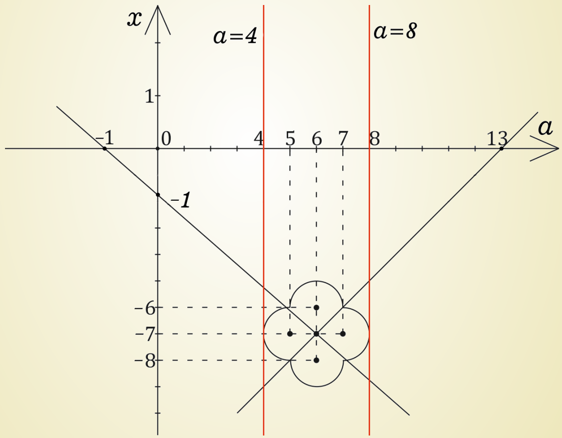
Владимирский государственный университет

Н. Ю. Куранова

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ



Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. Ю. Куранова

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-2280-5

© Куранова Н. Ю., 2025

УДК 512.5

ББК 22.144

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры вычислительной техники и систем управления
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Шутов

Кандидат физико-математических наук, доцент
начальник кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института ФСИН России
А. В. Хорошева

Куранова, Н. Ю.

Задачи с параметром [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Н. Ю. Куранова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. – 191 с. – ISBN 978-5-9984-2280-5. – Электрон. дан. (57,6 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Доступно и всесторонне рассмотрены основные методы и приемы решения задач с параметром. Приведены задачи различного типа – уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств с параметром. Предложены задания для самостоятельной работы студентов. Составлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Избранные главы школьной математики».

Предназначено для студентов 4 – 5-х курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование. Пособие может быть адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентам, студентам педагогических вузов, учителям.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 7 назв.

ISBN 978-5-9984-2280-5 © Куранова Н. Ю., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Параметр (от греческого “parametron” – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

С использованием параметров исследуются многие системы и процессы реальной жизни. В частности, в физике в качестве параметров могут выступать температура, время и др. В математике параметры вводятся для обозначения некоторой совокупности объектов.

В отношении уравнений и неравенств с параметром чаще всего встречаются две постановки задачи:

1) для каждого значения параметра найти все решения заданного уравнения (неравенства);

2) найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным требованиям.

Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Решение задач с параметрами требует от учащихся не только знаний свойств функций, уравнений и неравенств, умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования. Задачи с параметрами требуют к себе своеобразного подхода по сравнению с остальными – здесь необходимо грамотное и тщательное исследование.

В пособии приведены разные типы задач с параметрами, показаны методы их решения и, где представлялось возможным, приведены различные способы решения одной и той же задачи. Это позволяет создать условия для формирования готовности будущих учителей математики к организации и проведению учебно-исследовательской работы с учащимися.

Основная цель пособия – повысить математическую культуру студентов в рамках элементарной математики, сформировать у них аналитические, конструктивные и исследовательские умения.

1.1. Квадратные уравнения и неравенства. Корни квадратного уравнения

Мы начинаем с рассмотрения уравнений вида

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является *квадратным*. Не забываем, однако, что параметр a «никому ничем не обязан» и может равняться нулю (и тогда уравнение перестаёт быть квадратным). Случай $a = 0$ при необходимости следует рассматривать отдельно.

Напомним известные вам факты теории. Пусть уравнение (1) является квадратным, то есть $a \neq 0$. Тогда *дискриминант* этого уравнения есть величина $D = b^2 - 4ac$. Возможны три случая.

1. Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет ровно два различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + 2kx + b = 0$$

удобно использовать дискриминант

$$D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac.$$

Тогда формула корней выглядит так:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Если уравнение (1) имеет два различных корня x_1 и x_2, то его левая часть раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если уравнение (1) имеет единственный корень x_0, то его левая часть является полным квадратом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Задача 1. Определите, сколько существует различных значений a, при которых уравнение

$$\left(1-a^2\right)x^2+ax+1=0$$

имеет единственное решение.

Решение. Эта простая задача отборочного тура содержит маленький подвох: надо не забыть рассмотреть отдельно значения $a=\pm1$, при которых уравнение окажется не квадратным, а линейным. Так, при $a=1$ уравнение принимает вид $x+1=0$ и имеет единственный корень $x=-1$; аналогично, при $a=-1$ уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Если же $a\neq\pm1$, то наше уравнение — квадратное с дискриминантом

$$D=a^2-4(1-a^2)=5a^2-4.$$

Корень будет единственным в том и только в том случае, если $D=0$, то есть при $a=\pm2/\sqrt{5}$. Всего, стало быть, получается четыре значения a.

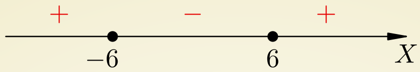
Ответ: Четыре.

Задача 2. При всех a решить уравнение $x^2+ax+9=0$.

Решение. Находим дискриминант:

$$D=a^2-36=(a-6)(a+6).$$

Методом интервалов определяем знаки дискриминанта:



Соответственно, рассматриваем следующие случаи. Если $a < -6$ или $a > 6$, то уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}\,. \qquad (2)$$

Если $a = -6$, то корень один, и он легко получается из формулы (2): $x = 3$. Аналогично, если $a = 6$, то $x = -3$. Наконец, если $-6 < a < 6$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a = -6$, то $x = 3$; если $a = 6$, то $x = -3$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

Можно дать ответ в более сжатом виде, если «пристыковать» случаи $a = \pm 6$ к первому случаю.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

Задача 3. При всех a решить уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$.

Решение. Здесь тоже хочется сразу написать дискриминант, но давайте всё же заметим, что возможно $a = 0$, и тогда уравнение не будет квадратным (так что ни о каком дискриминанте говорить не придётся). Этот случай надо рассмотреть отдельно.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным, и его дискриминант $D = 1 - 4a$. При $a \leqslant \frac{1}{4}$ дискриминант неотрицателен, поэтому

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Если же $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = -1$; если $a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то решений нет.

Задача 4. При каких a корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a?

Решение. Рассмотрим многочлен $f(x) = x^2 + x + a$, для которого $D = 1 - 4a$ — дискриминант, а $x_0 = -\frac{1}{2}$ — абсцисса вершины графика (параболы). С учетом свойств квадратного многочлена условие задачи выполнено, если и только если $D \geqslant 0$, $x_0 > a$ и $f(a) > 0$, т.е. верна система

$$\begin{cases} 1 - 4a \geqslant 0, \\ -\frac{1}{2} > a, \\ a^2 + a + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \frac{1}{4}, \\ a < -\frac{1}{2}, \\ a(a+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{2}, \\ a < -2 \end{cases} \Leftrightarrow a < -2.$$

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы равенства $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1) $D=0$. Тогда уравнение имеет 2 равных корня $x_1=x_2=\frac{-p}{2}$.

Следовательно, $x_1+x_2=\frac{-p}{2}+(\frac{-p}{2})=-p$; $x_1\cdot x_2=\frac{-p}{2}\cdot(\frac{-p}{2})=\frac{p^2}{4}$.

Но, так как $D=0$, то $p^2-4q=0$, то есть $p^2=4q$, тогда $\frac{p^2}{4}=\frac{4q}{4}=q$.

Получили $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

2) $D>0$. Тогда уравнение имеет 2 различных корня $x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и $x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Найдем сумму корней x_1+x_2 :

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p.$$

Найдем произведение корней $x_1\cdot x_2$:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{p^2-(\sqrt{p^2-4q})^2}{4}=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=\frac{4q}{4}=q,$$ что и требовалось доказать.

Теорема. *(обратная теореме Виета).*
Если для чисел x_1 и x_2 верны равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Заметим, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \qquad (1)$$

и других корней у этого уравнения нет.

После преобразования левой части уравнения (1), получим

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1x_2 = 0;\, x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Учитывая условие теоремы, перепишем полученное уравнение в виде

$$x^2 - px + q = 0. \qquad (2)$$

Так как уравнения (1) и (2) равносильны, то корнями уравнения (2) являются числа x_1 и x_2.
Теорема доказана.

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$$

в два раза больше другого.

Решение. Прежде всего, уравнение должно иметь два различных корня, поэтому его дискриминант положителен:

$$D = (2a+1)^2 - 4(a^2+2) = 4a - 7 > 0,$$

откуда

$$a > \frac{7}{4}. \tag{3}$$

Пусть корни нашего уравнения равны t и $2t$. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t + 2t = 2a + 1, \\ t \cdot 2t = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 2a + 1, \\ 2t^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения, подставим во второе и после простых преобразований получим:

$$a^2 - 8a + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a-4)^2 = 0,$$

то есть $a = 4$. Это значение a удовлетворяет неравенству (3) и потому годится.

Ответ: $a = 4$.

Задача 6. При каких значениях a сумма квадратов двух различных корней уравнения

$$x^2 - 4ax + 5a = 0$$

равна 6?

Решение. Уравнение имеет два различных корня, поэтому дискриминант положителен:

$$D_1 = (2a)^2 - 5a = a(4a - 5) > 0,$$

откуда

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > \frac{5}{4}\,. \qquad (4)$$

Пусть корни равны x_1 и x_2. Имеем:

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 2 \cdot 5a = 16a^2 - 10a.$$

Получаем квадратное уравнение

$$8a^2 - 5a - 3 = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{8}$. Значение a_1 не годится, так как не удовлетворяет условию (4). Значение a_2 удовлетворяет этому условию и поэтому подходит.

Ответ: $a = -\frac{3}{8}$.

Задача 7. При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$?

Решение. Заметим, что дискриминант

$$D/4 = a^2 - 2a + 5 = (a-1)^2 + 4$$

положителен при всех значениях a. Значит, при любом a наше уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. Как и выше, получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a-5) = 4a^2 - 4a + 10 = (2a-1)^2 + 9.$$

Полученное выражение не меньше 9; оно равно 9 только при $a = 1/2$.

Ответ: $a = 1/2$.

Задача 8. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$ имеет только положительные корни?

Решение. При $a = 3$ получаем уравнение $-6a + 15 = 0$, корень которого положителен. Поэтому значение $a = 3$ годится.

Пусть теперь $a \neq 3$. Уравнение является квадратным с дискриминантом D_1

$$= a^2 - 5a(a-3) = a(15-4a).$$

Условие существования корней:

$$a(15-4a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant a \leqslant \frac{15}{4}. \tag{5}$$

Сами корни можно не искать — на помощь снова приходит теорема Виета. В самом деле, ясно, что необходимым и достаточным условием положительности корней x_1, x_2 квадратного уравнения служит система неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Необходимость очевидна: если корни x_1, x_2 положительны, то оба неравенства (6) выполнены. Теперь покажем достаточность. Пусть оба неравенства (6) выполняются. В силу второго неравенства оба корня имеют одинаковый знак. Тогда в силу первого неравенства оба корня положительны.

В нашем случае система (6) даёт:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0, \end{cases}$$

откуда легко находим

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > 3. \tag{7}$$

Нам остаётся пересечь множества (7) и (5) и к полученному пересечению добавить найденное ранее значение $a = 3$.

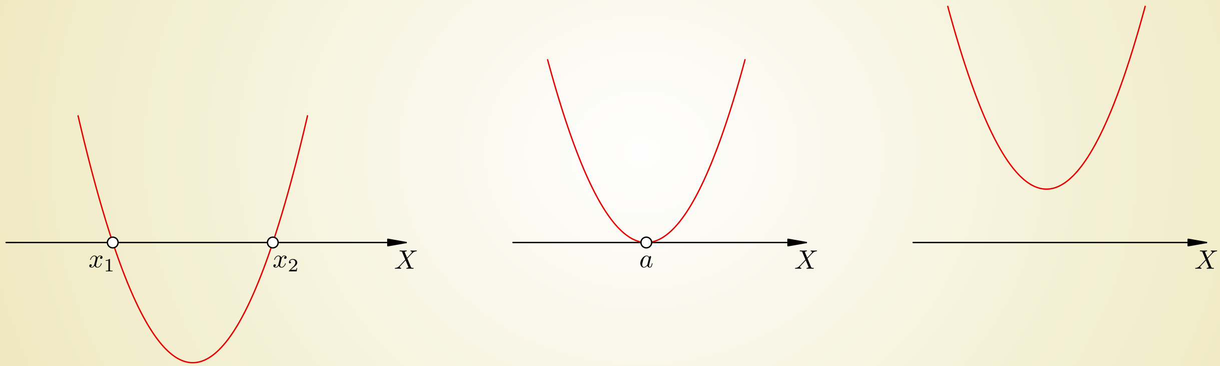
Ответ: $\left[3; \frac{15}{4}\right]$.

Задача 9. При всех a решить неравенство $x^2 - 2ax + 4 > 0$.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + 4$:

$$D_1 = a^2 - 4.$$

Возможны три варианта расположения параболы $y = x^2 - 2ax + 4$, изображённые на рисунке (слева направо идут случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$).



Пусть $D_1 > 0$, то есть $a < -2$ или $a > 2$. Тогда парабола пересекает ось X в двух точках:

$$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4}$$

Множество решений неравенства состоит из тех x, при которых $y > 0$ (ведь именно таков знак решаемого неравенства); то есть из тех x, при которых график проходит выше оси абсцисс:

$$x < a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x > a + \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Пусть теперь $D_1 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Парабола касается оси X в точке $x = a$; множество решений нашего неравенства — все x за исключением точки a.

Наконец, пусть $D_1 < 0$, то есть $-2 < a < 2$. Тогда парабола лежит целиком выше оси X, и любой x служит решением нашего неравенства.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; a - \sqrt{a^2 - 4}\right) \cup \left(a + \sqrt{a^2 - 4}; +\infty\right)$; если $a \in (-2; 2)$, то x любое.

Задача 10. Найти все такие a, что решения неравенства $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leqslant 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4$:

$$D = (a-5)^2 - 4(-2a^2 + 2a + 4) = 9a^2 - 18a + 9 = 9(a-1)^2.$$

Тогда корни этого трёхчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-(a-5) \pm 3(a-1)}{2}\,,$$

то есть

$$x_1 = \frac{-a+5+3a-3}{2} = a+1, \quad x_2 = \frac{-a+5-3a+3}{2} = 4-2a.$$

В зависимости от того, какой из корней больше, множеством решений данного неравенства является либо отрезок $[a+1; 4-2a]$, либо отрезок $[4-2a; a+1]$ (либо точка в случае совпадения корней). Но нам нет нужды заниматься этим (пусть и несложным) исследованием. Ведь длина отрезка решений в любом случае равна:

$$|x_1 - x_2| = |(a+1) - (4-2a)| = |3a-3|.$$

В соответствии с условием получаем неравенство:

$$|3a-3| > 6,$$

то есть

$$|a-1| > 2,$$

откуда $a < -1$ или $a > 3$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Замечание. Задачу можно было решить и без явного нахождения корней — а именно, с помощью теоремы Виета. В самом деле, неравенство

$$|x_1 - x_2| > 6$$

эквивалентно неравенству

$$36 < (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

а как действовать дальше, вам уже известно.

Расположение корней квадратного трехчлена

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, причем $x_1 < x_2$. Обозначим за $D = b^2 - 4ac$ дискриминант этого трехчлена, за x_0 — абсциссу вершины соответствующей параболы. Тогда для следующих утверждений приведенные условия будут необходимыми и достаточными.

Утверждение	Формализация	Условия
Оба корня больше числа l	$x_2 > x_1 > l$	$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(l) > 0, \\ x_0 > l \end{cases}$
Оба корня меньше числа l	$x_1 < x_2 < l$	$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(l) > 0, \\ x_0 < l \end{cases}$
Оба корня принадлежат интервалу $(l; m)$	$l < x_1 < x_2 < m$	$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(l) > 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ l < x_0 < m \end{cases}$

Один корень принадлежит интервалу $(l;m)$, а другой больше m	$l < x_1 < m < x_2$	$\begin{cases} a \cdot f(l) > 0, \\ a \cdot f(m) < 0 \end{cases}$
Один корень принадлежит интервалу $(l;m)$, а другой меньше l	$x_1 < l < x_2 < m$	$\begin{cases} a \cdot f(l) < 0, \\ a \cdot f(m) > 0 \end{cases}$
Корни лежат по разные стороны от числа l	$x_1 < l < x_2$	$a \cdot f(l) < 0$
Один из корней меньше числа l, а другой больше числа m	$x_1 < l < m < x_2$	$\begin{cases} a \cdot f(l) < 0, \\ a \cdot f(m) < 0 \end{cases}$

Задача 11. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - 2(a-1) \cdot x + 2a + 1 = 0 \tag{8}$$

имеет 2 положительных корня?

Решение. Рассмотрим способ решения задачи с использованием график квадратичной функции.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$y = x^2 - 2(a-1)\cdot x + 2a + 1$$

и построим схематически график, удовлетворяющий условию задачи (рис.1.2).

Заметим, что для того, чтобы уравнение (8) имело два положительных корня, необходимо и достаточно, чтобы имела решение система

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_0 > 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

$D = a(a-4)$; $x_0 = \frac{2(a-1)}{2}$; $f(0) = 2a+1$.

Решим систему

$$\begin{cases} a(a-4) \ge 0, \\ a-1 > 0, \\ 2a+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 4, \end{array}\right., \\ a > 1 \\ a \ge -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$a \ge 4$.

Ответ: при $a \ge 4$.

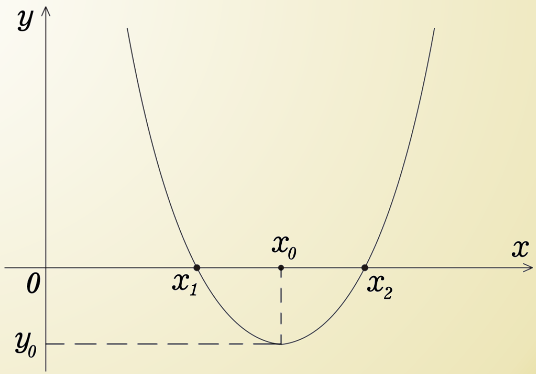


Рис. 1.2.

Начало

Содержание

Назад

Задача 12. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0 \qquad (9)$$

действительные и больше 3.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2)$ и построим схематически график, удовлетворяющий требованиям задачи. Заметим, что возможны два случая (рис. 1.3; рис. 1.4).

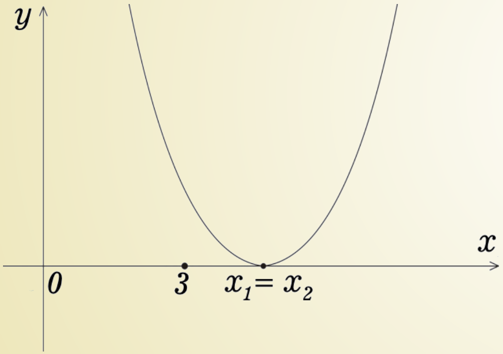


Рис. 1.3.

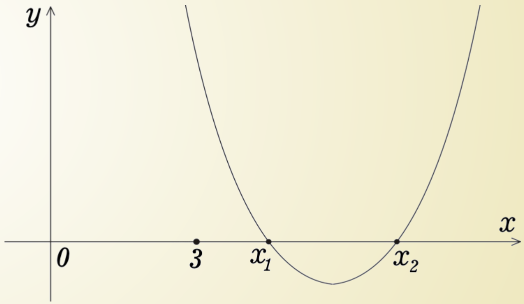


Рис. 1.4.

Чтобы выполнялось требование задачи, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > 3, \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

имела решение.

Заметим, что

$D = (-6a)^2 - 4(2 - 2a + 9a^2) = 36a^2 - 8 + 8a - 36a^2 = -8 + 8a;$

$x_0 = \frac{6a}{2} = 3a;$

$f(3) = 99 - 18a + (2 - 2a + 9a^2) = 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 = 9a^2 - 20a + 11.$

Составим систему

$$\begin{cases} -8 + 8a \geq 0, \\ 3a > 3, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases}$$

и решим ее.

$$\begin{cases} 8a \geq 8, \\ a > 1, \\ 9(a-1)(a-\frac{11}{9}) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > \frac{11}{9}; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$a > \frac{11}{9}.$$

Ответ: при $a > \frac{11}{9}$.

Начало

Содержание

Назад

Для того чтобы уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (10)$$

где $a > 0$ имело два корня, каждый из которых больше некоторого действительного числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > p, \\ f(p) > 0 \end{cases}$$

Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.5.

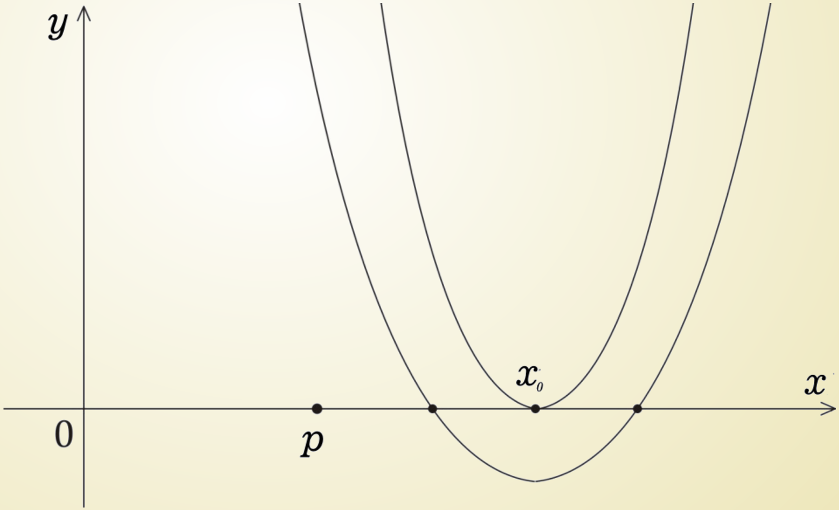


Рис. 1.5.

Для того чтобы уравнение (10) имело корни, меньшие некоторого действительного числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < p, \\ f(p) > 0. \end{cases}$$

Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.6.

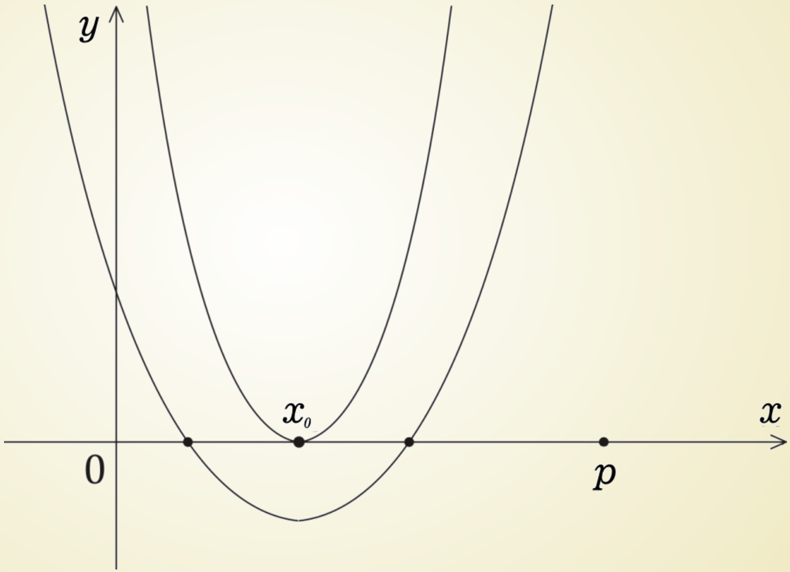


Рис. 1.6.

Для того чтобы уравнение (10) имело корни, один из которых больше действительного числа p, а второй – меньше p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(p) < 0$.

Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.7.

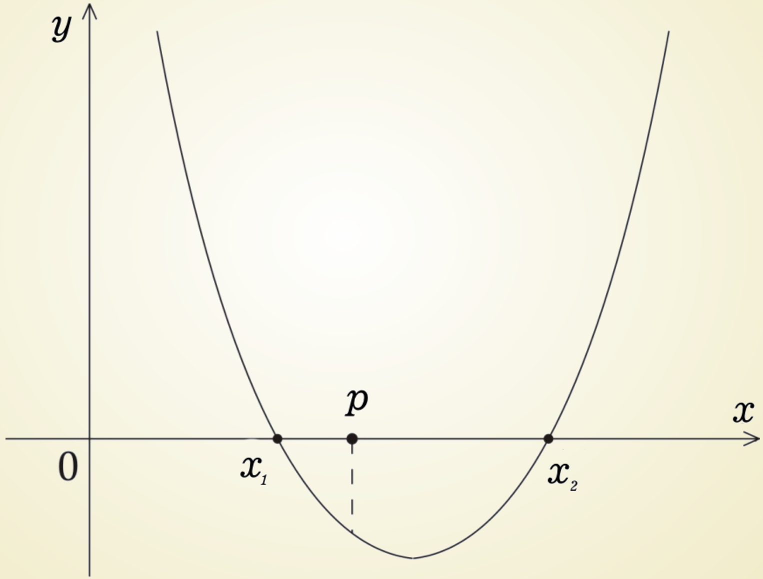


Рис. 1.7.

Задача 13. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $(a-2)\cdot x^2 - 2(a+3)\cdot x + 4a = 0$ имеет два корня, причем один из них больше 3, а второй – меньше 2.

Решение. Рассмотрим (в зависимости от контрольного значения параметра) следующие случаи: 1) $a = 2$; 2) $a \neq 2$.

1) Если $a = 2$, то уравнение примет вид $-10x + 8 = 0; 10x = 8; x = 0,8$ – не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 2$, то возможно что

$$1)\ a - 2 > 0;$$

$$2)\ a - 2 < 0.$$

Рассмотрим графическую интерпретацию (рис. 1.8; рис. 1.9).

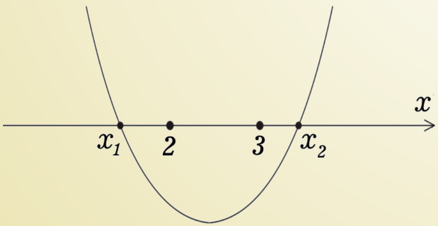


Рис. 1.8.

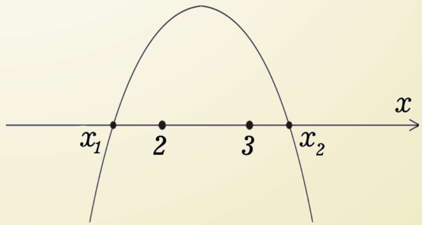


Рис. 1.9.

Для случая 1) составим и решим систему

$$\begin{cases} a > 2, \\ f(2) < 0, \\ f(3) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 2, \\ (a-2)\cdot 2^2 - 2(a+3)\cdot 2 + 4a < 0, \\ (a-2)\cdot 3^2 - 2(a+3)\cdot 3 + 4a < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 2, \\ a < 5, \\ a < 5\frac{1}{7}; \end{cases}$$

$$2 < a < 5.$$

Для случая 2) составим и решим систему

$$\begin{cases} a < 2, \\ f(2) > 0, \\ f(3) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ (a-2)\cdot 2^2 - 2(a+3)\cdot 2 + 4a > 0, \\ (a-2)\cdot 3^2 - 2(a+3)\cdot 3 + 4a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ a > 5, \\ a > 5\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: при всех $a \in (2;5)$.

Задача 14. Сколько корней и при каких значениях параметра a имеет уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a$?

Решение. Построим схематически график функции $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ (рис. 1.11).

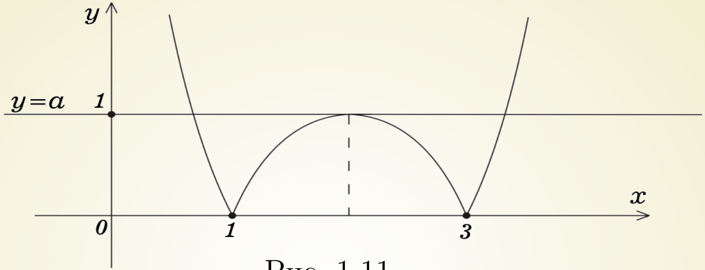


Рис. 1.11.

Графиком функции $y = a$ является семейство прямых, параллельных оси Ox, и расположенных от оси Ox на расстоянии $|a|$.

