

**Владимирский государственный университет**

**Т. В. ПРОХОРОВА**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**  
**Основы векторной алгебры.**  
**Кривые и поверхности**  
**второго порядка**

**Учебно-практическое пособие**

**Владимир 2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. В. ПРОХОРОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
Основы векторной алгебры.  
Кривые и поверхности  
второго порядка

Учебно-практическое пособие

*Электронное издание*



Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-1757-3

© ВлГУ, 2025

© Прохорова Т. В., 2025

УДК 512  
ББК 22.14

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук  
доцент кафедры физики и прикладной математики  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*К. С. Хорьков*

Кандидат экономических наук, доцент  
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики  
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации  
(Владимирский филиал)  
*С. В. Никифорова*

**Прохорова, Т. В.**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Основы векторной алгебры. Кривые и поверхности второго порядка [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Т. В. Прохорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. – 176 с. – ISBN 978-5-9984-1757-3. – Электрон. дан. (6,34 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.**

Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам высшей математики: основы векторной алгебры, кривые и поверхности второго порядка и их классификация.

Предназначено для студентов вузов всех инженерно-технических и математических специальностей, может быть полезно преподавателям вузов.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 59. Библиогр.: 14 назв.

ISBN 978-5-9984-1757-3

© ВлГУ, 2025  
© Прохорова Т. В., 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>                                                                                                                                                          | <b>5</b> |
| <b>ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ .....</b>                                                                                                                                        | <b>6</b> |
| 1. Векторные пространства. Примеры линейных пространств.<br>Линейно независимые векторы. Базис. Размерность .....                                                              | 7        |
| 2. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений.<br>Неравенство Коши – Шварца .....                                                                                  | 14       |
| 3. Неравенство треугольника .....                                                                                                                                              | 16       |
| 4. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора.<br>Ортонормированные базисы. Скалярное произведение<br>в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между<br>векторами..... | 16       |
| 5. Векторное произведение и его свойства .....                                                                                                                                 | 18       |
| 6. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя<br>третьего порядка .....                                                                                         | 21       |
| 7. Геометрические приложения скалярного, векторного<br>и смешанного произведений .....                                                                                         | 22       |
| 8. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.<br>Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел<br>и собственных векторов .....                  | 27       |
| 9. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса.<br>След линейного оператора и его независимость от выбора базиса ....                                         | 29       |
| 10. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы.<br>Собственные числа самосопряженного оператора .....                                                                  | 31       |
| 11. Спектральная теорема .....                                                                                                                                                 | 33       |
| 12. Ортогональные операторы и матрицы .....                                                                                                                                    | 34       |
| 13. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм<br>к каноническому виду .....                                                                                             | 37       |
| 14. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию ...                                                                                                                 | 38       |

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 15. Линейные операторы, сохраняющие объем .....                                   | 41 |
| 16. Простейшие примеры алгебр Ли .....                                            | 43 |
| 17. Экспонента и логарифм квадратной матрицы .....                                | 45 |
| 18. Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты<br>симметрической матрицы..... | 49 |

## **КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.**

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ .....</b>                                                     | <b>52</b> |
| 19. Классификация кривых второго порядка на плоскости.....                        | 53        |
| 20. Полярное уравнение кривой второго порядка .....                               | 58        |
| 21. Аффинная группа .....                                                         | 66        |
| 22. Движения (изометрии) евклидова пространства .....                             | 68        |
| 23. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного<br>пространства ..... | 70        |
| 24. Аффинная классификация кривых второго порядка.....                            | 73        |
| 25. Каноническое уравнение эллипса.....                                           | 88        |
| 26. Каноническое уравнение гиперболы.....                                         | 94        |
| 27. Каноническое уравнение параболы.....                                          | 100       |
| 28. Понятие о плоскости Лобачевского .....                                        | 102       |
| 29. Классификация поверхностей второго порядка в 3-мерном<br>пространстве .....   | 105       |
| 30. Гиперболоидные конструкции в строительстве<br>и архитектуре .....             | 119       |
| 31. Прямые на однополостном гиперболоиде .....                                    | 136       |
| 32. Прямые на гиперболическом параболоиде.....                                    | 137       |
| 33. Проективное пространство.....                                                 | 139       |
| 34. Проективная классификация кривых второго порядка .....                        | 142       |

## **ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ .....**

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....**

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

.....174

## **ВВЕДЕНИЕ**

Математика играет определяющую роль в развитии творческого потенциала студента и выработке научной методологии, является универсальным языком всех естественных наук и основанных на них технических дисциплинах, изучаемых в высших учебных заведениях.

Пособие написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования. Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам высшей математики: основы векторной алгебры, кривые и поверхности второго порядка

Материал пособия разделён на темы. В каждой теме приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию, и решены задачи. Наличие в пособии большого количества решённых задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов.

Автор стремился сделать изложение материала ясным и доступным. Основная цель пособия – помочь студенту, приступающему к изучению высшей математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Пособие будет полезно также и для преподавателей вузов.

# **ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ**

## 1. Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность

**Определение 1.** Множество  $E$  называется векторным (линейным) пространством  $\Leftrightarrow$  на  $E$  определены операции сложения и умножения на числа из поля  $\mathbb{R}$  так, что выполнены следующие аксиомы:

- 1)  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ ,
- 2)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ ,
- 3)  $\exists \vec{0} \quad \forall \vec{x} \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ ,
- 4)  $\forall \vec{x} \quad \exists (-\vec{x}) \quad \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ ,
- 5)  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ,
- 6)  $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ ,
- 7)  $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$ ,
- 8)  $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ .

### Примеры.

- 1)  $E = \mathbb{R}$  с обычными операциями сложения и умножения.
- 2)  $E$  – плоскость с отмеченной точкой  $0$ . В любую точку плоскости из точки  $0$  можно направить стрелку; сложение определяется по правилу параллелограмма:  $\vec{x} + \vec{y}$  – это диагональ параллелограмма со сторонами  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .

- 3)  $E$  – трехмерное пространство с отмеченной точкой  $0$ .

$$n) E = \mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \};$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \quad \vec{0} = (0, 0, \dots, 0);$$

$$-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n); \quad \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

**Определение 2.** Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно независимы  $\Leftrightarrow$  соотношение  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$  возможно лишь в случае, когда  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

### Примеры.

- 1)  $E = \mathbb{R}$ ,  $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ . Предположим, что  $\lambda_1 \vec{e}_1 = \vec{0}$ . Если  $\lambda_1 \neq 0$ , то  $\exists \lambda_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned}\lambda_1^{-1}(\lambda_1 \vec{e}_1) &= \lambda_1^{-1} \vec{0} = \vec{0} \\ \parallel \\ (\lambda_1^{-1} \lambda_1) \vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1\end{aligned},$$

поэтому  $\vec{e}_1 = \vec{0}$ , что противоречит нашим предположениям. Значит,  $\lambda_1 = 0$ , и поэтому вектор  $\vec{e}_1$  линейно независим.

2)  $E$  – плоскость с отмеченной точкой  $0$ ,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  не лежат на одной прямой.

Докажем, что эти векторы линейно независимы. Пусть  $L_j$  – прямая, проходящая через точку  $0$  и конец вектора  $\vec{e}_j$ .

Предположим, что

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Тогда

$$L_1 \ni \lambda_1 \vec{e}_1 = -\lambda_2 \vec{e}_2 \in L_2,$$

поэтому

$$\lambda_1 \vec{e}_1 = -\lambda_2 \vec{e}_2 \in L_1 \cap L_2 = \vec{0}.$$

Значит,  $\lambda_1 \vec{e}_1 = \vec{0}$ .

