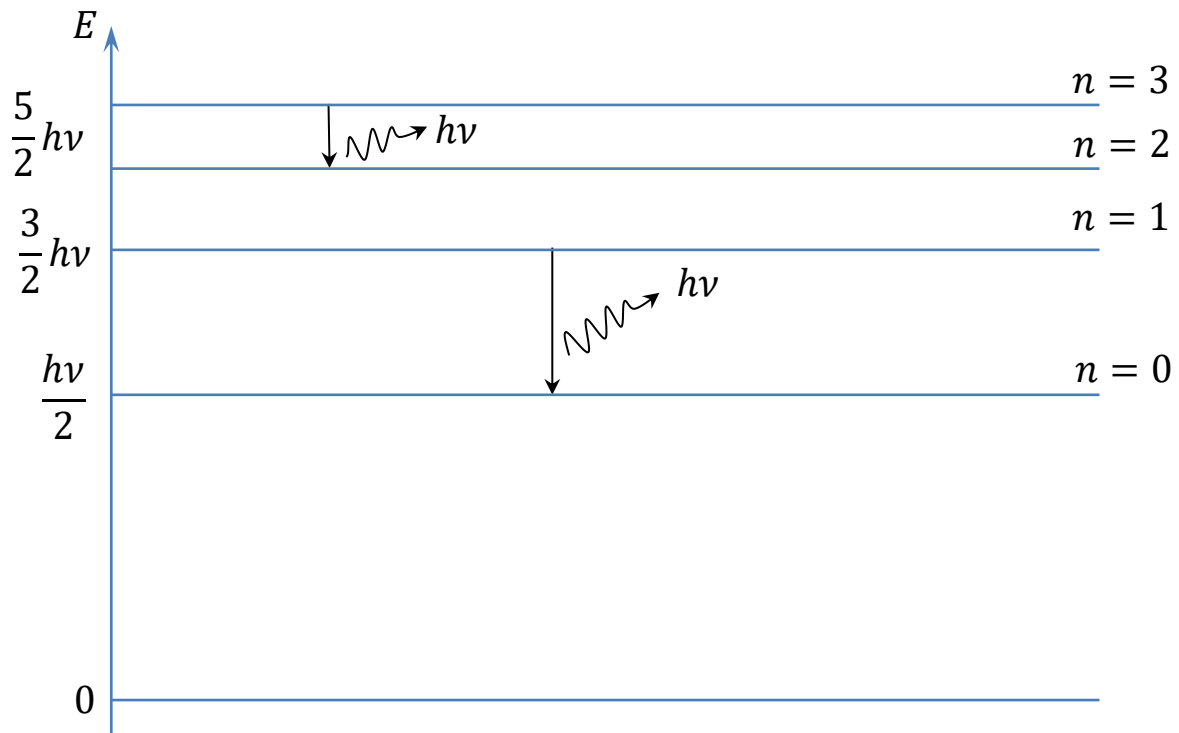


Рис. 4.3.

Сделаем выводы.

1. Для квантового осциллятора понятия амплитуды – максимального отклонения от положения равновесия не применимо, так как существует ненулевая вероятность обнаружить частицу сколь угодно далеко от состояния равновесия.

2. Состояния осциллятора и его энергии квантованы (волновая функция, определяющая состояние частицы, определяется квантовым числом $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Разность между соседними уровнями энергии составляет $h\nu$:

$$E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

3. Минимальная энергия квантового осциллятора отлична от нуля

$$E_{min} = \frac{1}{2} h\nu.$$

– Квантовый осциллятор можно рассматривать как простейшую модель атома в твердом теле (одномерном кристалле), тогда колебания осциллятора можно назвать тепловыми колебаниями атома.

– Интенсивность тепловых колебаний определяется температурой тела, тогда с классической точки зрения, чем выше температура тела, тем больше амплитуда колебаний, а значит больше энергия осциллятора, тогда минимальная энергия осциллятора соответствует минимальной температуре (абсолютный ноль).

– Не равенство нулю минимальной энергии квантового осциллятора означает, что даже при абсолютном нуле в твердом теле должны существовать небольшие тепловые колебания, так называемые нулевые колебания.

4. При $n \rightarrow \infty$ возникает предельный переход от квантового осциллятора к классическому:

$$\Delta E = h\nu, \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta E \ll E_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = 0.$$

Тогда можно считать, что энергия меняется непрерывно.

Несколько сложнее выглядит предельный переход плотности вероятности $|\Psi_n|^2$.

Возьмем большое значение n (рис. 4.4).

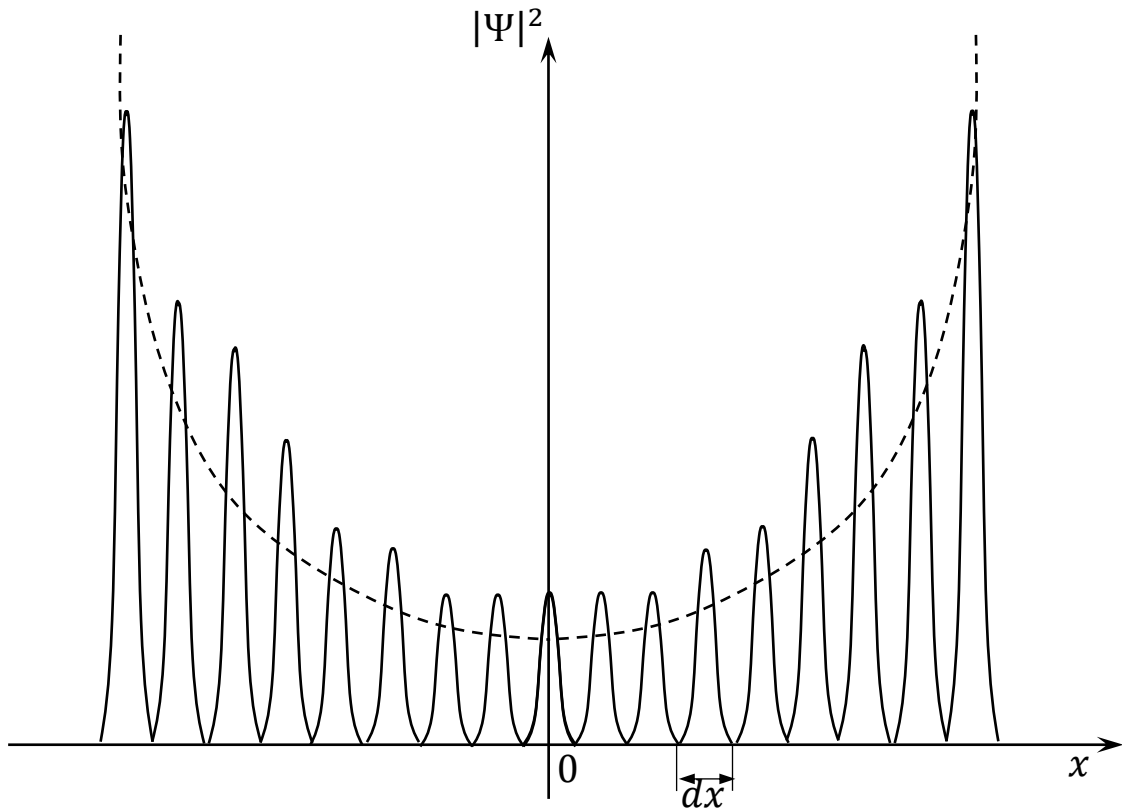


Рис. 4.4.

На практике плотность вероятности

$$f = \frac{d\omega}{dx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta x}.$$

Так как, при больших n даже в малый интервал Δx попадает несколько периодов (косинусоиды плотности вероятности), измеренная величина плотности вероятности $f = \frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ будет соответствовать среднему значению этой «косинусоиды», а оно совпадает с классической плотностью вероятности.

5. В отличие от классического осциллятора в квантовом осцилляторе плотность вероятности при $x(-A, A)$ в некоторый момент обращается в ноль.

Физический смысл. При $n = 1$ с классической точки зрения обращение плотности вероятности в ноль можно объяснить двумя способами.

1 способ. Двигаясь вдоль оси Ox , микрочастица в точке с нулевой плотностью вероятности как бы исчезает и появляется уже за этой точкой (рис. 4.5).

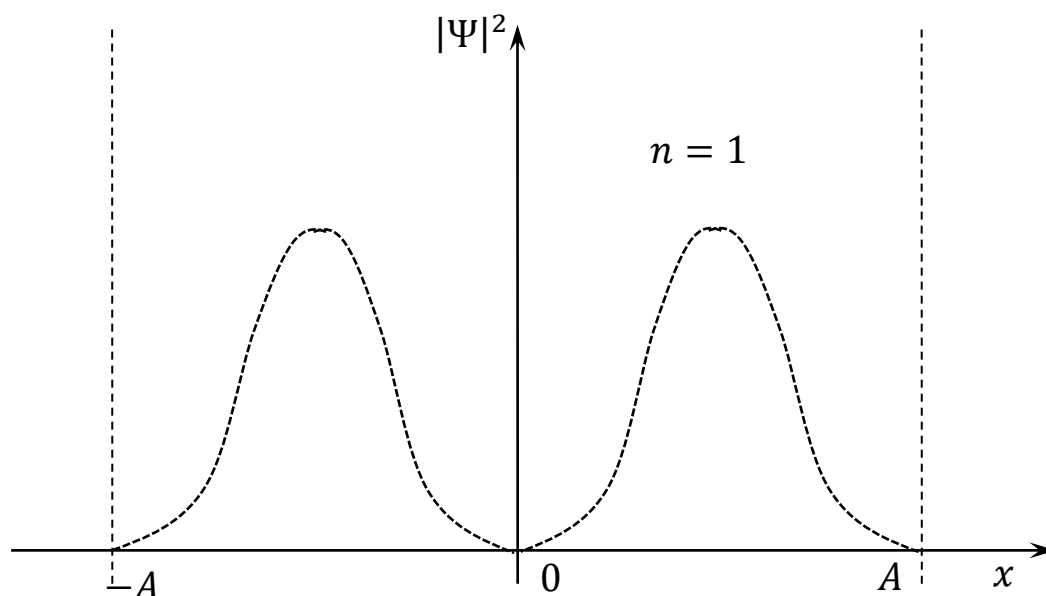


Рис. 4.5.

2 способ. Так как плотность обратно пропорциональна скорости частицы, нулевую плотность вероятности можно объяснить бесконечно большой скоростью движения микрочастицы.

Очевидно, что оба объяснения будут абсурдны и скорость бесконечной быть не может.

Эта особенность функции плотности вероятности в квантовой механике объясняется волновыми свойствами микрочастицы. Двигаясь вдоль оси Ox , частица – волна накладывается сама на себя, интерферирует (рис. 4.6).

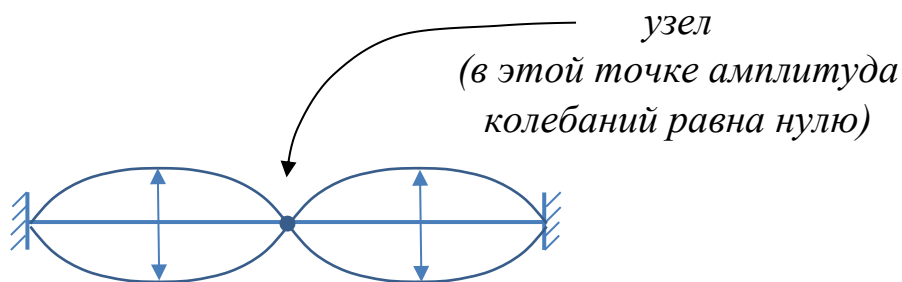


Рис. 4.6.

Стационарным состояниям микрочастицы, определяемым квантовым числом n , будет соответствовать, возникающая стоячая волна, узлы которой соответствуют нулю функции плотности вероятности.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Поле квазиупругой силы для линейного осциллятора можно задать формулой

a) $U(x) = \frac{mv^2}{2};$

b) $U(x) = mc^2;$

c) $U(x) = \frac{kx^2}{2};$

d) $U(x) = kx.$

2. Стационарное уравнение Шредингера для квантового линейного осциллятора можно записать в виде

a) $\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - y^2\right)\Psi = 0$, где $\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\beta = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$, $y^2 = \alpha x^2$;

b) $\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(y^2 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\Psi = 0$, где $\alpha = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$, $\beta = \alpha x^2$, $y^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$;

c) $\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - y^2\right)\Psi = 0$, где $\alpha = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$, $\beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $y^2 = \alpha x^2$;

d) $\frac{d\Psi}{dy} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - y^2\right)\Psi = 0$, где $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $\beta = \frac{mk}{\hbar^2}$, $y^2 = \alpha x^2$.

3. Волновая функция для квантового линейного осциллятора имеет вид

a) $\Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}};$

b) $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);$

c) $\Psi_0 = \sqrt{\frac{\beta^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\beta x^2};$

d) $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(n\pi x).$

4. Какое из ниже перечисленных выражений, говорит о квантовании энергии в квантовом линейном осцилляторе?

- a) $U(x) = \frac{mv^2}{2};$
- b) $E = \frac{kA^2}{2};$
- c) $E = mc^2;$
- d) $E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2}\right).$

5. Выберите верное утверждение о минимальной энергии квантового осциллятора.

- a) Равна 0.
- b) Равна $\frac{1}{2} h\nu.$
- c) Равна $\frac{1}{2} mc^2.$
- d) Не определяется.

6. Квантовый осциллятор можно рассматривать, как...

- a) колеблющийся на пружине возле положения равновесия груз;
- b) простейшую модель атома в твердом теле;
- c) модель взаимодействия частицы и античастицы;
- d) простейшую модель движения электрона в поле положительно заряженного ядра.

7. Можно ли применить понятие амплитуды для квантового линейного осциллятора?

- a) Можно, $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$
- b) Можно, $A = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}.$
- c) Нельзя, так как есть не нулевая вероятность обнаружить частицу сколь угодно далеко от положения равновесия.
- d) Нельзя, так как существует принцип запрета Паули.

8. С помощью какого уравнения можно определить волновую функцию для квантового линейного осциллятора?

- a) С помощью уравнения Шредингера.

- b) С помощью уравнения Эйнштейна.
- c) С помощью закона сохранения механической энергии.
- d) Нельзя определить.

9. Разность между соседними уровнями энергии в квантовом линейном осцилляторе равна...

- a) 0;
- b) $h\nu$;
- c) mc ;
- d) $\frac{mk}{\hbar^2}$.

10. В отличие от классического осциллятора в квантовом осцилляторе плотность вероятности при $x(-A, A)$ в некоторый момент обращается в ноль. Чем можно объяснить эту особенность?

- a) Волновыми свойствами микрочастицы.
- b) Квантовыми свойствами микрочастицы.
- c) Отсутствием массы у микрочастицы.
- d) Большой скоростью движения микрочастицы.

Среднее значение величин в квантовой механике

Пусть положение частицы задано координатой x . Среднее значение $\bar{x}$ можно рассчитать следующим образом.

Представим, что большое число частиц описывается одной и той же волновой функцией. Пусть N_1 частиц задано координатой x_1 , N_2 частиц задано координатой x_2 , и т.д., тогда

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots}{N_1 + N_2 + \dots} = \frac{\sum N_i x_i}{\sum N_i}.$$

В случае одной частицы и учитывая, что координата $\sum N_i$ – величина непрерывная, N_i стремится к p_i – вероятности обнаружить частицу в интервале dx вблизи точки с координатой x_i .

Так как $p_i = |\Psi|^2 dx$ и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx}.$$

Если функция Ψ нормирована, то знаменатель обращается в единицу, тогда среднее значение

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \Psi^* \Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx,$$

окончательно имеем

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{x} \Psi dx.$$

Для других измеряемых величин аналогичная формула нахождения среднего постулируется.

Если физической величине F соответствует оператор $\hat{F}$, то среднее значение величины определяется формулой

$$\bar{F} = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dX.$$

Интегрирование проводится по всей области определения функции.

Среднее значение величин для квантового линейного осциллятора

Пример 1. Найти среднее значение координаты x в квантовом линейном осцилляторе в основном состоянии

$$n = 0, \quad \hat{x}, \quad \Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* \hat{x} \Psi_0 dx = \left[\begin{array}{c} \text{функция} \\ \text{действительная} \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \hat{x} \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение представляет собой нечетную функцию.

Замечание: четная функция $f(-x) = f(x)$, нечетная функция $f(-x) = -f(x)$.

Кроме того, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, тогда, учитывая геометрический смысл определенного интеграла (значение определенного интеграла равно площади

под графиком (рис. 4.7) с учетом знака: плюс – выше оси Ox , минус – ниже оси Ox , см. рис.) в сумме интеграл равен нулю.

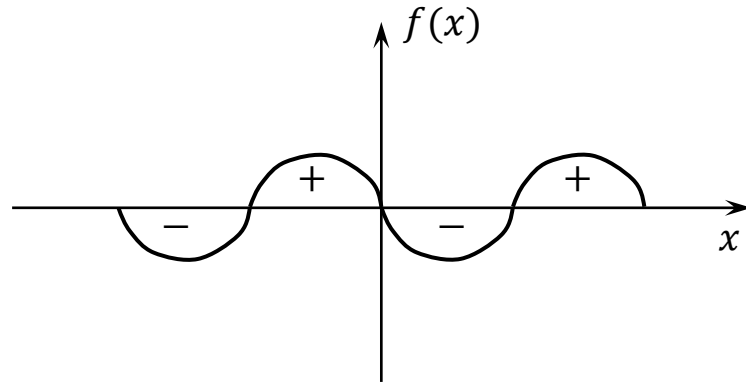


Рис. 4.7.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0,$$

и окончательно

$$\bar{x} = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0.$$

Задание 2. Найти среднее значение проекции импульса $\hat{p}_x$ в квантовом линейном осцилляторе в основном состоянии:

$$n = 0, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\widehat{d}}{dx}, \quad \Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Теорема 1. Если в одном и том же состоянии, описываемом функцией Ψ , оператору $\hat{F}$ соответствует среднее значение $\bar{f}$ и оператору $\hat{G}$ соответствует среднее значение $\bar{g}$, то среднее $\overline{f + g}$ совпадает с суммой средних $\bar{f} + \bar{g}$.

Доказательство. Сумме этих физических величин соответствует оператор $\widehat{F + G}$, тогда

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \int \Psi^* \widehat{F + G} \Psi dX = \int \Psi^* (\hat{F} + \hat{G}) \Psi dX = \\ &= \int \Psi^* (\hat{F} \Psi + \hat{G} \Psi) dX = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dX + \int \Psi^* \hat{G} \Psi dX = \bar{f} + \bar{g}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2. Доказать, что если физическая величина f описывается эрмитовым оператором, то

а) $\bar{f}$ – вещественное число;

б) $\bar{f}^2$ – средний квадрат $\bar{f}^2 = \int |\hat{F}\psi|^2 dX$.

Решение.

а) Дано: $\int \Psi^* \hat{F} \varphi dX = \int (\hat{F}\Psi)^* \varphi dX$, т.е. $\hat{F}$ – эрмитов оператор.

Докажем, что $\bar{f}$ – вещественное число.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int \Psi^* \hat{F} \Psi dX = \int (\hat{F}\Psi)^* \Psi dX = \int \Psi (\hat{F}\Psi)^* dX = \int (\Psi^* \hat{F} \Psi)^* dX = \\ &= \left(\int \Psi^* \hat{F} \Psi dX \right)^* = (\bar{f})^*. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{f} = (\bar{f})^* \Rightarrow \bar{f} \in \mathbb{R}$ ($\bar{f}$ принадлежит множеству действительных (вещественных) чисел). ■

б) Докажем $\bar{f}^2 = \int |\hat{F}\Psi|^2 dX$.

$$\begin{aligned} \bar{f}^2 &= \int \Psi^* \hat{F}^2 \Psi dX = \int \Psi^* \hat{F} (\hat{F}\Psi) dX = \int (\hat{F}\Psi)^* (\hat{F}\Psi) dX = \\ &= \int |\hat{F}\Psi|^2 dX. \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 2. Среднее значение достоверной величины есть сама эта величина.

Переведем формулировку теоремы на язык операторов квантовой механики.

Если, физическая величина f , оператор которой $\hat{F}$, имеет дискретный спектр, то достоверная (с вероятностью 1) величина будет иметь значение λ в состоянии, которое описывается функцией ψ , собственной функцией оператора $\hat{F}$, принадлежащей собственному значению λ , т.е.

$$\hat{F}\Psi = \lambda\Psi.$$

Пример 3. Найти среднее значение координаты x в квантовом линейном осцилляторе в основном состоянии (пример 1 – другой способ).

$$n = 0, \quad \hat{x}, \quad \Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Решение.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* \hat{x} \Psi_0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \hat{x} \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \left[\begin{array}{c} \text{умножим и разделим} \\ \text{подинтегральное выражение} \\ \text{на } -2\alpha, \text{ и сделаем замену переменной} \end{array} \right] = \\
&= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha} dx = \left[\begin{array}{c} u = -\alpha x^2, \\ du = -2\alpha x dx \end{array} \right] = \frac{\alpha^{1/2}}{-2\alpha \pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^u du = \\
&= \frac{\alpha^{1/2}}{-2\alpha \pi^{1/2}} \cdot e^u \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\alpha^{1/2}}{-2\alpha \pi^{1/2}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Задание 3. Найти среднее значение проекции импульса $\hat{p}_x$ в квантовом линейном осцилляторе в основном состоянии (задание 1 – второй способ).

$$n = 0, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\widehat{d}}{dx}, \quad \Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

Средние значения дискретных переменных

Пусть величина f соответствующая оператору $\hat{F}$ имеет дискретный спектр значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, которому соответствуют функции $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$

Если состояние системы описывается функцией Ψ , не являющейся собственной функцией оператора $\hat{F}$, то при измерении величины f будет получаться одно из собственных значений λ_i

Выразим среднее значение величины f .

Из математики известно, что произвольную функцию состояния Ψ можно разложить по собственным функциям любого оператора.

Разложим функцию ψ по собственным функциям оператора $\hat{F}$

$$\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots + C_k \Psi_k = \sum_k C_k \Psi_k,$$

$$\bar{f} = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dX,$$

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \int (C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots)^* \hat{F} (C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots) dX = \\
&= \int (C_1^* \Psi_1^* + C_2^* \Psi_2^* \dots) (C_1 \lambda_1 \Psi_1 + C_2 \lambda_2 \Psi_2 + \dots) dX = \\
&= C_1^* C_1 \lambda_1 \int \Psi_1^* \Psi_1 dX + C_1^* C_2 \lambda_2 \int \Psi_1^* \Psi_2 dX + \dots
\end{aligned}$$

Функция состояния в квантовой механике нормирована

$$\int \Psi_i^* \Psi_i dX = 1.$$

С другой стороны, в математике доказано, что собственные функции оператора ортогональны

$$\int \Psi_i^* \Psi_j dx = 0, \quad \text{если } i \neq j.$$

Тогда в сумме останутся слагаемые, содержащие только один индекс:

$$\bar{f} = C_1^* C_1 \lambda_1 + C_2^* C_2 \lambda_2 + \dots = |C_1|^2 \lambda_1 + |C_2|^2 \lambda_2 + \dots \quad (1.4.5)$$

Но, из теории вероятностей известно, что среднее значение величины можно найти

$$\bar{f} = \omega_1 \lambda_1 + \omega_2 \lambda_2 + \dots \quad (1.4.6)$$

где $\omega_1, \omega_2 \dots$ - вероятности получения величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ при измерении

Сопоставляя выражения (1.4.5) и (1.4.6) сделаем вывод: *квадраты модулей коэффициентов разложения функции Ψ по собственным функциям оператора $\hat{F}$ совпадают с вероятностями получения при измерении соответствующих собственных значений.*

Глава 5. ЧАСТИЦА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЯЩИКЕ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Одномерный потенциальный ящик](#)
- [Трёхмерный потенциальный ящик](#)
- [Материалы для практической работы](#)

5.1. Одномерный потенциальный ящик

Рассмотрим задачу. Микрочастица, которая может двигаться вдоль прямой, например оси Ox , находится в поле, в котором потенциальная энергия равна нулю, если частица находится в интервале $(0, l)$ и равна бесконечности, если частица находится вне этого интервала. Такое поле условно называют *одномерным потенциальным ящиком с абсолютно жесткими стенками* или *бесконечно глубокой потенциальной ямой*. Потенциальную энергию в этом случае можно записать

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, l), \\ \infty, & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$$

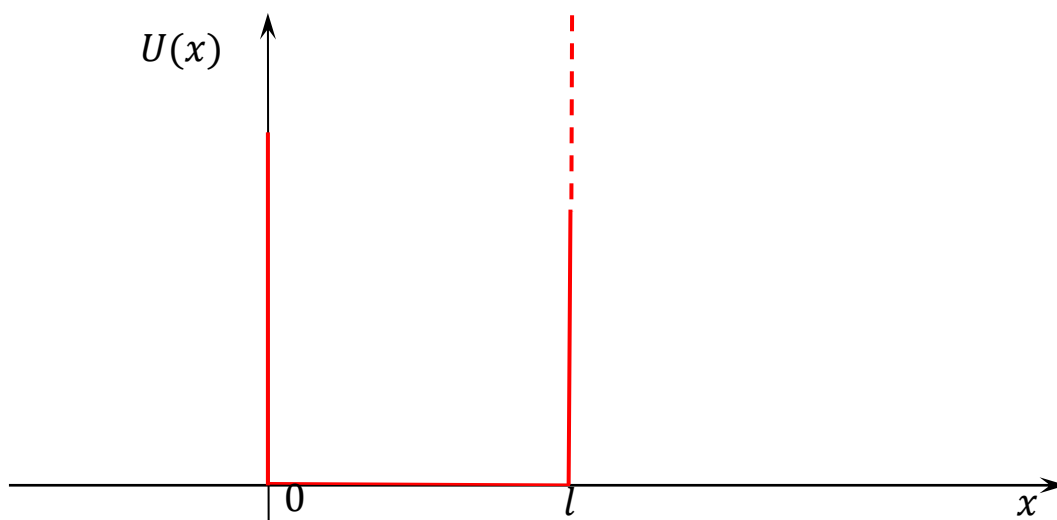


Рис. 5.1.

Классический аналог одномерного потенциального ящика представлен на рис. 5.2.

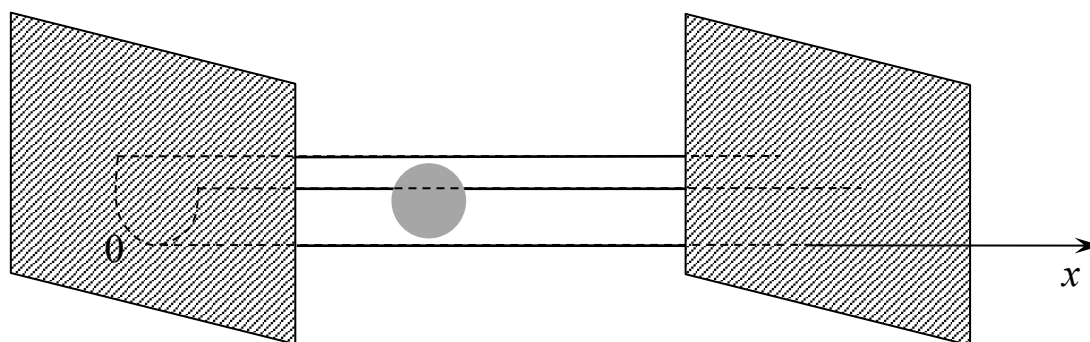


Рис. 5.2.

График зависимости $f(x)$ представлен на рис. 5.3.

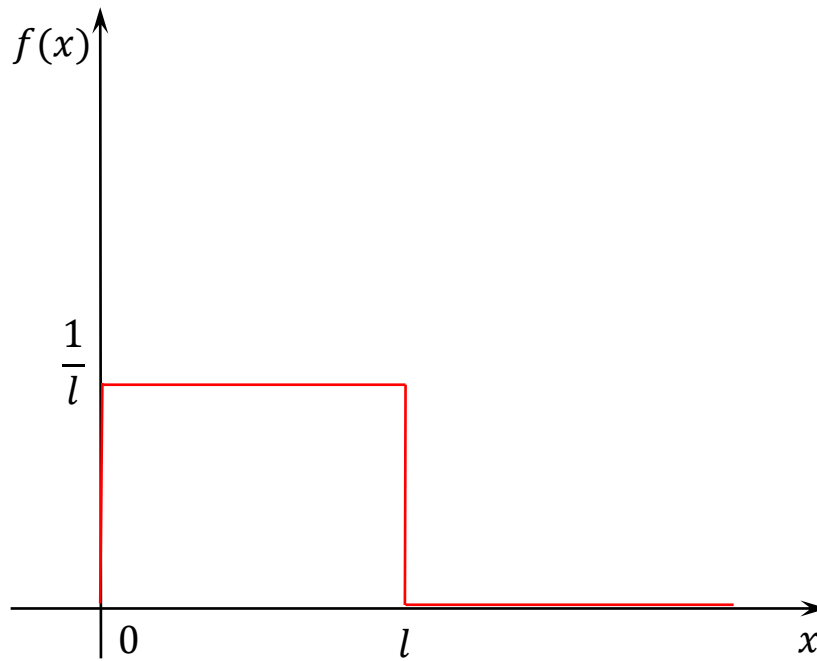


Рис. 5.3.

Скорость везде одинакова (так как сопротивления и трения нет), следовательно, плотность вероятности тоже везде одинакова.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Это определенный интеграл, его значение определяется площадью под графиком $f(x)$ и равно

$$S = l \cdot \frac{1}{l} = 1.$$

Если в эти условия поместить микрочастицу, ее поведение будет описывать волновая функция, которую можно найти, решая стационарное уравнение Шредингера.

1. Запишем стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\Psi = 0.$$

В одномерном случае, оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2},$$

следовательно

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

2. Покажем, что при $x \leq 0$ и $x \geq l$, то есть вне ящика $\Psi = 0$.

Перепишем

$$\Psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0,$$

следовательно

$$\frac{\Psi''}{\Psi} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U).$$

Здесь E – полная энергия, величина конечная, U – потенциальная энергия, вне ящика стремится к бесконечности, то есть правая часть стремится к $+\infty$. Дробь $\frac{\Psi''}{\Psi}$ стремится к бесконечности, когда либо числитель стремится к бесконечности, либо знаменатель – к нулю. Волновая функция вне интервала $(0, l)$ обращается в ноль.

3. Внутри ящика, то есть в интервале $(0, l)$: $x \in (0, l)$, $U = 0$,

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0.$$

Если обозначить

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

получаем

$$\Psi'' + k^2\Psi = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Задание. Проверьте самостоятельно является ли функция

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

решением уравнения

$$\Psi'' + k^2\Psi = 0.$$

Для этого, найти вторую производную, подставить функцию и производную в уравнение.

4. Применим первое граничное условие.

$$\Psi(0) = 0.$$

$$\Psi(0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B.$$

$$\Psi(x) = -Be^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Учитывая формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

перепишем

$$\Psi(x) = -B \cos(kx) - Bi \sin(kx) + B \cos(-kx) + Bi \sin(-kx).$$

Учитывая, четность функции косинус и нечетность функции синус, получаем

$$\Psi(x) = -2iB \sin(kx).$$

5. Применим второе граничное условие.

$$\Psi(l) = 0.$$

$$-2iB \sin(kl) = 0 \quad \Rightarrow \quad B \sin(kl) = 0,$$

следовательно

$$B = 0$$

или

$$\sin(kl) = 0.$$

Если бы $B = 0$, то Ψ оказалась бы равной нулю везде, что противоречит условию существования Ψ . Значит $\sin(kl) = 0$,

$$kl = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k = \frac{n\pi}{l},$$

при этом $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

Так как $k \geq 0$, $n < 0$ не подходит, $n = 0$ не подходит, следовательно $n = 1, 2, 3, \dots$ и

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{l}, \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

тогда

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ml^2}.$$

Вывод. Энергия частицы квантуется.

При $n = 1$,

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2},$$

$$E_n = n^2 E_1.$$

6. Коэффициенты B найдем, используя условие нормировки

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1. \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^l |-2iB \sin(kx)|^2 dx + \int_l^{+\infty} 0 dx \\
& = 4B^2 \int_0^l \sin^2(kx) dx = \\
& = \frac{1}{2} \cdot 4B^2 \int_0^l (1 - \cos(2kx)) dx = 2B^2 \int_0^l dx - 2B^2 \int_0^l \cos(2kx) dx.
\end{aligned}$$

Чтобы найти интеграл $\sin^2(kx)$, воспользовались методом понижения степени

$$\sin^2(kx) = \frac{1 - \cos(2kx)}{2}.$$

Замечание. Как возвести модуль комплексного числа в квадрат?

$$\begin{aligned}
c &= a + bi, \quad |c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |c|^2 = a^2 + b^2, \\
c \cdot c^* &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |c|^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx &= 2B^2 l - \frac{B^2}{k} \int_0^l \cos(2kx) d(2kx) = \\
&= 2B^2 l - \frac{B^2}{k} \sin(2kx) \Big|_0^l.
\end{aligned}$$

При любой из подстановок $\sin(2kx) \Big|_0^l = 0$, так как $k = \frac{n\pi}{l}$ (см. выше). Значит

$$2B^2 l = 1, \quad B^2 = \frac{1}{2l}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2l}}.$$

Получаем

$$\Psi_n = -2i \frac{1}{\sqrt{2l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -\sqrt{\frac{2}{l}} i \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Легко показать, что если некоторая функция Ψ нормирована и удовлетворяет уравнению Шредингера, то функция $C\Psi$, где C – некоторый постоянный множитель (комплексный), модуль которого $|C| =$

1, тоже удовлетворяет уравнению Шредингера, оставаясь при этом нормированной.

Домножим волновую функцию на i , тогда

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

если $0 < x < l$, построим для $n = 1$ и $n = 2$ саму волновую функцию (она действительная) и квадрат ее модуля (плотность вероятности).

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \frac{\pi T}{l} = 2\pi, \quad T = 2l.$$

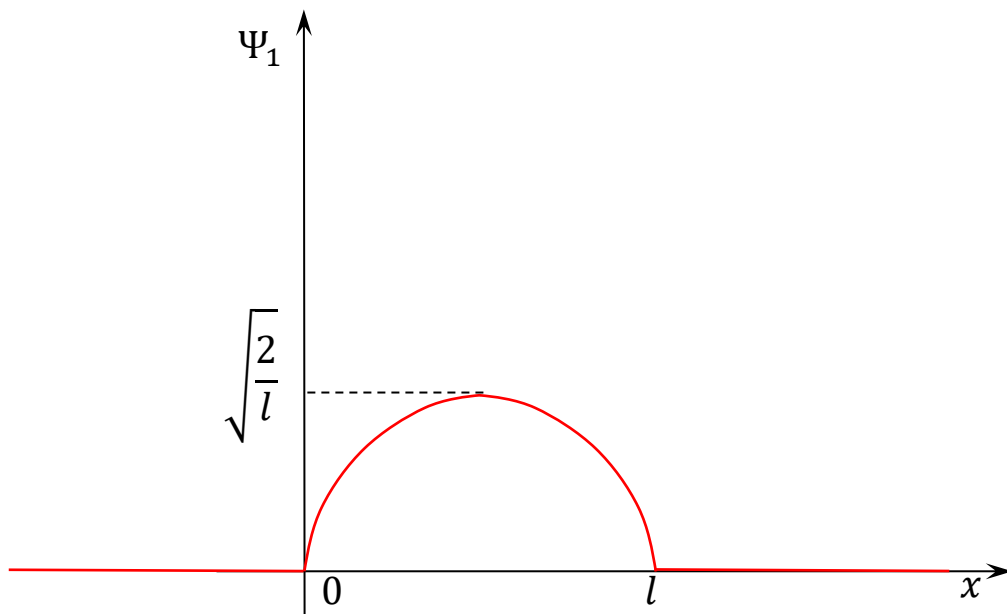


Рис. 5.4.

Воспользуемся формулой понижения степени

$$|\Psi_1|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{1}{l} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right) = \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right),$$

$$\frac{2\pi T}{l} = 2\pi, \quad T = l.$$

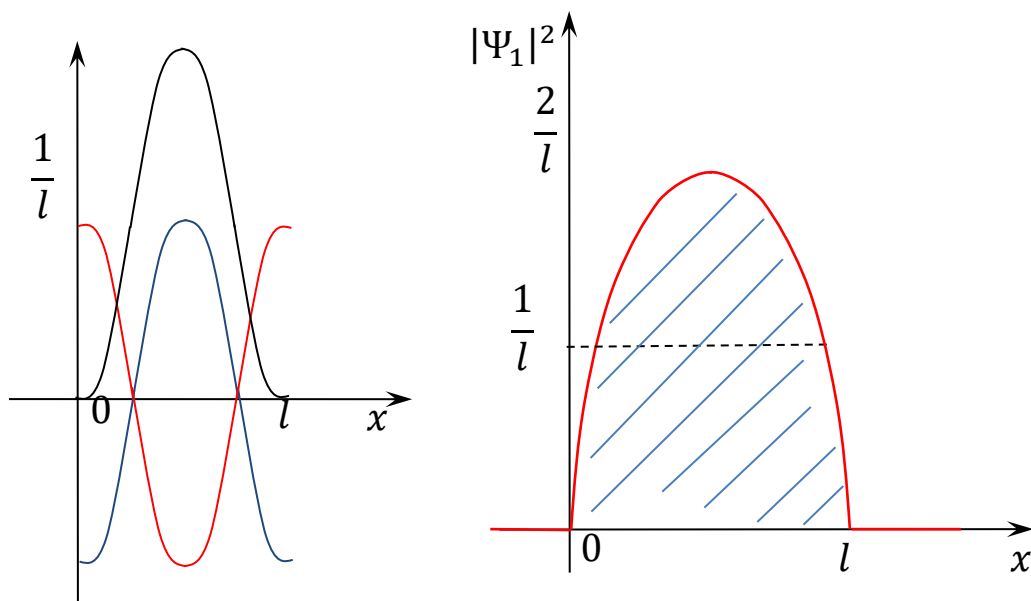


Рис. 5.5.

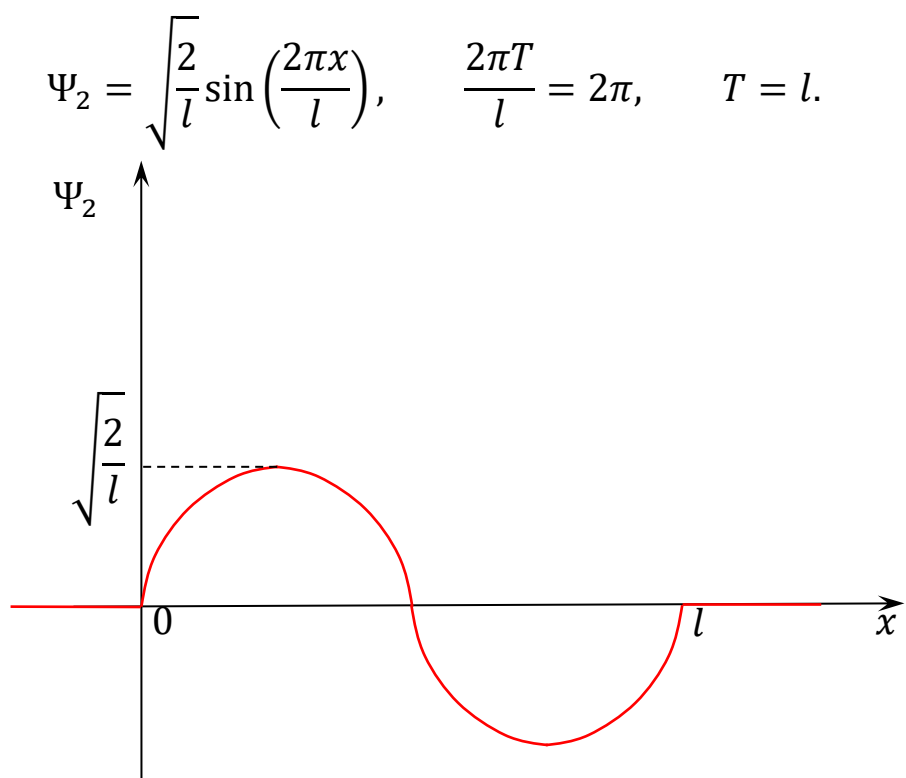


Рис. 5.6.

Воспользуемся формулой понижения степени

$$|\Psi_2|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = \frac{1}{l} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right) = \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right),$$

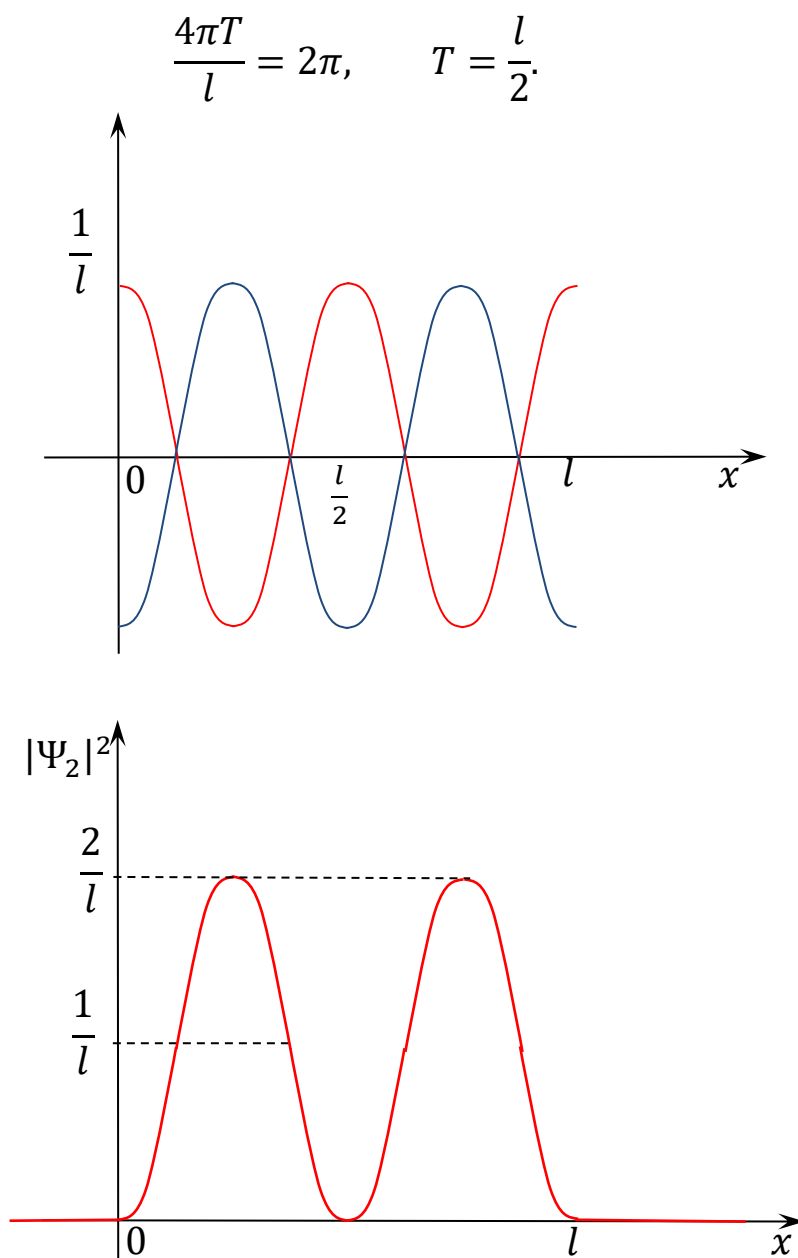


Рис. 5.7.

5.2. Трехмерный потенциальный ящик

Назовем трехмерным потенциальным ящиком силовое поле, в котором $E_n(U) = 0$ внутри куба со стороной l и равна бесконечности вне этого куба (рис. 5.8.)

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \begin{cases} 0 < x < l, \\ 0 < y < l, \\ 0 < z < l, \end{cases} \\ \infty, & \text{если } \begin{cases} -\infty < x < 0, l < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0, l < y < +\infty, \\ -\infty < z < 0, l < z < +\infty. \end{cases} \end{cases}$$

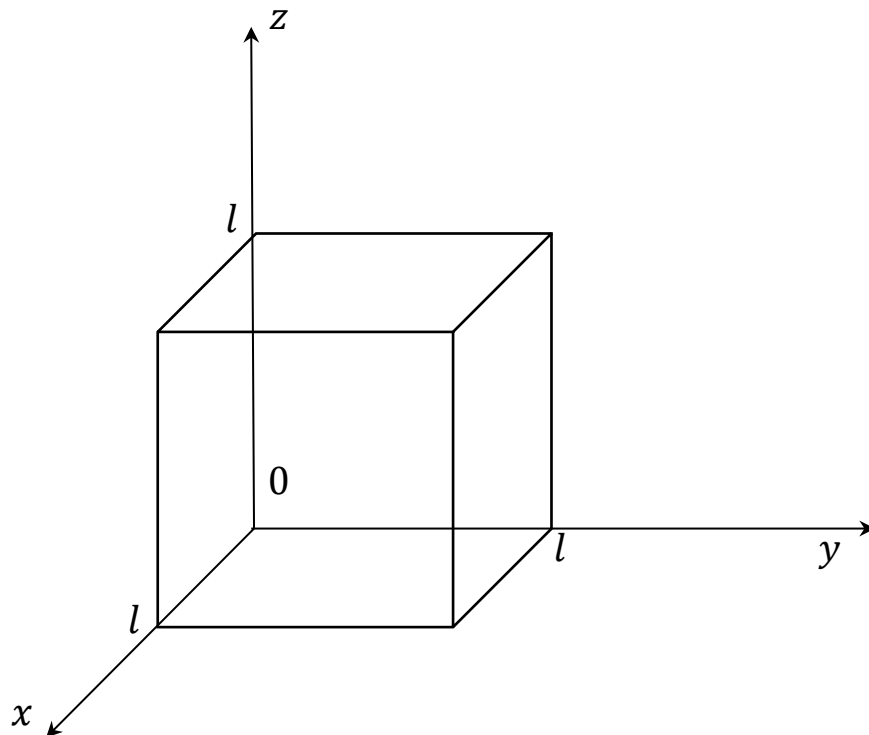


Рис. 5.8.

1. Запишем стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\Psi = 0.$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

тогда уравнение Шредингера примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\Psi = 0.$$

2. Аналогично одномерному случаю, учитывая, что вне ящика $U \rightarrow \infty$, можно показать, что вне ящика волновая функция Ψ обращается в ноль.

3. Внутри ящика по условию $U = 0$, тогда получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0.$$

Будем искать решение этого дифференциального уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной x, y или z :

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y) \cdot \Psi_z(z) = \Psi_x \Psi_y \Psi_z.$$

Найдем первые и вторые производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \Psi_y \Psi_z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_y \Psi_z \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \Psi_x \Psi_z \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Psi_x \Psi_z \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \Psi_x \Psi_y \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Psi_x \Psi_y \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Подставим вторые производные в уравнение Шредингера и разделим его на $\Psi_x \Psi_y \Psi_z$, получим

$$\frac{1}{\Psi_x} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\Psi_y} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\Psi_z} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Каждое из трех слагаемых в левой части зависит от одной переменной, а правая часть величина постоянная

$$f_x(x) + f_y(y) + f_z(z) = \text{const}.$$

Как доказать, что слева тоже постоянная? Возьмем частные производные слева и справа

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = 0, \quad f_x = \text{const},$$

от x не зависит. Аналогичным образом получаем, что все три слагаемых постоянны, то есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi_x} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} &= -k_x^2, & \frac{1}{\Psi_y} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} &= -k_y^2, & \frac{1}{\Psi_z} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} &= -k_z^2, \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

Аналогичны одномерному случаю и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Psi_x} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + k_x^2 &= 0, \\ \frac{1}{\Psi_y} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + k_y^2 &= 0, \\ \frac{1}{\Psi_z} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} + k_z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_x(0) = 0, \Psi_x(l) = 0, \\ \Psi_y(0) = 0, \Psi_y(l) = 0, \\ \Psi_z(0) = 0, \Psi_z(l) = 0. \end{cases}$$

Тогда аналогично одномерному случаю

$$\Psi_x = A_x \sin(k_x x),$$

$$\Psi_y = A_y \sin(k_y y),$$

$$\Psi_z = A_z \sin(k_z z).$$

Учитывая

$$A = A_x A_y A_z,$$

исходная волновая функция

$$\Psi = \Psi_x \Psi_y \Psi_z = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z).$$

Используя вторые граничные условия

$$\Psi_x(l) = 0, \Psi_y(l) = 0, \Psi_z(l) = 0,$$

получаем, что

$$k_x = \frac{\pi n_x}{l}, n_x = 1, 2, 3, \dots;$$

$$k_y = \frac{\pi n_y}{l}, n_y = 1, 2, 3, \dots;$$

$$k_z = \frac{\pi n_z}{l}, n_z = 1, 2, 3, \dots.$$

Окончательно имеем

$$\Psi = A \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l}\right).$$

Удастся показать, что и энергия частицы в ящике квантуется

$$E = \frac{h^2 \pi^2}{2ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Если для описания одномерного потенциального ящика понадобилось одно квантовое число n , то в трехмерном случае возникает три квантовых числа n_x, n_y, n_z .

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Потенциальную энергию для одномерного потенциального ящика определяется формулой...

- a) $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, l), \\ \infty, & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$
- b) $U(x) = \begin{cases} mc^2, & \text{при } x \in (0, l), \\ \infty, & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$
- c) $U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x \in (0, l), \\ 0, & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$
- d) $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, l), \\ h\nu, & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$

2. Стационарное уравнение Шредингера одномерного потенциального ящика можно записать в виде

- a) $\Psi'' + k^2\Psi = 0$, где $k = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$;
- b) $\Psi'' + k^2\Psi = 0$, где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$;
- c) $\Psi'' + k\Psi = 0$, где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$;
- d) $\Psi' + k^2\Psi = 0$, где $k = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$.

3. Волновая функция для одномерного потенциального ящика имеет вид

- a) $\Psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$;
- b) $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$;
- c) $\Psi_0 = \sqrt{\frac{\beta^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\beta x^2}$;
- d) $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(n\pi x)$.

4. Энергия частицы в потенциальном ящике квантуется и определяется формулой...

- a) $E_n = h\nu l n$;
- b) $E_n = h\nu l \left(n_x + n_y + n_z + \frac{1}{2} \right)$;
- c) $E = \frac{h^2 \pi^2}{2ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$;
- d) $E_n = mc^2 l n$.

5. Назовем трехмерным потенциальным ящиком силовое поле, в котором _____ равна _____ внутри куба со стороной l и равна _____ вне этого куба. Какие слова пропущены в определении?

- a) Потенциальная энергия, нулю, бесконечности.
- b) Потенциальная энергия, бесконечности, нулю.
- c) Кинетическая энергия, нулю, бесконечности.
- d) Кинетическая энергия, бесконечности, нулю.

6. С помощью какого уравнения можно определить волновую функцию для потенциального ящика?

- a) С помощью уравнения Шредингера.
- b) С помощью уравнения Эйнштейна.
- c) С помощью закона сохранения механической энергии.
- d) Нельзя определить.

7. Для описания трехмерного квантового ящика необходимо...

- a) Одно квантовое число.
- b) Два квантовых числа.
- c) Три квантовых числа.
- d) Четыре квантовых числа.

8. В качестве классического аналога одномерного потенциального ящика можно рассматривать...

- a) бесконечную узкую яму;
- b) узкий желоб, ограниченный бесконечными стенками с двух сторон;
- c) пружинный маятник;
- d) квантовый линейный осциллятор.

9. Какой из ниже приведенных графиков (рис. 5.9) является графиком распределения плотности вероятности для одномерного потенциального ящика при $n = 1$.

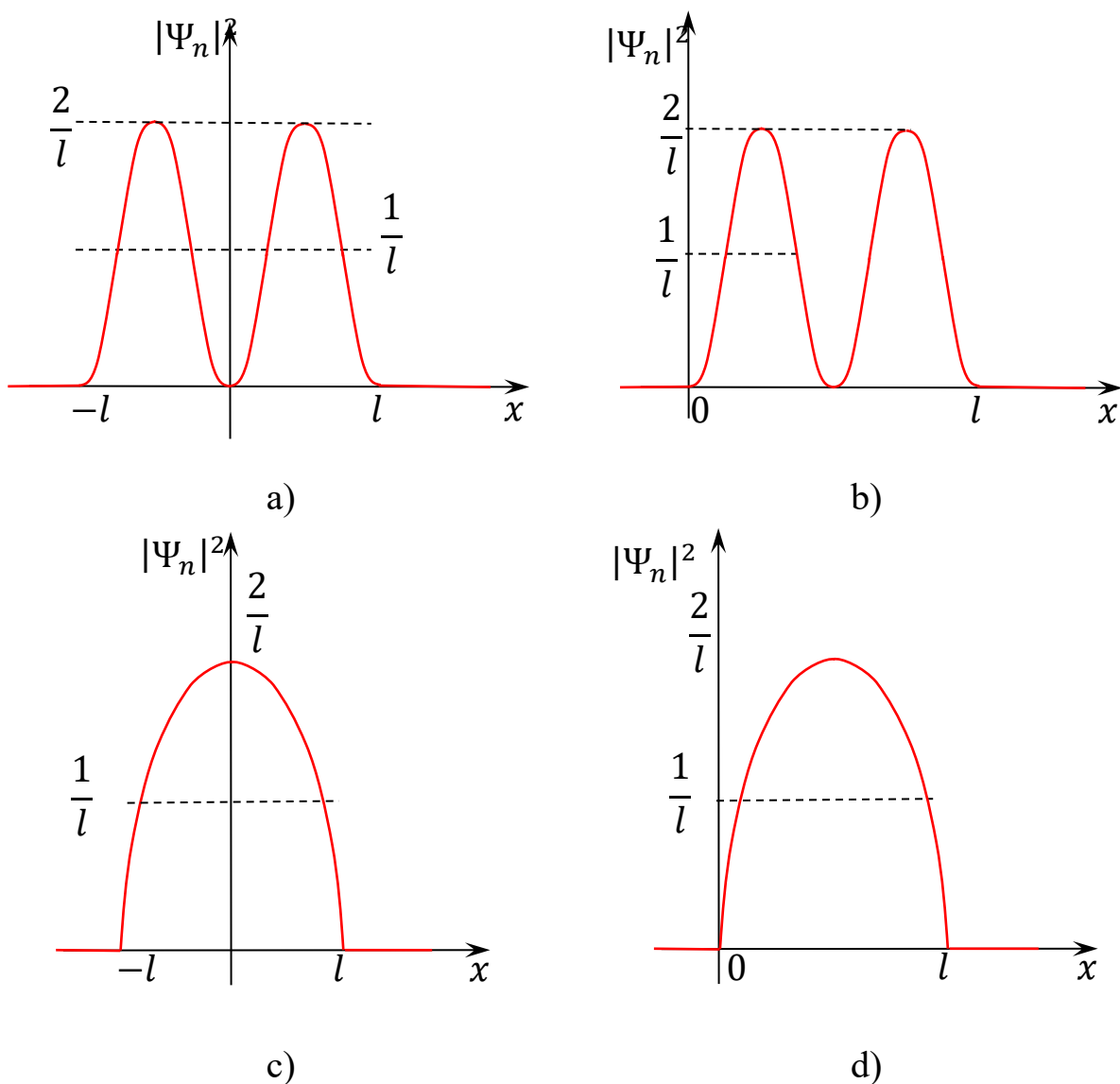
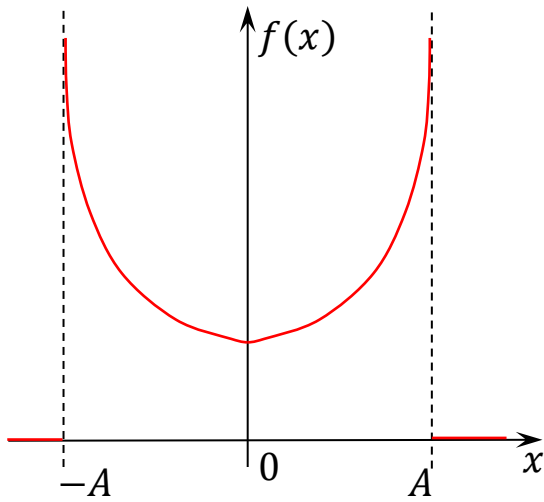


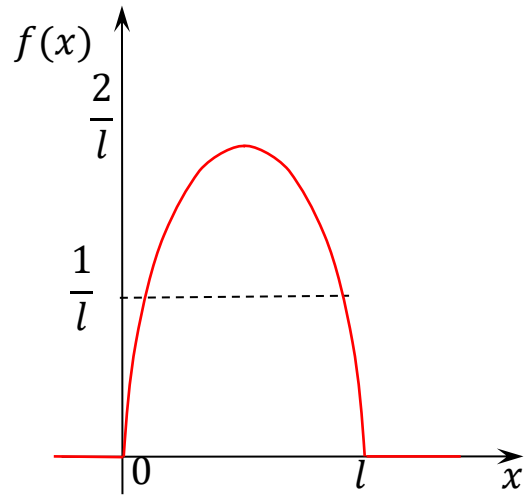
Рис. 5.9.

10. Установите соответствие между графиком функции плотности вероятности $f(x)$ и моделью для которой он изображен (рис. 5.10).

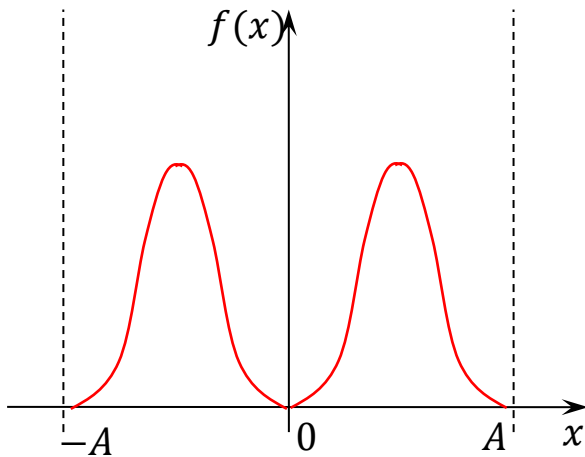
- a) Классический линейный осциллятор.
- b) Квантовый линейный осциллятор (при $n = 1$).
- c) Классический одномерный потенциальный ящик.
- d) Квантовый одномерный потенциальный ящик (при $n = 1$).



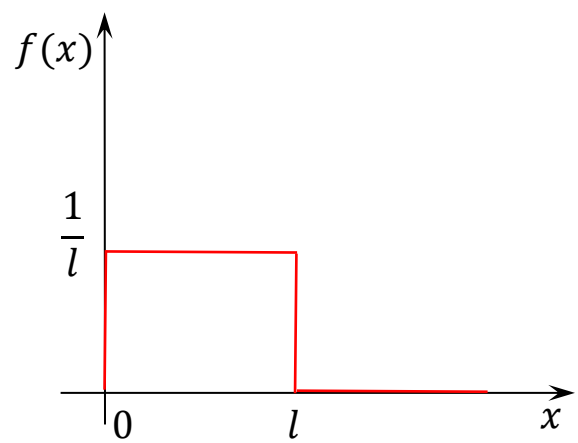
(1)



(2)



(3)



(4)

Рис. 5.10.

Прохождение частицей потенциального барьера

Рассмотрим следующую ситуацию. Частица движется вдоль оси O_x потенциальная энергия в областях I и II постоянна, но различна. Описать поведение частицы.

Для определения будем считать, что $U_I = 0$, а $U_{II} = U_0$ (рис. 5.11).

Границы областей возьмем в начале координат

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

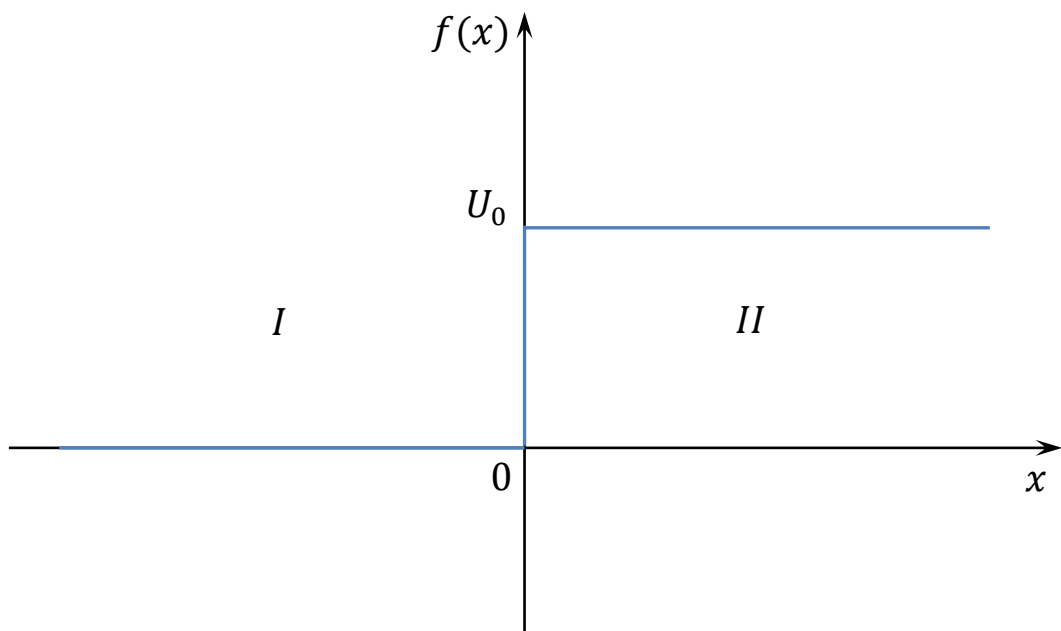


Рис. 5.11.

Прежде чем рассмотреть поведение микрочастицы, остановимся на классическом аналоге задачи (рис. 5.12).