Графическая модель задачи «подсказывает» ответ:

1) если $a < 0$, то нет корней;

2) если $a = 0$ или $a > 1$, то два корня;

3) если $a = 1$, то три корня;

4) если $0 < a < 1$, то четыре корня.

Ответ: нет корней при $a < 0$; два корня при $a = 0$ или $a > 1$; три корня при $a = 1$; четыре корня при $0 < a < 1$.

Начало

Содержание

Назад

Задачи

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет корней.

$\boxed{a > 1}$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня.

$\boxed{a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)}$

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

$\boxed{a \in [2; 4)}$

4. Найдите значения параметра m, при которых выражение

$$\text{а) } x^2 - 2(2+m)x + 12 + m^2; \quad \text{б) } 2mx^2 + (2m-4)x + \frac{m}{2} + 3$$

является полным квадратом.

$\boxed{\text{а) } m = 2; \text{ б) } m = \frac{2}{5}}$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ имеет не более одного решения.

$a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$

6. При каких a уравнение $a(a+3)x^2+(2a+6)x-3a-9=0$ имеет более одного корня?

$a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$

7. При всех значениях a решите уравнение $x^2+2ax-1=0$.

$x = -a \pm \sqrt{a^2+1}$

8. При всех значениях a решите уравнение $x^2-2ax+1=0$.

Если $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, то $x = a \pm \sqrt{a^2-1}$; если $a \in (-1; 1)$, то решений нет

9. При всех значениях a решите уравнение $x^2-2ax+1=0$.

Если $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, то $x = a \pm \sqrt{a^2-1}$; если $a \in (-1; 1)$, то решений нет

10. При всех значениях a решите уравнение $ax^2+3x-1=0$.

Если $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right)$, то решений нет; если $a \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$, то $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = \frac{1}{3}$

Построение графических моделей задач с параметрами

В зависимости от роли, которая отводится параметру в задаче (неравноправная или равноправная с переменной) выделяют два основных графических приема:

1) построение графической модели в координатной плоскости xOy;

2) построение графической модели в координатной плоскости xOa.

Рассмотрим схематично структуру первого графического приема.

На плоскости xOy функция $y = f(x; a)$ задает семейство кривых, зависящих от параметра a. От одной кривой семейства можно перейти к какой-либо другой с помощью некоторого преобразования плоскости (параллельный перенос, поворот и т.д.). Выполняя соответствующие преобразования, будем «считывать» с графика ответ задачи.

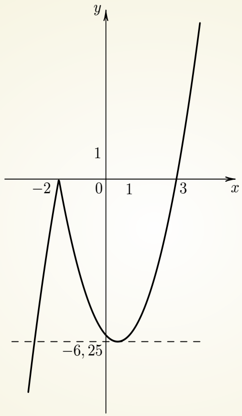
Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат xOy. Пусть a, b и r — некоторые действительные числа (параметры). Тогда приведенные в таблице алгебраические и геометрические описания множеств эквивалентны. Многие из них привожу не столько потому, что часто встречаются на экзамене, а для понимания, как словесно описывать те или иные конструкции.

Алгебраическая форма	Геометрическая интерпретация
$y = ax + b$	Прямая, проходящая через точку $(0, b)$, с тангенсом угла наклона a.
$y > ax + b$	Полуплоскость, лежащая выше прямой $y = ax + b$, которая служит ее границей.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$	При $r < 0$ — пустое множество. При $r = 0$ — точка (a, b). При $r > 0$ — окружность с центром в точке (a, b) радиуса $\sqrt{r}$.
$x^2 + y^2 \neq 4$	Плоскость без окружности радиуса 2, центр который находится в начале отсчета.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 < 1$	Единичный круг с центром в точке (a, b) без границы.
$y = \|x + a\| + b$	Прямой угол с лучами, направленными вверх, биссектриса которого параллельна оси ординат, а вершина имеет координаты $(-a, b)$.
$y^2 > x^2$	Внутренние области двух вертикальных углов, в которых лежит ось ординат и стороны которых являются биссектрисами координатных углов.

Алгебраическая форма	Геометрическая интерпретация
$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = a$	При $a < 0$ — пустое множество. При $a = 0$ — точка $(0,0)$. При $a > 0$ — квадрат со стороной $\sqrt{2}a$, диагонали которого лежат на координатных осях.
$y \leqslant x^2$	Множество всех точек плоскости, лежащих не выше параболы — графика функции $y = x^2$.
$0 < x \leqslant 1$	Множество всех точек плоскости, абсциссы которых положительны, но не превосходят 1.
$x^2 + 4y^2 = 4$	Эллипс, симметричный относительно координатных осей и проходящий через точки $(0,1)$ и $(2,0)$.
$y = \sqrt{1 - x^2}$	Единичная полуокружность с центром в начале отсчета, все точки которой имеют неотрицательные ординаты.

Задача 1. При каких значениях a уравнение $|x+2|(x-3) = a^2 - 1$ имеет ровно три решения?

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = |x+2|(x-3)$ и $g(x) = a^2 - 1$.
Графиком функции $y = g(x)$ является прямая, параллельная оси абсцисс, все точки которой имеют ординату $a^2 + 1$. Первая же функция при $x \geqslant -2$ принимает вид $f(x) = (x+2)(x-3)$, а при $x < -2$ — $f(x) = -(x+2)(x-3)$.



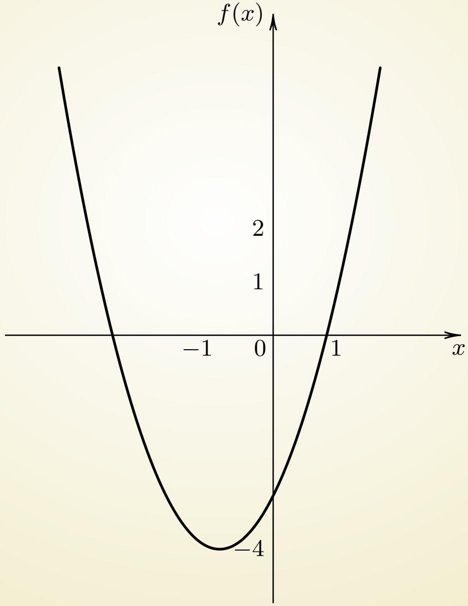
Значит, точки $x = -2$, $x = 3$ — нули этой функции; $(-\infty; -2]$, $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — промежутки возрастания; $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ — промежуток убывания; $x = \frac{1}{2}$ — точка локального минимума, причем $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$. Отсюда следует, что исходное уравнение имеет ровно три решения, если и только если

$$-\frac{25}{4} < a^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a < 1.$$

Ответ: $(-1; 1)$.

Задача 2. Определите количество решений уравнения $x^2 + 2x - 3 = a^2 - 4a$ для каждого значения a.

Решение. Графиком функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ служит парабола, ветви которой направлены вверх, $x_0 = -1$ — абсцисса вершины параболы, а $y_0 = -4$ — ее ордината.



Значит, по свойствам квадратичной функции исходное уравнение не имеет решений, если и только если

$$a^2 - 4a < -4 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 < 0,$$

но этому неравенству не удовлетворяет ни одно значение a.

При условии $a^2 - 4a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$ имеем единственное решение.

Наконец, при

$$a^2 - 4a > -4 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 2$$

исходное уравнение имеет ровно два решения.

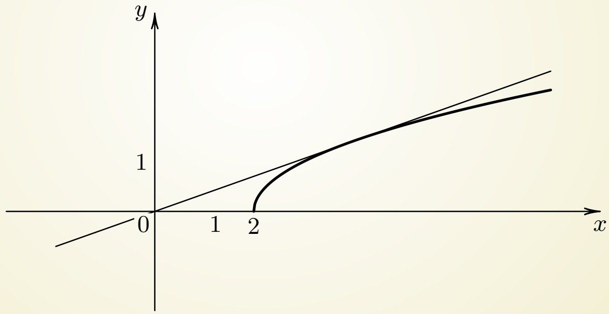
Ответ: при $a = 2$ — единственное решение; при $a \neq 2$ — ровно два решения.

Задача 3. Определите количество решений уравнения

$$\sqrt{x-2} = ax$$

для каждого знания a.

Решение. Рассмотрим возрастающую функцию $f(x) = \sqrt{x-2}$: ее областью определения служит луч $[2;+\infty)$, а график функции получается параллельным переносом графика функции $f_2(x) = \sqrt{x}$ на вектор $\vec{v} = (2;0)$. Графиком функции $g(x) = ax$, определенной на $\mathbb{R}$, является прямая, проходящая через начало отсчета, с угловым коэффициентом a.



Поскольку все точки графика $f(x)$ имеют положительные абсциссы и неотрицательные ординаты, то исходное уравнение не имеет решений при $a < 0$. Единственное решение в силу выпуклости вверх графика функции $y = f(x)$ возможно только при $a = 0$ или в случае касания графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, что эквивалентно системе $f'(x) = g'(x)$ и $f(x) = g(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = a, \\ \sqrt{x-2} = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = a, \\ \sqrt{x-2} = \dfrac{x}{2\sqrt{x-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = a, \\ x = 2(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ a = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

С учетом указанных свойств функций при $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{4}$ исходное уравнение имеет ровно два решения, при $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ — решений нет.

Задача 4. При каких k уравнение

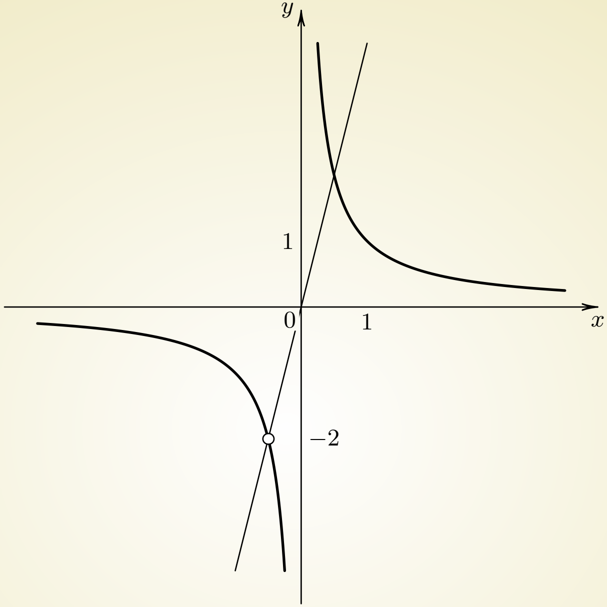
$$\frac{2x+1}{2x^2+x} - kx = 0$$

имеет единственный корень?

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\frac{2x+1}{x(2x+1)} = kx \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = kx, \\ x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Графиком функции $f(x) = \frac{1}{x}$ является гипербола с известными свойствами; а функции $(x) = kx$ — прямая, проходящая через начало отсчета, с угловым коэффициентом k.



Оба графика симметричны относительно начала отсчета, причем $f(x$ в нуле не определена. Значит, $y = g(x)$, пройдет через точку $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$. Отсюда находим значение параметра k:

$$-2 = k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad k = 4.$$

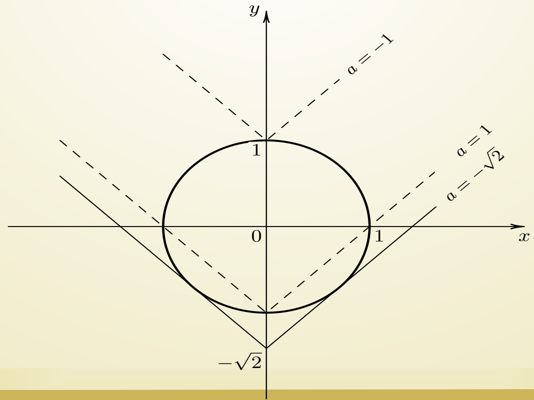
Начало
Содержание
Назад

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x \;\; + y \;\; = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы в прямоугольной системе координат xOy задает единичную окружность с центром в начале отчета. Второе — прямой угол с вершиной в точке $(0, a)$ и лучами, направленными вверх, биссектриса которого лежит на оси ординат. Оба графика симметричны относительно оси Oy, поэтому, чтобы система имела ровно два решения, одна из сторон угла должна иметь с окружностью ровно одну общую точку.



Это возможно только в случае касания или в случае, когда вершина угла находится внутри окружности.

Второй случай реализуется, если и только если $-1 < a < 1$

Первый случай возможен, если и только если расстояние от центра окружности до сторон угла будет равно единице, что эквивалентно условию

$$a = -1 : \sin 45^\circ = -\sqrt{2}.$$

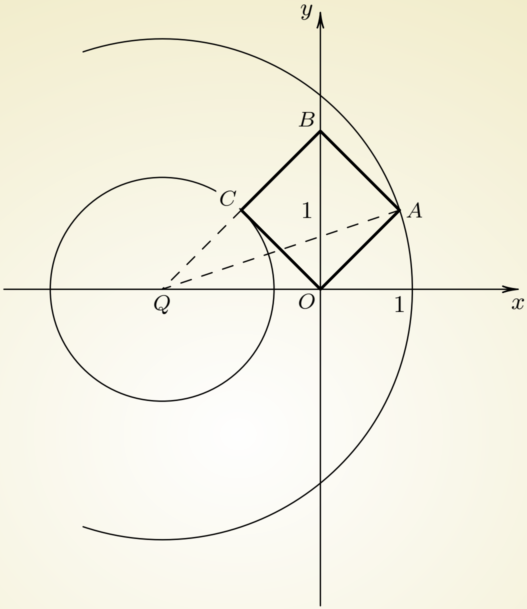
Ответ: $\{-\sqrt{2}\} \cup (-1;1)$.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y-1| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение системы при $a < 0$ не имеет решений; при $a = 0$ в прямоугольной системе координат xOy задает точку $(-2;0)$, которая не удовлетворяет второму_уравнению системы; при $a > 0$ — окружность Ω с центром в точке $Q = (-2;0)$ радиуса $\sqrt{a}$. Графиком второго уравнения системы служит квадрат с вершинами в точках $A = (1;1)$, $B = (0;2)$, $C = (-1;1)$, $O = (0;0)$.



Единственное решение системы возможно, если и только если окружность Ω касается отрезка CO или проходит через точку A. Первый случай реализуется при $a = 2$: касание произойдет в точке C, поскольку $QC \perp CO$ по обратной теореме Пифагора. Во втором случае по формуле длины отрезка $QA = \sqrt{10}$, откуда $a = 10$. Причем для такого значения параметра a решение единственно, поскольку $QA > QB > QO > QC$.

Ответ: $\{2; 10\}$.

Задача 7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

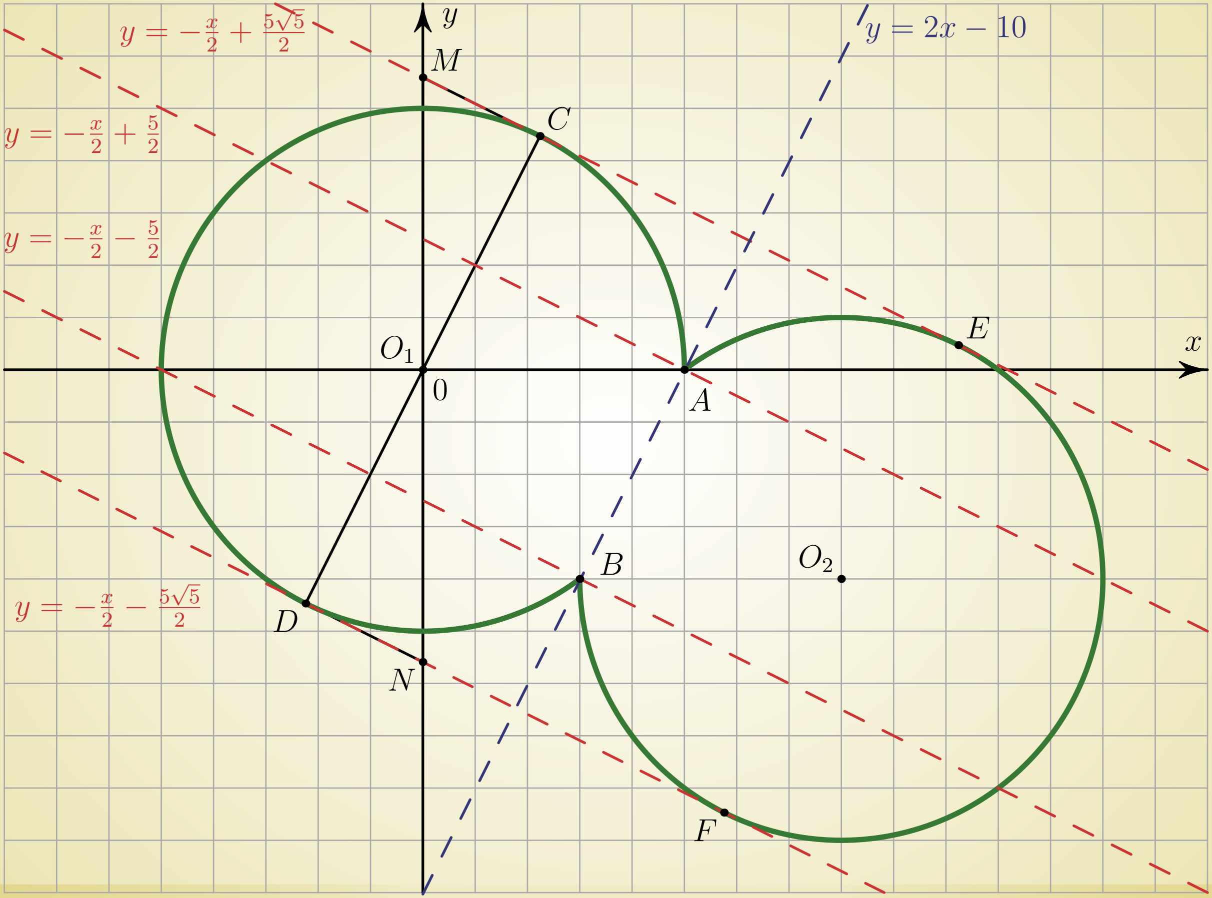
$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

имеет более двух различных решений.

РЕШЕНИЕ. Раскроем модуль и выделим полные квадраты для x и для y. Получим

$$\begin{cases} y \geq 2x - 10 \ (1.1), \\ x^2 + y^2 = 5^2 \ (1.2), \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2} \ (3) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < 2x - 10 \ (2.1), \\ (x-8)^2 + (y+4)^2 = 5^2 \ (2.2), \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2} \ (3). \end{cases}$$

Рассмотрим график этой системы на плоскости $(x;\ y)$. Неравенства (1.1) и (2.1) задают верхнюю и нижнюю полуплоскость относительно прямой $l : \{y = 2x - 10\}$ (4) соответственно. Уравнения (1.2) и (2.2) задают окружности $\omega_1 : \{O_1 = (0;\ 0)\,;\ R_1 = 5\}$ и $\omega_2 : \{O_2 = (8;\ -4)\,;\ R_2 = 5\}$ соответственно. Уравнение (3) задает семейство параллельных прямых l_a.


$y = -\frac{x}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$
$y = 2x - 10$
$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$
$y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$
$y = -\frac{x}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}$
y
x
M
C
E
O_1
0
A
B
O_2
D
N
F

Определим значение a, при котором l_a проходит через точки $A, B = \omega_1 \cap l$. Решив систему уравнений (4) и (1.2), найдем $A = (5;\ 0)$, $B = (3;\ -4)$. Подставим координаты A в (3), найдем $a = 5$. Подставим координаты B в (3), найдем $a = -5$.

Определим значение a, при котором l_a касается ω_1. Подставим (3) в (1.2). Получим квадратное уравнение. Условие касания состоит в том, чтобы это уравнение имело единственное решение. Тогда приравняем дискриминант нулю и найдем $a = \pm 5\sqrt{5}$.

Аналогично получаем, что при этих же значениях a прямая l_a касается ω_2.

Исходная система уравнений будет иметь более двух различных решений, если прямая l_a будет иметь более двух точек пересечения дугами окружностей (1.1, 1.2) и (2.1, 2.2).

Это достигается при $a \in \left(-5\sqrt{5};\ -5\right] \cup \left[5;\ 5\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-5\sqrt{5};\ -5\right] \cup \left[5;\ 5\sqrt{5}\right)$

Задача 8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно одно решение

$$\frac{x \quad 2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1.$$

Решение. Перенесем все слагаемые в одну сторону, приведем к общему знаменателю и приведем подобные, получим

$$\frac{x^2-(2a+1)x+2a^2+2a-2}{(x+2)(x-a)}=0.$$

Сделаем замену $x=t+a$. После упрощений получим

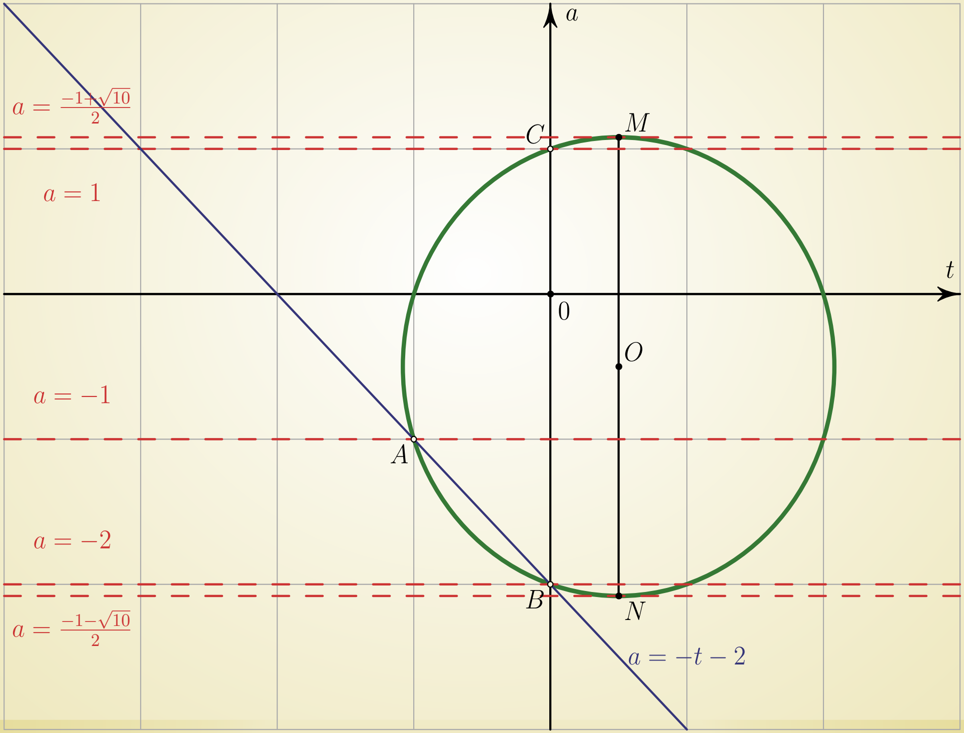
$$\frac{t^2-t+a^2+a-2}{t(t+a+2)}=0.$$

Выделим в числителе полные квадраты для t и для a

$$\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}}{t(t+a+2)}=0.$$

Полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \ (1), \\ t\neq 0 \ (2), \\ a\neq -t-2 \ (3). \end{cases}$

Рассмотрим график для этой системы на плоскости $(t;\ a)$. Уравнение (1) задает окружность $\omega : \{O = (\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2});\ R = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Уравнения (2) задает прямую l_2, совпадающую с осью a. Уравнение (3) задает убывающую прямую l_3.



Начало

Содержание

Назад

13 4 6 8 2 5 3 9 11 1 12 13

- Определим координаты точек $A, B = l_3 \cap \omega$. Решив систему уравнений (1, 3), находим $A = (-1;\ -1)$, $B = (0;\ -2)$. Эти точки являются выколотыми на общем графике.

- Проведем через точку O прямую, перпендикулярно оси t. Пусть эта прямая пересекает ω в точках M и N. Определим координаты $M = \left(\frac{1}{2};\ \frac{-1+\sqrt{10}}{2}\right)$ и координаты точки $N = \left(\frac{1}{2};\ \frac{-1-\sqrt{10}}{2}\right)$. Пусть прямая $l_M : \{a = \frac{-1+\sqrt{10}}{2}\}$. Тогда $MN \perp l_M$ и при этом $M \in l_M$. Следовательно, l_M касается ω. Аналогично прямая $l_N : \{a = \frac{-1-\sqrt{10}}{2}\}$ касается ω.

- Рассмотрим семейство прямых $l_a : \{a = const\}$. Исходное уравнение будет иметь ровно одно решение, если прямая l_a пересекает график системы (1, 2, 3) ровно в одной точке. Это достигается при $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$ (l_a проходит через выколотые точки) и при $a = \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$, $a = \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$ (l_a касается ω).

Ответ: $a \in \{\frac{-1-\sqrt{10}}{2}\} \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}\}$.

Задача 9. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

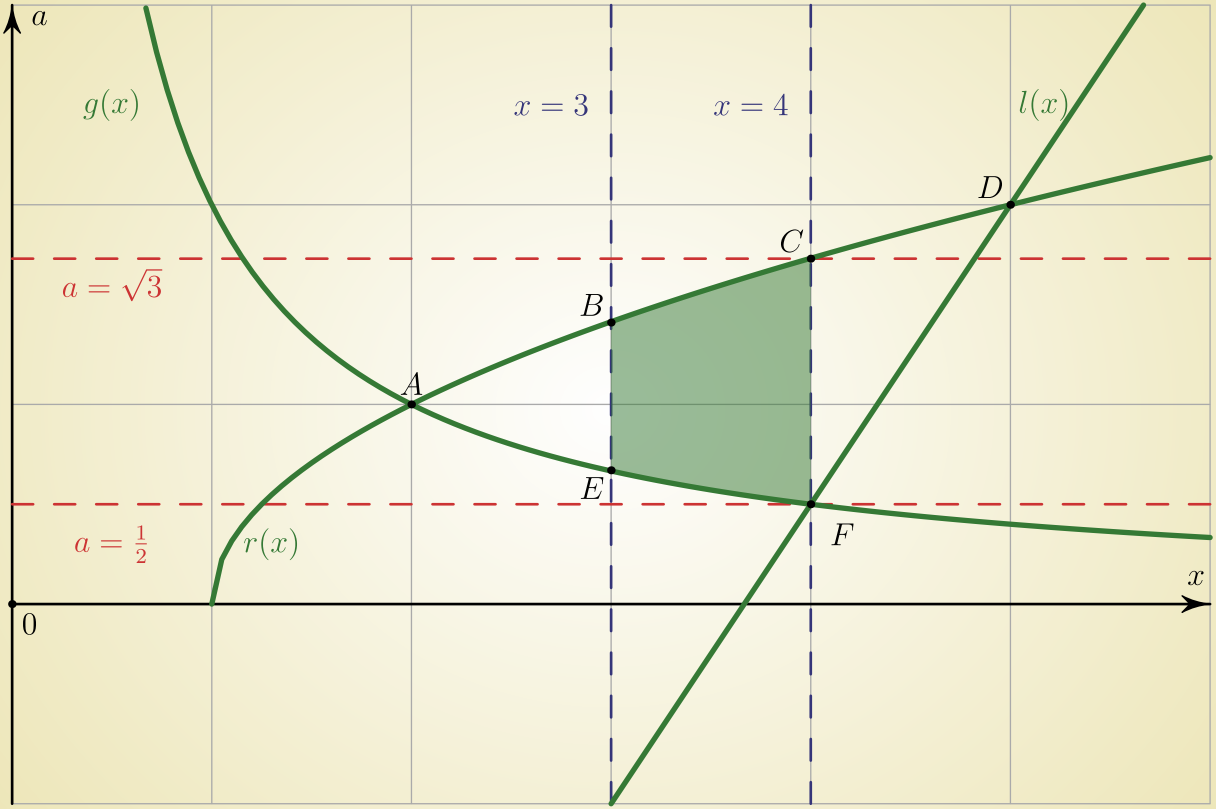
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\ 4]$.

Решение:

- Заметим, что $x \geq 1$. Учитывая это ограничение можно записать систему в следующем виде

$$\begin{cases} a \geq \dfrac{2}{x}\ (1), \\ a < \sqrt{x-1}\ (2), \\ a \geq \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}\ (3). \end{cases}$$

- Рассмотрим систему (1, 2, 3) в плоскости $(x;\ a)$. Неравенство (1) задает область над гиперболой $g\ :\ a = \frac{2}{x}$. Неравенство (2) задает область под графиком корня $r:\ \{a\ =\ \sqrt{x-1}\}$. Неравенство (3) задает область над прямой $l : \{a = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}\}$.