Действуя как в предыдущем примере, мы получим соотношение  $\lambda_1 = 0$ .

С другой стороны,

$$-\lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

Следовательно,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , и векторы  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  линейно независимы.

3)  $E$  – трехмерное пространство с отмеченной точкой  $0$ ,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы линейно независимы (доказывается аналогично).

**Басня Крылова о линейно зависимых векторах.** Имеем соотношение

$$\vec{Л} + \vec{Р} + \vec{Щ} = \vec{0},$$

в котором  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , поэтому векторы  $\vec{Л}, \vec{Р}, \vec{Щ}$  линейно зависимы.

**Определение 3.** Система векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называется базисом пространства  $E \Leftrightarrow$

- 1) векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно независимы;
- 2)  $\forall \vec{x} \in E \quad \exists x_i \in \mathbb{R} \quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ .

**Примеры.**

1)  $E = \mathbb{R}$ ,  $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ . Любой вектор на прямой  $E$  пропорционален вектору  $\vec{e}_1$  с коэффициентом пропорциональности  $x_1$ :  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1$ . Поскольку  $\vec{e}_1$  линейно независим, то он образует базис прямой  $E$ .

2)  $E$  – плоскость с отмеченной точкой  $0$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  не лежат на одной прямой.

Мы уже знаем, что эти векторы линейно независимы.

Для любого вектора  $\vec{x}$  рассмотрим проекции  $\vec{x}$  на оси  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Эти проекции равны соответственно  $x_1 \vec{e}_1, x_2 \vec{e}_2$  причем вектор  $\vec{x}$  является диагональю в соответствующем параллелограмме, и поэтому  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ . Значит,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  образуют базис плоскости.

3)  $E$  – трехмерное пространство с отмеченной точкой  $0$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы образуют базис (доказывается аналогично).

n)  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...  $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ .

Пусть  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$ .

Тогда

$$\lambda_1 (1, 0, \dots, 0) + \lambda_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + \lambda_n (0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0),$$

т.е.

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Поэтому векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно независимы.

С другой стороны, любой вектор  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 1) = \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \end{aligned}$$

поэтому  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  – стандартный базис  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема (без доказательства).** В любом линейном пространстве  $E$  существует базис (быть может, бесконечный).

**Определение 4.** Пространство  $E$  называется конечномерным  $\Leftrightarrow$  в  $E$  существует конечный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ .

**Теорема (без доказательства).** Если  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  – базис  $E$ , то любой другой базис пространства  $E$  состоит из  $n$  элементов. Число  $n$  называется размерностью  $E$  и обозначается  $\dim E$  (dimension = размерность).

**Пример.**  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

**Определение 5.** Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  базис  $E$ . Тогда  $\forall \vec{x} \in E$   $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ . Набор чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется набором координат вектора  $\vec{x}$  относительно базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ .

**Замечание.** Координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определены единственным образом: если  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  – другой набор координат вектора  $\vec{x}$  относительно базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , то

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + \dots + x'_n \vec{e}_n \Rightarrow$$

$$(x_1 - x'_1) \vec{e}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \vec{e}_n = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0},$$

поэтому из линейной независимости базисных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  следует, что  $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = \dots = x_n - x'_n = 0$ , т.е.  $x_j = x'_j$ .

**Пример 1.** Написать разложение вектора  $\vec{x} = (13; 2; 7)$  по векторам  $\vec{e}_1 = (5; 1; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (2; -1; 3)$ ,  $\vec{e}_3 = (1; 0; -1)$ .

*Решение.*

Векторы  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  лежат в одном базисе.

Разложение вектора  $\vec{x}$  по векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  имеет вид

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их одноимённых координат. Значит, мы можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения  $x_1$  через  $x_2$ , а из третьего уравнения выразим  $x_3$  через  $x_2$ . Подставим эти значения в первое уравнение.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ -x_3 = 7 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ x_3 = -7 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot (2 + x_2) + 2x_2 + (-7 + 3x_2) = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ x_3 = -7 + 3x_2 \end{cases}$$

Решим первое уравнение

$$5 \cdot (2 + x_2) + 2x_2 + (-7 + 3x_2) = 13,$$

$$10 + 5x_2 + 2x_2 - 7 + 3x_2 = 13,$$

$$10x_2 + 3 = 13,$$

$$10x_2 = 10, \quad x_2 = 1.$$

Подставим это значение во второе и третье уравнение системы и найдём  $x_1$  и  $x_3$ .

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_3 = -7 + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -4 \end{cases}.$$

Тогда вектор  $\vec{x}$  будет разложен по векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  следующим образом

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

*Ответ:*  $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$ .

**Пример 2.** Написать разложение вектора  $\vec{x} = (10; 3; 3)$  по векторам  $\vec{e}_1 = (2; 3; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (3; 7; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 4; 2)$ .

*Решение.*

Векторы  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  лежат в одном базисе.

Разложение вектора  $\vec{x}$  по векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  имеет вид

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их одноимённых координат. Значит, мы можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Для решения этой системы воспользуемся формулами Крамера.

Составим основной определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - \\ &\quad - (5 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = \\ &= 28 + 12 + 30 - 35 - 16 - 18 = 1. \end{aligned}$$

Вычислим первый определитель, который получается заменой в основном определителе первого столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - \\
&\quad - (5 \cdot 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = \\
&= 140 + 36 + 30 - 105 - 80 - 18 = 3.
\end{aligned}$$

Вычислим второй определитель, который получается заменой в основном определителе второго столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 3 - \\
&\quad - (5 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 2) = \\
&= 12 + 40 + 45 - 15 - 24 - 60 = -2.
\end{aligned}$$

Вычислим третий определитель, который получается заменой в основном определителе третьего столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 2 - \\
&\quad - (10 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3) = \\
&= 42 + 9 + 60 - 70 - 12 - 27 = 2.
\end{aligned}$$

Теперь находим решение системы.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Тогда вектор  $\vec{x}$  будет разложен по векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  следующим образом

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

*Ответ:*  $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ .

## 2. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца

**Определение 1.** Пусть  $E$  – линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел. Скалярным произведением на пространстве  $E$  называется функция  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , которая каждой паре векторов  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  ставит в соответствие вещественное число  $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}$  так, что выполняются следующие аксиомы:

- 1)  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ ;
- 2)  $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ ;
- 3)  $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$ ;
- 4)  $\forall \vec{x} \neq 0 \quad (\vec{x}, \vec{x}) > 0$ .

### Примеры.

1)  $E = \mathbb{R}$ ,  $(\vec{x}, \vec{y}) = xy$  – обычное произведение чисел; аксиома 4 имеет вид  $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$ .

2)  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  
 $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$  – стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

3)  $E = C(a, b)$  – пространство функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ . Это пространство не имеет конечного базиса (т.е. является бесконечномерным). Для функций  $f, g \in E$  определим скалярное произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**Определение 2.** Число  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$  называется нормой (длиной) вектора  $\vec{x}$ .

**Теорема (неравенство Коши – Шварца).**  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ .

*Доказательство.*

По свойствам 1 – 4 скалярного произведения имеем:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=c} + 2t\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=b} + t^2\underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=a} = at^2 + 2bt + c = p(t).$$

Если  $\vec{y} = \vec{0}$ , то

$$\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=0} \leq \|\vec{x}\| \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=0},$$

и неравенство Коши – Шварца в этом случае очевидно.