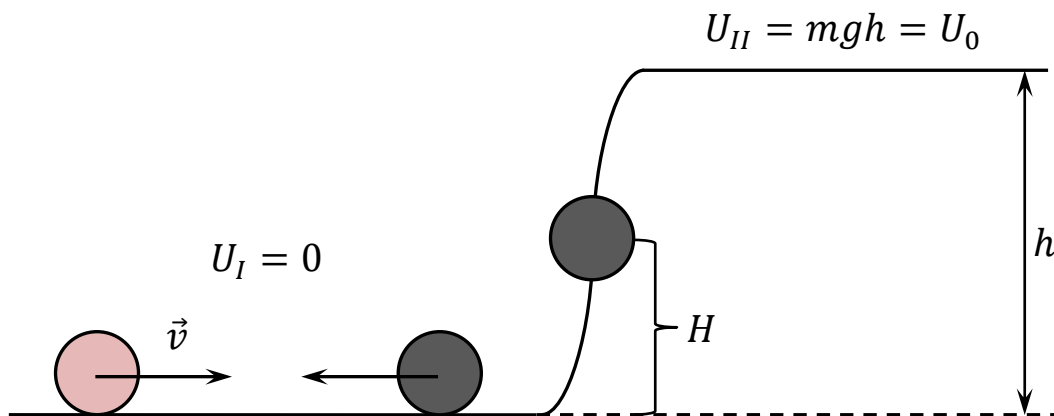


Рис. 5.12.

1 случай.

$$E < U_0.$$

Если энергия шарика E меньше высоты потенциального барьера U_0 , шарик на границе поднимется на высоту H ,

$$E = mgH,$$

и будет и двигаться назад с такой же по модулю скоростью.

Таким образом, шарик отразится с вероятностью 1 если $E < U_0$.

2 случай.

$$E > U_0.$$

Шарик достоверно перелетит барьер и продолжит движение в другой области, но с другой скоростью.

Вернемся к квантовому случаю. Для микрочастицы воспользуемся аппаратом квантовой механики.

В области I

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi_1 = 0,$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

тогда

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + k_1^2\Psi_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\Psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}.$$

В области II

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\Psi_2 = 0,$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}},$$

тогда

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + k_2^2\Psi_2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\Psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}.$$

Слагаемые в общих решениях уравнения Шредингера по форме напоминают уравнение волны.

Первое слагаемое (которое содержит «+» в степени) соответствуют волнам, направленным вдоль оси Ox , вторые слагаемые – против оси.

В первой области (I) могут существовать обе волны (волны де Бройля): волны де Бройля вдоль оси (падающие) и против оси (отраженные).

Во второй области (II) отраженной волны не будет, т.к. в ней U остается неизменной вплоть до ∞ , не от чего отразиться, поэтому

$$B_2 = 0,$$

$$\Psi_2 = A_2 e^{ik_2 x}.$$

Коэффициенты A_1, B_1, B_2 , точнее их квадраты определяют амплитуды соответствуют волн.

Нас будет волновать вероятность отражения (прохождения) потенциального барьера, которая определяется отношением соответствующих амплитуд.

Амплитуду падающей волны примем за единицу $A_1 = 1$, тогда

→ для области I

$$\Psi_1 = e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x};$$

→ для области II

$$\Psi_2 = A_2 e^{ik_2 x}, \quad B_2 = 0.$$

Для нахождения B_1 и A_2 воспользуемся стандартным условием: волновая функция и ее первая производная должны быть непрерывны во всей области определения.

Рассмотрим первый случай ($E > U_0$)

$$(\Psi_1)_{x=0} = (\Psi_2)_{x=0}$$

следовательно

$$\begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2, \\ \left(\frac{d\Psi_1}{dx} \right)_{x=0} &= \left(\frac{d\Psi_2}{dx} \right)_{x=0}, \\ \begin{cases} \frac{d\Psi_1}{dx} = ik_1 e^{ik_1 x} - B_1 ik_1 e^{-ik_1 x}, \\ \frac{d\Psi_2}{dx} = A_2 ik_2 e^{ik_2 x}, \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\frac{d\Psi_1}{dx} \right)_{x=0} = ik_1 - B_1 ik_1, \\ \left(\frac{d\Psi_2}{dx} \right)_{x=0} = A_2 ik_2, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда получаем

$$ik_1 - B_1 ik_1 = A_2 ik_2,$$

следовательно

$$\begin{cases} 1 - B_1 = \frac{k_2}{k_1} A_2, \\ 1 + B_1 = A_2, \\ 2 = \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) A_2, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \\ 2B_1 &= A_2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right), \\ B_1 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1}, \end{aligned}$$

тогда

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Коэффициент отражения

$$R = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{B_1}{1}\right)^2 = B_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2.$$

$$\text{При } E \rightarrow U_0, \quad k_2 \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 1.$$

$$\text{При } E \gg U_0, \quad k_1 \approx k_2 \text{ и } R \approx 0.$$

Если энергия частицы много больше высоты потенциального барьера, то она преодолевает этот барьер.

Во втором случае, когда $E < U_0$, коэффициент становится мнимым

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = ik,$$

тогда

$$R = \left|\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\right|^2 = \frac{|k_1 - ik|^2}{|k_1 + ik|^2} = \frac{(k_1 - ik)(k_1 + ik)}{(k_1 + ik)(k_1 - ik)} = 1.$$

В этом случае частица достоверно отразится (так же, как и в классическом случае).

Однако, волновая функция в области II

$$\Psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} = A_2 e^{-kx}.$$

А плотность вероятности обнаружения частицы в области вблизи точки с координатой x (т.е. вероятность обнаружить частицу в единичном интервале вблизи точки с координатой x)

$$|\Psi_2|^2 = \Psi_2^* \Psi_2 = A_2^2 e^{-2kx} = A_2^2 e^{\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} x}.$$

Таким образом, преодолеть потенциальный барьер частица не может, но вероятность проникнуть вглубь второй (II) области на любое конечное расстояние отлична от нуля. В классическом случае, ве-

роятность обнаружить шарик вблизи какой-либо точки во II области строго равна нулю.

Проекция импульса микрочастицы в одномерном потенциальном ящике

Состояние микрочастицы в одномерном потенциальном ящике определяет волновая функция ψ , которая внутри ящика принимает вид:

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Проверим, является ли Ψ собственной функцией оператора проекции импульса

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

Подействуем оператором $\hat{p}_x$ на функцию Ψ_n

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \Psi_n &= -i\hbar \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = -i\hbar \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} \frac{n\pi}{l} = \\ &= -i\hbar \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция Ψ_n не является собственной функцией оператора $\hat{p}_x$.

Из формулы Эйлера

$$\left. \begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos \alpha - i \sin \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} &= 2i \sin \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned}$$

Подставим вместо $\sin \alpha$ в Ψ_n :

$$\Psi_n = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{+i\frac{n\pi x}{l}} - \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} = \Psi^+ - \Psi^-.$$

Пример 1. Проверим, является ли функции Ψ^+ решением уравнения Шредингера для одномерного потенциального ящика.

$$\Psi^+ = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi &= 0, \\ \frac{d\Psi^2}{dx} &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{in\pi}{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}}, \\ \frac{d^2\Psi^+}{dx^2} &= \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}} \cdot \frac{in\pi}{l} = \frac{in^2\pi^2}{2l^2} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}}, \\ \frac{in^2\pi^2}{2l^2} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{2m}{\hbar^2} E \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} &= 0, \\ \left(\frac{in^2\pi^2}{2l^2} + \frac{2m}{i\hbar^2} E \right) \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} &= 0, \\ \frac{in^2\pi^2}{2l^2} + \frac{2m}{i\hbar^2} E &= 0, \\ \frac{in^2\pi^2}{2l^2} = -\frac{2m}{i\hbar^2} E, \quad \frac{in^2\pi^2}{2l^2} &= -\frac{2im}{\hbar^2} E, \\ E_n &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2} n^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{n^2\pi^2}{2l^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ml^2}, \quad 1 = 1.$$

Функция Ψ^+ - является решением уравнения Шредингера.

Задание 2. Проверить является ли функция Ψ^- решением уравнения Шредингера для одномерного потенциального ящика.

Пример 2. Проверим, является ли функция Ψ^+ собственной функцией оператора $\hat{p}_x$.

$$\begin{aligned} \Psi^+ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{in\pi x}{l}}; \\ \hat{p}_x &= -i\hbar \frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_x \Psi^+ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{i n \pi x}{l}} \right) = -i\hbar \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{i n \pi x}{l}} \frac{i n \pi}{l} = \\
&= \frac{-i^2 n \pi \hbar}{2il} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{i n \pi x}{l}} = \frac{n \pi \hbar}{2il} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{i n \pi x}{l}} = \\
&= \frac{n \pi \hbar}{2il} \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}} e^{\frac{i n \pi x}{l}} = \frac{n \pi \hbar}{2il} \Psi^+,
\end{aligned}$$

Получили

$$\hat{p}_x \Psi^+ = \frac{n \pi \hbar}{2il} \Psi^+.$$

Функция Ψ^+ является собственной функцией оператора $\hat{p}_x$.

В состоянии, которое описывается волновой функцией Ψ^+ , проекция импульса на ось O_x выражается формулой

$$p_x = \frac{n \pi \hbar}{l} > 0,$$

т.к. $n > 0, \pi > 0, \hbar > 0, l > 0$.

Задание 3. Проверить, является ли функция ψ^- собственной функцией оператора $\hat{p}_x$.

Среднее значение величин для одномерного потенциального ящика

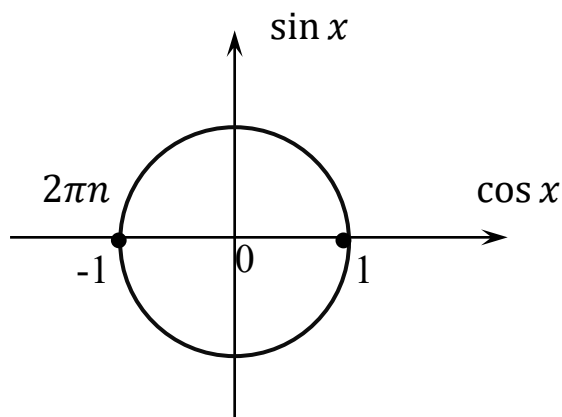
Пример 3. Найдите среднее значение координаты частицы в одномерном потенциальном ящике.

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= \sqrt{\frac{2}{e}} \sin \frac{\pi n x}{e}, \\
\Psi &= \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ \Psi_n, & x \in (0; e), \\ 0, & x \in (e; +\infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{x} \Psi dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx + \int_0^e \Psi^* \hat{x} \Psi dx + \int_e^{+\infty} 0 dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^e \left(\sqrt{\frac{2}{e}} \sin \frac{\pi n x}{e} \right) \hat{x} \left(\sqrt{\frac{2}{e}} \sin \frac{\pi n x}{e} \right) dx = \\
&= \frac{2}{e} \int_0^e x \sin^2 \frac{\pi n x}{e} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{понижим степень} \\ \text{на } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{2} \int_0^e x \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{e} \right) dx = \\
&= \frac{1}{e} \int_0^e x dx - \frac{1}{e} \int_0^e x \cos \frac{2\pi n x}{e} dx = \\
&= \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} \Big|_0^e - \frac{1}{e} \int_0^e x \cos \frac{2\pi n x}{e} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \cos \frac{2\pi n x}{e} dx; \\ v = \frac{e}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{e} \end{array} \right] = \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{e} \cdot \frac{e}{2\pi n} x \sin \frac{2\pi n x}{e} \Big|_0^e + \frac{1}{e} \int_0^e \frac{e}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{e} dx = \\
&= \frac{e}{2} + \frac{1}{2\pi n} \left(-\cos \frac{2\pi n x}{e} \right) \Big|_0^e = \frac{e}{2}. \blacksquare
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sin 0 &= 0, \\
\sin \frac{2\pi n e}{e} &= \sin 2\pi = 0, \\
\cos 2\pi n &= -1, \\
\cos 0 &= 1.
\end{aligned}$$

Рис. 5.13.

Задание 4. Найти среднее значение проекции импульса $\hat{p}_x$ на ось Ox для одномерного потенциального ящика.

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\widehat{d}}{dx},$$

$$\Psi = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0) \\ \Psi_n, x \in (0; l) \\ 0, x \in (l; +\infty) \end{cases}.$$

Пример 4. Найти средний квадрат координаты $\bar{x}^2$ для одномерного потенциального ящика.

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \hat{x}^2,$$

$$\Psi = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0) \\ \Psi_n, x \in (0; l) \\ 0, x \in (l; +\infty) \end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{x}^2 \Psi dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^l \Psi_n^* \hat{x}^2 \Psi_n dx + \int_l^{+\infty} 0 dx = \\ &= \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} (\hat{x}^2) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \left[\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}}{2} \right] = \\ &= \frac{2}{2l} \int_0^l x^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l x^2 dx - \frac{1}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{2\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l - \frac{1}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{2\pi n x}{l} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} \frac{l^3}{3} - \frac{1}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{2\pi n x}{l} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \cos \frac{2\pi n x}{l} dx, v = \frac{l}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \end{array} \right] = \\
&= \frac{l^2}{3} - \frac{1}{l} \left(x^2 \frac{l}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{2\pi n} \int_0^l \sin \frac{2\pi n x}{l} \cdot 2x dx \right) = \\
&= \frac{l^2}{3} - \underbrace{\frac{1}{l} x^2 \frac{l}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^l}_{=0} + \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{2\pi n} \int_0^l \sin \frac{2\pi n x}{l} \cdot 2x dx = \\
&= \frac{l^2}{3} + \frac{1}{\pi n} \int_0^l x \sin \frac{2\pi n x}{l} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin \frac{2\pi n x}{l} dx, v = \frac{l}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n x}{l} \end{array} \right] = \\
&= \frac{l^2}{3} + \frac{1}{\pi n} \left(\underbrace{x \frac{l}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^l}_{\frac{l^2}{2\pi n}} - \frac{l}{2\pi n} \int_0^l \cos \frac{2\pi n x}{l} dx \right) = \\
&= \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2\pi^2 n^2} - \frac{l}{4\pi^3 n^3} \int_0^l \cos \frac{2\pi n x}{l} d\left(\frac{2\pi n x}{l}\right) = \\
&= \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{4\pi^3 n^3} \underbrace{\sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^l}_{=0} = \\
&= \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2\pi^2 n^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Задание 5. Найти средний квадрат проекции импульса $\bar{p}_x^2$ на ось Ox для одномерного потенциального ящика.

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \hat{p}_x^2 = \left(-i\hbar \frac{\widehat{d}}{dx} \right)^2, \\
\Psi &= \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0) \\ \psi_n, x \in (0; l) \\ 0, x \in (l; +\infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

Глава 6. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Уравнение Шредингера для атома водорода](#)
- [Разделение переменных](#)
- [Квантовые проекции момента импульса и модуля момента импульса](#)
- [Функция состояния](#)
- [Энергия основных состояний атома водорода](#)
- [Выводы](#)
- [Материалы для практической работы](#)

6.1. Уравнение Шредингера для атома водорода

Атом водорода состоит из двух микрочастиц (протона и электрона) Масса протона почти в две тысячи раз больше массы электрона, поэтому скорость движения протона много меньше скорости движения электрона, а значит в первом приближении протон можно считать неподвижным, тогда состояние атома водорода полностью описывается состоянием электрона, который находится в поле неподвижного протона. Удобно поместить протон в начало координат и тогда, чтобы описать состояние атома водорода следует записать уравнение Шредингера для электрона, находящегося в поле неподвижного протона.

В трехмерном случае уравнение Шредингера имеет вид

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

Так как электрон находится в сферически симметричном поле силы Кулона, действующей со стороны протона, целесообразно рассмотреть уравнение Шредингера в сферической системе координат, то есть

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi).$$

В сферической системе координат оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Потенциальная энергия взаимодействия протона с электроном (потенциальная энергия электрона в поле протона) зависит от расстояния r

$$U(r) = -k \frac{e^2}{r}.$$

С учетом этого уравнение Шредингера примет вид

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) \Psi = 0,$$

или

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) \Psi = 0.$$

6.2. Разделение переменных

Для нахождения решения уравнения Шредингера воспользуемся методом разделения переменных. Будем искать волновую функцию Ψ в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) + Q(\theta) + \Phi(\varphi) = RQ\Phi.$$

Тогда из уравнения Шредингера получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial RQ\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial RQ\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 RQ\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) RQ\Phi = 0.$$

После умножения на

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{RQ\Phi}$$

будем иметь

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{Q} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Если третье слагаемое перенести вправо, то слева получим некоторую функцию от r и θ , а справа функцию от φ

$$f(r, \theta) = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

Это равенство справедливо во всей области определения переменных, так как левая часть зависит только от r и θ , а правая только от φ , легко показать, что обе эти части являются постоянными и не зависят ни от R , ни от Q , ни от Φ .

Обозначим эту константу m_l^2 . Тогда, заменив правую часть на константу m_l^2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{Q} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta = m_l^2. \end{aligned}$$

Разделим это выражение на $\sin^2 \theta$ и перенесем все, что содержит θ вправо, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 = \\ = \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{Q \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Получили аналогичную ситуацию – слева функция зависит от r , справа от θ , значит обе они постоянные, которые мы обозначим $l(l+1)$.

Окончательно получаем три уравнения, которые называют *триадой*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 = l(l+1), \end{aligned} \right. \quad (6.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{Q \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1), \end{aligned} \right. \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m_l^2. \end{aligned} \right. \quad (6.3)$$

Триада представляет собой три дифференциальных уравнения, каждое из которых зависит только от одной переменной, решив которые, мы получим функции R , Q , Φ , произведение которых даст нам функцию состояния Ψ , являющуюся решением уравнения Шредингера.

6.3. Квантовые проекции момента импульса и модуля момента импульса

Третье уравнение решается наиболее просто

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m_l^2,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \Phi m_l^2 = 0,$$

$$\Phi = A e^{im_l \varphi}.$$

Задание. Найти вторую производную функции Φ , и проверить, что она является решением уравнения (6.3).

Так как φ и $\varphi + 2\pi$ задают один и тот же угол, очевидно, что

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

то есть

$$A e^{im_l \varphi} = A e^{im_l(\varphi + 2\pi)},$$

$$e^{im_l 2\pi} = 1.$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

получим

$$\cos 2\pi m_l + i \sin 2\pi m_l = 1,$$

$$\begin{cases} \cos 2\pi m_l = 1, \\ \sin 2\pi m_l = 0. \end{cases}$$

Здесь m_l – целое число ($m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Значение A найдем из условия нормировки. Функция Φ должна быть нормирована

$$\int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi = 1,$$

$$\Phi = A e^{im_l \varphi}, \quad \Phi^* = A e^{-im_l \varphi}, \quad |\Phi|^2 = \Phi \cdot \Phi^* = A^2,$$

$$\int_0^{2\pi} A^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = A^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi A^2,$$

$$2\pi A^2 = 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, мы получаем, что функция Φ зависит от целого числа m_l и имеет вид

$$\Phi_{m_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}.$$

Известно, что в сферической системе координат оператор проекции момента импульса на ось z имеет вид:

$$\hat{L}_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Предположим, что функция Ψ , является собственной функцией оператора $\hat{L}_z$, то есть

$$\hat{L}_z \Psi = L_z \Psi,$$

где L_z – численное значение.

В нашем случае $\Psi = RQ\Phi$, следовательно

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} (RQ\Phi) = L_z RQ\Phi, \quad i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = L_z \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi},$$

тогда получим

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi} \right) = m_l \hbar \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi} = m_l \hbar \Phi,$$

следовательно

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вывод. Проекция момента импульса на ось z может принимать ряд дискретных значений кратных $\hbar$, то есть проекция момента импульса квантуется.

Величина m_l получила название – *магнитное орбитальное квантовое число*.

Во втором уравнении триады (6.2) вместо $-m_l^2$ запишем

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

и умножим обе части на

$$-\hbar^2 RQ\Phi,$$

получим

$$-\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial RQ\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 RQ\Phi}{\partial \varphi^2} \right\} = \hbar^2 l(l+1) RQ\Phi.$$

В левой части получили результат, действия оператора квадрата момента импульса на функцию Ψ , то есть имеем

$$\hat{L}^2 \Psi = l(l+1) \hbar^2 \Psi.$$

Это означает, что Ψ – является собственной функцией оператора квадрата момента импульса $\hat{L}^2$, а $l(l+1)\hbar^2$ – собственное значение этого оператора

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2.$$

Тогда *модуль момента импульса*

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar.$$

Как мы уже показали, проекция момента импульса L_z квантуется, а значит естественно предположить, что квантуется и модуль момента импульса.

Оказалось, что момент импульса принимает дискретный ряд значений, так как $|L_z| \leq L$, следовательно

$$|m_l \hbar| \leq \sqrt{l(l+1)}\hbar,$$

$$|m_l| \leq \sqrt{l(l+1)},$$

при больших значениях, можно считать, что $l(l+1) \approx l^2$, тогда $|m_l| \leq l$ и так как m_l – целое число

$$-l \leq m_l \leq l,$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l.$$

6.4. Функция состояния

Перейдем к решению первого и второго уравнения триады.

В декартовой системе координат $\Delta = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z$, аналогично в сферической системе координат $\Delta = \Delta_r + \Delta_\theta + \Delta_\varphi$. Пропуская вывод операторов Δ_r и Δ_θ отметим, что первое уравнение удастся записать в виде

$$\Delta_r R + f(r)R = 0. \quad (6.4)$$

А второе

$$\Delta_\theta Q + f(\sin \theta)Q = 0. \quad (6.5)$$

Аналогично для гармонического осциллятора

$$\Delta_x \Psi + f(x)\Psi = 0.$$

Используя приемы, аналогичные тем, что использовались для квантового линейного гармонического осциллятора, удастся показать, что решениями этих уравнений являются функции:

– для (6.4) функция

$$R_{n,l} = f_{n,l}(r)e^{-r/na},$$

где $f_{n,l}(r)$ – полиномы Лагерра и

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2};$$

– для (6.5) функция

$$Q_{l,m_l} = f_{l,m_l}(\theta),$$

где $f_{l,m_l}(\theta)$ – полиномы Лежандра.

Полиномы Легера и Лежандра приведены в справочной литературе.

Таким образом, функция состояния, полностью описывающая поведение электрона в атоме водорода, а значит и поведение всего атома

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r)Q_{l,m_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi),$$

т.е. волновая функция определяется тремя квантовыми числами $n = 1, 2, 3, \dots$ (принимает значения из ряда натуральных чисел),

$$l < n; l = 0, 1, \dots, n-1, \\ -l \leq m_l \leq l, \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l.$$

6.5. Энергия основных состояний атома водорода

В первое уравнение триады (6.1) входит энергия электрона, но, так как протон неподвижен, эта энергия совпадает с энергией всего атома.

Выразим эту энергию, когда квантовое число $n = 1$, а квантовое число $l = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 R_1 = l(l+1)R_1. \quad (6.6)$$

Найдем производную

$$\frac{\partial R_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a} \right) = \frac{2}{a^{3/2}} \left(-\frac{1}{a} \right) e^{-r/a} = -\frac{2}{a^{5/2}} e^{-r/a}.$$

Найдем вторую производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{2}{a^{5/2}} e^{-r/a} \right) \right) = \\ &= 2r \left(-\frac{2}{a^{5/2}} e^{-r/a} \right) + \frac{2r^2}{a^{7/2}} e^{-r/a} = \\ &= -\frac{4r}{a^{5/2}} e^{-r/a} + \frac{2r^2}{a^{7/2}} e^{-r/a}. \end{aligned}$$

Подставим результаты в уравнение (6.6)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4r}{a^{5/2}}e^{-r/a} + \frac{2r^2}{a^{7/2}}e^{-r/a} + \frac{2m}{\hbar^2}E_1r^2\frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a} + \\
 & + \frac{2mke^2}{\hbar^2}r\frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a} = 0, \\
 & \left(-\frac{4r}{a^{5/2}} + \frac{2r^2}{a^{7/2}} + \frac{2mE_1}{\hbar^2}r^2\frac{2}{a^{3/2}} + \frac{mke^2}{\hbar^2}\frac{4r}{a^{3/2}}\right)e^{-r/a} = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow -\frac{4r}{a^{5/2}} + \frac{2r^2}{a^{7/2}} + \frac{2mE_1}{\hbar^2}r^2\frac{2}{a^{3/2}} + \frac{mke^2}{\hbar^2}\frac{4r}{a^{3/2}} = 0,
 \end{aligned}$$

Учитывая

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2},$$

получим

$$-\frac{4r}{a^{5/2}} + \frac{2r^2}{a^{7/2}} + \frac{2mE_1}{\hbar^2}r^2\frac{2}{a^{3/2}} + \frac{4r}{a^{5/2}} = 0$$

и

$$\frac{2r^2}{a^{7/2}} + \frac{2mE_1}{\hbar^2}r^2\frac{2}{a^{3/2}} = 0,$$

тогда, учитывая

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},$$

получим

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2\hbar^2}.$$

Для состояний, в которых $l = 0$, $m_l = 0$, то есть для состояний Ψ_{n00} ,

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

6.6. Выводы

Поведение электрона в атоме водорода описывают три квантовых числа (аналогично трехмерному потенциальному ящику).

1) *Главное квантовое число n* принимает натуральные значения 1, 2, 3, ..., отвечает в первую очередь за квантование энергии

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}.$$

2) Орбитальное квантовое число l , принимает значения

$$l = 0, 1, \dots, n - 1,$$

отвечает за квантование модуля момента импульса

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar.$$

3) Магнитное орбитальное квантовое число m_l , принимает значения

$$m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

отвечает за квантование проекции момента импульса

$$L_z = m_l \hbar.$$

Из последнего уравнения, видим, что проекция находится на ось z . Разберемся, что это за ось.

Момент импульса – векторная физическая величина, но в отсутствии внешнего магнитного поля его направление произвольно, поэтому и говорить о квантовании его проекции на какую-то ось в отсутствии внешнего магнитного поля не имеет смысла. Но если наложить внешнее магнитное поле, индукция которого $\vec{B}$, необходимо выяснить, как может располагаться $\vec{l}$ относительно вектора $\vec{B}$, вдоль которого и направляют ось z .

Рассмотрим пространственное квантование в атоме водорода H_2 .

→ Если $l = 0$, то $L = 0$. Пространственного квантования нет.

→ Рассмотрим случай (рис. 6.1), когда

$$l = 1, \quad L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar,$$

$$m_l = 0, \pm 1, \quad L_z = m_l \hbar, \quad r = L = \sqrt{2}\hbar.$$

Если $m_l = 0$, $L_z = 0$.

Если $m_l = \pm 1$, $L_z = \pm \hbar$. Угол между вектором $\vec{L}$ и положительным направлением оси $\vec{Oz}$ равен 45° , так как

$$\cos \alpha = \frac{L_z}{L} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

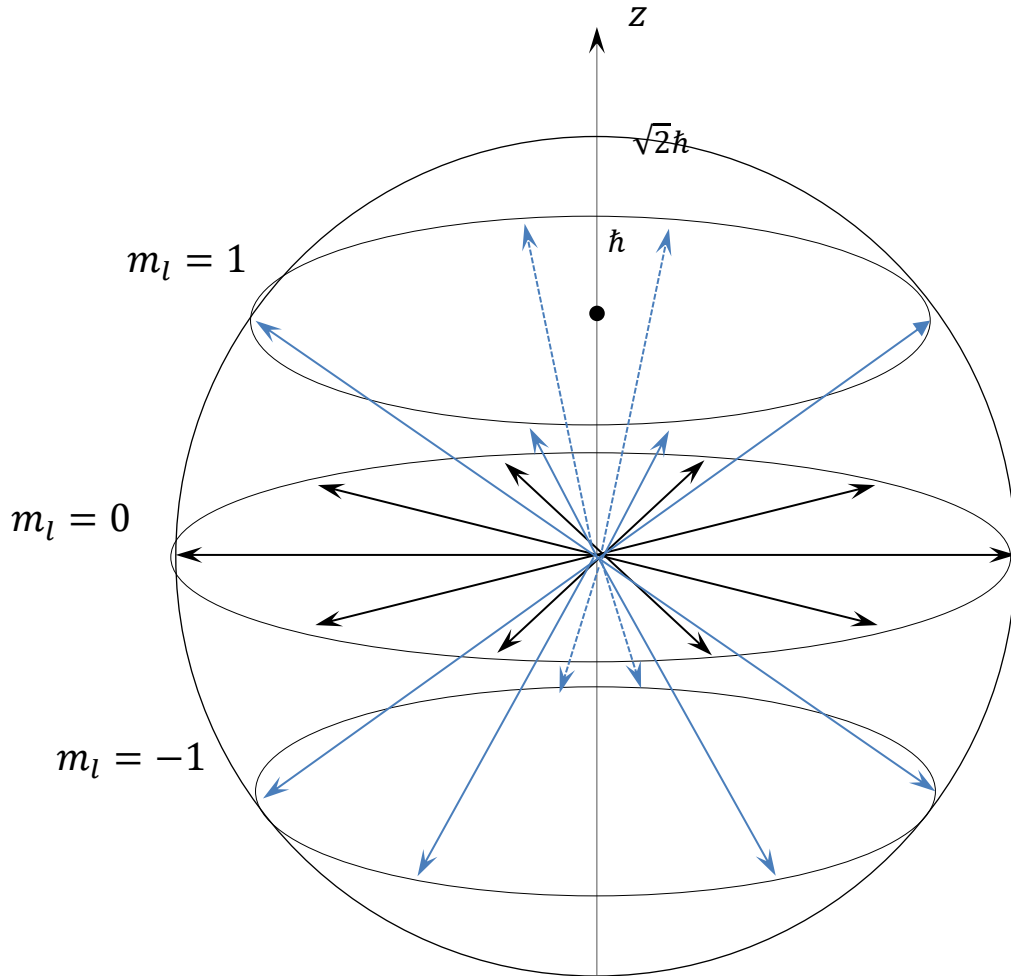


Рис. 6.1.

Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга, момент импульса электрона $\vec{L}$ не может иметь строго определенного направления, так как в этом случае электрон находился бы в плоскости перпендикулярной этому вектору. Но вектор $\vec{L}$ относительно направления $\vec{B}$ (относительно оси $\vec{z}$) не произвольно, он как бы вычерчивает в пространстве конус, ось которого параллельна вектору $\vec{B}$, а угол наклона орбит к оси определяется орбитальным квантовым числом.

Еще раз обратимся к волновой функции $\Psi = RQ\Phi$.

→ Если $l = 0$, а следовательно, и $m_l = 0$, функция Ψ зависит только от координаты r , то есть Ψ является сферически симметричной. Такие состояния электрона называют *s-состоянием*.

→ Если $l = 1$, то это *p-состояние*.

И так далее (см. таблицу 6.1).

Таблица 6.1

$n \backslash l$	0	1	2	3	4	5
1	1s					
2	2s	2p				
3	3s	3p	3d			
4	4s	4p	4d	4f		
5	5s	5p	5d	5f	5g	
6	6s	6p	6d	6f	6g	6h

Сама классификация состояний электронов возникла при анализе спектральных особенностей излучения атома еще до появления квантовой механики.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. В какой системе координат записывается уравнение Шредингера для атома водорода?

- a) В декартовой.
- b) В цилиндрической.
- c) В сферической.
- d) В полярной.

2. Уравнение Шредингера для атома водорода имеет вид...

- a)
$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{z} \right) \Psi = 0;$$
- b)
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) \Psi = 0;$$
- c)
$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - y^2 \right) \Psi = 0;$$
- d)
$$\Psi''' + k^2 \Psi = 0.$$

3. Триаду уравнений для атома водорода получают из...

- a) уравнения Шредингера;
- b) функции состояния;
- c) функции плотности вероятности;
- d) невозможно получить.

4. Расположите уравнения триады для атома водорода в правильном порядке (первое уравнение, второе уравнение, третье уравнение).

- a) $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m_l^2;$
- b) $\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + k \frac{e^2}{r} \right) r^2 = l(l+1);$
- c) $\frac{1}{Q \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1).$

5. Решением первого уравнения триады для атома водорода является функция...

- a) $\Phi_{m_l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi};$
- b) $R_{n,l} = f_{n,l}(r) e^{-r/na};$
- c) $Q_{l,m_l} = f_{l,m_l}(\theta);$
- d) $\Psi = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$

6. Решением второго уравнения триады для атома водорода является функция...

- a) $\Phi_{m_l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi};$
- b) $R_{n,l} = f_{n,l}(r) e^{-r/na};$
- c) $Q_{l,m_l} = f_{l,m_l}(\theta);$
- d) $\Psi = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$

7. Решением третьего уравнения триады для атома водорода является функция...

- a) $\Phi_{m_l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi};$
- b) $R_{n,l} = f_{n,l}(r) e^{-r/na};$

c) $Q_{l,m_l} = f_{l,m_l}(\theta);$

d) $\Psi = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}.$

8. Какие из перечисленных квантовых чисел описывают поведение электрона в атоме водорода?

- a) Магнитное орбитальное квантовое число.
- b) Орбитальное квантовое число.
- c) Главное квантовое число.
- d) Все перечисленные выше.

9. Орбитальное квантовое число принимает значения _____ и отвечает за квантование _____ в атоме водорода.

- a) 1, 2, 3, и.т.д., энергии.
- b) 0, 1, ..., $n - 1$, момента импульса.
- c) 0, ± 1 , ..., $\pm(n - 1)$, момента импульса.
- d) 0, ± 1 , ..., $\pm(n - 1)$, проекции момента импульса.

10. Чем обусловлен тот факт, что момент импульса электрона $\vec{L}$ не может иметь строго определенного направления, так как в этом случае электрон находился бы в плоскости перпендикулярной этому вектору.

- a) Соотношением неопределенностей Гейзенберга.
- b) Уравнением Шредингера.
- c) Волновой функцией.
- d) Квадратом модуля волновой функции.

Задание 2. Пользуясь теоретическими сведениями из главы 6, найти значения волновой функции Ψ и заполнить таблицу 6.2.

Задание 3. Рассмотреть пространственное квантование в атоме водорода для $l = 2$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$ (будет два конуса в верхней части и два в нижней).

Таблица 6.2

n	l	m_l	Φ	Q	R	Ψ
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a}$	
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2 - \frac{r}{a}}{2\sqrt{2}a^{3/2}} e^{-r/2a}$	
2	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$	$\frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-r/2a}$	
2	1	± 1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$	$\frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-r/2a}$	

Глава 7. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Нормальный эффект Зеемана](#)
- [Аномальный эффект Зеемана. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона](#)
- [Принцип Паули](#)
- [Строение электронных оболочек атомов](#)
- [Правило Хунда. Периодическая система элементов](#)
- [Материалы для практической работы](#)

7.1. Нормальный эффект Зеемана

Мы выяснили, что энергия атома зависит от главного квантового числа n

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Если орбитальное квантовое число l , отлично от нуля то может существовать еще и энергия взаимодействия электрона с внешним магнитным полем при условии, что это магнитное поле создано.

Движущийся по орбите электрон можно представить как круговой ток, который характеризуется *магнитным моментом*

$$M = iS,$$

где i – ток, S – площадь контура. Для электрона, движущегося по круговой орбите радиуса r ,

$$S = \pi r^2, \quad i = ev,$$

тогда момент

$$M = -ev\pi r^2.$$

Знак " – " показывает, что вектор $\vec{M}$ имеет направление, противоположное направлению момента импульса электрона, которое в свою очередь определяется правилом правого винта.

Сам момент импульса

$$L = \underbrace{mv}_{\text{импульс}} \cdot \underbrace{r}_{\text{плечо}} = \left[\begin{matrix} v = \omega r \\ = 2\pi v r \end{matrix} \right] = 2\pi mvr^2.$$

Тогда, отношение магнитного момента электрона к моменту импульса

$$\frac{M}{L} = -\frac{e}{2m} \Rightarrow M = -\frac{e}{2m}L.$$

Вращающий момент, действующий на круговой ток в магнитном поле

$$M_{\text{вр}} = \underbrace{M}_{IS} B \sin\theta, \quad \text{где } \theta = \widehat{\vec{M}\vec{B}}.$$

Так как есть взаимодействие, появляется соответствующая ему энергия и эта энергия различна при разной ориентации вектора $\vec{M}$. Для нас важна не сама потенциальная энергия, а ее изменение, поэтому нулевой уровень энергии можно выбрать любой.

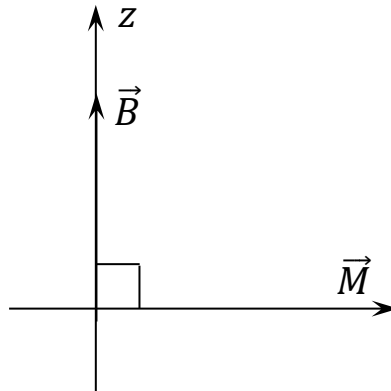


Рис. 7.1.

Если выбрать нулевой уровень при перпендикулярности векторов $\vec{B}$ и $\vec{M}$, то

$$W_M = A,$$

где A – работа, которую нужно совершить, чтобы повернуть круговой ток из нулевого уровня до конкретного угла. Другими словами, это

работа, которую нужно совершить, чтобы повернуть круговой ток от $\theta = 90^\circ$ до θ .

В динамике

$$W_M = \int_{90^\circ}^{\theta} M_{\text{вр}} d\theta = MB \int_{90^\circ}^{\theta} \sin \theta = MB(-\cos \theta)|_{90^\circ}^{\theta} = -MB \cos \theta.$$

$$W_M = \frac{e}{2m} LB \cos \theta = \frac{e}{2m} L_z B,$$

где

$$L_z = m_l \hbar \Rightarrow W_M = \frac{e\hbar}{2m} m_l B.$$

Здесь

$$\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B,$$

где μ_B – магнетон Бора, тогда, окончательно имеем

$$W_M = \mu_B m_l B.$$

Выясним, как наличие этой энергии сказывается на спектре излучения.

Пример. Пусть излучение происходит при переходе атома с $n = 2$ и $l = 1$ в состояние с $n = 1$ и $l = 0$ (рис. 7.2).

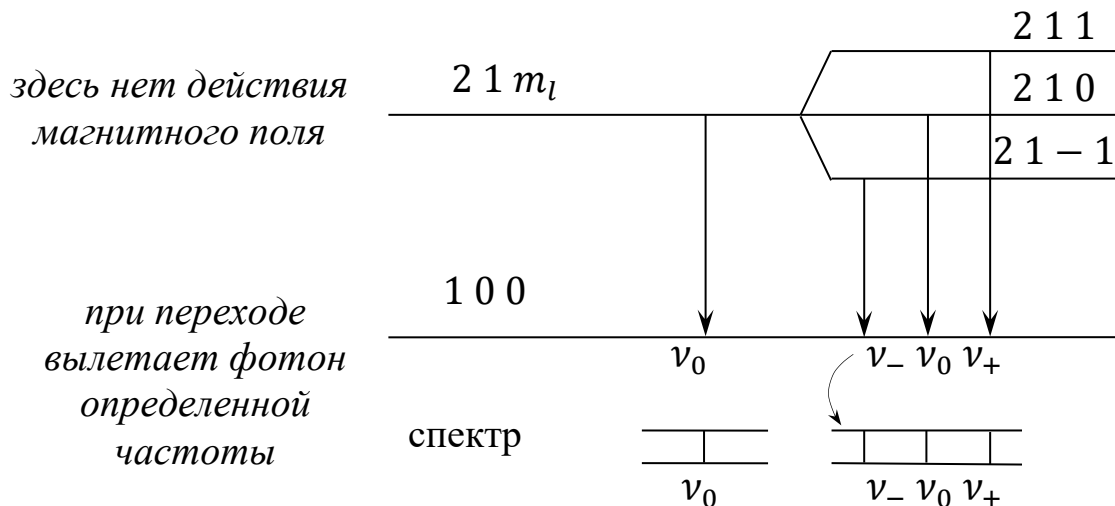


Рис. 7.2.

В отсутствии магнитного поля состояния $2\ 1\ 1$ и $2\ 1\ -1$ соответствуют одинаковой энергии, поэтому в спектре имеем одну линию, соответствующую всем трем переходам.

Если наложить внешнее магнитное поле, то энергии состояний $2\ 1\ 0$, $2\ 1\ 1$ и $2\ 1\ -1$ будут разными, появятся три энергетических уровня, идущие через $\Delta W = \mu_B V$. В спектре излучения линия разстроится, появится триплет линий

$$\nu_0 \rightarrow (\nu_0 - \mu_B V; \nu_0; \nu_0 + \mu_B V).$$

Эффект Зеемана – явление расщепления электрона. Если это расщепление обусловлено взаимодействием орбитального магнитного момента электрона с магнитным полем, то это *нормальный эффект Зеемана*. При нормальном эффекте Зеемана спектральная линия расщепляется на 3, 5, 7 линий.

7.2. Аномальный эффект Зеемана. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона

При изучении спектров щелочных металлов, в которых внешние электроны будут вести себя как в водородоподобном атоме, было замечено не тройное, а двойное расщепление спектральных линий при наложении магнитного поля.

Объяснить это квантованием орбитального момента импульса нельзя, так как линий только две, а L_z квантована по 3, 5, 7 значениям.

Кроме того, расщепленные линии были ближе друг к другу, то есть разность энергий была меньше, чем $\mu_B V$. Объяснить это можно было наличием механического момента, а значит и магнитного момента у самого электрона. Так как расщепленные линии были дискретны, сразу возникла гипотеза о квантовании собственного магнитного, а значит и собственного механического момента электрона. Чтобы это проверить, Штерн и Герлах предложили следующий эксперимент: атомы серебра, несущие на внешней оболочке один электрон, а следовательно магнитный момент которых, определяется только магнитным моментом этого электрона, пропускали с большой скоростью через сильно неоднородное магнитное поле. Схема опыта представлена на рис. 7.3.

Если эти атомы обладают собственным магнитным моментом, то они должны отклоняться от прямолинейного движения, причем величина отклонения пропорциональна величине магнитного момента, а направление отклонения определяется отклонением вектора магнитного момента, который зависит от направления вращения.

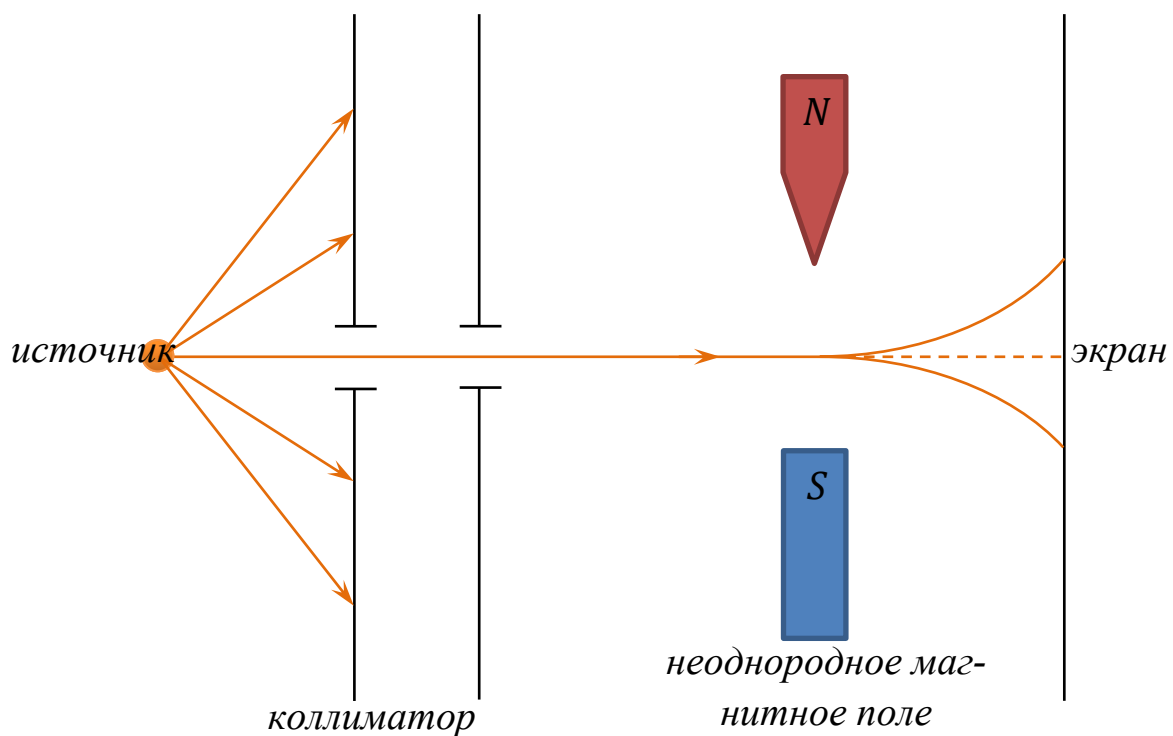


Рис. 7.3.

С классической точки зрения, если у электрона есть момент, но он не квантован, на экране должна получиться непрерывная полоска. Однако, опыт показал, что половина атомов отклонилась вверх, а другая половина – вниз. И те, и другие атомы отклонились максимально, то есть опыт показал, что магнитный момент квантован, но отличается не величиной, а только направлением.

Теоретические расчеты в рамках квантовой механики показали, что электрон, как частица с зарядом e и массой покоя m , должен обладать собственным механическим моментом количества движения, а значит и собственным магнитным моментом. Его назвали *спином электрона*.

Спиновый момент импульса описывается спиновым квантовым числом s , которое принимает единственное значение $\frac{1}{2}$, тогда спиновый момент импульса

$$S = \sqrt{s(s + 1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

Пространственное квантование момента импульса описывается квантовым числом m_s — магнитное спиновое квантовое число, тогда

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}, \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

Магнитный спиновый момент

$$M_s = \frac{e}{m} S,$$

$$M_{sz} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B.$$

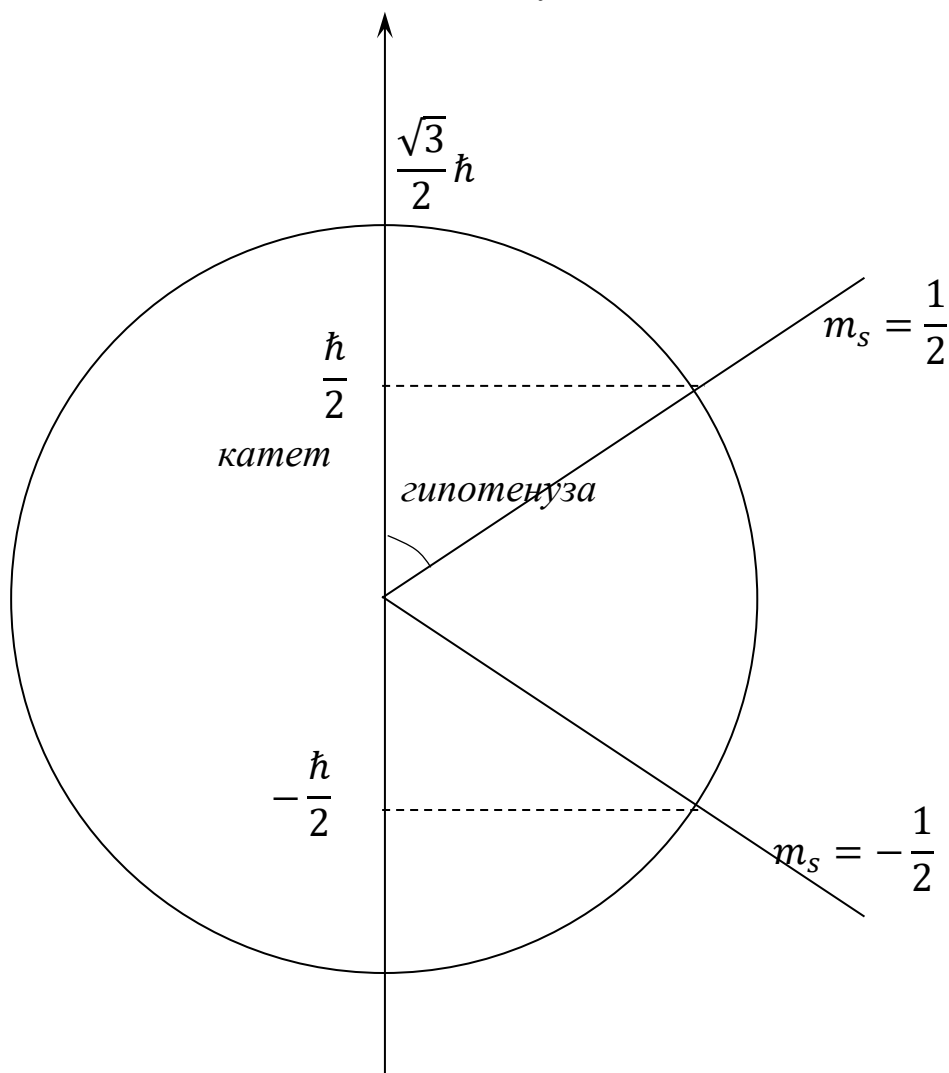


Рис. 7.4.

Гипотеза о спине электрона не только объяснила особенности раздвоения спектральных линий в магнитном поле (аномальный эффект Зеемана), но и целый ряд других закономерностей поведения атомных электронов.

Таким образом, поведение электрона в атоме описывается не тремя, а четырьмя квантовыми числами:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \text{ – главное квантовое число,} \\ l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ – орбитальное квантовое число,} \\ m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \text{ – магнитное орбитальное квантовое число,} \\ m_s &= \pm \frac{1}{2} \text{ – магнитное спиновое квантовое число.} \end{aligned}$$

7.3. Принцип Паули

Анализируя атомные спектры, Вольфганг Паули в 1925 г. открыл фундаментальный закон.

Принцип Паули: ни какие два электрона в атоме не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии.

Другими словами, любой электрон в атоме описывается своим набором квантовых чисел n, l, m_l, m_s .

Принцип Паули объясняет тот, на первый взгляд, странный факт, что атомы, с примерно одинаковым числом электронов, могут иметь сильно отличающиеся химические и физические свойства, а атомы, далекие по числу электронов, могут быть похожими. Таким образом, принцип Паули, по сути своей, экспериментальный закон, но к нему можно прийти теоретическими рассуждениями в квантовой механике.

В микромире действует принцип неразличимости микрочастиц. Этот очевидный факт на языке волновой функции можно записать следующим образом.

Пусть 1 – a , 2 – b (первая частица в состоянии a , вторая – в состоянии b). Поведение обеих частиц вместе описывается волновой функцией $\Psi(1a, 2b)$. Раз частицы тождественны, то если поменять их местами 1 – b , 2 – a , результаты любых наблюдений $\Psi(1b, 2a)$ будут неотличимы от исходных.

Результаты наблюдений неразличимы, квадраты модулей волновых функций этих частиц равны

$$|\Psi(1a, 2b)|^2 = |\Psi(1b, 2a)|^2.$$

С математической точки зрения, это возможно в двух случаях

$$\Psi(1a, 2b) = \Psi(1b, 2a), \quad (7.1)$$

$$\Psi(1a, 2b) = -\Psi(1b, 2a). \quad (7.2)$$

В случае (7.1), обе частицы могут находиться в одном и том же состоянии

1) $a = b$ следовательно

$$\Psi(1a, 2a) = \Psi(1a, 2a),$$

2) $a = b$ следовательно

$$\Psi(1a, 2a) = -\Psi(1a, 2a).$$

Откуда получаем конфликт

$$\Psi(1a, 2a) = 0.$$

Более точные расчеты в рамках аппарата квантовой механики показали, что *в первом случае спин частицы должен быть равен нулю или целому числу*. Такие частицы называют бозонами, так как они подчиняются *статистике Бозе-Эйнштейна* (фотон, α -частица).

Во втором случае, частицы обладают *полуцелым спином*, их называют фермионами, они подчиняются *статистике Ферми-Дирака* (электрон, протон, нейтрон).

С точки зрения квантовой механики, принцип Паули применяется к электронам, так как они являются фермионами.

7.4. Строение электронных оболочек атомов

Принцип Паули вместе со стремлением системы (атома) к минимуму потенциальной энергии дает аппарат описания электронной структуры атомов.

Электроны описываются четырьмя квантовыми числами, все эти четверки должны быть разными и давать минимальную энергию. Рассмотрим этот аппарат на примере атома натрия $Na, Z = 11$ (таблица 7.1).

Слоем называется совокупность электронов в атоме с одним и тем же главным квантовым числом n , слои нумеруются буквами $K, L, M, N, \dots$

Оболочкой называют совокупность электронов описываемых одним и тем же набором квантовых чисел n и l .

Таблица 7.1

слой	n	l	m_l	m_s	оболочка
K -слой	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1s-оболочка
	1	0	0	$+\frac{1}{2}$	
L -слой	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	2s-оболочка
	2	0	0	$+\frac{1}{2}$	
	2	1	-1	$-\frac{1}{2}$	2p-оболочка
	2	1	-1	$+\frac{1}{2}$	
	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	
	2	1	0	$+\frac{1}{2}$	
	2	1	1	$-\frac{1}{2}$	
	2	1	1	$+\frac{1}{2}$	
M -слой	3	0	0	$-\frac{1}{2}$	3s-оболочка

7.5. Правило Хунда. Периодическая система элементов

Правило Хунда: в большинстве случаев электроны в оболочке остаются неспаренными, если это возможно.

Иногда атомную структуру (структуру электронов в атоме) изображают в виде диаграммы. Пример такой диаграммы для натрия Na ($Z = 11$) и углерода C ($Z = 6$) представлен на рис. 7.5.

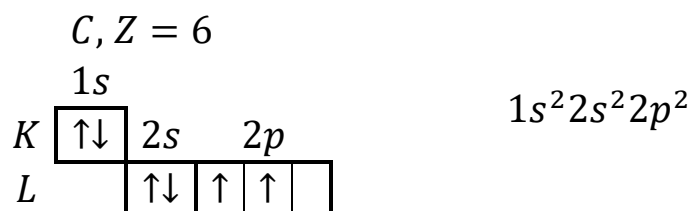
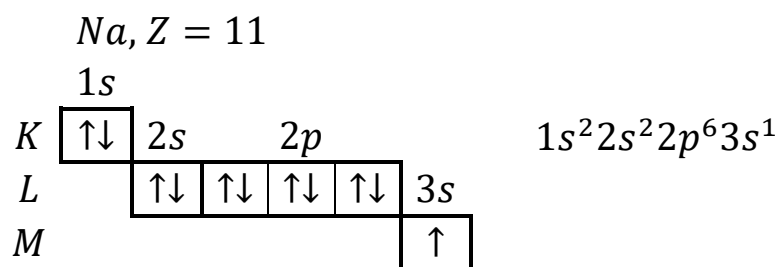


Рис. 7.5.

Рассмотрим атомную структуру первых десяти атомов в таблице Д.И. Менделеева. Результаты представлены в таблице 1.7.2.

Таблица 7.2

Атом	Z	Атомная структура	$1s$	$2s$	$2p_x$	$2p_y$	$2p_z$
H	1	$1s^1$	$\uparrow$				
He	2	$1s^2$	$\uparrow\downarrow$				
Li	3	$1s^2 2s^1$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$			
Be	4	$1s^2 2s^2$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$			
B	5	$1s^2 2s^2 2p^1$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$		
C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
N	7	$1s^2 2s^2 2p^3$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
O	8	$1s^2 2s^2 2p^4$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
F	9	$1s^2 2s^2 2p^5$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$
Ne	10	$1s^2 2s^2 2p^6$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$

Материалы для практической работы

Задание. Ответьте на вопросы.

1. Магнетон Бора μ_B определяется выражением

- a) $\frac{ec}{2m}$;
- b) $\frac{e\hbar}{2c}$;
- c) $\frac{e\hbar}{2m}$;
- d) $\frac{e\hbar}{2mc}$.

2. Эффект Зеемана заключается в ...

- a) невозможности одновременно определить координату электрона и его импульс;
- b) явлении расщепления электрона;
- c) преодолении электроном потенциального барьера;
- d) колебании электрона около положения равновесия.

3. Если эффект Зеемана обусловлен взаимодействием орбитального магнитного момента электрона с магнитным полем, то его называют...

- a) нормальным;
- b) аномальным;
- c) простым;
- d) сложным.

4. Какое квантовое число удалось ввести благодаря опытам Штерна и Герлаха?

- a) главное квантовое число;
- b) орбитальное квантовое число;
- c) магнитное орбитальное квантовое число;
- d) магнитное спиновое квантовое число.

5. Принцип Паули утверждает следующее.

- a) Любые два электрона в атоме могут находиться в одном и том же квантовом состоянии.
- b) Любые два электрона могут находиться в одном и том же атоме.
- c) Ни какие два электрона не могут находиться в одном и том же атоме.

d) Ни какие два электрона в атоме не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии.

6. Частицы подчиняющиеся статистике Бозе-Эйнштейна имеют спин равный...

- a) нулю или целому числу;
- b) нулю или полуцелому числу;
- c) полуцелому числу;
- d) целому числу.

7. Частицы подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака имеют спин равный...

- a) нулю или целому числу;
- b) нулю или полуцелому числу;
- c) полуцелому числу;
- d) целому числу.

8. Совокупность электронов в атоме с одним и тем же главным квантовым числом называют...

- a) ядро;
- b) слой;
- c) комплекс;
- d) оболочка.

9. Совокупность электронов в атоме описываемых одним и тем же набором квантовых чисел n и l называют...

- a) ядро;
- b) слой;
- c) комплекс;
- d) оболочка.

10. В большинстве случаев электроны в оболочке остаются неспаренными, если это возможно. Это утверждение носит название...

- a) принцип Паули;
- b) правило Хунда;
- c) принцип Эйнштейна;
- d) правило Ферми.

Глава 8. СТРУКТУРА МОЛЕКУЛ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Атомные орбитали](#)
- [Взаимодействие орбиталей. Молекулярные орбитали](#)
- [Молекула \$H_2O\$](#)
- [Гибридизация орбиталей \$CH_4\$, \$C_2H_4\$, \$C_2H_2\$, бензола \(\$C_6H_6\$ \)](#)
- [Материалы для практической работы](#)

8.1. Атомные орбитали

В теории атома Бора электроны движутся по орбитам. Однако, в квантовой механике понятие траектории движения частицы не всегда применимо из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга, из-за волновых свойств микрочастиц.

В частности для электрона в атоме длина волны де Бройля соизмерима с размерами атома, поэтому понятие орбиты для электрона в атоме не применимо.

Поведение электрона описывает функция состояния (волновая функция), квадрат модуля которой определяет функцию плотности вероятности – вероятность обнаружить микрочастицу в единичном объеме вблизи заданной точки. Эту функцию плотности вероятности для определенного электрона называли *атомной орбиталью*. Кроме величины $|\Psi|^2$, различные области орбитали дополнительно характеризуются знаком волновой функции в этой области.

Для визуализации орбиталей их изображают в виде множества точек пространства, в которых плотность вероятности больше некоторого заданного значения.

Рассмотрим примеры орбиталей.

Волновые функции электронов в атоме, а значит и функции плотности вероятности определяются тремя квантовыми числами n , l , m_l .

Если $l = 0$, то $m_l = 0$, электрон характеризуется s-состоянием, волновая функция имеет сферическую симметрию, соответствующие орбитали называют s-орбиталями, s-орбитали обладают сферической симметрией (рис. 8.1).

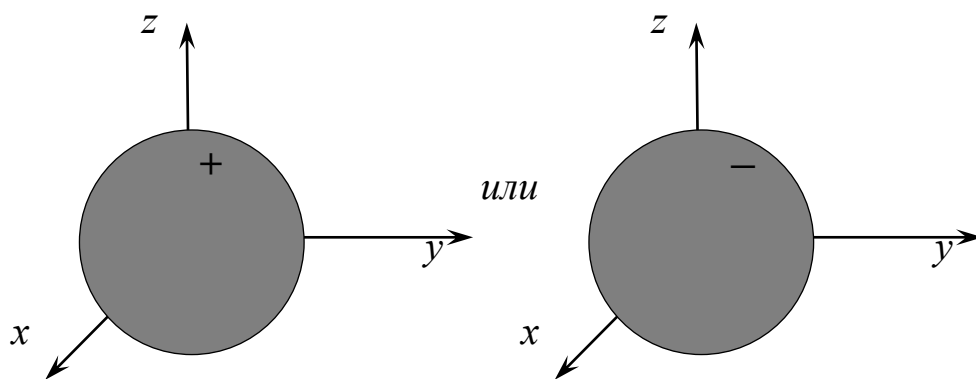


Рис. 8.1.

Если $l = 1$, то $m_l = 0, \pm 1$, $n = 2, 3, \dots$. В этом случае орбиталь называется p -орбиталью и обладает осевой симметрией, причем разные значения m_l соответствуют трем различным взаимно перпендикулярным ориентациям осей этих орбиталей (рис. 8.2). Договорились, эти оси направлять вдоль осей координат.

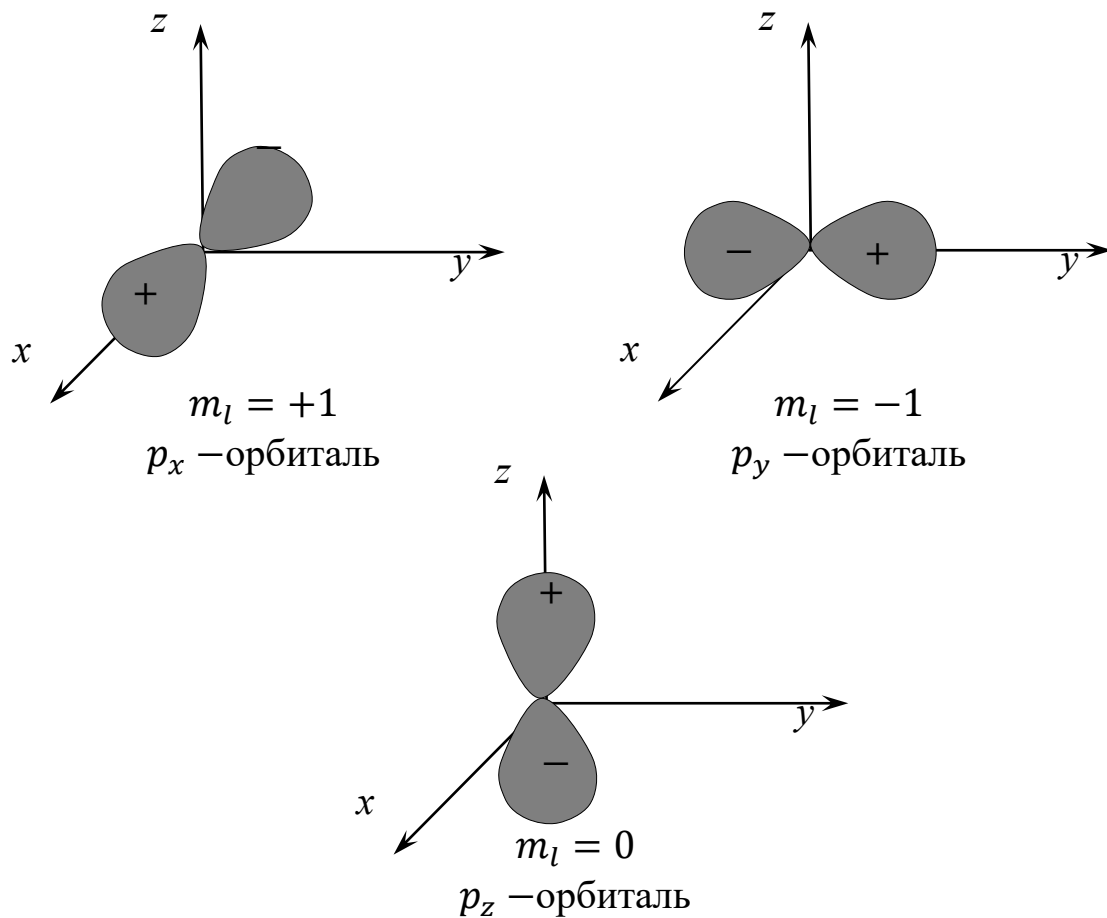


Рис. 8.2.