Начало

Содержание

Назад

- Найдем координаты точки C пересечения $r(x)$ и прямой $x = 4$. Подставим $x = 4$ в (2), получим $C = (4;\ \sqrt{3})$.

- Найдем координаты точки F пересечения $g(x)$ и прямой $x = 4$. Подставим $x = 4$ в (1), получим $F = (4;\ \frac{1}{2})$. Подставив $x = 4$ в (3), убеждаемся, что прямая (3) также проходит через точку F.

- Функция $r(x)$ возрастает, следовательно, наибольшее значение этой функции на отрезке $[3;\ 4]$ достигается при $x = 4$. Функция $g(x)$ убывает, а значит, наименьшее значение этой функции на отрезке $[3;\ 4]$ также достигается при $x = 4$.

- Из предыдущих двух пунктов делаем вывод, что при $a_0 \in \left[\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$ прямая $a = a_0$ имеет хотя бы одну точку пересечения с областью, задаваемой системой (1, 2, 3), то есть при $a \in \left[\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$ у этой системы есть хотя бы одно решение.

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$

Задача 10. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-2a-2)^2+(y-a)^2=1\\ y^2=x^2.\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение:

- Разложим второе уравнение системы на множители

$$\begin{cases}(x-2a-2)^2+(y-a)^2=1\ (1),\\ (y-x)(y+x)=0\ (2).\end{cases}$$

- Рассмотрим систему (1, 2) в плоскости $(x;\ y)$. Уравнение (1) задает окружность $\omega_a : \{A=(2a+2;\ a)\ R=1;\}$. Центр этой окружности движется вдоль прямой, заданной параметрически: $\{x=2a+2;\ y=a\}$. Запишем уравнение этой прямой в классическом виде:

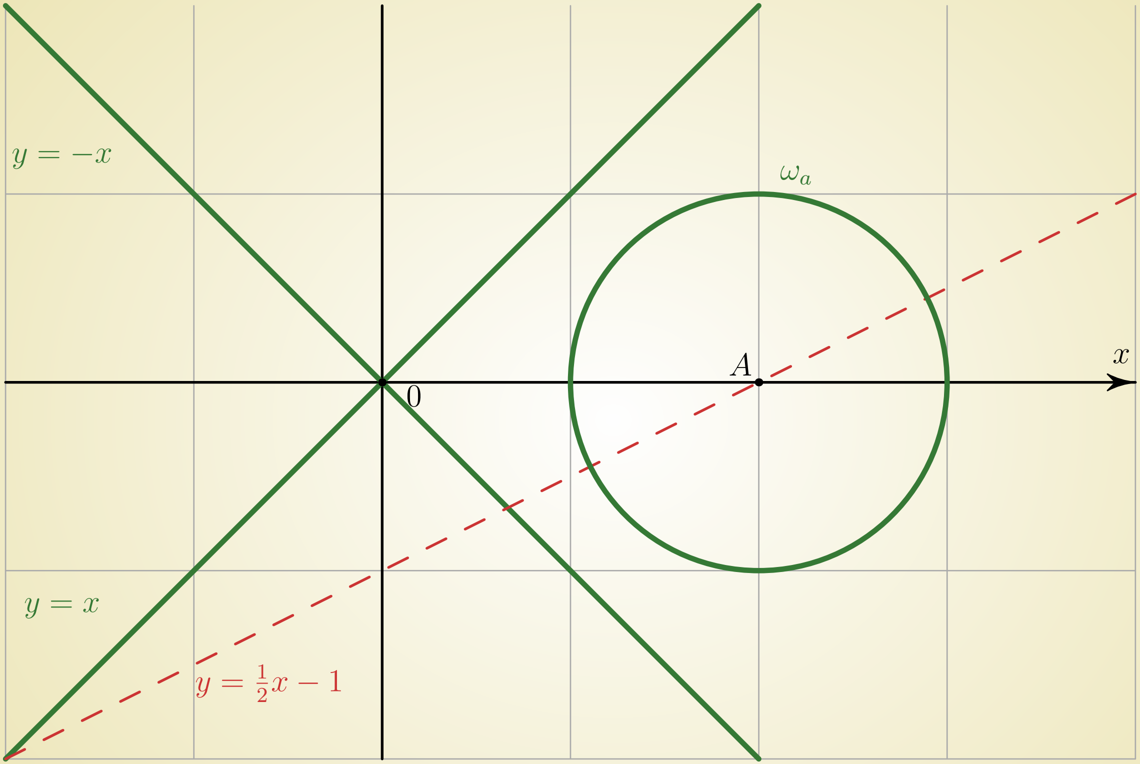
$$y=\frac{1}{2}x-1.$$

Уравнение (2) задает пару прямых: $l_1 : \{y=x\}$ и $l_2 : \{y=-x\}$.

Начало

Содержание

Назад


$y = -x$
ω_a
A
x
0
$y = x$
$y = \frac{1}{2}x - 1$

- Система (1, 2) будет иметь ровно четыре решения только в том случае, если окружность ω_a будет пересекать каждую из прямых l_1 и l_2 в двух точках и при этом не будет проходить через точку пересечения этих прямых.

- Пусть $B = l_1 \cap l_2$. Находим $B = (0;\ 0)$. Подставим координаты B в (1) и получим, что ω_a проходит через B при $a = -1$ и $a = -\frac{3}{5}$. Следовательно,

$$a \neq -1,\ a \neq -\frac{3}{5}. \tag{3}$$

- Выясним, при каких значениях a окружность ω_a имеет две точки пересечения с l_1. Подставим $y = x$ в (1). Получим квадратное уравнение. Оно имеет два решения, только в том случае, если его дискриминант больше нуля. Имеем

$$D_1 = -4(a^2 + 4a + 2) > 0.$$

Откуда

$$a \in \left(-2 - \sqrt{2};\ -2 + \sqrt{2}\right). \tag{4}$$

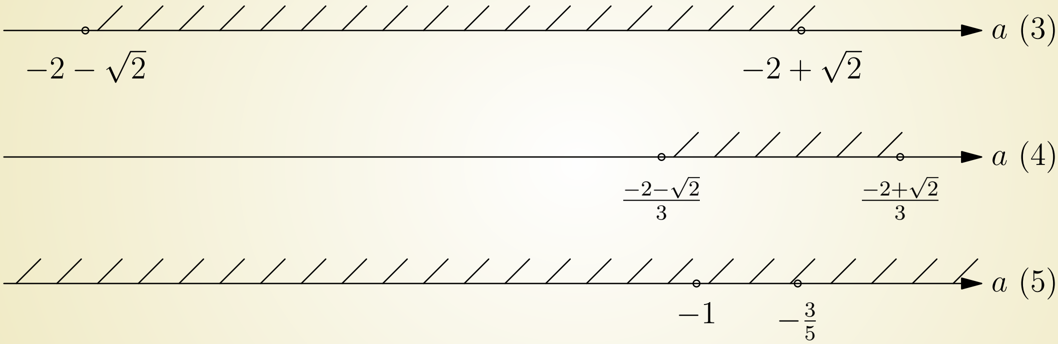
- Выясним, при каких значениях a окружность ω_a имеет две точки пересечения с l_2. Подставим $y = -x$ в (1). Аналогично предыдущему пункту имеем

$$D_2 = -4(9a^2 + 12a + 2) > 0.$$

Откуда

$$a \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};\ \frac{-2+\sqrt{2}}{3} \right). \qquad (5)$$

- Пересечем условия (3, 4, 5) и запишем ответ:



Ответ: $a \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};\ -1 \right) \cup \left(-1;\ -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5};\ -2+\sqrt{2}\right)$.

Задача 11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0.$$

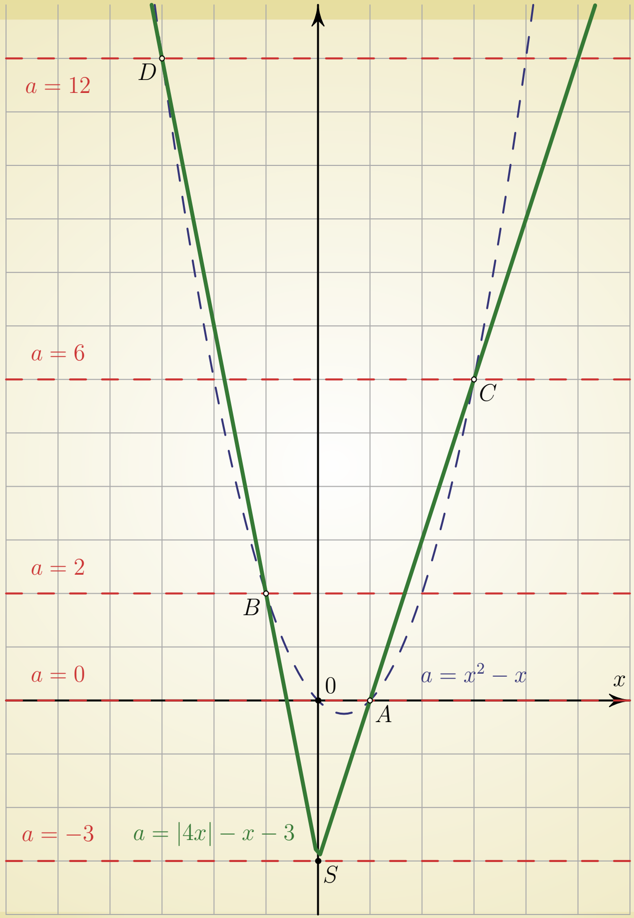
имеет ровно два различных решения.

Решение:

- Раскроем модуль, соберем полный квадрат и получим равносильную совокупность

$$\begin{cases} x \geq 0 \ (1.1), \\ a = 3x - 3 \ (1.2), \\ a \neq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ (3) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \ (2.1), \\ a = -5x - 3 \ (2.2), \\ a \neq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ (3). \end{cases}$$

- Рассмотрим эту совокупность на плоскости $(x;\ a)$. Условия (1.1, 1.2) и (1.2, 2.2) задают два луча l_1 и l_2 соответственно. Уравнение (3) задает параболу $p(x)$ с вершиной в точке $S = \left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$.


$a = 12$
D
$a = 6$
C
$a = 2$
B
$a = 0$
0
$a = x^2 - x$
x
A
$a = -3$
$a = |4x| - x - 3$
S

- Пусть $B, D = l_1 \cap p$. Решим систему (1.2, 3) и найдем $B = (-1;\ 2)$, $D = (-3;\ 12)$. Пусть $A, C = l_2 \cap p$. Решим систему (2.1, 3) и найдем $A = (1;\ 0)$, $C = (3;\ 6)$.

- Из (1.2) определяем, что при $x >= 0$ l_2 возрастает. Из (2.2) видим, что при $x < 0$ l_1 убывает. Следовательно, наименьшее значение функции $a(x) = |4x| - x - 3$ достигается в точке $S = (0;\ -3)$.

- Из предыдущих двух пунктов делаем вывод, что при $a_0 \in (-3;\ -0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ 6) \cup (6;\ 12) \cup (12;\ +\infty)$ прямая $a = a_0$ имеет ровно две точки пересечения с графиком, задаваемым системой (1, 2, 3), то есть при $a \in (-3;\ -0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ 6) \cup (6;\ 12) \cup (12;\ +\infty)$ у этой системы есть ровно два решения.

Ответ: $a \in (-3;\ -0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ 6) \cup (6;\ 12) \cup (12;\ +\infty)$.

Задача 12. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |2a - 4| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение:

- Рассмотрим случай $x = 0$. Получаем квадратное уравнение на y, которое имеет не более двух решений.

- Рассмотрим случай $x \neq 0$. Пусть $t = x^2 > 0$. Исходная система имеет ровно четыре решения $(-\sqrt{t_1};\ y_1)$, $(\sqrt{t_1};\ y_1)$, $(-\sqrt{t_2};\ y_2)$, $(\sqrt{t_2};\ y_2)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = a^2 \ (1), \\ t + y = |2a - 4| \ (2), \\ t > 0 \ (3) \end{cases}$$

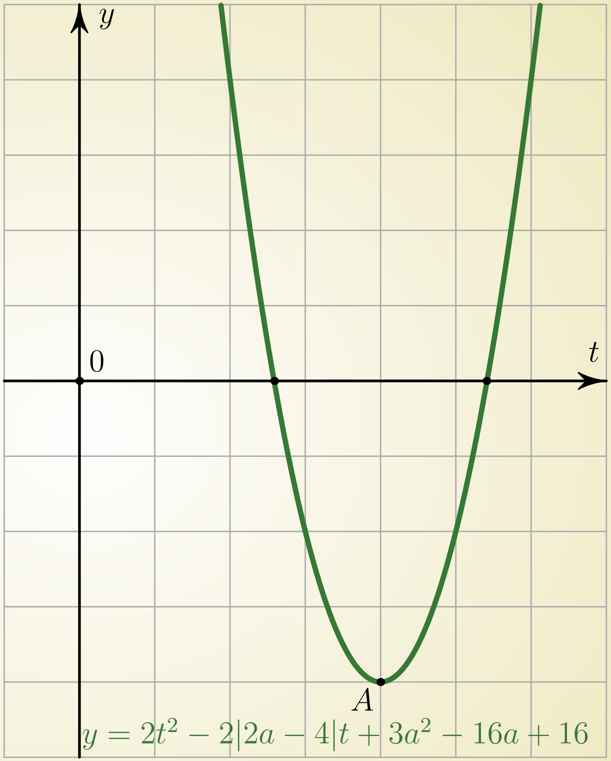
имеет ровно два различных решения $(t_1;\ y_1)$, $(t_2;\ y_2)$.

- Подставим (2) в (1) и получим

$$\begin{cases} 2t^2 - 2|2a-4|t + 3a^2 - 16a + 16 = 0 \ (4), \\ t > 0 \ (5). \end{cases}$$

- Квадратное уравнение (4) задает параболу $p(t)$ в плоскости $(t;\ y)$ с вершиной в точке $A = \left(\frac{|2a-4|}{2};\ -\frac{(2a-4)^2}{2} + 3a^2 - 16a + 16\right)$. Ветви параболы направлены вверх. Следовательно, (3) имеет ровно два положительных решения только в том случае, если $A_x > 0$, $A_y < 0$ и $p(0) > 0$, то есть

$$\begin{cases} \frac{|2a-4|}{2} > 0 \ (6), \\ -\frac{(2a-4)^2}{2} + 3a^2 - 16a + 16 < 0 \ (7), \\ 3a^2 - 16a + 16 > 0 \ (8). \end{cases}$$



Начало

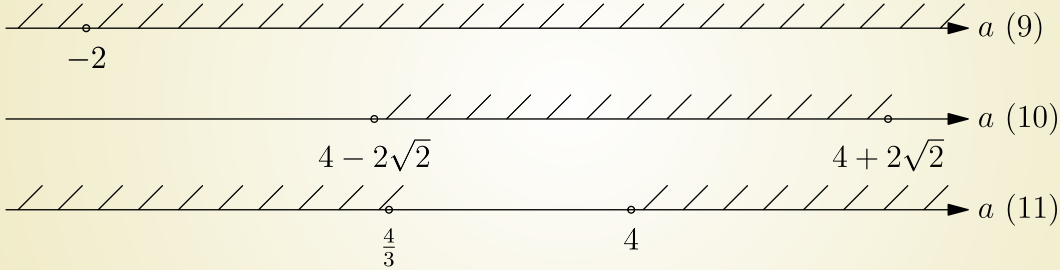
Содержание

Назад

- Решим систему (6, 7, 8), получим

$$\begin{cases} a \neq 2 \ (9), \\ a \in \left(4-2\sqrt{2};\ 4+2\sqrt{2}\right) \ (10), \\ a \in \left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right) \cup (4;\ +\infty) \ (11). \end{cases}$$

- Пересечем условия (9, 10, 11) и запишем ответ:



Ответ: $a \in \left(4-2\sqrt{2};\ \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(4;\ 4+2\sqrt{2}\right).$

Задача 13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2x^3 + (3a+2)x^2 + ax - 3a^2 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

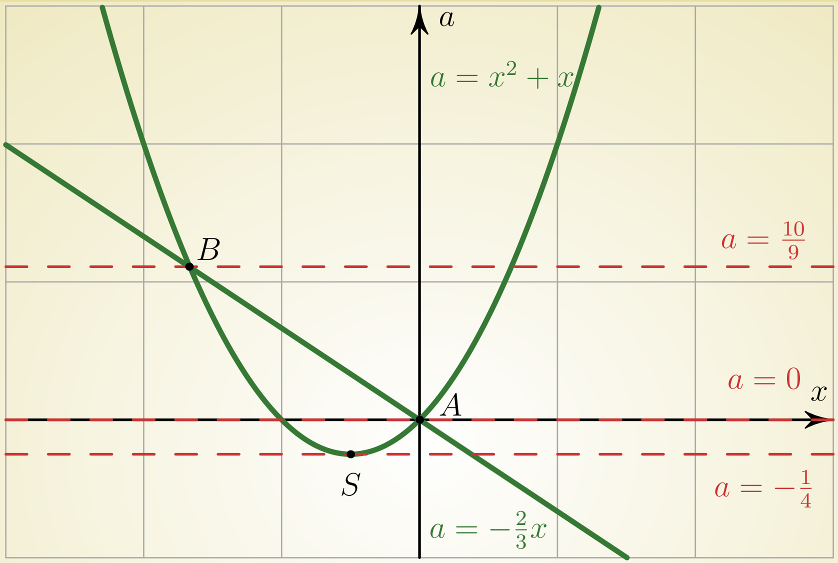
- Преобразуем левую часть уравнения и вынесем общий множитель за скобку

$$\left(2x^3 + 3ax^2\right) + \left(2x^2 + ax - 3a^2\right) = 0,$$
$$x^2\left(2x+3a\right) + \left(2x^2 + 3ax - 2ax - 3a^2\right) = 0,$$
$$x^2\left(2x+3a\right) + x\left(2x+3a\right) - a\left(2x+3a\right) = 0,$$
$$\left(2x+3a\right)\left(x^2+x-a\right) = 0.$$

- Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{2}{3}x \ (1), \\ a = x^2 + x \ (2). \end{array}\right.$$

- Рассмотрим график системы (1, 2) в плоскости $(x;\ a)$. Уравнение (1) задает прямую, уравнение (2) — параболу с вершиной в точке $S = \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$. Приравняем уравнения (1) и (2) и найдем, точки пересечения $A = (0;\ 0)$ и $B = \left(-\frac{5}{3};\ \frac{10}{9}\right)$.



- При $a_0 \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{10}{9}\right\}$ прямая $a = a_0$ имеет ровно две точки пересечения с графиком, задаваемым системой (1, 2), то есть при $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{10}{9}\right\}$ у этой системы есть ровно два решения.

Ответ: $a \in \left\{-\dfrac{1}{4}\right\} \cup \{0\} \cup \left\{\dfrac{10}{9}\right\}$.

Задача 14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0.$$

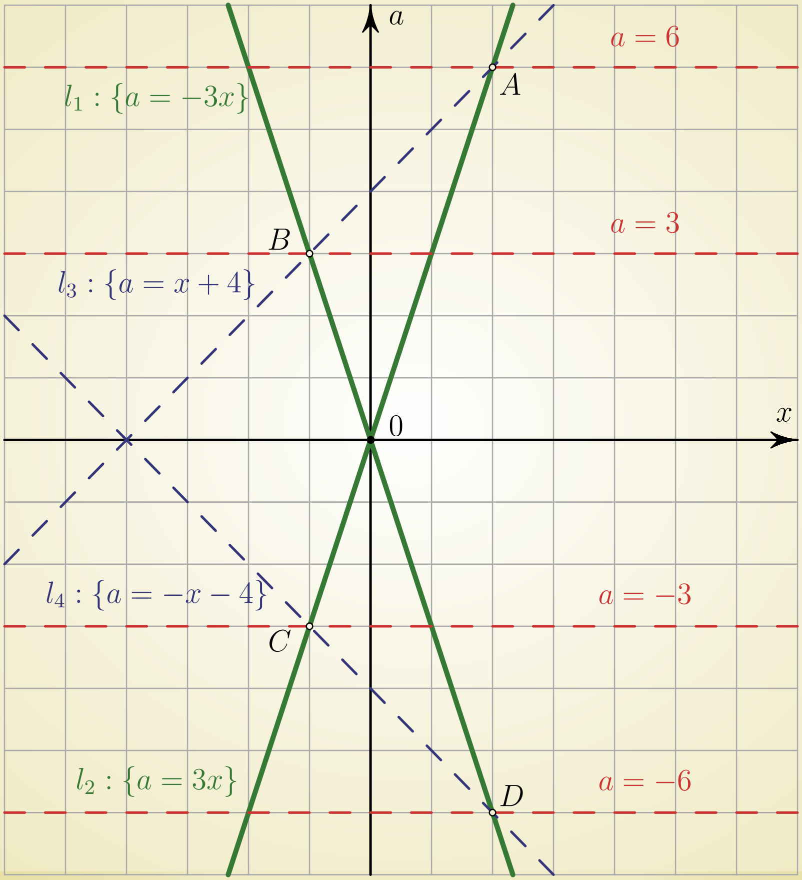
имеет ровно два различных решения.

Решение:

- Выделим полный квадрат для x в знаменателе и воспользуемся формулой разности квадратов. Получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \ (1), \\ (x + 4 - a)(x + 4 + a) \neq 0 \ (2). \end{cases}$$

- Рассмотрим график системы (1, 2) в плоскости $(x;\ a)$. Уравнение (1) задает пару прямых $l_1 : \{a = 3x\}$ и $l_2 : \{a = -3x\}$. Уравнение (2) задает пару прямых $l_3 : \{a = x + 4\}$ и $l_4 : \{a = -x - 4\}$. Пусть $A = l_1 \cap l_3$, $B = l_2 \cap l_3$, $C = l_1 \cap l_4$ и $D = l_2 \cap l_4$. Тогда находим $A = (2;\ 6)$, $B = (-1;\ 3)$, $C = (-1;\ -3)$ и $D = (2;\ -6)$.


a
x
0
a = 6
a = 3
a = −3
a = −6
l₁ : {a = −3x}
l₃ : {a = x + 4}
l₄ : {a = −x − 4}
l₂ : {a = 3x}
A
B
C
D

- При $a_0 \in (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$ прямая $a = a_0$ имеет ровно две точки пересечения с графиком, задаваемым системой (1, 2), то есть при $a \in (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$ у этой системы есть ровно два решения.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$.

Задача 15. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \log_3(16 - ax^2) = \log_3(16 - y^2), \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

- Перейдем к аргументам логарифмов, учтя ограничения, и получим систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} 16 - ax^2 = 16 - y^2 \ (1), \\ x^2 - 8x + y^2 - 4y = 0 \ (2), \\ 16 - y^2 > 0 \ (3). \end{cases}$$

- Условие $16 - ax^2 > 0$ можно не учитывать в силу равенства (1). Выделим полный квадрат в уравнении (2), будем иметь

$$\begin{cases} y^2 - ax^2 = 0 \ (4), \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20 \ (5), \\ y^2 - 16 < 0 \ (6). \end{cases}$$

- Рассмотрим случай $a < 0$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $(0;\ 0)$, что не удовлетворяет условию задачи.
- Рассмотрим случай $a = 0$. Тогда система (4, 5, 6) имеет два решения $(0;\ 0)$ и $(8;\ 0)$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.
- Рассмотрим случай $a > 0$. Разложим на множители уравнения (4) и (6), получим

$$\begin{cases} (y - \sqrt{a}x)(y + \sqrt{a}x) = 0 \ (7), \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{20})^2 \ (8), \\ (y-4)(y+4) < 0 \ (9). \end{cases}$$

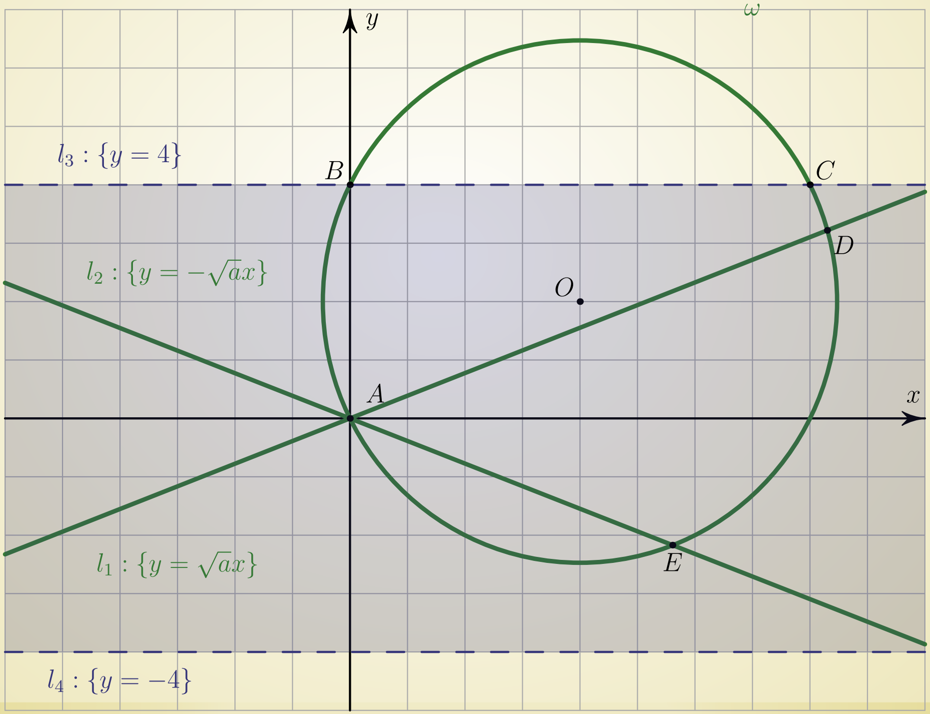
- Рассмотрим график системы (7, 8, 9) в плоскости $(x;\ y)$. Уравнение (7) задает пару прямых $l_1 : \{y = \sqrt{a}x\}$ и $l_2 : \{y = -\sqrt{a}x\}$. Уравнение (8) задает окружность ω : $\{O(4;\ 2), R = \sqrt{20}\}$. Уравнение (9) задает полосу между прямыми $l_3 : \{y = 4\}$ и $l_4 : \{y = -4\}$.
- Пусть $\{A, D\} = \omega \cap l_1$. Подставим $y = \sqrt{a}x$ в (8) и найдем $A = (0;\ 0)$, $D = \left(\frac{8+4\sqrt{a}}{1+a};\ \frac{8\sqrt{a}+4a}{1+a}\right)$.

Начало

Содержание

Назад

- Пусть $\{A, E\} = \omega \cap l_2$. Подставим $y = -\sqrt{a}x$ в (8) и найдем $E = \left(\frac{8-4\sqrt{a}}{1+a};\ \frac{8\sqrt{a}-4a}{1+a}\right)$.
- Пусть $\{B, C\} = \omega \cap l_3$. Подставим $y = 4$ в (8) и найдем $B = (0,\ 4)$, $C = (8;\ 4)$. Подставляя $y = -4$ в (8), убеждаемся, что $\omega \cap l_4 = \varnothing$.



- Определим значения a, при которых точка D лежит в полосе (9). Решая неравенство

$$-4 < \frac{8\sqrt{a} + 4a}{1 + a} < 4,$$

находим $a \in \left[0;\ \frac{1}{4}\right)$.

- Определим значения a, при которых точка E лежит в полосе (9). Решая неравенство

$$-4 < \frac{8\sqrt{a} - 4a}{1 + a} < 4,$$

находим $a \in [0;\ +\infty)$.

- Выясним, при каких значениях a точка E совпадает с точкой A. Приравнивая координаты этих точек, находим $a = 4$. Рассуждая аналогично, делаем вывод, что точка D не совпадает с точкой A ни при каких значениях параметра a, а точки D и E совпадают при $a = 0$.