Если  $\vec{y} \neq \vec{0}$ , то по свойству 4 скалярного произведения  $a = (\vec{y}, \vec{y}) > 0$ . Поэтому график функции  $p(t)$  – это парабола рожками вверх, причем мы уже доказали, что  $\forall t \in \mathbb{R} \quad p(t) \geq 0$ . Это значит, что график функции  $p(t)$  не опускается ниже оси  $t$  (иначе  $p(t)$  будет принимать отрицательные значения на некотором отрезке). В итоге квадратичный многочлен  $p(t)$  либо не имеет вещественных корней (и тогда его дискриминант  $(2b)^2 - 4ac < 0$ ), либо  $p(t)$  имеет совпадающие вещественные корни  $t_1 = t_2$  и его дискриминант  $(2b)^2 - 4ac = 0$  (и график  $p(t)$  касается оси  $t$  в точке  $t_1 = t_2$ ). В любом случае

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство

$$a = (\vec{y}, \vec{y}), \quad b = (\vec{x}, \vec{y}), \quad c = (\vec{x}, \vec{x}),$$

получим

$$4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0.$$

В итоге

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}), \quad \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

*Теорема доказана.*

**Следствие.** Если  $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$ , то по неравенству Коши – Шварца

$$\left| \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \in [-1, 1] \Rightarrow \exists (\vec{x}, \vec{y})^\wedge = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

– угол между векторами  $\vec{x}, \vec{y}$ .

### 3. Неравенство треугольника

**Теорема (неравенство треугольника).**  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\| &= \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ &= \sqrt{\underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=\|\vec{x}\|^2} + 2 \underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{\leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} + \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=\|\vec{y}\|^2}} \leq \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2} = \\ &= \sqrt{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2} = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Пример.** Пусть  $E = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением. Тогда

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

неравенство Коши – Шварца имеет вид

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

угол между векторами вычисляется по формуле

$$(\vec{x}, \vec{y})^\wedge = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \arccos \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

### 4. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора. Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между векторами

**Определение 1.** Векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  называются ортогональными  $\Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$ . Обозначение:  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

**Теорема Пифагора.** Если  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , то  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ .

*Доказательство.*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=0} + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

*Теорема доказана.*

**Определение 2.** Базис  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  называется ортонормированным

$$\Leftrightarrow (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{e}_i\| = 1; \\ \vec{e}_i \perp \vec{e}_j, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

**Пример.** Стандартный базис  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  пространства  $\mathbb{R}^n$  является ортонормированным относительно стандартного скалярного произведения  $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

**Теорема.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – ортонормированный базис,  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ ,  $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$ . Тогда  $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ ,  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , угол между векторами вычисляется по формуле  $(\vec{x}, \vec{y})^\wedge = \arccos \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}$ .

*Доказательство.*

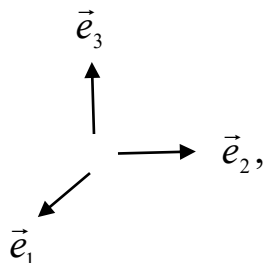
$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n) = \\ &= x_1 y_1 \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}_{=1} + x_1 y_2 \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{=0} + \dots + x_1 y_n \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_n)}_{=0} + \\ &+ x_2 y_1 \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}_{=0} + x_2 y_2 \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}_{=1} + \dots + x_2 y_n \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_n)}_{=0} + \dots + \\ &+ x_n y_1 \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_1)}_{=0} + x_n y_2 \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_2)}_{=0} + \dots + x_n y_n \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_n)}_{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Остальные формулы получаются из этой формулы для скалярного произведения.

*Теорема доказана.*

## 5. Векторное произведение и его свойства

**Определение.** Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства  $E$ :



$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ ,  $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ . Вектор

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3$$

называется векторным произведением векторов  $\vec{x}, \vec{y}$ . Иногда его обозначают  $\vec{x} \times \vec{y}$ .

**Теорема.** 1)  $[\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$ ;

2)  $[\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}] + [\vec{y}, \vec{z}]$ ;

3)  $[\lambda\vec{x}, \vec{y}] = \lambda[\vec{x}, \vec{y}]$ ;

4)  $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{x}$ ,  $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{y}$ ;

5)  $\|[\vec{x}, \vec{y}]\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(\hat{\vec{x}, \vec{y}})$ ;

6) правило правого винта.

*Доказательство.*

1) - 3) Из свойств определителей следует, что

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -[\vec{y}, \vec{x}],$$

$$[\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{x}, \vec{z}],$$

$$[\lambda \vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda [\vec{x}, \vec{y}].$$

$$\begin{aligned} 4) ([\vec{x}, \vec{y}], \vec{x}) &= \\ &= \left( \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3, x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \right) = \\ &= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \{ \text{разложение нулевого (одинако-} \\ &\text{вые строки!)} \text{ определителя } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ по первой строке} \} = 0, \text{ поэтому} \end{aligned}$$

$[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{x}$ ; аналогично  $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{y}$ .

5) Поскольку  $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) \in [0, \pi]$ , то  $\sin(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) \geq 0$ . Поэтому достаточно проверить, что

$$\|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \sin^2(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}),$$

т.е. что

$$\begin{aligned} \|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}})\right) = \\ &= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2}\right) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 &= \left\| \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right\|^2 = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 = \\ &= x_2^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 + x_3^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 + x_3^2 y_1^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 = \\
& = x_1^2 (y_2^2 + y_3^2) + x_2^2 (y_1^2 + y_3^2) + x_3^2 (y_1^2 + y_2^2) - \\
& \quad - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
& = x_1^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2 y_1^2 + x_2^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_2^2 y_2^2 + \\
& \quad + x_3^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_3^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
& = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \\
& \quad - x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2 - x_3^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
& = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = \\
& = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2.
\end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

Заметим, что  $h = \|\vec{y}\| \cdot \sin(\hat{\vec{x}, \vec{y}})$  – это высота параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$  с основанием  $\vec{x}$ ; поэтому формула 4 показывает, что  $\|[\vec{x}, \vec{y}]\|$  – это площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$ .

б) Правило правого винта (без доказательства):  $[\vec{x}, \vec{y}]$  направлено в ту сторону, в какую движется правый винт при минимальном повороте от направления вектора  $\vec{x}$  к направлению вектора  $\vec{y}$ .

**Пример.** Найти векторное произведение векторов  $\vec{x} = \{1, 2, -3\}$ ,  $\vec{y} = \{0, -1, 2\}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
[\vec{x}, \vec{y}] &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\
&= (4 - 3) \cdot \vec{e}_1 - (2 - 0) \cdot \vec{e}_2 + (-3 - 0) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ .

## 6. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя третьего порядка

**Определение.** Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства  $E$ . Число  $(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])$  называется смешанным произведением векторов  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

**Теорема.**

$$(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.*

Очевидно,

$$\begin{aligned} (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) &= \left( x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right) = \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \\ &= \{ \text{разложение определителя} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \text{ по первой строке} \} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Следствие (геометрический смысл определителя 3-го порядка).** Абсолютная величина определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

равна  $|(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])|$  и равна объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

*Доказательство.*

Мы считаем, что  $\vec{y}, \vec{z}$  лежат в основании параллелепипеда.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 |(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])| &= \|\vec{x}\| \cdot \|[\vec{y}, \vec{z}]\| \cdot \left| \cos(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) \right| = \\
 &= \underbrace{\|[\vec{y}, \vec{z}]\|}_{=\text{площадь основания}} \cdot \underbrace{\|\vec{x}\| \cdot \left| \cos(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) \right|}_{=\text{высота}} = \{\text{объем параллелепипеда}\}.
 \end{aligned}$$

*Следствие доказано.*

## 7. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений

### Теорема.

1) {площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$ } =  $\|[\vec{x}, \vec{y}]\|$ ;

2) {площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$ } =  $\frac{1}{2} \|[\vec{x}, \vec{y}]\|$ ;

3) {высота параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$  с основанием  $\vec{x}$ } = {высота треугольника, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}$  с основанием  $\vec{x}$ } =  $\frac{\|[\vec{x}, \vec{y}]\|}{\|\vec{x}\|}$ ;

4) {объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ } = {абсолютной величине определителя}  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ ;

5) {объем пирамиды, построенной на векторах  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  с основанием  $\Delta_{\vec{y}, \vec{z}}$ } =  $\frac{1}{6}$  {абсолютной величины определителя}  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ ;

6) {высота параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  с основанием  $\vec{y}, \vec{z}$ } = {высота пирамиды, построенной на векторах

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ с основанием } \Delta_{\vec{y}, \vec{z}} = \{\text{абсолютной величине}\} \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\|[\vec{y}, \vec{z}]\|}.$$

Все эти результаты получены выше.

**Пример 1.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного  $\vec{x} = \{6, 3, -2\}$ ,  $\vec{y} = \{3, -2, 6\}$ .

*Решение.*

Найдём векторное произведение векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ :

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}] &= \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-2)) \cdot \vec{e}_1 - (6 \cdot 6 - (-2) \cdot 3) \cdot \vec{e}_2 + (6 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (18 - 4) \cdot \vec{e}_1 - (36 + 6) \cdot \vec{e}_2 + (-12 - 9) \cdot \vec{e}_3 = 14\vec{e}_1 - 42\vec{e}_2 - 21\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить площадь параллелограмма.

$$\begin{aligned} S = \|[\vec{x}, \vec{y}]\| &= \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \\ &= \sqrt{196 + 1764 + 441} = \sqrt{2401} = 49(\text{ед.}^2). \end{aligned}$$

*Ответ:* 49.

**Пример 2.** Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках  $A(-4, 2, 6)$ ,  $B(2, -3, 0)$ ,  $C(-10, 5, 8)$ .

*Решение.*

Найдём векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (2, -3, 0) - (-4, 2, 6) = \\ &= \{2 - (-4); -3 - 2; 0 - 6\} = \\ &= \{2 + 4; -5; -6\} = \{6, -5, -6\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A = (-10, 5, 8) - (-4, 2, 6) = \\ &= \{-10 - (-4); 5 - 2; 8 - 6\} = \\ &= \{-10 + 4; 3; 2\} = \{-6, 3, 2\}.\end{aligned}$$

Найдём векторное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (-5 \cdot 2 - (-6) \cdot 3) \cdot \vec{e}_1 - (6 \cdot 2 - (-6) \cdot (-6)) \cdot \vec{e}_2 + \\ &+ (6 \cdot 3 - (-5) \cdot (-6)) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (-10 + 18) \cdot \vec{e}_1 - (12 - 36) \cdot \vec{e}_2 + (18 - 30) \cdot \vec{e}_3 = 8\vec{e}_1 + 24\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ :

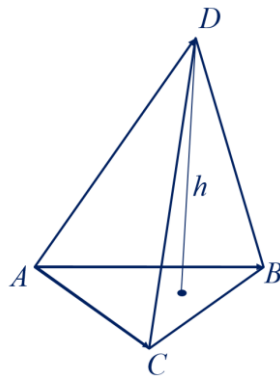
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар.}} = \frac{1}{2} \|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 24^2 + 12^2} = 14(e.d.^2).$$

Ответ: 14.

**Пример 3.** Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках  $A(5; 2; 0)$ ,  $B(2; 5; 0)$ ,  $C(1; 2; 4)$ ,  $D(-1; 1; 1)$  и её высоту, опущенную из вершины  $D$  на грань  $ABC$ .

Решение.

Построим векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  и найдём их координаты.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (2, 5, 0) - (5, 2, 0) = \\ &= \{2 - 5; 5 - 2; 0 - 0\} = \\ &= \{-3; 3; 0\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A = (1, 2, 4) - (5, 2, 0) = \\ &= \{1 - 5; 2 - 2; 4 - 0\} = \\ &= \{-4; 0; 4\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= D - A = (-1, 1, 1) - (5, 2, 0) = \\ &= \{-1 - 5; 1 - 2; 1 - 0\} = \\ &= \{-6; -1; 1\}.\end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ , для этого составим определитель третьего порядка из координат векторов. Пусть в первой строке стоят координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , во второй строке – координаты вектора  $\overrightarrow{AC}$ , во третьей строке – координаты вектора  $\overrightarrow{AD}$ :

$$(\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}&= -3 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot (-6) + 0 \cdot (-4) \cdot (-1) - \\ &- (0 \cdot 0 \cdot (-6) + (-3) \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) \cdot 1) = \\ &= 0 - 72 + 0 - (0 + 12 - 12) = -72.\end{aligned}$$

Вычислим объём пирамиды, используя формулу

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}])|.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{6} \cdot |-72| = 12 \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Найдём высоту пирамиды, используя формулу

$$h = \frac{3V}{S}.$$

Найдём площадь основания пирамиды. Основанием пирамиды является треугольник  $ABC$ . Площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{нар.} = \frac{1}{2} \|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\|.$$

Найдём векторное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (3 \cdot 4 - 0 \cdot 0) \cdot \vec{e}_1 - (-3 \cdot 4 - 0 \cdot (-4)) \cdot \vec{e}_2 + \\ &+ (-3 \cdot 0 - 3 \cdot (-4)) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (12 - 0) \cdot \vec{e}_1 - (-12 - 0) \cdot \vec{e}_2 + (0 + 12) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= 12\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 144 + 144} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 144} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}(\text{ед.}^2). \end{aligned}$$

А значит, высота, опущенная из вершины  $D$  на грань  $ABC$  будет иметь длину

$$h = \frac{3 \cdot 12}{6\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(\text{ед.длины}).$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } V &= 12(\text{ед.}^3), \\ h &= 2\sqrt{3}(\text{ед.длины}). \end{aligned}$$

## 8. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

**Определение.** Вектор  $\vec{x} \neq \vec{0}$  называется собственным вектором (eigenvector) линейного оператора  $\mathcal{A}: E \rightarrow E \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ . Число  $\lambda$  называется собственным числом (eigenvalue) оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному вектору  $\vec{x}$ .

**Теорема.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ,  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$  – собственный вектор, отвечающий собственному числу  $\lambda$ . Тогда  $\lambda$  является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а набор координат  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  собственного вектора является (ненулевым!) решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

*Доказательство* (в случае  $n = 2$ ).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \neq \vec{0};$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x};$$

$$\mathcal{A}(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 \mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_2 \mathcal{A}(\vec{e}_2) =$$

$$= x_1 (a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2) + x_2 (a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2) = \lambda (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2).$$

Сравним коэффициенты при  $\vec{e}_i$  в обеих частях последнего равенства:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 : & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1, \\ \vec{e}_2 : & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Осталось проверить, что  $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$

Предположим, напротив, что  $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \neq 0.$  Тогда по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}} = 0, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}} = 0,$$

поэтому  $\vec{x} = \vec{0}$ , что невозможно (по определению, собственный вектор всегда ненулевой).