Если $l = 2$, то $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, $n = 3, 4, 5, \dots$, то есть возникает пять различных d -орбиталей (некоторые из них представлены на рис. 8.3, все d -орбитали перечислены в таблице 8.1).

Таблица 8.1

m_l	орбиталь
0	d_{z^2} –орбиталь
-1	d_{zy} –орбиталь
+1	d_{xz} –орбиталь
-2	d_{xy} –орбиталь
+2	$d_{x^2y^2}$ –орбиталь

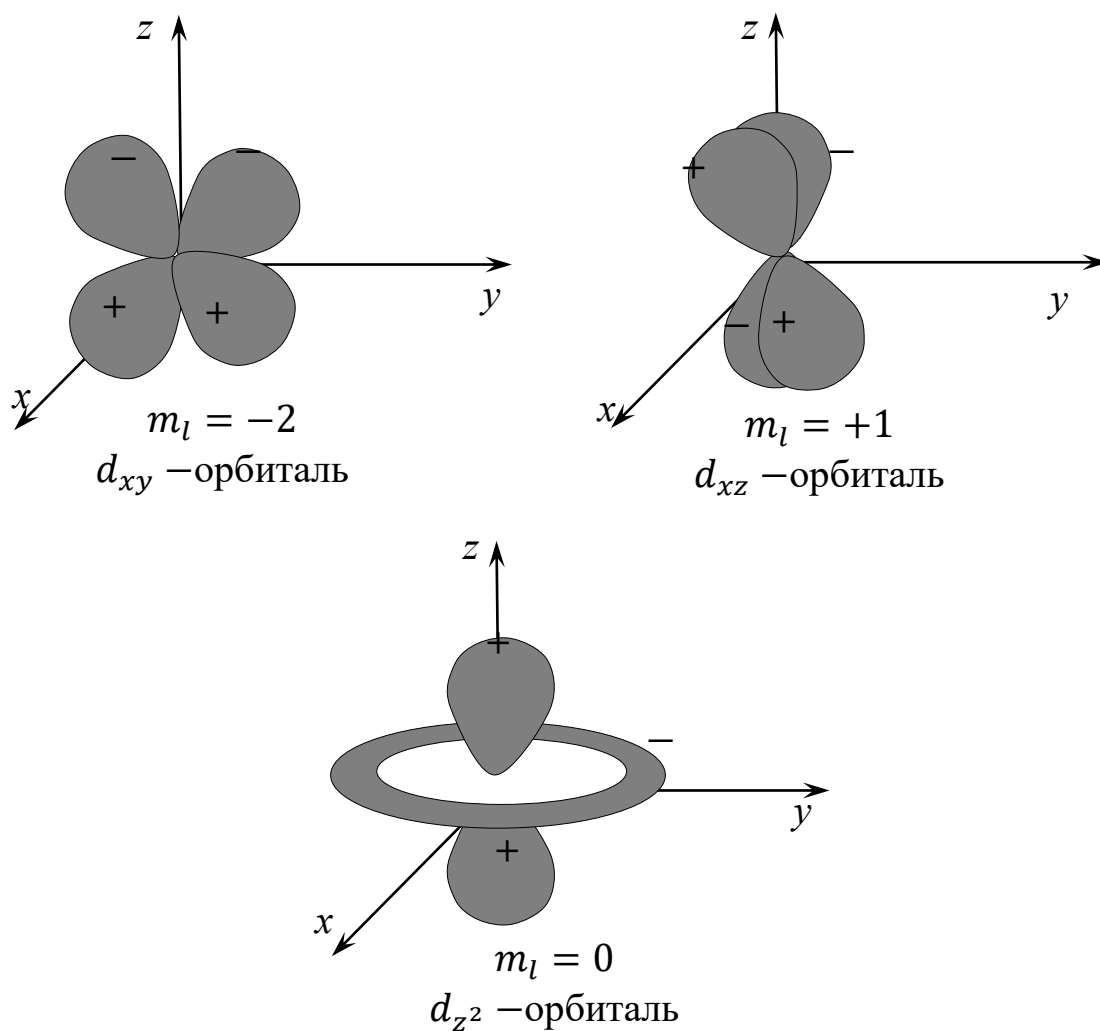


Рис. 8.3.

8.2. Взаимодействие орбиталей. Молекулярные орбитали

Если сближать два атома в пространстве, то их орбитали начинают перекрываться (рис. 8.4). В зависимости от знаков волновой функции в области перекрытия, значение функции плотности вероятности в местах перекрытия может увеличиваться, если знаки совпадают, или уменьшаться, если знаки противоположны. И в том и в другом случаях результирующую функцию плотности вероятности называют молекулярной орбиталью, в первом случае – *связывающей* (знаки одинаковы), а во втором – *разрыхляющей* (рис. 8.4).

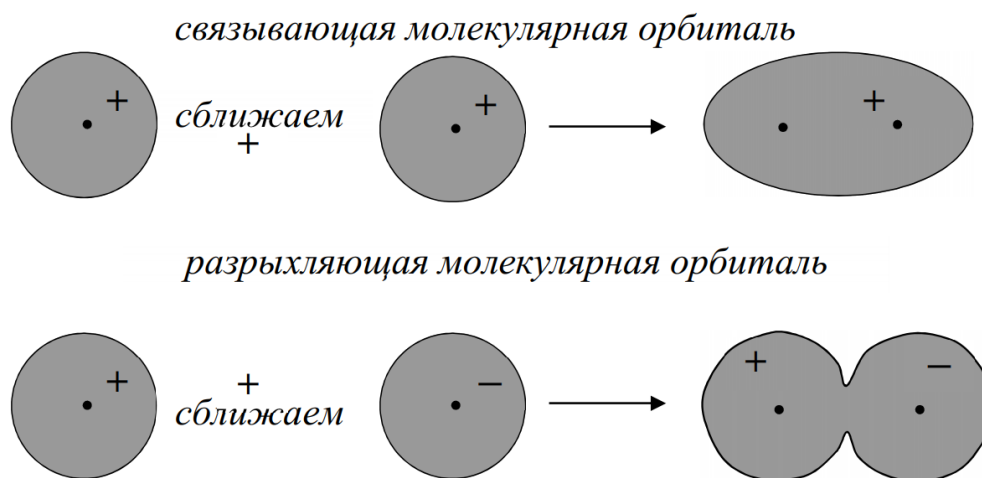


Рис. 8.4.

В первом случае, в пространстве между атомами плотность вероятности велика и, значит, велика вероятность того, что электрон может оказаться между атомами, а значит, электрон легко переходит от одного атома к другому. Возникает обменное взаимодействие, а значит сильная химическая связь, поэтому орбиталь называют *связывающей*.

Во втором случае, в пространстве между атомами плотность вероятности близка к нулю. Вероятность перехода электрона от одного атома к другому мала. Обменное взаимодействие слабое, химические связи не образуются, молекулярную орбиталь называют *разрыхляющей*.

Другие примеры орбиталей приведены на рис. 8.5.

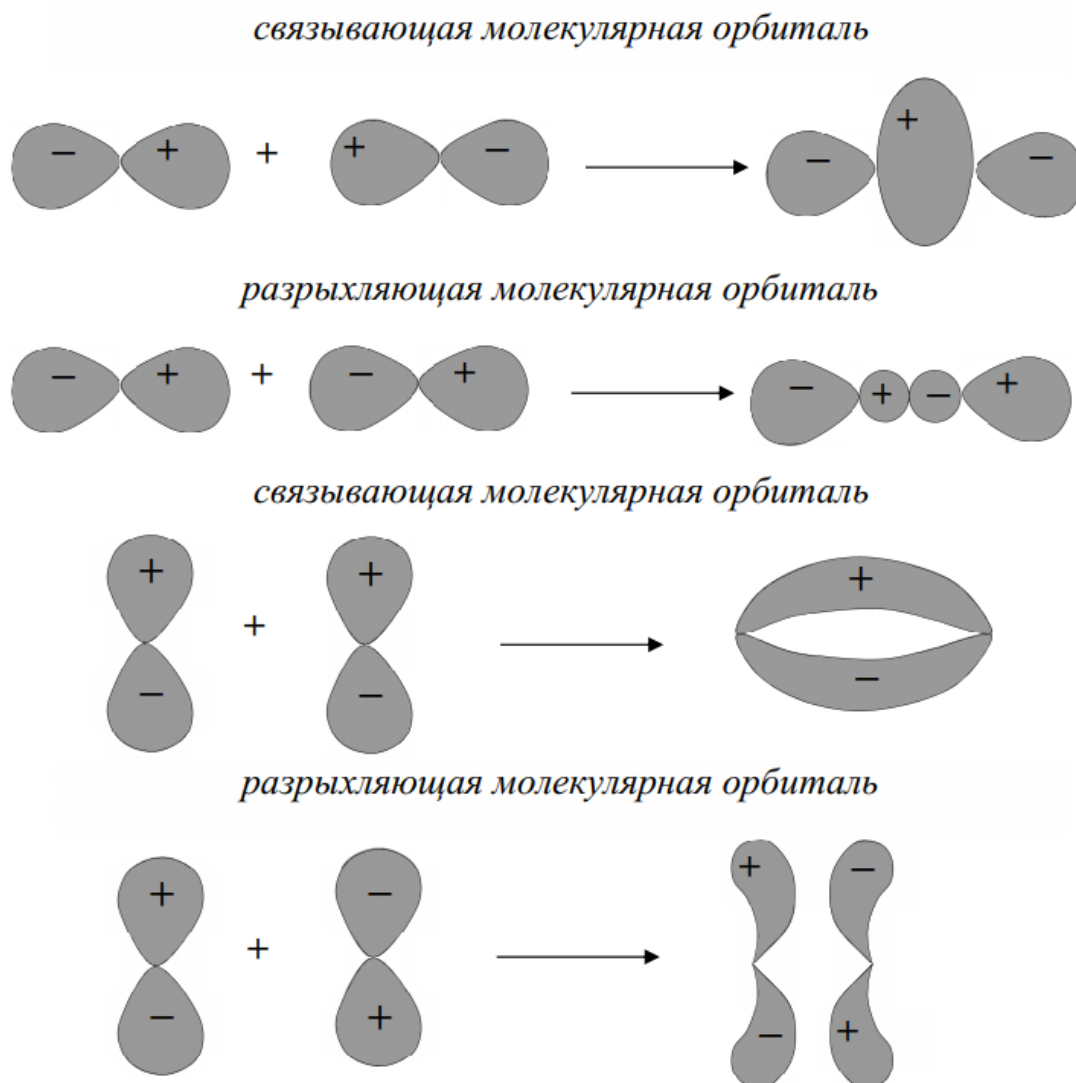


Рис. 8.5.

8.3. Молекула H₂O

У атома кислорода два неспаренных электрона на $2p$ оболочке (рис. 8.6). Именно эти два электрона являются наиболее активными с точки зрения образования связей.

Кислород O, $Z = 8$

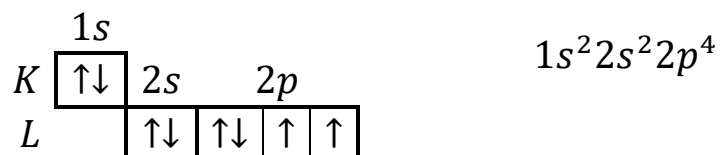


Рис. 8.6.

Орбитали $2p_y$ и $2p_z$ заняты неспаренными электронами, поэтому эти орбитали могут взаимодействовать с атомными орбиталями других атомов, например водорода.

В результате получим ковалентную связь.

Если эти две орбитали $2p_y$ и $2p_z$ взаимодействуют с $1s$ орбиталями двух атомов водорода, образуется молекула воды H_2O (рис. 8.7).

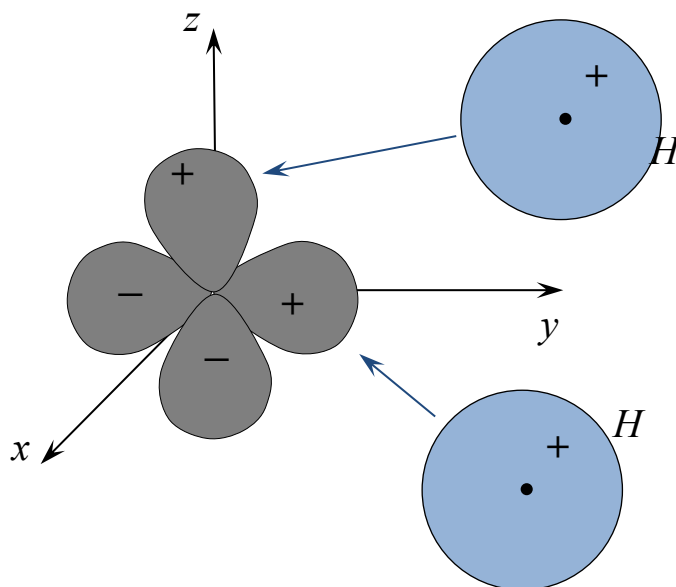


Рис. 8.7.

Исходя из предложенной модели, можно утверждать, что валентный угол (угол между двумя химическими связями) в молекуле воды должен быть близок к 90° . Эксперимент показывает, что этот угол составляет 104° . Это объясняется взаимным отталкиванием отрицательно заряженных электронных областей атомов водорода.

В аналогичной молекуле H_2S , где две $3p$ орбитали атома серы образуют с двумя водородными общие молекулярные орбитали, валентный угол HSH составляет уже 92° . Электростатическое отталкивание водородов в этой молекуле слабое, потому что атомы водорода расположены дальше от атома серы.

8.4. Гибридизация орбиталей CH_4 , C_2H_4 , C_2H_2 , бензола (C_6H_6)

Попытка объяснить подобным образом строение молекул метана CH_4 терпит неудачу.

Строение атома углерода описано на рис. 8.8.

Углерод C, Z = 6

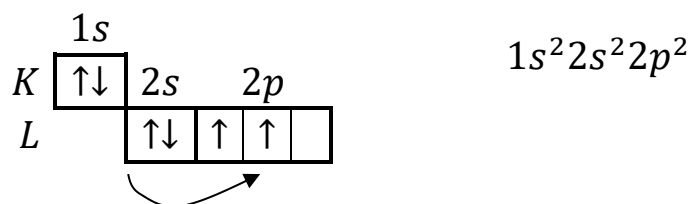


Рис. 8.8.

Два электрона не парные, но атом углерода образует четыре связи и все они равноправны. Это происходит из-за видоизменения атомных орбиталей углерода в результате гибридизации. Один из $2s$ электронов переходит в p состояние. Возникает четыре орбитали: одна $2s$ -орбиталь и три $2p$ -орбитали, накладываясь гибридизируются, образуя четыре эквивалентных орбитали, каждая из которых включает в себя $\frac{1}{4}2s$ -орбитали и $\frac{3}{4}2p$ -орбитали

$$\frac{1}{4}2s + \frac{3}{4}2p.$$

Эти орбитали расходятся в пространстве так, что их оси направлены по вершинам правильного тетраэдра (рис. 8.9)

$$\frac{1}{4}2s + \frac{3}{4}2p^3 = 4(sp^3).$$

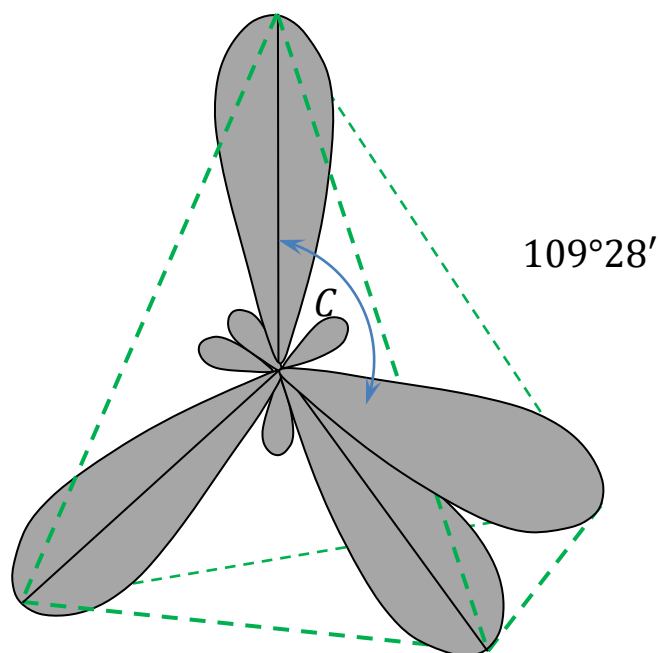


Рис. 8.9.

Такого рода гибридизация, в которой участвуют одна s -орбиталь и три p -орбитали называется sp^3 -гибридизацией.

Каждая из sp^3 -гибридных орбиталей углерода может образовывать с s -орбиталями атома водорода связывающие молекулярные орбитали (рис. 8.10).

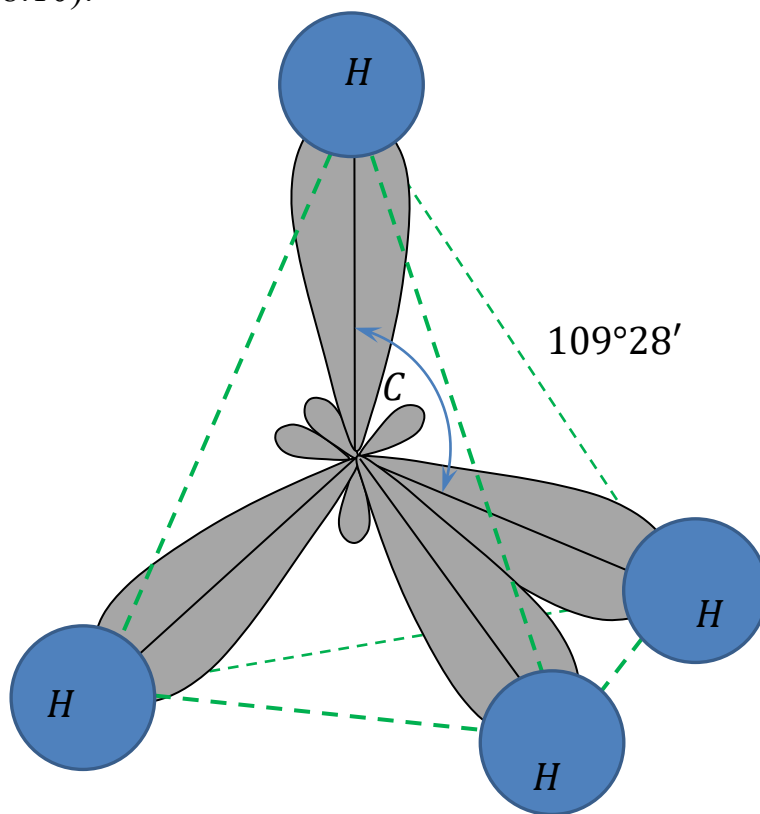


Рис. 8.10.

Экспериментальные исследования показали, что все валентные углы HCH в молекуле метана одинаковы и составляют примерно $109,5^\circ$, что полностью соответствует расположению атомов водорода по вершинам правильного тетраэдра, в центре которого находится углерод.

sp^2 -гибридизация атома углерода происходит, когда одна орбиталь не участвует в гибридизации и остается чистой $2p$ -орбиталью. Тогда одна $2s$ -орбиталь и две $2p$ -орбитали участвуют в гибридизации. В результате возникает три эквивалентных sp^2 -гибридных орбитали, каждая из которых состоит из $\frac{1}{3}2s$ -орбитали и $\frac{2}{3}2p$ -орбитали

$$\frac{1}{3}2s + \frac{2}{3}2p.$$

Образующиеся эквивалентные sp^2 -орбитали располагаются в плоскости перпендикулярной оставшейся $2p$ -орбитали, образуя между собой углы по 120° (рис. 8.11).

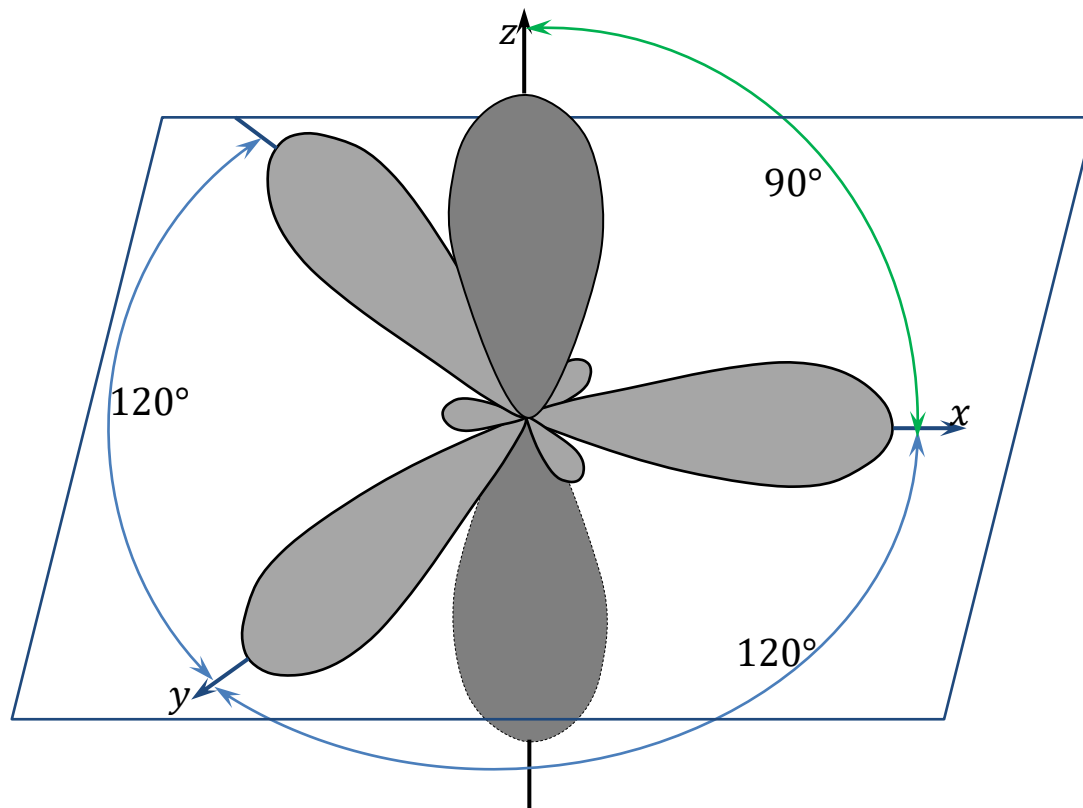
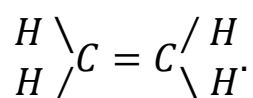


Рис.8.11.

Рассмотрим, как реализуется sp^2 -гибридизация на примере молекулы этилена C_2H_4 . Когда мы начинаем сближать атомы углерода, то образуется две связывающих гибридных молекулярные орбитали (рис.8.12).

Возникающая при этом связь называется двойной. Эта связь обладает большей энергией и расстояние С-С заметно короче (порядка $1,3\text{\AA}$) по сравнению с расстоянием для одинарной (порядка $1,5\text{\AA}$.) связи



Эксперименты подтверждают тот факт, что молекула очень плоская.

sp -гибридизация осуществляется аналогичным образом. В этом случае, две $2p$ -орбитали не участвуют в гибридизации, остаются чистыми $2p$ -орбиталями.

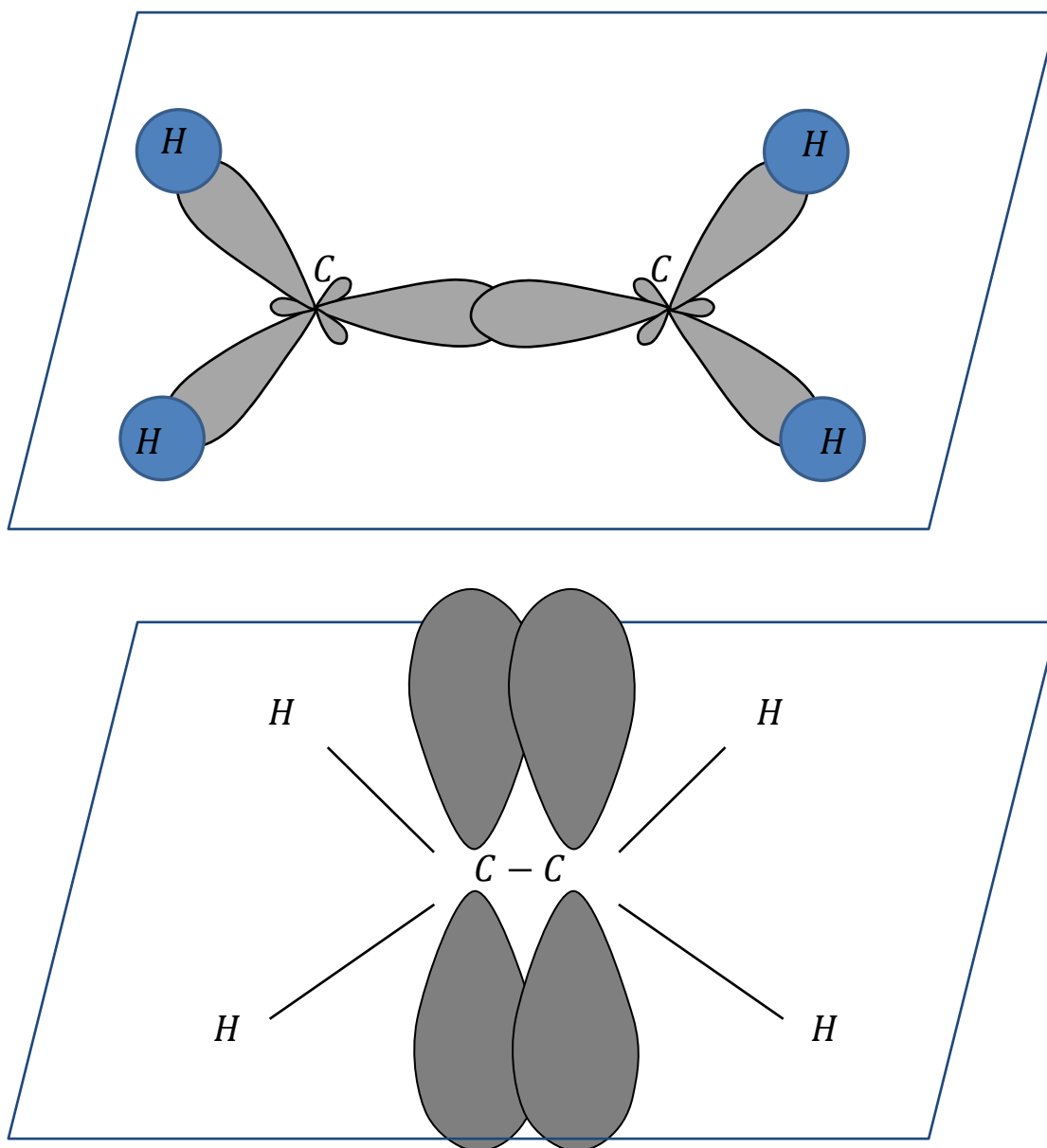


Рис. 8.12.

В гибридизации участвует одна $2s$ -орбиталь и одна $2p$ -орбиталь. В результате возникает две эквивалентных sp^3 -гибридных орбитали, каждая из которых состоит из $\frac{1}{2}2s$ -орбитали и $\frac{1}{2}2p$ -орбитали:

$$\frac{1}{2}2s + \frac{1}{2}2p.$$

Эти sp^3 -гибридные орбитали располагаются в пространстве под углом 180° вдоль прямой, перпендикулярной обеим чистым $2p$ -орбиталям (рис. 8.13).

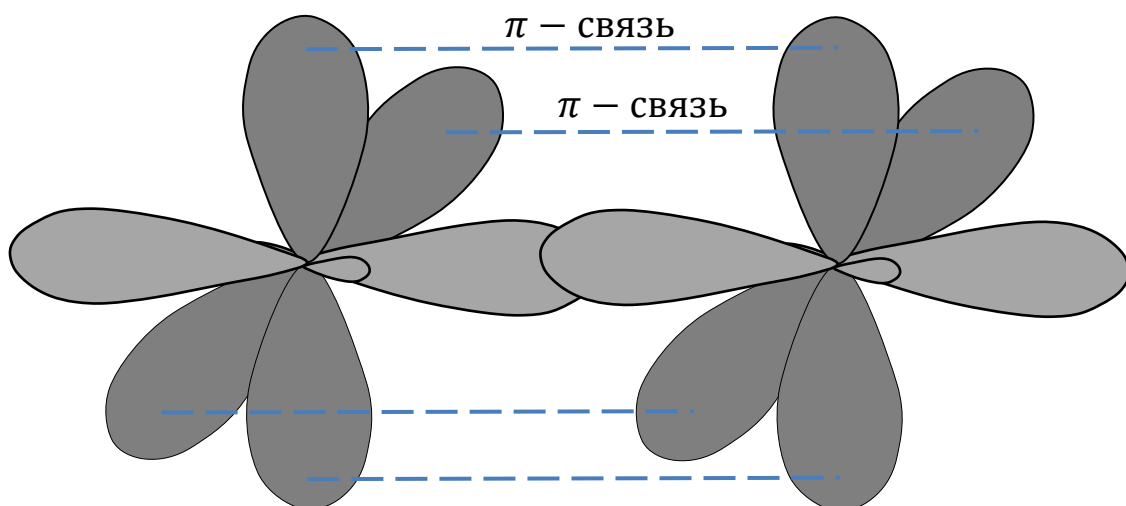


Рис. 8.13.

Два атома углерода сближают, sp -гибридные орбитали, накладываясь, образуют связывающую молекулярную орбиталь, которая соответствует химической связи, но $2p$ -орбитали так же, накладываясь, образуют еще две связывающих орбитали. Возникает три пары связывающих орбиталей – тройная связь, например, ацетилен (рис. 8.14)

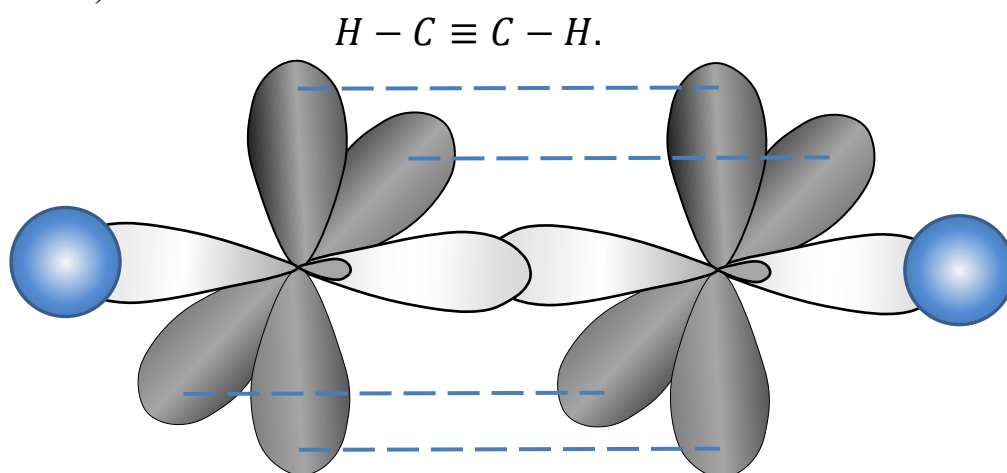


Рис. 8.14.

Тройная связь $C \equiv C$ энергетически сильнее двойной, расстояние между атомами порядка $1,2\text{\AA}$.

Бензол C_6H_6 .

Структурная формула бензола представлена на рис. 8.15.

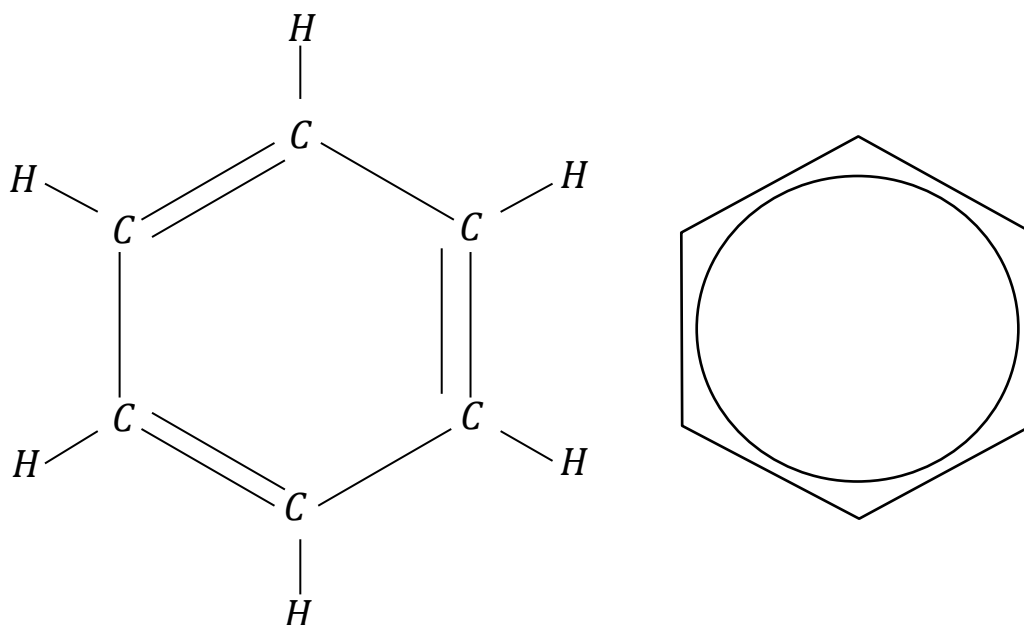


Рис. 8.15.

Все шесть атомов углерода sp^2 -гибридизированы, поэтому у каждого атома одна $2p$ -орбиталь не участвует в гибридизации (эти орбитали изображены на рис. ниже справа). Эти $2p$ -орбитали перпендикулярны плоскости, в которой лежат гибридные орбитали (плоскость изображена на рис. 8.16).

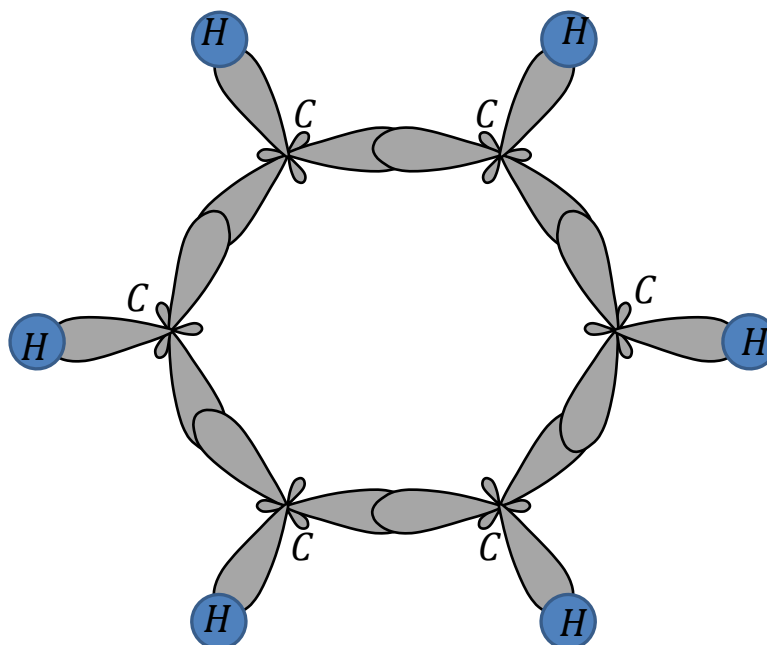


Рис. 8.16.

У соседних в шестиугольнике атомов sp^2 -гибридизированные орбитали, перекрываясь, образуют связывающую молекулярную орбиталь, далее подводим водород. Чистые $2p$ -орбитали всех шести атомов образуют одну общую связывающую орбиталь (рис. 8.17). При этом каждой паре соседних атомов достается обменное взаимодействие соответствующее полуторной химической связи (расстояние порядка $1,4\text{\AA} - 1,5\text{\AA}$).

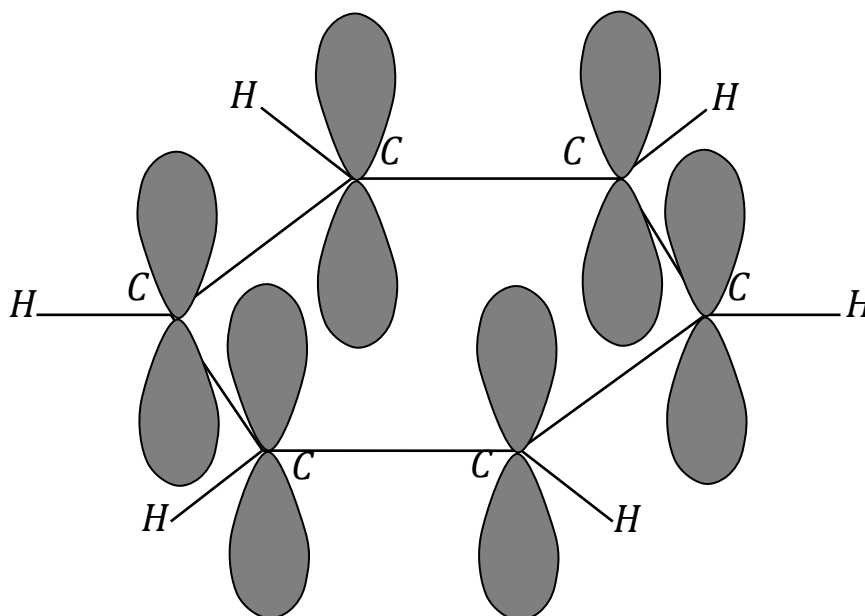


Рис. 8.17.

Материалы для практической работы

Задание. Ответьте на вопросы.

1. В теории атома Бора электроны движутся по ...
 - a) слоям;
 - b) орбитам;
 - c) орбиталям;
 - d) эллипсам.
2. Применение понятия орбита для электрона в атоме не применимо из-за
 - a) волновых свойств микрочастиц;
 - b) квантовых свойств микрочастиц;
 - c) высокой скорости движения микрочастиц;
 - d) небольшой массы микрочастиц.

3. Атомной орбиталью называют...
- a) траекторию движения электрона;
 - b) электронное облако;
 - c) набор электронов с одним и тем же главным квантовым числом;
 - d) функцию плотности вероятности электрона.
4. *s*-орбиталям электрона соответствуют следующие значения квантовых чисел.
- a) $l = 0, m_l = 0$.
 - b) $l = 0, m_l = 0, \pm 1, n = 1, 2, 3, \dots$
 - c) $l = 1, m_l = 0, \pm 1, n = 2, 3, \dots$
 - d) $l = 2, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, n = 3, 4, 5, \dots$
5. *p*-орбиталям электрона соответствуют следующие значения квантовых чисел.
- a) $l = 0, m_l = 0$.
 - b) $l = 0, m_l = 0, \pm 1, n = 1, 2, 3, \dots$
 - c) $l = 1, m_l = 0, \pm 1, n = 2, 3, \dots$
 - d) $l = 2, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, n = 3, 4, 5, \dots$
6. *d*-орбиталям электрона соответствуют следующие значения квантовых чисел.
- a) $l = 0, m_l = 0$.
 - b) $l = 0, m_l = 0, \pm 1, n = 1, 2, 3, \dots$
 - c) $l = 1, m_l = 0, \pm 1, n = 2, 3, \dots$
 - d) $l = 2, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, n = 3, 4, 5, \dots$
7. Какой вид гибридизации орбиталей наблюдается в молекуле H_2O ?
- a) *sp*-гибридизация.
 - b) sp^2 -гибридизация.
 - c) sp^3 -гибридизация.
 - d) Никакой.
8. Какой вид гибридизации орбиталей наблюдается в молекуле бензола?
- a) *sp*-гибридизация.
 - b) sp^2 -гибридизация.
 - c) sp^3 -гибридизация.

d) Никакой.

9. Какой вид гибридизации орбиталей наблюдается в молекуле метана CH_4 ?

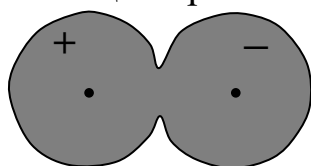
a) sp -гибридизация.

b) sp^2 -гибридизация.

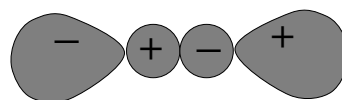
c) sp^3 -гибридизация.

d) Никакой.

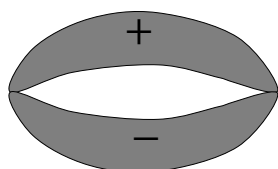
10. Какое из представленных изображений на рис. 8.18 соответствует связывающей орбитали?



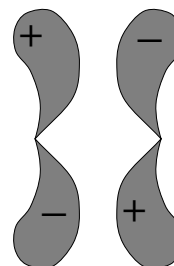
a)



b)



c)



d)

Рис. 8.18.

Раздел 2. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Глава 9. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

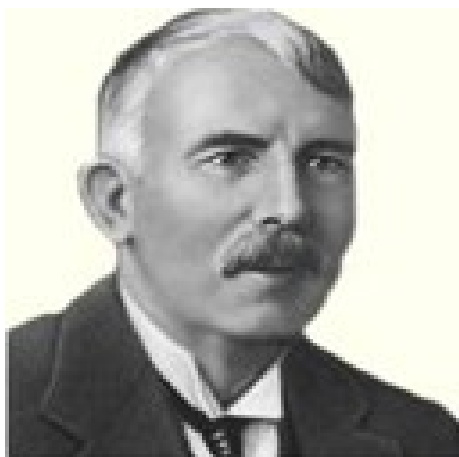
Рассматриваемые вопросы

- [Исторический обзор](#)
- [Источники элементарных частиц. Ускорители](#)
- [Детекторы частиц](#)
- [Метод рассеяния](#)
- [Материалы для практической работы](#)

9.1. Исторический обзор

После открытия Д. И. Менделеевым периодической системы химических элементов в 1869 г. Стала очевидной сложность строения атомов, а существование в системе периодического закона указывало на наличие внутренней, структурной связи между атомами. В 1896 г. А. Беккерель обнаружил радиоактивное излучение солей урана, а М. Склодовская-Кюри и П. Кюри открыли излучение тория и выделили новый радиоактивный химический элемент – полоний. Были обнаружены три типа излучения, обозначенных греческими буквами α , β и γ . Э. Резерфорд доказал экспериментально, что α -излучение представляет собой ионы атома гелия.

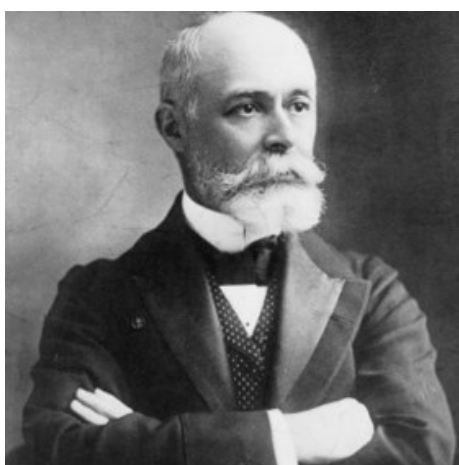
Явление электролиза, подробно изученное М. Фарадеем, привело к представлению о существовании элементарного заряда у положительных и отрицательных ионов, а экспериментальные исследования, проведенные в 1897 г. Дж. Дж. Томсоном с катодными лучами, завершились открытием первой элементарной частицы – электрона с величиной удельного заряда, численно равного $1,758 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$. Оказалось также, что β^- -излучение при радиации представляет собой поток электронов, двигающихся с большими скоростями.



Эрнест Резерфорд



Джозев Джон Томпсон



Антуан Анри Беккерль



Мари Складовская-Кюри

Рис. 9.1.

Первая теория строения электронной оболочки атома принадлежит Н. Бору (1913 г). *Переходы электронов в атоме из одного стационарного состояния в другое в теории Бора сопровождаются излучением или поглощением квантов (порций) энергии.* Здесь можно посмотреть модель атома Н. Бора

По предложению А. Эйнштейна *каждый квант энергии, которой могут обмениваться атомы при излучении и поглощении, переносится в пространстве реальной частицей, позднее названной фотоном.* Рассчитанные значения энергии соответствующих излученных световых квантов (в оптическом диапазоне длин волн) оказались существенно *меньшими* по величине, чем при радиоактивном излучении солей урана. Этот вид радиации, таким образом, не мог быть объяснен в рамках боровской теории строения атомов.

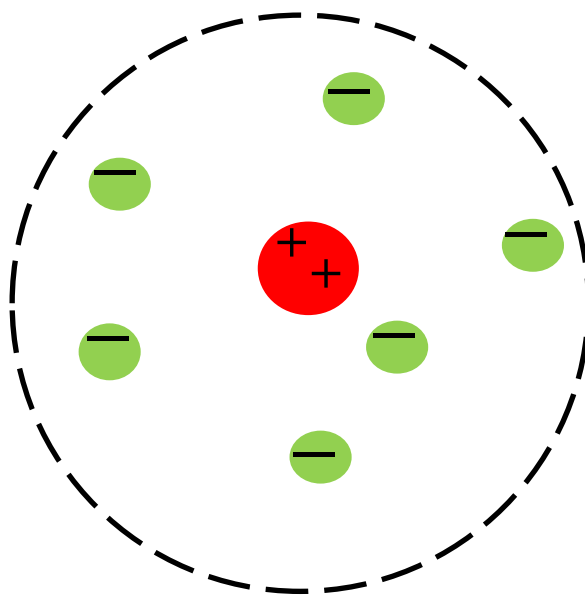


Рис. 9.2.

1900 г. М. Планк пришел к идее квантованности электромагнитного излучения нагретых тел, а А. Эйнштейн в 1905 г. отождествил квант света с реальной частицей, позже (в 1926 г. Г. Льюисом) названной *фотоном*. Было показано, что при радиоактивном излучении вещество также испускает поток γ -фотонов с энергиями большими, чем энергия квантов ультрафиолетового, оптического и инфракрасного диапазонов в спектре электромагнитных волн. Независимо друг от друга Ж. Перрен (1901) и Х. Нагаока (1904) предложил ядерно-планетарную модель строения атома, в которой движущиеся электроны излучают электромагнитные волны с частотой, равной частоте их периодического обращения вокруг ядра.

Серия экспериментов, проведенная с 1906 по 1911 г. Э. Резерфордом по рассеянию – частиц веществом, завершилась *построением планетарной модели строения атома с положительно заряженным массивным ядром и электронами, двигающимися вокруг него* (рис. 9.4). Гипотеза А. Ван-ден-Брука 1913 г., что величина заряда отдельного атомного ядра в мишени, бомбардируемой α -частицами при проведении опыта Резерфорда, равны Ze , Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.



Гилберт Льюис



Макс Планк

Рис. 9.3.

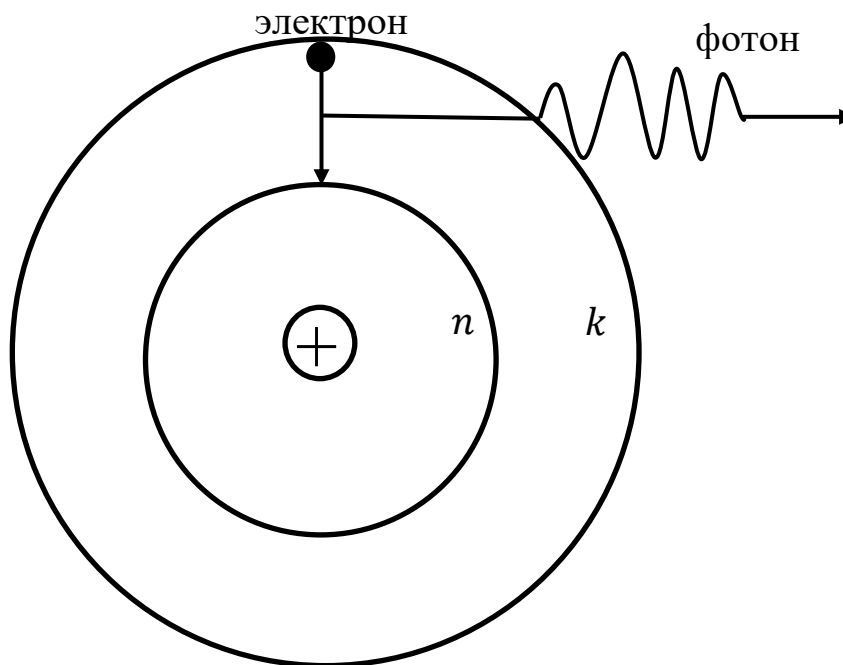


Рис. 9.4.

В 1930 г. В. Боте и Г. Бекер обнаружили интенсивное нейтральное излучение при бомбардировке α — частицами бериллиевой мишени, которое после ряда экспериментов, проведенных Дж. Чедвиком, оказалось *потокм массивных нейтральных частиц*, названных (1932) *нейтронами*. Началом ядерной физики можно считать 1932 г., когда В. Гейзенбергом и Д. Д. Иваненко была предложена *протон-нейтронная (т.е. нуклонная) модель ядра* (рис. 9.5).

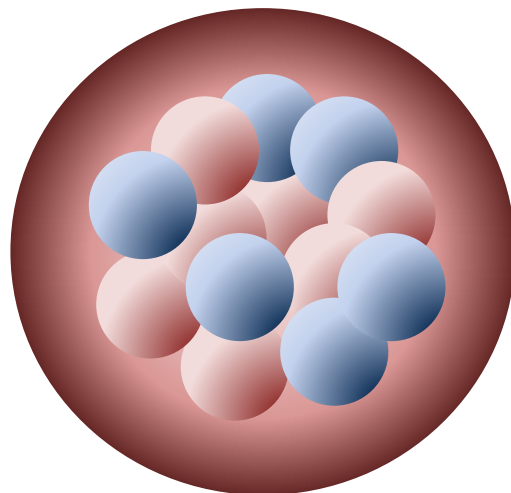
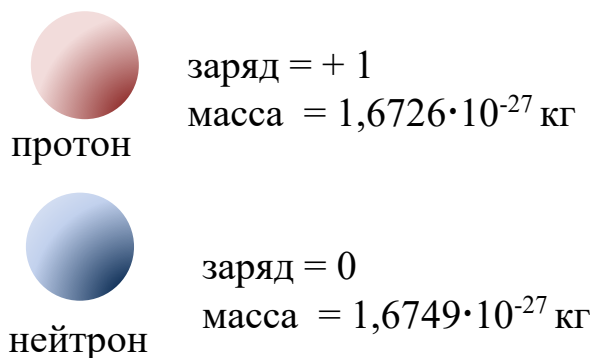
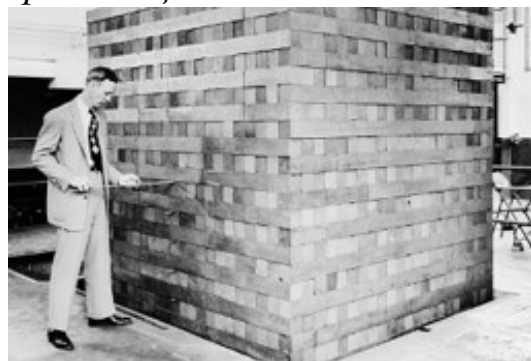


Рис. 9.5.

В 1935 г. японским физиком Х. Юкавой было введено представление о «виртуальном» процессе сильного взаимодействия, возникающего при обмене нуклонами гипотетически *существующей частицы* (названной затем *π-мезоном*, или *пионом*). Значительно позже пионы с положительным, отрицательным и нулевым по знаку кулоновским зарядом были обнаружены реально в космическом излучении.

Анализ результатов исследования β – излучения ядер привел В. Паули в 1931 г. к идее существования *нейтрино*, что позволило Э. Ферми к 1934 г. создать первую теорию β – распада, в которой появилось представление о существовании *слабого взаимодействия*.

В 1942 г. под руководством Э. Ферми в США был *построен первый атомный реактор*, позволивший на его базе создать первую атомную бомбу. В 1954 г. в России под руководством И. В. Курчатова была построена *первая атомная электростанция*.



Первая атомная электростанция

Рис. 9.6.

В 1964 г. М. Гелл-Манном и Дж. Цвейгом была предложена *модель внутреннего строения адронов и мезонов* на основе унитарного триплета частиц, названных *кварками*.

Прогнозируемая на основе унитарной симметрии, положенной в основу создаваемой новой теории сильного взаимодействия, неизвестная ранее частица *гиперон* была зарегистрирована на ускорителе.

С 1967 по 1983 г. Ш. Глэшоу, С. Вайнбергом и А. Саламом создавалась объединенная теория электрослабого взаимодействия, завершившаяся триумфальным открытием переносчиков взаимодействия: *безмассовой частицы – фотона и трех промежуточных массивных – бозонов, обнаруженных экспериментально с помощью ускорителя в 1983 г.*

С 1974 г. Х. Джорджи и Ш. Глэшоу положено начало *теории великого объединения взаимодействий (ТВО)* на основе симметрии *единого калибровочного поля $SU(5)$* и представлении о «физическом вакууме» как о состоянии поля с наименьшей энергией. На сегодняшний момент теории не завершена и не включает в себя гравитационный тип взаимодействия. Тем не менее, следствия ТВО распространяются практически на все известные физические факты и, в частности, объясняют квантованность величины кулоновского заряда. История цивилизации помнит последствия рождения первого калибровочного объединения электрического и магнитного полей в единое электромагнитное поле (теория Максвелла): возникли электротехника, радиотехника, электроника, появились современные средства связи, развилась энергетика. Каких последствий можно ожидать от «тихой революции 1983 года», наметивший курс на успешное объединение всех фундаментальных взаимодействий в природе, следует только догадываться, но очевидно, их будет не меньше

9.2. Источники элементарных частиц. Ускорители

Предметом изучения ядерной физики и физики элементарных частиц являются свойства атомных ядер и элементарных частиц, а также типов взаимодействия на микроуровне.

Примеры источников элементарных частиц и атомных ядер представлены в таблице 9.1.

Таблица 9.1

Источники частиц и ядер	
Естественные источники	<i>Космические лучи</i> (состоят на 90% из протонов, 7% альфа-частиц, ядер средних и тяжелых элементов 1.2%, электроны 1.5%, позитроны 0.3%, нейтрино, фотоны). Энергии до 10^{20} эВ, средняя энергия приблизительно 10ГэВ. Исследуя космические лучи до 70-х годов, было открыто порядка 20 новых элементарных частиц, на сегодня более 200.
	Излучение радиоактивных земных пород. Как правило, это элементы с периодом полураспада более $3 \cdot 10^8$ лет и продукты их распада.
	Естественный фон атмосферы, живых организмов и водной среды.
Искусственные источники	Промышленные и научные объекты по подготовке радиоактивных препаратов: <i>атомные реакторы, ускорители, места хранения радиоактивных отходов.</i>
	<i>Атомные реакторы</i> являются источниками интенсивного потока <i>нейтронов</i> , которые могут использоваться в научных и прикладных целях.
	<i>Ускорители</i> – сегодня основной источник получения информации о свойствах микрообъектов. Ускорители предназначены для получения пучков элементарных частиц, имеющих большие энергии.

На заряженные частицы в ускорителях действуют: *электрическое и магнитное поля*. Как правило, электрическое поле ускоряет частицы, т.е. является источником энергии, магнитное поле служит для корректировки траектории движения частиц, неоднородное электрическое и магнитное поля особой конфигурации используются для фокусировки пучка частиц.

Ускорители делятся на *электростатические, линейные, циклические*.

В *электростатических ускорителях* частицы ускоряются электростатическим полем, создаваемым генератором высокого напряжения, например генератором Ван-де-графа. Дают поток заряженных частиц до 10МэВ.

В линейном резонансном ускорителе частицы движутся по прямолинейной траектории и разгоняются электрическим напряжением от генератора высокой частоты (на рис. 9.7. И – источник).

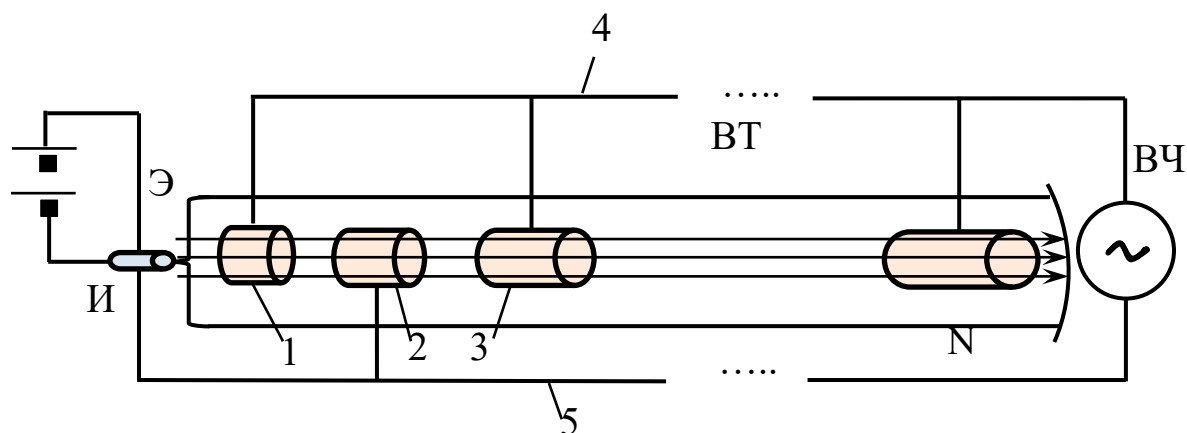


Рис. 9.7.

В цилиндрической вакуумной трубке установлен ряд коаксиальных (ось одна) трубчатых цилиндров 1,2,3, на которые подается переменное напряжение от генератора высокой частоты (ВЧ). На четные и нечетные от разных полюсов генератора.

В промежутках между электродами частицы, вылетающие из ионизатора, разгоняются, зазоры между трубками делаются такими, чтобы частицы пролетали их ровно за половину периода колебаний напряжения генератора, и тогда после прохождения очередной трубки из-за смены знака напряжения частица снова оказывается в ускоряющем поле.

Например, энергия, приобретаемая электроном на выходе ускорителя

$$W = eU_0N,$$

где U_0 – некоторое эффективное значение напряжение между электродами, N – число электродов.

Наибольшее распространение получили *циклические ускорители*, в них заряженные частицы движутся по окружности и траектории близкой к окружности.

Центростремительное ускорение создается силой Лоренца, действующей со стороны магнитного поля.

Энергия передается частицам электрическим полем.

Рассмотрим принципиальную схему устройства простейшего резонансного циклического ускорителя, предложенного Лоренцом в 1932 году.

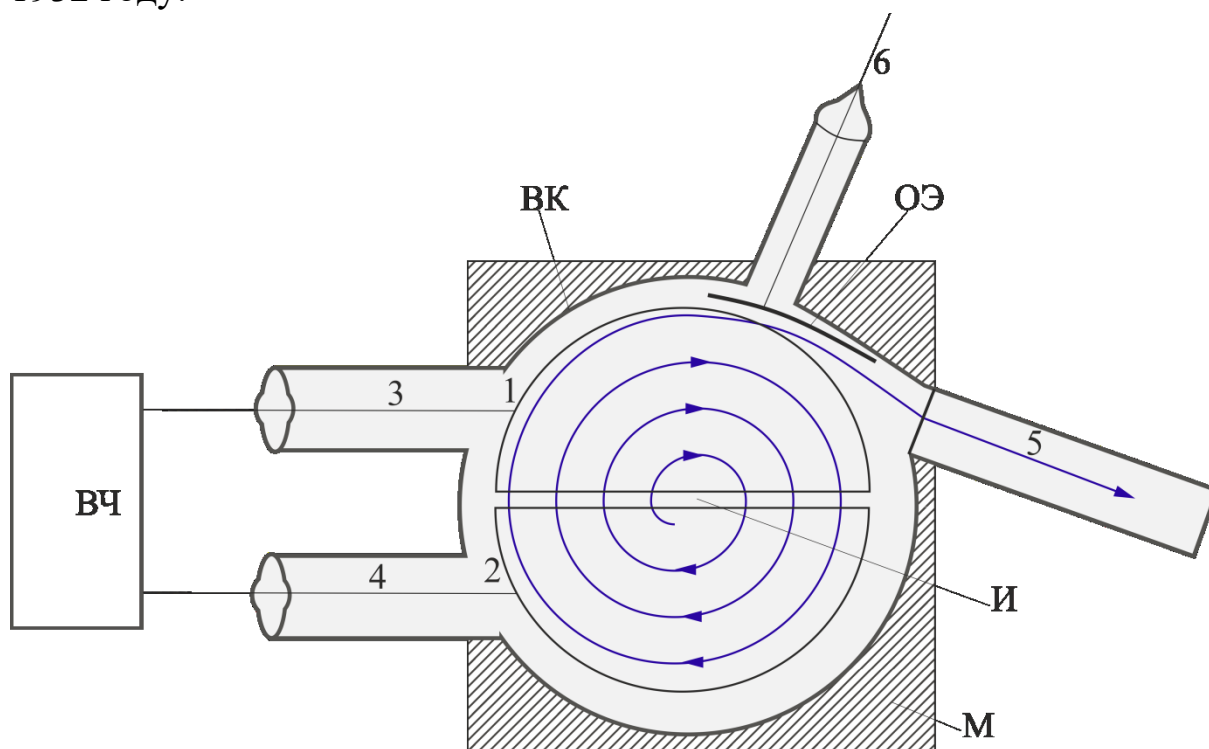


Рис. 9.8.