- Итак, точки A и E являются решениями исходной системы при $a \in [0;\ +\infty)$. Точка D является решением при $a \in \left[0;\ \frac{1}{4}\right)$. При $a = 0$ точки D и E совпадают. При $a = 4$ точки A и E совпадают.

- Следовательно, система имеет ровно два решения при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{1}{4};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in \{0\} \cup \left(\frac{1}{4};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$.

Задача 16. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-4x^2}, \\ xy + a^2 = ax + ay \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

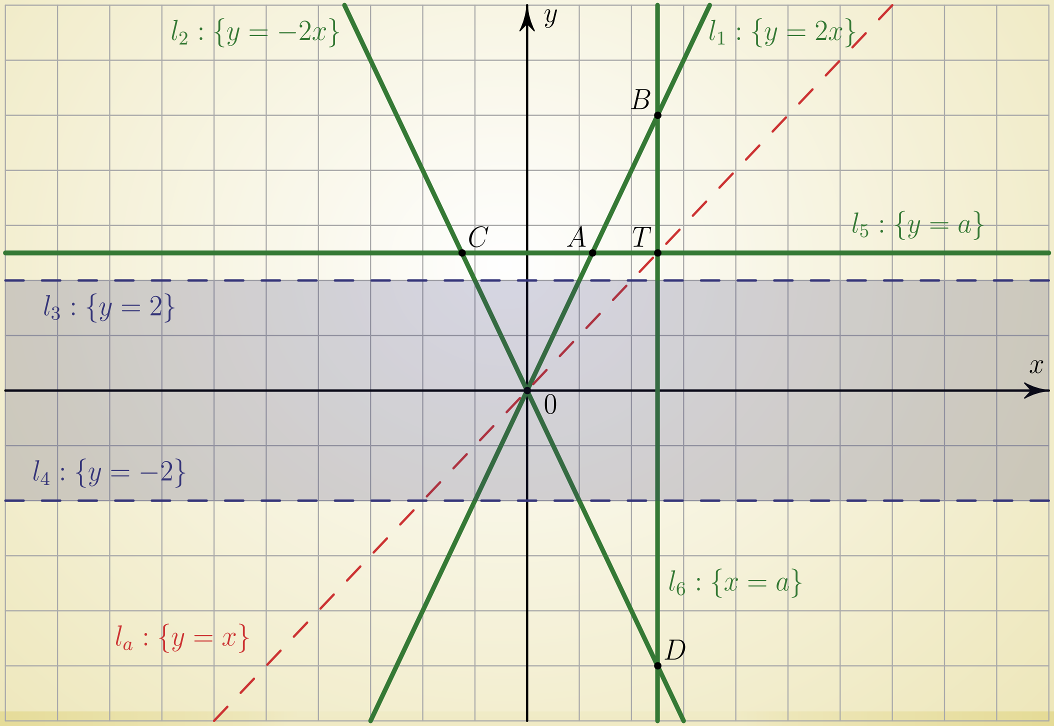
- Возведем первое уравнение в квадрат, учтя ограничения, и получим систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} 4-y^2 = 4-4x^2 \ (1), \\ 4-y^2 \geq 0 \ (2), \\ xy - ax - ay + a^2 = 0 \ (3). \end{cases}$$

- Условие $4-4x^2 \geq 0$ можно не учитывать в силу равенства (1). Разложим на множители уравнения системы (1, 2, 3), будем иметь

$$\begin{cases} (y-2x)(y+2x) = 0 \ (4), \\ (y-2)(y+2) \leq 0 \ (5), \\ (x-a)(y-a) = 0 \ (6) \end{cases}$$

- Рассмотрим график системы (4, 5, 6) в плоскости $(x;\ y)$. Уравнение (4) задает пару прямых $l_1 : \{y = 2x\}$ и $l_2 : \{y = -2x\}$. Неравенство (5) задает полосу между прямыми $l_3 : \{y = 2\}$ и $l_4 : \{y = -2\}$. Уравнение (6) задает семейство пар прямых, пересекающихся в точке $T = (a;\ a)$, $l_5 : \{y = a\}$ и $l_6 : \{x = a\}$.



Начало

Содержание

Назад

- - Пусть $A = l_1 \cap l_5$. Подставим $y = a$ в $y = 2x$ и найдем $A = \left(\frac{a}{2};\ a\right)$.
  - Пусть $B = l_1 \cap l_6$. Подставим $x = a$ в $y = 2x$ и найдем $B = (a;\ 2a)$.
  - Пусть $C = l_2 \cap l_5$. Подставим $y = a$ в $y = -2x$ и найдем $C = \left(-\frac{a}{2};\ a\right)$.
  - Пусть $D = l_2 \cap l_6$. Подставим $x = a$ в $y = -2x$ и найдем $D = (a;\ -2a)$.
- - Точка A лежит в полосе (5) при $a \in [-2;\ 2]$.
  - Точка B лежит в полосе (5) при $a \in [-1;\ 1]$.
  - Точка C лежит в полосе (5) при $a \in [-2;\ 2]$.
  - Точка D лежит в полосе (5) при $a \in [-1;\ 1]$.
- При $a = 0$ точки A, B, C и D совпадают. Каждая из этих точек в полосе (5) соответствует решению системы (1, 2, 3).
- Следовательно, система имеет ровно два решения при $a \in [-2;\ -1) \cup (1;\ 2]$.

Ответ: $a \in [-2;\ -1) \cup (1;\ 2]$.

Задача 17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

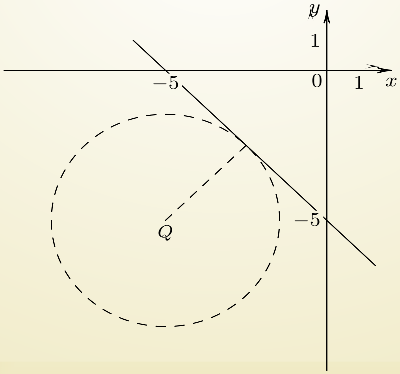
$$\sqrt{2xy+a} = x+y+5$$

не имеет решений.

Решение. Перейдем к равносильной системе и преобразуем ее:

$$\begin{cases} 2xy+a=(x+y+5)^2, \\ x+y+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x^2+10x+y^2+10y+25, \\ x+y+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2+(y+5)^2=a+25, \\ x+y+5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение системы при $a<-25$ не имеет решений. При $a=-25$ оно задает точку $(-5,-5)$, которая не удовлетворяет условию $x+y+5 \geqslant 0$. При $a>-25$ в прямоугольной системе координат xOy оно задает окружность Ω с центром в точке $Q=(-5,-5)$ радиуса



Таким образом, при $a > -25$ исходная система не имеет решений, если и только если окружность Ω не имеет общих точек с прямой l. А это эквивалентно тому, что расстояние от центра окружности Q до прямой l больше радиуса окружности Ω. Воспользуемся формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(Q, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-5 - 5 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Остается решить неравенство

$$\frac{5}{\sqrt{2}} > \sqrt{a + 25} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant a + 25 < \frac{25}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -25 \leqslant a < -\frac{25}{2}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено только при $a < -\frac{25}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{25}{2}\right)$.

Задача 18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + a = x, \\ |x| + |y| + |x - y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

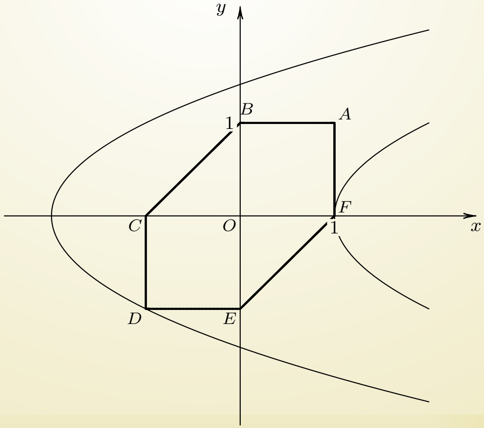
Решение. Если (x_0, y_0) — решение второго уравнения системы, которое обозначим за (2), то (y_0, x_0), $(-x_0, -y_0)$, $(-y_0, -x_0)$ также являются его решениями. Значит, график уравнения (2) в прямоугольной системе координат xOy симметричен относительно прямой $y = x$, а также относительно начала отсчета. Таким образом, для его построения достаточно рассмотреть следующие два случая. При $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $x \geqslant y$ уравнение (2) принимает вид

$$x + y + x - y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Если $x \geqslant 0$, $y < 0$, $x \geqslant y$, получим

$$x - y + x - y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 1.$$

Следовательно, с учетом симметрии графиком уравнения (2) служит шестиугольник с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(-1, -1)$, $E(0, -1)$, $F(1, 0)$. Графиком уравнения $y^2 + a = x$ служит парабола Ω с вершиной в точке $P(a, 0)$, симметричная относительно оси абсцисс, ветви которой направлены вправо.



Начало

Содержание

Назад

С учетом свойств параболы единственное решение исходной системы реализуется, если и только если Ω касается отрезка AF, т.е. проходит через точку F, или проходит через точку D. Таким образом, задача сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{aligned} &0^2 + a = 1, \\ &(-1)^2 + a = -1 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a = 1, \\ &a = -2. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\{-2; 1\}$.

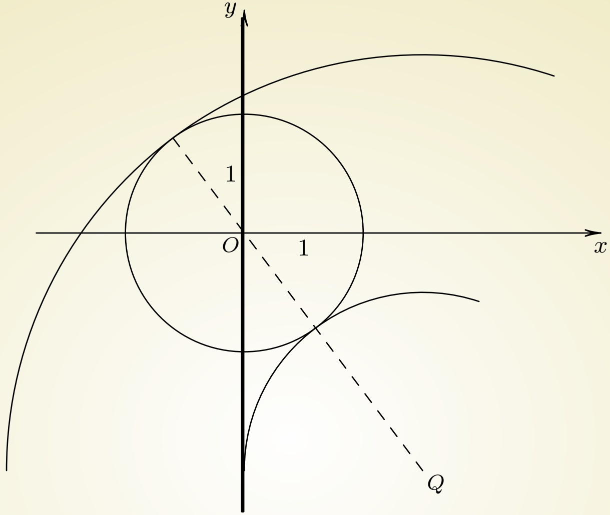
Задача 19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \\ (y - x)^2 + 6(y - x) + 25 = a - 2y - 2xy \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение эквивалентно $x^2 + y^2 = 2^2$ и задает в прямоугольной системе координат xOy окружность Ω_1 с центром в точке O радиуса 2. Второе уравнение после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и выделения полных квадратов принимает вид $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = a$.

При $a < 0$ оно не имеет решений; при $a = 0$ задает точку $(3, -4)$, которая не лежит на окружности Ω_1; при $a > 0$ его графиком служит окружность Ω_2 с центром в точке $(3, -4)$ радиуса $\sqrt{a}$.



Таким образом, исходная система имеет единственное решение, если и только если окружности Ω_1 и Ω_2 касаются. А это эквивалентно тому, что модуль суммы или разности их радиусов равен расстоянию между центрами. По формуле длины отрезка с концами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2) имеем

$$OQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5.$$

Следовательно, исходная задача сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left|\sqrt{a} + 2\right| = 5, \\ \left|\sqrt{a} - 2\right| = 5 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = 9, \\ a = 49. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{9; 49\}$

Задача 21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{3-x}+|x-a|\leqslant 2$$

является отрезок.

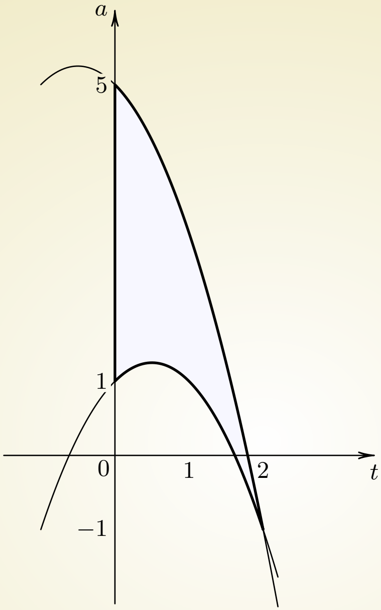
Решение. Пусть $t=\sqrt{3-x}$, тогда $x=3-t^2$ и неравенство принимает вид $\left|3-t^2-a\right|\leqslant 2-t$, причем $t\geqslant 0$. Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}0\leqslant t\leqslant 2,\\ 3-t^2-a\leqslant 2-t,\\ 3-t^2-a\geqslant -(2-t)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}0\leqslant t\leqslant 2,\\ a\geqslant -t^2+t+1,\\ a\leqslant -t^2-t+5.\end{cases}$$

Изобразим множество решений этой системы в прямоугольной системе координат tOa — получим область, ограниченную сверху параболой, заданной функцией $f(t)=-t^2-t+5$; снизу — параболой, графиком функции $g(t)=-t^2+t+1$; слева — прямой $t=0$. Ветви обеих парабол направлены вниз, их вершины имеют координаты $\left(-\frac{1}{2},\frac{21}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ соответственно, а единственная точка пересечения определяется системой

$$\begin{cases}-t^2+t+1=-t^2-t+5,\\ a=-t^2+t+1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}t=2,\\ a=-1.\end{cases}$$

$f(0)=5$, $g(0)=1$, т.е. прямая $t=0$ пересекает графики функций $y=f(t)$ и $y=g(t)$ в точках $(0,5)$ и $(0,1)$ соответственно.



Отображение $t = \sqrt{3-x}$ является непрерывным и взаимно однозначным при $0 \leqslant t \leqslant 2$. Поэтому с учетом свойств квадратичной функции решением исходного неравенства служит отрезок, если и только если $-1 < a < 1$ или $\frac{5}{4} \leqslant a < 5$.

Ответ: $(-1;1) \cup \left[\dfrac{5}{4};5\right)$.

Начало

Содержание

Назад

Задача 22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$$

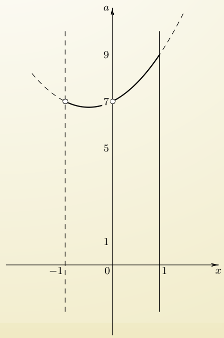
имеет хотя бы один корень из полуинтервала $(-1; 1]$.

Решение. Перейдем от логарифмического уравнения к равносильной системе при $-1 < x \leqslant 1$:

$$\begin{cases} a + x - 6 = (x+1)^2, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ -1 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = x^2 + x + 7, \\ x \neq 0, \\ -1 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы в прямоугольной системе координат xOa. Ее графиком служит часть параболы, заданной функцией $f(x) = x^2+x+7$, с выколотой точкой $A(0, 7)$, лежащая в области $-1 < x \leqslant 1$. Вершина этой параболы имеет координаты $\left(-\frac{1}{2}; \frac{27}{4}\right)$, а ее ветви направлены вверх.

Поскольку $f(-1) = 7$, $f(1) = 9$, то с учетом свойств квадратичной функции исходное уравнение имеет хотя бы один корень на полуинтервале $(-1; 1]$, если и только если $\frac{27}{4} \leqslant a < 7$ или $7 < a \leqslant 9$.



Ответ: $\left[\frac{27}{4}; 7\right) \cup (7; 9]$.

Задача 23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = \left|x^2 - x - 2\right|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение. Если $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 2$, то первое уравнение системы принимает вид

$$y^2 - x - 2 = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x.$$

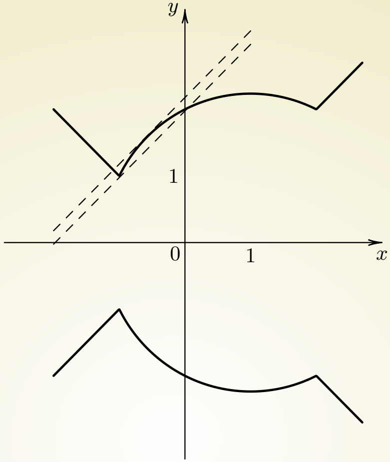
Последнее соотношение в прямоугольной системе координат xOy представляет собой биссектрисы четырех координатных углов. Изобразим только те их точки, что удовлетворяют условию $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 2$. В случае $-1 < x < 2$ первое уравнение системы приводится к виду

$$y^2 - x - 2 = -x^2 + x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 5.$$

Его графиком служит окружность с центром в точке $Q(1,0)$ радиуса $R = \sqrt{5}$. Изобразим только те ее точки, которые удовлетворяют условию $-1 < x < 2$. График первого уравнения системы обозначим за Ω

При $a = 0$ исходная система имеет бесконечное количество решений, что удовлетворяет условию задачи. При $a > 0$ прямая l, заданная уравнением $y = x - a$, имеет единственное пересечение с Ω. При $a < 0$ исходная система имеет более двух решений, если и только если прямая l лежит выше точки $M(-1,1)$, но ниже точки T — касания l и дуги Ω. Условие $M \in l$ эквивалентно уравнению

$$1 = -1 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$$



А условие касания l дуги Ω эквивалентно тому, что расстояние от точки Q до прямой l равно R, причем $a < 0$. Воспользуемся формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(Q, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1 - a|.$$

С учетом условия $a < 0$ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 - a) = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 - \sqrt{10}.$$

Резюмируя, исходная система имеет более двух решений, если и только если $1 - \sqrt{10} < a < -2$ или $a = 0$.

Ответ: $\left(1 - \sqrt{10}; -2\right) \cup \{0\}$.

Задача 24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_{0,5}\left(x^2\right) - a\right| - \left|\log_{0,5} x + 2a\right| = \left(\log_{0,5} x\right)^2$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

Решение. Пусть $t = \log_{0,5} x$, тогда с учетом равенства $\log_{0,5}(x^2) = 2\log_{0,5} x$ при $x > 0$ исходное уравнение принимает вид

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2. \qquad (1)$$

Изобразим множество его решений в прямоугольной системе координат tOa. В случае $-\frac{1}{2}t \leqslant a < 2t$ имеем

$$2t - a - t - 2a = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t.$$

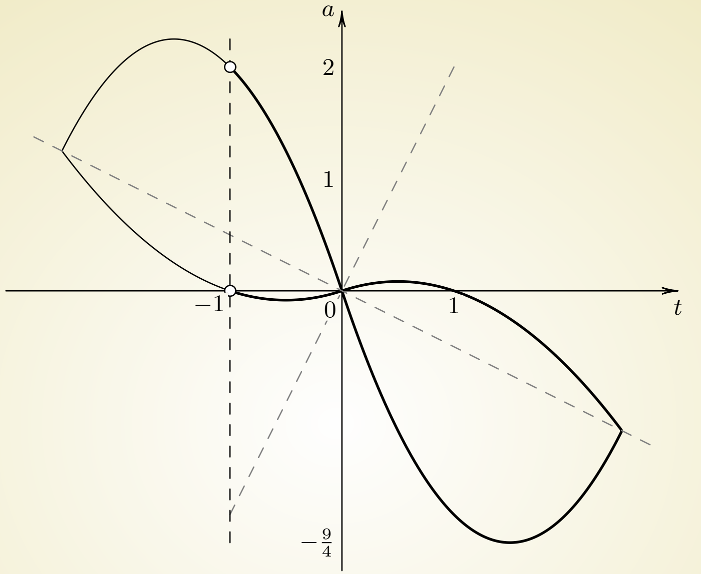
Графиком такого уравнения служит парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$. Эта парабола пересекает прямую l_1, заданную уравнением $a = 2t$, только в начале отсчета. Найдем точки пересечения этой параболы и прямой l_2, заданной уравнением $a = -\frac{1}{2}t$:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t, \\ a = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t(2t - 5) = 0, \\ a = -\frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Последняя система имеет ровно два решения: $(0,0)$, $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$. В случае $a < 2t$ и $a < -\frac{1}{2}t$ уравнение (1) принимает вид

$$2t - a + t + 2a = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = t^2 - 3t.$$

Его графиком служит парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной в точке $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Она пересекает прямую l_1 только в начале отсчета, а прямую l_2 в точках $(0,0)$ и $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.



Если (t_0, a_0) служит решением уравнения (1), то и $(-t_0, -a_0)$ является его решением. Значит, график уравнения (1) симметричен относительно начала отсчета. Исходное уравнение имеет хотя бы одно решение x, меньшее 2, если и только если уравнение (1) имеет хотя бы одно решение t, большее -1. График уравнения (1) пересекает прямую $t = -1$ в точках $(-1, 2)$ и $(-1, 0)$. Таким образом, с учетом проделанных исследований у уравнения (1) найдутся точки графика, удовлетворяющие условию $t > -1$, если и только если $-\frac{9}{4} \leqslant a < 2$.

Ответ: $\left[-\dfrac{9}{4}; 2\right)$.

Задача 25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

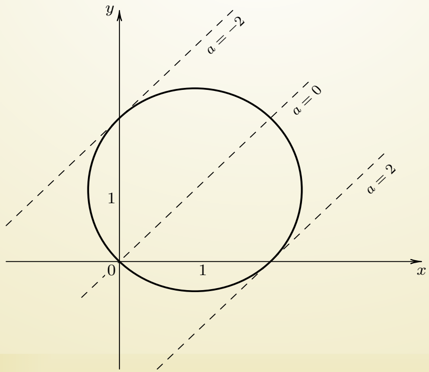
$$\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y, \\ x^2+y^2=2(1+a)x+2(1-a)y-2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Перейдем к равносильной системе и преобразуем ее:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y, \\ 2x+2y=2x+2ax+2y-2ay-2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2, \\ a(x-y-a)=0. \end{cases}$$

При $a=0$ система имеет бесконечно много решений. В ином случае первое уравнение в прямоугольной системе координат xOy задает окружность с центром в точке $Q(1,1)$ радиуса $R=\sqrt{2}$. А второе уравнение принимает вид $y=x-a$: его графиком является прямая l с угловым коэффициентом 1, проходящая через точку $(0,-a)$.



Значит, при $a \neq 0$ система имеет ровно два решения, если и только если расстояние от точки Q до прямой l меньше радиуса окружности R и не равно нулю. Воспользуемся формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(Q, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 - 1 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |a|.$$

Остается решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |a| < \sqrt{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |a| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < 2, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 2)$.

Задача 26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

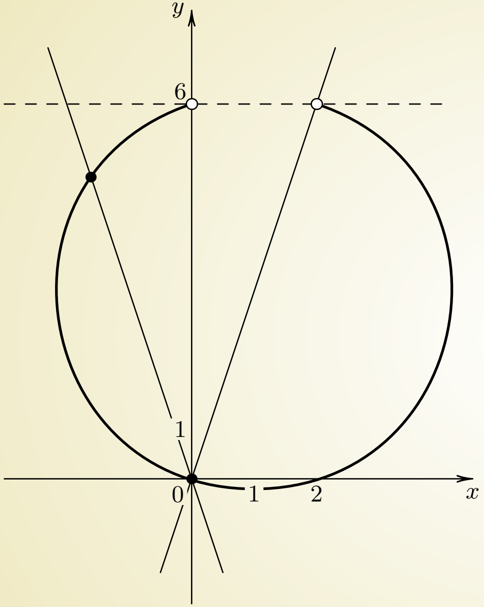
$$\begin{cases} \log_7\left(36 - y^2\right) = \log_7\left(36 - a^2x^2\right), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$

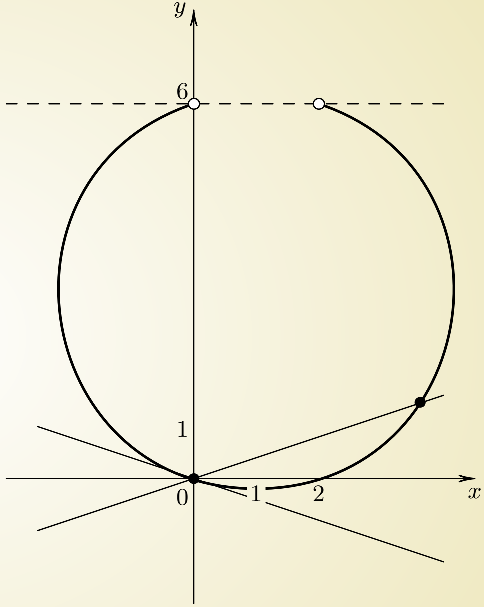
имеет ровно два различных решения.

Решение. Перейдем к равносильной системе и преобразуем ее:

$$\begin{cases} 36 - y^2 = 36 - a^2x^2, \\ 36 - y^2 > 0, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm ax, \\ -6 < y < 6, \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Первая строка системы в прямоугольной системе координат xOy задает пару прямых, проходящих через начало отсчета, с угловыми коэффициентами $-a$ и a. Вторая и третья строки в пересечении дают дугу окружности с выколотыми концами в точках $(0, 6)$ и $(2, 6)$, проходящую через начало отсчета.





Система (1) имеет ровно два различных решения, если и только если прямые $y = \pm ax$ совпадают, или одна из этих прямых касается окружности, или угловой коэффициент одной из этих прямых не меньше числа 3. Первый случай реализуется только при $a = 0$; второй лишь при $a = \pm\frac{1}{3}$, что следует из равенства $\overrightarrow{OQ} = (1, 3)$, где Q — центр дуги окружности; третий эквивалентен условию $a \leqslant -3$ или $a \geqslant 3$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$.

Задача 27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

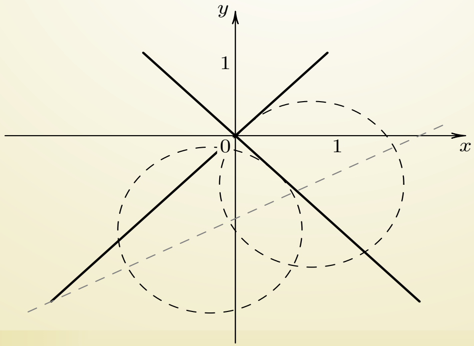
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Выделив полные квадраты в первом уравнении, перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} \left(x - 2(a+1)\right)^2 + (y-a)^2 = 1, \\ y = \pm x. \end{cases}$$

Первая строка в прямоугольной системе координат xOy задает единичную окружность Ω с центром в точке $Q = (2a+2, a)$. Вторая строка — пара перпендикулярных прямых l_1, l_2, образующих биссектрисы четырех координатных углов. Условие исходной задачи эквивалентно тому, что расстояние от центра Q окружности Ω до каждой из прямых l_1, l_2 меньше единицы (радиуса окружности), причем окружность не проходит через начало отсчета — единственную общую точку прямых l_1, l_2.



Воспользуемся формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$:

$$\rho(Q, l_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2a+2+a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|3a+2|}{\sqrt{2}},$$

$$\rho(Q, l_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-2a-2+a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|a+2|}{\sqrt{2}}.$$

Теперь решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |3a+2| < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |a+2| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < 3a+2 < \sqrt{2}, \\ -\sqrt{2} < a+2 < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+2\right) < a < \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-2\right), \\ -\left(\sqrt{2}+2\right) < a < \sqrt{2}-2. \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна двойному неравенству $-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+2\right) < a < \sqrt{2}-2$. Далее из соответствующего интервала следует исключить все значения a, при которых точка $(0,0)$ принадлежит Ω. Найдем такие значения, решив уравнение:

$$(0-2(a+1))^2 + (0-a)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5a^2+8a+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=-\frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Таким образом исходная система имеет ровно 4 различных решения, если и только если $a \neq -1$ и $a \neq -\frac{3}{5}$, причем $-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+2\right) < a < \sqrt{2}-2$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+2\right); -1\right) \cup \left(-1; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}; \sqrt{2}-2\right)$.