*Теорема доказана.*

## 9. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса

**Теорема.** Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Пусть  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  – другой базис. Тогда  $A_f = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q$ . С другой стороны, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \left( A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \det \left( A_f - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \det \left( Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \det \left( Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - Q^{-1} \cdot \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot Q \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \left( Q^{-1} \cdot \left( A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot Q \right) = \\
&= \det Q^{-1} \cdot \det \left( A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \det Q = \\
&= \det \left( A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Следствие.** След  $\text{Tr } \mathcal{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  не зависит от выбора базиса (trace=след).

*Доказательство.*

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots + \det \mathcal{A} = 0$$

и не зависит от выбора базиса. Поэтому его коэффициенты (и, в частности, след  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ ) не зависят от выбора базиса.

*Следствие доказано.*

**Пример.** В случае  $n = 2$  характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0,\end{aligned}$$

т.е.

$$\lambda^2 - \text{Tr} \mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0.$$

## 10. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора

**Определение 1.** Конечномерное линейное пространство  $E$  над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел называется евклидовым  $\Leftrightarrow$  на  $E$  определено скалярное произведение.

**Определение 2.** Пусть  $E$  – евклидово пространство. Оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  называется самосопряженным  $\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$   $(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y}))$ .

**Теорема.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – ортонормированный базис евклидова пространства  $E$ . Оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  самосопряжен  $\Leftrightarrow$  его матрица  $A_e$  симметрическая, т.е.  $a_{ij} = a_{ji}$ .

*Доказательство.*

Напомним, что  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$  поэтому

$$\begin{aligned}\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y})) &\Leftrightarrow (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \vec{e}_i) = (\vec{e}_j, \mathcal{A}(\vec{e}_i)) \\ &\parallel \parallel \\ \left( \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k, \vec{e}_i \right) &= \left( \vec{e}_j, \sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{e}_k \right) \\ &\parallel \parallel \\ a_{ij} &= a_{ji}.\end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Теорема.** Если оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  самосопряжен, то все комплексные корни характеристического уравнения являются вещественными.

*Доказательство* (для  $n = 2$ ).

Пусть  $A_e$  – матрица самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . По предыдущей теореме имеем:  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ \underbrace{a_{21}}_{=a_{12}} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0,$$

$$a_{11} \cdot a_{22} - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + \lambda^2 - a_{12}a_{12} = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{12} = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Напомним, что

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}{4}} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}^2}{4}} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}}_{\geq 0}} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

## 11. Спектральная теорема

**Спектральная теорема.** Пусть  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве  $E$ . Тогда в  $E$  существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , состоящий из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}: \mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$ ,

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Доказательство* (в случае  $n = 2$ ).

Пусть  $A_e$  – матрица самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Тогда  $a_{ij} = a_{ji}$ ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}}.$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

поэтому  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ , и матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

В частности,  $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{11} \vec{e}_j$ .

В этом случае можно в качестве ортонормированного базиса из собственных векторов взять  $\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = \vec{e}_2$ .

Предположим, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Пусть  $\vec{x}$  – собственный вектор, отвечающий собственному числу  $\lambda_1$ ,  $\vec{y}$  – собственный вектор, отвечающий собственному числу  $\lambda_2$ . Рассмотрим

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}.$$

Очевидно,

$$\|\vec{f}_1\| = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1, \quad \|\vec{f}_2\| = \left\| \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| = 1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1) = \frac{\mathcal{A}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \frac{\lambda_1 \vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \lambda_1 \vec{f}_1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_2) = \frac{\mathcal{A}(\vec{y})}{\|\vec{y}\|} = \frac{\lambda_2 \vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \lambda_2 \vec{f}_2.$$

Остается проверить, что  $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ .

Очевидно,

$$\begin{array}{cc} (\mathcal{A}(\vec{f}_1), \vec{f}_2) & (\vec{f}_1, \mathcal{A}(\vec{f}_2)) \\ \parallel & \parallel \\ (\lambda_1 \vec{f}_1, \vec{f}_2) & (\vec{f}_1, \lambda_2 \vec{f}_2) \\ \parallel & \parallel \\ \lambda_1 (\vec{f}_1, \vec{f}_2) & \lambda_2 (\vec{f}_1, \vec{f}_2), \end{array}$$

поэтому  $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$ , и, следовательно,  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$ ,  $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ .

*Теорема доказана.*

## 12. Ортогональные операторы и матрицы

**Определение 1.** Оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  в евклидовом пространстве  $E$  называется ортогональным  $\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$ .

**Теорема 1.** Если  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор, то он сохраняет скалярное произведение, нормы векторов и углы между ними.

*Доказательство.*

По определению,  $\mathcal{A}$  сохраняет скалярное произведение:  $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$ . Поэтому

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \sqrt{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{x}))} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \|\vec{x}\|,$$

$$(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \arccos \frac{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}))}{\|\mathcal{A}(\vec{x})\| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}.$$

*Теорема доказана.*

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – ортонормированный базис евклидова пространства  $E$ . Оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  ортогональный  $\Leftrightarrow$  его матрица  $A$  ортогональная, т.е.  ${}^t A = A^{-1}$ , где  ${}^t A$  – матрица, транспонированная к  $A$ .

*Доказательство.*

По определению матрицы  $A$ ,

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) &= (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} \\ &\parallel \\ \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i, \sum_{l=1}^n a_{lk} \vec{e}_l \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{lk} (\vec{e}_i, \vec{e}_l) \\ &\parallel \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik}. \end{aligned}$$

В итоге мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} \\ &\parallel \\ \sum_{i=1}^n {}^t a_{ji} a_{ik}, \end{aligned}$$

где  ${}^t a_{ji} = a_{ij}$  – элемент транспонированной матрицы  ${}^t A$ , расположенный в  $j$ -й строке и  $i$ -м столбце. Поэтому соотношение

$$\sum_{i=1}^n {}^t a_{ji} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$

эквивалентно соотношению

$${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,  ${}^t A = A^{-1}$ .

*Теорема доказана.*

**Теорема 3.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – ортонормированный базис,

$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  – другой ортонормированный базис,

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица перехода.}$$

Тогда  ${}^t Q = Q^{-1}$ , т.е.  $Q$  – ортогональная матрица.

*Доказательство.*

Рассмотрим оператор  $\mathcal{A}$  с матрицей  $A_e = Q$ , т.е.

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i = \vec{f}_j.$$

Тогда

$$(\vec{f}_j, \vec{f}_k) = (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k).$$

Поэтому  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор, а его матрица  $A_e = Q$  является ортогональной.

*Теорема доказана.*

**Теорема 4.** Если  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор, то  $\det \mathcal{A} = \pm 1$ .

*Доказательство.*

$\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – ортогональная матрица:  ${}^t A = A^{-1}$ . С другой стороны, по свойству определителей,  $\det {}^t A = \det A$ . Поэтому

$$1 = \det A^{-1} \cdot \det A = \det {}^t A \cdot \det A = \det A \cdot \det A = \det^2 A \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

*Теорема доказана.*

**Определение 2.** Ортогональный оператор  $\mathcal{A}$  с определителем  $\det \mathcal{A} = 1$  называется поворотом.

### 13. Квадратичные формы.

#### Приведение квадратичных форм к каноническому виду

**Определение.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – ортонормированный базис,  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ . Функция  $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ , где  $a_{ij} = a_{ji}$ , называется квадратичной формой. Симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы.

**Пример.** Если  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ , то

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(коэффициент  $(-4)$  при  $x_1x_2$  разносится в матрице  $A$  как  $a_{12} = -2 = a_{21}$ ).

**Теорема.** Существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , в котором квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

*Доказательство.*

Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ , определенный формулой

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\vec{e}_i.$$

Поскольку матрица  $A$  симметрическая, то оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным.