На рис. 9.8. И – источник заряженных частиц, дуанты 1, 2 – полые электроды, ОЭ – отклоняющий отражающий электрод, М – магнитное поле.

Выходя из источника, заряженная частица проходит половину оборота, попадает в электрическое поле между дуантами. Если переменное электрическое поле, создаваемое генератором высокой частоты и движение электронов, будут согласованы, т.е. электроны всегда попадают в ускоряющее поле, возникает циклотронный резонанс.

Энергия частиц на выходе:

$$W = eU_0N,$$

$$R = \frac{mv}{qB},$$

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{qB}{m}.$$

Но при скоростях близких к скорости света, масса меняется

$$m = \frac{W}{c^2},$$

где W – полная энергия частицы,

$$\omega = \frac{qBc^2}{W}.$$

С увеличением энергии частицы, частота обращения уменьшается и возникает рассогласование движения частиц с работой генератора высокой частоты. Из-за этого рассогласования, энергия частиц, которую можно получить в циклотроне не превосходит 100МЭВ .

Введем величину

$$f = \frac{\omega_e}{\omega},$$

так называемую *кратность*. Здесь ω_e – частота генератора, ω – частота обращения частицы. Тогда

$$\frac{W}{c^2} = \frac{qB}{\omega} = \frac{qBf}{\omega_e}.$$

Из этой формулы видно, что решить проблему согласования можно либо меняя со временем B , либо ω_e .

Если $B = \text{const}$, ускорение производится с уменьшающейся частотой

$$\omega_e = \omega(t),$$

тогда циклический ускоритель называется *фазотроном*.

Если при $\omega_e = \text{const}$ и меняется B , т.е.

$$B = B(t),$$

тогда циклический ускоритель называется *синхротроном*. А если меняют и то и другое – *синхрофазотрон*.

Фазотроны разгоняют дейтроны и альфа-частицы до энергии 1 ГэВ. Синхротроны разгоняют электроны до 12 ГэВ. Синхрофазотроны разгоняют протоны до 1 ТэВ (тера 10^{12}).

Частицы разгоняют обычно для того, чтобы сталкивать их с мишенью, например ядрами какого-либо вещества, но энергию взаимодействия удастся многократно увеличить, если сталкивать частицы, движущиеся на встречу друг другу.

Эта идея реализована в ускорителях на встречных пучках (коллайдрах).

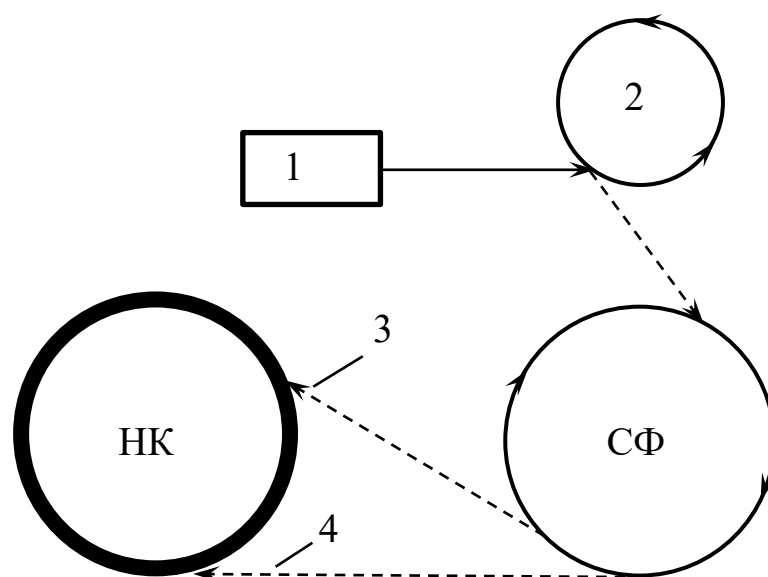


Рис. 9.9.

На рис. 9.9. НК – накопительные кольца; СФ – синхрофазотроны.

Накопительные кольца в одном или нескольких местах пересекаются и в этих местах потоки сталкиваются. В индукционных ускорителях, в отличие от резонансных, ускоряющее воздействие на частицы оказывает вихревое электрическое поле, возникающее в переменном магнитном поле в результате электромагнитной индукции.

9.3. Детекторы частиц

Пучок частиц от источника взаимодействует с веществом (мишенью) или другими частицами, в результате этого взаимодействия могут рождаться новые частицы. Дальнейшее поведение взаимодействующих частиц, а также вновь рожденных, несет информацию о самом взаимодействии. Фиксируют это поведение детекторы.

В простейших случаях детекторы фиксируют факт прохождения частиц, в более сложных могут определить массу, заряд, скорость, энергию частиц. Большинство детекторов могут регистрировать и исследовать лишь заряженные частицы, иногда удается регистрировать фотоны и нейтроны.

Главная сложность в создании детекторов заключается в том, что детектор – макротело и воздействие на него микрочастиц очень мало, поэтому возникает необходимость резкого усиления микроскопического эффекта для превращения его в макроскопический сигнал.

Существует множество детекторов, которые можно условно разбить на 4 типа.

1. Масс-анализаторы.

Применяются в низкоэнергетической ядерной физике, служат для измерения масс (масс-спектрографы), изучения изотопного состава (масс-спектрометры) и для разделения изотопов (масс-сепараторы).

Главная часть всех этих приборов – анализатор, представляющий собой электромагнитное поле особой конфигурации, расщепляющее исходный пучок частиц (ионов) на отдельные пучки с одинаковыми удельными зарядами.

2. Счетчики.

Фиксируют прохождение частиц через определенный макроскопический участок пространства. Они могут просто считать частицы, но могут и измерять их энергии, скорости, разделять по массам, измерять полную энергию потока частиц.

В газонаполненных счетчиках частицы ионизируют молекулы газа в области, к которой приложено высокое напряжение. В результате возникает газовый разряд, который фиксируется электрической схемой.

В твердотельных счетчиках ионизация происходит внутри кристалла или в области р-п перехода, к которым также приложено высокое напряжение.

В рабочем веществе оптических счетчиков заряженные частицы порождают фотоны, которые затем регистрируются с помощью фотоэлектронного умножителя.

3. Трековые детекторы.

Позволяют визуально обнаружить или фиксировать фотографически треки частиц – следы, оставляемые частицами в рабочем веществе. По геометрии треков устанавливается число частиц, по длине трека и его характеру можно оценить энергию частицы и ее скорость.

4. Годоскопические камеры (трековые счетчики).

Занимают промежуточное положение между счетчиками и трековыми детекторами. Они как бы составлены из множества счетчиков и поэтому объединяют их преимущества: немедленность регистрации для счетчиков и полноту информации трековых камер.

9.4. Метод рассеяния

Без преувеличения можно утверждать, что все методы исследования в физике атомного ядра можно отнести к разновидностям метода рассеяния.

Метод рассеяния включает в себя три процесса.

1. Формирование пучка (пучков) частиц, подготовленных к взаимодействию.
2. Этап взаимодействия частиц, полученных на 1 этапе, с материальным объектом в некоторой ограниченной области – области взаимодействия. Определяется типом и характером взаимодействия.
3. Финальный этап. С помощью детекторов, находящихся за пределами области взаимодействия, исследуются результаты взаимодействия, произошедшие на 2 этапе.

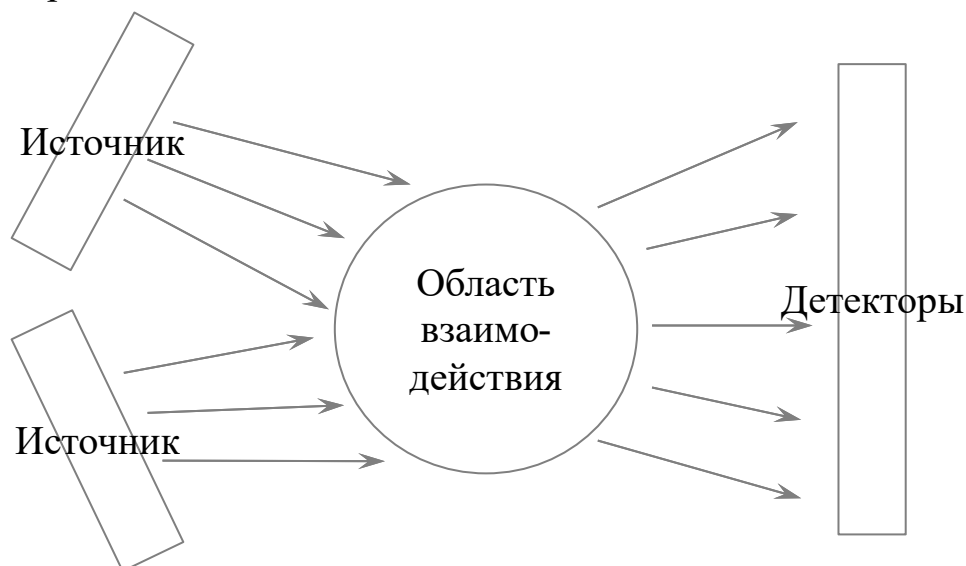


Рис. 9.10.

Задачи, которые могут решать методы рассеяния.

- (1) По известным характеристикам входящих частиц и известному типу взаимодействия определяется результат рассеяния.
- (2) По известным характеристикам входных частиц и результату рассеяния определяется тип и природа взаимодействия.
- (3) По результатам рассеяния и известному типу взаимодействия определяется характер входящих частиц.

При использовании метода рассеяния обычно строится теория процесса рассеяния, которую представляют в виде *математической модели*.

Все взаимодействия можно разбить на три вида.

1. *Упругое рассеяние* (в результате взаимодействия изменяется лишь состояние движения исходных частиц). Для него выполняется закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. Например, опыты Резерфорда, эффект Комптона, дифракция фотонов, нейтронов, электронов на кристаллах.

2. *Неупругое рассеяние*. Сопровождается переходом некоторых частиц в возбужденное состояние, т.е. некоторой внутренней перестройкой частиц. Например, опыты Франка и Герца.

3. *Соударение может представлять собой реакцию*, когда в конечном состоянии появляются новые частицы, которых не было до взаимодействия.

Рассмотрим одну из моделей взаимодействия пучка входящих частиц с частицами неподвижной мишени (рис. 9.11).

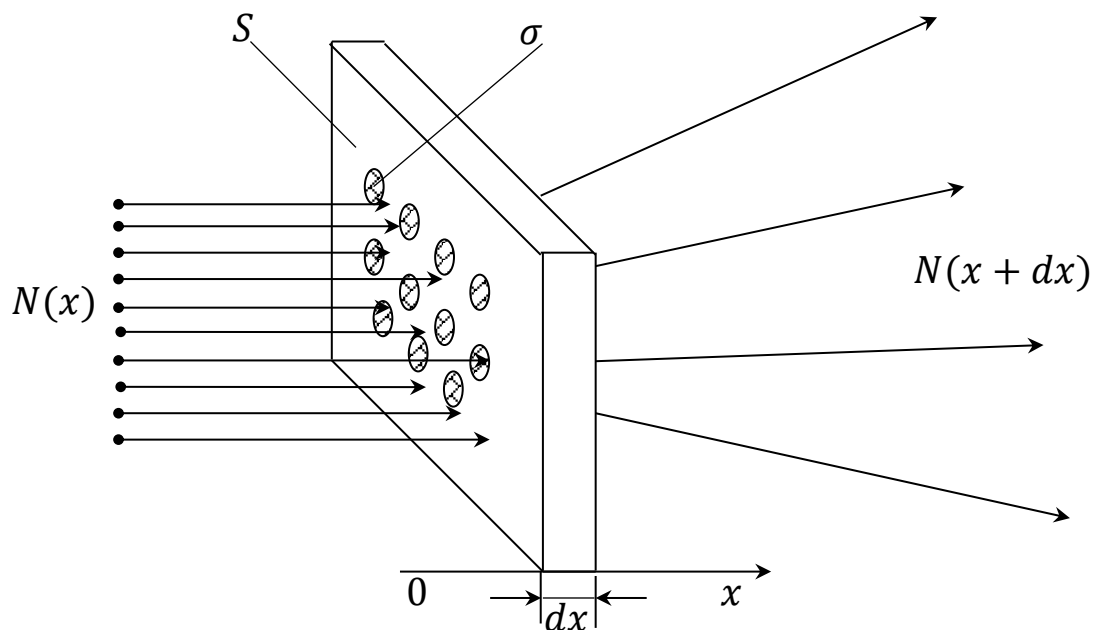


Рис. 9.11.

На рис. 9.11. S – обычная площадь взаимодействия; σ – эффективное сечение первой частицы.

Пусть взаимодействие происходит, если входящие частицы пролетают через сечение σ связанной с частицей мишени. Тогда вероятность взаимодействия в слое dx будет

$$dp = \frac{\sigma dM_{\text{я}}}{S},$$

где $dM_{\text{я}}$ – число частиц, которые участвуют во взаимодействии в слое толщиной dx мишени,

$$dM_{\text{я}} = ndV,$$

n – концентрация, dV – объем и

$$dV = Sdx,$$

тогда

$$dp = \frac{\sigma dM_{\text{я}} dx}{dV} = \sigma n dx.$$

Если при взаимодействии частица захватывается ядром мишени, то число частиц по мере продвижения вдоль оси x уменьшается

$$dN_{\text{захв}} = -dN,$$

где dN – дифференциал числа частиц N , тогда

$$dp = \frac{dN_{\text{захв}}}{N} = -\frac{dN}{N},$$

$$\frac{dN}{N} = -\sigma n dx.$$

Проинтегрируем

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^d -\sigma n dx,$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\sigma n d.$$

Таким образом, число частиц, прошедших мишень толщиной d

$$N = N_0 e^{-\sigma n d}.$$

Эта формула позволяет оценить эффективное сечение ядер.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Кто из ученых доказал, что α -излучение представляет собой ионы атома гелия?

- а) А. Беккерель;
- б) Э. Резерфорд;

- c) М. Склодовская-Кюри и П. Кюри;
- d) М. Планк.

2. Опыты какого ученого завершились открытием электрона?

- a) М. Фарадей
- b) Э. Резерфорд;
- c) Дж. Томсон;
- d) Н. Бор.

3. Название фотону дал...

- a) А. Эйнштейн;
- b) Х. Нагаока;
- c) Г. Льюис;
- d) М. Планк.

4. Кто из перечисленных ученых предложил прото-нейтронную модель ядра?

- a) А. Эйнштейн и Г. Льюис.
- b) В. Гейзенберг и Д. Д. Иваненко.
- c) М. Гелл-Манн и Дж. Цвейг.
- d) Ж. Перрен и Х. Нагаока.

5. В 1935 г. японским физиком Х. Юкавой было введено представление о «виртуальном» процессе сильного взаимодействия, возникающего при обмене нуклонами гипотетически существующей частицы, названной затем...

- a) адрон;
- b) лептон;
- c) пион;
- d) бозон.

6. Если в ускорителе элементарных частиц ускорение производится с изменяющейся частотой и индукцией магнитного поля, он называется...

- a) фазотрон;
- b) синхротрон;
- c) синхрофазотрон;
- d) гипертраон.

7. Установите соответствие между анализатором и его описанием.

- (1) Масс-анализаторы.
- (2) Счетчики.
- (3) Трековые детекторы.
- (4) Годоскопические камеры.

а) Позволяют визуально обнаружить или фиксировать фотографически следы, оставляемые частицами в рабочем веществе.

б) Занимают промежуточное положение между счетчиками и трековыми детекторами, как бы составлены из множества счетчиков.

с) Фиксируют прохождение частиц через определенный макроскопический участок пространства, могут просто считать частицы, но могут и измерять их энергии, скорости, разделять по массам, измерять полную энергию потока частиц

д) Применяются в низкоэнергетической ядерной физике, служат для измерения масс, изучения изотопного состава и для разделения изотопов.

8. Если в результате взаимодействия изменяется лишь состояние движения исходных частиц, но не изменяется их состав и частицы не переходят в возбужденное состояние, то такой вид рассеяния называют...

- а) упругим;
- б) неупругим;
- с) реакцией;
- д) распадом.

9. Космические лучи на 90% состоят из...

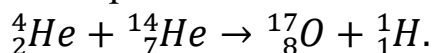
- а) альфа-частиц;
- б) протонов;
- с) электронов;
- д) позитронов.

10. На заряженные частицы в ускорителях действуют...

- а) ядерные силы;
- б) кварковые поля;
- с) пионы;
- д) электрическое и магнитное поля.

Применение методов рассеяния

Метод рассеяния был использован при открытии протонов в 1919 г. Резерфорд провел искусственное превращение элементов. Он направил поток α — частиц на азот, а в результате получил атомы водорода и кислорода. В современных обозначениях эта ядерная реакция выглядит следующим образом



Тем самым он доказал, что ядро водорода входит в состав азота (иначе откуда бы он взялся?)

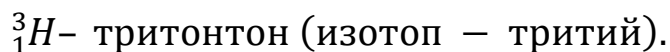
Ядро атома водорода он назвал *протоном* (от «*протос*» - первый)



По аналогии ядро изотопа водорода



а ядро изотопа



Резерфорд предположил возможность существования нейтрального ядра — *нейтрона*. Десять лет эти нейтральные ядра упорно искали, но безуспешно.

В 1930 г. Боте и Беккер обнаружили, что при бомбардировке α — частицами берилия возникает жесткое нейтральное излучение, которое они называли γ — излучением, т.е. электро-магнитное излучение с большой энергией. По их оценкам энергия γ — квантов была порядка 5 МэВ.

В 1931 г. Ирен (дочь Марии и Пьера Кюри) и жена Фредерико Жолио Кюри установили, что нейтральное излучение выбивает из парафина протоны.

Максимальное значение скорости протонов было $\sim 3,3 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если посчитать, что это результат комптоновского рассеяния на протонах, то из закона сохранения импульса получили

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h'}{\lambda\lambda'} \cos\theta,$$

где v — скорость отдачи.

Очевидно, что максимально скорость протонов отдачи будет при $\theta = 180^\circ$, тогда

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h'}{\lambda\lambda'}.$$

Если пренебречь изменением длины волны фотона

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_k \approx \lambda,$$

то

$$(mv)^2 = 4\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2.$$

Отсюда

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{2},$$

а значит

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{m\nu c}{2},$$

$$E = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3,3 \cdot 10^7 \frac{\text{М}}{\text{с}}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,2 \cdot 10^7 \text{эВ} = 50 \text{МэВ}.$$

т.е. по оценкам, которые были основаны на измерении проникающей способности, энергия γ – квантов составила 50МэВ, а по скорости протонов отдачи энергия в 10 раз больше.

В 1932г. Чедвиг провел дополнительное исследование и обнаружил, что атомы азота выбивались неизвестным излучением со скоростью порядка $4,7 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, чему отвечает энергия γ – квантов 100МэВ.

Стало очевидно, что не γ – кванты, а другие частицы выбивают протоны и ядра азота.

Оценим массу этих частиц их закона сохранения энергии и закона сохранения импульса (рис. 9.12).

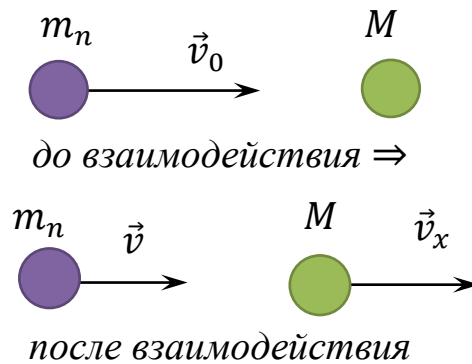


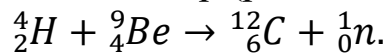
Рис. 9.12.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{m_n v_0^2}{2} = \frac{m_n v^2}{2} + \frac{m_n v_x^2}{2}, \\ m_n v_0 = m_n v + M v_x, \end{cases} \\
& \begin{cases} m_n (v_0^2 - v^2) = M v_x^2, \\ m_n (v_0 - v) = M v_x, \end{cases} \\
& v_0 \neq v = v_x, \\
& v = v_x - v_0, \\
& m_n (v_0 - v_x + v_0) = M v_x, \\
& m_n (2v_0 - v_x) = M v_x, \\
& 2m_n v_0 - m_n v_x = M v_x, \\
& v_x = \frac{2m_n}{M + m_n} v_0.
\end{aligned}$$

Применяя дважды, сначала для протонов, потом для ядер азота, получим

$$\begin{aligned}
v_H &= \frac{2m_n}{m_n + m_H} v_0, \\
v_N &= \frac{2m_n}{m_n + m_N} v_0, \\
\frac{v_H}{v_N} &= \frac{m_n + m_N}{m_n + m_H} = \frac{3,3 \cdot 10^7}{4,7 \cdot 10^6} \approx 7, \\
m_N &= 14m_H, \\
m_n + 14m_H &= 7m_n + 7m_H, \\
6m_n &= 7m_H, \\
m_n &= 1,17m_H.
\end{aligned}$$

Так были открыты *нейтроны* – нейтральные частицы с массой близкой к массе протона и, которые также как и протон вылетали при бомбардировке α – частицами ядер (рис. 9.13)



В данном случае метод рассеяния применялся *дважды*.

→ На *первом* этапе решается *задача*: по известным характеристикам входящих частиц и известному взаимодействию, описывается результат рассеяния.

→ На *втором* этапе решается *задача*: по известному типу взаимодействия и известному результату рассеяния определяются характеристики входящих частиц.

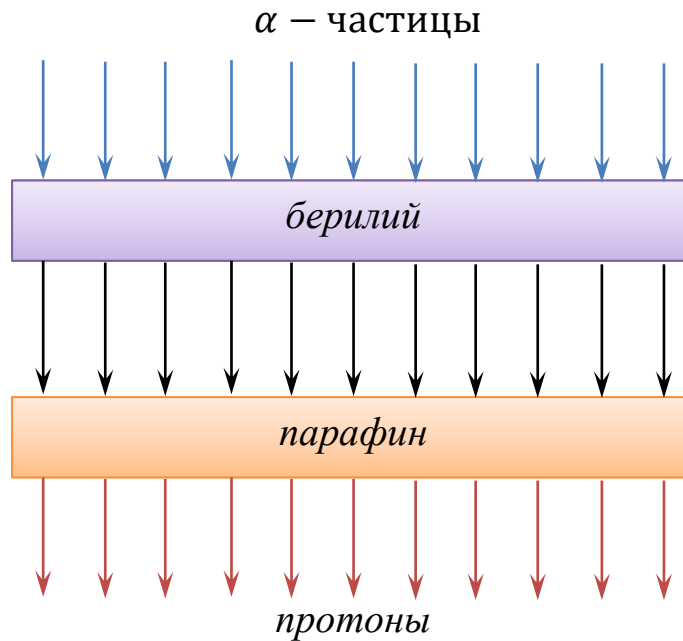


Рис. 9.13.

Глава 10. МОДЕЛИ АТОМНОГО ЯДРА

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Составные элементы ядра](#)
- [Ядерная зоология](#)
- [Капельная модель ядра. Формула Вайцзеккера](#)
- [Оболочечная модель](#)
- [Материалы для практической работы](#)

10.1. Составные элементы ядра

Началом ядерной физики принято считать 1932 год, в котором был открыт нейтрон, и практически сразу была предложена протонно-нейтронная модель ядра. Протонно-нейтронная модель ядра Гейзенберга-Иваненко.

Рассмотрим, что было известно об атомах на тот момент.

1. Все вещества состоят из атомов – нейтральных частиц размером порядка 10^{-10} м.
2. Атом элемента X с порядковым номером Z и относительной атомной массой A состоит из электронной оболочки, содержащей

Z электронов и ядра, масса которого примерно в A раз больше массы водорода и имеет заряд $+Ze$.

3. Ядро содержит Z протонов и $A - Z$ нейтронов.

4. Электрон сравнительно легко можно оторвать от атомов. Энергия связи порядка 10Эв.

5. Ядро очень устойчиво. Энергия связи порядка 10МЭв на одну частицу.

Опишем, что было известно о частицах составляющих атом.

Информация об *электронах* представлена в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Электрон	
Заряд	$q = -e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса	$m_e = m = 9,1095 \cdot 10^{-31}$ кг = 0,000549 а. е. м. = 0,511 МэВ
Спин	$S = \frac{1}{2}$ (полуцелый)
Собственный магнитный момент ⁽¹⁾	Для электрона магнетон Бора $\mu_e = \mu_b = \frac{e\hbar}{2m}$
Среднее время жизни	Считается, что электрон абсолютно стабилен, $\tau_e \rightarrow \infty$

⁽¹⁾ Согласно релятивистской квантовой механики, построенной Дираком, если частица имеет спин $\frac{1}{2}$, то значение собственного магнитного момента этой частицы

$$\mu_0 = \frac{q\hbar}{2M},$$

где q, M – заряд и масса частиц.

Информация о *протонах* представлена в таблице 10.2.

Таблица 10.2

Протон	
Заряд	$q = +e$
Масса покоя	$m_p = 1836,2m = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ $= 1,00728 \text{ а. е. м.} = 938,3 \text{ МэВ}$
Спин	$S = \frac{1}{2}$ (полуцелый)
Магнитный момент	$\mu_p = 2,79 \cdot \mu_N$, где $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ – ядерный магнетон.
Время жизни	$\tau_p \geq 6,5 \cdot 10^{31}$, т.е. протон стабилен, но не абсолютно

Информация о нейтронах представлена в таблице 10.3.

Таблица 10.3

Нейтрон	
Заряд	$q = 0$ (нейтральная частица)
Масса ⁽¹⁾	$m_n = 1838,7m = 1,00867 \text{ а. е. м.} = 939,6 \text{ МэВ}$
Спин	$S = \frac{1}{2}$ (полуцелый)
Магнитный момент ⁽²⁾	$\mu_n = -1,91\mu_N$
Время жизни ⁽³⁾	$\tau_n = 925\text{с} \approx 15 \text{ мин, (не стабильная частица)}$

⁽¹⁾ Масса нейтрона отличается чуть больше, чем на $\frac{1}{10}\%$ от массы протона.

⁽²⁾ Знак «–» означает, что магнитный момент нейтрона направлен противоположно магнитному моменту протона, имеет несколько меньшее абсолютное значение. Интересным представляется факт, что отношение магнитных моментов составляет

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} \approx -\frac{2}{3}.$$

⁽³⁾ Распадается по схеме

$$n \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}_e,$$

где $\tilde{\nu}_e$ - электронное антинейтрино.

Здесь и далее считаем, что

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,6582 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,44 \text{ МэВ.}$$

Оказалось, что стабильный в свободном состоянии протон внутри ядра может превращаться в нейтрон по похожей схеме

$$p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e,$$

где e^{+} - позитрон (античастица электрона), ν_e - электронное нейтрино.

Такие взаимные превращения протонов и нейтронов позволили предложить модель, в рамках которой протон и нейтрон можно рассматривать как два состояния одной частицы – нуклона, кроме спинового квантового числа $s = \frac{1}{2}$ для описания поведения этой частицы, вводят еще одно квантовое число – *изоспин*

$$T = \frac{1}{2}.$$

Состояние нуклона, соответствующее протону или нейтрону, определяется *проекцией изоспина*

$$\rightarrow T_3 = \frac{1}{2} - \text{для протона,}$$

$$\rightarrow T_3 = -\frac{1}{2} - \text{для нейтрона.}$$

Нуклонам приписывают еще одно квантовое число – *барионный заряд*

$$B = 1.$$

Через барионный заряд и проекцию изоспина выражается обычный заряд нуклона

$$q = e \left(T_3 + \frac{B}{2} \right).$$

Оказалось, что эти характеристики нуклонов применимы и к другим элементарным частицам.

10.2. Ядерная зоология

Всякое атомное ядро состоит из нуклонов, т.е. протонов и нейтронов. Общее число нуклонов обозначают A и называют *массовым числом*.

Массовое число совпадает с суммарным барионным зарядом

$$A = \sum_{a=1}^A B^{(a)},$$

число протонов обозначают Z , поэтому заряд ядра

$$q = Z \cdot e,$$

число нейтронов находят по формуле

$$N = A - Z,$$

но заряд ядра можно выразить и через изоспины нуклонов

$$q = e \left(\sum_{a=1}^A T_3^{(a)} + \frac{A}{2} \right).$$

Ядро будем обозначать

$A_ZX,$

где X – название элемента, Z – число протонов, A – массовое число.

Иногда используется краткое обозначение AX .

Совокупность ядер, отвечающих массовому числу A и атомному номеру Z , называют *нуклидом*.

Различные нуклиды, обладающие одним и тем же атомным номером Z , называют *изотопами*.

Химические свойства изотопов почти тождественны, однако их ядерные свойства обычно сильно отличаются.

Различные нуклиды, обладающие одинаковым массовым числом A , называют *изобарами*.

Анализ известных нуклидов позволяет отметить следующие закономерности.

1. В настоящее время известно более 2000 видов нуклидов. Ожидается, что всего их может быть от 4000 до 5000.

2. Известные нуклиды с Z от 0 до 107. Можно ожидать, что существуют нуклиды $Z = 114$ и $Z = 126$. В областях островов стабильности.

3. Не существует стабильных ядер с $Z = 0$, $Z = 43$ (технеция), $Z = 61$ (прометий), $Z \geq 84$ (начиная с полония) – радиоактивные.

4. Некоторые радиоактивные ядра встречаются в природе. Одни из них имеют очень большой период полураспада и поэтому со-

хранились в природе со времен возникновения вещества. Другие являются как продукты этих редких распадов.

5. При сравнительно малых A стабильные ядра содержат примерно одинаковое число протонов и нейтронов. Например: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$. С ростом A число нейтронов в стабильных ядрах возрастает.

6. Стабильные ядра с четным Z или N встречаются чаще, чем с нечетным. Особенно стабильны ядра, у которых и число протонов и число нейтронов четное: *четно-четные ядра*. На втором месте по стабильности *четно-нечетные ядра*, у которых Z – четное, N – нечетное или наоборот N – четное, Z – нечетное. Меньше всего стабильных среди *нечетно-нечетных ядер*. Их всего четыре: ${}^2_1\text{H}$ – дейтерий, ${}^6_3\text{Li}$ – литий, ${}^{10}_5\text{B}$ – бор, ${}^{14}_7\text{N}$ – азот.

7. Наиболее устойчивыми оказались ядра, у которых число протонов или число нейтронов равно одному из магических чисел (*): 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особенно стабильны дважды магические ядра: Z – магическое число, N – магическое число. Например, ${}^4_2\text{He}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$

(*) Числа нейтронов или протонов, соответствующие заполненным оболочкам, были названы магическими числами.

10.3. Капельная модель ядра. Формула Вайцеккера

В отличие от моделей атома, где взаимодействуют электроны и ядро с электромагнитными силами, которые хорошо изучены, при создании моделей ядра возникают серьезные трудности, связанные с тем, что ядерные силы – силы взаимодействия между нуклонами до сих пор изучены плохо.

Кроме того, в ядре все нуклоны равноправны, в нем не удастся выделить какого-либо ярко выраженного центра, с помощью которого можно ввести некоторые упрощения при записи уравнения Шредингера.

Все модели ядра можно разделить на коллективные, в которых ядро – это совокупность нуклонов, взаимодействующих друг с другом, посредством ядерных сил.

И *одночастные*, в которых рассматривается поведение отдельных независимых нуклонов в некотором самосогласованном поле.

Ярким примером коллективной модели ядра является *капельная модель ядра (гидродинамическая модель)*, в ней ядро представляется в виде капли заряженной жидкости, плотность которой равна ядерной плотности.

Экспериментальным основанием введения этой модели послужила примерно одинаковая плотность для всех ядер, которая свидетельствует о не сжимаемости «ядерной жидкости».

Рассмотрим, как эта модель позволяет получить полуэмпирическую формулу расчета энергии связи ядра.

Энергия связи вводится для системы как энергия взаимодействия при условии, что бесконечно удаленные составляющие системы не взаимодействуют.

Исходя из этого, система будет устойчива, если энергия связи будет отрицательна

$$E_{\text{ат}} = -E_{\text{иониз}} = -13,6 \text{ Эв.}$$

Другой подход: под энергией связи часто понимают энергию, которую надо затратить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны. Это положительная энергия связи. В данном случае энергия положительна, т.к. чтобы растащить нуклоны нужно затратить энергию.

Удельная энергия связи – энергия, приходящаяся в среднем на один нуклон в ядре

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A},$$

где A – число нуклонов (массовое число).

С энергией связи тесно связано понятие *дефекта массы*. По формуле Эйнштейна полная энергия любого тела определяется его массой

$$E = mc^2.$$

Энергия взаимодействия нуклонов отрицательна, поэтому *полная энергия ядра меньше полной энергии отдельных нуклонов его составляющих.*

А так как полная энергия неразрывно связана с массой, то масса ядра оказывается меньше массы нуклонов

$$m_{\text{я}} < Zm_p + Nm_n,$$

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}},$$

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2.$$

Если Δm выразить в атомных единицах массы (а. е. м.), то учитывая, что

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

имеем

$$1,67 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{(3 \cdot 10^5)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 931,44 \frac{\text{МэВ}}{\text{а. е. м.}}.$$

В рамках *капельной модели* энергию связи можно оценить исходя из следующих соображений.

1. Эксперимент показывает, что энергия связи тем больше, чем больше значение A , причем зависимость почти линейная. Исходя из этого

$$\Delta E_{\text{объем}} = -\alpha_1 A.$$

Физический смысл слагаемого: отражает насыщение ядерных сил, нуклоны с ядерными силами взаимодействуют только со своим первым окружением, а не со всеми остальными нуклонами (рис. 10.1). Иначе

$$\Delta E_{\text{объем}} \sim A^2.$$

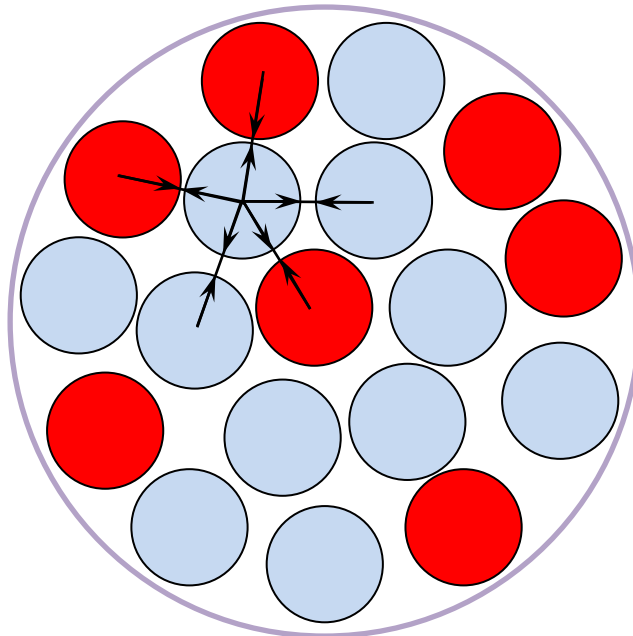


Рис. 10.1.

2. Не все нуклоны окружены одинаково, есть нуклоны, которые попадают на поверхность ядра. Их число пропорционально площади поверхности

$$S \sim r^2; V \sim A; V \sim r^3 \Rightarrow r \sim A^{1/3},$$

$$\Delta E_{\text{пов}} = \alpha_2 A^{2/3}.$$

Это слагаемое является аналогом поверхностной энергии жидкости (рис. 10.2).

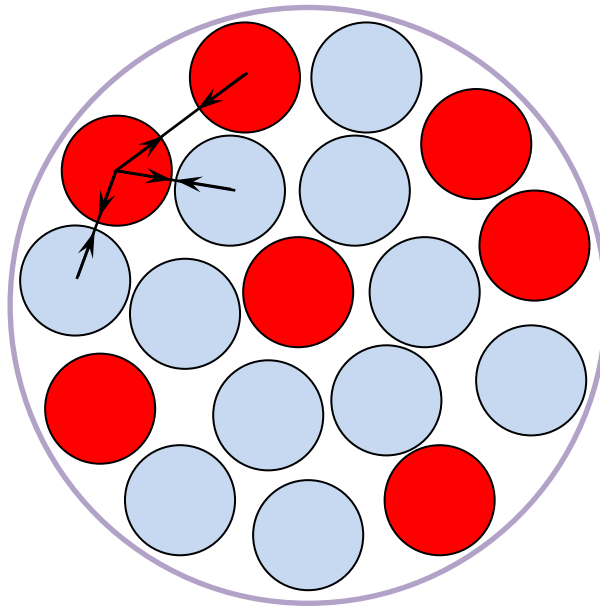


Рис. 10.2.

3. Протоны положительно заряжены, они отталкиваются. Энергия этого отталкивания положительна, пропорциональна

$$Z(Z - 1),$$

а также обратно пропорциональна расстоянию между протонами (рис. 10.3).

Среднее расстояние между протонами определяется радиусом ядра, тогда

$$\Delta E_{\text{кулон}} = \alpha_3 Z^2 A^{-1/3}.$$

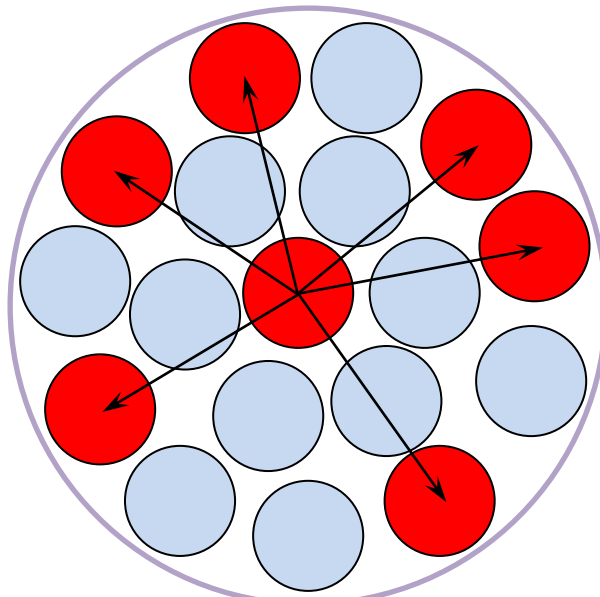


Рис. 10.3.

4. Если оставить только эти слагаемые, то устойчивость ядра должна возрасть с уменьшением числа протонов, а значит с увеличением числа нейтронов. Но эксперимент показывает, что это не так. Если бы протоны были нейтральными, то

$$Z \approx N \approx \frac{A}{2},$$

т.е. ядро стремится к симметрии (рис 10.4).

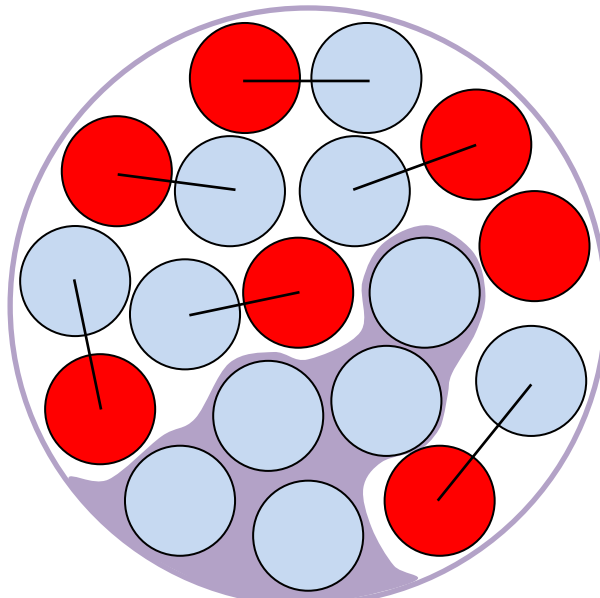


Рис. 10.4.

Это стремление отражает четвертое слагаемое

$$\Delta E_{\text{симметр.}} = \frac{\alpha_4(A - 2Z)^2}{A}.$$

5. Последнее слагаемое не имеет объяснения в рамках капельной модели, оно отражает различную устойчивость ядер в зависимости от четности количества нуклонов (рис. 10.5)

$$\Delta E_{\text{пар}} = \alpha_5 A^{-3/4} \cdot \delta(Z, N),$$

$$\delta(Z, N) = \begin{cases} +1, & \text{н - н;} \\ 0, & \text{ч - н;} \\ -1, & \text{ч - ч.} \end{cases}$$

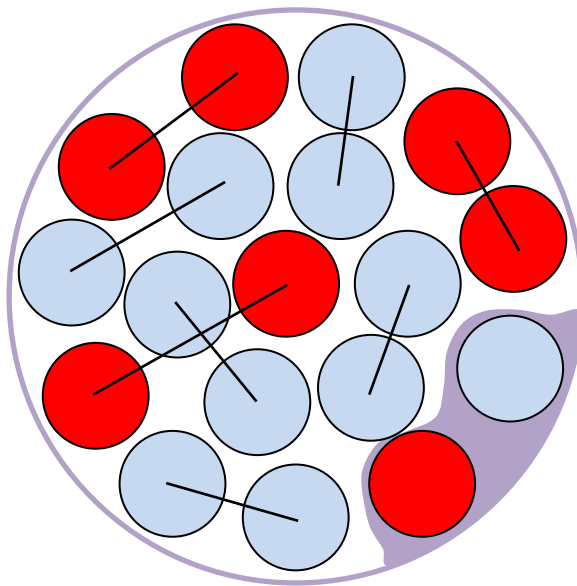


Рис. 10.5.

Формула Вайцзеккера

$$E_{\text{св}} = -\alpha_1 A + \alpha_2 A^{2/3} + \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} + \frac{\alpha_4(A - 2Z)^2}{A} + \alpha_5 A^{-3/4} \cdot \delta(Z, N).$$

Тогда удельная энергия связи

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{св}}}{A} = -\alpha_1 + \alpha_2 A^{-1/3} + \alpha_3 Z^2 A^{-4/3} + \frac{\alpha_4(A - 2Z)^2}{A} + \alpha_5 A^{-7/4} \cdot \delta(Z, N).$$

Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

$$\alpha_1 = 15,75 \text{ МэВ},$$

$$\alpha_2 = 17,80 \text{ МэВ},$$

$$\alpha_3 = 0,71 \text{ МэВ},$$

$$\alpha_4 = 23,70 \text{ МэВ},$$

$$\alpha_5 = 34,00 \text{ МэВ}.$$

10.4. Оболочечная модель

Оболочечная модель – пример одночастной модели, в которой поведение каждого нуклона рассматривают как движение в некотором самосогласованном поле. По аналогии с электронами в атоме, для которых считается, что они не взаимодействуют друг с другом, а взаимодействуют с ядром и всеми остальными электронами. Решая уравнение Шредингера, также, как и для атома вводятся квантовые числа

$$n = 1, 2, \dots; \\ l = 0, 1, \dots, n - 1;$$

Соответствующие значению l состояния описываются буквами $s, p, d, f, h, i, r, \dots$

Из-за спин-орбитального взаимодействия каждый магнитный момент может принимать два возможных значения

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad j = l - \frac{1}{2},$$

кроме $l = 0, j = \frac{1}{2}$. Проекция полного момента квантуется по $2j + 1$ значениям.

Оболочки заполняются последовательно, начиная с меньшей энергии. Уровни обозначаются следующим образом: сначала пишется значение главного квантового числа n , затем состояние определяется орбитальным квантовым числом l , j указывается в виде индекса (рис. 10.6, таблица 10.4).

При данном значении l есть два подуровня

$$j = l \pm \frac{1}{2}.$$

Оболочечный уровень нуклона в ядре обозначается:

$$1d_{5/2},$$

т.е. $n = 1, l = 2$, полный момент $j = l + s = \frac{5}{2}$; $(2j + 1)$ нуклонов на каждом уровне.

Например, $2s_{1/2}$, это состояние с $n = 2, l = 0, j = \frac{1}{2}$; $3f_{7/2}$: $n = 3, l = 3, j = \frac{7}{2}$.

		Количество нуклонов на уровнях	Количество нуклонов на оболочках (магические числа)
$1h$	$1h_{9/2}$	10	82
	$1h_{11/2}$	12	
$3s$	$3s_{1/2}$	2	
$2d$	$2d_{3/2}$	4	
	$2d_{5/2}$	6	
	$2d_{7/2}$	8	
$1g$	$1g_{7/2}$	10	
	$1g_{9/2}$	12	
$2p$	$2p_{1/2}$	2	
	$1f_{5/2}$	6	
	$2p_{3/2}$	4	
	$1f_{7/2}$	8	
$1d$ $2s$	$1d_{3/2}$	4	20
	$2s_{1/2}$	2	
	$1d_{5/2}$	6	
$1p$	$1p_{1/2}$	2	8
	$1p_{3/2}$	4	
$1s$	$1s_{1/2}$	2	2

Рис. 10.6.

Таблица 10.4

Оболочка	Ядро	Спин	Магн. момент		Состояние
			эксп.	теор.	
I	n	1/2	-1.91	—	$1S_{1/2}^1$
	p	1/2	2.79	—	$1S_{1/2}^1$
	${}_1d^2$	1	0.86	0.88	$1S_{1/2}^2$
	${}_1H^3$	1/2	2.98	2.79	$1S_{1/2}^3$
	${}_2He^3$	1/2	-2.13	-1.91	$1S_{1/2}^3$
	${}_2He^4$	0	0	0	$1S_{1/2}^4$
II	${}_2He^5$ и ${}_3Li^5$ – этих ядер нет в природе, они распадаются на He^4 , т.е. оболочка $1S^4$ не может ничего присоединить.				
	${}_3Li^6$	1	0.82	0.88	$(1S^4)(2S^2)$ или $He^4(2S^2)$
	${}_3Li^7$	3/2	3.26	3.07	$(1S^4)(1P_{3/2}^3)$
	${}_4Be^9$	3/2	-1.17	-1.14	$(1S^4)(1P_{3/2}^5)$
	${}_5B^{10}$	3	1.79	1.88	$(1S^4)(1P_{3/2}^6)$
	${}_5B^{11}$	3/2	2.69	—	$(1S^4)(1P_{3/2}^5)(2S^4)$
	${}_6C^{12}$	0	0	0	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)$
III	${}_6C^{13}$	1/2	0.70	0.64	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^1)$
	${}_7N^{14}$	1	0.40	0.40	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^2)$
	${}_7N^{15}$	1/2	-0.28	-0.24	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^3)$
	${}_8O^{16}$	0	0	0	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^4)$
IV	O^{17}	5/2	-1.89	-1.91	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^4)(1d_{5/2}^1)$
	F^{19}	1/2	2.63	2.79	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^4)(2S_{1/2}^3)$
	Ne^{20}	0	0	0	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^4)(2S_{1/2}^4)$
V	Ne^{21}	3/2	—	—	$(1S^4)(1P_{3/2}^8)(1P_{1/2}^4)(2S_{1/2}^4)(1P_{5/2}^4)$
	Na^{22}	3	1.75	1.88	$(2P_{3/2}^1)$
	Mg^{25}	5/2	-0.85	-1.06	$(1S_{1/2}^3)$
	Si^{28}	0	0	0	$(1S_{1/2}^4)$

Таким образом, оболочечная модель объясняет особую устойчивость ядер, в которых число нуклонов совпадает с магическими числами, в этом случае нуклоны полностью заполняют оболочки, что энергетически оказывается выгодно. Аналогичная ситуация возникает с атомами инертных газов, в которых также оболочки полностью заполнены, поэтому они оказываются чрезвычайно устойчивыми.

Величина магнитного момента служит для проверки заполнения оболочек

$$\mu_n = \begin{cases} -1.91\mu_\pi, & J = l + \frac{1}{2}, \\ \frac{1.91}{J+1}J\mu_\pi, & J = l - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\mu_p = \begin{cases} (J + 2.29)\mu_\pi, & J = l + \frac{1}{2}, \\ \left(J - \frac{2.29}{J+1}\right)\mu_\pi, & J = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. В состав ядра НЕ входят...

- a) нейтроны;
- b) протоны;
- c) нуклоны;
- d) электроны.

2. Для ядра запись A_ZX означает...

- a) X – название элемента, Z – число протонов в ядре, A – число нейтронов в ядре;
- b) X – массовое число, Z – число нейтронов в ядре, A – число протонов в ядре;
- c) X – название элемента, Z – число протонов в ядре, A – массовое число;
- d) X – массовое число, Z – число протонов в ядре, A – число нейтронов в ядре.

3. Совокупность ядер, отвечающих массовому числу A и атомному номеру Z , называют...

- a) нуклидами;
- b) атомами;
- c) изотопами;
- d) изобарами.

4. Различные нуклиды, обладающие одинаковым массовым числом A , называют...

- a) нуклидами;
- b) атомами;
- c) изотопами;
- d) изобарами.

5. Различные нуклиды, обладающие одним и тем же атомным номером Z , называют...

- a) нуклидами;
- b) атомами;
- c) изотопами;
- d) изобарами.

6. В формуле Вайцзека для энергии связи в ядре первое слагаемое....

- a) отражает различную устойчивость ядер в зависимости от четности количества нуклонов;
- b) отражает стремление ядра к симметрии по количеству нейтронов и протонов;
- c) отражает кулоновское взаимодействие между протонами;
- d) отражает насыщение ядерных сил, нуклоны с ядерными силами взаимодействуют только со своим первым окружением, а не со всеми остальными нуклонами.

7. В формуле Вайцзека для энергии связи в ядре третье слагаемое....

- a) отражает различную устойчивость ядер в зависимости от четности количества нуклонов;
- b) является аналогом поверхностной энергии жидкости;
- c) отражает кулоновское взаимодействие между протонами;
- d) отражает стремление ядра к симметрии по количеству нейтронов и протонов.

8. В формуле Вайцзека для энергии связи в ядре четвертое слагаемое....

- a) отражает стремление ядра к симметрии по количеству нейтронов и протонов;
- b) является аналогом поверхностной энергии жидкости;
- c) отражает кулоновское взаимодействие между протонами;
- d) отражает насыщение ядерных сил, нуклоны с ядерными силами взаимодействуют только со своим первым окружением, а не со всеми остальными нуклонами.

9. В формуле Вайцзека для энергии связи в ядре пятое слагаемое....

- a) отражает стремление ядра к симметрии по количеству нейтронов и протонов;
- b) отражает различную устойчивость ядер в зависимости от четности количества нуклонов;
- c) является аналогом поверхностной энергии жидкости;
- d) отражает насыщение ядерных сил, нуклоны с ядерными силами взаимодействуют только со своим первым окружением, а не со всеми остальными нуклонами.

10. Оболочечная модель – это ...

- a) одночастная модель ядра.
- b) планетарная модель атома.
- c) коллективная модель ядра.
- d) гидродинамическая модель ядра.

Энергия связи

Дефект массы (полная энергия ядра меньше полной энергии отдельных нуклонов его составляющих)

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}},$$

энергия связи

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2,$$

удельная энергия связи

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

При расчетах, учитывать, что

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,494 \frac{\text{МэВ}}{c^2},$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$c^2 = 931,494 \frac{\text{МэВ}}{\text{а. е. м.}},$$

$$1\text{МэВ} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{Дж},$$

$$m_p = 1836,2m_e = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 1,00728 \text{ а. е. м.} = 938,3\text{МэВ},$$

$$m_n = 1838,7m_e = 1,00867 \text{ а. е. м.} = 939,6\text{МэВ},$$

$$m_e = 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{кг} = 0,000549 \text{ а. е. м.} = 0,511\text{МэВ}.$$

Учитывая выше сказанное, если масса ядра известна, энергию связи ядра можно рассчитать по формуле

$$E_{\text{св}} = c^2(Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}}),$$

если масса ядра неизвестна по формуле

$$E_{\text{св}} = c^2(Zm_{1H} + Nm_n - m_a).$$

Другой подход к расчету энергии связи, это использование Формулы Вайзеккера

$$E_{\text{св}} = -\alpha_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + \alpha_3 Z^2 a^{-\frac{1}{3}} + \frac{a_4 (A - 2Z)^2}{A^2} + a_5 A^{-\frac{3}{4}} \delta(Z, N),$$

$$\delta(Z, N) = \begin{cases} +1, & \text{Н - Н,} \\ 0, & \text{Ч - Н,} \\ -1, & \text{Ч - Ч,} \end{cases}$$

обозначения: Н – нечетное количество нуклонов в ядре, Ч – четное количество нуклонов в ядре.

В этом случае удельная энергия связи

$$\varepsilon = -\alpha_1 + a_2 A^{-\frac{1}{3}} + \alpha_3 Z^2 a^{-\frac{4}{3}} + \frac{a_4 (A - 2Z)^2}{A^2} + a_5 A^{-\frac{7}{4}} \delta(Z, N).$$

Значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_1 &= 15,75\text{МэВ}, & a_2 &= 17,80\text{МэВ}, \\ a_3 &= 0,71\text{МэВ}, & a_4 &= 23,70\text{МэВ}, \\ a_5 &= 34,00\text{МэВ}. \end{aligned}$$

Задание 2. В таблице 10.5 представлена относительная атомная масса некоторых изотопов в атомных единицах массы. Определить массу ядер для приведенных изотопов.

Замечание. Для определения массы ядра изотопа необходимо из относительной атомной массы вычесть суммарную массу электронов.

В [ПРИЛОЖЕНИИ](#) приведена периодическая система химических элементов Д.И. Менделеева.

Таблица 10.5

Изотоп	Масса нейтрального атома, а.е.м	Изотоп	Масса нейтрального атома, а.е.м
${}^1_1\text{H}$ (водород)	1,00783	${}^{10}_5\text{B}$ (бор)	10,01294
${}^2_1\text{H}$ (дейтерий)	2,01410	${}^{11}_5\text{B}$ (бор)	11,00931
${}^3_1\text{H}$ (тритий)	3,0160513	${}^{12}_6\text{C}$ (углерод)	12,00000
${}^3_2\text{He}$ (гелий)	3,01602	${}^{14}_7\text{N}$ (азот)	14,00307
${}^4_2\text{He}$ (гелий)	4,00260	${}^{15}_7\text{N}$ (азот)	15,00011
${}^6_3\text{Li}$ (литий)	6,01513	${}^{16}_8\text{O}$ (кислород)	15,99491
${}^7_3\text{Li}$ (литий)	7,01601	${}^{17}_8\text{O}$ (кислород)	16,99913
${}^8_4\text{Be}$ (бериллий)	8,00531	${}^{27}_{13}\text{Al}$ (алюминий)	26,98146

Задание 3. Вычислить энергию связи $E_{\text{св}}$ и удельную энергию связи ε для изотопов ${}^3_1\text{H}$, ${}^3_2\text{H}$, ${}^4_2\text{H}$, ${}^7_3\text{Li}$, ${}^8_4\text{Be}$. Результаты занести в таблицу 10.6.

Таблица 10.6

Изотоп	${}^3_1\text{H}$	${}^3_2\text{H}$	${}^4_2\text{H}$	${}^7_3\text{Li}$	${}^8_4\text{Be}$
<i>Дефект массы</i>					
$E_{\text{св}}, \text{МэВ}$					
$\varepsilon, \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$					
<i>Формула Вайцзекера</i>					
$E_{\text{св}}, \text{МэВ}$					
$\varepsilon, \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$					

Задание 4. Определить удельную энергию связи ε (в МэВ), приходящуюся на один нуклон, для ядер

$${}^{11}_5\text{B}, {}^{20}_{10}\text{Ne}, {}^{28}_{14}\text{Si}, {}^{56}_{26}\text{Fe}, {}^{68}_{30}\text{Zn}, {}^{136}_{56}\text{Ba}, {}^{207}_{82}\text{Pb}, {}^{235}_{92}\text{U}.$$

Использовать формулы

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2,$$

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

Массы ядер принять равными

$$\begin{aligned} m(^{11}_5B) &= 11,0093 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{20}_{10}Ne) &= 19,99244 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{28}_{14}Si) &= 27,9769 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{56}_{26}Fe) &= 55,9349 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{68}_{30}Zn) &= 67,9248 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{137}_{56}Ba) &= 136,9058 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{207}_{82}Pb) &= 206,9759 \text{ а. е. м.}, \\ m(^{235}_{92}U) &= 235,04393 \text{ а. е. м.} \end{aligned}$$

Задание 5. По результатам заданий 2 и 3 построить на миллиметровой бумаге график зависимости удельной энергии связи ядра от числа нуклонов в нем $\varepsilon(A)$. Проанализировать график.

Задание 6. Используя интерактивный калькулятор (http://cdfе.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html), рассчитать энергии связи ядер от 80-82 номера. Пример заполнения полей калькулятора представлен на рис. 10.7.

1. Энергии связи ядер

Каждое поле формы может быть пустым. [\[Помощь... \]](#)

Входные параметры	
Z:	40-60 Пример: 20, 40-60
N:	Пример: 20, 40-60
A:	Пример: 20, 40-60
Варианты расчета:	☒ Энергия связи ☒ Удельная энергия связи ☒ Разность энергий связи (Эксперимент - Вайцзеккер)
На оси абсцисс:	☐ Z ☐ N ☒ A
Вычислить Построить график Очистить	

Рис.10.7.

На рис. в блок «Входные параметры», в раздел Z введен диапазон значений "40-60", разделы N и A оставлены пустыми.

В разделе «Варианты расчета» выбран вариант "Энергия связи, "Удельная энергия связи. "Разность энергий связи (Эксперимент – Вайцзеккер).

В разделе «На оси абсцисс» - по умолчанию оставлен вариант "А".

Нажатие кнопки «Вычислить» позволяет рассчитать и получить в виде таблицы соответствующие числовые данные. Фрагмент соответствующей таблицы представлен на рис. 10.8.

Result - $E_{\text{св}}(A,Z)$, $\varepsilon(A,Z) = E_{\text{св}}(A,Z)/A$, $\delta(A,Z) = E_{\text{св}}(A,Z)_{\text{exp}} - E_{\text{св}}(A,Z)_{\text{theor}}$:

Elem	Z	N	A	$E_{\text{св}}$	ε	δ
Zr	40	38	78	639.9786	8.2049	2.2251
Zr	40	39	79	653.7501	8.2753	2.2715
Zr	40	40	80	669.9217	8.3740	2.7740
Zr	40	41	81	680.9832	8.4072	1.3080
Zr	40	42	82	694.7547	8.4726	0.6107
Zr	40	43	83	705.0963	8.4951	-0.4647
Zr	40	44	84	718.1978	8.5500	-0.7167
Zr	40	45	85	727.9293	8.5639	-1.3705
Zr	40	46	86	740.6509	8.6122	-0.9643
Zr	40	47	87	750.2704	8.6238	-0.7701
Zr	40	48	88	762.6169	8.6661	0.2293
Zr	40	49	89	771.9334	8.6734	1.0152
Zr	40	50	90	783.9043	8.7100	2.5432
Zr	40	51	91	791.0985	8.6934	2.0420
Zr	40	52	92	799.7339	8.6928	1.0803
Zr	40	53	93	806.4686	8.6717	0.9003
Zr	40	54	94	814.6891	8.6669	0.3161
Zr	40	55	95	821.1516	8.6437	0.5950
Zr	40	56	96	829.0082	8.6355	0.3900
Zr	40	57	97	834.5847	8.6040	0.4681
Zr	40	58	98	840.9952	8.5816	-0.4848
Zr	40	59	99	845.5487	8.5409	-0.7865
Zr	40	60	100	852.4523	8.5245	-0.5897
Zr	40	61	101	857.3838	8.4889	0.0911
Zr	40	62	102	863.7353	8.4680	0.3541
Zr	40	63	103	868.4369	8.4314	1.3737
Zr	40	64	104	874.4384	8.4081	1.8696
Zr	40	65	105	878.6099	8.3677	2.8951
Zr	40	66	106	883.9815	8.3394	3.3112
Zr	40	67	107	887.5530	8.2949	4.2420
Zr	40	68	108	892.6245	8.2650	4.8778
Zr	40	69	109	895.7960	8.2183	5.8857
Zr	40	70	110	900.4676	8.1861	6.6133

Рис. 10.8.

Глава 11. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Основные свойства ядерных сил](#)
- [Мезонная теория ядерных сил](#)
- [Полевая теория ядерных сил](#)
- [Материалы для практической работы](#)

11.1. Основные свойства ядерных сил

Нуклоны в ядре удерживаются специфическими ядерными силами, которые являются проявлением сильного взаимодействия, полностью завершённой теории, которого пока не создано. Прежде чем рассмотреть существующие модели, объясняющие сильные взаимо-

действия, рассмотрим некоторые свойства ядерных сил, которые можно извлечь из эксперимента. Ядерные силы применяются в трех группах процессов:

Парное взаимодействие двух свободных нуклонов. Например, в дейтроне или при нуклон-нуклонном рассеянии.

Рассеяние нуклонов на составных ядрах.

Взаимодействие нуклонов внутри ядра, обуславливающих его существование.

Для ядерных сил принимается двух частичное приближение, в котором пара нуклонов взаимодействует независимо от того какие нуклоны их окружают (своеобразный принцип суперпозиции взаимодействия нуклонов).

Ядерные силы интенсивны, они на 2-3 порядка мощнее электромагнитных. Средняя энергия связи нуклонов в ядре составляет порядка 1% от массы покоя нуклонов. Для сравнения: в атоме энергия связи электрона с ядром порядка 10^{-5} от массы покоя электрона.

Ядерные силы короткодействующие, они имеют конечный радиус действия порядка 10^{-15} м = 1 фм (10^{-15} – фемто).

На малых расстояниях притяжение между нуклонами сменяется отталкиванием (рис. 11.1).

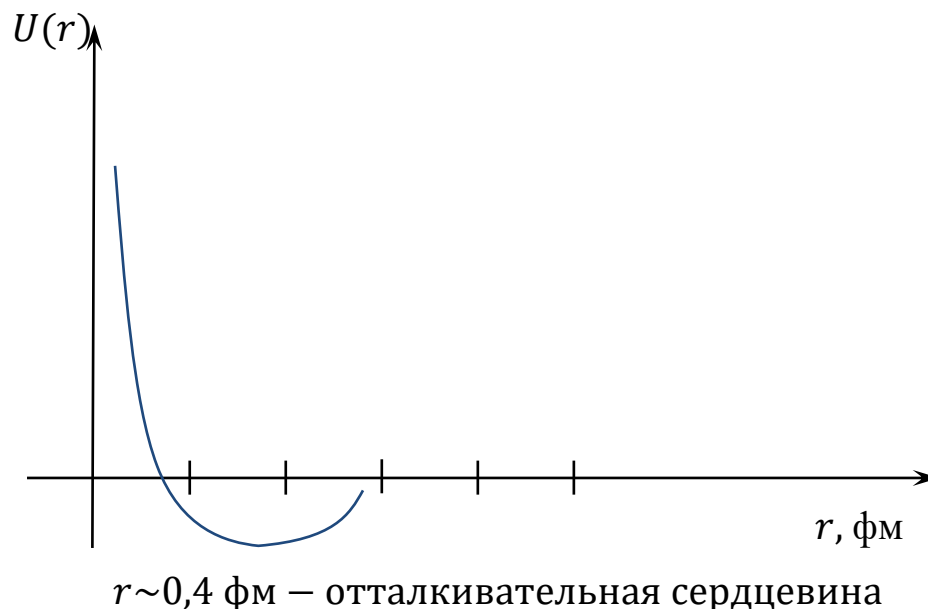


Рис. 11.1.