Задача 28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2 - xy + 3x - y - 6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Преобразуем следующее выражение:

$$y^2 - xy + 3x - y - 6 = (y-3)(y+2) - x(y-3) = (y-3)(y+2-x).$$

С учетом этого исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = x - 2, \\ x = -2; \end{array}\right. \\ -2 \leqslant x < 6, \\ y = -x + a. \end{cases}$$

Изобразим множество ее решений в прямоугольной системе координат xOy. Количество решений системы совпадает с количеством пересечений прямой l, заданной уравнением $y = -x + a$, в области $-2 \leqslant x < 6$ с тремя прямыми, уравнения которых записаны в совокупности. Обозначим точки пересечения прямых:

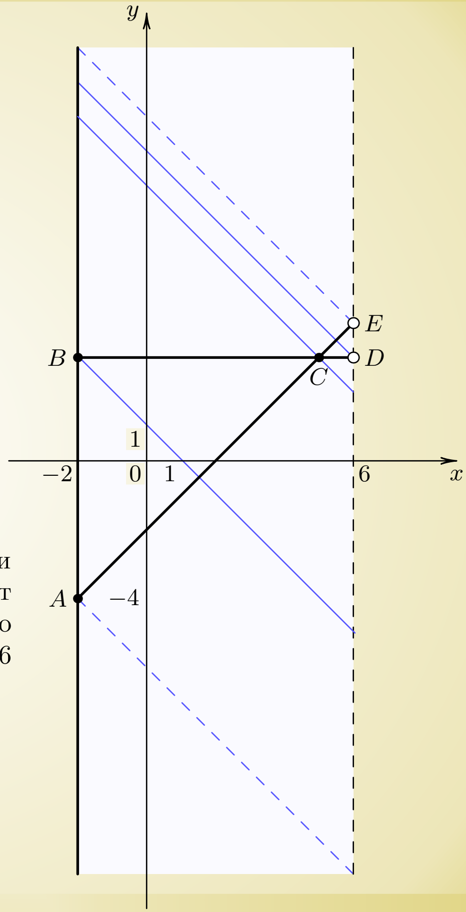
$$A:\begin{cases}x=-2,\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2,\\ y=-4.\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}$$

$$C:\begin{cases}y=3,\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}y=3,\\ x=6.\end{cases}$$

$$E:\begin{cases}x=6,\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\ y=4.\end{cases}$$



Исходная система имеет ровно два различных решения, если и только если прямая расположена выше точки A и не выше точки B, или проходит через точку C, или расположена не ниже точки D и ниже точки E. По найденным координатам точек первый случай эквивалентен условию $-6 < a \leqslant 1$, второй — $a = 8$, третий — $9 \leqslant a < 10$.

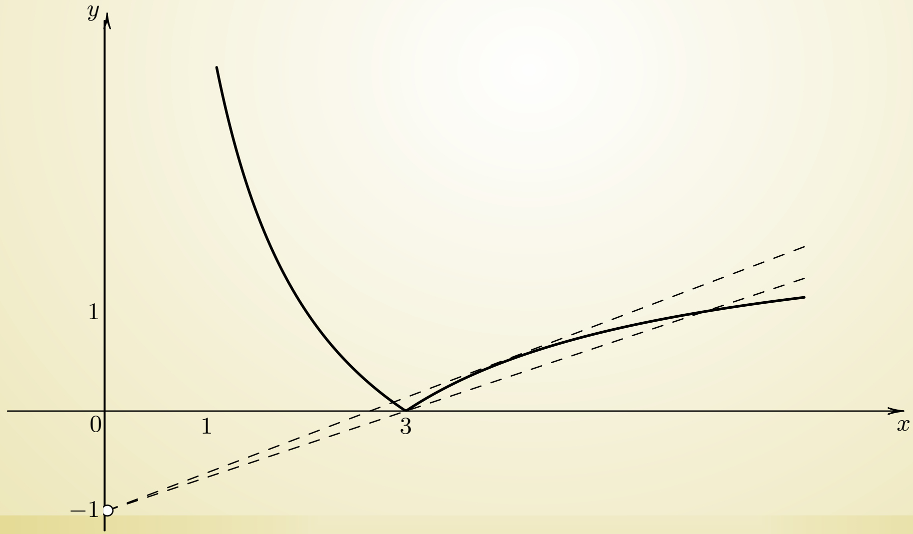
Ответ: $(-6;1] \cup \{8\} \cup [9;10)$.

Задача 29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 2\right| = ax - 1$$

имеет более двух корней на промежутке $(0; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \left|\frac{6}{x} - 2\right|$ и $g(x) = ax - 1$ на открытом луче $(0; +\infty)$. Первая непрерывна на нем, убывает на полуинтервале $(0; 3]$ и возрастает на луче $[3; +\infty)$. Графиком второй является открытый луч с угловым коэффициентом a, исходящий из точки $(0; -1)$, лежащий в области $x > 0$.



Уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений при $a \leqslant 0$, поскольку в этом случае правая его часть отрицательна, а левая неотрицательна. Если $a > 0$, то функция $y = g(x)$ возрастает и соответствующий луч может пересекаться с графиком функции $y = f(x)$ при $0 < x \leqslant 3$ не более одного раза. Причем пересечение единственно, если и только если $a \geqslant \frac{1}{3}$.

В силу выпуклости вверх графика функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 3$ уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более двух корней на открытом луче $(3; +\infty)$. Причем ровно два корня будут, если и только если угловой коэффициент a будет больше $\frac{1}{3}$ и меньше углового коэффициента касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной из точки $(0, -1)$. Угловой коэффициент касательной находится из условия единственности решения следующего уравнения:

$$2 - \frac{6}{x} = ax - 1 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 - 3x + 6 = 0.$$

Последнее уравнение при $a > 0$ является квадратным и имеет единственное решение, если и только если его дискриминант $D = 9 - 24a$ равен нулю. То есть при $a = \frac{3}{8}$. Таким образом, условие задачи выполнено лишь для $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{8}\right)$.

Задача 30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

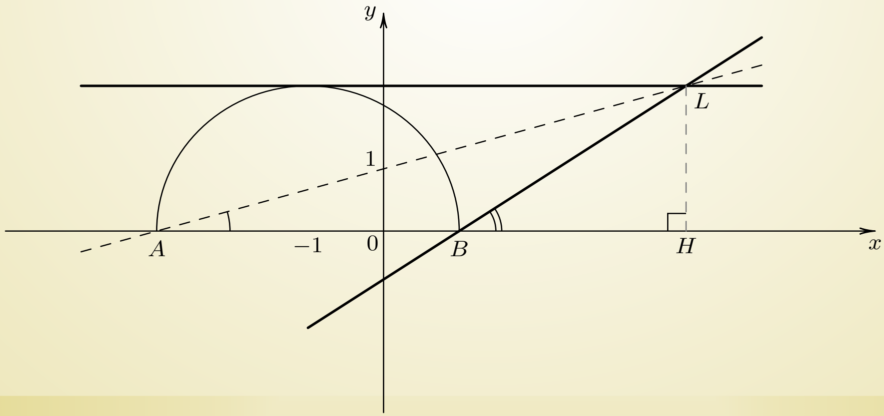
$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{4 - (1 + x)^2} = -ax + 4a + 2$$

и рассмотрим функции: $f(x) = \sqrt{4 - (1 + x)^2}$, $g(x) = -a(x - 4) + 2$. Графиком первой из них служит полуокружность с центром в точке $(-1, 0)$ и радиуса 2, все точки которой имеют неотрицательные ординаты. Обозначим ее концы: $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$. График функции $y = g(x)$ представляет собой прямую l с угловым коэффициентом $-a$, проходящую через точку $L(4, 2)$.



Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-3; 1]$, является непрерывной на нем и выпуклой вверх. На отрезке $[-3; -1]$ она возрастает, на отрезке $[-1; 1]$ — убывает. Функция $y = g(x)$ — линейная с соответствующими свойствами. Пусть LH — перпендикуляр, опущенный из точки L на ось абсцисс. Тогда тангенс угла наклона прямой AL равен $LH : AH = \frac{2}{7}$, а тангенс угла наклона прямой BL равен $LH : BH = \frac{2}{3}$. Единственное решение исходного уравнения, с учетом указанных свойств, возможно, если и только если прямая l касается графика функции $y = f(x)$ или ее угловой коэффициент больше $\frac{2}{7}$, но не больше $\frac{2}{3}$. Первый случай реализуется только при $a = 0$, второй эквивалентен двойному

$$\frac{2}{7} < -a \leqslant \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3} \leqslant a < -\frac{2}{7}.$$

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

Задача 31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

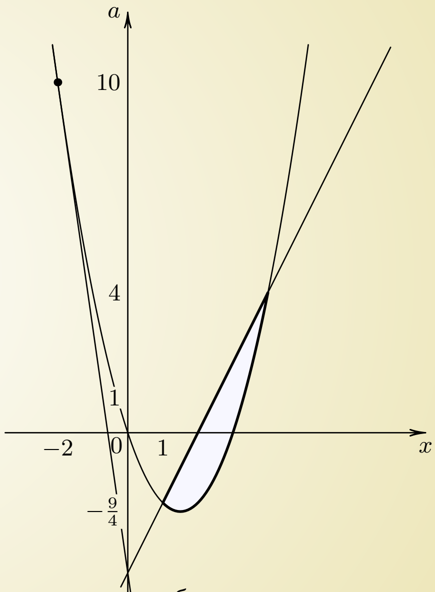
$$\begin{cases} (a + 7x + 4)(a - 2x + 4) \leqslant 0, \\ a + 3x \geqslant x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, a) = (a + 7x + 4)(a - 2x + 4)$, определенную на всей плоскости. Ее нулями служат прямые $a = -7x - 4$ и $a = 2x - 4$, которые делят плоскость на четыре области. В каждой из областей имеется ровно одна из точек: $A(10, 0)$, $B(0, 10)$, $C(-10, 0)$, $D(0, -10)$. Поскольку $f(A) < 0$, $f(C) < 0$, $f(B) > 0$, $f(D) > 0$, то решением неравенства $f(x, a) \leqslant 0$ служит объединение двух вертикальных углов, содержащих точки A и C, стороны которых лежат на прямых $a = -7x - 4$ и $a = 2x - 4$. Вершина этих вертикальных углов — точка $(0, -4)$.

Решением же неравенства $a+3x \geqslant x^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant x^2-3x$ служат все точки плоскости xOa, расположенные не ниже параболы — графика функции $a = x^2 - 3x$. Ее ветви направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Найдем точки пересечения этой параболы с прямыми, заданными уравнениями $a = -7x - 4$ и $a = 2x - 4$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x = -7x - 4, \\ a = -7x - 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 4, \\ a = 2x - 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2 = 0, \\ a = -7x - 4; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x-4) = 0, \\ a = 2x - 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ a = 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ a = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ a = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$



С учетом свойств квадратичной функции это означает, что исходная система имеет хотя бы одно решение, если и только если $-\frac{9}{4} \leqslant a \leqslant 4$ или $a = 10$.

Ответ: $\left[-\dfrac{9}{4}; 4\right] \cup \{10\}$.

Начало

Содержание

Назад

13 4 6 8 2 5 3 9 11 1 12 13

Задачи

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|-(x-3)\;\;+4| = a$ имеет ровно два корня.

2 При каких значениях x уравнение

$$\frac{|t+2|(t^2-3t+2)}{t-1} + x^2 - 1 = 0$$

имеет ровно два решения относительно t?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x+y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет хотя бы три корня.

5. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\leqslant 0,\\x^2+y^2-2y=a^2-1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

7. При каких значениях m на плоскости найдётся круг, содержащий все точки, удовлетворяющие данной системе неравенств

$$\begin{cases}2y-x\leqslant 2,\\y+2x\leqslant 2,\\y+mx\geqslant -1?\end{cases}$$

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\xy=a^2-3a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$$

меньше, чем -2.

10. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

11. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{4x - a}{x - 2a} < 0$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $2 \leqslant x \leqslant 4$.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leqslant 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \dfrac{|a + 1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Применение аналитических и конструктивных приемов при решении задач с параметрами

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

имеет ровно три решения.

РЕШЕНИЕ

Пусть $2^x = t, t > 0.$ Уравнение примет вид: $t^4 - 6t^3 + 8t^2 - (2 - 2a)t - a^2 + 2a - 1 = 0(*)$.

Каждому значению t соответствует единственное значение x. Следовательно, данное уравнение будет иметь три различных корня, если уравнение $(*)$будет иметь три различных корня. Запишем уравнение в виде: $a^2 - 2(t+1)a + (1 - t^4 + 6t^3 - 8t^2 + 2t) = 0$ – квадратное уравнение относительно параметра a. $\dfrac{D}{4} = (t+1)^2 - 1 + t^4 - 6t^3 + 8t^2 - 2t =$

$$\left[\begin{array}{l} a = t + 1 + t^2 - 3t \\ a = t + 1 - t^2 + 3t \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} a = (t-1)^2 \\ a = -(t-2)^2 \end{array}\right.$$

В системе координат tOa построим графики уравнений совокупности при $t > 0$. Графиком первого уравнения является парабола с вершиной $A(1;\ 0)$, ветви которой направлены вверх. Графиком второго уравнения является парабола с вершиной $B(2; 5)$, ветви которой направлены вниз

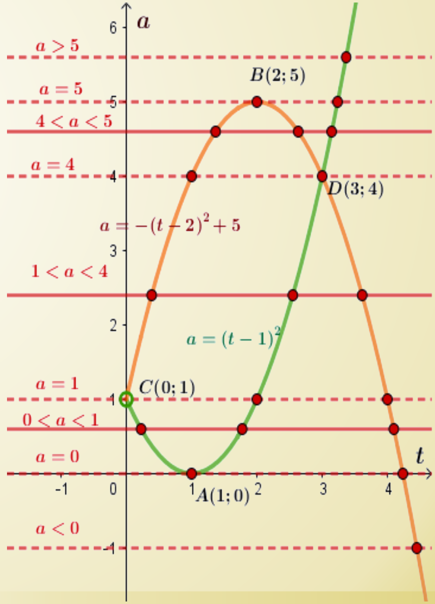
Найдем общие точки парабол: $\begin{cases} t^2 - 2t + 1 = -t^2 + 4t + 1 \\ a = (t-1)^2 \\ t > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2t^2 - 6t = 0 \\ a = (t-1)^2 \\ t > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right. \\ a = (t-1)^2 \\ t > 0 \end{cases}$.

$C(0; 1) \notin$ графикам, т. к. $t > 0$; $D(3; 4)$ – общая точка парабол.

Так как $t > 0$, то при $a \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$ совокупность (**) имеет одно решение; при $a \in \{0; 1; 4; 5\}$ – два решения;

при $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$ – три решения.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно три корня при $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.



Ответ: $(\mathbf{0}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}; \mathbf{4}) \cup (\mathbf{4}; \mathbf{5})$.

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2 - a| = a^2 - 6$$

имеет ровно 3 корня.

Решение(I способ). Рассмотрим равносильный переход:

$$\begin{cases} a^2 - 6 \geq 0, \\ x^2 - a = a^2 - 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 - 6 \geq 0, \\ x^2 - a = 6 - a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq 6, \\ x^2 = a^2 + a - 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 \geq 6, \\ x^2 = -a^2 + a + 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 + a - 6}, \\ x = -\sqrt{a^2 + a - 6} \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 \geq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{-a^2 + a + 6}, \\ x = -\sqrt{-a^2 + a + 6}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

1) Каждое уравнение каждой системы имеет по 2 различных корня, но один из корней первого уравнения совпадает с одним из корней второго уравнения.

2) Уравнение первой системы имеет 1 корень, уравнение второй системы имеет 2 различных корня, и ни один из них не совпадает с корнем первого уравнения.

3) Уравнение первой системы имеет 2 различных корня, ни один из которых не совпадает с единственным корнем уравнения второй системы.

Рассмотрение всех трех случаев и аналитическое решение систем приводит к громоздким преобразованиям и вычислениям, однако, читатель может их выполнить самостоятельно.

Поэтому рассмотрим II способ, основанный на использовании графической модели задачи.

Решение (II способ). Построим в системе координат графики функций $y = |x^2 - a|$ и $y = a^2 - 6$ (рис.3.1).

График функции $y = |x^2 - a|$ при $a < 0$ не пересекает ось Ox, при $a = 0$ касается оси Ox в единственной точке $(0; 0)$, поэтому при $a \leq 0$ уравнение (1) не может иметь 3 корня.

При $a > 0$ график расположен так, как показано на рисунке 3.1.

Графиком функции $y = a\ - 6$ является семейство прямых, параллельных оси Ox, поэтому, чтобы уравнение (1) имело ровно 3 корня, надо чтобы прямая $y = a^2 - 6$ проходила через точку $A(0; a)$, то есть необходимо решить уравнение $a^2 - 6 = a$;

$$a^2 - a - 6 = 0;$$

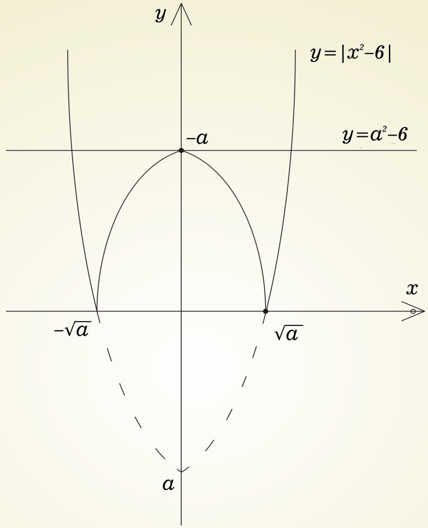


Рис. 3.1.

$$a = -2 \;\text{ или }\; a = 3.$$

Следовательно, $a = 3$ (учитывая, что $a > 0$).

Ответ: при $a = 3$.

Задача 3. При каких a неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполнено для всех $x\in[1;3]$?

Решение 1. Рассмотрим функцию $f(x)=(x-3a)(x+2a+1)$: ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, условие задачи эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(1)<0,\\ f(3)<0. \end{cases}$$

Таким образом, необходимо и достаточно следующих преобразований:

$$\begin{cases} (1-3a)(1+2a+1)<0,\\ (3-3a)(3+2a+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a-1)(a+1)>0,\\ (a-1)(a+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>1,\\ a<-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Решение 2. Найдем нули левой части:

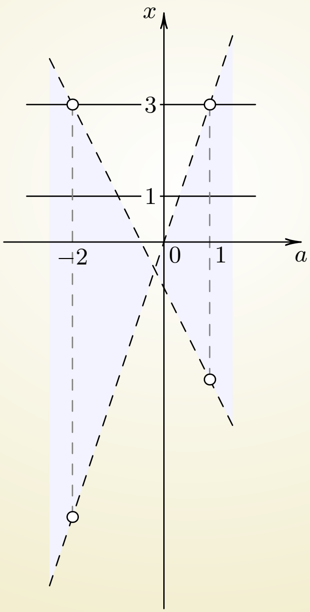
$$\begin{cases} f(1)<0,\\ f(3)<0. \end{cases}$$

Теперь задача сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a>3,\\ -2a-1<1; \end{cases}\\ \begin{cases} 3a<1,\\ -2a-1>3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1,\\ a>-1; \end{cases}\\ \begin{cases} a<\frac{1}{3},\\ a<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>1,\\ a<-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Решение 3. Рассмотрим функцию $f(a,x) = (x-3a)(x+2a+1)$, определенную на всей координатной плоскости. Ее нулями служат прямые, заданные уравнениями $x = 3a$, $x = -2a-1$, которые разбивают плоскость aOx на четыре области. В каждой области имеется ровно одна из точек: $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$, $D = (0,-2)$. Поскольку $f(A) < 0$, $f(C) < 0$, $f(B) > 0$, $f(D) > 0$, то решением неравенства $f(a,x) < 0$ служит объединение двух вертикальных углов, содержащих точки A и C, без граничных прямых $x = 3a$ и $x = -2a-1$.



Начало
Содержание
Назад

Определим пересечения прямых $x = 1$, $x = 3$ с границами множества решений неравенства $f(a, x) < 0$:

$$1)\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = 1, \\ x = -2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x = 3, \\ x = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ a = 1. \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x = 3, \\ x = -2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ a = -2. \end{cases}$$

Следовательно, с учетом монотонности линейной функции неравенство $f(a, x) < 0$ выполнено при всех значениях x из отрезка $[1; 3]$, если и только если $a < -2$ или $a > 1$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Задача 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Пусть $t = 7^{|x|}$. Рассмотрим многочлен

$$f(t) = t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3}.$$

Исходное уравнение имеет ровно два различных решения x_1, x_2 тогда и только тогда, когда для $f(t)$ выполнены условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 < 1 < t_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D = 0, \\ t_1 > 1, \end{cases}$$

где D — дискриминант многочлена, а t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$ — его корни: в случае $D = 0$ единственный корень обозначен за t_1. Условие $t_1 < 1 < t_2$ эквивалентно неравенству $f(1) < 0$ по свойствам квадратичной функции.

$$D = \frac{25a}{(a-3)^2} - 4 \cdot \frac{6a+7}{a-3} = \frac{(a+2)(a+42)}{(a-3)^2},$$

$$f(1) = 1 - \frac{5a}{a-3} + \frac{6a+7}{a-3} = \frac{2(a+2)}{a-3}.$$

Таким образом, задача сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+2)(a+42) > 0, \\ \dfrac{2(a+2)}{a-3} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (a+2)(a+42) = 0, \\ \dfrac{5a}{2(a-3)} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+2)(a+42) > 0, \\ -2 < a < 3; \end{cases} \\ a = -42 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < a < 3, \\ a = -42. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-42\} \cup (-2; 3)$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a - \left(a^2 - 2a - 3\right)\cos x + 4}{\sin^2 x + a^2 + 1} < 1$$

содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Начало

Содержание

Назад

Решение. Перейдем к равносильному неравенству, учитывая, что знаменатель дроби всегда положителен:

$$a-(a^2-2a-3)\cos x+4<\sin^2 x+a^2+1.$$

Применим основное тригонометрическое тождество и приведем подобные слагаемые:

$$\cos^2 x-(a+1)(a-3)\cos x-a^2+a+2<0. \qquad (1)$$

Перепишем неравенство с учетом замены $t=\cos x$:

$$t^2-(a+1)(a-3)t-a^2+a+2<0. \qquad (2)$$

Отрезок $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ содержится во множестве решений неравенства (1) тогда и только тогда, когда отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$ содержится во множестве решений неравенства (2). Рассмотрим функцию

$$f(t)=t^2-(a+1)(a-3)t-a^2+a+2.$$

Ее графиком служит парабола с ветвями, направленными вверх. Поэтому неравенство $f(t)<0$ выполнено на отрезке $[0;1]$, если и только если $f(0)<0$ и $f(1)<0$, т.е.

$$\begin{cases}-a^2+a+2<0,\\ 1-(a+1)(a-3)-a^2+a+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a+1)>0,\\ 2a^2-3a-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-1,\\ a>2;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a<\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{57}\right),\\ a>\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{57}\right).\end{array}\right.\end{cases}$$

Из последней системы получаем $a < \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{57}\right)$ или $a > \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{57}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a-3)^2 = |x-a+3| + |x+a-3|$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $t = a-3$, тогда уравнение примет вид

$$x^4 + t^2 = |x-t| + |x+t|. \qquad (1)$$

Если x_0 является корнем этого уравнения, то $-x_0$ также является его корнем. Значит, единственным решением может служить только $x = 0$. Выясним, при каких значениях параметра t уравнению (1) удовлетворяет $x = 0$:

$$0^4 + t^2 = |0+t| + |0-t| \quad \Leftrightarrow \quad |t|\cdot(|t|-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = \pm 2. \end{array}\right.$$

Теперь определим, сколько решений имеет уравнение (1) при найденных значениях параметра t. В случае $t = 0$ имеем

$$x^4 = 2|x| \quad \Leftrightarrow \quad x^8 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x^6-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm\sqrt[3]{2}. \end{array}\right.$$

Следовательно, $t = 0$ не удовлетворяет условию единственности. Теперь проверим

$$t = 2\colon x^4 + 4 = |x - 2| + |x + 2|.$$

При $-2 < x < 2$ получим

$$x^4 + 4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

При $x \geqslant 2$ оно принимает вид

$$x^4 + 4 = x - 2 + x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 4 = 2x.$$

Но поскольку $x \geqslant 2$, то $x^4 \geqslant 2x$, следовательно, оно не имеет решений. А в силу инвариантности относительно замены $x \mapsto -x$, решений нет и при условии $x \leqslant -2$. Значит, $t = 2$ удовлетворяет условию задачи. Уравнение (1) инвариантно относительно замены $t \mapsto -t$, поэтому $t = -2$ также дает единственное решение. Отсюда получаем искомые значения параметра: $a = 1$ или $a = 5$.

Ответ: $\{1; 5\}$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a - \left(a \;\; - 2a - 3\right)\cos x + 4}{\sin^2 x + a^2 + 1} < 1$$

содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Перейдем к равносильному неравенству, учитывая, что знаменатель дроби всегда положителен:

$$a-(a\ \ -2a-3)\cos x+4<\sin\ \ x+a\ \ +1.$$

Применим основное тригонометрическое тождество и приведем подобные слагаемые:

$$\cos^2 x-(a+1)(a-3)\cos x-a^2+a+2<0. \qquad (1)$$

Перепишем неравенство с учетом замены $t=\cos x$:

$$t^2-(a+1)(a-3)t-a^2+a+2<0. \qquad (2)$$

Отрезок $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ содержится во множестве решений неравенства (1) тогда и только тогда, когда отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$ содержится во множестве решений неравенства (2). Рассмотрим функцию

$$f(t)=t^2-(a+1)(a-3)t-a^2+a+2.$$

Ее графиком служит парабола с ветвями, направленными вверх. Поэтому неравенство $f(t)<0$ выполнено на отрезке $[0;1]$, если и только если $f(0)<0$ и $f(1)<0$, т.е.

$$\begin{cases}-a^2+a+2<0,\\ 1-(a+1)(a-3)-a^2+a+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a+1)>0,\\ 2a^2-3a-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-1,\\ a>2;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a<\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{57}\right),\\ a>\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{57}\right).\end{array}\right.\end{cases}$$

Из последней системы получаем $a<\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{57}\right)$ или $a>\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{57}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$.

Задача 8. При каких значениях m уравнение

$$2m = \left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}$$

имеет единственное решение?

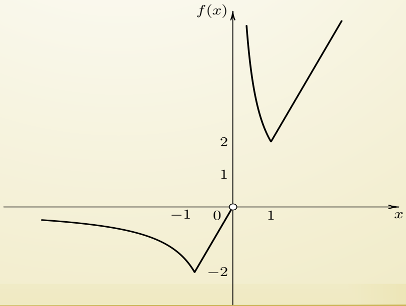
Решение. При $x = 0$ уравнение не имеет смысла. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}$$

с областью определения $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Подмодульное выражение

$$x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

неотрицательно при $-1 \leqslant x < 0$ или $x \geqslant 1$, поэтому для таких аргументов функция принимает вид $f(x) = 2x$. При $x < -1$ или $0 < x < 1$ подмодульное выражение отрицательно, поэтому для этих значений икс имеем $f(x) = \frac{2}{x}$.



Отсюда следует, что $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; -1]$, $(0; 1]$ и возрастает на промежутках $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$, а $x = \pm 1$ — точки ее локального минимума, причем $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. Определим поведение функции на бесконечности, а также в окрестности нуля:

$x \to -\infty$	$f(x) \to 0$
$x \to 0-$	$f(x) \to 0$
$x \to 0+$	$f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$	$f(x) \to +\infty$

Таким образом, с учетом непрерывности функции $y = f(x)$ на открытых лучах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, исходное уравнение имеет единственное решение, если и только если $2m = \pm 2$, откуда $m = \pm 1$.

Ответ: ± 1.

Комментарий. $x \to 0+$ означает стремление аргумента x к нулю справа, а $x \to 0-$ — слева.

Задача 9. Найдите все a, при которых уравнение $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

Решение. Рассмотрим уравнение $\sin x = b$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. При $b > 1$ или $b < -1$ оно не имеет решений; при $b = \pm 1$ оно имеет единственное решение; при $-1 < b < 0$ или $0 < b < 1$ — ровно два решения; при $b = 0$ ровно три решения $(0,\ \pi,\ 2\pi)$. Значит, исходное квадратное уравнение имеет ровно три решения, если и только если оно сводится к уравнению $\sin x = 0$ или к совокупности вида

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = b_1, \\ &\sin x = b_2, \end{aligned}\right.$$

где, не теряя общности, $b_1 = \pm 1$, а $b_2 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Случай 1. Найдем значения параметра a, при котором $\sin x = 0$ служит решением исходного уравнения:

$$0^2 + (a-2)^2 \cdot 0 + a(a-2)(a-3) = 0.$$

Это уравнение имеет три решения: $a = 0$, $a = 2$, $a = 3$. Проверим, нет ли других корней на отрезке $[0; 2\pi]$, кроме 0, π, 2π, у исходного уравнения при найденных значениях параметра.