Очевидно,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) &= \left( \mathcal{A} \left( \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j \right), \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \left( \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}(\vec{e}_j), \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i, \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_k \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{=0, \text{ если } i \neq k; =1, \text{ если } i=k} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_i = f(\vec{x}).
 \end{aligned}$$

В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , состоящий из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ :  $\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$ . В этом базисе вектор  $\vec{x}$  имеет новые координаты:  $\vec{x} = y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n$ ,

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}) &= (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = (\mathcal{A}(y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \\
 &= (y_1 \mathcal{A}(\vec{f}_1) + \dots + y_n \mathcal{A}(\vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \\
 &= (y_1 \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \lambda_n \vec{f}_n, y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.
 \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

## 14. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию

**Определение.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  — базис конечномерного векторного пространства  $E$  над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел,  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  — другой базис этого же пространства,

$$\begin{aligned}
 \vec{f}_j &= \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i, \\
 Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ . Будем говорить, что эти базисы имеют одинаковую ориентацию, если  $\det Q > 0$ .

Если  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  – третий базис пространства  $E$ , ориентация которого совпадает с ориентацией  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , то  $\vec{g}_j = \sum_{i=1}^n q'_{ij} \vec{f}_i$ ,  $\det Q' > 0$ . Проверим, что матрица  $Q''$  перехода от базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  является произведением  $Q'' = QQ'$ : действительно,

$$\vec{g}_j = \sum_{k=1}^n q'_{kj} \vec{f}_k = \sum_{k=1}^n q'_{kj} \left( \sum_{i=1}^n q_{ik} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n q_{ik} q'_{kj} \right) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n q''_{ij} \vec{e}_i.$$

Поэтому из соотношения

$$\det Q'' = \det(QQ') = \det Q \det Q' > 0$$

следует, что базисы  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  имеют одну и ту же ориентацию.

В итоге все базисы пространства  $E$  разбиваются на два класса: один класс состоит из базисов, ориентация которых совпадает с ориентацией базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ; другой класс состоит из базисов, ориентация которых противоположна ориентации базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ .

### Примеры.

1)  $E = \mathbb{R}$  с обычными операциями сложения и умножения. Здесь строго положительные числа задают положительное направление числовой прямой (положительную ориентацию), а строго отрицательные числа задают отрицательное направление числовой прямой (отрицательную ориентацию).

2)  $E$  – плоскость с отмеченной точкой. Базисы

$$\begin{array}{c} \vec{e}_2 \\ \uparrow \\ \rightarrow \vec{e}_1 = \vec{f}_1 \\ \downarrow \\ \vec{f}_2 \end{array}$$

имеют противоположные ориентации, потому что

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = -\vec{e}_2,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -1 < 0.$$

3) Правый ортонормированный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  и левый ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  3-мерного пространства

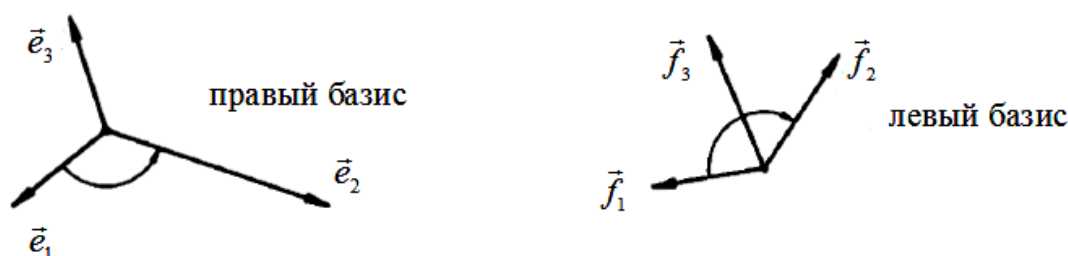


Рис. 1

имеют противоположные ориентации, потому что  $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1$ ,  $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$ ,  $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -1 < 0.$$

Пусть  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  – обратимый (невырожденный) линейный оператор (другими словами,  $\det \mathcal{A} \neq 0$ ). Тогда  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$  – новый базис пространства  $E$ , причем  $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$ . Поэтому базисы  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$  имеют одинаковую ориентацию  $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} > 0$  (что эквивалентно соотношению  $\det A > 0$ , поскольку определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса).

Если  $\det \mathcal{A} > 0$ , то мы будем говорить, что оператор  $\mathcal{A}$  сохраняет ориентацию.

Например, если  $\mathcal{A}$  – поворот плоскости на угол  $\varphi$ , то  $\mathcal{A}$  сохраняет ориентацию, потому что

$$\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Напомним, что операторы, сохраняющие скалярное произведение, называются ортогональными.

Поскольку для любого ортогонального оператора  $\mathcal{A}$  имеем соотношение  $\det \mathcal{A} = \pm 1$ , то сохраняющие ориентацию ортогональные операторы – это в точности повороты.

## 15. Линейные операторы, сохраняющие объем

**Теорема.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – базис конечномерного векторного пространства  $E$  над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел,  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  – обратимый (невырожденный) линейный оператор (т.е.  $\det \mathcal{A} \neq 0$ ). Тогда (объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = |\det \mathcal{A}| \cdot (\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

В частности,  $\mathcal{A}$  увеличивает объемы тел в  $|\det \mathcal{A}|$  раз.

*Доказательство.*

Для простоты мы рассмотрим случай  $\dim E = 3$ .

Можно считать, что  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – правый ортонормированный базис  $E$ . Имеем

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \vec{e}_i,$$

поэтому объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$ ,  $\mathcal{A}(\vec{e}_2)$ ,  $\mathcal{A}(\vec{e}_3)$ , равен

$$\begin{aligned} & \left( \text{абсолютной величине} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) = \\ & = \left( \text{абсолютной величине} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) = |\det \mathcal{A}| = \\ & = |\det \mathcal{A}| \cdot \underbrace{(\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{=1}. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Следствие 1.** Оператор  $\mathcal{A}$  сохраняет объем  $\Leftrightarrow |\det \mathcal{A}| = 1$ .

**Следствие 2.** Оператор  $\mathcal{A}$  сохраняет объем и ориентацию  $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 1$ .

В частности, повороты сохраняют объем и ориентацию.

Линейные операторы  $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ , сохраняющие объем и ориентацию, образуют *специальную линейную группу*  $SL(E)$  (special linear group). По определению,

$$SL(E) = \{ \mathcal{A} : E \rightarrow E \mid \det \mathcal{A} = 1 \}.$$

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{A} : E \rightarrow E$  – линейный оператор, сохраняющий объем и углы между векторами. Тогда  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор.

*Доказательство.*

Рассмотрим для простоты случай  $n = 2$ .

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – ортонормированный базис плоскости. Так как  $\mathcal{A}$  сохраняет углы, то

$$\frac{\pi}{2} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому параллелограмм, построенный на векторах  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ , является прямоугольником.

Пусть  $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$  – диагональ квадрата, построенного на векторах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Ясно, что  $\mathcal{A}(\vec{d}) = \mathcal{A}(\vec{e}_1) + \mathcal{A}(\vec{e}_2)$  – диагональ прямоугольника, построенного на векторах  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ . Поэтому из равенств

$$\frac{\pi}{4} = (\vec{d}, \vec{e}_1) = (\mathcal{A}(\vec{d}), \mathcal{A}(\vec{e}_1)),$$

следует, что прямоугольник является квадратом.