Ядерные силы не являются центральными, их величина зависит от ориентации спинов нуклонов.

Зарядовая независимость проявляется в равенстве ядерных сил, действующих между двумя протонами, двумя нейтронами или протоном и нейтроном.

Ядерные силы обладают свойством насыщения. Т.е. в ядре каждый нуклон существенно взаимодействует лишь с ограниченным числом соседних нуклонов, а не со всеми нуклонами. Этим, в частности, объясняется независимость плотности ядра от массового числа A . Если бы каждый нуклон взаимодействовал с каждым, то число таких взаимодействий было бы

$$\frac{A(A - 1)}{2}.$$

Поэтому энергия связи была бы пропорциональна A^2 , однако из экспериментов энергия связи пропорциональна A .

11.2. Мезонная теория ядерных сил

Явление насыщения ядерных сил проще всего объяснить обменным взаимодействием нуклонов, по аналогии с взаимодействием атомов — ковалентная связь объясняется обобществлением валентных электронов.

Другими словами, атомы обмениваются электронами, что и объясняет само взаимодействие. Но химических связей у атома не может быть сколь угодно много, например, у углерода их не может быть больше четырех.

Иначе говоря, когда все 4 валентных электрона задействованы, в образовании химических связей наступает насыщение. Однако объяснить взаимодействие нуклонов обменом электронов в первую очередь из-за отрицательного заряда электрона, во вторую из-за того, что массы электрона не хватает для этого обменного взаимодействия.

В 1935 году японский физик Юкава предложил модель, которая позволила определить характеристики частиц, которые могут участвовать в обменном взаимодействии нуклонов.

Если нуклон испускает какую-то частицу, то он теряет энергию ΔE , которую можно рассматривать как неопределенность в определе-

нии его энергии. Но для энергии и времени справедливо соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Для расчетов будем считать, что

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar,$$

т.е. если нуклон существует в данном состоянии в промежутке времени Δt , то его энергия имеет разброс

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Пусть промежуточная частица, которая осуществляет обменное взаимодействие, имеет массу m , тогда при ее испускании нуклон теряет энергию

$$\Delta E = mc^2.$$

Пусть эта частица движется со скоростью близкой к скорости света, тогда, *учитывая время движения от одного нуклона до другого*

$$\Delta t \approx \frac{r_0}{c}$$

и радиус действия ядерных сил

$$r_0 \sim 1 \div 2 \text{ фм},$$

имеем

$$\begin{cases} \Delta E \Delta t = \hbar, \\ \Delta E = mc^2, \\ \Delta t = \frac{r_0}{c}. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\Delta E \frac{r_0}{c} = \hbar,$$

$$\Delta E = \frac{\hbar c}{r_0},$$

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{r_0},$$

$$m = \frac{\hbar}{cr_0}.$$

Подставляя $\hbar$, c , r_0 , найдем, что масса будет порядка

$$m = 200 \div 300 m_e.$$

Таким образом, гипотетическая частица, переброс которой обуславливает ядерные силы, должна быть меньше протонов (в 10 раз) и

хотя бы в 200 раз больше электрона, поэтому эти частицы называли *мезонами* (мезос – средний).

Из зарядовых свойств можно сделать вывод, что должны быть *три типа мезонов*: положительный, отрицательный и нейтральный.

В 1947 в космических лучах была обнаружена частица с массой порядка $270 m_e$, которая была похожа на мезон предложенный Юкавой. Его называли *π -мезон* (пи-мезон), сейчас его чаще называю *пионом*.

Пионы существуют трех видов

$$\pi^+, \quad \pi^0, \quad \pi^-,$$

они обладают изоспином $T = 1$, проекция которого T_3 соответственно принимает значения $+1, 0, -1$. Пионы π^+ и π^- являются по отношению друг к другу античастицами. Спин всех пионов равен 0.

Массы пионов

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139,57 \text{ МэВ} \approx 273 m_e, \\ m_{\pi^0} = 134,97 \text{ МэВ} \approx 264 m_e.$$

Пионы не стабильны и обладают средним временем жизни

$$\tau_{\pi^+} = \tau_{\pi^-} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}, \quad \tau_{\pi^0} = 0,8 \cdot 10^{-16} \text{ с}.$$

Суть мезонной теории ядерных сил состоит в следующем. Два нуклона находясь на малом расстоянии

$$r < \frac{\hbar}{m_{\pi}c}$$

обмениваются виртуальными пионами, что и объясняет ядерное взаимодействие.

При этом возможно четыре типа обмена:

$$p \rightleftharpoons p + \pi^0; \\ n \rightleftharpoons n + \pi^0; \\ p \rightleftharpoons n + \pi^+; \\ n \rightleftharpoons p + \pi^-.$$

Отдельный нуклон (уединенный) испускает и поглощает пионы, создавая вокруг себя *пионное облако*, с которым он как бы находится в динамическом равновесии. При сближении нуклонов на малые расстояния пионные облака перекрываются, и возникает обменное взаимодействие. Здесь можно проследить аналогию с образованием химической связи атомов, у которых ядро окружено электронным облаком (орбиталями электронов). При перекрывании атомных орбиталей воз-

никает связывающая молекулярная орбиталь, которая и объясняет возникновение химической связи.

11.3. Полевая теория ядерных сил

Другой подход объяснения обменного взаимодействия нуклонов заключается в том, что нуклон окружен пионным полем сильного взаимодействия. Попадая в него, другие нуклоны обобществляют свое пионное поле, образуя с исходным пионным полем единую систему.

В квантовой механике свободная, нерелятивистская частица описывается уравнением Шредингера, к которому можно прийти следующим рассуждением.

Энергия свободной частицы в классической механике

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

из принципа соответствия имеем

$$\begin{aligned}\hat{E}\Psi &= \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi, \\ \hat{E} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}.\end{aligned}$$

Получаем нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \Delta \Psi(\vec{r}, t).$$

Так как пионы движутся со скоростями близкими к скорости света, для них следует учитывать релятивистский характер движения. Чтобы получить релятивистский аналог уравнения Шредингера, воспользуемся релятивистским соотношением, а функцию состояния обозначим φ

$$\begin{aligned}E^2 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\hbar^2 c^2 \Delta \varphi + m_0^2 c^4 \varphi = 0.\end{aligned}$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$\partial \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k^2 \varphi = 0, \quad k = \frac{m_0 c}{\hbar}.$$

Учитывая, что оператор Лапласа

$$\Delta - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square,$$

где $\square$ – оператор Даламбера. Тогда уравнение Клейна-Гордона будет иметь вид

$$\square\varphi - k^2\varphi = 0.$$

В частном случае, без массовых частиц, для которых $m = 0$, получается уравнение

$$\square\varphi = 0,$$

которое совпадает с уравнением электромагнитного поля, свободного от зарядов.

Таким образом, уравнение Клейна-Гордона можно рассмотреть, как уравнение поля частиц, обладающих массой покоя m_0 в области пространства, не содержащей самих частиц. Но можно ввести в это уравнение источник поля – нуклоны, и тем самым обобщить уравнение Клейна-Гордона

$$\square\varphi - k^2\varphi = -4\pi\rho,$$

где $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ – плотность распределения ядерного заряда, который несут нуклоны.

В статическом случае, когда $\varphi = \varphi(\vec{r})$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поэтому оператор Даламбера превратиться в оператор Лапласа

$$\square\varphi = \Delta\varphi,$$

и тогда обобщенное уравнение Клейна-Гордона даст *уравнение Юкавы*

$$\Delta\varphi(\vec{r}) - k^2\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Решением этого уравнения, когда нуклон расположен в начале координат будет функция – ядерный потенциал

$$\varphi(r) = f \frac{e^{-kr}}{r},$$

где f – ядерный заряд нуклона.

Этот ядерный потенциал φ – аналог электростатического потенциала, его называют потенциалом Юкавы. Радиус ядерного взаимодействия оценивают

$$r_0 = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{m_0 c},$$

$$m_0 = \frac{\hbar}{r_0 c},$$

что мы получили раньше при оценке массы π – мезонов.

Материалы для практической работы

Задание. Ответьте на вопросы теста.

1. Какое взаимодействие удерживает нуклоны в ядре?
 - a) Электромагнитное взаимодействие.
 - b) Гравитационное взаимодействие.
 - c) Сильное взаимодействие.
 - d) Слабое взаимодействие.
2. Какова средняя энергия связи нуклонов в ядре по сравнению с их массой покоя?
 - a) 1%.
 - b) 10%.
 - c) 50%.
 - d) 0,1%.
3. Какой радиус действия ядерных сил?
 - a) 1 мм.
 - b) 10 см.
 - c) 10^{-15} м.
 - d) 1 мкм.
4. Какие частицы отвечают за обменное взаимодействие между нуклонами в мезонной теории?
 - a) Электроны.
 - b) Фотоны.
 - c) Пионы.
 - d) Нейтрино.
5. Что проявляется при сближении нуклонов на малые расстояния?
 - a) Притяжение.
 - b) Отталкивание.
 - c) Нейтральное взаимодействие.
 - d) Отсутствие взаимодействия.
6. Какое свойство ядерных сил объясняет независимость плотности ядра от массового числа A ?
 - a) Парное взаимодействие.
 - b) Насыщение.
 - c) Зарядовая зависимость.
 - d) Короткодействие.

7. Какое утверждение верно для ядерных сил?
 - a) Они являются центральными.
 - b) Они зависят от ориентации спинов нуклонов.
 - c) Они равны для всех частиц.
 - d) Они зависят от температуры.
8. Что такое «потенциал Юкавы»?
 - a) Это аналог электростатического потенциала.
 - b) Это метод расчета массы электрона.
 - c) Это энергия связи в химии.
 - d) Это тип ядерного распада.
9. Почему энергии связи в ядре пропорциональна A , а не A^2 ?
 - a) Из-за смешивания нуклонов.
 - b) Из-за свойства насыщения ядерных сил.
 - c) Из-за зарядовой независимости нуклонов.
 - d) Поскольку нуклоны взаимодействуют со всеми соседями.
10. Каковы три типа пионов, обнаруженных в космических лучах?
 - a) Положительный, отрицательный и нейтральный.
 - b) Протон, электрон, нейтрон.
 - c) Позитрон, мюон, нейтрино.
 - d) Фотон, бозон, гравитон.

Глава 12. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

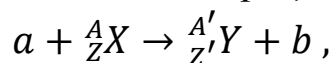
→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Общие сведения о ядерных реакциях](#)
- [Механизмы ядерных реакций](#)
- [Механизм спонтанного деления тяжелых ядер](#)
- [Деление ядер под действием нейтронов](#)
- [Материалы для практической работы](#)

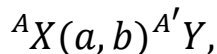
12.1. Общие сведения о ядерных реакциях

Ядерными реакциями называют процесс рассеивания вида:



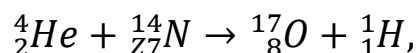
где X и Y – ядра, a и b – чаще элементарные частицы (нейтрон, протон, γ -частица) или легкие ядра (d – дейтерий, α -частицы), реже обычные ядра.

Кратко ядерную реакцию можно записать в виде

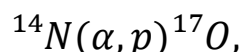


а тип реакции парой (a, b) .

Например, ядерная реакция осуществленная Резерфордом в 1919 году



кратко



соответственно тип реакции – (α, p) .

В этих обозначениях процесс



называется *упругим рассеиванием*.

Если



где $*$ обозначают возбужденное состояние ядра, называется *не упругим рассеиванием*.

Выражения (12.1) и (12.2) ядерными реакциями их обычно не называют.

Ядерные реакции происходят при условии выполнении законов сохранения (рис. 12.1).

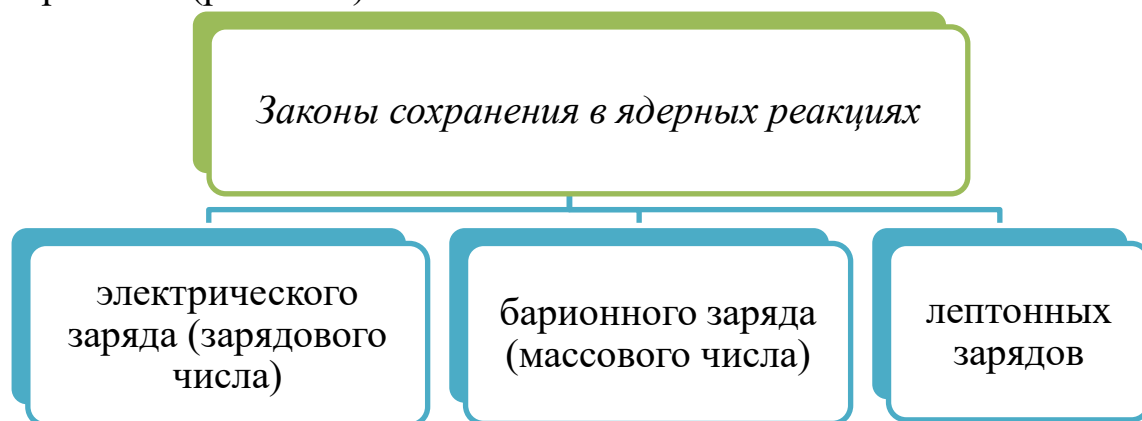


Рис. 12.1.

Кинематику ядерных реакций определяют законы сохранения
→ энергии;

- импульса;
- момента импульса.

В зависимости от выделения или поглощения тепла ядерные реакции делятся на два типа: экзотермические и эндотермические (рис. 12.2).

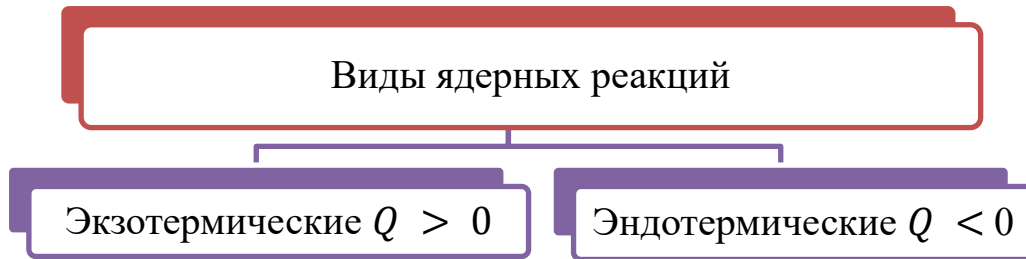


Рис. 12.2.

При бомбардировке ядер частицами, вероятность ядерной реакции определяется *сечением ядерной реакции*.

→ Если налетающая частица быстрая, то ее дебройлевская длина волны $\lambda \sim \frac{h}{p}$ мала и тогда сечение ядерной реакции определяется сечением ядра

$$\sigma \sim \pi R^2, \quad (\lambda \ll R).$$

→ Для медленных частиц сечение реакции определяется в первую очередь дебройлевской длиной волны налетающих частиц

$$\sigma \sim \pi \lambda^2, \quad (\lambda \gg R).$$

Если налетающая частица имеет положительный заряд Ze , то даже если она попадает в сечение ядерной реакции, ей необходимо преодолеть потенциальный барьер кулоновского взаимодействия

$$U_{\text{кул}} = k \frac{zZe^2}{R},$$

а так как

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = A \frac{4}{3}\pi r_0^3 \Rightarrow R = A^{\frac{1}{3}} r_0,$$

$$U_{\text{кул}} = k \frac{e^2}{r_0} \frac{zZ}{A^{1/3}} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,2 \cdot 10^{-15} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \frac{zZ}{A^{1/3}} = 1,2 \frac{zZ}{A^{1/3}} \text{ МэВ}.$$

✓ Если кинетическая энергия немного меньше кулоновского взаимодействия $T < U_{\text{кул}}$, возможен *туннельный эффект* и ядерная реакция все равно может произойти.

✓ Если $T \ll U_{\text{кул}}$, ядерная реакция практически не происходит.

Нейтроны не несут электрического заряда, поэтому вероятность таких ядерных реакций определяется только сечением ядерных реакций. А само сечение обратно пропорционально скорости частицы

$$\sigma \sim \frac{1}{v}.$$

Ядерные реакции классифицируют по различным основаниям (рис. 12.3).



Рис. 12.3.

12.2. Механизмы ядерных реакций

Механизмы прямых ядерных реакций

Существуют ядерные реакции, протекающие *при высоких энергиях* для которых характерны следующие две особенности:

1. Частица, вылетающая после реакции, движется почти в том же направлении, что и падающая частица.
2. Вылетающей частице передается почти вся энергия падающей частицы.

Объясняет такие особенности следующий механизм ядерной реакции. Налетающая частица с большой энергией взаимодействует не со всем ядром, а с его отдельным элементом (нуклоном, группой нуклонов) передавая ему энергию за малый промежуток времени

$$\tau_{\text{яд}} \sim 10^{-22} \text{ с.}$$

Такой механизм описывает

- ✓ реакции срыва (d, p) ; (d, n) , при которых дейтрон оставляет в ядре один нуклон
- ✓ реакции распада (p, d) ; (n, d) , при которой протон или нейтрон как бы подхватывает дополнительный нуклон из ядра.

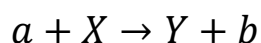
Механизм составного ядра

Другие реакции *протекают сравнительно медленно*

$$\tau \sim 10^{-12} \text{ с.}$$

Направление движения вылетающих частиц практически любое.

Эти реакции объясняют механизм, суть которого заключается в том, что ядерная реакция



протекает не прямо, а в два этапа



- ✓ На первом этапе частица быстро за время $\tau_{\text{яд}} \sim 10^{-22} \text{ с}$ захватывается ядром.

- ✓ Затем, так как получившееся ядро (его называют составным) оказывается возбужденным оно сравнительно через большое время $\tau_{\text{яд}} \sim 10^{-22} \text{ с}$ превращается в более энергетически выгодное ядро Y с испусканием частицы b .

Составное ядро как бы забывает о том, из-за чего оно появилось и его дальнейшее поведение становится независимым от самого захвата, поэтому вылетающая частица движется в произвольном направлении.

12.3. Механизм спонтанного деления тяжелых ядер

Деление тяжелого ядра – процесс его превращения в несколько (обычно – 2, реже – 3; 4) ядер сравнимых по массе.

Различают *спонтанное* (самопроизвольное) и *вынужденное* деление (которое обычно происходит под действием нейтронов).

Такой тип ядерных реакций обозначают

$$(n, f),$$

где f – (*fission*) – деление.

Процесс деления удастся описать с помощью капельного деления. А разрыв капель ядерной жидкости происходит под действием кулоновского отталкивания, при этом препятствуют ему силы поверхности натяжения.

Чаще всего начало деления провоцирует энергетическое воздействие на ядро, которое вызывает возникновение поверхностных колебаний способствующих разрыву капли.

Но для простоты будем считать, что энергия ядру не сообщается, кроме того будем считать, что ядро A_ZX делится на два равных осколка ${}^{A/2}_{Z/2}Y$.

Для того чтобы процесс деления был энергетически выгодным (энергетическим) необходимо, чтобы энергия деления:

$$Q_{\text{дел}} = (\varepsilon_{A/2} - \varepsilon_A), \quad A > 0,$$

где $\varepsilon_{A/2}$ – удельная энергия связи в осколке, ε_A – удельная энергия связи в исходном ядре.

Это условие справедливо для тяжелых ядер, для которых удельная энергия связи порядка 1 МэВ, меньше чем для средних ядер.

Воспользуемся для расчета энергии деления формулой Вайцзекера

$$Q_{\text{дел}} = E_X - 2E_Y,$$
$$E_X = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 Z^2 A^{-1/3}.$$

Четвертое слагаемое равно нулю, так как мы считаем, что $A = 2Z$, а пятое слагаемое равно нулю, так как ядро считаем четно нечетным

$$E_Y = \alpha_1 \frac{A}{2} - \alpha_2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} - \alpha_3 \left(\frac{Z}{2}\right)^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{-1/3}.$$

Тогда

$$Q_{\text{дел}} = \alpha_1 A - 2\alpha_1 \frac{A}{2} - \alpha_2 A^{2/3} + \alpha_2 \frac{2}{2^{2/3}} A^{2/3} - \\ - \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} + \alpha_3 \frac{2 \cdot 2^{1/3}}{4} Z^2 A^{-1/3} = \\ = (\sqrt[3]{2} - 1) \alpha_2 A^{2/3} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 \right) \alpha_3 Z^2 A^{-1/3}.$$

Процесс будет энергетически выгодным, если $Q_{\text{дел}} > 0$.

Найдем условие $Q_{\text{дел}} = 0$:

$$(\sqrt[3]{2} - 1) \alpha_2 A^{2/3} = \left(\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4}} \right) \alpha_3 Z^2 A^{-1/3}, \\ \frac{Z^2}{A} = \sqrt[3]{4} \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{4} - 1} \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

Подставляя $\alpha_2 = 17,8$ МэВ и $\alpha_3 = 0,71$ МэВ, получим

$$\frac{Z^2}{A} \approx 18.$$

Мы предположим, что $Z = \frac{A}{2}$, тогда $A_0 = 72$. Но для тяжелых ядер соотношение нейтронов и протонов несколько больше единицы, поэтому считают, что $A_0 \approx 100$.

В рамках капельной модели деление ядра можно представить как последовательное изменение формы капли от шара до двух меньших шаров (рис. 12.4).

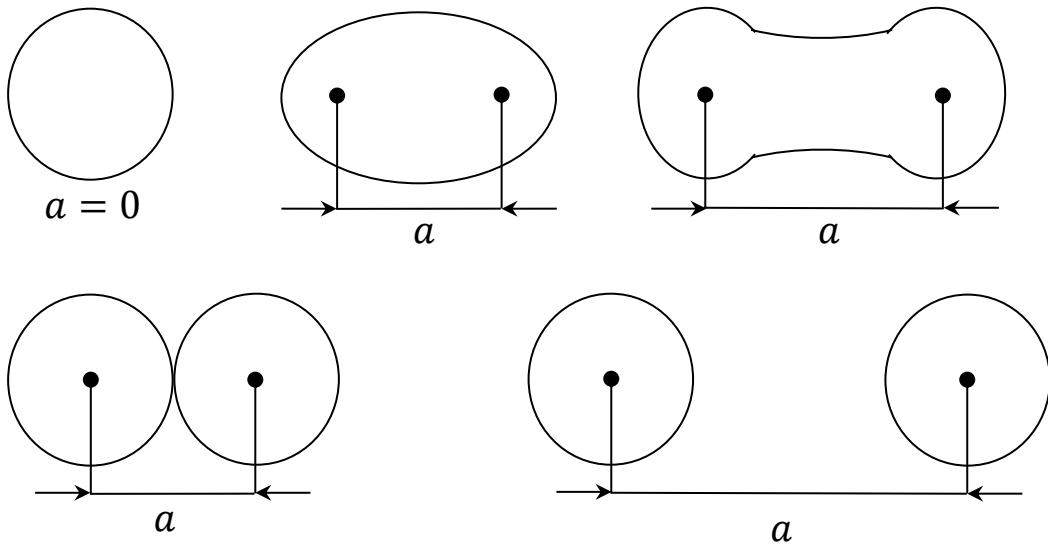


Рис. 12.4.

Зависимость энергии от a представлено на рис. 12.5.

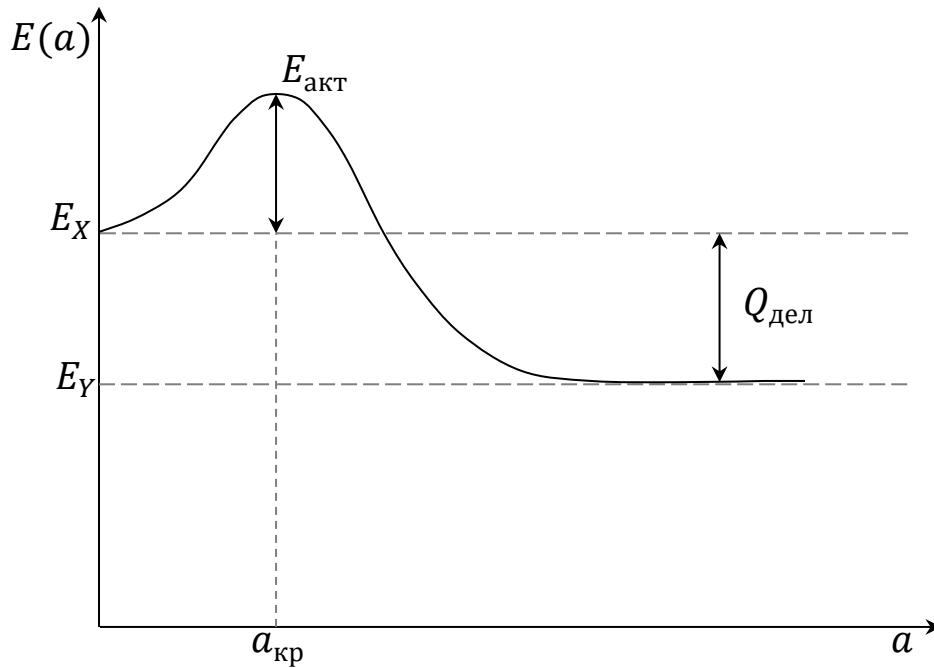


Рис. 12.5.

Чтобы ядро наверняка распалось нужно сообщить ему из вне энергию активации $E_{\text{акт}}$.

Ядро может и самопроизвольно распасться без энергии из вне за счет туннельного эффекта. Это спонтанное деление.

С ростом $\frac{Z^2}{A}$ энергия активации уменьшается и значит, спонтанность вероятного деления становится больше. При

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{кр}} \approx 50, \quad E_{\text{акт}} = 0$$

и ядро практически почти делится, это отношение называется критическим.

Например, $\frac{Z^2}{A} = 35$ (для урана ${}^{238}_{92}\text{U}$), но оно меньше $\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{кр}}$. Поэтому уран претерпевает спонтанное деление с огромным периодом полураспада

$$T_{1/2} = 0,8 \cdot 10^{16} \text{ лет.}$$

У синтезированного элемента ${}_{107}^{261}\text{Bh}$: $\frac{Z^2}{A} = 43,3$ – намного ближе к 50, поэтому его период полураспада

$$T_{1/2} = 10^{-3}\text{с.}$$

12.4. Деление ядер под действием нейтронов

Спонтанное деление ядер дает выделяющуюся энергию, но оно происходит с такой малой вероятностью, что для практического использования оно не годится.

С практической точки зрения важно вынужденное деление под действием нейтронов.

Выделяют различные виды нейтронов в зависимости от их энергии (рис. 12.6).

По энергии нейтроны
делятся на

- тепловые $0,025 \div 0,5$ эВ;
- резонансные $0,5$ эВ $\div 1$ кэВ;
- промежуточные $1 \div 100$ кэВ;
- быстрые 100 кэВ $\div 14$ МэВ.

Рис. 12.6.

После захвата ядром ${}_Z^AX$ нейтрона образуется составное ядро

$$C^* = {}_{Z}^{A+1}X,$$

которое через довольно большое время по ядерным меркам $\tau \approx 10^{-17}\text{с}$ делится на осколки. Деление произойдет если энергия возбуждения больше энергии активации

$$E_{\text{возб}} > E_{\text{акт}}.$$

Сама энергия возбуждения складывается из энергии связи нейтрона в ядре, совпадающей с удельной энергией связи и кинетической энергии нейтрона

$$E_{\text{возб}} = \varepsilon_{A+1} + E_n.$$

Значит, условие деления составного ядра C^* :

$$E_n > E_f = E_{\text{акт}} - \varepsilon_{A+1},$$

оно называется *эффективным порогом деления*.

Напомним, что энергия активации уменьшается с ростом $\frac{Z^2}{A}$ и становится равной нулю при $\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{кр}} \approx 50$.

Начиная с $A = 210$ энергия активации снижается на столько, что деления могут вызвать быстрые нейтроны, для некоторых ядер энергия активации меньше удельной $E_{\text{акт}} < \varepsilon_{A+1}$, а эффективный порог деления $E_f < 0$.

Такие ядра могут делиться нейтронами с любой энергией, в том числе тепловой.

К таким ядрам относятся изотопы урана ${}^{233}_{92}\text{U}$; ${}^{235}_{92}\text{U}$ и изотопы плутония ${}^{239}_{94}\text{Pu}$.

Сравним, почему уран ${}^{236}_{92}\text{U}$ обладает таким свойством, а уран ${}^{239}_{92}\text{U}$ нет.

1. Так как $\frac{Z^2}{A}$ для ${}^{236}_{92}\text{U}$ чуть больше чем для урана ${}^{239}_{92}\text{U}$

$$E_{\text{акт}} = \begin{cases} 6,5 \text{ МэВ для } {}^{236}_{92}\text{U}, \\ 7,1 \text{ МэВ для } {}^{239}_{92}\text{U}. \end{cases} \quad (12.3)$$

2. Так как ${}^{236}_{92}\text{U}$ является четно-четным ядром, а ${}^{239}_{92}\text{U}$ четно-нечетным

$$\varepsilon_{A+1} = \begin{cases} 6,8 \text{ МэВ для } {}^{236}_{92}\text{U}, \\ 5,5 \text{ МэВ для } {}^{239}_{92}\text{U}. \end{cases} \quad (12.4)$$

Из (2.4.3) и (2.4.2) следует

$$E_f = \begin{cases} -0,3 \text{ МэВ для } {}^{236}_{92}\text{U}, \\ 1,6 \text{ МэВ для } {}^{239}_{92}\text{U}. \end{cases}$$

Удельная энергия связи ${}^{235}_{92}\text{U} = 7,6 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$, а для осколков $8,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$. Таким образом, в одном акте деления, на один нуклон выделяется более 200 МэВ энергии.

Основная доля этой энергии высвобождается в виде кинетической энергии осколков, их обычно два и они примерно в полтора раза отличаются по массе. Это качественно объясняется тем, что *энергетически выгодно получить два осколка с числами нейтронов n — близкими к магическим числам 50 и 82.*

Так как для осколков равновесное отношение $\frac{N}{Z}$ существенно меньше, чем у тяжелого ядра, то в них возникает избыток нейтронов, которые практически сразу испускаются осколками. Этих мгновенных нейтронов обычно два – три.

После испускания нейтронов осколки оказываются в возбужденном состоянии и испускают в среднем около 8 γ -квантов.

Испускание осколками нейтронов зачастую не восстанавливает равновесное отношение $\frac{N}{Z}$, поэтому несколько позже происходит ряд β^- – распадов с вылетом электронных антинейтрино.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Процесс вида $a + {}^A_ZX \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + b$, где X и Y – ядра, a и b – элементарные частицы или легкие ядра, называют...

- a) упругим рассеянием;
- b) неупругим рассеянием;
- c) ядерными реакциями;
- d) распадом ядер.

2. Ядерные реакции с выделением некоторого количества теплоты называют...

- a) эндотермическими реакциями;
- b) экзотермическими реакциями;
- c) термоядерными реакциями;
- d) реакциями распада.

3. Кулоновское возбуждение, процесс деления ядер, ядерный синтез – это классы реакций

- a) по типу налетающей частицы;
- b) по характеру превращения;
- c) по ядрам мишеней;
- d) по энергиям налетающих частиц.

4. Тип ядерных реакций который обозначают (n, f) .

- a) Реакция срыва.
- b) Реакция распада.
- c) Спонтанное деление тяжелых ядер.
- d) Деление ядер под действием нейтронов.

5. Нейтроны с энергией от 100 кэВ до 14 МэВ называют...

- a) тепловыми;
 - b) резонансными;
 - c) промежуточными;
 - d) быстрыми.
6. Нейтроны с энергией от 0,5 эВ до 1 кэВ называют...
- a) тепловыми;
 - b) резонансными;
 - c) промежуточными;
 - d) быстрыми.
7. Нейтроны с энергией от 0,025 эВ до 0,5 эВ называют...
- a) тепловыми;
 - b) резонансными;
 - c) промежуточными;
 - d) быстрыми.
8. Реакции срыва – это реакции при которых
- a) протон или нейтрон как бы подхватывает дополнительный нуклон из ядра;
 - b) протон или нейтрон оставляет в ядре один нуклон;
 - c) дейтрон оставляет в ядре два нуклона;
 - d) дейтрон оставляет в ядре один нуклон.
9. Сравнительно медленные реакции, протекающие в два этапа.
- a) Реакции срыва.
 - b) Реакции распада.
 - c) Реакции составного ядра.
 - d) Спонтанное деление тяжелых ядер.
10. Классические, фотоядерные, К-захват, Захват тяжелых ионов, реакции с участием нейтрино, пионов, мюонов, античастиц – это классы реакций
- a) по типу налетающей частицы;
 - b) по характеру превращения;
 - c) по ядрам мишеней;
 - d) по энергиям налетающих частиц.

Энергетический выход ядерной реакции

Обычно при расчете энергии выхода сначала рассчитывают (рис. 12.7)

$$\Delta m = m_{\text{пр}} - m_{\text{я}}.$$

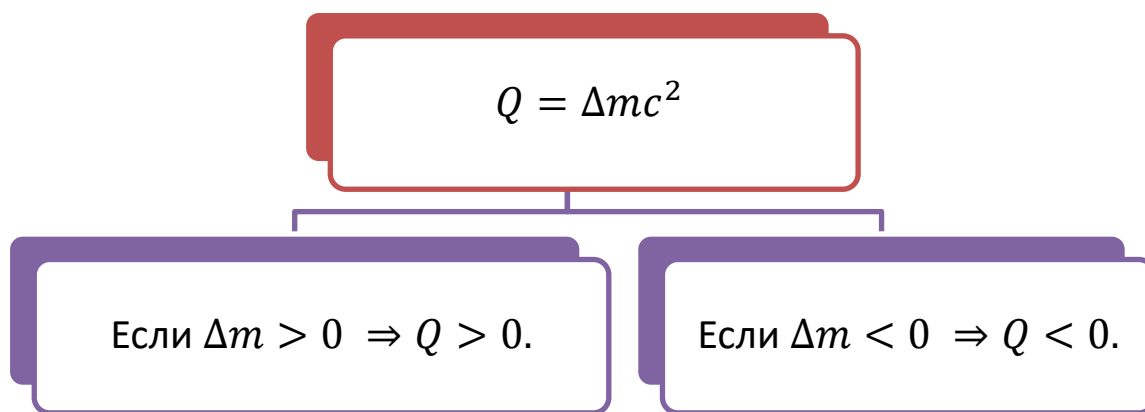


Рис. 12.7.

На практике Δm считают в атомных единицах массы (а.е.м.), затем умножают на $c^2 = 931,44 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$.

Задание 2. Определить изотоп, обозначенный в ядерных реакциях символом X .

- 1) ${}_{13}^{27}\text{Al}(n, \alpha)X$;
- 2) ${}_{9}^{19}\text{Fe}(p, X){}_{8}^{16}\text{O}$;
- 3) ${}_{13}^{27}\text{Al}(\alpha, p)X$;
- 4) $X(p, \alpha){}_{11}^{22}\text{Na}$.

Расчет энергетического выхода с использованием энергетических диаграмм

Задание 3. Рассчитать энергетический выход ядерных реакций

- 1) ${}_1^1\text{H} + {}_3^7\text{Li} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_2^4\text{He}$;
- 2) ${}_0^1\text{n} + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{56}^{142}\text{Ba} + {}_{36}^{91}\text{Kr} + 3{}_0^1\text{n}$;
- 3) ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_0^1\text{n}$;
- 4) ${}_1^1\text{H} + {}_6^{12}\text{C} \rightarrow {}_7^{13}\text{N} + \gamma$;
- 5) ${}_7^{13}\text{N} \rightarrow {}_6^{13}\text{C} + {}_1^0\text{e} + \nu$;
- 6) ${}_4^9\text{Be} + {}_1^2\text{H} \rightarrow {}_4^{10}\text{B} + {}_0^1\text{n}$;
- 7) ${}_3^7\text{Li} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_5^{10}\text{B} + {}_0^1\text{n}$;
- 8) ${}_3^7\text{Li} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_4^7\text{B} + {}_0^1\text{n}$;
- 9) ${}_{20}^{44}\text{Ca} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_{19}^{41}\text{K} + {}_2^4\text{He}$;
- 10) ${}^3\text{H}(p, \gamma) {}^4\text{He}$;
- 11) ${}^2\text{H}(d, \gamma) {}^4\text{He}$;
- 12) ${}^2\text{H}(n, \gamma) {}^3\text{H}$.

Решение (1).

Рассчитаем удельную энергию связи для входящих в реакцию ядер изотопов.

Для протона H_1^1

$$\Delta m = Z_{m_p} + N_{m_n} - m_{\text{я}},$$

$$\Delta m = 1 \cdot m_p + 0 \cdot m_n - m_p = 0,$$

$$\varepsilon_{H_1^1} = 0.$$

Для ядра изотопа лития ${}^7_3\text{Li}$

$$\varepsilon_{{}^7_3\text{Li}} = -5,61 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}.$$

Для ядра изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$

$$\varepsilon_{{}^4_2\text{He}} = -7,08 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}.$$

Замечание. Удельная энергия связи для ядер некоторых изотопов была рассчитана в разделе 2.3.

Построим энергетическую диаграмму (рис. 12.8). Энергетические уровни в диаграмме размещаются в соответствии с удельной энергией связи, участвующих в реакции ядер.

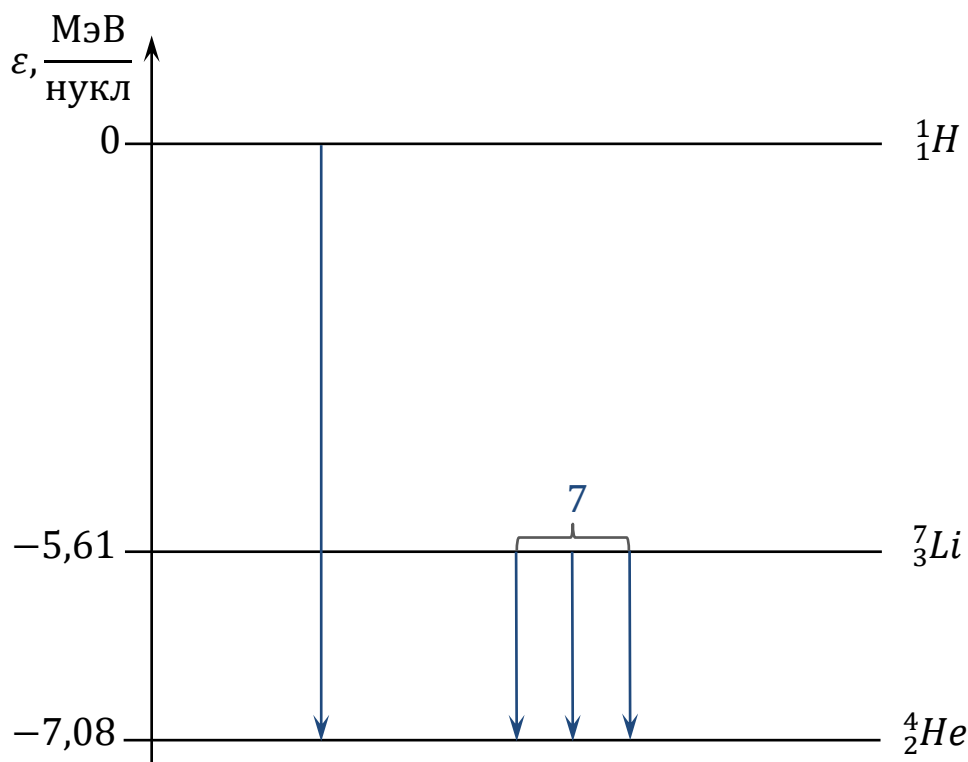


Рис. 12.8.

Рассчитаем энергетический выход реакции

$$\Delta E = (0 + 7,08) + 7(-5,61 + 7,08) = 17,37 \text{ МэВ.}$$

Задание 4. Используя интерактивный калькулятор (http://cdfе.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html#4), определить пороги и энергию для реакции $^{12}\text{C}(\gamma, p)^{11}\text{B}$ и $^7\text{Li}(p, n)^6\text{He}$.

На рис. 12.9 приведен пример заполнения поисковой формы калькулятора – «4. Пороги и энергии реакций» для определения значения порога энергии для ядерной реакции.

4. Пороги и энергии реакций

Каждое поле формы может быть пустым [[Помощь...](#)]

Входные параметры:	Z:	A:	Число частиц
Ядро-мишень:	7	14	1
Налетающая частица:	4He (для ввода ионов >>) »»		
Вылетающая частица 1:	1	1	1
Вылетающая частица 2: (если больше частиц >>) »»			0
Ядро-продукт реакции:	8	17	1

Рис. 12.9.

В качестве примера рассмотрена реакция $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{13}\text{C}$. Для формирования запросного предписания осуществлено следующее.

→ Ядро-мишень – это ^{14}N , выбраны значения для азота $Z = 7$, $A = 14$;

→ Налетающая частица – α – это ^4He , в выпадающем меню выбран 4He

→ Вылетающие частицы: вылетающая частица 1 – это протон p , выбраны значения $Z = 1$, $A = 1$, Число частиц – 1; при необходимости может быть выбрана вылетающая частица 2, а также – большее число (до 6) частиц (следует использовать специальную кнопку

«>>», (повторное нажатие кнопки приводит к возврату в исходную форму с двумя вылетающими частицами).

→ Ядро-продукт реакции – это ^{17}O , значения $Z = 8 = (7 + 2 - 1)$, $A = 17 = (14 + 4 - 1)$ – определяются программой.

→ После заполнения полей, нажать кнопку «Вычислить».

Пример результатов расчета представлен на рис. 12.10.

Калькулятор энергий реакций				
Входные параметры:	Символ:	Z:	A:	Масса, u:
• Ядро-мишень:	N	7	14	0
• Налетающая частица:	альфа-частица	2	4	0
• Вылетающая частица 1:	H	1	1	0
• Ядро-продукт реакции:	O	8	17	16.999131703

Результаты расчета:

Порог реакции: 1.53254 МэВ

Энергия реакции: -1.19182 (11) МэВ

Рис. 12.10.

Задание 5. Используя интерактивный калькулятор (http://cdfе.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html#5), определить энергию реакции спонтанного деления ядра

1) ^{234}Th с образованием осколка ^{142}Te и вылетом одного нейтрона;

2) ^{244}Pu с образованием осколка ^{152}Ba и вылетом одного нейтрона.

На рис. 12.11 приведен пример заполнения поисковой формы калькулятора для спонтанного деления ядра ^{235}U с образованием осколка ^{95}Sr и вылетом нейтрона.

5. Деление ядер

Каждое поле формы может быть пустым

[[Помощь...](#)]

Входные параметры:	Z:	A:	Число частиц
Ядро-мишень:	92	235	1
Налетающая частица:	Нет налетающих частиц ▾ (для ввода нонов >>) >>		
Выбираемый (пользователем) осколок:	38	95	1
Определяемый (программой) осколок:	54	139	1
Мгновенная частица 1, сопровождающая деление:	0	1	1
Мгновенная частица 2, сопровождающая деление: (если больше частиц >>) >>			0
Вычислить Очистить			

Рис. 12.11.

Для формирования запросного предписания осуществлено следующее.

- Ядро-мишень - ^{235}U , выбраны значения $Z = 92$, $A = 235$.
 - Налетающая частица – налетающих частиц нет – спонтанное деление. В выпадающем меню выбрано «Нет налетающих частиц».
 - Выбираемый (пользователем) осколок – ядро-осколок, выбранный нами в качестве примера ^{95}Sr , введены значения $Z = 38$, $A = 95$.
 - Определяемый (программой) осколок – заполняется автоматически $Z = 92 - 38 = 54$, $A = 235 - 95 = 140$, это ядро-осколок ^{140}Xe .
 - Мгновенная частица 1, сопровождающая деление – нейтрон n , выбраны значения $Z = 0$, $A = 1$, Число частиц – 1; при этом меняются характеристики определяемого программой осколка - $Z = 54$, $A = 140 - 1 = 139$, получили ^{139}Xe .
 - Для выполнения запроса нажать кнопку «Вычислить».
- Результат выполнения запроса представлен на рис. 12.12.

Калькулятор энергий реакций деления ядер				
Входные параметры:	Символ:	Z:	A:	Масса, u:
• Ядро-мишень:	U	92	235	235.0439299
• Выбираемый (пользователем) осколок:	Sr	38	95	94.919358766
• Определяемый (программой) осколок:	Xe	54	139	138.918792
• Мгновенная частица 1, сопровождающая деление:	n	0	1	0
Результаты расчета:				
Энергия реакции: 183.609 (22) МэВ				

Рис. 12.12.

Глава 13. РАДИОАКТИВНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

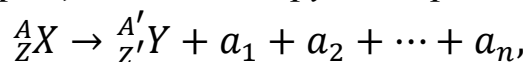
→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Типы радиоактивности](#)
- [α-распад](#)
- [β-превращение](#)
- [γ-излучение](#)
- [Закон радиоактивного распада](#)
- [Радиоактивные ряды и трансурановые элементы](#)
- [Материалы для практической работы](#)

13.1. Типы радиоактивности

Радиоактивность – стабилизированный процесс спонтанного распада ядра с превращением его в другое ядро и частицы,



где X – материнское ядро, Y – дочернее ядро, a_i – остальные частицы.

Если A' сравнимо с массой частиц, то Y дочерним ядром НЕ называют. На практике обычно $n = 1; 2$, то есть *радиоактивные процессы двух частные или трех частные*.

Раньше радиоактивность делили на естественную и искусственную, но постепенно от этих терминов отказались, так как ни какой принципиальной разницы между ними нет.

Радиоактивность по-другому называют радиоактивным распадом. Спонтанный (самопроизвольный) распад возможен только если

$$m_X > m_Y + \sum_n a_n.$$

То есть если он происходит с выделением энергии

$$Q = \left(m_X - m_Y - \sum_n a_n \right) c^2.$$

Способы образования нестабильных ядер представлены на рис. 13.1.

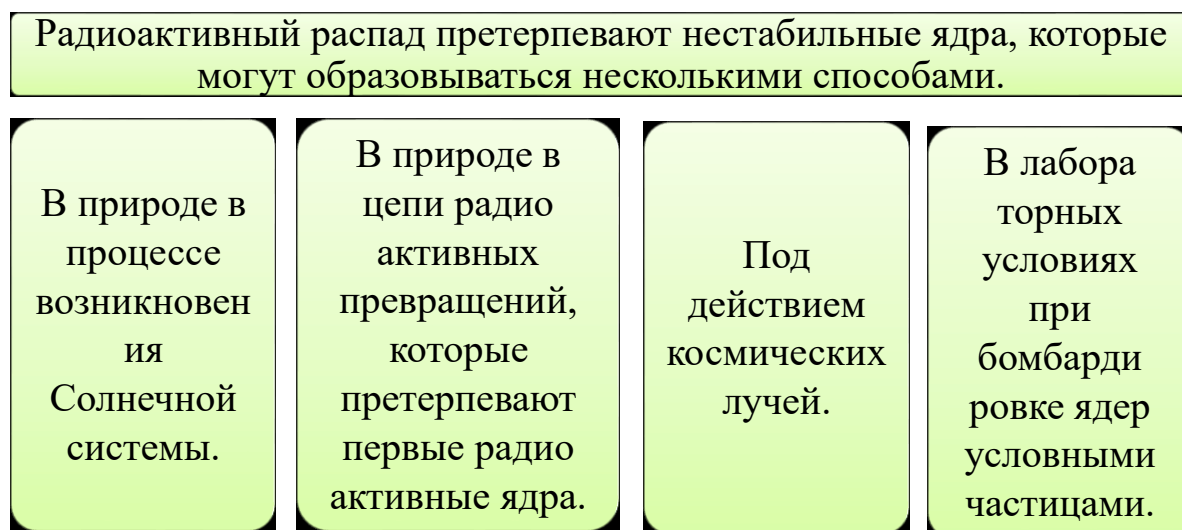


Рис. 13.1.

Нестабильные ядра характеризуются *временем жизни* τ , которое варьируется от $\tau_N \sim 10^{-22}$ с до очень больших величин.

τ_N – промежуток времени соизмеримый со временем одного акта сильного взаимодействия (обмена пионами).

Ядра с очень маленьким временем жизни $\tau < 10^{-12}$ с радиоактивными не считаются. Они так быстро претерпевают изменения, что их включают как часть других ядерных реакций.

Другими словами процесс распада нестабильного ядра должен чем то стабилизироваться, то есть до распада, ядро должно достаточно долго (по меркам ядерного взаимодействия) прожить. Отсюда и термин стабилизированный процесс в определенной радиоактивности. Факторы стабилизации представлены на рис. 13.2.

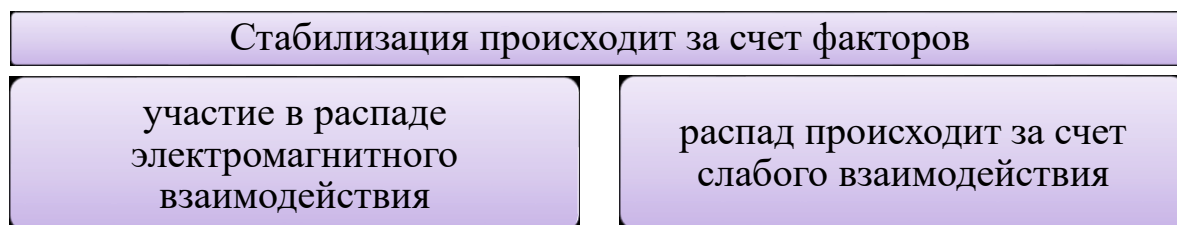


Рис. 13.2.

Возникновение кулоновского потенциального барьера препятствует, например, альфа распаду.

Описание типов превращения представлено в таблице 13.1.

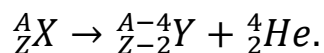
Таблица 13.1

Тип пре- вращения	Процесс	Правила сдвигов		Взаимодей- ствие	Год от- кры- тия
		ΔZ	ΔA		
α -распад	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He$	-2	-4	Сильное + электромаг- нитное	1899г
β -распад	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + \bar{e} + \bar{\nu}_e$	+1	0	Слабое	1899г
β^+ -распад	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$	-1	0	Слабое	1934г
γ - излучение	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$	0	0	Электро- магнитное	1937г
Спонтан- ное деле- ние	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + {}^{A-A'}_{Z-Z'}Y'$	$\sim \left(-\frac{Z}{2}\right)$	$\sim \left(-\frac{A}{2}\right)$	Сильное + электромаг- нитное	1940г
K – захват	${}^A_ZX + \bar{e} \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu_e$	-1	0	Слабое	1937г
Протон- ный рас- пад	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1}Y + {}^1_1H$	-1	-1	Сильное + электромаг- нитное	1970г
Двух про- тонный распад	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-2}_{Z-2}Y + {}^1_1H + {}^1_1H$	-2	-2	Сильное + электромаг- нитное	1983г

К наиболее важным превращениям относятся: α -распад, β -распад, γ -излучения, спонтанное деление.

13.2. α -распад

α -распад – радиоактивное превращение ядер с испусканием α -частиц



В настоящее время известно более двухсот альфа-радиоактивных ядер. Большинство этих ядер имеет зарядовое число $Z > 83$. Считается, что любое ядро с $Z > 83$ является α -радиоактивным, но для некоторых ядер α -радиоактивность не обнаружена. Из-за того что более вероятны другие конкурирующие виды распада и они просто не успевают излучить α -частиц. Кроме этих тяжелых ядер α -распаду подвержены также некоторые изотопы редкоземельных элементов с числом нейтронов больше $N > 83$. Это область от церия ${}^{142}_{58}\text{Ce}$ до лютеция ${}^{151}_{71}\text{Lu}$.

α -активность тяжелых ядер можно объяснить тем, что 5 полностью заполненных оболочек содержит равно 82 протона. Если число протонов будет 84, становится энергетически выгодно, чтобы число протонов уменьшилось на 2, а этот как раз делает α -распад.

Радиоактивность редкоземельных α -радиоактивных ядер, объясняется аналогично, но для числа нейтронов, 82 нейтрона заполняют полностью 5 энергетических оболочек, если нейтронов 84 то α -распад уменьшает это число на 2.

Экспериментальные исследования показывают следующее.

1. Энергия α -частиц при α -распаде для каждого изотопа имеет строго определенное значение.

2. Период полураспада жестко связан с этой энергией.

Оба этих факта легко объясняются в рамках модели α -распада предложенной в 1928 году.

В ней считается, что α -частица уже сформированная находится внутри ядра и рассматривается взаимодействие этой α -частицы с ядром.

График потенциальной энергии α -частицы в ядре,

$$U_k = k \frac{2(Z-2)e^2}{r}$$

представлен на рис. 13.3.

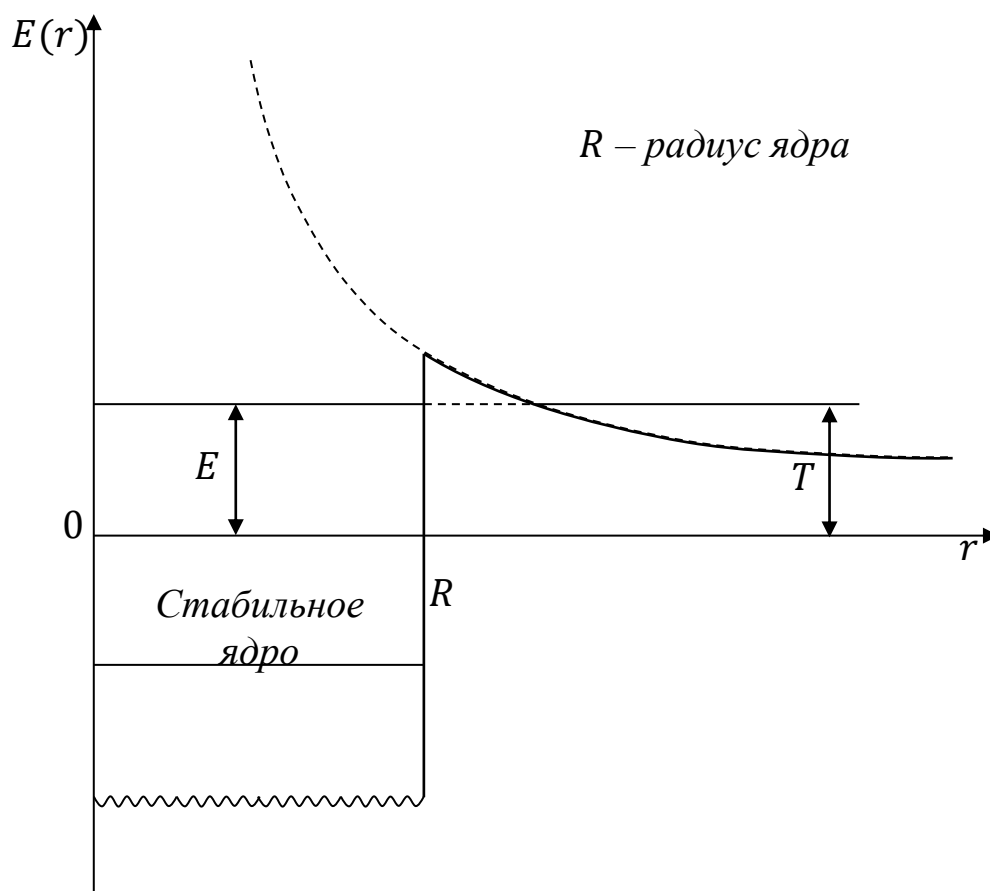


Рис. 13.3.

Вне ядра на α -частицу действует электростатическое поле ядра, а внутри ядра ядерной силы с отрицательной потенциальной энергией, который описывает потенциал Юкавы. Если энергия α -частицы внутри больше ядра, то для нее существует вероятность туннельного эффекта. Причем если он произошел, то кинетическая энергия вылетающих частиц совпадает с энергией α -частицы в ядре.

Чем больше значение E , тем больше вероятность туннельного эффекта, так как потенциальный барьер становится уже ниже. Если считать, что максимальное значение $U(r)$ для разных ядер примерно одинаковы, становится ясно, почему период распада, который определяется вероятностью туннельного эффекта, зависит от энергии вылетающих α -частиц.

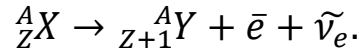
Если E меньше нуля, то ядро стабильное.

13.3. β -превращение

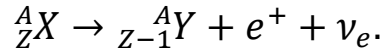
β -превращения – это такие радиоактивные превращения ядер, в которых нейтрон превращается в протон или наоборот.

Различают четыре вида β -превращения.

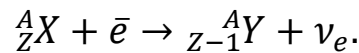
1. β^- -распад в результате, которого из ядра вылетает электрон



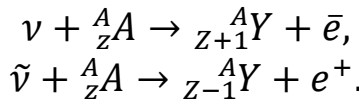
2. β^+ -распад



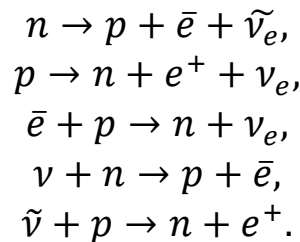
3. K -захват в котором ядро захватывает электрон с -оболочки атома



4. к β -превращениям относят захват нейтрино или антинейтрино



Этим β -превращениям соответствуют внутри-нуклонные процессы



Все эти процессы обусловлены слабым взаимодействием.

β -активные изотопы есть практически у всех элементов, начиная с $Z = 0$ (нейтрон).

Для того чтобы выяснить какие ядра устойчивы к β -превращению проведем следующие рассуждения.

Рассмотрим ядра с одним и тем же массовым числом A , для которого сильные взаимодействия почти одинаково. Но для разных изобар (ядер с разным Z , но одинаковым A) разное как раз слабое взаимодействие.

Энергию оценим с помощью формулы Вайцзеккера

$$\begin{aligned} E_{\text{я}} &= (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_{\text{св}} = \\ &= (Am_n - Z\Delta m_n)c^2 - \alpha_1 A + \alpha_2 A^{2/3} + \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} + \alpha_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \\ &\quad + \alpha_5 A^{-3/4} \cdot \delta(Z, N), \end{aligned}$$

где

$$\Delta m_n = m_n - m_p.$$

Для простоты A возьмем нечетным, тогда последнее слагаемое будет равно нулю. Будем считать, что для данного A наиболее устойчивым будет ядро, для которого $E_{\text{я}}$ принимает минимальное значение.

Условие минимума

$$\frac{dE}{dZ} = 0,$$

тогда

$$\left(\frac{dE}{dZ}\right)_{Z=Z_p} = -\Delta m_n c^2 + 2\alpha_3 Z_p A^{-1/3} - 4\alpha_4 \frac{A - 2Z_p}{A} = 0.$$

Откуда получаем для Z_β , задающего так называемую *дорожку стабильности*,

$$Z_\beta = \frac{A}{1,98 + 0,015A^{2/3}}.$$

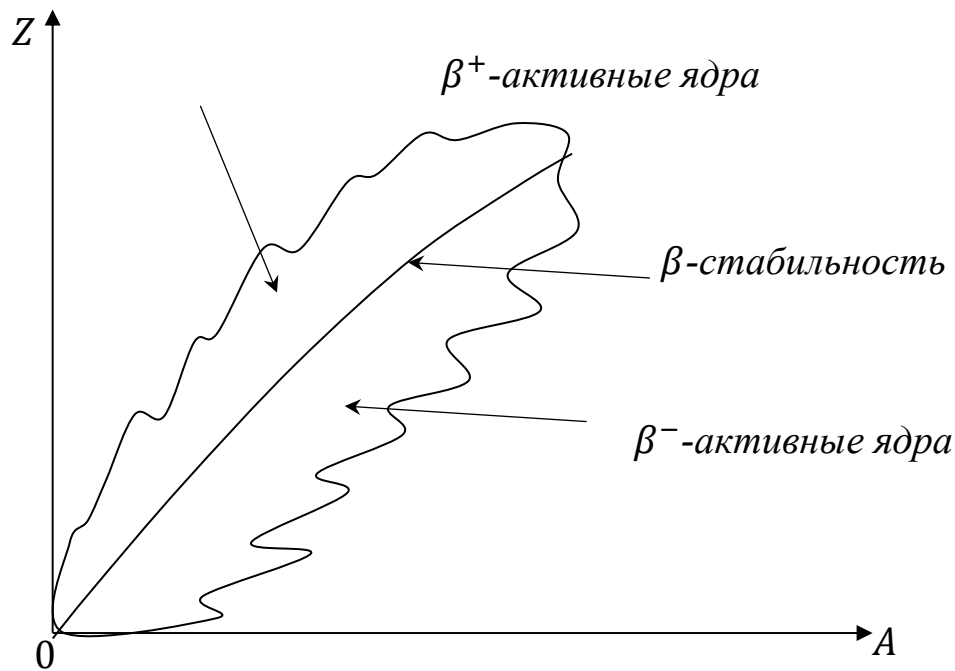


Рис. 13.4.

Если $Z < Z_\beta$ ядро содержит избыток нейтронов, поэтому не стабильно по отношению к $\bar{\beta}$ распаду.

При $Z > Z_\beta$ ядра обладают избытком протонов, поэтому не стабильно по отношению к β^+ распад $Z < Z_\beta$.

13.4. γ -излучение

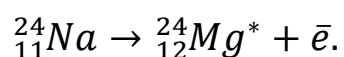
γ -излучение – переход ядра находящегося в возбужденном состоянии в более низкое энергетическое состояние без изменения Z и A , но с испусканием фотонов.

Так как значение энергии ядра дискретны, то и спектр γ -излучения также дискретен. Он простирается по энергиям от 10 кэВ до 3 МэВ, по длине волны: $0,1 \div 4 \cdot 10^{-4}$ нм.

Причина перехода ядра в возбужденное состояние могут быть либо предшествующий β -распад, реже α -распад. Либо захват нейтрона, протона, электрона, α -частицы, дейтрона.