1) Если $a = 2$, то уравнение принимает вид $\sin^2 x = 0$, что удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a = 3$, то уравнение принимает вид $\sin^2 x + \sin x = 0$ и имеет, кроме трех нужных корней, еще один корень $\frac{3\pi}{2}$. Значит, $a = 3$ не удовлетворяет условию задачи.

3) Наконец, если $a = 0$, уравнение принимает вид

$$\sin^2 x + 4\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0,$$

что удовлетворяет условию задачи.

Случай 2. Если $b_1 = 1$, то по теореме Виета $b_1 + b_2 = -(a-2)^2 \quad \Rightarrow \quad b_2 \leqslant -1$, что не удовлетворяет условию задачи. Теперь найдем значения a, при которых $b_1 = -1$, подставив $\sin x = -1$ в исходное уравнение:

$$1-(a-2)^2+a(a-2)(a-3)=0,$$

$$(a-3)(1-a)+(a-3)(a^2-2a)=0,$$

$$(a-3)(a^2-3a+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{5}\right). \end{array}\right.$$

Значение $a=3$ мы уже проверяли ранее (не подходит). Для оценки двух других вновь воспользуемся теоремой Виета:

$$-1+b_2=-(a-2)^2 \quad\Leftrightarrow\quad b_2=-(a-2)^2+1.$$

При $a=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ имеем $b_2<-1$; при $a=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ получим $0<b_2<1$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют только значения $a=0$, $a=2$, $a=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $\left\{0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Задача 10. Найдите все значения параметра a, что каждый корень уравнения

$$2x^4-\frac{4}{3}a^3=7a^2+6a-162\sin|x|$$

является корнем только при одном значении параметра a, что

Начало

Содержание

Назад

Решение.

Запишем уравнение в виде: $\mathbf{2x^4 + 162\sin|x| = \frac{4}{3}a^3 + 7a^2 + 6}$

Пусть $f(x) = 2x^4 + 162\sin|x|$, $g(a) = \frac{4}{3}a^3 + 7a^2 + 6a$.

1)Функция $f(x)$ – непрерывная, четная, $D(f) = R$. Если $|x| \le 3$, то $0 \le |sinx| \le 1$ и $f(x) \ge 0$;

если $|x| > 3$, то $2x^4 > 162, -1 \le \sin|x| \le 1$, $162\sin|x| \ge -162$ и $f(x) = 2x^4 + 163\sin|x| > 0$

Следовательно, $E(f) = [0; +\infty)$.

2)Функция $g(a)$ – непрерывная, $D(g) = R$, $g'(a) = 4a^2 + 14a$

На $(-\infty; -3]$и на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $g'(a) \ge 0$ и $g(a)$возрастает, а на $[$

$g(a)$ убывает. $a_{max} = -3$, $a_{min} = -\frac{1}{2}$, $g_{max} = g(-3) = 9$, g_{min}

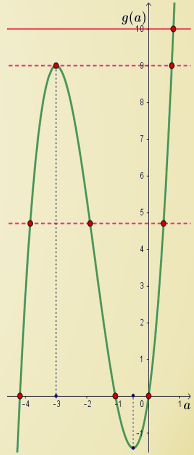
Уравнение $(*)$ будет иметь решения только при a, удовлетво

Значения $[0; 9]$ функция $g(a)$принимает более одного раза, а

только один раз. Следовательно, условие задачи будет выпол

Тогда $a + 3)(4a^2 + 9a - 9) > 0; (a+3)^2\left(a - \frac{3}{4}\right) > 0$, откуда a

Ответ: $\left(\mathbf{\frac{3}{4}}; +\infty\right)$.



Начало

Содержание

Назад

Задача 1. Найдите все значения a, при каждом из которых система

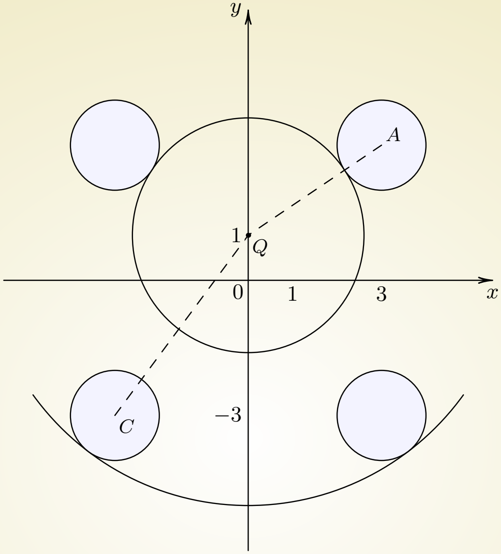
$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17 \leqslant 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Перейдем к равносильной системе

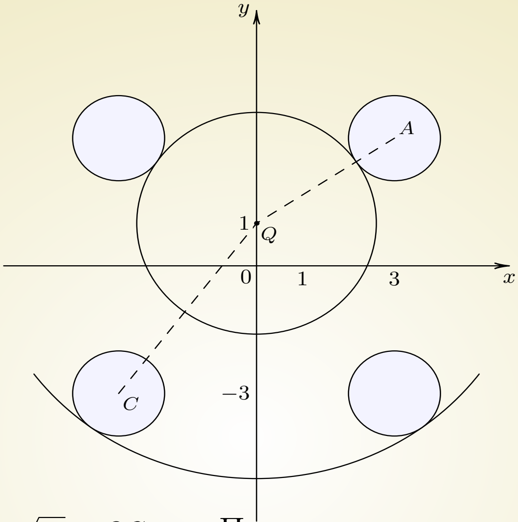
$$\begin{cases} (|x|-3)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1, \\ x^2+(y-1)^2=a^2. \end{cases}$$

Неравенство системы при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ в прямоугольной системе координат xOy задает круг единичного радиуса с центром в точке $(3;3)$. Поскольку неравенство инвариантно относительно замены $x \mapsto -x$ или $y \mapsto -y$, то множеством его решений служит объединение четырех единичных кругов с центрами в точках $A=(3,3)$, $B=(-3,3)$, $C=(-3,-3)$, $D=(3,-3)$. Уравнение системы при $a=0$ в плоскости xOy задает точку $(0,1)$, которая не удовлетворяет неравенству системы. При $a \neq 0$ вторая строка системы задает окружность Ω с центром в точке $Q=(0,1)$ радиуса $|a|$.



По формуле длины отрезка $QA = \sqrt{13}$, а $QC = 5$. Поскольку линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, то при $|a| = 5 + 1 = 6$ окружность Ω касается единичных кругов с центрами в точках C и D внутренним образом, а при $|a| = \sqrt{13} - 1$ касается единичных кругов с центрами в точках A и B внешним образом. Причем, если $|a| > 6$ или $|a| < \sqrt{13} - 1$, то Ω не имеет общих точек ни с одним из упомянутых единичных кругов; а если $\sqrt{13} - 1 < |a| < 6$, существует бесконечное количество точек пересечения. Таким образом, исходная система имеет хотя бы одно решение, если и только если $\sqrt{13} - 1 \leqslant |a| \leqslant 6$.

Ответ: $\left[-6; -\sqrt{13} + 1\right] \cup \left[\sqrt{13} - 1; 6\right]$.



По формуле длины отрезка $QA = \sqrt{13}$, а $QC = 5$. Поскольку линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, то при $|a| = 5 + 1 = 6$ окружность Ω касается единичных кругов с центрами в точках C и D внутренним образом, а при $|a| = \sqrt{13} - 1$ касается единичных кругов с центрами в точках A и B внешним образом. Причем, если $|a| > 6$ или $|a| < \sqrt{13} - 1$, то Ω не имеет общих точек ни с одним из упомянутых единичных кругов; а если $\sqrt{13} - 1 < |a| < 6$, существует бесконечное количество точек пересечения. Таким образом, исходная система имеет хотя бы одно решение, если и только если $\sqrt{13} - 1 \leqslant |a| \leqslant 6$

Ответ: $\left[-6; -\sqrt{13} + 1\right] \cup \left[\sqrt{13} - 1; 6\right]$.

Начало

Содержание

Назад

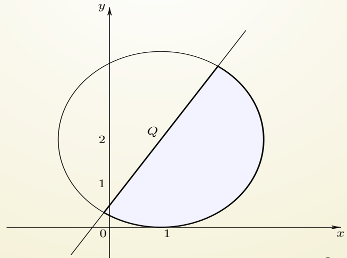
Задача 2. Найдите площадь множества точек $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y \leqslant -1, \\ 3x-2y+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Выделим полные квадраты в левой части первого неравенства:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant 4, \\ 3x-2y+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Первая строка системы в прямоугольной системе координат xOy задает круг Ω с центром в точке $Q=(1,2)$ радиуса $R=2$. Второе неравенство системы задает полуплоскость, содержащую начало отсчета, с граничной прямой $3x-2y+1=0$.



Поскольку координаты точки Q удовлетворяют уравнению $3x-2y+1=0$, то соответствующая прямая проходит через центр круга Ω. Значит, площадь S пересечения множеств, заданных исходной системой, равна половине площади круга Ω: $S=\frac{1}{2}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi.$

Задача 3. При каких значениях a на плоскости существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant 2, \\ y + ax \geqslant -1? \end{cases}$$

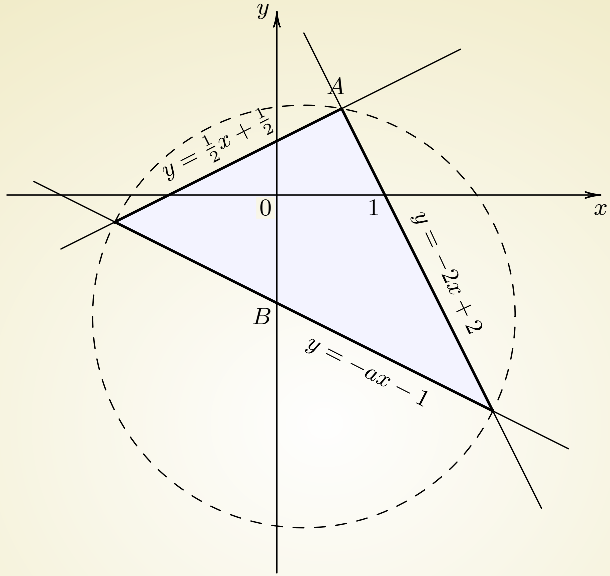
Решение. Перейдем к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} y \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \\ y \leqslant -2x + 2, \\ y \geqslant -ax - 1. \end{cases}$$

Первые два неравенства системы задают прямой угол (включающий внутренние точки) с вершиной в точке $A = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Этот угол содержит начало отсчета, а его стороны лежат на прямых с угловыми коэффициентами $\frac{1}{2}$ и -2. Третье неравенство — полуплоскость, граничная прямая которой проходит через точку $B = (0, -1)$ и имеет угловой коэффициент $-a$.

Условие исходной задачи эквивалентно тому, что пересечением упомянутого угла и полуплоскости является треугольник: в ином случае найдется точка, удовлетворяющая системе и удаленная от точки A на сколь угодно большое расстояние. Следовательно, угловой коэффициент $-a$ удовлетворяет условию

$$-2 < -a < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < a < 2.$$



Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Начало

Содержание

Назад

Задача 4. Найдите все a, при которых неравенство

$$\frac{4x-a}{x-2a}<0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию

$$2\leqslant x\leqslant 4.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $(4x-a)(x-2a)<0$. Рассмотрим функцию $f(a,x)=(4x-a)(x-2a)$, определенную на всей координатной плоскости. Ее нулями служат прямые, заданные уравнениями $x=\frac{1}{4}a$, $x=2a$, которые разбивают плоскость aOx на четыре области. В каждой области имеется ровно одна из точек: $A=(1,1)$, $B=(-1,1)$, $C=(-1,-1)$, $D=(1,-1)$. Поскольку $f(A)<0$, $f(C)<0$, $f(B)>0$, $f(D)>0$, то решением неравенства $f(a,x)<0$ служит объединение двух вертикальных углов, содержащих точки A и C, без граничных прямых $x=\frac{1}{4}a$ и $x=2a$.

Определим пересечения прямых $x=2$, $x=4$ с границами множества решений неравенства $f(a,x)<0$:

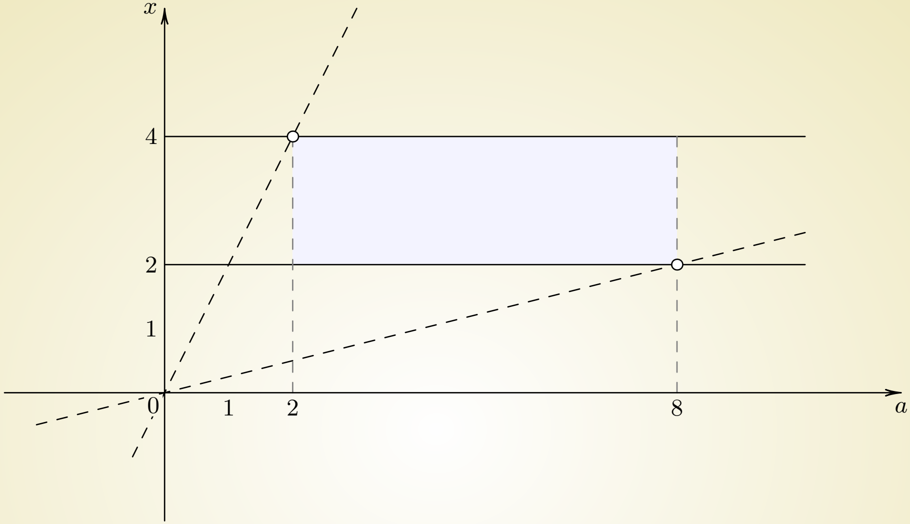
$$1)\ \begin{cases}x=2,\\ x=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ a=1.\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}x=2,\\ x=\frac{1}{4}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ a=8.\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}x=4,\\ x=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ a=2.\end{cases}\qquad 4)\ \begin{cases}x=4,\\ x=\frac{1}{4}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ a=16.\end{cases}$$

Начало

Содержание

Назад



Следовательно, с учетом монотонности линейной функции неравенство $f(a,x) < 0$ выполнено при всех значениях x из отрезка $[2;4]$, если и только если $2 < a < 8$.

Ответ: $(2;8)$.

Начало

Содержание

Назад

Задачи

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17 \leqslant 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите площадь множества точек $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y \leqslant -1, \\ 3x-2y+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

3. При каких значениях a на плоскости существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y-x \leqslant 1, \\ y+2x \leqslant 2, \\ y+ax \geqslant -1? \end{cases}$$

4. Найдите все a, при которых неравенство

$$\frac{4x-a}{x-2a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию

$$2 \leqslant x \leqslant 4.$$

ПРАКТИКУМ

Задания

Линейные уравнения и неравенства

1. При всех значениях a решите уравнение $ax = 0$.

2. При всех значениях a решите уравнение $\left(a^2 - 16\right) x = a - 4$.

3. При каких k и m уравнение $\left(k^2 + 2k - 3\right) x = m + 4$ не имеет решений?

4. При каких p система

$$\begin{cases} 2x + \left(9p^2 - 2\right) y = 3p, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

5. При каких a система

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

6. При всех a решите неравенство $ax \leqslant 0$.

7. При всех значениях x решите неравенство $xa + 4a \leqslant 3$ относительно a.

8. Решите неравенство $\left(a^2 + 4a + 3\right) x < a + 1$ для каждого параметра a.

9. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x - a \geqslant 1, \\ x + a < 3 \end{cases}$$

имеет решения?

10. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

Различные простейшие уравнения и неравенства

11. Для каждого значения a решите уравнение $\dfrac{x+1}{x^2 - a^2} = 0.$

12. При всех a решите уравнение $\dfrac{a(x-a)}{x-2} = 0.$

13. Для каждого значения a решите неравенство $x^3 > a$.

14. При всяком a решите неравенство $|7 - x| \leqslant a$.

15. При всяком a решите неравенство $\sqrt{x+2} \geqslant a + 1$.

16. Решите неравенство $(2)^x \geqslant a$ для всех значений параметра a.

17. Для каждого значения a решите неравенство $\log_a x < 1$.

18. При каждом a решите неравенство $\cos x > a$.

Квадратные уравнения и неравенства

19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - x + a = 0$ не имеет корней.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня.

21. Найдите значения параметра m, при которых выражение $2mx^2 + (2m-4)x + \frac{m}{2} + 3$ является полным квадратом.

22. При каких a уравнение $(2a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет не более одного корня?

23. При всех значениях a решите уравнение $x^2 - 2ax - 1 = 0$.

24. Для всякого параметра a решите уравнение $(a-1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$ относительно x.

25. При каких p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4?

26. При каких a один положительный корень уравнения $9x^2 - 18(a-1)x - 8a + 24 = 0$ вдвое больше другого?

27. При каких a сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов корней?

28. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ максимальна?

29. При каких a разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ равна 1?

30. При каком целом значении параметра b корни уравнения $5x^2 + bx - 28 = 0$ удовлетворяют уравнению $5x_1 + 2x_2 = 1$?

Уточнение. В заданиях 28, 31, 45 используются слова «корней», «корни», но при этом допускается, что соответствующие уравнения могут иметь единственное решение (x_0), т.е. два совпадающих корня. В таком случае суммой корней, например, мы называем выражение $x_0 + x_0$.

31. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет только положительные корни.

32. При каких a уравнение $x^2 + (4-2a)x + a = 0$ имеет неотрицательный корень?

33. При каком целом b уравнения $2x^2 + (3b-1)x - 3 = 0$ и $6x^2 - (2b-3)x - 1 = 0$ имеют общий корень?

34. При каких значениях a функция $y = \dfrac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум в точке $x = 4$?

35. При всех a решите неравенство $x^2 \leqslant -a$.

36. При всех a решите неравенство $x^2 - 2ax + 1 \leqslant 0$.

37. При каждом значении a решите неравенство $ax^2 + 4x + 1 > 0$.

38*. При каких значениях a решения неравенства $x^2 - \left(a^2 + 3a + 1\right)x + a^2 + 3a^3 \leqslant 0$ образуют отрезок, длина которого больше 3?

39. При каких a один корень уравнения $2x^2 + ax + 4 - a = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

40. При каких a число -1 лежит между корнями уравнения $(a-2)x^2 + 3ax + 5 = 0$?

41. При каких a корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a?

42. При каких a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3?

43. При каких a оба корня уравнения $(2+a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ положительны?

44. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат интервалу $(0;3)$?

45. При каких a корни уравнения $ax^2 - (a+1)x + 2 = 0$ по модулю меньше 1?

46. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ расположены на отрезке $[2;5]$?

47. При каких a неравенство $x^2 + a^2x - 2a - 4 < 0$ выполнено для всех $x \in [0;1]$?

48. При каких a неравенство $(x-3a)(x+2a+1) < 0$ выполнено для всех $x \in [1;3]$?

49. При каких a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполнено при всех $x > 0$?

Графический метод

50. При каких значениях m уравнение $\left|(x-2)^2-4\right| = m$ имеет ровно два корня?

51. При каких значениях a уравнение $x + \dfrac{|x|}{x} = a$ не имеет решений?

52. При каких значениях a уравнение $|x+2|(x-3) = a^2 - 1$ имеет ровно три решения?

53. При каких значениях m уравнение

$$2m = \left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}$$

имеет единственное решение?

54. Определите количество решений уравнения $x^2 + 2x - 3 = a^2 - 4a$ для каждого значения a.

55. Определите количество решений уравнения $\sqrt{x-2} = ax$ для каждого значения a.

56. При каких k уравнение

$$\frac{2x+1}{2x^2+x} - kx = 0$$

имеет единственный корень?

57. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

58. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y-1| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Более сложное исследование квадратичных функций

59. При каких значениях параметра a неравенство $9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 + a - 5 < 0$ не имеет решений?

60. При каждом a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$.

61*. Найдите все a, при которых уравнение $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

Метод областей на плоскости

62. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

63. Найдите площадь множества точек $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqslant -1, \\ 3x - 2y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

64. При каких значениях a на плоскости существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant 2, \\ y + ax \geqslant -1? \end{cases}$$

65. Найдите все a, при которых неравенство

$$\frac{4x-a}{x-2a}<0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию

$$2 \leqslant x \leqslant 4.$$

Задачи ЕГЭ

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a}=0$$

имеет ровно два различных решения.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y, \\ x^2+y^2=2(1+a)x+2(1-a)y-2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7\left(36 - y^2\right) = \log_7\left(36 - a^2x^2\right), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2 - xy + 3x - y - 6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 2\right| = ax - 1$$

имеет более двух корней на промежутке $(0; +\infty)$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a+7x+4)(a-2x+4)\leqslant 0,\\ a+3x\geqslant x^2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2xy+a}=x+y+5$$

не имеет решений.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\sqrt{x^2-ax+4a}$$

имеет ровно два различных корня.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}y^2+a=x,\\ |x|+|y|+|x-y|=2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \\ (y - x)^2 + 6(y - x) + 25 = a - 2y - 2xy \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{3 - x} + |x - a| \leqslant 2$$

является отрезок.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$$

имеет хотя бы один корень из полуинтервала $(-1; 1]$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9a^2} = x^2 + 2x - 3a$$

имеет ровно три корня.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(6a - x)\ln(2x + 2a - 2) = \ln(6a - x)\ln(x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Более сложные задачи

20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$$

имеет ровно два различных корня.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a - \left(a^2 - 2a - 3\right)\cos x + 4}{\sin^2 x + a^2 + 1} < 1$$

содержит отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = \left|x^2 - x - 2\right|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a-3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$$

имеет единственное решение.

24*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_{0,5}\left(x^2\right) - a\right| - \left|\log_{0,5} x + 2a\right| = \left(\log_{0,5} x\right)^2$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

25*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2\cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$$

имеет хотя бы один корень.

Указания и важные дополнения

Линейные уравнения и неравенства

1. Правило «Делить на ноль нельзя» — основная мотивация, чтобы рассмотреть отдельно случаи $a = 0$ и $a \neq 0$.

2. И вновь, чтобы выразить x, требуется разделить обе части уравнения на коэффициент $(a^2 - 16)$. Рассмотрите отдельно случаи, при которых это выражение равно нулю.

3. Перед нами уравнение, в котором степень x не выше первой. При каком условии оно не имеет решений? Например, при $k = 1$ и $m = 1$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 5$, и множество его решений пусто. Но это лишь частный случай.

4. Из второго уравнения несложно выразить x или y. После подстановки в первой строке системы получим привычное уравнение вида $a \cdot x = b$. Можно рассудить и по-другому. График функции $x = -y + 1$ — прямая. Удобно воспринимать именно x как функцию, зависящую от аргумента y. Аналогично можно записать и первую строчку системы:

$$x = -\frac{(9p^2 - 2)}{2} y + \frac{3p}{2}.$$

Остается вспомнить критерий того, что две прямые на плоскости параллельны.

5. Аналогично номеру выше можно провести алгебраические рассуждения, а можно подумать о том, когда две прямые на плоскости совпадают.

6. В прошлых уравнениях мы отдельно рассматривали случай деления на ноль. Это важно учесть и сейчас. Но кроме того, не забудьте, что при делении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется; а при делении на отрицательное число — меняется на противоположный.

7. Постарайтесь преодолеть привычное восприятие переменных: по условию задачи x — параметр, в то время, как a — переменная, относительно которой требуется решить неравенство. Например, при $x = 0$ получаем $a \leqslant \frac{3}{4}$. Чтобы рассмотреть все действительные значения параметра x и для каждого указать множество решений неравенства относительно a, удобно представить неравенство в виде

$$(x + 4) \cdot a \leqslant 3.$$

8. Выясните, при каких значениях a квадратный трехчлен $a^2 + 4a + 3$ положителен, при каких отрицателен, а при каких равен нулю.

9. Удобно изобразить множество решений каждого из неравенств на числовой прямой. Предварительно перепишите систему в виде

$$\begin{cases} x \geqslant a + 1, \\ x < 3 - a. \end{cases}$$

10. Рассмотрим похожий пример. «Если x является положительным числом, то он превосходит -1» — верное следствие, которое формально можно записать так:

$$(x > 0) \quad \Rightarrow \quad (x > -1).$$

Добавим к этому образное высказывание: «Уж если x — положителен, то он подавно больше любого отрицательного числа, в частности, x больше минус единицы». Резюмируя, если множество решений неравенства $(x > a)$ содержится в множестве решений неравенства $(x > b)$, то верно следствие

$$(x > a) \quad \Rightarrow \quad (x > b).$$

Различные простейшие уравнения и неравенства

11. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Значит, дело за системой

$$\begin{cases} x = -1, \\ x \neq \pm a. \end{cases}$$

Заметьте, что если при некотором значении a и числитель, и знаменатель одновременно равны нулю, то соответствующее значение параметра a нас не устраивает. Ведь ни одно число делить на ноль нельзя. Даже $0 : 0$ — недопустимая операция.

12. Вновь логическая задача. Желательно анализировать ее в таком виде:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a = 0, \\ &x = a; \end{aligned}\right. \\ x \neq 2. \end{cases}$$

13. Кубический корень можно извлекать даже из отрицательных чисел, а с учетом монотонности верен следующий переход:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)}.$$

14. Вместо тысячи слов:

$$|f(x)| \leqslant g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

15. Напомню, что все важные равносильные переходы указаны в справочных материалах.

$$\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

16. Если $a \leqslant 0$, то неравенство верно для всех действительных иксов, ведь показательная функция принимает только положительные значения. А что если $a > 0$?

17. Проще миновать «метод рационализации». Если $a > 1$, то логарифмическая функция возрастает, а в случае $0 < a < 1$ — убывает.

18. Если для вас такая задача в новинку, рекомендую аккуратно рассмотреть 5 случаев:

1) $a < -1$,
2) $a = -1$,
3) $-1 < a < 1$,
4) $a = 1$,
5) $a > 1$.

Исследовав их, будет ясно, почему достаточно трех.

Как решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$? Отметим на тригонометрической окружности две выколотые точки, в которых косинус равен $\frac{1}{2}$: $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Они разбивают окружность на две дуги. Для всех точек правой из них косинус больше $\frac{1}{2}$, а для всех точек левой косинус меньше $\frac{1}{2}$. Если вспомнить о периодичности, то получаем

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

19. Все уравнения и неравенства здесь и на экзамене подразумевают решения в действительных числах, если не оговорено иного. Для нынешнего квадратного уравнения отсутствие решений равносильно условию $D < 0$, где D — дискриминант квадратного уравнения.

20. Уравнение $ax^2+4x+2=0$ при $a=0$ не является квадратным — стоит подметить до применения дискриминанта. В случае $a \neq 0$ необходимо и достаточно потребовать условия $D > 0$.

21. Перед нами квадратный многочлен? Нет, при $m = 0$ он линейный. При $m \neq 0$ многочлен является полным квадратом, если и только если его «корни совпадают», т.е. имеется единственный корень кратности два. Как это условие отразить с помощью дискриминанта?

22. «Уравнение имеет не более одного корня» означает, что уравнение имеет либо ровно один корень, либо не имеет решений вовсе. Начните с $a = \frac{1}{2}$.

23. Найдите D — дискриминант квадратного уравнения. Что можно сказать о его знаке?

24. Советы прежние: частный случай, далее исследование дискриминанта.

25. Удобно использовать теорему Виета. В частности, из нее следует, что $x_1x_2 = -16$, если x_1 и x_2 — корни исходного уравнения.

26. Интересующие значения можно найти из системы

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{9}(24 - 8a), \\ x_1 + x_2 = 2a - 2, \\ x_1 = 2 \cdot x_2. \end{cases}$$

Требуется выбрать только такие значения параметра a, для которых $x_1 > 0$. С учетом того, что $x_1 = 2x_2$, оба корня будут положительными.

27. Отмечу, что следствие

$$x_1 + x_2 = 2a \ \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4a^2$$

является верным.

28. Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 3. \end{cases}$$

29. При желании можно управиться дискриминантом, однако и теорема Виета может выручить. Попробуйте сначала найти $(x_1 - x_2)^2$. Из условия задачи следует, что это выражение равно единице.