Поскольку  $\mathcal{A}$  сохраняет площади, то площадь этого квадрата равна 1. Значит, длины векторов  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$  равны 1. Поэтому оператор  $\mathcal{A}$  переводит ортонормированный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  в ортонормированный базис  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$  и, следовательно,  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор.

*Теорема доказана.*

## 16. Простейшие примеры алгебр Ли

**Определение 1.** Векторное пространство  $g$  над полем  $k$  называется алгеброй Ли, если каждой паре векторов  $x, y \in g$  отвечает вектор  $[x, y] \in g$ , причем выполняются следующие аксиомы:

- 1)  $\forall \lambda \in k \quad [\lambda x, y] = [x, \lambda y] = \lambda[x, y];$
- 2)  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]; \quad [x, y + z] = [x, y] + [x, z];$
- 3)  $\forall x \in g \quad [x, x] = 0;$
- 4) (тождество Якоби)  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$

Из свойств 2) – 3) следует, что

$$0 = [x + y, x + y] = \underbrace{[x, x]}_{=0} + [y, x] + [x, y] + \underbrace{[y, y]}_{=0}.$$

Поэтому  $[x, y] = -[y, x]$ .

### Примеры.

1)  $g$  – 3-мерное пространство со скалярным произведением,  $[x, y]$  – векторное произведение.

Нуждается в проверке только тождество Якоби. Его достаточно проверить только для базисных векторов правого ортонормированного базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (легкое упражнение).

2)  $g = M_n(\mathbb{R})$  – кольцо квадратных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $k$ .

Пусть  $[x, y] = xy - yx$ , где  $xy$  – обычное произведение матриц. В этом случае тождество Якоби действительно выполняется:

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] &= [xy - yx, z] + [yz - zy, x] + [zx - xz, y] = \\ &= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xzy + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz = 0. \end{aligned}$$

3) Пусть  $[x, y] = 0$  для всех  $x, y \in g$ . В этом случае алгебра Ли  $g$  называется коммутативной.

4) Пусть  $g = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  – множество всех квадратных матриц порядка  $n$  с нулевым следом.

Если  $\text{Tr}(x) = 0$  и  $\text{Tr}(y) = 0$ , то

$$\text{Tr}([x, y]) = \text{Tr}(xy - yx) = \text{Tr}(xy) - \text{Tr}(yx) = 0$$

(и поэтому  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  – алгебра Ли) в силу общей теоремы:

**Теорема 1.** Для любых квадратных матриц  $x, y$  порядка  $n$

$$\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx).$$

*Доказательство.*

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(xy) &= \sum_{i=1}^n (xy)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik} y_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n y_{ki} x_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^n (yx)_{kk} = \text{Tr}(yx). \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Теорема 2.** Пусть  $x \in M_n(\mathbb{R})$  и  ${}^t x$  — транспонированная матрица.

Тогда

$${}^t(xy) = {}^t y \cdot {}^t x.$$

*Доказательство.*

Очевидно,

$$\begin{aligned} ({}^t(xy))_{ij} &= (xy)_{ji} = \sum_{k=1}^n x_{jk} y_{ki} = \\ &= \sum_{k=1}^n {}^t x_{kj} \cdot {}^t y_{ik} = \sum_{k=1}^n {}^t y_{ik} \cdot {}^t x_{kj} = ({}^t y \cdot {}^t x)_{ij}. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Определение 2.** Квадратная матрица  $x \in M_n(\mathbb{R})$  называется ко-сосимметрической, если  ${}^t x = -x$ .

**Теорема 3.** Множество  $\text{so}_n(\mathbb{R}) = \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = -x\}$  всех ко-сосимметрических матриц порядка  $n$  является алгеброй Ли.

*Доказательство.*

Если  $x, y \in \text{so}_n(\mathbb{R})$ , то

$$\begin{aligned} {}^t[x, y] &= {}^t(xy - yx) = {}^t(xy) - {}^t(yx) = {}^t y \cdot {}^t x - {}^t x \cdot {}^t y = \\ &= (-y)(-x) - (-x)(-y) = yx - xy = -[x, y], \end{aligned}$$

поэтому  $x, y \in \text{so}_n(\mathbb{R})$ .

*Теорема доказана.*

## 17. Экспонента и логарифм квадратной матрицы

Пусть  $x \in (\mathbb{R})$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Действительно, если  $x = 0$ , то это соотношение очевидно.

Если же  $x \neq 0$ , то из второго замечательного предела получим:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)}} \right]^x = e^x.$$

Бином Ньютона дает соотношение

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \\ &= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^m + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot x^m + \dots \end{aligned}$$

В курсе математического анализа доказывается, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots$$

— сумма сходящегося всюду степенного ряда.

Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  на конечномерном евклидовом пространстве  $E$  определим его норму формулой

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{\vec{e} \in E \\ \|\vec{e}\| \leq 1}} \|\mathcal{A}(\vec{e})\|.$$

Поскольку функции

$$\mathcal{A}: E \rightarrow E \text{ и } E \xrightarrow{\vec{e} \mapsto \|\vec{e}\|} \mathbb{R}$$

непрерывны, их композиция непрерывна на замкнутом ограниченном

множестве (компакте)

$$B = \{e \in E \mid \|e\| \leq 1\},$$

и в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса ограничена на единичном шаре  $B$ . Поэтому норма оператора  $\mathcal{A}$  существует. Более того, она обладает следующими свойствами:

$$\text{i)} \quad \|\mathcal{A}\| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{e} \in B; \quad \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{e} \in B \quad \mathcal{A}(\vec{e}) = \vec{0} \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0;$$

$$\text{ii)} \quad \|\lambda \mathcal{A}\| = \sup_{\vec{e} \in B} |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\|;$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| &= \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{A}(\vec{e}) + \mathcal{B}(\vec{e})\| \leq \sup_{\vec{e} \in B} (\|\mathcal{A}(\vec{e})\| + \|\mathcal{B}(\vec{e})\|) \leq \\ &\leq \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{A}(\vec{e})\| + \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{B}(\vec{e})\| = \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|; \end{aligned}$$

$$\text{iv)} \quad \forall \vec{e} \in E \quad \|\mathcal{A}(\vec{e})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\vec{e}\|, \text{ потому что}$$

$$\forall \vec{e} \neq \vec{0} \quad \left\| \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right\| = 1, \quad \frac{1}{\|\vec{e}\|} \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = \left\| \mathcal{A} \left( \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right) \right\| \leq \|\mathcal{A}\|;$$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad \|\mathcal{A}\mathcal{B}\| &= \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \quad (\text{действительно, в силу свойства (iv) имеем:} \\ &\forall \vec{e} \in E, \end{aligned}$$

$$\|(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e})\| = \|\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}))\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}(\vec{e})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \cdot \|\vec{e}\|).$$

Наличие нормы в пространстве  $\text{End } \mathbb{R}(E)$  линейных операторов позволяет перенести на функции со значениями в  $E$  (линейные операторы) теорию сходящихся последовательностей. По определению, последовательность операторов  $\mathcal{A}_n$  сходится к оператору

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  определим его экспоненту  $e^{\mathcal{A}}$  формулой

$$e^{\mathcal{A}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\mathcal{A}}{n} \right)^n = 1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \dots$$

Сходимость обеспечивается теоремой Вейерштрасса, потому что ряд

$$1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \dots$$

мажорируется (согласно свойству (v)) сходящимся числовым рядом

$$\|1\| + \|\mathcal{A}\| + \frac{\|\mathcal{A}\|^2}{2!} + \dots + \frac{\|\mathcal{A}\|^m}{m!} + \dots = e^{\|\mathcal{A}\|}.$$

Если  $x \in M_n(\mathbb{R})$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  пространства  $E$ , то можно определить экспоненту  $e^x$  теми же формулами:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots$$

**Теорема (без доказательства).** Если матрицы  $x, y \in M_n(\mathbb{R})$  коммутируют, т.е.  $[x, y] = xy - yx = 0$ , то

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

**Теорема.** Если  $x \in \text{so}_n(\mathbb{R})$  – кососимметрическая матрица, то  $e^x$  – ортогональная матрица.

*Доказательство.*

По условию,  ${}^t x = -x$ , поэтому

$${}^t(e^x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{{}^t x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

С другой стороны, матрицы  $x$  и  $-x$  коммутируют:

$$[x, -x] = -[x, x] = 0,$$

поэтому

$$1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x} = e^x \cdot {}^t(e^x)$$

и, следовательно,  ${}^t(e^x) = (e^x)^{-1}$ .