Ядро из возбужденного состояния может сразу перейти в основное, испустив один γ -квант, а может произойти каскадный переход, при котором испускается несколько фотонов.

Например,



Образующийся магний находится в возбужденном состоянии и переходя в основное состояние испускает 2 фотона

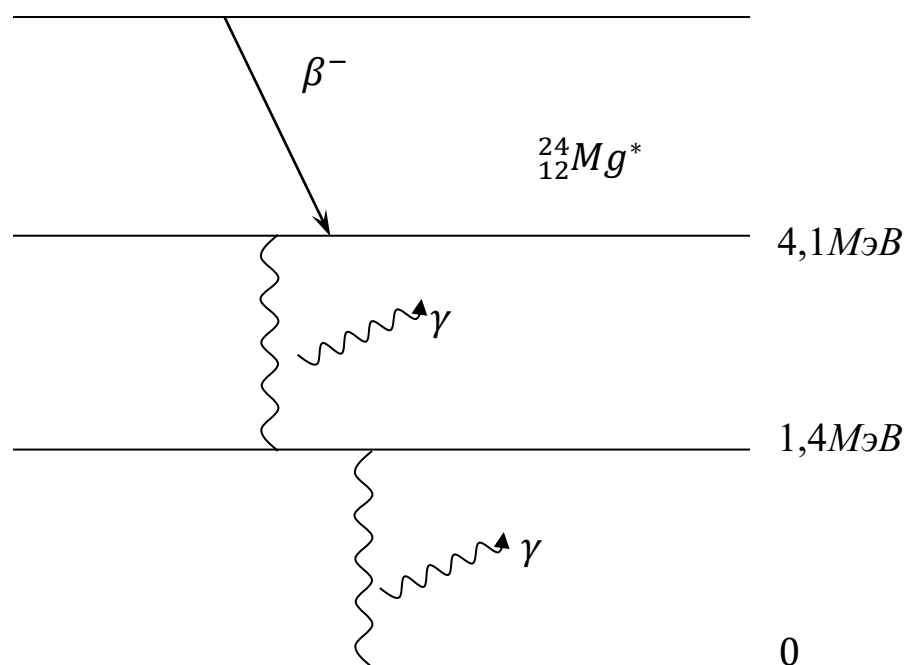
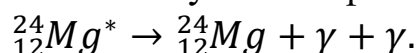


Рис. 13.5.

Эффект Мессбауэра

В оптике известно явление резонансного поглощения света. Оно состоит в том, что фотон, испускаемый атомом, с энергией

$$E_\gamma = E_m - E_n$$

может с большей вероятностью поглотиться другим таким же атомом, который переходит в возбужденное состояние.

По идее такое явление могло бы происходить и с ядрами при γ -излучении. γ -квант должен с большой вероятностью поглотиться другим таким же ядром. Однако эксперимент показывает, что этого не происходит. Дело в том, что испускающее γ -квант ядро приобретает энергию отдачи T , которая уменьшает энергию фотона. Для оптического резонанса это явление не играет большой роли. Так как энергия фотона меняется на величину меньше естественной ширины спектральной линии (Γ) возбужденного уровня, которая возникает вследствие соотношения неопределенности $\Delta E < \Gamma$, а для ядер $\Delta E > \Gamma$. Поэтому резонансное поглощение практически не наблюдается.

Мессбауэр в 1958 году установил, что резонансное поглощение все таки происходит, если сильно охладить источник γ -квантов и приемник. В этом случае атомы жестко связаны с другими атомами кристаллической решетки, поэтому энергия отдачи существенно уменьшается $\Delta E < \Gamma$.

Кроме того, оказалось, что резонансное поглощение сильно зависит от скорости источника γ -излучения и пропадает даже при очень малых скоростях. Порядка нескольких сантиметров в секунду. Этот эффект позволил разработать методику измерения очень малых энергий.

13.5. Закон радиоактивного распада

Будем считать радиоактивный распад событием случайным.

Пусть λ – вероятность распада ядра за единицу времени, тогда за время dt вероятность составит $dp = \lambda dt$.

Если через N обозначить число не распавшихся (оставшихся) ядер, то dN – элементарное изменение числа ядер, будет отрицательным числом. Соответственно $-dN$ – число ядер распавшихся за dt . Тогда $\frac{dN}{N}$ – доля распавшихся ядер за время dt . Но при достаточно боль-

ших N эта доля совпадает с вероятностью распада отдельного ядра за время dt

$$-\frac{dN}{N} = p.$$

Получили дифференциальный закон радиоактивного распада

$$-\frac{dN}{N} = \lambda dt.$$

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ – скорость изменения числа ядер прямо пропорциональна числу оставшихся ядер.

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad \int \frac{dN}{N} = - \int \lambda dt,$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln C,$$

$$\frac{N}{C} = e^{-\lambda t},$$

$$N = Ce^{-\lambda t}.$$

При $t = 0 \Rightarrow N = N_0 \Rightarrow C = N_0$. Получаем закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число не распавшихся ядер к моменту времени t , N_0 – число не распавшихся ядер к моменту времени $t = 0$.

В школьном курсе

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}},$$

где T – период полураспада.

$$\text{Если } t = T \Rightarrow N = \frac{N_0}{2},$$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad 2^{-1} = e^{-\lambda t},$$

$$-\ln 2 = -\lambda T \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Активность нуклида

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

где N – число не распавшихся частиц, dN – число распавшихся частиц за время dt .

Физический смысл: число частиц, которые распадаются за единицу времени

$$A = A_0 e^{-\lambda t},$$

где $A_0 = \lambda N_0$.

13.6. Радиоактивные ряды и трансурановые элементы

Правило сдвига для Z и A позволяют разбить все α и β -радиоактивные нуклиды на 4 большие семейства, которые называются радиоактивными рядами.

Дело в том, что дочерние ядра радиоактивного распада сами являются как правило, радиоактивными. Они снова претерпевают распад до тех пор, пока не образуется стабильное ядро.

При α -распаде массовое число меняется на 4, а при β и γ превращениях оно не меняется, поэтому для всех ядер одного ряда остаток деления $\frac{A}{4}$ будет один и тот же.

Таким образом для каждого ряда массовое число A можно выразить по одной из четырех формул

$$A = 4n; \quad A = 4n + 1; \quad A = 4n + 2; \quad A = 4n + 3,$$

где n – натуральное число и $n < 51$, так как α -активными ядрами являются все нуклиды с массовым числом $A > 209$.

Характеристики радиоактивных рядов представлены в таблице 13.2.

Таблица 13.2

Ряд	A	Начальный нуклид	Период полураспада $T_{1/2}$ лет	Число превращений	Конечный нуклид
Тория	$4n$	${}^{232}_{90}\text{Th}$	$1,4 \cdot 10^{10}$	12	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
Нептуния	$4n + 1$	${}^{237}_{93}\text{Np}$	$2,2 \cdot 10^6$	13	${}^{209}_{83}\text{Bi}$
Урана	$4n + 2$	${}^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$	18	${}^{206}_{82}\text{Pb}$
Актиния	$4n + 3$	${}^{235}_{92}\text{U}$	$7 \cdot 10^8$	16	${}^{207}_{82}\text{Pb}$

Рассмотрим примеры радиоактивных рядов. Ряд тория представлен на рис. 13.6.

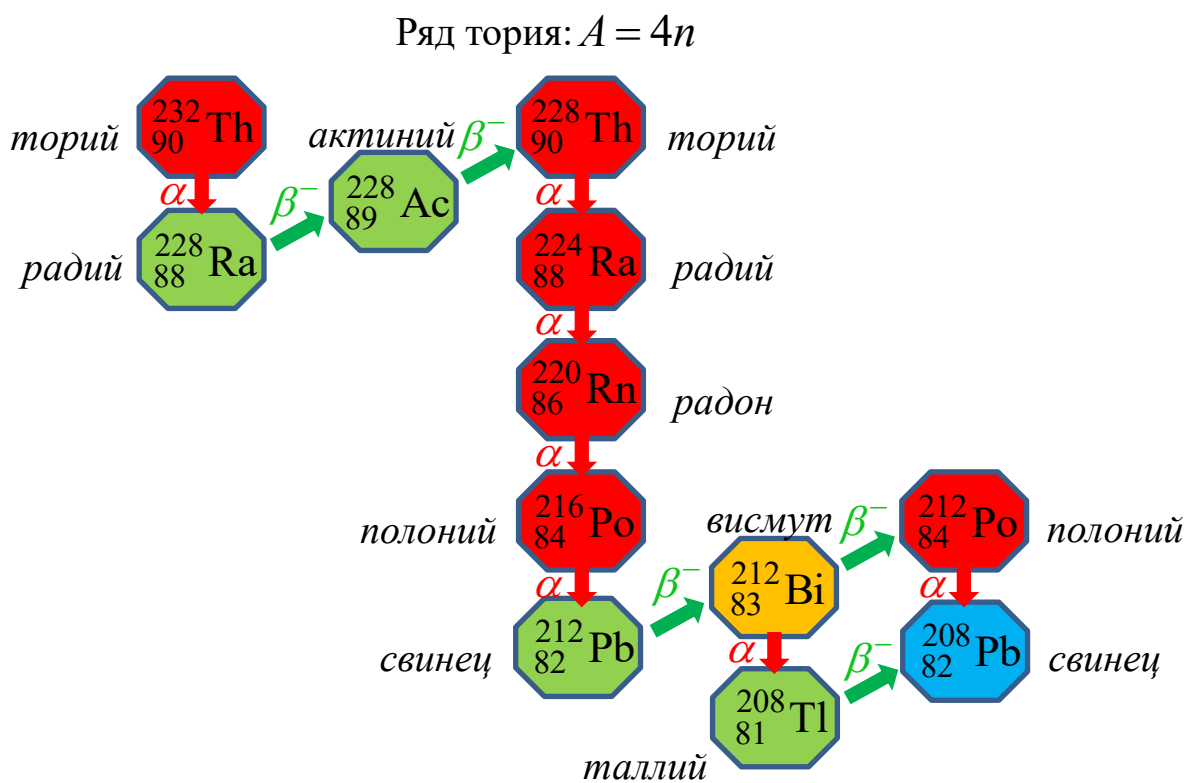


Рис. 13.6.

Ряд нептуния представлен на рис. 13.7.

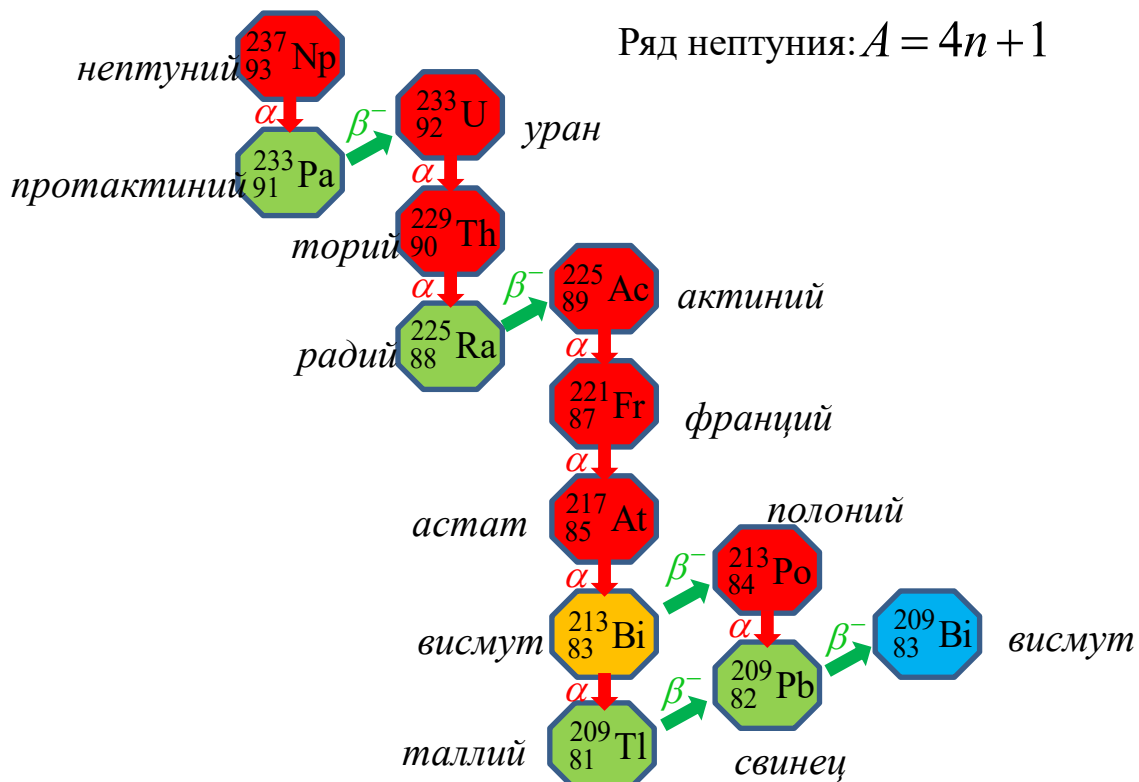


Рис. 13.7.

Ряд радия – рис. 13.8.

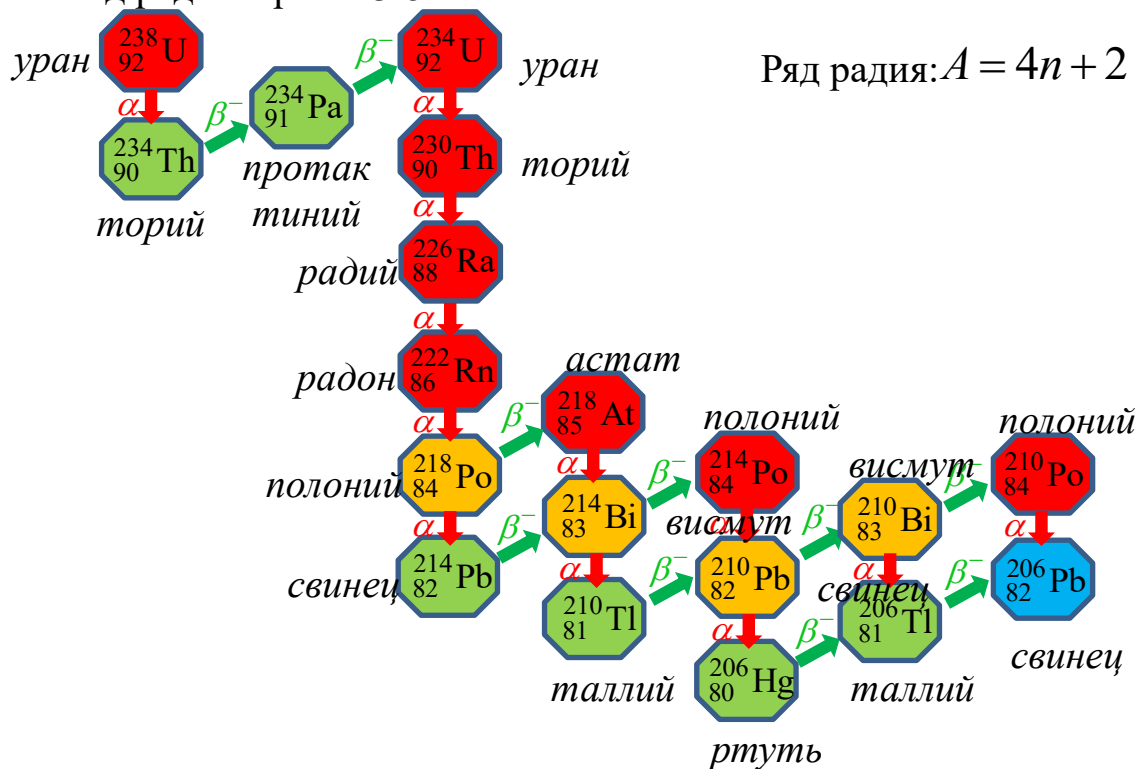


Рис. 13.8.

Ряд актиния – рис. 13.9.

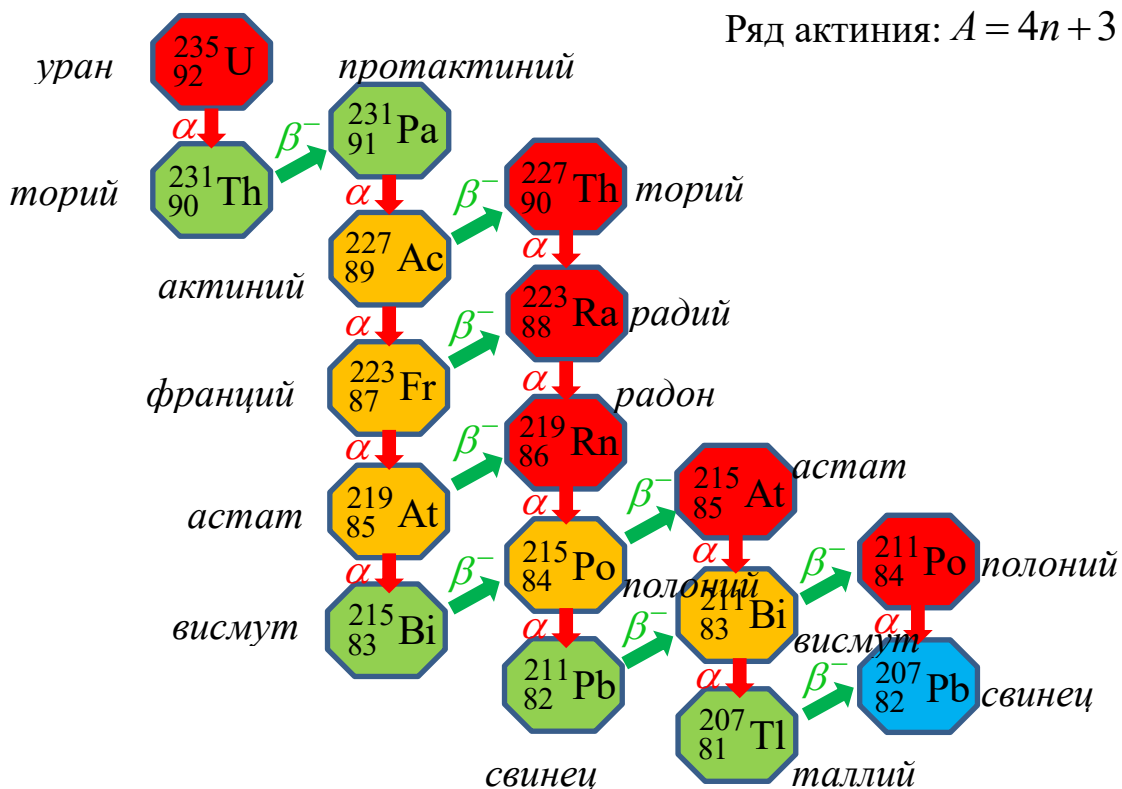


Рис. 13.9.

Радиоактивные ряды можно было бы продолжать в сторону больших массовых чисел, но элементы $Z > 92$ настолько не стабильны, что в природе не встречаются. Их называли трансурановыми элементами, а несколько позже элементы $Z > 100$ называли трансфермиевыми. Трансурановые и трансфермиевые элементы синтезируются искусственным путем на ускорителях при бомбардировке нейтронами, легкими и средними ядрами. Кроме α -распадов и β -распадов трансурановые и трансфермиевые элементы часто претерпевают спонтанное деление, вероятность которого растет с ростом Z .

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Как называется стабилизированный процесс спонтанного распада ядра с превращением его в другое ядро и частицы.

- a) Радиоактивность.
- b) Термоядерная реакция.
- c) Реакция синтеза.
- d) α -распад.

2. Какой тип превращения из перечисленных обусловлен электромагнитным взаимодействием?

- a) α -распад.
- b) β -распад.
- c) γ -излучение.
- d) К-захват.

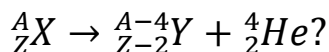
3. Какой тип превращения из перечисленных обусловлен слабым взаимодействием?

- a) α -распад.
- b) β -распад.
- c) γ -излучение.
- d) Протонный распад.

4. Какой тип превращения из перечисленных обусловлен сильным и электромагнитным взаимодействиями?

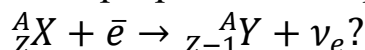
- a) β -распад.
- b) γ -излучение.
- c) К-захват.
- d) Протонный распад.

5. Какое радиоактивное превращение ядер описывается реакцией



- a) α -распад.
- b) β -распад.
- c) γ -излучение.
- d) К-захват.

6. Какое радиоактивное превращение ядер описывается реакцией



- a) α -распад.
- b) β -распад.
- c) γ -излучение.
- d) К-захват.

7. Переход ядра находящегося в возбужденном состоянии в более низкое энергетическое состояние без изменения Z и A , но с испусканием фотонов.

- a) α -распад.
- b) β -распад.
- c) γ -излучение.
- d) К-захват.

8. Как называется явление резонансного поглощения света, состоящее в том, что фотон, испускаемый атомом, с энергией

$$E_\gamma = E_m - E_n$$

может с большей вероятностью поглотиться другим таким же атомом, который переходит в возбужденное состояние.

- a) Принцип Паули.
- b) Правило Хунда.
- c) Эффект Мессбауэра.
- d) Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

9. Что отражает формула

$$N = N_0 e^{-\lambda t}?$$

Где N – число не распавшихся ядер к моменту времени t , N_0 – число не распавшихся ядер к моменту времени $t = 0$.

- a) Принцип Паули.
- b) Закон радиоактивного распада.
- c) Закон сохранения энергии для частиц.
- d) Закон сохранения импульса для частиц.

10. Для какого радиоактивного ряда массовое число можно определить по формуле

$$A = 4n + 3?$$

- a) Ряд тория.
- b) Ряд нептуния.
- c) Ряд урана.
- d) Ряд актиния.

Закон радиоактивного распада

Задание 2. Решить задачи.

1. Определить постоянную распада некоторого вещества, если известно, что за час интенсивность испускаемого им β -излучения уменьшилась на 10%. Продукт распада не радиоактивен.
2. Найти постоянную распада радия, если период полураспада радия $T_1 = 1602$ годам и $T_2 = 354$ годам.
3. Сколько атомов радия распадается в 1 с в 1 г препарата радия? Считать известной постоянную распада λ для $T_1 = 1602$ г.
4. Определить и проанализировать период радиоактивных элементов исходя из измерений представленных в таблице 13.3.

Таблица 13.3

Время в часах												
0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4	6	8	10	12
Число срабатываний счетчика в 1 мин												
2345	1195	654	390	263	197	165	144	130	98	78	61	48

Указание. Построить график, отложив по оси абсцисс время, а по оси ординат — натуральный логарифм числа срабатываний счетчика за 1 мин.

Задание 3. Используя интерактивный калькулятор (http://cdfc.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html#3), определить энергию α -распада для $Z = 83, 84, 87, 89$.

На рис. 13.10. приведен пример заполнения поисковой формы калькулятора для определения энергии α -распада для $Z = 85, 87, 89, 93$.

Для формирования запросного предписания осуществлено следующее.

→ Входные параметры – введены значения $Z = 85, 87, 89, 93$.

→ Тип распада - в меню выбрано значение α (альфа-распад).

→ На оси абсцисс – выбран вариант "N".

→ Нажатие кнопки «Вычислить» и «Построить график» позволяет рассчитать и получить в виде таблицы соответствующие числовые данные.

3. Энергии распадов

Энергии распадов рассчитаны на основании значений атомных масс по [следующим формулам](#).

Каждое поле формы может быть пустым.

[[Помощь...](#)]

Входные параметры	
Z:	85, 87,89,91,93 Пример: 20, 40-60
N:	Пример: 20, 40-60
A:	Пример: 20, 40-60
Тип распада:	☒ α (альфа-распад) ☐ β^- (бета-распад) ☐ β^+ (позитронный бета-распад) ☐ ϵ (электронный захват)
На оси абсцисс:	☐ Z ☒ N ☐ A
Вычислить Построить график Очистить	

Рис. 13.10.

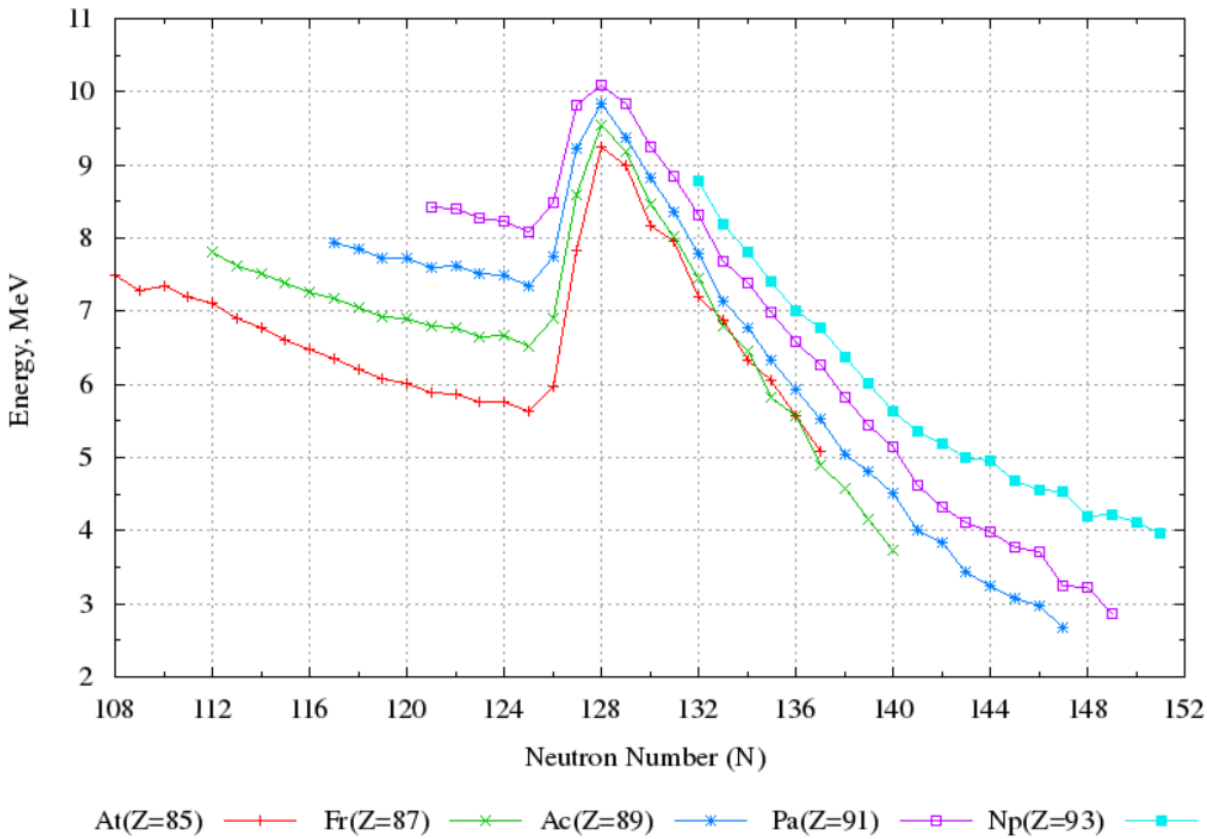
Фрагмент полученной таблицы представлен на рис. 13.11, и графика - на рис. 13.12.

Result - $Q\alpha(A,Z)$:

Elem	Z	N	A	$Q\alpha$
At	85	108	193	7.4850
At	85	109	194	7.2850
At	85	110	195	7.3390
At	85	111	196	7.2050
At	85	112	197	7.1070
At	85	113	198	6.8950
At	85	114	199	6.7780
At	85	115	200	6.5970
At	85	116	201	6.4740
At	85	117	202	6.3550
At	85	118	203	6.2100
At	85	119	204	6.0700
At	85	120	205	6.0190
At	85	121	206	5.8880
At	85	122	207	5.8720
At	85	123	208	5.7550
At	85	124	209	5.7570
At	85	125	210	5.6300

Puc. 13.11.

$Q\alpha(A,Z)$



Puc. 13.12.

Задание 4. Используя интерактивный калькулятор (http://cdfc.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html#3), определить энергию $Q_{\beta}(A, Z)$ β -распада нескольких ядер с Z от 87 до 89.

На рис. 13.13 приведен пример заполнения поисковой формы калькулятора для определения энергии β -распада для ядер с Z от 81 до 83.

Для формирования запросного предписания осуществлено следующее.

- Входные параметры Z – введены значения $Z = 81 - 83$.
- Тип распада – в меню выбрано значение " β^- " (бета-распад).
- На оси абсцисс – выбран вариант N .
- Нажатие кнопки «Вычислить» и «Построить график» позволяет рассчитать и получить в виде таблицы соответствующие числовые данные.

3. Энергии распадов

Энергии распадов рассчитаны на основании значений атомных масс по [следующим формулам](#).

Каждое поле формы может быть пустым.

[[Помощь...](#)]

Входные параметры	
Z:	81-83 Пример: 20, 40-60
N:	Пример: 20, 40-60
A:	Пример: 20, 40-60
Тип распада:	☐ α (альфа-распад) ☒ β^- (бета-распад) ☐ β^+ (позитронный бета-распад) ☐ ε (электронный захват)
На оси абсцисс:	☐ Z ☒ N ☐ A
Вычислить Построить график Очистить	

Рис. 13.13.

Фрагмент полученной таблицы представлен на рис. 13.14, графика - на рис. 13.15. Изотопы с одинаковым значением Z соединены сплошной линией.

Result - $Q_{\beta^-}(A,Z)$:

Elem	Z	N	A	Q_{β^-}
Tl	81	123	204	0.7630
Tl	81	125	206	1.5320
Tl	81	126	207	1.4170
Tl	81	127	208	4.9990
Tl	81	128	209	3.9764
Tl	81	129	210	5.4823
Tl	81	130	211	4.4110
Tl	81	131	212	5.8474
Pb	82	127	209	0.6436
Pb	82	128	210	0.0635
Pb	82	129	211	1.3670
Pb	82	130	212	0.5699
Pb	82	131	213	2.0460
Pb	82	132	214	1.0190
Pb	82	133	215	2.8510
Bi	83	127	210	1.1613
Bi	83	128	211	0.5745
Bi	83	129	212	2.2521
Bi	83	130	213	1.4230
Bi	83	131	214	3.2690
Bi	83	132	215	2.1893
Bi	83	133	216	4.0900
Bi	83	134	217	2.9190
Bi	83	135	218	4.9420

Рис. 13.14.

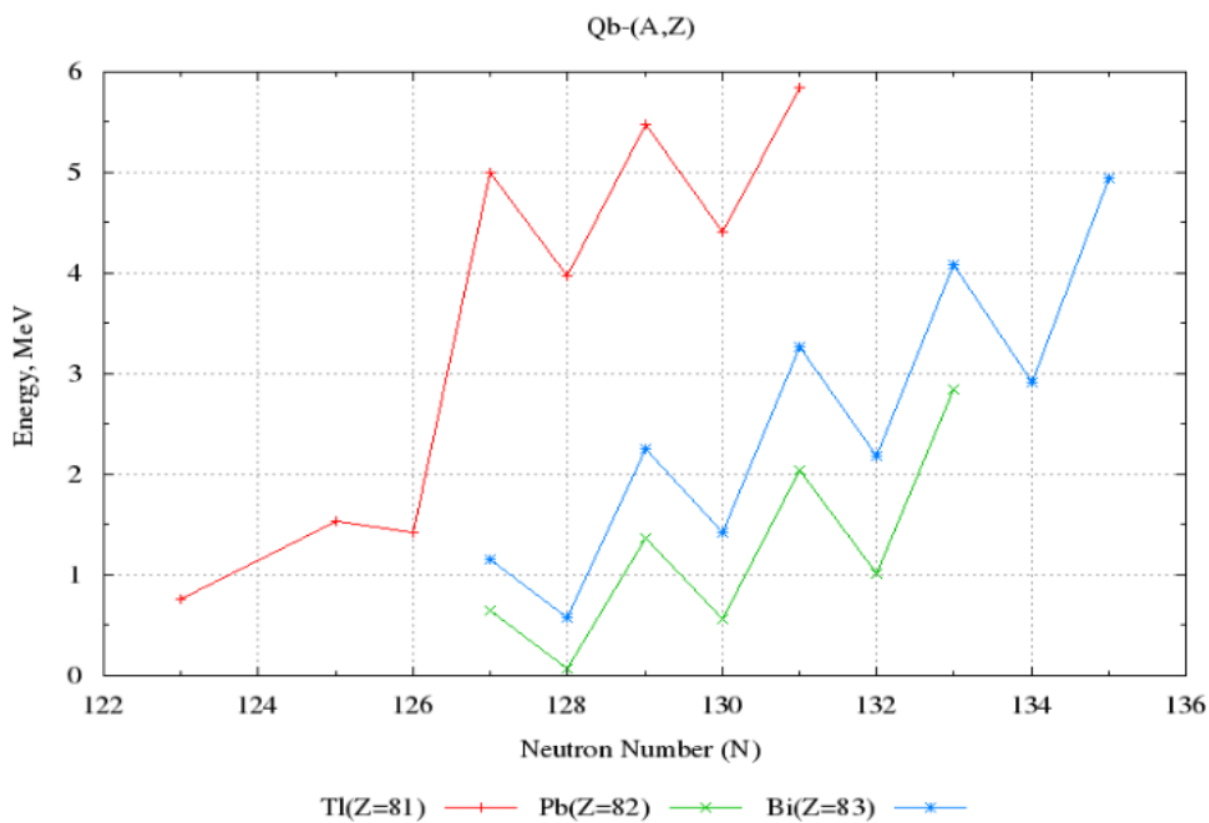


Рис. 13.15.

Глава 14. ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Цепные ядерные реакции](#)
- [Ядерный реактор](#)
- [Реакции синтеза. Термоядерный управляемый синтез](#)
- [Материалы для практической работы](#)

14.1. Цепные ядерные реакции

Так как деление ядра урана $^{235}_{92}\text{U}$ вызывает, захваченный ядром нейтрон, а при делении вырывается 2-3 новых нейтрона, появляется принципиальная возможность возникновения цепной ядерной реакции деления ядер.

Пусть в среде, содержащей $^{235}_{92}\text{U}$ самопроизвольно или под действием случайного нейтрона распалось одно ядро. В результате появится, будем так считать, 2 нейтрона которые вызовут деление двух новых ядер. Образуется 2^2 нейтронов, затем 2^3 , 2^4 и так далее.

Разовьется так называемый лавинообразный процесс – *цепная ядерная реакция*.

После смены n – поколений, в среде окажется 2^n – нейтронов, которые могут разделить столько же ядер. В результате за очень маленькое время, порядка 10^{-5} секунд выделяется колоссальная энергия, то есть произойдет ядерный взрыв. Примерно так и происходит в атомной бомбе.

Но извлекать энергию в мирных целях таким образом невозможно.

Необходимо получить управляемую цепную реакцию деления. Эта возможность возникает из-за того, что далеко не все нейтроны, образующиеся в результате деления, вызывают очередное деление новых ядер. Некоторые из них покидают зону реакции.

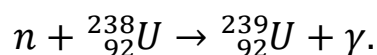
В естественном уране содержится 99,3% $^{238}_{92}\text{U}$ и всего 0,7% $^{235}_{92}\text{U}$.

Цепная ядерная реакция деления не происходит, при таких условиях по следующим причинам.

1. Деление ядер урана $^{238}_{92}\text{U}$ могут вызвать только быстрые нейтроны с энергией больше 1МэВ, но их только порядка 60% от всех образующихся нейтронов.

2. Быстрые нейтроны с большой вероятностью испытывают не упругие соударения с ядрами, теряя энергию, и превращаются в промежуточные нейтроны, с энергией менее 100 кэВ.

3. Промежуточные нейтроны с большой вероятностью захватываются ядрами $^{238}_{92}\text{U}$ без деления, а с вылетом γ – кванта так называемый радиационный захват



В результате лавинообразный процесс в природном уране не происходит, так как число делящихся ядер не растер. Поэтому первым условием существования цепи ядерной реакции является обогащение естественного урана ураном $^{235}_{92}\text{U}$, его должно быть в обогащенном уране не менее 15%. Вероятность захвата ураном $^{235}_{92}\text{U}$ нейтрона возрастает при взаимодействии с тепловыми (медленными) нейтронами. Поэтому используют так называемые *замедлители* – вещества масса ядер, которых соизмерима с массой нейтрона. Чтобы эффективней забрать у него энергию в результате упругого удара.

Проведем рассуждения (рис. 14.1).

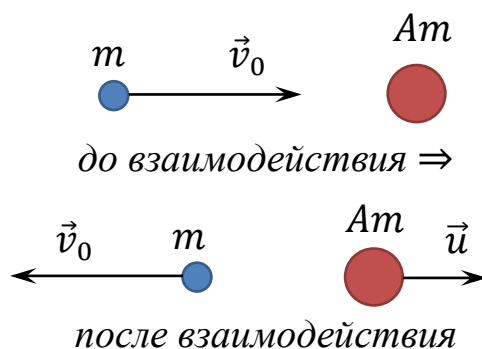


Рис. 141.

Для частиц на рис. 14.1. должны выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Atu^2}{2},$$

и закон сохранения импульса

$$mv_0 = Atu - mv.$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} v_0^2 - v^2 = Au^2, \\ v_0 + v = Au. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 - v = u, \\ v_0 + v = Au. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} v_0 + v &= A(v_0 - v), \\ (A - 1)v_0 &= (A + 1)v, \\ v &= \frac{A - 1}{A + 1} v_0. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Delta E_n = E_0 - E &= \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m(A - 1)^2}{2(A + 1)^2} v_0^2 = E_0 \left(1 - \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2} \right), \\ \Delta E_n &= E_0 \frac{4A}{(A + 1)^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что наилучшим из этой формулы замедлителем является водород ($A = 1$, $\Delta E_n = E_0$), то есть он отбирает у нейтрона всю энергию. Однако при столкновении быстрого нейтрона с протоном велика вероятность захвата нейтрона с образованием дейтрона.

Поэтому чаще используют в качестве замедлителя дейтерий (D), входящий в состав *тяжелой воды* D_2O (обычная вода H_2O).

Еще используют графит ($A = 12$), бериллий ($A = 9$), оксид бериллия. Используют и обычную воду, несмотря на сильное поглощение ею нейтронов.

Для понижения вероятности радиационного захвата нейтрона ураном ${}^{238}_{92}U$, среду, в которой происходит ядерная реакция, делают *гетерогенной*, то есть состоящей из чередующихся блоков урана и замедлителя. Попадая в блок замедлителя, нейтрон теряет свою энергию, становясь тепловым, а уран ${}^{238}_{92}U$ захватывает только промежуточный нейтрон. Для уменьшения вероятности улета нейтронов с поверхности области реакции, ее делают близкой к шарообразной.

Реакция протекает при достижении массы активного вещества некоторого значения – *критической массы*. Дело в том, что число улетающих с поверхности нейтронов пропорционально площади поверхности ($\sim S$), а число возникающих нейтронов пропорционально объему ($\sim V$), поэтому число участвующих в реакции нейтронов пропорционально линейному размеру области реакции. Например, для

чистого урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ при сферической форме критическая масса $m_{\text{кр}} = 47\text{кг}$ (шар диаметром 17 см). Критическую массу удастся уменьшить, используя отражатель нейтронов. Он направляет нейтроны обратно в зону реакции, уменьшая тем самым потери нейтронов. Хорошим отражателем служит бериллий.

Коэффициент размножения нейтронов

Для количественной характеристики скорости нарастания цепной реакции вводят *коэффициент размножения нейтрона – отношение числа нейтронов в i -том, $(i - 1)$ -ом поколениях*

$$k = \frac{N_i}{N_{i-1}}.$$

В произвольном поколении

$$N_n = N_0 k^n.$$

Откуда ясно, что

→ при $k = 1$ реакция протекает стационарно (рабочий режим реактора);

→ при $k > 1$ интенсивность реакции возрастает (режим разогрева реактора или ядерный взрыв);

→ при $k < 1$ режим выключения реактора или отсутствие реакции.

14.2. Ядерный реактор

Ядерные реакторы – устройства, в которых протекает управляемая цепная реакция деления тяжелых ядер.

Ядерные реакторы характеризуют несколько основных параметров (рис. 14.2).



Рис. 14.2.

Устройство реактора на тепловых нейтронах представлено на рис. 14.3. Здесь 1 – защитный корпус, 2 – теплоноситель, 3 – стержни, поглощающие нейтроны, 4 – ядерное горючее, 5 – отражатель, 6 – замедлитель.

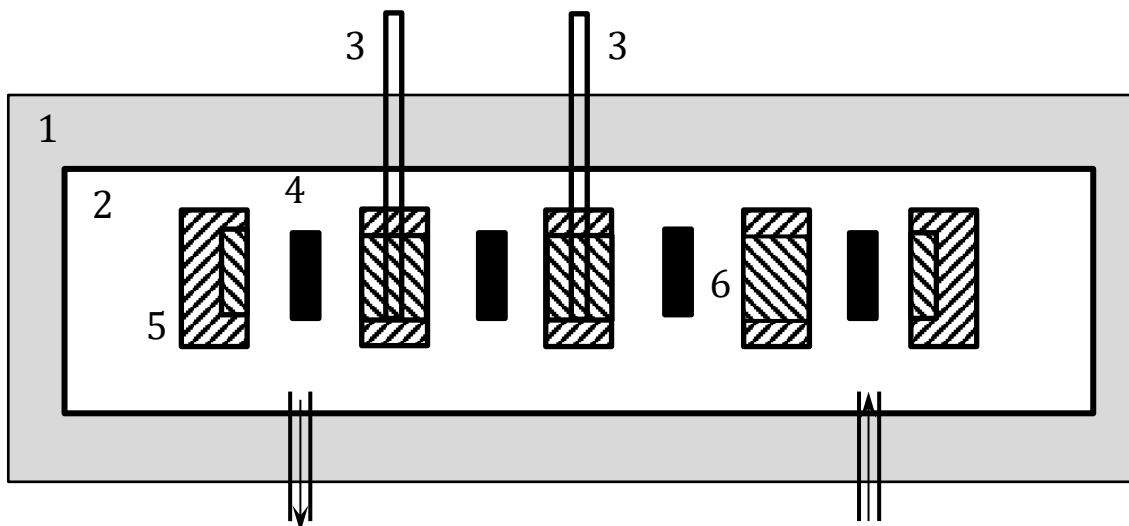


Рис. 14.3.

Сильно поглощают нейтроны кадмий, карбид бора. Из них делают регулирующие стержни.

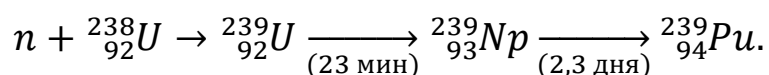
Реакторы на быстрых нейтронах

В них используется захват тяжелым ядром быстрых нейтронов с последующим делением.

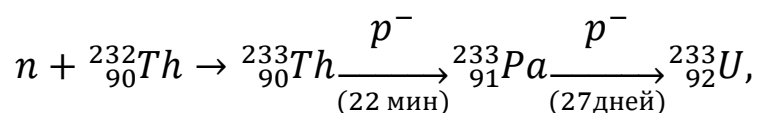
В связи с этим у них есть несколько важных отличий.

1. Нет необходимости в замедлителе
2. Объем активной зоны мал по сравнению с реактором на тепловых нейтронах, что затрудняет отвод тепла.
3. Быстрые нейтроны плохо поглощаются всеми веществами, поэтому регулировка коэффициента размножения осуществляется изменением расстояния от отражателя нейтронов до активной зоны.
4. Быстрые нейтроны могут воспроизводить ядерное топливо. Такие реакторы называют реакторами размножителями или бридерами.

Вблизи активной зоны располагают уран-238 ($^{238}_{92}\text{U}$) или торий-232 ($^{232}_{90}\text{Th}$). Захватывая быстрые нейтроны, они преобразуются в плутоний-239 ($^{239}_{94}\text{Pu}$) и уран-233 ($^{233}_{92}\text{U}$) соответственно, которые можно использовать в качестве ядерного топлива,



Уран-239 β^- -активен с периодом полураспада $T_{1/2} = 23 \text{ мин}$,



где ${}^{233}_{91}\text{Pa}$ – протактиний.

14.3. Реакции синтеза. Термоядерный управляемый синтез

Экзотермическими могут быть не только реакции деления тяжелых ядер, но и реакция синтеза слияния легких ядер с образованием более тяжелого ядра. Поскольку завал кривой удельной энергии связи в области малых массовых чисел очень крутой то энергетический выигрыш в реакциях синтеза на нуклон существенно больше, чем при делении тяжелых ядер.

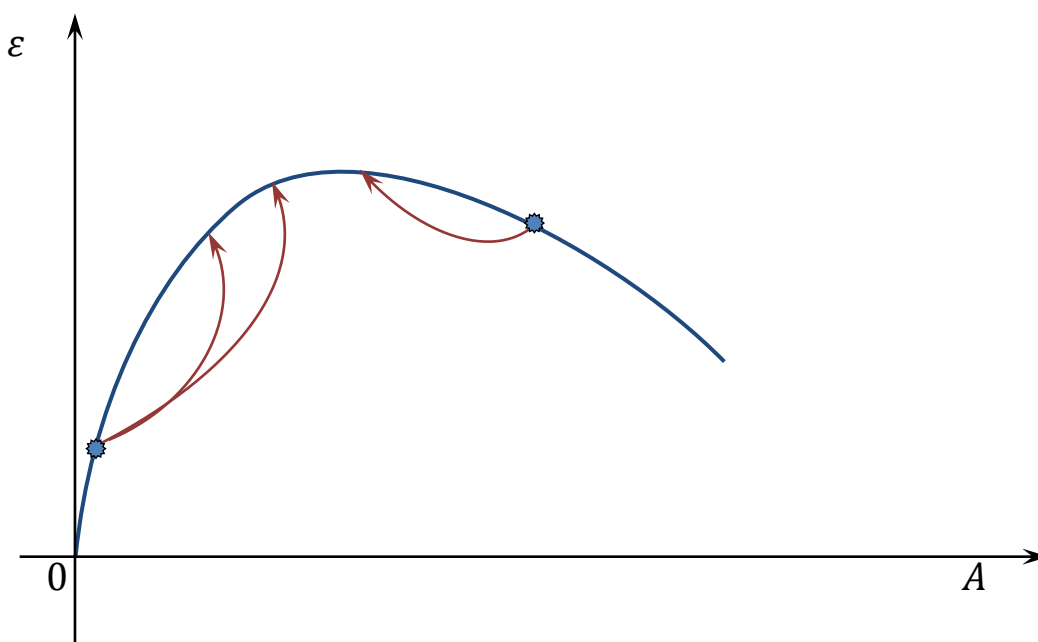


Рис. 14.4.

Основным препятствием реакции синтеза является кулоновское отталкивание положительно заряженных ядер

$$U_{\text{кул}} = k \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2},$$

где R_1, R_2 – радиусы ядер.

Единственный способ преодолеть этот ядерный барьер известный на сегодняшний день – разогрев до очень высоких температур. Типичная высота потенциального барьера примерно 0,1 МэВ, для его

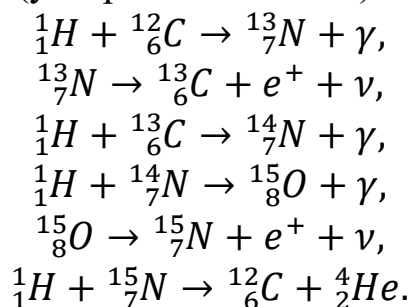
преодоления нужна температура порядка 10^8 К, это в 50 раз больше чем в недрах Солнца. Но, во-первых, распределение Максвелла молекул по энергиям есть так называемый горячий хвост, то есть существуют молекулы со значительно большей энергией, чем средняя энергия. Во-вторых, даже при $E < U_{\text{кул}}$ ядра могут вступить в реакцию синтеза в результате туннельного эффекта.

Из-за очень высоких температур, при которых могут протекать реакции синтеза, их называют *термоядерными реакциями*.

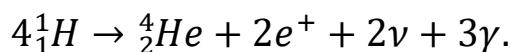
Термоядерный синтез в природе

Термоядерный синтез интенсивно протекает в недрах Солнца и других звезд. Главным источником энергии в них является процесс превращения четырех протонов в ядро гелия. Этот процесс протекает в несколько стадий, которые образуют цикл. Существует два основных цикла протекающих в недрах Солнца.

1. Углеродный (углеродно-азотный) цикл (рис. 14.5):



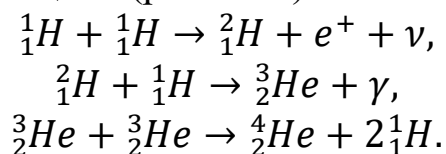
В результате имеем

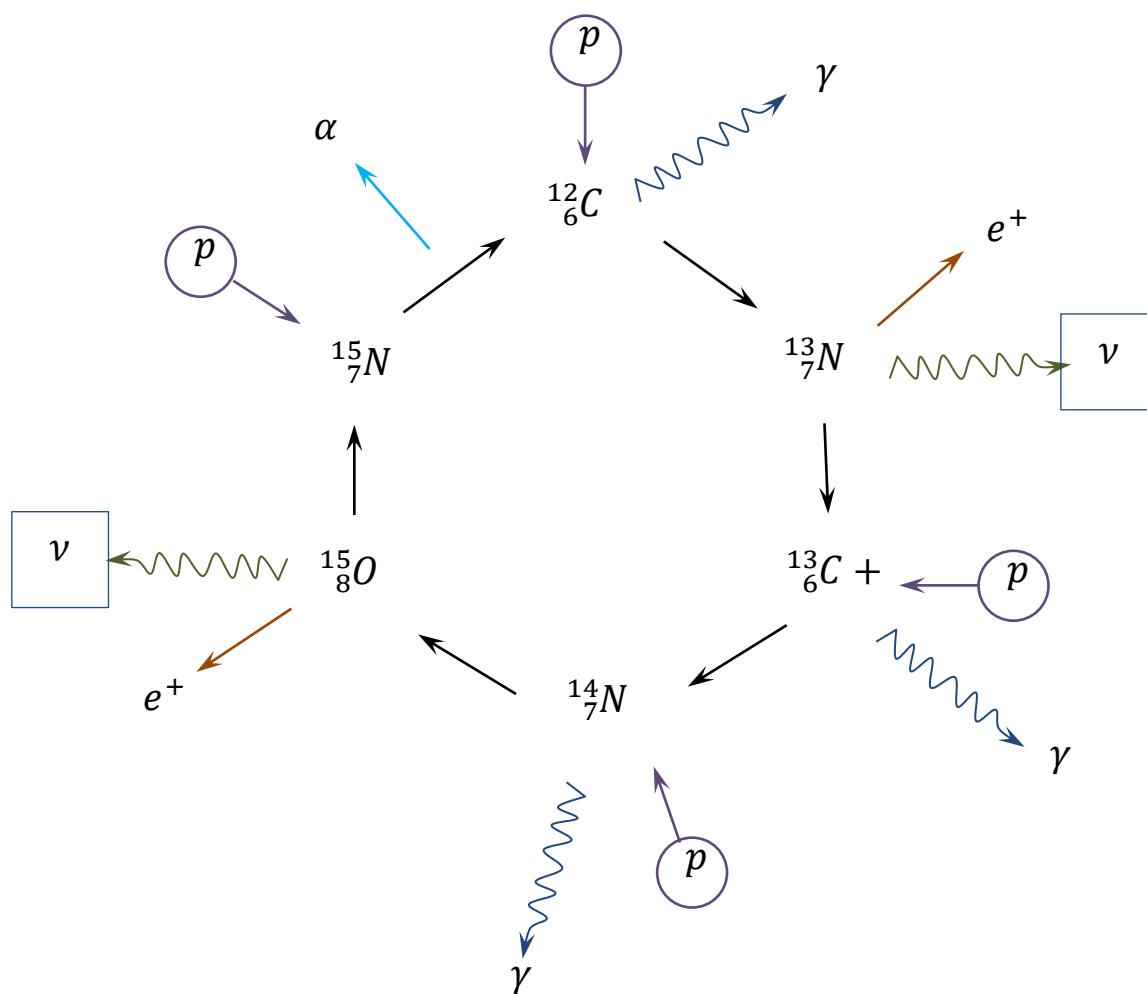


Среднее время протекания всего цикла составляет величину порядка

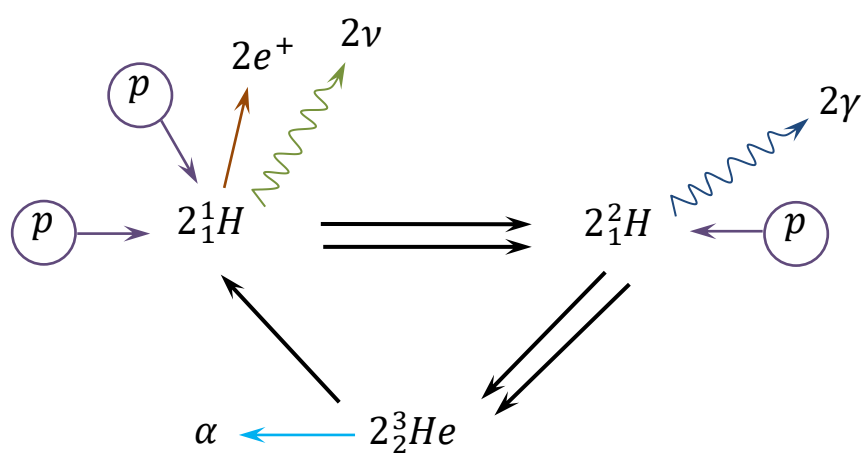
$$\tau = 3,2 \cdot 10^8 \text{ лет.}$$

2. Водородный цикл (рис. 14.6):





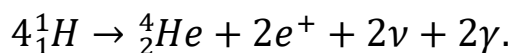
Puc. 14.5.



Puc. 14.6.

Всего в цикле протекает пять реакций, первая и вторая протекают дважды.

В результате имеем



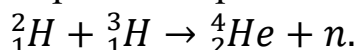
Среднее время протекания всего цикла составляет величину порядка $\tau = 1,4 \cdot 10^{10}$ лет.

В условиях Солнца, интенсивности обоих циклов примерно одинаковы. На менее горячих звездах интенсивнее водородный цикл, на более горячих – углеродный.

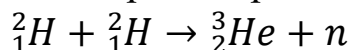
Управляемый термоядерный синтез

Главной проблемой создания управляемого термоядерного синтеза является разогрев реагентов до очень высоких температур, десятков, а то и сотен тысяч градусов. При такой температуре любое вещество превращается в полностью ионизированную плазму. Удержание такой плазмы осуществляется магнитным полем, а разогрев с помощью лазерного излучателя. Наиболее перспективно с точки зрения практического использования считаются следующие реакции синтеза.

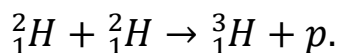
1. Дейтерий тритиевая реакция



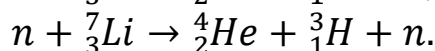
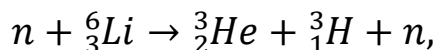
2. Дейтерий дейтериевая реакция



или



Запас дейтерия на земле практически неисчерпаем, так как он содержится в океанской воде, составляет порядка 0,015% от всего естественного водорода. Трития достаточно много на луне. Он образуется там под воздействием космических лучей. Но можно его воспроизводить и на Земле, например, термоядерный синтез – в водородной бомбе



Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. В естественном уране содержится...

а) 63,1% ${}^{238}_{92}\text{U}$ и 37,9% ${}^{235}_{92}\text{U}$;

b) 37,9% $^{238}_{92}\text{U}$ и 63,1% $^{235}_{92}\text{U}$;

c) 0,7% $^{238}_{92}\text{U}$ и 99,3% $^{235}_{92}\text{U}$;

d) 99,3% $^{238}_{92}\text{U}$ и 0,7% $^{235}_{92}\text{U}$.

2. Деление ядер урана $^{238}_{92}\text{U}$ могут вызвать только...

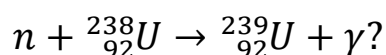
a) нейтроны с энергией меньше 1МэВ;

b) нейтроны с энергией больше 1МэВ;

c) протоны с энергией меньше 1МэВ;

d) протоны с энергией больше 1МэВ.

3. Какие нейтроны с большей вероятностью участвуют в радиационном захвате



a) Тепловые.

b) Резонансные.

c) Промежуточные.

d) Быстрые.

4. В обогащенном уране, количество урана 235 должно составлять не менее...

a) 15%;

b) 30%;

c) 45%;

d) 60%.

5. Вероятность захвата ураном $^{235}_{92}\text{U}$ нейтрона возрастает при взаимодействии с какими нейтронами?

a) Тепловыми.

b) Резонансными.

c) Промежуточными.

d) Быстрыми.

6. Для чего используют дейтерий, входящий в состав тяжелой воды, графит, бериллий в цепных ядерных реакциях с ураном $^{235}_{92}\text{U}$.

a) Для ускорения нейтронов.

b) Для замедления нейтронов.

c) Для обогащения урана.

d) Для увеличения массы действующего вещества.

7. В каких устройствах протекает управляемая цепная реакция деления тяжелых ядер?

a) Ускоритель.

b) Ядерная бомба.

с) Ядерный реактор.

д) Детектор частиц.

8. В природе термоядерный синтез протекает

а) на поверхности Земли.

б) в недрах звезд.

с) в космических лучах.

д) в любых условиях.

9. Реакторы, в которых быстрые нейтроны могут воспроизводить ядерное топливо называют...

а) ускорителями;

б) замедлителями;

с) размножителями;

д) делителями.

10. В рабочем режиме реактора коэффициент размножения нейтронов...

а) $k = 0$;

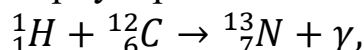
б) $k < 1$;

с) $k = 1$;

д) $k > 1$.

Способ расчета энергического выхода

Пример. Рассмотрим ядерную реакцию



происходящую в циклах термоядерных превращений в недрах Солнца. Построим для данной реакции энергетическую диаграмму (рис. 14.7).

Один нуклон входит в состав протона до взаимодействия (реакции) он имел энергию связи, которая была равна нулю. Двенадцать нуклонов, входящие в состав углерода, имели до взаимодействия энергию связи $\varepsilon_{\text{св}} = -7,680 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}$.

В результате реакции, нуклон, который был свободен перешел на уровень нуклона в ядре атома азота-13, и двенадцать нуклонов углерода тоже перешли на уровень $\varepsilon_{\text{св}} = -7,239 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}$.

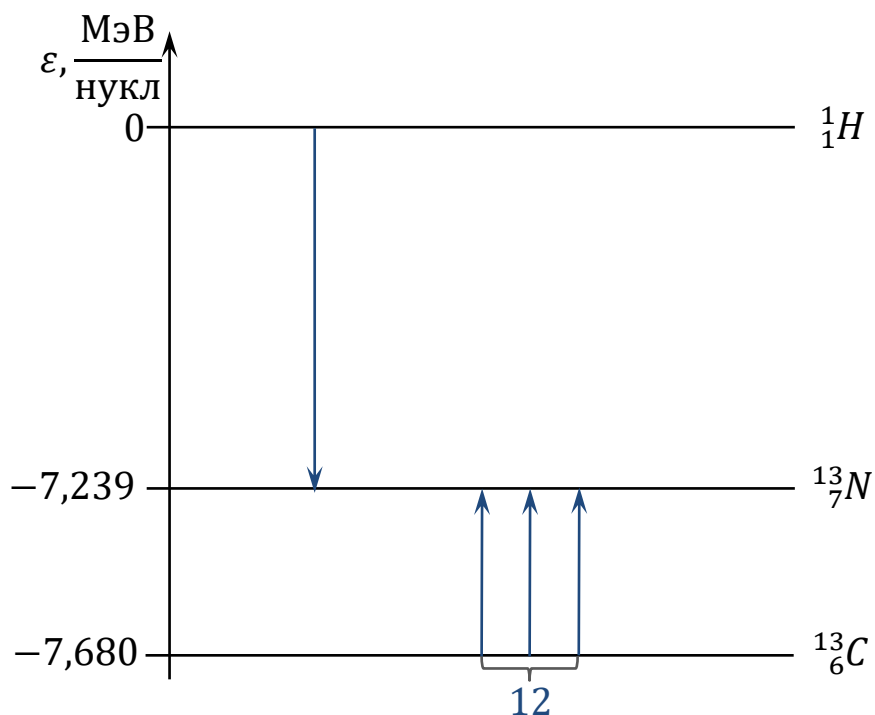


Рис. 14.7.

Изменение энергии системы нуклонов равно сумме изменений, происходящих с каждым нуклоном, поэтому можно записать следующее равенство

$$\Delta E = 12(7,239 - 7,680) + 7,239 = 1,947 \text{ МэВ.}$$

Задание 2. Рассчитать энергетический выход всех ядерных реакций, протекающих в углеродно-азотном и водородном циклах термоядерных превращений в недрах Солнца.

Углеродно-азотный цикл

- 1) ${}^1_1\text{H} + {}^{12}_6\text{C} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + \gamma$ (расчитано в примере),
- 2) ${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + e^+ + \nu$,
- 3) ${}^1_1\text{H} + {}^{13}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \gamma$,
- 4) ${}^1_1\text{H} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{15}_8\text{O} + \gamma$,
- 5) ${}^{15}_8\text{O} \rightarrow {}^{15}_7\text{N} + e^+ + \nu$,
- 6) ${}^1_1\text{H} + {}^{15}_7\text{N} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He}$.

Водородный цикл

- 7) ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{H} + e^+ + \nu$,
- 8) ${}^2_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma$,
- 9) ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{H}$.

Глава 15. АНТИЧАСТИЦЫ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Теория Дирака](#)
- [Пространство Минковского](#)
- [Симметрия пространства Минковского и античастицы](#)
- [Материалы для практической работы](#)

15.1. Теория Дирака

В 1928 году Полю Дираку удалось объединить квантовую механику и специальную теорию относительности. Он создал релятивистскую квантовую механику электрона. В частности он получил уравнение связывающее энергию и импульс

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^4.$$

Из которого следовало, что

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

С физической точки зрения отрицательная энергия не допустима. Частица, с отрицательной энергией сталкиваясь с другой частицей и передавая ей, часть своей энергии приобретала бы еще большую отрицательную энергию. В результате эта частица могла бы приобрести сколь угодно большую по модулю отрицательную энергию, совершая при этом бесконечную работу над другими телами. В классической механике возможность существования отрицательной энергии можно просто проигнорировать дело в том, что области положительной и отрицательной энергии отделены друг от друга энергетической щелью

$$\Delta = 2mc^2.$$

Поэтому если при «сотворении мира» все электроны обладали положительной энергией, то так как в классической физике энергия должна меняться непрерывно электрон не сможет преодолеть энергетическую щель и приобрести отрицательную энергию. В квантовой механике энергия может меняться скачком, поэтому, наоборот, из-за стремления любой системы к минимуму энергии все электроны должны перейти в область отрицательной энергии. Для преодоления этой трудности П. Дирак в 1930 году предложил модель вакуума (там, где нет частиц с положительной энергией) в котором находятся электроны с отрицательными энергиями, причем эти электроны занимают все энергетические уровни. Таким образом, вакуум становится отри-

цательно заряженным с бесконечно большой плотностью заряда. Однако без реальных частиц этот вакуум никак себя не проявляет. Допустим теперь, что в таком дираковском вакууме один электрон покинул свой отрицательный энергетический уровень.