30. Из теоремы Виета получаем систему

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\frac{28}{5}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{5} \cdot b, \\ 5x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

31. Не забыли рассмотреть $a = 2$? В условии задачи слово «корни» означает множество решений уравнения, и это множество может состоять ровно из одного элемента (единственного корня). Подумайте, почему условий

$$\begin{cases} \dfrac{2a - 3}{a - 2} > 0, \\ \dfrac{2a}{a - 2} > 0 \end{cases}$$

недостаточно для того, чтобы исходное уравнение имело только положительные корни. Контрпример: $x^2 - x + 10 = 0$. Произведение корней равно 10, а сумма — 1? Попробуйте найти сами корни — они положительны? Вывод простой: в системе выше не хватает условия $D \geqslant 0$.

32. Для интереса вы можете попробовать найти корни явно:

$$x = a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 5a + 4}.$$

Какой из них больше? Условие задачи будет выполнено, если и только если больший корень окажется неотрицательным. Другой полезный прием мы рассмотрим в номерах с 39 по 49.

33. Запишем систему уравнений по условию задачи и преобразуем ее:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3bx - x - 3 = 0, \\ 6x^2 - 2bx + 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 6bx - 2x - 6 = 0, \\ 18x^2 - 6bx + 9x - 3 = 0. \end{cases}$$

Первую строку домножили на 2, а вторую на 3. Видите, как теперь можно получить квадратное уравнение относительно x, не содержащее параметра b?

34. Показательная функция с основанием 2 возрастает. Поэтому максимум функции

$$y = 2^{ax+7-x^2}$$

достигается в той же точке, что и максимум функции $y = ax + 7 - x^2$.

35. Если $a > 0$, то правая часть (выражение $-a$) отрицательна. Может ли x^2 равняться отрицательному числу или быть меньше его? В случае $a \leqslant 0$ обе части неравенства неотрицательны — попробуйте воспользоваться методом интервалов или же перейдите к неравенству $|x| \leqslant \sqrt{-a}$, для которого мы уже встречали равносильный переход.

36. Найдите нули левой части неравенства, определите промежутки знакопостоянства — получите ответ! Напомню, что если ветви параболы направлены вверх, а дискриминант соответствующего квадратного трехчлена отрицателен, то функция принимает только положительные значения.

37. При $a = 0$ получаем линейное неравенство. При $a > 0$ ветви параболы, — графика функции $y = ax^2 + 4x + 1$, — направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

38. Пусть x_1, x_2 — нули левой части неравенства. Тогда по условию задачи требуется найти все значения параметра a, при которых верно неравенство $|x_1 - x_2| > 3$.

39. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^2+ax+4-a$. Исходная задача равносильна неравенству $f(3) < 0$. Действительно, поскольку ветви параболы, — графика функции $y = f(x)$, — направлены вверх, то условие $f(3) < 0$ гарантирует наличие двух различных корней. Они не могут оба оказаться по одну сторону от числа 3: парабола симметрична относительно своей оси. С другой стороны, если корни уравнения расположены по разные стороны от числа 3, то (с учетом направления ветвей) значение $f(3)$ отрицательно. Тем самым равносильность перехода доказана.

40. Задача аналогична предыдущей, но направление ветвей параболы зависит от знака выражения $(a - 2)$. Не забудьте про $a = 2$.

41. Пусть $f(x) = x^2 + x + a$ — квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями, направленными вверх. Отметьте на оси абсцисс некоторое число — параметр a. По условию требуется, чтобы нули $f(x)$ (пересечения параболы и оси абсцисс) лежали правее числа a. Какие условия для этого необходимы и достаточны? Во-первых,

$$f(a) > 0,$$

ведь в противном случае корни лежали бы по разные стороны от числа a. Во-вторых,

$$x_0 > a,$$

где x_0 — абсцисса вершины параболы, поскольку иначе оба корня могли бы оказаться меньше числа a. Но всегда ли при указанных условиях у квадратного трехчлена будут (действительные) корни?

42. Аналогично предыдущему номеру. Не забудьте об условии $D > 0$, при котором появится «оба корня».

43. Если $a = -2$, то нет «обоих корней». При $a > -2$ ветви интересующей параболы направлены вверх, а необходимые и достаточные условия положительности обоих корней отражает система

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_0 > 0, \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

Если же $a < -2$, то ветви параболы направлены вниз, и тогда следует решать систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_0 > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Здесь и далее x_0 — абсцисса вершины параболы, которая является графиком функции $y = f(x)$ — левой части уравнения. Попробуем два указанных случая привести к одному, как в справочных материалах? Условия $D > 0$ и $x_0 > 0$ есть в обеих системах, и дублировать их ни к чему. При $(a + 2) > 0$ ключевым условием оказывается $f(0) > 0$, а при $(a + 2) < 0$ мы решаем неравенство $f(0) < 0$, а затем полученные множества решений объединяем. Как можно компактнее записать такую совокупность из двух систем? Очень просто:

$$(a + 2) \cdot f(0) > 0.$$

Действительно, произведение двух множителей больше нуля тогда и только тогда, когда оба множителя положительны или оба множителя отрицательны. В конечном счете исходная задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} (a + 2) \cdot f(0) > 0, \\ D > 0, \\ x_0 > 0. \end{cases}$$

44. Если $y = f(x)$ — функция левой части уравнения, что можно сказать о $f(0)$ и $f(3)$? Нужно ли проверять условие $D > 0$ или беспокоиться об абсциссе вершины параболы?

45. Под словом «корни» может скрываться единственный корень, и это нормально. Корни по модулю будут меньше единицы в том и только в том случае, если они принадлежат интервалу $(-1, 1)$. И, стало быть, задача аналогична предыдущей, нужно лишь учесть направление ветвей параболы.

46. Заметьте, что в неравенствах $f(2) \geqslant 0$, $f(5) \geqslant 0$, $D \geqslant 0$ нужны нестрогие знаки.

47. Пусть x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — нули левой части неравенства. С учетом положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена решением неравенства будет служить интервал $(x_1; x_2)$. Значит, наша цель — определить, при каких a отрезок $[0; 1]$ лежит в интервале $(x_1; x_2)$. Что можно сказать о значении левой части при $x = 0$, $x = 1$? Необходимо ли условие $D > 0$?

48. Задача аналогична предыдущей, но предварительно следует раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. Конечно, вы можете и сразу воспользоваться методом интервалов, поскольку здесь удобные нули левой части. Но стоит учитывать, что заранее неизвестно, какое из чисел $3a$ или $(-2a - 1)$ больше, а какое меньше.

49. Пусть левая часть неравенства обращается в ноль в точках x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$. Если $a < 0$, то ветви интересующей направлены вниз, а решением служит интервал $(x_1; x_2)$. Может ли такой интервал содержать в себе открытый луч $(0; +\infty)$? В случае $a > 0$ решением служит множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. А что если левая часть не обращается в ноль ни в каких точках? Что насчет $a = 0$?

Графический метод

50. Во всех задачах этого раздела призываю пользоваться именно графическим методом: важно овладеть им в совершенстве! Попробуйте последовательно изображать графики следующих функций:

1) $y_1 = x^2$ — парабола, проходящая через точки $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$,
2) $y_2 = (x-2)^2$ — смещение графика на две единицы вправо,
3) $y_3 = (x-2)^2 - 4$ — смещение графика на четыре единицы вниз,
4) $y_4 = |(x-2)^2 - 4|$ — точки с отрицательными ординатами отражаются симметрично относительно оси абсцисс, остальные — неподвижны.

Графиком функции $y = m$ в плоскости xOy является горизонтальная прямая, все точки которой имеют ординату m. Остается понять, при каких значениях m будет ровно два пересечение с графиком функции y_4. Как решите задачу, загляните на этот сайт. В левой панели можно включить и отключить отображение линий, а также вы можете «пошевелить» ползунок слайдера, отвечающего за параметр. Заметьте, что с тем же успехом мы могли изобразить множество решений уравнения в плоскости xOm, после чего ответ следует сам собой.

51. Если $x > 0$, то модуль раскроется со знаком плюс, и левая часть предстанет в виде $x + 1$. Если $x < 0$, модуль раскроется со знаком минус, и мы получим $x - 1$. При $x = 0$ левая часть не определена (делить на ноль нельзя). Теперь несложно изобразить график функции

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x}$$

и подумать о том, при каких a прямая, — график функции $g(x) = a$, — не будет иметь пересечений с графиком $f(x)$. Подвигать ползунок параметра можно здесь. Удобная альтернатива — сразу строить график уравнения в плоскости xOa.

52. И вновь предлагаю раскрыть модуль по определению. В полуплоскости, заданной неравенством $x \geqslant -2$, следует изобразить график функции

$$f(x) = (x+2)(x-3).$$

А в полуплоскости, заданной неравенством $x < -2$, функция левой части уравнения будет записана в виде

$$f(x) = -(x+2)(x-3).$$

Изобразите график $f(x)$ и подумайте о его пересечении с прямой, заданной функцией $g(x) = a^2 - 1$. В плоскости xOy графиком $g(x)$ будет горизонтальная прямая, ведь при любом значении a правая часть фиксирована и не зависит от аргумента x. Например, при $a = 2$ получим $g(x) = 3$ — сколько пересечений эта прямая имеет с графиком $f(x)$? Ссылка на график для самопроверки. Мимолетное уточнение. На мой взгляд, культурнее говорить о функции $y = f(x)$ или функции $f\colon x \mapsto y$, но для удобства здесь, ранее и далее пишу $f(x)$.

53. Пусть $f(x)$ — функция правой части уравнения. Раскройте модуль по определению. Для этого выясним знаки выражения

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

1) Если $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$, то модуль раскроется со знаком плюс и $f(x) = 2x$.
2) Если $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, то модуль раскроется со знаком минус и $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

Графиком же функции $g(x) = 2m$ в плоскости xOy служит горизонтальная прямая. Постройте эти графики вручную, а затем можно свериться.

54. С графиком функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ все просто. А что насчет графика функции $g(x) = a^2 - 4a$? Это вновь горизонтальная прямая, ведь правая часть не зависит от икс (аргумент x отсутствует). Что дальше? Предположим, мы знаем, что если правая часть принимает значения от 0 до 1 включительно, то прямая будет пересекать параболу в двух различных точках. Тогда следует найти соответствующие значения параметра a из двойного неравенства $0 \leqslant a^2 - 4a \leqslant 1$. Если одолели задачу, подвигайте ползунок параметра здесь.

55. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x-2}$. Подумайте о том, как устроено семейство графиков функции $g(x) = ax$ при любых значениях параметра. Это множество прямых, имеющих общую точку. Какую? За что отвечает параметр a в этом уравнении? Прямая $g(x)$ является касательной к графику функции $f(x)$, только если $f'(x) = g'(x)$ — следует из геометрического смысла производной. Графики для интересующихся.

56. Областью определения $D(f)$ функции

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+x}$$

служит объединение $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; +\infty)$. На этом множестве функция представима в виде

$$f(x) = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Изобразите график этой функции. Не забудьте выколоть точки, не принадлежащие области определения. Перенеся $-kx$ в правую часть, рассмотрите семейство прямых $g(x) = kx$ — часто его именуют «пучком прямых». После решения задачи рекомендую подвигать ползунок k.

57. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает в плоскости xOy единичную окружность с центром в начале отсчета. Чтобы представить множество графиков функции $y = |x| + a$ (для каждого a), постройте сначала график функции $y_1 = |x|$, а затем вспомните, что свободный коэффициент a влияет на смещение графика вдоль оси ординат. Не прозевайте случай касания лучей угла с окружностью.

58. Уравнение $(x+2)^2 + y^2 = a$

1) при $a < 0$ не имеет решений,
2) при $a = 0$ задает точку $(-2, 0)$ плоскости xOy,
3) при $a > 0$ на плоскости xOy представляет собой окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(-2, 0)$.

Уравнение $|x| + |y - 1| = 1$ задает квадрат со стороной $\sqrt{2}$ и центром в точке $(0, 1)$, причем прямые, содержащие стороны квадрата, образуют углы 45° с координатными осями. Чтобы это понять, можно раскрыть модули по определению. Например, при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 1$ второе уравнение системы принимает вид: $x + y = 2$. Нарисуйте эту прямую с учетом ограничений — получится сторона квадрата. Аналогично раскрываются модули и в трех других случаях. Но можно проще.

Уравнение не меняет свой вид при замене x на $-x$. Иными словами, инвариантно относительно замены $x \mapsto -x$. Действительно:

$$|x| = |-x|.$$

График уравнения симметричен относительно оси ординат. Так что, построив сторону квадрата, лежащую на прямой $x + y = 2$, следующим шагом ее можно отразить симметрично относительно оси Oy. А далее, как вы догадываетесь, уже две стороны, образующие прямой угол, зеркально отражаем относительно прямой $y = 1$ в силу тех же причин.

Более сложное исследование квадратичных функций

59. Пусть $t = 3^x$, тогда исходное неравенство принимает вид

$$t^2 - 2a \cdot t + a^2 + a - 5 < 0.$$

Графиком функции левой части служит парабола, ветви которой направлены вверх. Что можно сказать в случае $D < 0$? Предположим, что при некотором a решением неравенства служит интервал $(-1; 0)$ — вы бы написали это значение параметра в ответ? (выражение 3^x принимает только положительные значения).

60. Воспользуемся определением логарифма и перейдем к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+a} = 2-x, \\ 2-x > 0, \\ 2-x \neq 1, \\ 2x+a > 0. \end{cases}$$

Неравенство четвертой строки системы избыточно: оно всегда выполнено, поскольку из первой и второй строк следует, что выражение $\sqrt{2x+a}$ равняется положительному выражению $(2-x)$.

61. В основе этой сложной задачи лежат простые свойства квадратичной функции. Подумайте, каким образом можно получить на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня. Иными словами, представьте себе совокупность

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = t_1, \\ &\sin x = t_2. \end{aligned}\right.$$

Какие значения могут принимать t_1 и t_2?

Метод областей на плоскости

62. Можно раскрыть модули по определению. При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ неравенство системы принимает вид: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 \leqslant 17$. Выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 + 9 - 1 \leqslant 0,$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) \leqslant 1,$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1.$$

Таким образом, в первой координатной четверти следует изобразить единичный круг с центром в точке $(3; 3)$. Остается рассмотреть три других случая, в каждом из которых снова получится единичный круг.

2) $x \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$ (II четверть),
3) $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ (III четверть),
4) $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$ (IV четверть).

Для удобства всюду возьмем нестрогие знаки, рассмотрев пограничные случаи $x = 0$ и $y = 0$ дважды: это допустимо, поскольку $|0| = 0$. Кроме метода областей, можно применить симметрию, что проще и красивее. На основе свойства $t^2 = |t|^2$ неравенство системы можно переписать в виде

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leqslant 1.$$

Теперь ясно, что плоское множество, заданное этим неравенством, должно быть симметричным как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат. Нарисовав единичный круг в первой четверти, отразим его относительно оси абсцисс, а затем два имеющихся круга зеркально отразим относительно оси ординат. Во второй строке системы тоже можно выделить полный квадрат, получив уравнение окружности при $a \neq 0$. (Ссылка на графики).

63. В первой строке системы можно распознать неравенство круга:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4.$$

Вторая строка задает полуплоскость, граничная прямая которой проходит через центр круга. Если управились, то здесь итог для самопроверки.

64. Если на плоскости задана прямая, то не существует круга, который бы ее целиком покрывал. Радиус круга — некоторое фиксированное число. А прямая простирается бесконечно и потому не содержится в каком-либо круге. Если же плоское множество ограничено, — например, представляет собой квадрат, — то каким бы большим оно ни было, всегда найдется покрывающий круг.

Каждое из трех неравенств исходной системы задает полуплоскость. Первые две из них фиксированы, а расположение граничной прямой третьей полуплоскости зависит от параметра a. При некоторых значениях пересечение трех полуплоскостей будет ограниченным, а при некоторых — нет. Если вы достаточно подумали, то можно посмотреть решение аналогичного номера или подвижный чертеж.

65. Задачу можно решить аналитически, но графическое решение не менее поучительно. Параметр a можно рассматривать как функцию, а множества решений — изображать в плоскости xOa. Для неравенства

$$\frac{4x-a}{x-2a}<0$$

изобразите отдельно нули числителя и нули знаменателя, то есть пересекающиеся прямые $a=4x$ и $a=\frac{1}{2}x$. Штриховым начертанием уместно подчеркнуть, что граничные прямые не удовлетворяют исходному неравенству. Изображенные прямые делят плоскость на четыре области. В каждой из них можно определить знак выражения левой части неравенства. Например, в точке

$$(x,a)=(5,5)$$

числитель $(4x-a)$ положителен, а знаменатель $(x-2a)$ — отрицателен. Значит, левая часть исходного неравенства меньше нуля. При этом не только точка $(5,5)$ удовлетворяет неравенству, но и вся соответствующая область — внутренняя часть угла без границы.

Попробуйте так же подставить точки из других областей и определить знаки — получите интересующее плоское множество. «Переходя» через нули числителя/знаменателя, знак выражения будет меняться или сохраняться аналогично методу интервалов. Неравенство $2\leqslant x\leqslant 4$ в системе координат xOa задает часть плоскости, ограниченную двумя прямыми.

Задачи ЕГЭ

Задача 1. Можно воспользоваться обратной теоремой Виета или реализовать группировку слагаемых:

$$\begin{aligned}&15x^2-8ax+a^2=\\&=15x^2-5ax-3ax+a^2=\\&=5x(3x-a)-a(3x-a)=\\&=(3x-a)(5x-a).\end{aligned}$$

Более универсальный путь — дискриминант. Здесь удобен $D/4$, но оставим его на другой раз.

$$D = 64a^2 - 4 \cdot 15 \cdot a^2 = 4a^2,$$

$$x = \frac{8a \pm 2a}{30}.$$

Теперь, зная корни квадратного трехчлена, его легко разбить на множители:

$$15x^2 - 8ax + a^2 = 15\left(x - \tfrac{1}{3}a\right)\left(x - \tfrac{1}{5}a\right).$$

Для удобства представим 15 как $3 \cdot 5$ и внесем первый множитель в первую скобку, а второй — во вторую:

$$15\left(x - \tfrac{1}{3}a\right)\left(x - \tfrac{1}{5}a\right) = (3x - a)(5x - a).$$

Далее вспомним правило: дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\frac{x^2 + 4x - a}{15x^2 - 8ax + a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 4x - a = 0, \\ (a - 3x)(a - 5x) \neq 0. \end{cases}$$

Остается поработать с графиками в плоскости xOa. Воспринимайте a как функцию (привычный y). Графиком функции $a = x^2 + 4x$ является парабола, которая пересекает ось абсцисс в точках $x = -4$, $x = 0$. Значит, ее вершина имеет абсциссу $x_0 = -2$ — полусумма -4 и 0. А ордината

$$a_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4.$$

Теперь изобразите прямые $a = 3x$, $a = 5x$. Сделайте это штриховыми линиями: перед нами не столько уравнения, сколько строгие неравенства $a \neq 3x$ и $a \neq 5x$, которые задают плоскость без двух прямых, пересекающихся в начале координат. Последний шаг решения — за вами. Как обычно, оставляю графики (плоские множества). Вместо a здесь фигурирует y. Напомню, что искомые значения параметра a мы находим не на глаз, а строго алгебраически. Например, чтобы определить точки пересечения параболы $a = x^2 + 4x$ и прямой $a = 3x$, следует решить систему:

$$\begin{cases} a = x^2 + 4x, \\ a = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x^2 + 4x, \\ a = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0, \\ a = 3x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x = -1$, $x = 0$. Подставляя эти значения во вторую строчку, находим $a = -3$, $a = 0$ соответственно. Таким образом, $A(-1; -3)$ и $B(0, 0)$ — интересующие точки пересечения графиков.

Задача 2. Вновь удобна плоскость xOa. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a = |4x| - x - 3, \\ a \neq x^2 - x. \end{cases}$$

Раскройте модуль по определению, воспринимайте a как функцию. С параболой $a = x^2 - x$ все просто: ее нули — точки $x = 0$, $x = 1$. В силу симметрии графика вершина имеет абсциссу $x_0 = \frac{1}{2}$. Следовательно, ордината вершины $a_0 = -\frac{1}{4}$.

Не забудьте изобразить параболу штриховой линией: ее точки пересечения с графиком функции первой строки системы должны быть выколоты, а координаты этих точек следует вычислить алгебраически. Для проверки оставляю ссылочку.

Задача 3. Последняя из простых, но важных задач этого типа. В числителе удобно воспользоваться разностью квадратов:

$$9x^2 - a^2 = (3x - a)(3x + a).$$

В знаменателе (как и всегда) можно использовать дискриминант для разложения на множители, но проще заметить разность квадратов:

$$x^2 + 8x + 16 - a^2 = (x+4)^2 - a^2 = (x+4-a)(x+4+a).$$

Теперь ваш черед! Две прямые, которые задают нули числителя, изображаем сплошной линией в плоскости xOa; две прямые, — нули знаменателя, — рисуем штриховым начертанием. Если формально, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x, \\ a = -3x; \end{array}\right. \\ a \neq x + 4, \\ a \neq -x - 4. \end{cases}$$

Здесь графики для самопроверки. Искомое множество значений a должно быть симметричным относительно нуля, поскольку уравнение инвариантно относительно замены $a \mapsto -a$: все выражения, содержащие параметры, были четными. Это соображение также упрощает поиск координат пересечения прямых: достаточно определить две точки в первой и второй четвертях, а затем, ссылаясь на симметрию относительно оси абсцисс, предъявить точки пересечения из третьей и четвертой четвертей.

Задача 4. В первом уравнении несложно распознать окружность:

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2,$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Центр расположен в точке $(1,1)$, радиус равен $\sqrt{2}$. Второе уравнение системы легко упростить, если использовать то, что $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ из первой строки системы. Тогда получим

$$2x + 2y = 2x + 2ax + 2y - 2ay - 2a^2,$$

$$0 = 2ax - 2ay - 2a^2,$$

$$a(x - y - a) = 0.$$

Как вы думаете, сколько решений при $a = 0$ имеет система

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2, \\ a(x - y - a) = 0? \end{cases}$$

Затем исследуем случай $a \neq 0$. Обе части второго уравнения можно разделить на a и далее работать с прямой $y = x - a$, в которой параметр a влияет на смещение графика вдоль оси ординат. Детали

При желании финальные шаги можно реализовать алгебраически: $y = x - a$ подставляем в первое уравнение системы (уравнение окружности) — получаем квадратное уравнение и требуем условия $D > 0$. Но давайте покажу, как можно управиться со вторым уравнением, не используя первое.

Набравшись оптимизма, во второй строке тоже можно распознать окружность. Для этого воспринимайте выражения

$$2x(1+a) \text{ и } 2y(1-a)$$

как удвоенные произведения. Удвоенные произведения каких сомножителей? Конечно, x и $(1+a)$ в первом случае, y и $(1-a)$ во втором. Теперь понятно, как собрать полные квадраты: нужно «искусственно» добавить к обеим частям уравнения выражения $(1+a)^2$ и $(1-a)^2$:

$$\underbrace{x^2 - 2x(1+a) + (1+a)^2}_{(x-(1+a))^2} + \underbrace{y^2 - 2y(1-a) + (1-a)^2}_{(y^2-(1-a))^2} = (1+a)^2 + (1-a)^2 - 2a^2,$$

$$(x - (1+a))^2 + (y^2 - (1-a))^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Центр любой такой параметрической окружности имеет координаты $(1+a, 1-a)$. Значит, перед нами множество всех окружностей радиуса $\sqrt{2}$, центры которых лежат на прямой $y = -x + 2$.

Почему именно на этой прямой? Условие $(x, y) = (1+a, 1 \quad a)$ можно отразить системой, из которой легко сделать требуемый вывод:

$$\begin{cases} x = 1 + a, \\ y = 1 - a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ y = 1 - a. \end{cases}$$

Сложив строки первой системы, получаем первое уравнение второй системы, и оно равносильно условию $y = -x + 2$.

Изобразите эту прямую пунктиром (к самой системе она не имеет отношения) и подумайте, как две окружности могут иметь ровно две общие точки и какие случаи будут граничными. Могут ли эти окружности совпадать?

Задача 5. В этом номере особенно важно понимание равносильных переходов, а не работа с ОДЗ. Преобразуем первое уравнение:

$$\log_7(36 - y^2) = \log_7(36 - a^2x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 36 - y^2 = 36 - a^2x^2, \\ 36 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (y - ax)(y + ax) = 0, \\ (y - 6)(y + 6) < 0. \end{cases}$$

С этой системой легко совладать графически в плоскости xOy. Почему не написали условие $36 - a^2x^2 > 0$, которое отражает положительность аргумента второго логарифма? Оно избыточно. Если вы знаете, что

$$36 - y^2 = 36 - a^2x^2$$

и при этом

$$36 - y^2 > 0,$$

то в ходе решения системы выражение $36 - a^2x^2$ будет положительным, поскольку оно равно положительному выражению $36 - y^2$.

Во втором уравнении выделяем полные квадраты и рисуем окружность

Задача 6. Второе уравнение распадается на два простейших: $y = x$ или $y = -x$. Сделав подстановку в первое уравнение, задача сведется к исследованию квадратных уравнений с помощью дискриминанта. Главное не прозевать случай совпадения корней. Но давайте рассмотрим геометрический путь и попробуем распознать в первой строке системы окружность.

$$\underbrace{x^2 - 2x \cdot 2(a+1) + 4(a+1)^2}_{(x-2(a+1))^2} + \underbrace{y^2 - 2y \cdot a + a^2}_{(y-a)^2} + 5a^2 + 8a + 3 = 4(a+1)^2 + a^2,$$

$$(x - 2(a+1))^2 + (y-a)^2 = 1.$$

Аналогично №4 линия центров окружностей $y = \frac{1}{2}x - 1$ находится из условий $x = 2(a+1)$ и y
На второе уравнение исходной системы удобно смотреть как на биссектрисы четырех координатных углов, ведь

$$y^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x.$$

Прямая может иметь с окружностью не более двух общих точек. Значит, для четырех различных решений необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая пересекала окружность в двух различных точках и при этом никакие две из этих четырех точек не совпадали. Проверьте, не прозевали ли вы «ловушки».

Задача 7. Система имеет смысл только при условиях $x \geqslant -2$ и $6 - x > 0$ — начните с них. Заметьте, как легко можно разбить на множители числитель:

$$(y^2 - y - 6) - xy + 3x = (y-3)(y+2) - x(y-3) = (y-3)(y+2-x).$$

Если прозевали эту группировку, можно припомнить обратную теорему Виета: какие два многочлена в произведении дают $(3x-6)$, а в сумме $(x+1)$? После нескольких попыток на ум должны прийти $y = 3$ и $y = x - 2$. Наконец, из пушки по воробьям:

$$y^2 - y(x+1) + 3x - 6 = 0,$$

$$D=(x+1)^2-4\cdot(3x-6)=x^2+2x+1-12x+24=(x-5)^2,$$

$$y=\frac{x+1\pm(x-5)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}y=3,\\ y=x-2.\end{array}\right.$$

Несмотря на известное свойство $\sqrt{t^2}=|t|$, здесь не требуется модуль: вспомните вывод формулы корней квадратного уравнения. Когда на плоскости все отражено, остается «просканировать» полученные графики прямой $y=-x+a$, в которой параметр a отвечает за смещение вдоль оси ординат.

Задача 8. Пусть $f(x)=\left|\dfrac{6}{x}-2\right|$ и $g(x)=ax-1$.

Удобно использовать преобразования графиков.

1) $f_1(x)=\dfrac{6}{x}$ — ветвь гиперболы (ветвь ровно одна, поскольку здесь и далее $x>0$).

2) $f_2(x)=\dfrac{6}{x}-2$ — смещение графика функции на две единицы вниз.

3) $f(x)=\left|\dfrac{6}{x}-2\right|$ — симметричное отражение точек четвертой четверти относительно оси Ox.

Также вы могли раскрыть модуль по определению в два случая:

1) при $0<x<3$ получим $f(x)=\dfrac{6}{x}-2$,

2) при $x\geqslant 3$ имеем $f(x)=-\dfrac{6}{x}+2$.

В свою очередь $g(x)$ при всех действительных a (в объединении) задает множество всех прямых, проходящих через точку $(x,y)=(0,-1)$, исключая вертикальную прямую, совпадающую с осью ординат. Почему все прямые проходят через указанную точку? Потому что при $x=0$, какое бы значение a мы не выбрали, произведение ax обнулится, а значение $g(x)$ будет равно -1.

Понимаете, какие граничные случаи требуют аккуратных вычислений? Самый интересный — касание прямой и ветви гиперболы. Его можно свести к квадратному уравнению и условию $D = 0$. Но также касательную можно найти с помощью геометрического смысла производной. Оставлю ссылку на графики функций.

Задача 9. Рассмотрим уравнение $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ — как выглядит его график? Сходу трудно сказать — перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 = 4 - 1 - 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ (x+1)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Неравенство $y \geqslant 0$ задает в плоскости xOy первую и вторую координатные четверти, включая границы. Уравнение окружности в соотношении $(x+1)^2 + y^2 = 4$ распознать несложно. В итоге имеем полуокружность с центром $(-1, 0)$ радиуса 2, все точки которой имеют неотрицательные ординаты. Уравнение

$$y = -ax + 4a + 2,$$

как и в прошлом номере, задает «пучок прямых». Это становится ясно после небольшого преобразования:

$$y = a(4 - x) + 2.$$

При $x = 4$ вне зависимости от параметра a правая часть равна 2. Дальнейшее — дело техники! Если управились, то «подвигать параметр» можно здесь.

Задача 10. Воспользуемся методом областей в плоскости xOa. Рассмотрим функцию

$$f(x, a) = (a + 7x + 4)(a - 2x + 4).$$

Ее областью определения служат все действительные пары (x, a). Найдем нули этой функции:

$$\left[\begin{array}{l} a = -7x - 4, \\ a = 2x - 4. \end{array}\right.$$

На плоскости они задают две пересекающиеся прямые. Определите знаки функции в полученных четырех областях и выберите то плоское множество, для которого функция принимает неположительные значения. Это множество ограничено двумя вертикальными углами. Далее возьмемся за второе неравенство системы:

$$a \geqslant x^2 - 3x.$$

Оно задает множество всех точек, лежащих не ниже параболы (графика функции $a = x^2 - 3x$). Остается проанализировать множество точек, которые удовлетворяют всей системе, и указать всевозможные ординаты точек этого множества. Не прозевали случай касания?

Задача 11. Если правая часть отрицательна — решений нет. Если правая часть неотрицательна, то ее вместе с левой можно возвести в квадрат. Запишем в соответствии с этим равносильную систему и преобразуем ее:

$$\begin{cases} 2xy + a = (x+y+5)^2, \\ x + y + 5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 + 10x + y^2 + 10y + 25, \\ y \geqslant -x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2 + (y+5)^2 = a + 25, \\ y \geqslant -x - 5. \end{cases}$$

Если забыли, как раскладывается квадрат суммы $(x+y+5)^2$, то раскройте скобки непосредственно: $(x+y+5)(x+y+5)$. Далее все просто, если подумать о множестве решений в плоскости xOy.

Задача 12. Свойства модулей — простые, но эффективные:

$$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a| \cdot |x+a|.$$

Вот почему в исходном уравнении можно реализовать группировку:

$$|x+a| \cdot \left(|x-a| - \sqrt{x^2 - ax + 4a}\right) = 0. \qquad (1)$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другой существует. Первый множитель существует всегда. Найдем нули второго:

$$|x-a| = \sqrt{x^2 - ax + 4a},$$

$$(x-a)^2 = x^2 - ax + 4a,$$

$$-a^2 + ax + 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a = 0, \\ &a = x + 4. \end{aligned}\right.$$

Возведение в квадрат здесь является равносильным преобразованием, ведь изначально обе части уравнения неотрицательны, а следующим шагом подкоренное выражение равно неотрицательному квадрату $(x-a)^2$ (то есть существует). Теперь второй случай: первый множитель уравнения (1) равен нулю, а второй должен существовать:

$$\begin{cases} a = -x, \\ x^2 - ax + 4a \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -x, \\ a^2 - a \cdot (-a) + 4a \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -x, \\ a(a+2) \geqslant 0. \end{cases}$$

Вы можете провести алгебраические рассуждения, но для наглядности покажу графический подход. Изобразим множество решений последней системы в плоскости xOa. Что будет пересечением

этих множеств? Два луча.

Объединим эти лучи вместе с двумя другими прямыми ($a = 0$, $a = x + 4$) в плоскости xOa. Воспринимайте a как функцию (привычный y). Остается «просканировать» плоскость горизонтальной прямой, чтобы считать количество решений при каждом значении параметра a.

Задача 13. Если воспринимать x как функцию, зависящую от y, становится ясно: графиком первого уравнения служит парабола. В плоскости xOy ее ось симметрии задается уравнением $y = 0$. Параметр a влияет на смещение графика вдоль оси Ox. Чтобы построить график второго уравнения, раскройте модули по определению. Найдем нули каждого из модулей: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$. Эти прямые разбивают плоскость на шесть областей. Как выглядит график уравнения в области

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x \geqslant y? \end{cases}$$

Три неравенства системы соответствуют раскрытию всех трех модулей со знаком плюс. Значит, интересующее уравнение принимает вид

$$x + y + x - y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Получили вертикальную прямую. Точнее говоря, отрезок: ведь прямую имеет смысл изображать только внутри угла (рассматриваемой области). Теперь рассмотрим пять других случаев. Шутка. Хватит двух. А истинным королям симметрии достаточно одного (см. комментарии к №24). Уравнение

$$|x| + |y| + |x - y| = 2$$

не меняет свой вид при замене $x \mapsto y$ и $y \mapsto x$. От перемены мест слагаемых сумма не меняется, а равенство $|y - x| = |x - y|$ верно по свойству модуля. Что это означает графически? Плоское множество симметрично относительно прямой $y = x$. Попробуйте одолеть построение графиков и вычисления до конца.

Задача 14. Первое уравнение системы нам уже знакомо:

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2},$$

$$\left(y - \sqrt{4 - x^2}\right)\left(y + \sqrt{4 - x^2}\right) = 0,$$

$$y^2 - (4 - x^2) = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Все преобразования выше — равносильные. Нужно лишь осознать, что $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b$. Второе уравнение системы также имеет удобную геометрическую интерпретацию:

$$y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 6x + 25 = a - 2y - 2xy,$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y + 25 = a,$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = a.$$

При $a < 0$ — пустое множество, при $a = 0$ — точка $(3; -4)$, при $a > 0$ — окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(3; -4)$. Не забудьте, что касание возможно как внутренним образом, так и внешним.

Задача 15. Если $a > 0$, то

$$|f(x)| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < f(x) < a.$$

Это несложно доказывается возведением в квадрат обеих частей, домножением на сопряженное или же с помощью геометрического смысла модуля (любым из трех способов). В справочных материалах есть и более общий случай: $|f(x)| < g(x)$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} > -3, \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > -3x^2 - 3x - 3, \\ x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (a + 3)x + 4 > 0, \\ 2x^2 + (3 - a)x + 2 > 0. \end{cases}$$

Начало

Содержание

Назад

Переход ко второй системе равносилен, поскольку выражение $x^2 + x + 1$ всегда положительно: на него можно домножить обе части каждого из неравенств. Остается сделать вывод о дискриминантах квадратных трехчленов, чтобы оба неравенства были верны при всех x. Тогда и только тогда в пересечении множеств их решений получим $(-\infty; +\infty)$.

Окончательное решение этой задачи можете посмотреть здесь. Графики опорой не послужат, но посмотреть на них полезно. «Выполнено при всех икс» — обе параболы лежат выше оси абсцисс.

Задача 16. Часто уточняют, все ли в порядке с условием: может, имелся в виду отрезок определенной длины или с известными координатами начала и конца? Вовсе нет. Иногда множество решений неравенства представляет собой отрезок, а иногда нет. Напомню некоторые другие термины:

- $(a; b)$ — интервал,
- $[a; b)$ — полуинтервал (полуотрезок),
- $[a; +\infty)$ — луч,
- $(a; +\infty)$ — открытый луч,
- $(-\infty; +\infty)$ — числовая прямая,
- $\{a\}$ — точка,
- $\varnothing$ — пустое множество,
- $[a; b] \cup \{c\}$ — отрезок, объединенный с точкой.

Эти и другие множества, связанные с объединением, не удовлетворяют условию задачи. Только множество вида $[a; b]$, где $b > a$, называется отрезком. Приступим к решению. Изобразите график функции

$$f(x) = \sqrt{3 - x}.$$

Затем вспомните преобразования графиков функций и подумайте, как устроено множество прямых углов вида

$$g(x) = -|x - a| + 2.$$

Если при некотором значении параметра a множество всех точек графика функции $g(x)$, которые лежат не ниже соответствующих точек графика функции $f(x)$, представляет собой отрезок, то это значение параметра следует включить в ответ. Не забудьте про область определения функции $f(x)$.

Задача 17. Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} a + x - 6 = (x+1)^2, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = x^2 + x + 7, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Теперь легко изобразить множество решений в плоскости xOa. По условию задачи требуется хотя бы один корень из полуинтервала $(-1; 1]$.

Задача 18. Вспомните равносильный переход:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

С его помощью перейдем от исходного уравнения к системе:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 9a^2 = x^4 + 4x^2 + 9a^2 + 4x^3 - 6x^2a - 12xa, \\ x^2 + 2x - 3a \geqslant 0. \end{cases}$$

В первой строке приведем подобные слагаемые и решим полученное уравнение:

$$4x^3 + 8x^2 - 6x^2a - 12xa = 0,$$

$$4x^2(x+2) - 6xa(x+2) = 0,$$

$$(x+2)(2x^2 - 3xa) = 0,$$

$$x(x+2)(2x - 3a) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \\ x = 1{,}5a. \end{array}\right.$$

Остается определить, при каких значениях параметра a все эти три решения будут попарно различными и будут удовлетворять неравенству $x^2 + 2x - 3a \geqslant 0$. Такие условия легче проверить аналитически — подстановкой и решением неравенств. Но при желании можно подключить и графики. Оставлю аналогичную задачу для закрепления.

Задача 19. Вынесем общий множитель за скобки:

$$\ln(6a - x)\left(\ln(2x + 2a - 2) - \ln(x - a)\right) = 0.$$

Далее перейдем к равносильной системе и упростим ее:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 6a - x = 1 \\ 2x + 2a - 2 = x - a; \end{array}\right. \\ 6a - x > 0, \\ 2x + 2a - 2 > 0, \\ x - a > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 6a - 1, \\ x = -3a + 2; \end{array}\right. \\ x < 6a, \\ x > -a + 1, \\ x > a. \end{array}\right.$$

Последние три неравенства системы задают ОДЗ переменной в исходном уравнении. Как насчет плоскости aOx? Воспринимайте x как функцию, зависящую от аргумента a. Постройте все графики и плоские множества, а затем можете свериться.

Уточню, что значения a отражает ось абсцисс (горизонтальная), а значения x — ось ординат (вертикальная). Решением трех неравенств системы (ОДЗ) служит внутренняя часть угла с вершиной в начале отсчета. Не забудьте про неравенство

$$0 \geqslant x \geqslant 1$$

из условия задачи. Если вдруг такой поворот плоскости на 90° оказался резким, то здесь множество решений в плоскости xOa.

Более сложные задачи

Задача 20. Исходное уравнение:

$$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}. \qquad (1)$$

Пусть $t = 7^{|x|}$. Какие значения может принимать t? Поскольку показательная функция с основанием 7 возрастает, а $|x|$ принимает все неотрицательные значения (и только их), то t принимает все значения на луче $[1; +\infty)$. Причем уравнение

$$t = 7^{|x|}$$

при $t = 1$ имеет единственное решение; при $t > 1$ имеет ровно два решения. Понимаете, зачем понадобятся эти детали? Уравнение (1), с учетом замены, принимает вид:

$$t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0. \qquad (2)$$

Как переформулировать условие задачи в новых обозначениях? Уравнение (1) имеет ровно два различных решения x_1, x_2 тогда и только тогда, когда для уравнения (2) выполнены условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 < 1 < t_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D = 0, \\ t_1 > 1. \end{cases}$$

Здесь D — дискриминант, t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$ — корни уравнения (2) соответственно. В случае $D = 0$ единственный корень обозначен за t_1. Остается вспомнить соответствующие необходимые и достаточные условия: см. таблицу в справочных материалах. График параболы оставлю для самопроверки: в решении задачи он не требуется.

Задача 21. Перейдем к равносильному неравенству, учитывая, что знаменатель дроби всегда положителен:

$$a - (a^2 - 2a - 3)\cos x + 4 < \sin^2 x + a^2 + 1.$$

Применим основное тригонометрическое тождество и приведем подобные слагаемые:

$$\cos^2 x - (a+1)(a-3)\cos x - a^2 + a + 2 < 0. \qquad (1)$$

Перепишем неравенство с учетом замены $t = \cos x$:

$$t^2 - (a+1)(a-3)t - a^2 + a + 2 < 0. \qquad (2)$$

Изобразите на тригонометрической окружности дугу, интересующую по условию задачи. Тогда станет ясно, что отрезок

$$-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

будет содержаться в множестве решений неравенства (1) тогда и только тогда, когда отрезок

$$0 \leqslant t \leqslant 1$$

содержится в множестве решений неравенства (2). Вновь удобнее всего записать необходимые и достаточные условия, связанные с квадратичной функцией

$$f(t) = t^2 - (a+1)(a-3)t - a^2 + a + 2.$$

Ее графиком служит парабола с ветвями, направленными вверх. Как будет решено неравенство (2) в случае $D < 0$? Что можно сказать о $f(0)$, $f(1)$?

Задача 22. Раскройте модуль в первом уравнении по определению. Если $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 2$, то уравнение принимает вид

$$y^2 - x - 2 = x^2 - x - 2,$$
$$y^2 = x^2,$$
$$y = \pm x.$$

В плоскости xOy его график представляет собой биссектрисы четырех координатных углов. Но изобразить их стоит только с учетом вышеуказанных ограничений. В случае $-1 < x < 2$ модуль раскроется со знаком минус, и уравнение примет вид

$$y^2 - x - 2 = -x^2 + x + 2,$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 5.$$

Его графиком служит окружность с центром в точке $(1;0)$ радиуса $\sqrt{5}$. Вновь изображаем не всю окружность, а только те ее дуги, которые принадлежат части плоскости, ограниченной вертикальными прямыми $x = -1$ и $x = 2$.

В уравнении $y = x - a$ параметр a влияет на смещение прямой вдоль оси ординат. Постарайтесь строго доказать, что, например, касание с дугой будет именно в той точке, что вы изобразили, а не иначе.

Задача 23. Пусть $t = a - 3$, тогда уравнение принимает вид

$$x^4 + t^2 = |x - t| + |x + t|. \tag{1}$$

Как оно изменится, если вместо x подставить $-x$?

$$(-x)^4 + t^2 = |-x - t| + |-x + t|.$$

С учетом свойства модуля $|-b| = |b|$ его можно записать так:

$$x^4 + t^2 = |x + t| + |x - t|.$$

Перед нами в точности уравнение (1). Поэтому если некоторое число x_0 является решением исходного уравнения, то $-x_0$ также является его решением. Все, что сказано выше, на экзамене можно заменить одной строчкой: «Уравнение инвариантно относительно замены $x \mapsto -x$». Значит, для единственного решения необходимо условие $x = 0$. Понимаете почему?

Предположим, что икс равен единице, а не нулю. Тогда $x = -1$ будет также служить решением, и вот — уже два различных корня, что не удовлетворяет условию задачи. x совпадает с $-x$ только в случае $x = 0$. Выясним, при каких значениях параметра t существует это нулевое решение:

$$0^4 + t^2 = |0 + t| + |0 - t|,$$

$$t^2 - 2|t| = 0,$$

$$|t| \cdot (|t| - 2) = 0.$$

Последний переход был сделан за счет того, что

$$t^2 = |t^2| = |t \cdot t| = |t| \cdot |t|.$$

В итоге получаем три значения: $t = -2$, $t = 0$, $t = 2$. Может показаться, что теперь, сделав обратную замену, найдем соответствующие значения $a = 1$, $a = 3$, $a = 5$ и запишем ответ. Но все самое интересное впереди. Мы знаем, что при $a = 1$ исходное уравнение имеет корень $x = 0$. Но мы не знаем, нет ли других корней.

Что делать? Нужно проверить каждое из найденных значений параметра — для каждого определить количество решений. Например, при $a = 1$ исходное уравнение принимает вид:

$$x^4 + 4 = |x + 2| + |x - 2|.$$

Сколько решений оно имеет и как это аккуратно доказать? Графики служат лишь иллюстрацией — рассуждения должны опираться на свойства функций и алгебру. Подобные задачи на инвариант давно не встречались на экзамене, но если есть желание углубиться, здесь целый раздел с видеоразборами.

Задача 24. Поскольку уравнение имеет смысл только при $x > 0$, то верны преобразования:

$$\log_{0,5}(x^2) = 2\log_{0,5}|x| = 2\log_{0,5} x.$$

Сделаем замену $t = \log_{0,5} x$:

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2. \tag{1}$$

Теперь множество решений можно изобразить в плоскости tOa. Нули подмодульных выражений $a = 2t$, $a = -\frac{1}{2}t$ задают две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в начале отсчета, и разбивают плоскость на четыре области. Рассмотрим одну из них: оба модуля раскроем со знаком плюс. При условии

$$\begin{cases} 2t - a \geqslant 0, \\ t + 2a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 2t, \\ a \geqslant -\dfrac{1}{2}t \end{cases} \tag{2}$$

уравнение (1) принимает вид

$$2t - a - t - 2a = t^2,$$

$$a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t.$$

Его графиком служит парабола с ветвями, направленными вниз. Парабола пересекает ось абсцисс в точках $t = 0$, $t = 1$. Значит, абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{2}$. Ордината вершины:

$$a = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Найдем также точки пересечения параболы и прямой, заданной уравнением $a = -\frac{1}{2}t$:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t, \\ a = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t, \\ a = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(2t-5) = 0, \\ a = -\frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Эта система имеет ровно два решения

$$\begin{cases} t = 0, \\ a = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t = \frac{5}{2}, \\ a = -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Теперь можно ручаться, что график уравнения (1) в области, заданной системой (2), выглядит так. Попробуйте рассмотреть другие случаи. Получилось?

Как объяснить, что график симметричен относительно начала отсчета? Можно ли было построить график в двух смежных областях (одной полуплоскости), а затем дорисовать его с учетом центральной симметрии? Да, и объясняется это очень просто: если точка (t_0, a_0) принадлежит графику уравнения (1), то вместе с ней и точка $(-t_0, -a_0)$ принадлежит этому графику. Действительно, при подстановке $t \mapsto -t$ и $a \mapsto -a$. Уравнение (1) принимает вид

$$|-2t + a| - |-t - 2a| = (-t)^2.$$

С учетом свойства $|-b| = |b|$ оно равносильно соотношению

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2,$$

а это в точности уравнение (1), откуда и следует нужное утверждение.

Задача 25. Пусть $t = 2^{2x-x^2+1}$, тогда исходное уравнение примет вид

$$2\cos^2\frac{t}{2} = a + \sqrt{3}\sin t.$$

В левой части воспользуемся формулой косинуса двойного угла (или формулой понижения степени):

$$\cos t + 1 = a + \sqrt{3}\sin t.$$

Далее метод вспомогательного аргумента. Кто позабыл, здесь вывод:

$$\sqrt{3}\sin t - \cos t = 1 - a,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t = \frac{1-a}{2},$$

$$\sin t\cos\frac{\pi}{6} - \cos t\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1-a}{2},$$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-a}{2}.$$

В последнем переходе мы использовали формулу синуса разности аргументов:

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Поскольку синус принимает только значения из отрезка $[-1; 1]$, для наличия решений необходимо условие

$$-1 \leqslant \frac{1-a}{2} \leqslant 1,$$

откуда $-1 \leqslant a \leqslant 3$. Но не все эти значения следует писать в ответ. Вспомните о замене:

$$t = 2^{2x-x^2+1}.$$

ОТВЕТЫ

Линейные уравнения и неравенства

1. Если $a = 0$, то множество решений — $\mathbb{R}$; если $a \neq 0$, то множество решений — $\{0\}$.

2. Если $a = 4$, то множеством решений является $\mathbb{R}$; при $a = -4$ решений нет;

3. При $k = 1$ и $m \neq -4$ или при $k = -3$ и $m \neq -4$.

4. При $p = -\dfrac{2}{3}$.

5. При $a = -\dfrac{2}{3}$.

6. При $a < 0$ — $[0; +\infty)$, при $a = 0$ — $\mathbb{R}$, при $a > 0$ — $(-\infty; 0]$.

7. При $x < -4$ решением служит луч $\left[\frac{3}{x+4}; +\infty\right)$; при $x = -4$ — $\mathbb{R}$; при $x > -4$ — луч $\left(-\infty; \frac{3}{x+4}\right]$.

8. При $a < -3$ или $a > -1$ решением служит $\left(-\infty; \frac{1}{a+3}\right)$, при $a = -1$ или $a = -3$ — $\varnothing$, при $-3 < a < -1$ — $\left(\frac{1}{a+3}; +\infty\right)$.

9. При $a < 1$.

10. При $a \geqslant 6$.

Различные простейшие уравнения и неравенства

11. При $a = \pm 1$ решений нет, при $a \neq \pm 1$ — $\{-1\}$.

12. При $a = 0$ решением служит объединение $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; при $a = 2$ — $\varnothing$, при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ — $\{a\}$.

13. Для каждого значения a решением служит открытый луч $(\sqrt[3]{a}; +\infty)$.

14. При $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ — $\{7\}$; при $a > 0$ множеством решений служит отрезок $[7 - a; 7 + a]$.

15. При $a \leqslant -1$ множеством решений служит луч $[-2; +\infty)$; при $a > -1$ — $\left[a^2 + 2a - 1; +\infty\right)$.

16. При $a \leqslant 0$ — $\mathbb{R}$, при $a > 0$ множеством решений служит луч $[\log_2 a; +\infty)$.

17. При $a \leqslant 0$ или $a = 1$ неравенство не имеет смысла; при $0 < a < 1$ множеством решений неравенства служит открытый луч $(a; +\infty)$; при $a > 1$ — $(0; a)$.

18. При $a < -1$ множеством решений служит $\mathbb{R}$; при $-1 \leqslant a < 1$ — $(-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; при $a \geqslant 1$ — $\varnothing$.

Квадратные уравнения и неравенства

19. $\left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

20. $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

21. $\dfrac{2}{5}$.

22. $\left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$.

23. $\left\{a \pm \sqrt{a^2 + 1}\right\}$ — при любых значениях a.

24. При $a = 1$ — $\{0\}$; при $a = 2 \pm \sqrt{2}$ — $\left\{\frac{a}{a-1}\right\}$; при $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$ и $a \neq 1$ — $\left\{\frac{a \pm \sqrt{-a^2+4a-2}}{a-1}\right\}$; в остальных случаях решений нет.

25. При $p = \pm 6$.

26. При $a = 2$.

27. При $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$.

28. При $a = 0$.

29. При $a = -3$ или $a = 9$.

30. При $b = -13$.

31. $[2; 6]$.

32. $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

33. 2.

34. 8.

35. при $a < 0$ — $\left[-\sqrt{-a}; \sqrt{-a}\right]$; при $a = 0$ — $\{0\}$; при $a > 0$ решений нет.

36.

Значения параметра a	Множество решений неравенства
$a < -1$	$\left[a - \sqrt{a^2 - 1}; a + \sqrt{a^2 - 1}\right]$
$a = -1$	$\{-1\}$
$-1 < a < 1$	$\varnothing$
$a = 1$	$\{1\}$
$a > 1$	$\left[a - \sqrt{a^2 - 1}; a + \sqrt{a^2 - 1}\right]$

37.

Значения параметра a	Множество решений неравенства
$a < 0$	$\left(\frac{-2+\sqrt{4-a}}{a}; \frac{-2-\sqrt{4-a}}{a}\right)$
$a = 0$	$\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$
$0 < a \leqslant 4$	$\left(\infty; \frac{-2-\sqrt{4-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{4-a}}{a}; +\infty\right)$
$a > 4$	$\mathbb{R}$

38. $(-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

39. $(-\infty; -11)$.

40. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

41. $(-\infty; -2)$.

42. $\left(\frac{11}{9}; +\infty\right)$.

43. $(-3; -2)$.

44. $\left(\sqrt{8}; \dfrac{11}{3}\right)$.

45. $\left[3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

46. $\left[2 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}\right]$.

47. $(-1; 3)$.

48. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. **49.** $(1; +\infty)$.

Графический метод

50. $\{0\} \cup (4; +\infty)$.

51. $[-1; 1]$.

52. $(-1; 1)$.

53. ± 1.

54. при $a = 2$ — единственное решение; при $a \neq 2$ — ровно два решения.

55. при $a < 0$ или $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ — нет решений; при $a = 0$ или $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ — единственное решение; при $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{4}$ — ровно два решения.

56. при $k = 4$.

57. $\left\{-\sqrt{2}\right\} \cup (-1; 1)$.

58. $\{2; 10\}$.

Более сложное исследование квадратичных функций

59. $\left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

60. при $a \leqslant -4$ или $a = -1$ решений нет; при $a > -4$ и $a \neq -1$ — $\left\{3 - \sqrt{a+5}\right\}$.

61. $\left\{0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Метод областей на плоскости

62. $\left[-6; -\sqrt{13}+1\right] \cup \left[\sqrt{13}-1; 6\right]$.

63. 2π.

64. $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

65. $(2; 8)$.

Задачи ЕГЭ

1. $(-4; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$

2. $(-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$

3. $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

4. $(-2; 0) \cup (0; 2)$

5. $(-\infty; -3] \cup \left\{-\dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{1}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$

6. $\left(-\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\dfrac{3}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{5}; -2+\sqrt{2}\right)$

7. $(-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$

8. $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{8}\right)$

9. $\left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{7}\right) \cup \{0\}$

10. $\left[-\frac{9}{4}; 4\right] \cup \{10\}$

11. $\left(-\infty; -\frac{25}{2}\right)$

12. $(-\infty; -2] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

13. $-2; 1$

14. $9; 49$

15. $(-1; 5)$

16. $(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$

17. $\left[\frac{27}{4}; 7\right) \cup (7; 9]$

18. $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

19. $\left(\frac{2}{7}; \frac{1}{2}\right)$

20. $\{-42\} \cup (-2; 3)$

21. $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$

22. $(1-\sqrt{10}; -2) \cup \{0\}$

23. $1; 5$

24. $\left[-\frac{9}{4}; 2\right)$

25. $[-1; 2)$

Заключение

Пособие содержит необходимый объём теоретического и практического материала для решения задач с параметром. Ко всем заданиям каждого практического занятия даны указания и ответы, а к наиболее сложным примерам предложены краткие решения. Это позволит студентам в случае затруднения при решении задач обратиться к соответствующей теории и примерам.

Поскольку дисциплина «Избранные главы школьной алгебры» несет значительную нагрузку по обобщению и систематизации знаний студентов по элементарной математике, а также формированию аналитических, конструктивных и исследовательских умений, то значительное внимание уделено различным методам решения задач: представлены задачи разного уровня сложности; проиллюстрированы методы решения одной и той же задачи (аналитический, графический, комплексный). Это позволяет создать условия для формирования готовности будущих учителей математики к организации и проведению учебно-исследовательской работы с учащимися.

БИБИЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2022. — 288 с.

2. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — 20-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2020. — 944 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. — 6-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 428 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. — 6-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009. — 348 с.

5. Сгибнев А. И. Делимость и простые числа. — 3-е изд. — М. : МЦНМО, 2015.— 112 с.

6. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи/ А. И. Козко , В. С. Панферов , И. Н. Сергеев и др. — М. : МЦНМО, 2016. — 229 с.

7. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи / под ред. В. О. Бугаенко. — 4-е изд., стер. — М. : МЦНМО, 2008. — 96 с.

Учебное электронное издание

КУРАНОВА Наталья Юрьевна

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Учебное-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 8 экз.

Издательство Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.