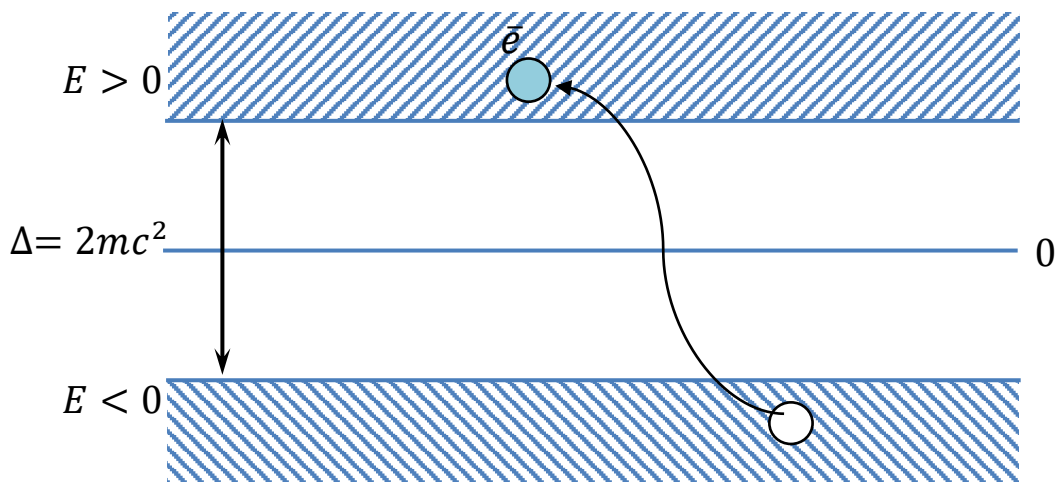


Рис. 15.1.

Он может перейти лишь в область с положительной энергией, преодолев энергетическую щель. Отсутствие электронов в области с отрицательной энергией будет проявлять себя как частица с положительным зарядом и положительной энергией. Сам Дирак думал, что это протон, но в том же 1930 году Джулиус Роберт Оппенгеймер указал, что масса этой частицы должна совпадать с массой электрона и назвал ее позитроном. Породить электрон позитронную пару может достаточно энергичный фотон, наоборот, если электрон вернется в отрицательную область, исчезнут и электрон и позитрон, произойдет аннигиляция с выделением энергией

$$\begin{aligned}\gamma &\rightarrow \bar{e} + e^+, \\ \bar{e} + e^+ &\rightarrow \gamma.\end{aligned}$$

Однако оказалось, что такие реакции противоречат некоторым законам сохранения. Реально могут происходить похожие реакции

$$\gamma + X \rightarrow X + \bar{e} + e^+,$$

где X – некоторое ядро.

$$\bar{e} + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

Минимальная энергия фотона, которая может породить электронно-позитронную пару, составляет

$$2mc^2 \approx 1\text{МэВ}.$$

Позитрон был первой античастицей предсказанной теоретически. В 1932 году он был открыт экспериментально в космических лу-

чах. А в 1933 году наблюдались возникновения электронно-позитронных пар и аннигиляция электрона и позитрона. В середине 30х годов возникла идея о том, что и у других частиц могут быть античастицы, но обнаружить их экспериментально долгое время не удавалось. Дело в том, что для их возникновения необходимы значительно большие энергии, так для порождения антипротона нужна энергия 5,6 ГэВ.

В 1955 году, когда был запущен ускоритель на энергию 6 ГэВ, был открыт антипротон в реакции

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

А в 1960 году открыт антинейтрон в так называемой реакции перезарядки

$$p + \bar{p} \rightarrow n + \bar{n}.$$

Позже от идеи Дирака о вакууме, заполненном электронами с отрицательными энергиями, пришлось отказаться. Дело в том, что античастицы есть у частиц с целым спином, для которых принцип Паули не выполняется. Оказалось, что существование античастиц это проявление фундаментальных свойств симметрии физических законов.

15.2. Пространство Минковского

Пусть первое событие происходит в точке с координатой (x_1, y_1, z_1) в момент времени t_1 . А второе событие в точке с координатами (x_2, y_2, z_2) в момент времени t_2 .

Согласно специальной теории относительности ни расстояние между точками, в которых произошли события, ни промежуток времени между событиями не являются инвариантами относительно разных инерциальных систем отсчета. Этим свойством (свойством инвариантности) обладает некий интервал между событиями ΔS , квадрат которого

$$(\Delta S)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

где c – скорость света.

Этот интервал между событиями остаётся неизменным при переходе из одной инерционной системы отсчета в другую. Поэтому он является объективной характеристикой удаленности событий.

Эта удаленность соответствует расстоянию между точками пространства Минковского в четырехмерном пространстве трех координат x, y, z и четвертой координаты ict , где i – мнимая единица.

Рассмотрим одномерный случай, в котором состояние материальной точки описывается координатой x и временем t .

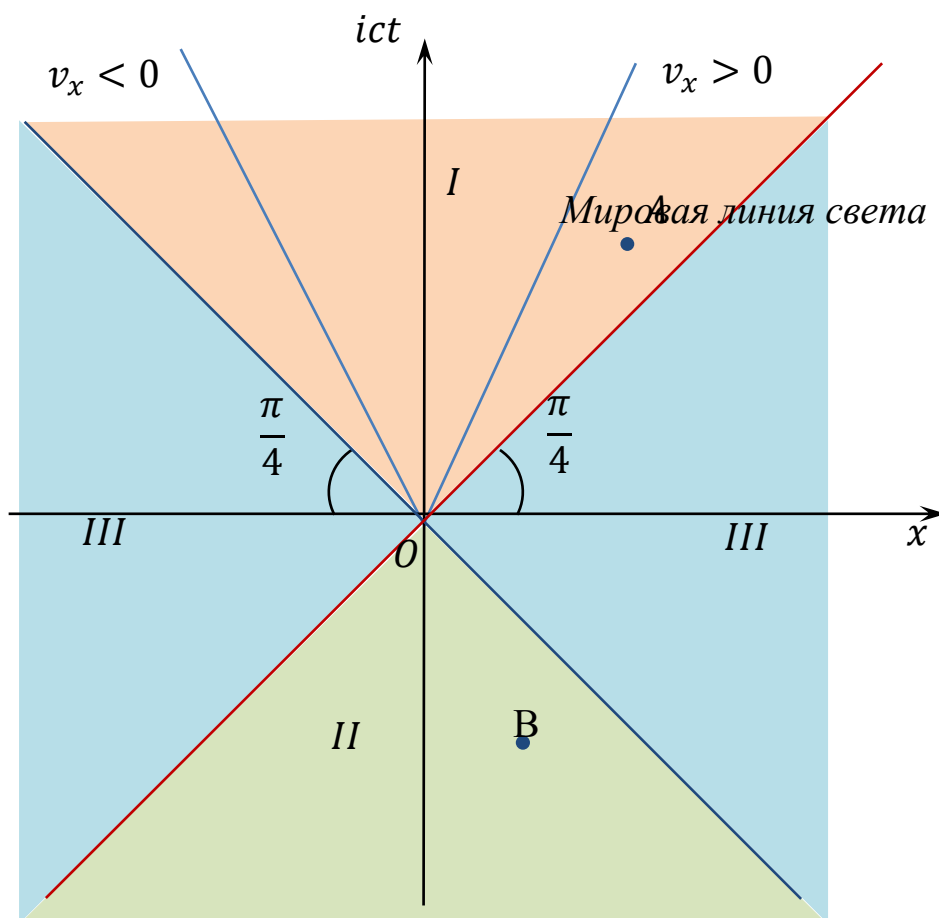


Рис. 15.2.

Пусть в начальный момент времени тело находилось в точке с координатой $x = 0$, тогда последующее состояние этого тела будет определять линию, которая называется *мировой линией*.

Например, если тело покоится, мировая линия совпадает с осью ict . Если тело движется с постоянной скоростью v , то мировая линия будет лучом, выходящим из точки O . Угол, который образует этот луч с осью ict , зависит от величины скорости и от ее направления.

Так как для любого материального объекта $v \leq c$ угол, который образует мировая линия, такого тела не превосходит $\frac{\pi}{4}$. Если $v = c$, то этот объект представляет мировую линию света. Множество всех мировых линий образует световой конус. Для всех тел с массой покоя $m_0 > 0$ находящихся в начальный момент в точке O мировые линии находятся внутри светового конуса.

Сам световой конус в одномерном случае задается формулой

$$(ct)^2 - x^2 = 0,$$

в трехмерном случае

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Область I – область абсолютного будущего. События в точке O может оказать воздействие на любое событие A в этой области.

Область II – область абсолютного прошлого. Любое событие B в этой области может повлиять на событие в точке O .

События в области III не могут быть связаны с событиями в точке O ни какими причинно следственными связями.

→ Если интервал между событиями $\Delta S = 0$ его называют светоподобным.

→ Если ΔS действительное число ($\Delta S^2 > 0$) то интервал называют времениподобным.

→ Если $\Delta S^2 < 0$, где ΔS – мнимое число интервал пространственноподобный.

Если брать интервал от события O , то времениподобные интервалы дадут области I и II , а пространственноподобные дадут область III , светоподобные интервалы с событием O дают точки светового конуса.

Пространство Минковского, например, можно использовать для вывода преобразований Лоренца. Рассмотрим поворот системы координат на угол φ (рис. 15.3):

$$\begin{aligned} u' &= DF - AD, \\ u' &= u \cos \varphi - x \sin \varphi, \\ x' &= OA + AB + BC, \\ x' &= x \cos \varphi + DB \sin \varphi + BE \sin \varphi, \\ x' &= x \cos \varphi + u \sin \varphi, \\ \begin{cases} x' = x \cos \varphi + u \sin \varphi, \\ u' = -x \sin \varphi + u \cos \varphi, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

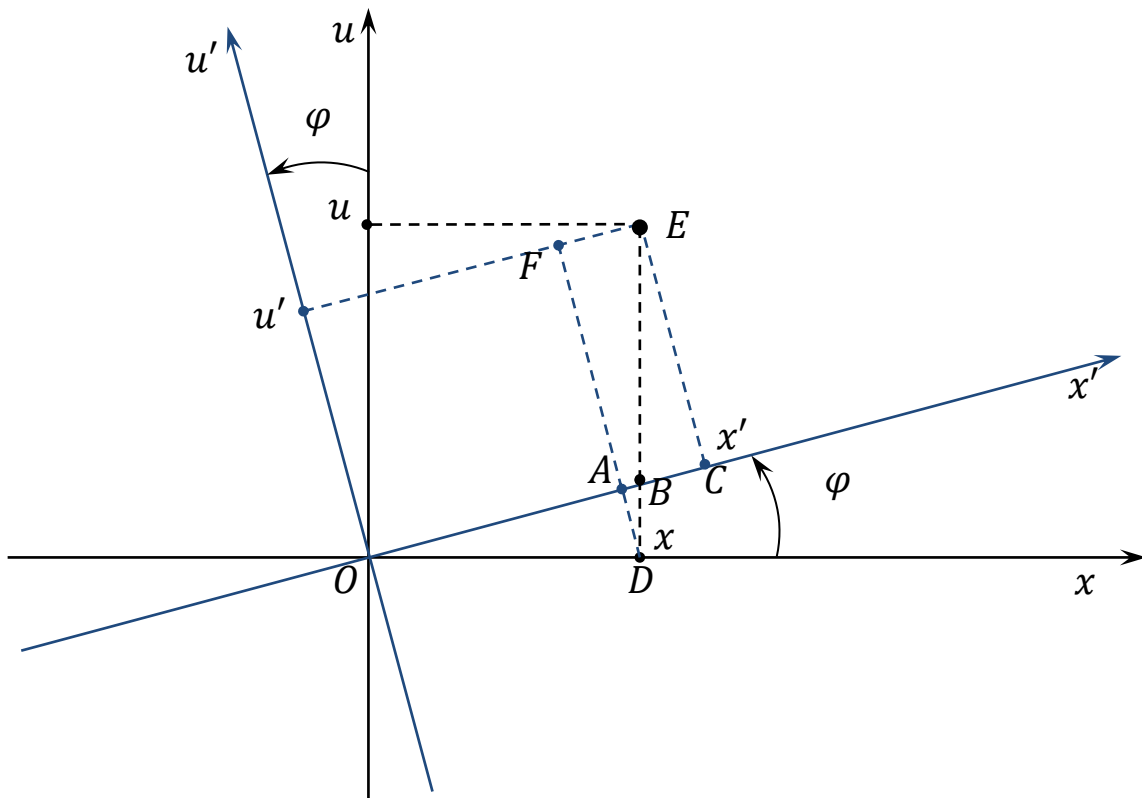


Рис. 15.3.

Таким образом, окончательно получаем

$$\hat{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} = \hat{D}_\varphi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, как пространства Минковского позволяют получить преобразования Лоренца в СТО, которые связывают координаты в двух инерционных системах отсчета движущихся относительно друг друга со скоростью v . Будем рассматривать одномерный случай. Пространства Минковского в одномерном случае представлено на рис. 15.2.

Мировая линия тела находящегося в начальный момент времени в начале координат и движущегося со скоростью v представлена на рис. 15.4.

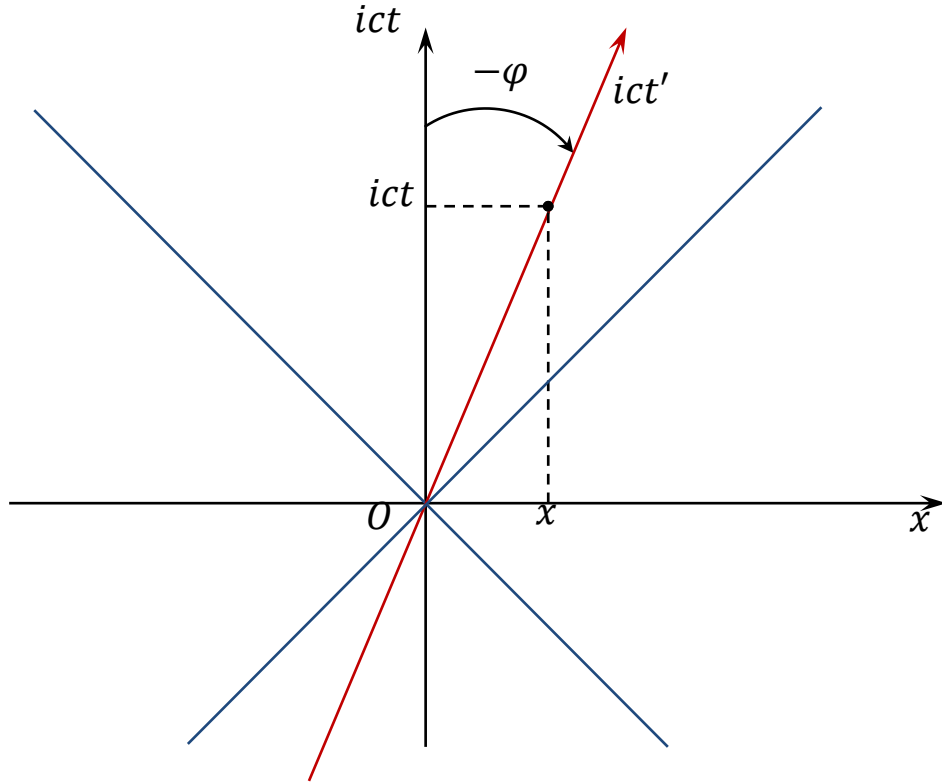


Рис. 15.4.

Для перехода в новую систему отсчета необходимо осуществить поворот на угол $-\varphi$, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{x}{ict} = -i \frac{x}{ct} = -i \frac{v}{c}, \\ \hat{D}_{\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \hat{D}_{-\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \sin \varphi &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{-i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

тогда $\cos \varphi = \gamma$, $\sin \varphi = -i\beta\gamma$ и

$$\hat{D}_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma \\ -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = D_{-\varphi} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x - \beta ct \\ -i\beta x + ict \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x - vt \\ ic \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

15.3. Симметрия пространства Минковского и античастицы

Мы убедились, что переход от одной инерционной системы к другой представляет собой поворот в пространстве Минковского.

При этом меняются характеристики событий (координаты, импульс, энергия), но не меняется интервал между событиями ΔS . Наряду с поворотами можно рассмотреть и другие преобразования меняющие ΔS .

Например, инверсия пространственных координат

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -y, \\ z' &= -z, \end{aligned}$$

с одновременным обращением времени

$$t' = -t.$$

С точки зрения анализа событий изменение знаков одной из координат означает, что могут существовать и объекты зеркально равные тем, что мы наблюдаем. Отражение всех пространственных координат – это центр инверсии, так же рассматриваются зеркально равные события, при чем скорости, а значит и импульсы меняют свое направление на противоположные.

Обращение времени физически означает, что наряду с реально существующим порядком событий может существовать и обратный, при котором начальное и конечное меняются местами, а все промежуточные события происходят в обратном порядке. Так же обратимые события могут существовать, а могут не существовать реально также в прочем, как и зеркально равные события.

Рассмотрим теперь инверсию всех четырех координат пространства Минковского. Математически это преобразование может быть представлено как поворот пространства Минковского на некоторый мнимый угол. Согласно теории относительности все законы природы инвариантны относительно поворотов пространства Минковского. *Изменение пространственных координат называют P -симметрией, а обращение времени T -симметрией.*

Таким образом, можно предположить, что пространство Минковского обладает PT -симметрией.

Оказалось, что PT -симметрия меняет импульс частицы, а так же все заряды на противоположные. *В этом смысле PT -симметричная частица по отношению к исходной частице является античастицей.*

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Релятивистскую квантовую механику электрона в 1928 году создал...

- a) А. Эйнштейн;
- b) П. Дирак;
- c) Н. Бор;
- d) В. Паули.

2. Первая теоретически предсказанная античастица, открытая экспериментально в 1932 году в космических лучах.

- a) Электрон.
- b) Антипротон.
- c) Позитрон.
- d) Антинейтрон.

3. Какую античастицу открыли в 1960 году в так называемой реакции перезарядки?

- a) Электрон.
- b) Антипротон.
- c) Позитрон.
- d) Антинейтрон.

4. Минимальная энергия фотона, которая может породить электронно-позитронную пару, составляет...

- a) $2mc$;
- b) mc ;
- c) $2mc^2$;

d) mc^2 .

5. Процесс взаимодействия частицы и античастицы называется...

- a) цепная реакция;
- b) аннигиляция;
- c) синтез;
- d) распад.

6. Согласно специальной теории относительности инвариантом относительно разных инерциальных систем отсчета является...

a) Координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) точек, в которых произошли события;

b) Расстояние между точками

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2},$$

в которых произошли события;

c) Промежуток времени $t_2 - t_1$ между событиями;

d) Интервал между событиями

$$\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}.$$

7. В одномерном случае в пространстве Минковского, в котором состояние материальной точки описывается координатой x и временем t . Если тело в начальный момент времени имело координату $x = 0$, то последующее состояние покоящегося тела будет описывать мировая линия, которая...

- a) совпадает с осью x ;
- b) совпадает с осью ict ;
- c) совпадает с мировой линией света.
- d) образует с осью x угол $\frac{\pi}{4}$.

8. В одномерном случае в пространстве Минковского, в котором состояние материальной точки описывается координатой x и временем t . Если тело в начальный момент времени имело координату $x = 0$, то последующее состояние тела движущегося со скоростью $v = c$ будет описывать мировая линия, которая...

- a) совпадает с осью x ;
- b) совпадает с осью ict ;
- c) совпадает с мировой линией света;
- d) образует с осью x угол $\frac{\pi}{4}$.

9. Если интервал между событиями $\Delta S = 0$, то его называют...

- a) времениподобным;
- b) пространственноподобным;
- c) временипространственноподобным;
- d) светоподобным.

10. Пространство Минковского о...

- a) обладает PT -симметрией;
- b) обладает только P -симметрией;
- c) обладает только T -симметрией;
- d) не обладает симметрией.

Диаграммы Минковского

На диаграмме Минковского отображаются только две из четырёх координат пространства Минковского

x и ct .

Поскольку их размерности совпадают (обе координаты имеют размерность длины), то масштабы отображения (единичные отрезки вдоль соответствующих осей) можно выбрать равными.

Отличие от традиционных в классической механике графиков зависимости координаты от времени заключается в том, что пространственная и временная оси координат поменяны местами друг с другом: время увеличивается не слева направо, а снизу вверх. Каждая точка диаграммы соответствует некоторому событию в двумерном пространстве-времени.

Оси координат через равные интервалы Δ_0 пересекаются линиями координатной сетки, параллельными осям:

– линии, параллельные пространственной оси x , отмечают все одновременные события $ct = const$;

– линии, параллельные оси времени ct , соответствуют событиям, произошедшим в точке с одной координатой $x = const$.

Множество точек-событий, соответствующих нахождению движущегося тела в различных точках пространства в разное время, образует на диаграмме Минковского *мировую линию*.

Неподвижное относительно заданной системы отсчёта тело прочерчивает мировую линию, параллельную оси ct . Если объект движется со скоростью света, то его мировая линия в силу выбора масштаба — прямая, параллельная биссектрисе осей координат. На рис. 15.5 линии (1) и (2) - мировые линии импульсов света,

излучённых в нулевой момент времени в начале координат (событие O) в разные стороны: по направлению оси x (1) и против неё (2).

Мировая линия тела, движущегося равномерно со скоростью v - также прямая. Её наклон удобно отсчитывать от временной оси

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}.$$

На рис. 15.5 изображены мировые линии тел с законами движения

$$x(t) = 0,25 ct \text{ (линия (3))},$$

$$x(t) = 2\Delta_0 + 0,25 ct \text{ (линия (4))}.$$

Координата первого из них в нулевой момент времени совпадает с началом отсчёта O , второго — нет. Для любого движущегося тела

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 1.$$

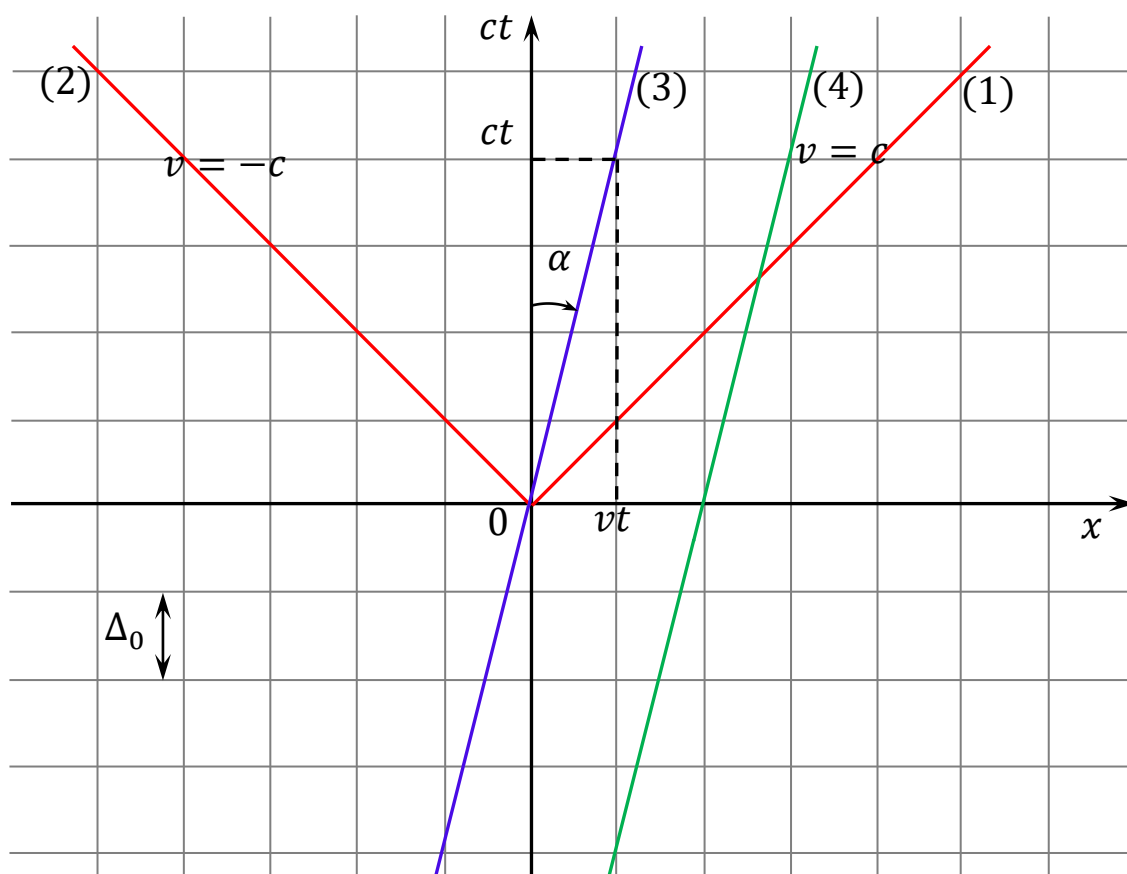


Рис. 15.5.

Задание 2. Изобразите на диаграмме Минковского мировую линию точки, которая в нулевой момент времени начала движение со

скоростью v_0 , в момент времени T увеличила скорость до $2v_0$, а в момент времени $2T$ изменила её на $-v_0$.

Задание 3. В системе отсчёта Земли космический корабль движется с постоянной скоростью $v = 0.5c$ по направлению к ней. Находясь на расстоянии L от Земли, корабль излучает в её сторону короткий импульс света (событие А). В тот момент времени, когда импульс достигает Земли, с неё излучают такой же импульс в сторону корабля (событие В). Нарисуйте мировые линии Земли, корабля и световых импульсов на диаграмме Минковского:

- а) связав её с Землёй и расположив в начале координат событие В;
- б) связав её с кораблём и расположив в начале координат событие А.

Глава 16. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Классификация элементарных частиц](#)
- [Характеристики частиц](#)
- [Законы сохранения в физике частиц](#)
- [Мультиплеты частиц](#)
- [Кварковая модель](#)
- [Материалы для практической работы](#)

16.1. Классификация элементарных частиц

Первоначально термин «элементарные частицы» означал, что эти частицы сами не делятся на другие, более мелкие. Поэтому считалось, что они сами не имеют структуры. Однако со временем оказалось, что эти частицы способны при определенных условиях превращаться друг в друга, распадаться на другие частицы. Поэтому сейчас элементарными частицами называют микрообъекты, не являющиеся атомами или ядрами атомов, кроме ядра атома водорода.

Предпринимаются попытки выделить истинно элементарные частицы. Но вопрос об их существовании пока открыт.

Классификации элементарных частиц по различным основаниям представлены на рис. 16.1.



Рис. 16.1.

По характеру поведения адроны разбивают на *изомультиплеты*, массы частиц в которых обычно примерно одинаковы, и они одинаково ведут себя с точки зрения сильного взаимодействия.

Различия аденонов от адронов обусловлены электромагнитным и слабым взаимодействиями.

Аденоны делятся на лептоны и кванты классических полей (рис. 16.2)

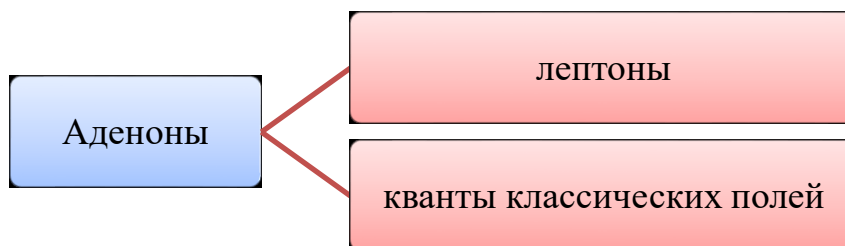


Рис. 16.2.

В лептонах выделяют *лептонные дуплеты*, по аналогии с изомультиплетами адронов.

Стабильные адроны – бозоны называют *мезонами*. Стабильные адроны – фермионы называют *барионами*. Резонансы-бозоны назы-

вают мезонными резонансами. Резонансы-фермионы называют барионными резонансами.

У большинства частиц есть античастицы, но у некоторых частиц античастица является самой частицей, например у фотона, гравитона, нейтрального пиона π^0 .

16.2. Характеристики частиц

1. Основная характеристика частиц – масса. Как правило, измеряется в МэВ.

2. Спин J измеряется в постоянных Планка $\hbar$, и определяет собственный момент импульса частицы. Спин кратен $\frac{1}{2}$, известны частицы со спином от $0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{11}{2}$ (в квантовой механике может обозначаться через s , в физике элементарных частиц возможна путаница со странностью S).

3. Пространственная четность η_p , определяет поведение волновой функции частицы относительно пространственной инверсии.

→ Если волновая функция меняет знак, то пространственная четность $\eta_p = -1$.

→ Если волновая функция не меняет знак, то пространственная четность $\eta_p = 1$.

4. Электрический заряд q , измеряется в элементарных зарядах. Для большинства частиц $q = 0; \pm 1$. Но есть некоторые – резонансы с $q = \pm 2$.

5. Лептонный заряд L :

→ $L = +1$ для лептонов,

→ $L = -1$ для антилептонов,

→ $L = 0$ для всех остальных частиц.

Лептонный заряд равен сумме электронного, мюонного и таонного лептонных зарядов

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau.$$

6. Барионный заряд B :

→ $B = +1$ – для барионов;

→ $B = -1$ – для антибарионов;

→ $B = 0$ – для всех остальных частиц.

7. *Изоспин* T приписывается изомультиплетам так, что число частиц в изомультиплете выражается формулой

$$N = 2T + 1.$$

8. *Проекция изоспина* T_3 различает отдельные частицы в изомультиплете, пробегает значения от $-T$ до $+T$ с шагом 1.

Через проекцию изоспина для нуклонов и пионов рассчитывается их электрический заряд по формуле

$$q = T_3 + \frac{1}{2}B.$$

9. *Странность* S :

→ $S = 0$ для обычных частиц (пионов, этонов, нуклонов).

→ $S = +1$ у каонов;

→ $S = -1$ у гиперонов Λ (лямбда-гипероны) и Σ (сигма-гипероны);

→ $S = -2$ у гиперона Ξ (кси-гипероны);

→ $S = -3$ у гиперона Ω (омега-гипероны).

Эти частицы называют *странными*. Для этих частиц формула расчета электрического заряда

$$q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S).$$

10. *Гиперзаряд* Y :

→ для обычных странных частиц

$$Y = B + S,$$

а электрический заряд

$$q = T_3 + \frac{1}{2}Y;$$

→ для любого изомультиплета

$$Y = 2\bar{q}.$$

11. *Очарование* C вводится для очарованных частиц так, что их заряд

$$q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S + C).$$

Соответственно их гиперзаряд

$$Y = B + S + C.$$

16.3. Законы сохранения в физике частиц

Все законы сохранения в физике частиц делятся на универсальные, свойственные всем типам взаимодействия, и те, которые справедливы лишь для определенных типов взаимодействия.

К универсальным законам относятся.

1) *Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса*, которые определяют динамику и кинематику превращений, то есть как распределяются между частицами энергия и количество движения.

2) *Закон сохранения момента импульса*, с которым связан закон сохранения спина. *Если арифметическая сумма спинов равна целому (полуцелому) числу в начальном состоянии, то она останется целой (полуцелой) и в конечном состоянии.*

Это правило отбора запрещает, например, распад нейтрона:

$$n \rightarrow p + e^{-},$$

так как спин слева полуцелый, а справа целый.

Разрешен распад

$$n \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}_e.$$

3) *Закон сохранения электрического заряда*. В частности, данный закон объясняет абсолютную стабильность электрона. Нет частиц, обладающих электрическим зарядом, более легких, чем электрон, то есть ему не на что распадаться.

4) *Закон сохранения лептонного заряда* и его компонентов. Формально аналогичен закону сохранения электрического заряда. Например, закон сохранения лептонного заряда запрещает распад

$$\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \gamma.$$

5) *Закон сохранения барионного заряда*. Одно из его следствий – абсолютная устойчивость протона, который является наиболее легким барионом.

В процессах, обусловленных только сильным взаимодействием, выполняется еще два закона.

- *Закон сохранения странности* – объясняет, в частности, тот факт, что странные частицы рождаются парами.

- *Закон сохранения изоспина* – применяется аналогично тому, как применяется закон сохранения спина: арифметическая сумма изоспинов в процессе превращения, обусловленного только сильным взаимодействием, остаются либо целыми, либо полуцелыми.

Последние два закона могут не выполняться, если процесс обусловлен слабым или электромагнитным взаимодействием.

В отличие от законов сохранения классической физики, которые являются законами запрета, законы сохранения в физике частиц являются законами дозволения.

Другими словами, в классической физике, если процесс не противоречит законам сохранения, это вовсе не означает, что он реализуется. В физике частиц любой процесс, разрешенный законами сохранения, где-нибудь реализуется.

16.4. Мультиплеты частиц

Рассмотрим несколько изомультиплетов в одномерном пространстве проекции изоспина.

Первый изомультиплет – нуклонный, представлен на рис. 16.3.

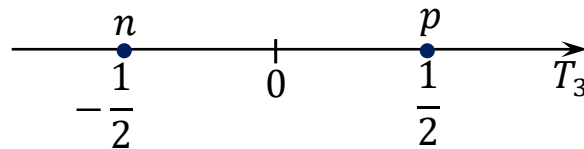
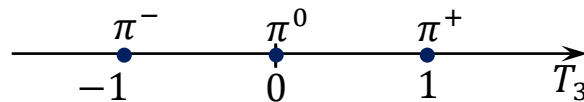


Рис. 16.3.

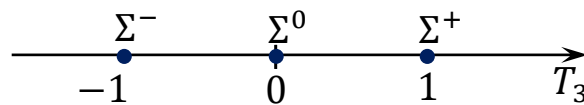
Пионный изомультиплет представлен на рис. 16.4.



$$Y = 0$$

Рис. 16.4.

Сигма-гиперонный изомультиплет изображен на рис. 16.5.



$$Y = B + S = 1 + (-1) = 0$$

Рис. 16.5.

Некоторые изомультиплеты объединяются в большие мультиплеты, но уже в пространстве $T_3 - Y$.

Рассмотрим сигма-гиперонный изомультиплет. Если к нему добавить нуклонный изомультиплет, ксионный изомультиплет и еще две частицы: лямбда-гиперон и сигма-гиперон, то получается так называемый *барионный октуплет* (рис. 16.6).

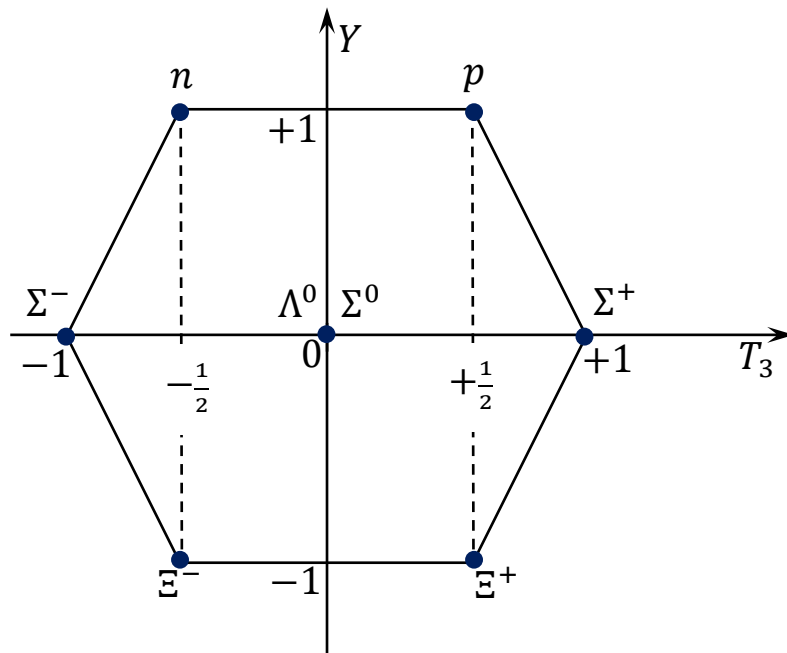


Рис. 16.6.

Аналогично можно построить *мезонный октуплет* (рис. 16.7).

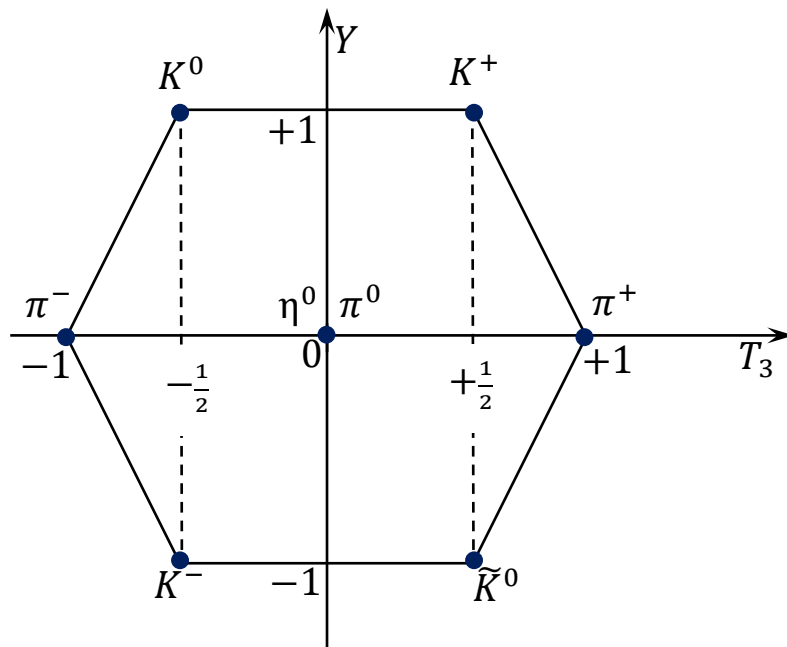


Рис. 16.7.

Еще один пример – *барионный декуплет*, который состоит из 9 барионных резонансов и омега – гиперона (рис. 16.8).

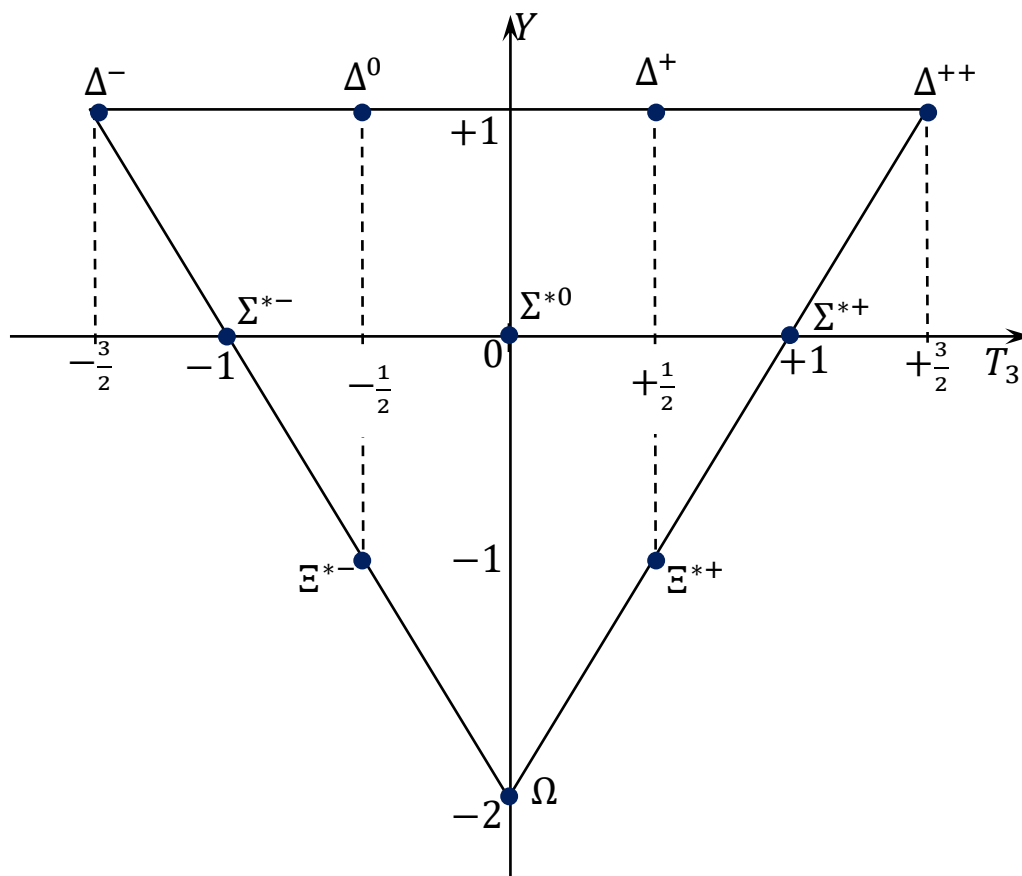


Рис. 16.8.

Построенные мультиплеты с их явной симметрией наталкивают на мысль о том, что эта симметрия должна объясняться их внутренним строением.

16.5. Кварковая модель

Многообразие адронов вызвало потребность в построении некоторой модели, в которой все частицы можно сконструировать из небольшого числа фундаментальных субчастиц. Эта идея была реализована в 1964 году Геллманом и Цвейгом. Они предложили в качестве таких фундаментальных субчастиц триплет адронов, которые называли *кварками*.

Первоначально было предложено три кварка, которые называли

u (up – верхний);
 d ($down$ – нижний);

s (странный).

В $T_3 - Y$ пространстве они образуют симметричный *триплет* (рис. 16.9).

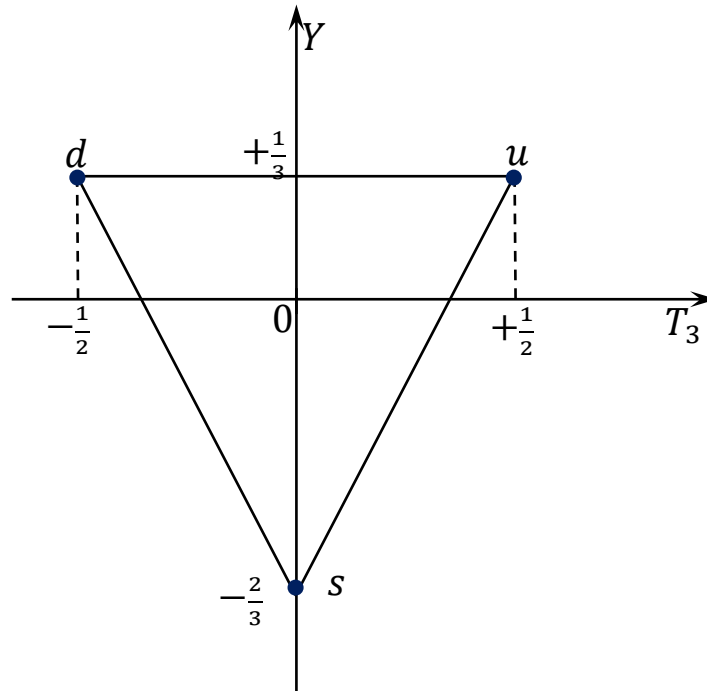


Рис. 16.9.

Кваркам приписывают $J = \frac{1}{2}$, $\eta_p = +1$, $B = +\frac{1}{3}$, $S = 0$ для u, d -кварка, $S = -1$ для s -кварка, $T_3 = \pm\frac{1}{2}$ для u, d -кварка, $T_3 = 0$ для s -кварка (см. таблицу 16.1).

Таблица 16.1

Кварки	J	η_p	B	T	T_3	Y	s	q
u	$\frac{1}{2}$	+1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	+1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	+1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$

Антикварки, для которых все заряды меняют знак, тоже образуют триплет (рис. 16.10).

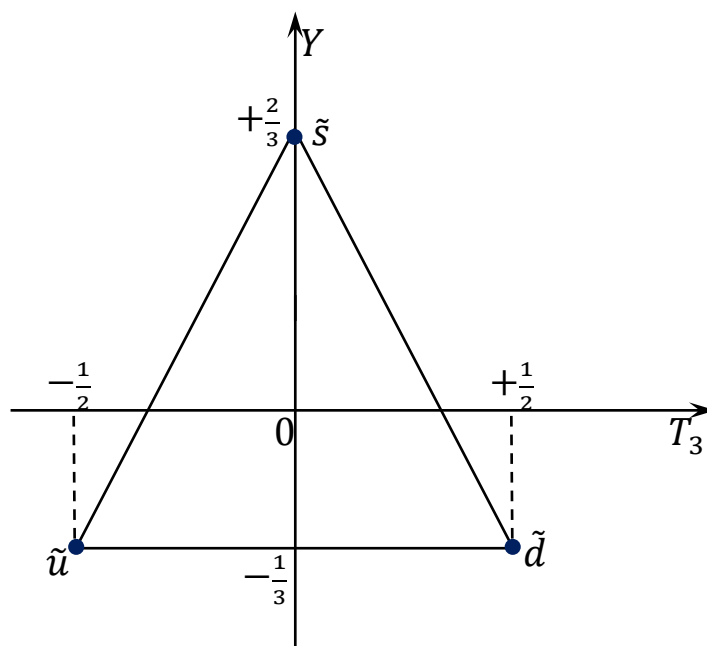


Рис. 16.10.

Кварки имеют полуцелый спин, то есть являются фермионами, значит для них справедлив принцип Паули: два фермиона не могут находиться в одном квантовом состоянии. Этот факт резко снижает число комбинаций, которые можно составить из кварков.

Чтобы разрешить эту проблему, кваркам приписали еще одно квантовое число, которое может принимать три различных значения. Оказалось удобным использовать в качестве такого параметра цвет:

R (*red* – красный);
 G (*green* – зеленый);
 B (*blue* – синий).

Антикварки имеют цвета дополнительные к цветам самих кварков:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= G + B, \\ \tilde{G} &= R + B, \\ \tilde{B} &= G + R,\end{aligned}$$

так, что вместе с кварками они в сумме дают белый цвет

$$R + \tilde{R} = G + \tilde{G} = B + \tilde{B} = RGB = \text{White}.$$

→ Оказалось, что любой адрон содержит такой набор кварков, что их суммарный цвет должен быть белым

$$R + G + B.$$

→ Мезоны – бозоны, их спин целый, поэтому мезоны состоят из кварка и антикварка. Причем, если цвет кварка C , то цвет антикварка $\tilde{C}$, а вместе

$$C + \tilde{C} = R + G + B.$$

→ Барионы – фермионы, их спин полуцелый, поэтому барионы состоят из трех кварков попарно различных цветов, так что в сумме обязательно будет белый.

Барионы, спин которых полуцелый представлены в таблице 16.2.

Таблица 16.2

Комбинация кварков	Ориентация спинов	J	T_3	B	s	Y	q	частица
uud	$\uparrow\uparrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	p
udd	$\uparrow\downarrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	n
uus	$\uparrow\uparrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	0	1	Σ^+
dds	$\uparrow\uparrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	-1	1	-1	0	-1	Σ^-
dss	$\uparrow\downarrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	-1	-1	Ξ^-
uss	$\uparrow\downarrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-2	-1	0	Ξ^0
uds	$\uparrow\uparrow\downarrow$	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	0	0	Σ^0
uds	$\uparrow\downarrow\uparrow$	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	0	0	Λ^0

Таким образом, мы построили барионный октет, используя кварковую модель строения адронов (рис. 16.11). При таком подходе отмеченная выше симметрия этого октета возникает как симметрия строения барионов.

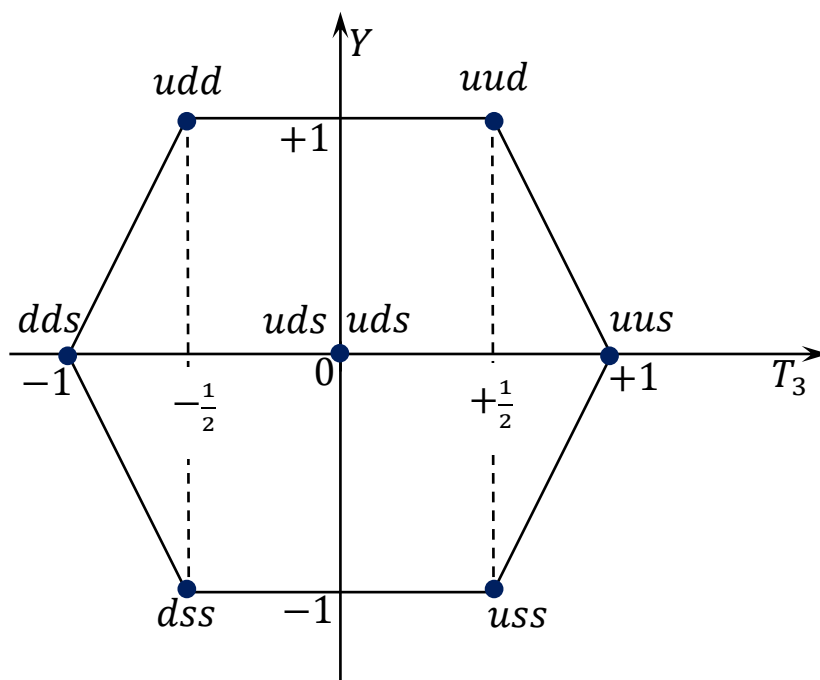


Рис. 16.11.

Аналогично строится барионный декуплет из барионов со спином $J = \frac{3}{2}$ (рис. 16.12, таблица 16.3).

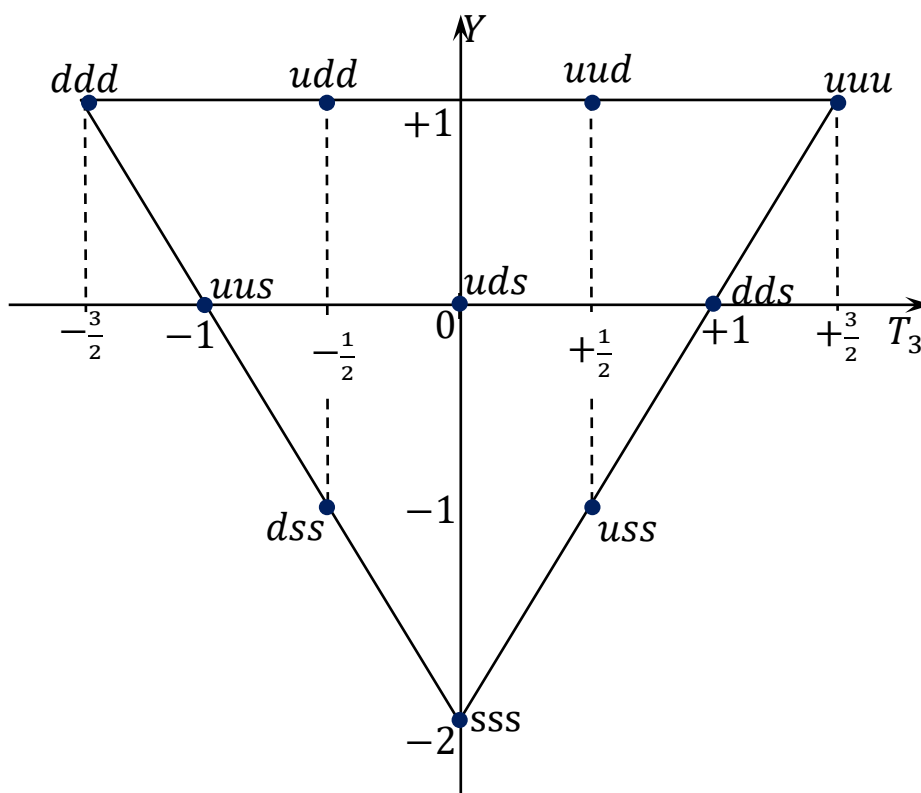


Рис. 16.12.

Таблица 16.3

Комбинация кварков	Ориентация спинов	J	T_3	B	s	Y	q	Частица
uuu	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	1	2	Δ^{++}
uud	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	Δ^+
udd	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	Δ^0
ddd	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	-1	Δ^-
uus	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	1	1	-1	0	1	Σ^{*+}
uds	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	0	1	-1	0	0	Σ^{*0}
dds	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	-1	1	-1	0	-1	Σ^{*-}
uss	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-2	-1	0	Ξ^{*0}
dss	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	-1	-1	Ξ^{-}
sss	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{3}{2}$	0	1	-3	-2	-1	Ω^{-}

Мезонный октет строится из адронов, состоящих из кварка и антикварка (таблица 16.4, рис. 16.13).

Для очарованных частиц в 1974 году пришлось ввести кварк c – очарованный кварк. В 1977 году пришлось ввести кварк b – прелестный (красивый) кварк. В 1995 году открыт t кварк – истинный кварк. Все эти кварки, как и u, d, s имеют полуцелый спин $J = \frac{1}{2}$, барионный заряд $B = \frac{1}{3}$, их странность $S = 0$. Электрический заряд $q = \frac{2}{3}$ для c -кварка, $q = -\frac{1}{3}$ для b -кварка, $q = \frac{2}{3}$ для t -кварка.

Для c -кварка вводится квантовое число $C = 1$ (очарование), для всех остальных оно равно нулю. Для b -кварка вводится квантовое число $b = 1$ (прелестность), для всех остальных оно равно нулю. Для

t -кварка вводится квантовое число $t = 1$ (истинность), для всех остальных оно равно нулю.

Таблица 16.4

Комбинация кварков	Ориентация спинов	J	T_3	B	s	Y	q	Частица
$u\tilde{d}$	$\uparrow\downarrow$	0	1	0	0	0	1	π^+
$u\tilde{s}$	$\uparrow\downarrow$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	K^+
$d\tilde{s}$	$\uparrow\downarrow$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	K^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\tilde{u} + d\tilde{d})$	$\uparrow\downarrow$	0	0	0	0	0	0	η^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\tilde{u} - d\tilde{d})$	$\uparrow\downarrow$	0	0	0	0	0	0	π^0

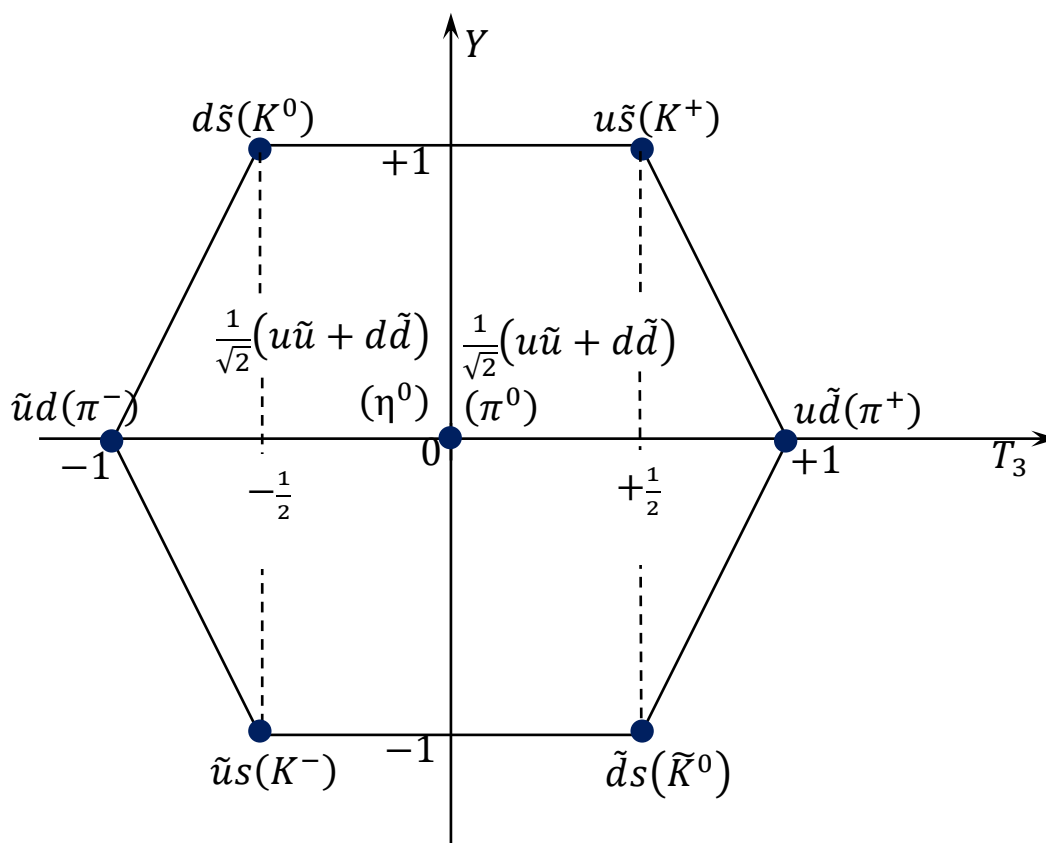


Рис. 16.13.

На рис. 16.14 представлена классификация частиц.

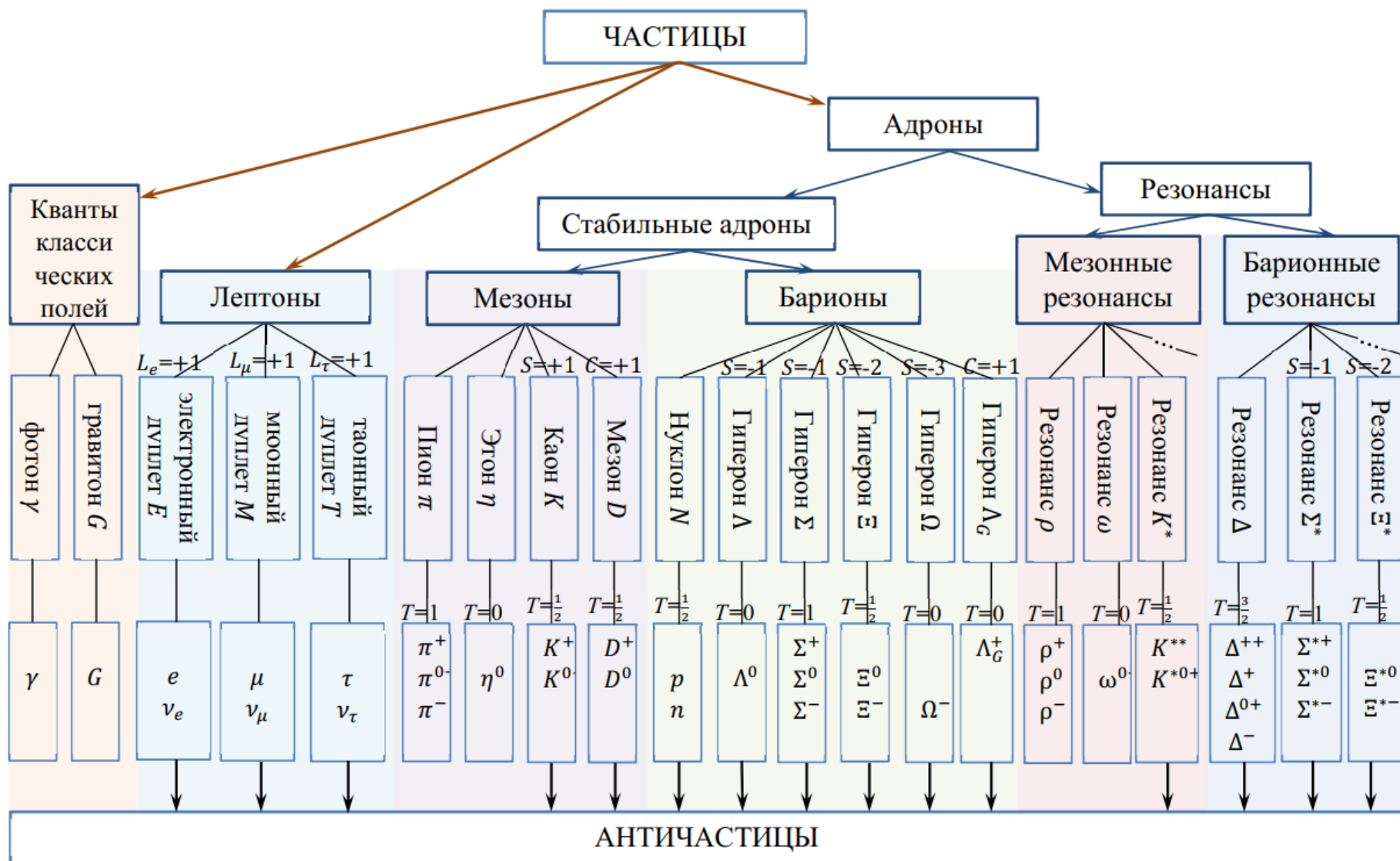


Рис. 16.14.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Какие частицы участвуют в сильном взаимодействии?

- a) Кванты классических полей.
- b) Фермионы.
- c) Лептоны.
- d) Адроны.

2. Аденоны делятся на

- a) лептоны и кванты классических полей;
- b) мезоны и барионы;
- c) мезонные и барионные резонансы;
- d) кварки и антикварки.

3. Установите соответствие между характеристикой частицы и ее обозначением.

- | | |
|----------------------|----------|
| (1) Спин. | a) T . |
| (2) Лептонный заряд. | b) L . |
| (3) Изоспин. | c) Y . |
| (4) Гиперзаряд. | d) J . |

4. Для пионов странность равна...

- a) -2 ;
- b) -1 ;
- c) 0 ;
- d) $+1$.

5. Для очарованных частиц электрический заряд определяется из выражения...

- a) $B + S$;
- b) $B + S + C$;
- c) $T_3 + \frac{1}{2}(B + S)$;
- d) $T_3 + \frac{1}{2}(B + S + C)$.

6. Какой из перечисленных законов запрещает распад нейтрона по формуле

$$n \rightarrow p + e^-?$$

- a) Закон сохранения энергии.
- b) Закон сохранения импульса.
- c) Закон сохранения спина.

d) Закон сохранения барионного заряда.

7. Какой из перечисленных законов запрещает распад мюона по формуле

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma?$$

a) Закон сохранения барионного заряда.

b) Закон сохранения лептонного заряда.

c) Закон сохранения электрического заряда.

d) Не запрещено законами сохранения для микрочастиц.

8. В барионный октуплет НЕ входят...

a) нейтрон;

b) протон;

c) электрон;

d) сигма-гиперон.

9. Каоны входят в ...

a) пионный изомультиплет;

b) сигма-гиперонный изомультиплет;

c) барионный октуплет;

d) мезонный октуплет.

10. Мезоны состоят из...

a) трех кварков попарно различных цветов;

b) кварка и антикварка;

c) кварка и двух антикварков;

d) из двух кварков и антикварка.

Элементарные частицы

При рождении и распаде частиц выполняется, помимо законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, ряд точных законов сохранения.

1. Закон сохранения электрического заряда q .

2. Закон сохранения барионного заряда B (рис. 16.15).

«Тильда» сверху в обозначении частицы является знаком античастицы.

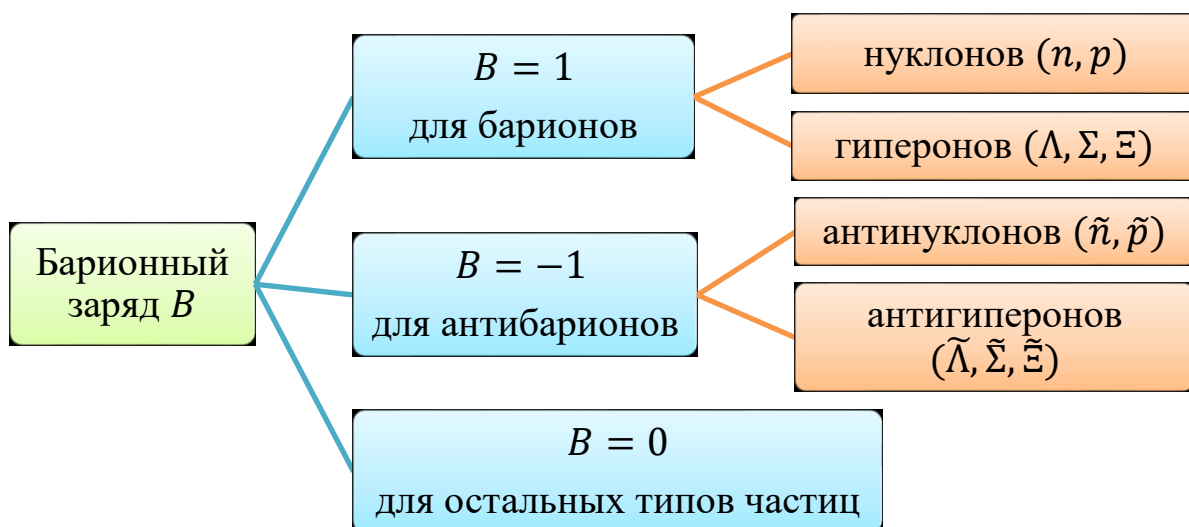


Рис. 16.15.

3. Закон сохранения лептонного заряда L (рис. 16.16), включает в себя

- сохранение электронного лептонного заряда L_e ;
- сохранение мюонного лептонного заряда L_μ ;
- сохранение таонного лептонного заряда L_τ .

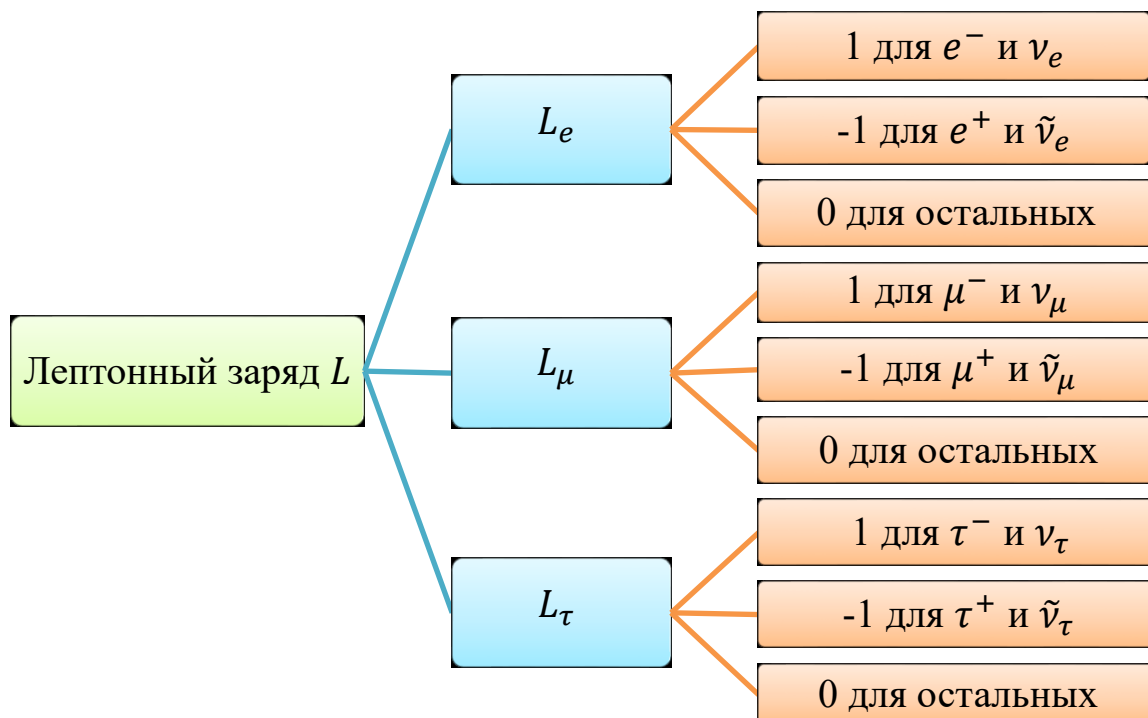


Рис. 16.16.

Задание 2. Указать, какие из приведенных ниже реакций запрещены перечисленными законами сохранения.

1. $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$.
2. $p \rightarrow n + e^+$.
3. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e$.
4. $K^+ \rightarrow \pi^- + 2e^+$.
5. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$.
6. $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$.
7. $\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+$.
8. $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + K^0$.

Решение.

1. Рассмотрим реакцию

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e,$$

где $\tilde{\nu}_e$ – электронное антинейтрино.

- а) электрический заряд q сохраняется

$$0 \rightarrow 1 + (-1) + 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 0.$$

- б) рассмотрим закон сохранения барионного заряда B , нейтрон n и протон p – барионы

$$B(n) = 1, \quad B(p) = 1,$$

электрон e^- и электронное антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ – лептоны

$$B(e^-) = 0, B(\tilde{\nu}_e) = 0,$$

тогда для барионного заряда получили

$$1 \rightarrow 1,$$

барионный заряд B сохраняется.

- в) рассмотрим закон сохранения лептонного заряда L ,

$$L(n) = 0, \quad L(p) = 0,$$

лептоны e^- и $\tilde{\nu}_e$ имеют электронный лептонный заряд

$$L_e(e^-) = 1, \quad L_e(\tilde{\nu}_e) = -1,$$

тогда для лептонного заряда получили

$$0 \rightarrow 0 + 1 + (-1) \Rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

лептонный заряд L сохраняется.

Реакция $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ не запрещена.

2. Рассмотрим реакцию

$$p \rightarrow n + e^+.$$

Протон p – барион, нейтрон n – барион, позитрон e^+ – лептон. Значит лептонный заряд L_e сохраняться в реакции не может. Законы сохранения для электрического q и барионного B зарядов выполняются.

Таким образом, реакция $p \rightarrow n + e^+$ запрещена законом сохранения электронного лептонного заряда.

Задание 3. Рассмотреть приведенные ниже распады и реакции и указать какие из них запрещены.

1. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$.
2. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_e$.
3. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e$.
4. $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$.
5. $\nu_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$.
6. $\tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$.
7. $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + \mu^+$ /
8. $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.
9. $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$.
10. $\tau^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$.

Глава 17. ЧЕТЫРЕ ТИПА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

→ [Вернуться к оглавлению](#)

Рассматриваемые вопросы

- [Электромагнитное взаимодействие](#)
- [Слабое взаимодействие](#)
- [Сильное взаимодействие](#)
- [Теория великого объединения](#)
- [Материалы для практической работы](#)

17.1. Электромагнитное взаимодействие

Взаимодействие с участием электромагнитного поля называют электромагнитным взаимодействием. С квантовой точки зрения сводится либо с реальным испусканием фотонов либо виртуальным обменом частицами – фотонами. Считается, что электромагнитное вза-

имодействие обладает бесконечно большим радиусом действия и сравнительно большой интенсивностью. Поэтому проявляется во всех трех масштабных уровнях в микромире, макромире и мега мире. Элементарным актом электромагнитного взаимодействия является испускание или поглощение фотонов. Этот элементарный акт можно изобразить с помощью диаграммы Феймана (рис. 17.1).

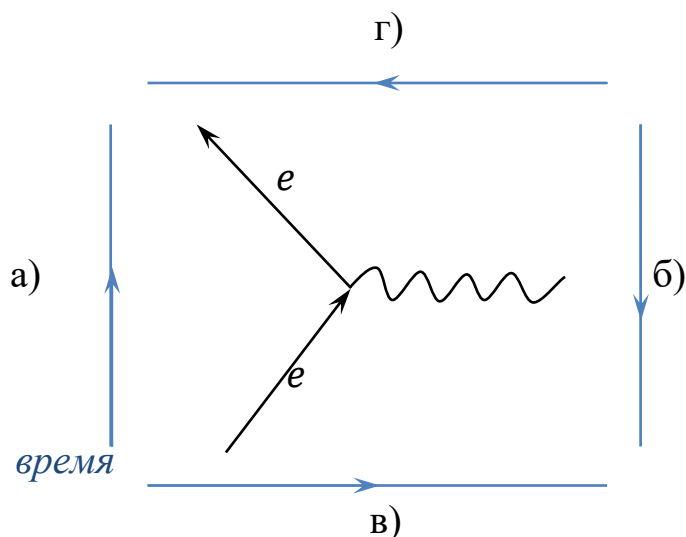


Рис. 17.1.

На рис. 17.1

- а) испускание или поглощение электроном фотона;
- б) испускание или поглощение позитроном фотона;
- в) аннигиляция электронно-позитронной пары;
- г) порождение фотоном электронно-позитронной пары.

Эти процессы реально не протекают, но они входят как часть в любой процесс с участием электромагнитного взаимодействия с тем расширением, что вместо электрона или позитрона могут быть и другие элементарные частицы.

Примеры превращений с участием только простейших взаимодействий рассмотрим также с помощью диаграммы Феймана. Будем далее считать, что если отдельно не оговорено, то ось времени направлена вертикально вверх.

Пример 1. Рассеяние электрона на электроне или взаимодействие двух электронов путем обмена фотоном

$$\bar{e}e \rightarrow \bar{e}e$$

можно проиллюстрировать рисунком 17.2, но диаграммы изображаются более схематично (рис. 17.3)

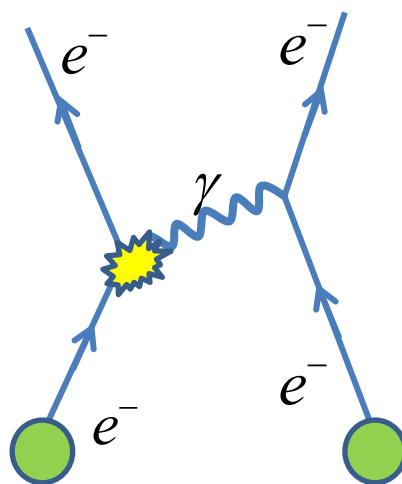


Рис. 17.2.

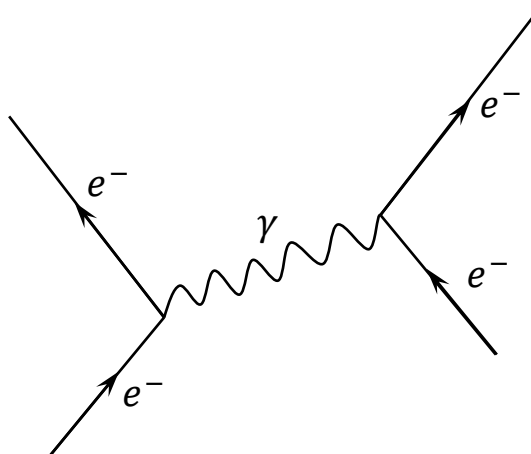


Рис. 17.3.

Пример 2. Рассеяние фотона на электроне (рис. 17.4)

$$\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-.$$

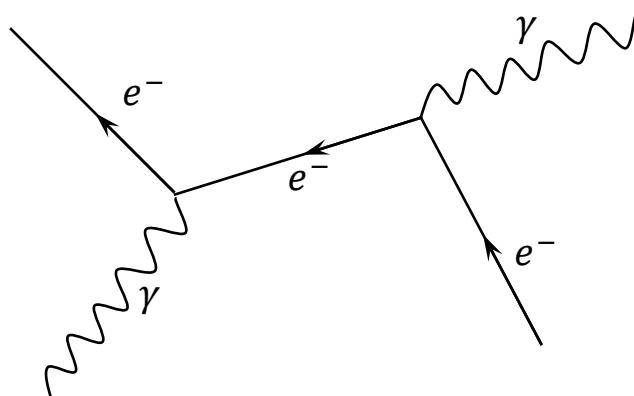


Рис. 17.4.

Пример 3. Аннигиляция электронно-позитронной пары в два фотона (рис. 17.5)

$$\bar{e}e^+ \rightarrow \gamma\gamma.$$

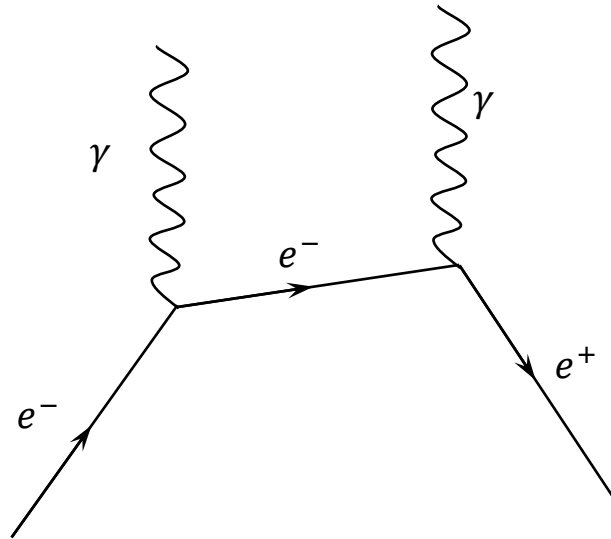


Рис. 17.5.

Пример 4. Порождение электронно-позитронной парой мюонной пары (рис. 17.6)

$$\bar{e}e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+.$$

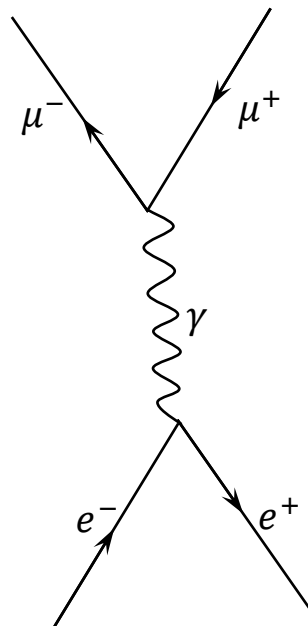


Рис. 17.6.

Элементарные акты электромагнитного взаимодействия могут проявиться и в чисто виртуальных процессах. Например, свободный электрон (рис. 17.7). Свободный электрон испускает фотон и позже

сам же и поглощает его. Этот процесс отражает взаимодействие электрона со своим электромагнитным полем.

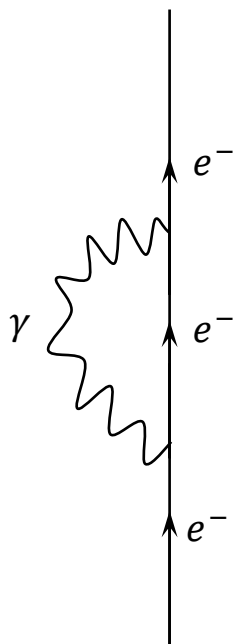


Рис. 17.7.

Другой пример, свободный фотон (рис. 17.8). Свободный фотон в процессе движения может породить электрон-позитронную пару, который затем аннигилирует в тот же самый фотон.

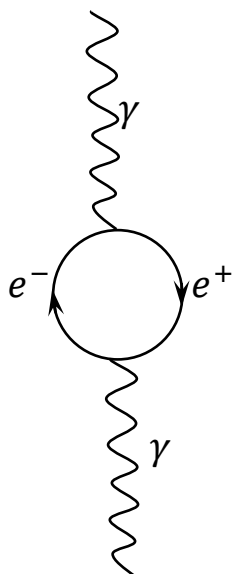


Рис. 17.8.

Эти два виртуальных процесса приводят к «одеванию» электрона в шубу, состоящую из фотонов и других электронов, которая определяет его эффективный размер.

17.2. Слабое взаимодействие

Слабое взаимодействие характеризуется очень малым радиусом действия и малой интенсивностью, а поэтому достаточно большим временем. Проявляется только в микромире.

Характерной особенностью является присутствие нейтрино и не сохранение странности. Аналогично электромагнитному взаимодействию, слабое можно описать как обменное. Однако в качестве частиц, которыми обмениваются элементарные частицы при слабом взаимодействии, вместо фотонов выступают так называемые *промежуточные бозоны*.

Эти промежуточные бозоны испускаются и поглощаются фермионами – лептонами и кварками. Как и фотоны, промежуточные бозоны имеют целый спин. Спин промежуточных бозонов $J = 1$.

Так как слабое взаимодействие короткодействующее, промежуточные бозоны обладают сравнительно большой массой, так как слабое взаимодействие часто сопровождается изменением зарядов частиц, среди промежуточных бозонов должны быть и бозоны обладающие зарядом. Оказалось, что промежуточных бозонов три

$$W^+, W^-, Z^0.$$

Они могут участвовать в слабом и электромагнитном взаимодействии, но не участвуют в сильном. Промежуточные бозоны считают белыми, так как при испускании и поглощении их кварками, цвет кварков не меняется, но меняется аромат. В том числе может меняться странность и очарование кварков. Элементарных актов слабого взаимодействия шесть (рис. 17.9).

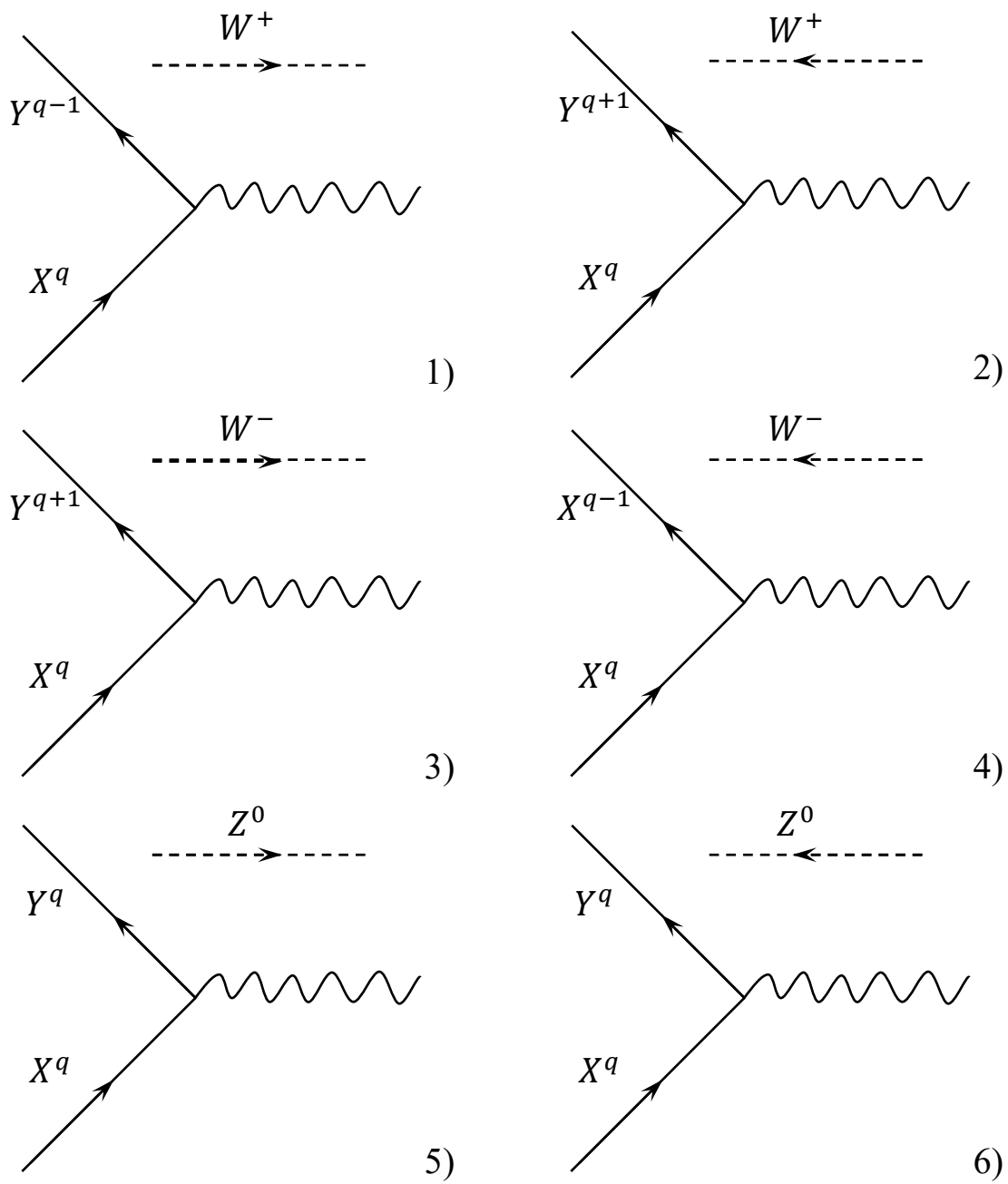


Рис. 17.9.

Примеры диаграмм Феймана для реальных процессов с участием слабого взаимодействия

Пример 1. Типичное превращение со слабым взаимодействием (рис. 17.10)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu.$$

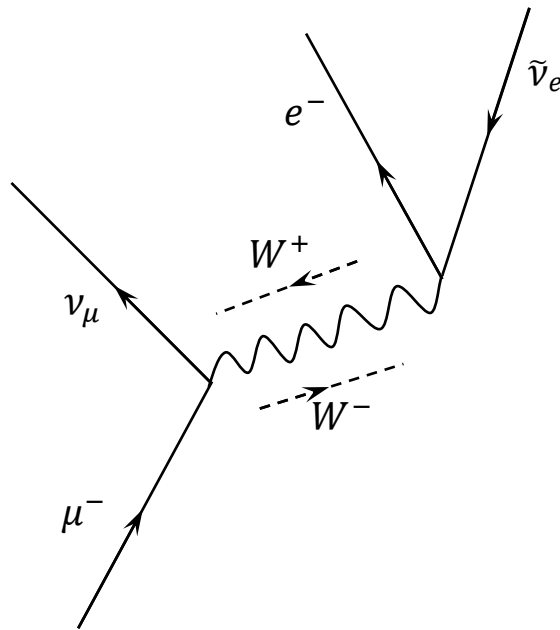


Рис. 17.10.

Элементарные акты 1 — 4, 2 — 3 по результату не различимы, поэтому как правило происходят одновременно в одном и том же процессе.

Пример 2. Упрощенная диаграмма процесса

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

представлена на рис. 17.11.

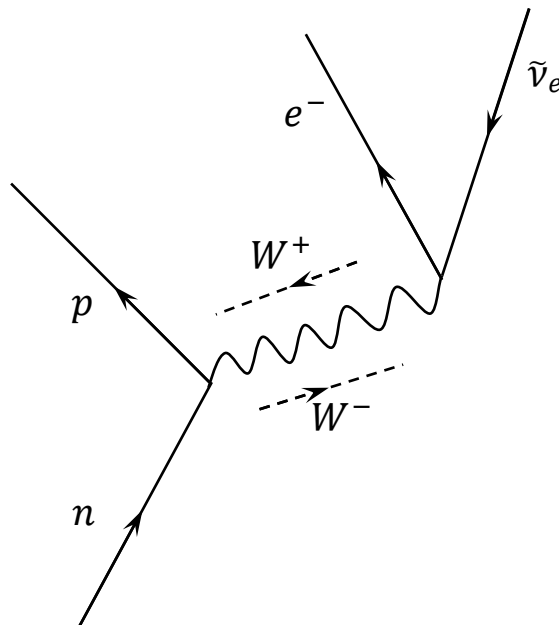


Рис. 17.11.

Однако, ранее было отмечено, что в слабом взаимодействии участвуют либо лептоны, либо кварки. Диаграмма, учитывающая кварковый состав нейтрона и протона, представлена на рис. 17.12.

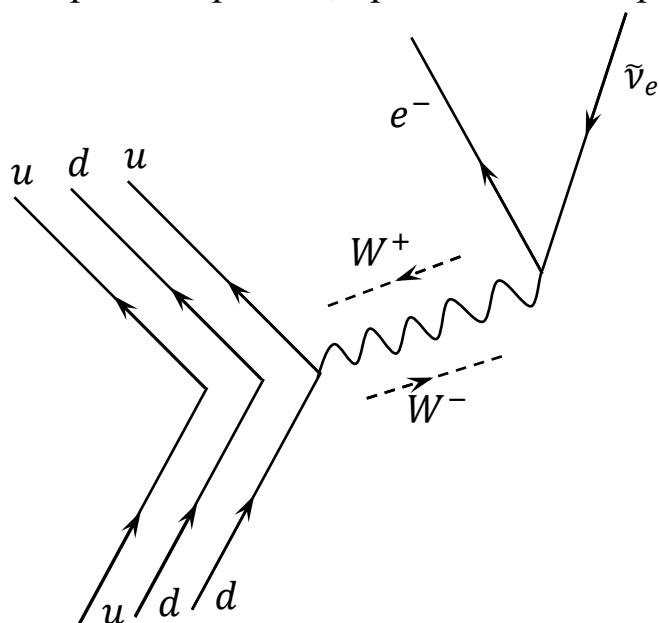


Рис. 17.12.

Оказывается, претерпевает изменение только кварк d , причем не меняется цвет, а меняется только аромат (рис. 17.13)

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e.$$

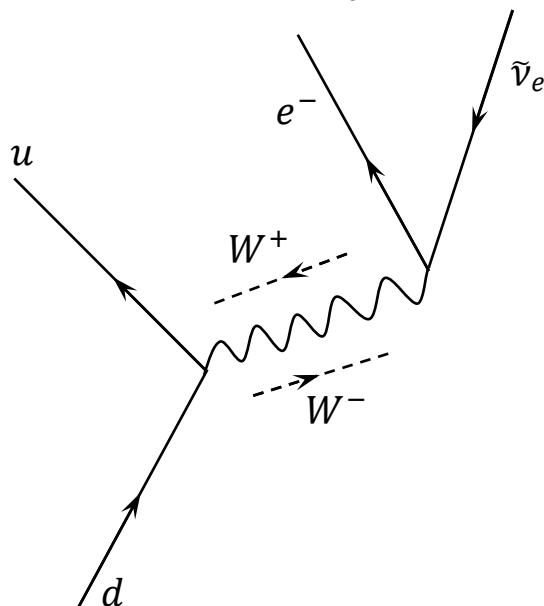


Рис. 17.13.

Пример 3. Диаграмма Феймана (рис. 17.14) для процесса

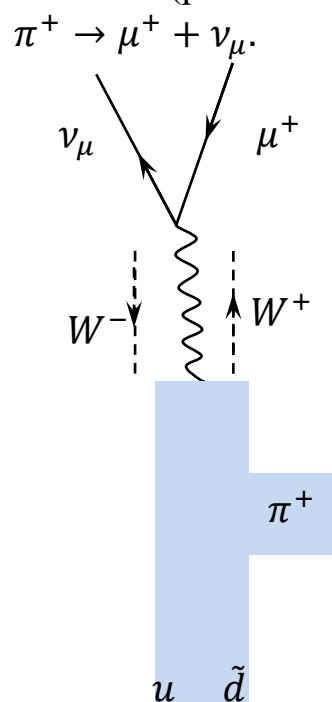


Рис. 17.14.

Пример 4. В слабом взаимодействии странность может изменяться (рис. 17.15)

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

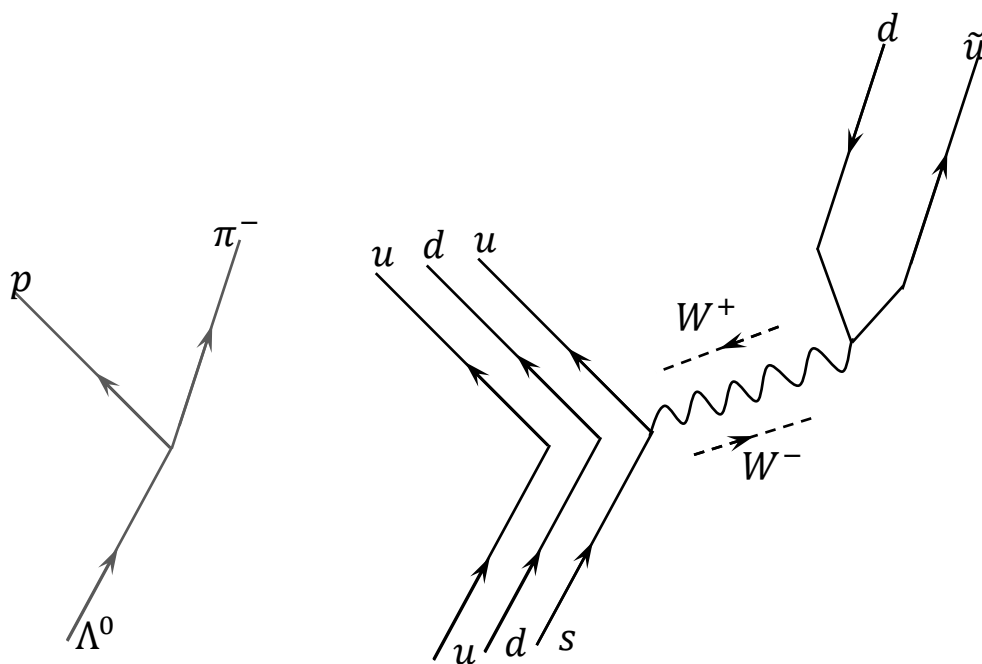


Рис. 17.15.

Пример 5. Рассеяние электрона на мюоном нейтрино (рис. 17.16).

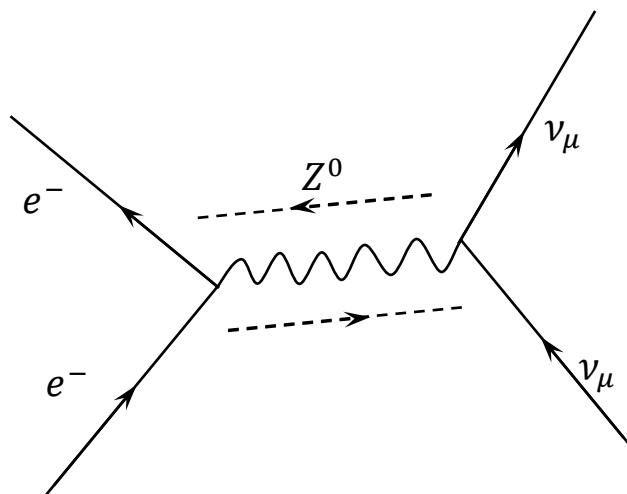


Рис. 17.16.

Пример 6. Рассеяние электрона на электронном антинейтрино (рис. 17.17). Этот процесс может быть изображен, как с участием W промежуточного бозона, так и с участием Z^0 бозона.

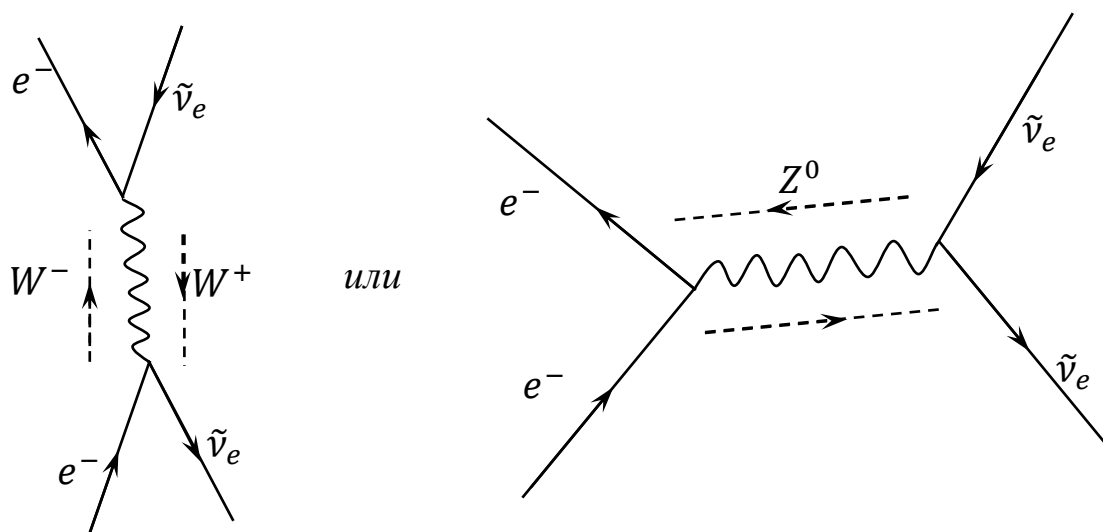


Рис. 17.17.

17.3. Сильное взаимодействие

Сильное взаимодействие присуще только адронам. Лептоны и фотоны в нем не участвуют. Оно является самым интенсивным, обладает конечным радиусом действия

$$R \approx 10^{-15} \text{ м}$$

и характерным временем

$$t \approx 10^{-24} \div 10^{-23} \text{ с.}$$

Ядерные силы, рассмотренные выше, являются проявлением сильного взаимодействия.

В настоящее время сильное взаимодействие объясняется в рамках так называемой *квантовой хромодинамики*, основанной на том, что все адроны состоят из кварков шести ароматов u, d, s, c, b, t обладающих тремя цветами r, g, b .

Барионы состоят из трех кварков всех трех цветов. Мезоны из кварка и антикварка.

Взаимодействие осуществляется посредством безмассовых частиц со спином

$$J = 1$$

и равным нулю всех зарядов

$$L = 0, \quad B = 0, \quad T = 0, \quad S = 0, \quad C = 0, \quad g = 0.$$

Эти частицы называются *глюонами*. Характеризуются глюоны цветом и антицветом, но в отличие от мезонов не обязательно совпадающими.

Всего существует *восемь глюонов*:

→ *шесть* так называемые *не диагональные глюоны*

$$\tilde{R}G, \quad \tilde{R}B, \quad \tilde{G}R, \quad \tilde{G}B, \quad \tilde{B}R, \quad \tilde{B}G;$$

→ *два диагональных глюона*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{R}R - \tilde{G}G), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\tilde{R}R + \tilde{G}G - 2\tilde{B}B).$$

Элементарный акт сильного взаимодействия представлен на рис. 17.18.

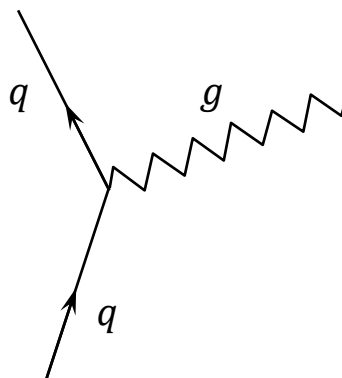


Рис. 17.18.

Так как глюон имеет определенный цвет в силу закона сохранения цвета кварк в этом элементарном акте, не меняя аромата, может менять цвет. Пример представлен на рис. 17.19.

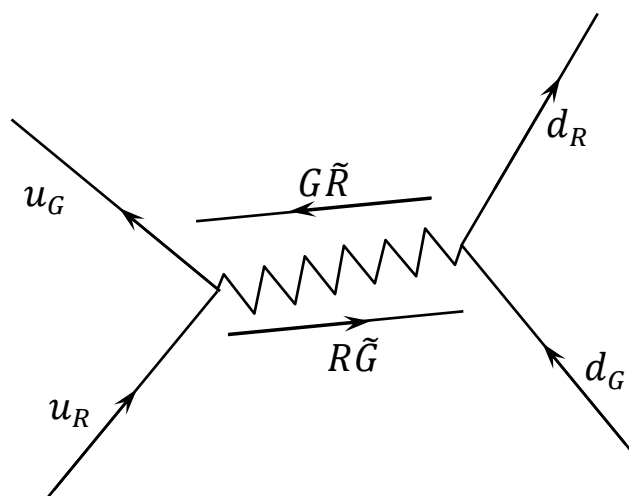


Рис. 17.19.

На рис. 17.19 красный u -кварк (u_R) испустив $\tilde{R}G$ – глюон становится зеленым, а зеленый d -кварк (d_G) поглотив этот глюон, становится красным.

В результате обмена глюонами между кварками возникает глюонное поле, которое описывается *моделью струн*.

Если кварки находятся на расстоянии меньше *критического* r_0 , то струны их соединяющие не натянуты (рис. 17.20)

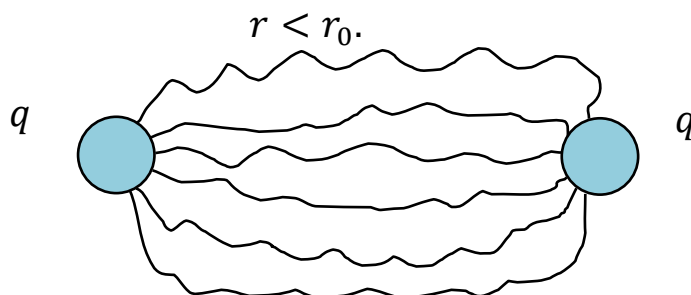


Рис. 17.20.

Если увеличивать расстояние между кварками до критического струны натягиваются (рис. 17.21)

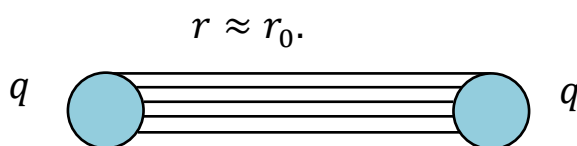


Рис. 17.21.

Дальнейшее увеличение расстояния между кварками потребует очень большой энергии достаточной для рождения кварк-антикварковой пары

$$r \uparrow.$$

В результате вместо того, чтобы оторвать кварк рождается мезон (рис. 17.22).

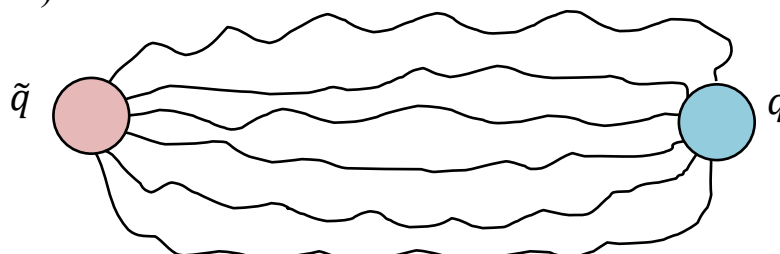


Рис. 17.22.

Эта модель в частности объясняет, почему кварки не наблюдаются по отдельности в свободном состоянии.

Механизм ядерных сил

Ранее мы отмечали, что взаимодействие между нуклонами в ядре осуществляется по средствам обмена пионами (π -мезонами).

В квантовой хромодинамике этот процесс детализируется, при этом один из кварков первого нуклона переходит во второй, а один кварк второго в первый. В результате происходит обмен пары кварк-антикварк, который и является пионом.

17.4. Теория великого объединения

В любой теории предпринимается попытка свести многообразие проявлений свойств объекта к минимальному числу фундаментальных свойств. Это стремление привело, в случае описания строения материи, к введению большого числа элементарных частиц, которые взаимодействуют по средствам *четырех типов фундаментальных взаимодействий* (рис. 17.23).

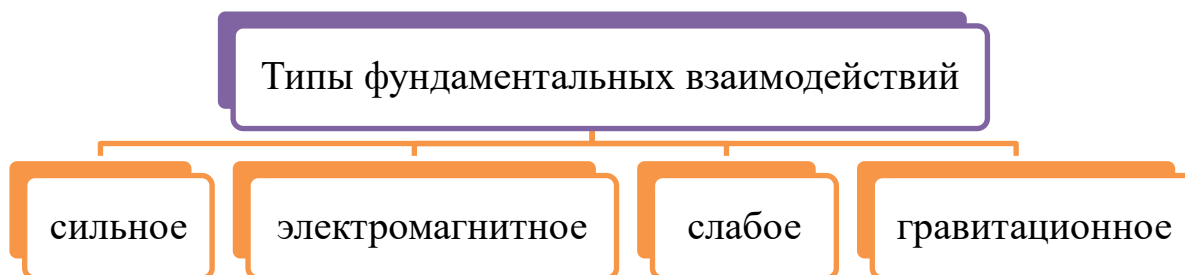


Рис. 17.23.

Поведение частиц описывает квантовая теория поля, которая выражает превращение частиц, как изменение их состояния. Однако при этом все взаимодействия оказываются независимыми, и теория становится все более громоздкой и сложной.

Первый шаг к построению более общей теории – *выделение истинных элементарных (фундаментальных) частиц*. Сейчас считают, что это *лептоны, кварки и переносчики взаимодействия*.

Следующий шаг – *создание единой теории сильного, электромагнитного и слабого взаимодействия*. Это описание фундаментальных частиц в таком пространстве, в котором и кварки, и лептоны рассматриваются как различные состояния одной частицы.

Используя симметрию этого пространства, прогнозируется существование 24 частиц – переносчиков взаимодействия, в которые вошли 8 глюонов, фотон, промежуточные бозоны – всего 12. Гравитон туда не попал, так как теория великого объединения не затрагивает гравитационное взаимодействие. Оставшиеся 12 частиц имеют такие большие массы (как предполагают), что будут проявляться лишь при очень больших энергиях.

Следует отметить, что удовлетворительной теории великого объединения по настоящее время не создано. Большие надежды ученые связывают большим адронным колаэдром.

Объединение с гравитационным взаимодействием – следующий шаг. Некоторые ученые считают, что без гравитационного взаимодействия, великое объединение не имеет смысла.

Материалы для практической работы

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. При электромагнитном взаимодействии происходит обмен...

- a) фотонами;
- b) пионами;
- c) глюонами;
- d) промежуточными бозонами.

2. При слабом взаимодействии происходит обмен...

- a) фотонами;
- b) пионами;
- c) глюонами;
- d) промежуточными бозонами.

3. К промежуточным бозонам НЕ относится...

- a) W^+ ,
- b) W^- ,
- c) Z^0 ;
- d) K^0 .

4. В процессе

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$$

из трех кварков составляющих нейтрон, претерпевает изменение только кварк d . Что для него меняется в этом процессе?

- a) Цвет.
- b) Аромат.
- c) Истинность.
- d) Очарование.

5. В слабом взаимодействии может НЕ выполняться...

- a) сохранение лептонного заряда;
- b) сохранение барионного заряда;
- c) сохранение странности;
- d) сохранение электрического заряда.

6. Ядерные силы являются проявлением...

- a) электромагнитного взаимодействия;
- b) слабого взаимодействия;
- c) сильного взаимодействия;
- d) гравитационного взаимодействия.

7. На рис. 2.9.24 представлена кварковая диаграмма распада Λ -гиперона. Эта диаграмма соответствует реакции...

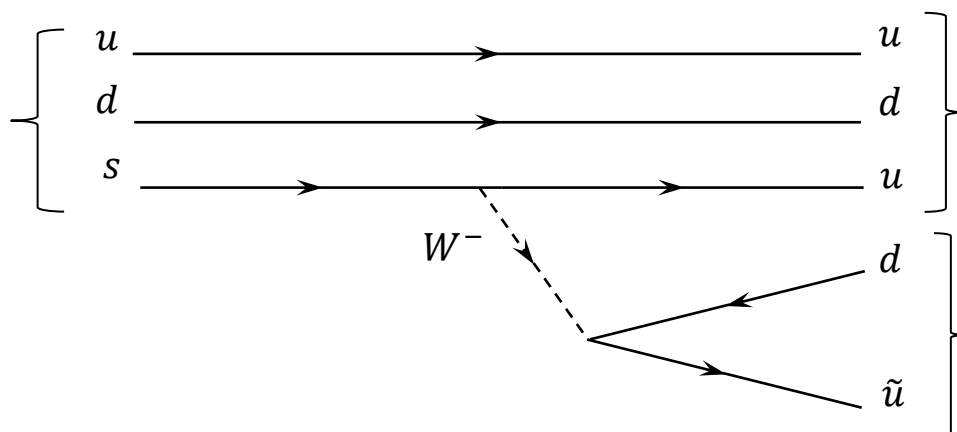


Рис. 17.24.

a) $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^-$;

b) $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^+$;

c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0$;

d) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$.

8. Радиус действия сильного взаимодействия ...

a) не ограничен;

b) составляет порядка 10^{-15} м;

c) составляет порядка 10^{-10} м;

d) составляет порядка 1 мм.

9. Сильное взаимодействие осуществляется посредством обмена...

a) фотонами;

b) пионами;

c) глюонами;

d) промежуточными бозонами.

10. Глюонное поле между кварками описывается....

a) моделью струн;

b) моделью строения ядра;

c) моделью строения атома;

d) теорией великого объединения.

Диаграммы Феймана

Замечания и правила изображения диаграмм Феймана

→ всегда рисуются по оси времени (а не пространства);

→ прямыми линиями обычно изображаются массивные частицы, подпись может как быть, так и нет;

→ частицы изображаются линиями со стрелками в направлении оси времени, а античастицы – против неё;

→ переносчики взаимодействий имеют собственные обозначения, γ -квант изображается волнистой линией, переносчики слабого взаимодействия ($W^\pm$; Z) – пунктирной, сильного (g) – ломаной (как пружинка, но чаще на диаграммах глюоны не рисуются вообще, так как время ядерного взаимодействия принимается мгновенным);

→ важный элемент диаграммы – узел, который и является самим взаимодействием.

Задание 2. Изобразить основные диаграммы Фейнмана для следующих процессов

- 1) рассеяние электрона на электроне;
- 2) эффект Комптона;
- 3) электрон-позитронная аннигиляция;
- 4) фотоэффект в кулоновском поле ядра;
- 5) образование электрон-позитронной пары в кулоновском поле ядра.

Какие виртуальные частицы участвуют в этих процессах?

Задание 3. Одна из диаграмм на рис. 17.25 и 17.26, описывающих распад

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$$

неправильна. Какая и почему?

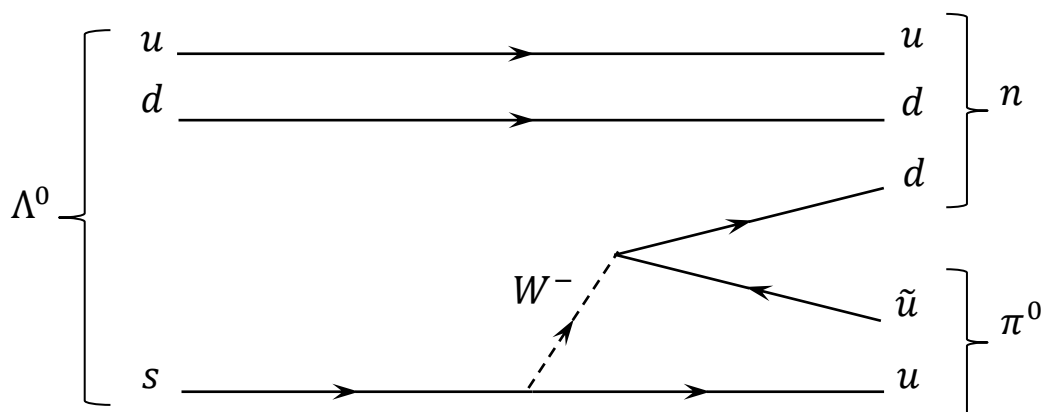


Рис. 17.25.

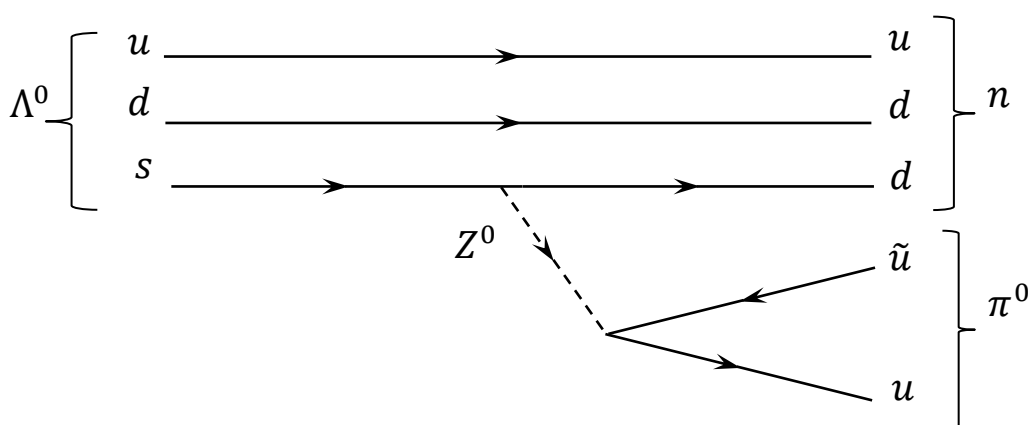


Рис. 17.26.

Задание 4. Какие из перечисленных ниже четырех способов распада K^+ -мезона возможны? Для разрешенных изобразите диаграммы, для запрещенных укажите причину запрета.

1) $K^+ \rightarrow \pi^+ + e^+ + e^-$;

2) $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$;

3) $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \tilde{\nu}_e$;

4) $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$.

Замечание. Определите изменения электрического заряда, странности, проекции изоспина адронов и лептонного заряда.

Задание. 5. Положительный пион распадается следующим образом

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Проанализируйте выполнение законов сохранения и изобразите диаграмму распада.

Задание. 6. Возможны ли следующие реакции

1) $\nu_e + \nu_e \rightarrow e^- + e^+$;

2) $\nu_e + \tilde{\nu}_e \rightarrow e^- + e^+$.

Для возможных реакций изобразите диаграммы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие составлено в соответствии с программой учебной дисциплины «Основы теоретической физики» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05. – Педагогическое образование (профиль «Физика. Математика»).

Рассматриваемые в пособии разделы «Квантовая механика» и «Физика атомного ядра и элементарных частиц» обобщают изученный материал в рамках обучения физике студентов на двух уровнях: на первом уровне – в рамках дисциплины «Общая и экспериментальная физика» и на втором уровне, опирающемся на более сложный математический аппарат и материал, изученный на протяжении всех курсов в рамках дисциплины «Основы теоретической физики».

В курсе «Основы теоретической физики» при рассмотрении вопросов квантовой механики и физики атомного ядра и элементарных частиц рассматриваются современные подходы к описанию микромира и строения материи.

В разделе «Квантовая механика» значительная часть материала отводится изучению математического аппарата квантовой механики, основанного на алгебре операторов. В качестве примеров применения квантовомеханических методов рассмотрены задачи одномерного движения частиц, такие как одномерный потенциальный ящик, квантовый гармонический линейный осциллятор, преодоление частицей потенциального барьера, движение свободной частицы. Движение электрона в центрально-симметричном поле рассмотрено на примере квантовой теории атома водорода. На качественном уровне представлены модели многоэлектронных атомов, атомных и молекулярных орбиталей. Даются основные приемы построения теории представлений.

При составлении материала для практической работы по данному разделу особое внимание уделено пониманию основополагающих принципов построения квантовой механики, физического смысла волновой функции, операторов квантовой механики.

Цель изучения раздела «Физика атомного ядра и элементарных частиц» в рамках основ теоретической физики – формирование у студента-физика современных представлений о структуре материи, включая свойства и структуру атомных ядер и физических явлений, в

которых ядра играют основную роль, представление о фундаментальных взаимодействиях и элементарных частицах. Теоретическое описание основных тем по данному разделу подкрепляется и расширяется в рамках рассмотрения и работы с материалами для практических занятий.

Изучая основные законы, модели и методы исследования физики атомного ядра, студенты получают широкое представление о данном предмете и возможности, позволяющие впоследствии использовать полученные знания в преподавании и для дальнейшей специализации.

Содержание предмета помогает дополнить уже имеющиеся представления о материальном мире картиной процессов, происходящих на субатомных масштабах. Именно физика сверхмалых масштабов дает научные основы для понимания закономерностей поведения не только микромира, но и макромира и даже мегамира, что проявляется в космологических приложениях субатомной физики.

→ [Вернуться к оглавлению](#)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Байзер А. Основные представления современной физики/ А. Байзер. – М.: Атомиздат, 1973. 547с.
2. Барсуков О.А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии / Барсуков О.А. – М.: Физматлит, 2011.— 560 с.
3. Варламов В.В. Атомные ядра. Основные характеристики: учебное пособие/ В.В. Варламов, Б.С. Ишханов, С.Ю. Комаров. – М.: Университетская книга, 2010. – 334 с.
4. Веселов М.Г. Элементарная квантовая теория атомов и молекул / М.Г. Веселов. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. – 216с.
5. Галицкий А.М. Часть 1. Задачи по квантовой механике: Учеб. пособие для вузов. – 3-е издание, испр. и дополн./ А.М. Галицкий – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 304 с.
6. Гаршин А.Ф. Квантовая механика / А.Ф. Гаршин. – М.: Просвещение, 1974. – 207с.
7. Гончарова Н.Г. Частицы и атомные ядра: задачи с решениями и комментариями/ Гончарова Н.Г., Ишханов Б.С., Капитонов И.М.— Электрон. текстовые данные. — М.: Физматлит, 2013. — 448 с.
8. Давыдов А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – М.: Наука, 1973. – 704с.
9. Детлаф А.А. Курс физики: Учеб. пособие для втузов/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 4-е изд. испр. – М.: Высшая школа, 2002. – 718 с.
10. Капитонов И.М. Введение в физику ядра и частиц: учебное пособие/ И.М. Капитонов. – М.: Физматлит, 2010.— 512 с.
11. Ландау Л.Д. Квантовая механика/ Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1972. 368с.
12. Михайлов М.А. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Часть 1: учебное пособие/ Михайлов М.А. – М.: Прометей. МПГУ, 2011.— 94 с.
13. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика: Учеб. Для вузов. В 2 кн. Кн. 1. Физика атомного ядра Ч. I. Свойства нуклонов, ядер и радиоактивных излучений. – 5-е изд., перераб. и доп. / К.Н. Мухин. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 376 с.
14. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика: Учеб. Для вузов. В 2 кн. Кн. 1. Физика атомного ядра Ч. II. Ядерные взаи-

модействия. – 5-е изд., перераб. и доп. / К.Н. Мухин. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 320 с.

15. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика: Учеб. Для вузов. В 2 кн. Кн. 2. Физика элементарных частиц. – 5-е изд., перераб. и доп. / К.Н. Мухин. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 408 с.

16. Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц / А.И. Наумов. – М.: Просвещение, 2001. – 384 с.

17. Окунь Л.Б. Элементарное введение в физику элементарных частиц / Л.Б. Окунь. – М.: Физматлит, 2009.— 128 с.

18. Рау В.Г. Основы теоретической физики. Физика атомного ядра и элементарных частиц: Учеб. пособие / В.Г.Рау. – М.: Высш.шк., 2005. – 141с.

19. Савельев И.В. Основы теоретической физики: Учебник. В 2-ч т. Том 2. Квантовая механика. – 5-е изд. стер. / И.В. Савельев. – СПб.: Издательство «Лань», 2021. – 431 с.

20. Селиверстов, А. В. Диаграмма Минковского как средство наглядности при изучении кинематики СТО / А. В. Селиверстов // Ученые записки физического факультета Московского университета. – 2022. – № 6. – С. 2261001.

21. Серова Ф.Г. Сборник задач по теоретической физике/ Ф.Г. Серова, А.А. Янкина. – М.: Просвещение, 1988. – 192с.

22. Широков С.В. Физика ядерных реакторов: учебное пособие/ С.В. Широков.— Минск: Вышэйшая школа, 2011.— 349 с.

23. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т.1. Введение в атомную физику / Э.В. Шпольский. – М.: Наука, 1974. – 576с.

24. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т.2. Основы квантовой механики и строение электронной оболочки атома/ Э.В. Шпольский. – М.: Наука, 1974. – 448с.

25. Shutov A.V., Maleev A.V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings. pp. 55-111. Глава в книге Classification and Application of Fractals: New Research. / Editors: Eric W. Mitchell and Scott R. Murray. – New York : Nova Science Publishers, 2012. – 359 с.

26. Физика микромира. Маленькая энциклопедия. (Гл. ред. Д.В.Ширков). – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 528с.

27. Яворский Б.М. Основы физики: Учебн. Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: Физмалит, 2003. – 550с.

Интернет-ресурсы

1. Калькулятор и графическая система для параметров атомных ядер и характеристик ядерных реакций и радиоактивных распадов. Центр данных фотоядерных экспериментов [Электронный ресурс]:

Режим

доступа:

http://cdfc.sinp.msu.ru/services/calc_thr/calc_thr_ru.html

2. Научно-популярный журнал «Атом». Российский Федеральный центр «Всероссийский НИИ Экспериментальной физики», г. Саров. [Электронный ресурс]:

Режим

доступа:

https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_013023746/

ПРИЛОЖЕНИЕ

1	18	Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева															
1	2	13	14	15	16	17	18										
1	2											13	14	15	16	17	18
1	2											5	6	7	8	9	10
3	4											Б	С	Н	О	Ф	Не
Л	В											БОР	УГЛЕРОД	АЗОТ	КИСЛОРОД	ФТОР	НЕОН
6,941	9,012											10,811	12,011	14,007	15,999	18,998	20,180
11	12											13	14	15	16	17	18
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
НАТРИЙ	МАГНИЙ											АЛЮМИНИЙ	КРЕМНИЙ	ФОСФОР	СЕРА	ХЛОР	АРГОН
22,990	24,305											26,982	28,086	30,974	32,066	35,453	39,948
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
КАЛИЙ	КАЛЬЦИЙ	СКАНДИЙ	ТИТАН	ВАНАДИЙ	ХРОМ	МАРГАНЕЦ	ЖЕЛЕЗО	КОБАЛЬТ	НИКЕЛЬ	МЕДЬ	ЦИНК	ГАЛЛИЙ	ГЕРМАНИЙ	МЫШЬЯК	СЕЛЕН	БРОМ	КРИПТОН
39,098	40,078	44,956	47,867	50,942	51,996	54,938	55,845	58,933	58,693	63,546	65,409	69,723	72,64	74,922	78,963	79,904	83,798
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
РУБИДИЙ	СТРОНЦИЙ	ИТТРИЙ	ЦИРКОНИЙ	НИОБИЙ	МОЛИБДЕН	ТЕХНЕЦИЙ	РУТЕНИЙ	РОДИЙ	ПАЛЛАДИЙ	СЕРЕБРО	КАДМИЙ	ИНДИЙ	ОЛОВО	СУРЬМА	ТЕЛЛУР	ЙОД	КСЕНОН
85,468	87,62	88,906	91,224	92,906	95,94	[98]	101,07	102,906	106,42	107,868	112,412	114,818	118,711	121,760	127,60	126,904	131,294
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
ЦЕЗИЙ	БАРИЙ	ЛАНТАН	ГАФНИЙ	ТАНТАЛ	ВОЛЬФРАМ	РЕНИЙ	ОСМИЙ	ИРИДИЙ	ПЛАТИНА	ЗОЛОТО	РУТУТЬ	ТАЛЛИЙ	СВИНЕЦ	ВИСМУТ	ПОЛОНИЙ	АСТАТ	РАДОН
132,905	137,328	138,906	178,49	180,948	183,84	186,207	190,23	192,217	195,078	196,967	200,59	204,383	207,2	208,980	[209]	[210]	[222]
87	88	89	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
Fr	Ra	Ac	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
ФРАНЦИЙ	РАДИЙ	АКТИНИЙ	РЕЗЕРФОРДИЙ	ДУБНИЙ	СИБОРГИЙ	БОРИЙ	ХАССИЙ	МЕЙТТЕРИЙ	ДАРМШТАДИЙ	РЕНТГЕНИЙ	КОПЕРНИЦИЙ	НИХОНИЙ	ФЛЕРОВИЙ	МОСКОВИЙ	ЛИВЕРМОРИЙ	ТЕННЕССИЙ	ОГАНЕСОН
[223]	[226]	[227]	[261]	[262]	[266]	[264]	[277]	[268]	[281]	[272]	[285]	[286]	[289]	[290]	[293]	[294]	[294]
		Лантаноиды		58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
				Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
				ЦЕРИЙ	ПРАЗЕОДИМ	НЕОДИМ	ПРОМЕТИЙ	САМАРИЙ	ЕВРОПИЙ	ГАДОЛИНИЙ	ТЕРБИЙ	ДИСПРОЗИЙ	ГОЛЬМИЙ	ЭРБИЙ	ТУЛИЙ	ИТТЕРБИЙ	ЛЮТЕЦИЙ
				140,116	140,908	144,242	[145]	150,36	151,964	157,25	158,925	162,500	164,930	167,259	168,934	173,04	174,967
		Актинοиды		90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
				Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
				ТОРИЙ	ПРОТАКТИНИЙ	УРАН	НЕПТУНИЙ	ПЛУТОНИЙ	АМЕРИЦИЙ	КЮРИЙ	БЕРКЛИЙ	КАЛИФОРНИЙ	ЭЙНШТЕЙНИЙ	ФЕРМИЙ	МЕНДЕЛЕВИЙ	НОВЕЛИЙ	ЛОУРЕНСИЙ
				232,038	231,036	238,029	[237]	[244]	[243]	[247]	[247]	[251]	[252]	[257]	[258]	[259]	[262]

Учебное электронное издание

МОКРОВА Альбина Андреевна
КОЗЛИКОВ Роман Алексеевич

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА,
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;
дисковод CD-ROM.

Тираж 10 экз.

Издательство Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.