Поэтому  $e^x$  – ортогональная матрица.

*Теорема доказана.*

Если  $x \in \mathbb{R}$  и  $|x| < 1$ , то

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x [1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^m x^m + \dots] dx =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1} + \dots,$$

поэтому можно определить логарифм вещественного числа  $y = 1 + x$  (где  $|x| < \varepsilon < 1$ ) формулой

$$\ln y = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots$$

**Теорема (без доказательства).** Если  $y = 1 + x$ , где  $x$  – квадратная матрица, близкая к нулевой матрице, то определен логарифм

$$\ln y = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots$$

причём,  $e^{\ln y} = y$ ,  $\ln e^x = x$ .

**Следствие.** Если  $y = e^x$  – ортогональная матрица, близкая к единичной матрице (так что логарифм  $\ln y = \ln(e^x) = x$  существует), то  $x$  – кососимметрическая матрица.

*Доказательство.*

Поскольку  $y = e^x$  – ортогональная матрица, то  ${}^t(e^x) = (e^x)^{-1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} {}^t x &= {}^t(\ln y) = \\ &= {}^t \left( (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots \right) = \\ &= ({}^t y - 1) - \frac{({}^t y - 1)^2}{2} + \frac{({}^t y - 1)^3}{3} - \frac{({}^t y - 1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m ({}^t y - 1)^{m+1}}{m+1} + \dots = \\ &= \ln({}^t y) = \ln((e^x)^{-1}) = \ln(e^{-x}) = -x \end{aligned}$$

и, следовательно,  $x$  – кососимметрическая матрица.

*Следствие доказано.*

Мы видим, что экспонента взаимно однозначно отображает малую окрестность нулевой матрицы в алгебре Ли  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$  кососимметрических матриц на малую окрестность единичной матрицы в группе  $O_n(\mathbb{R})$  ортогональных матриц. Обратное отображение осуществляется с помощью логарифма. В частности,

$$\dim \mathbb{R} O_n(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R} \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}).$$

Поскольку кососимметрическая матрица  $x \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$  имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то  $\dim \mathbb{R} \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n(n-1)/2$ .

Такую же размерность имеет группа ортогональных матриц  $O_n(\mathbb{R})$ .

## 18. Определитель экспоненты.

### Вычисление экспоненты симметрической матрицы

**Теорема.** Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  в евклидовом пространстве  $E$  имеем:  $\det e^{\mathcal{A}} = e^{\text{Tr} \mathcal{A}}$ .

*Доказательство.*

Для простоты рассмотрим случай  $n=2$ . Характеристическое уравнение оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$\lambda^2 - \text{Tr} \mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0.$$

Поэтому комплексные собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  различны  $\Leftrightarrow (\text{Tr} \mathcal{A})^2 - 4 \det \mathcal{A} \neq 0$ . Это условие задает открытое плотное подмножество  $U$  в кольце  $\text{End } \mathbb{R}(E)$ .

Все операторы  $\mathcal{A} \in U$  диагонализуются (над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел). Значит, в некотором базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  имеем:  $\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$ ,  $\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2$ , где  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$  – собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ .

Очевидно,

$$\mathcal{A}^m(\vec{e}_1) = \lambda_1^m \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}^m(\vec{e}_2) = \lambda_2^m \vec{e}_2,$$

поэтому

$$e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_1) = e^{\lambda_1} \vec{e}_1, \quad e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_2) = e^{\lambda_2} \vec{e}_2,$$

и, следовательно, матрица оператора  $e^{\mathcal{A}}$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\det e^{\mathcal{A}} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\text{Tr} \mathcal{A}}.$$

В итоге мы доказали теорему для операторов  $\mathcal{A} \in U$ . Поскольку  $e^{\mathcal{A}}$  и  $e^{\text{Tr} \mathcal{A}}$  непрерывны (как функции от  $\mathcal{A}$ ) и совпадают на открытом плотном подмножестве  $U \hookrightarrow \text{End } \mathbb{R}(E)$ , то они совпадают всюду.

*Теорема доказана.*

Следующая очевидная теорема позволяет сравнительно просто вычислять экспоненты симметрических матриц и самосопряженных операторов.

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве  $E$ ,  $A_e$  – (симметрическая) матрица оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , состоящий из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $Q$  – матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , определенная формулой  $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i$ . Тогда

$$A_f = Q^{-1} A_e Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$e^{A_f} = Q^{-1} e^{A_e} Q = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$e^{A_e} = Q \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}.$$

*Доказательство.*

Все следует из очевидных равенств

$$A_f^2 = Q^{-1} A_e Q Q^{-1} A_e Q = Q^{-1} A_e^2 Q,$$

$$A_f^3 = Q^{-1} A_e^3 Q, \dots, A_f^m = Q^{-1} A_e^m Q.$$

*Теорема доказана.*

# **КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ**

## 19. Классификация кривых второго порядка на плоскости

На евклидовой плоскости с ортонормированным базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  рассмотрим кривую 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ , в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2,$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2,$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^2 q_{ij}\vec{e}_i,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \text{ – ортогональная матрица перехода от ба-}$$

зиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  к базису  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ .

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2).$$

Сравнивая коэффициенты при  $\vec{e}_j$  в левой и правой частях, получим:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение кривой, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_0 = 0.$$

При этом  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ , потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что  $\lambda_1 > 0$ .

Предположим сначала, что  $\lambda_2 \neq 0$ . Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left( y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) + \\ + b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2}_{C_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -c_0.$$

1) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $-c_0 > 0$ , то положим

$$a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(эллипс).

2) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $-c_0 < 0$ , то положим

$$a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1$$

(мнимый эллипс).

3) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $-c_0 = 0$ , то положим

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке).

4) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $-c_0 > 0$ , то положим

$$a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(гипербола).

Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $-c_0 < 0$ , то снова получим гиперболу.

5) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $-c_0 = 0$ , то положим

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{-1}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых).

Далее мы можем считать, что  $\lambda_2 = 0$ . Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1 \left( y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + b_2 y_2 + b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \underbrace{b_2 y_2 + b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 = -c_0.$$

Если  $b_2 \neq 0$ , то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 + \frac{c_0}{b_2} = t_2, \end{cases}$$

и уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 t_1^2 + b_2 t_2 = 0.$$

Предположим сначала, что  $b_2 \neq 0$ .

6) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ , то положим  $a^2 = \frac{b_2}{\lambda_1}$ . Уравнение кривой

принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} + t_2 = 0$$

(парабола); случай  $b_2 < 0$  сводится к предыдущему заменой  $t_2$  на  $-t_2$  и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что  $b_2 = 0$  (в этом случае уравнение кривой не содержит переменной  $t_2$ ). Мы получаем следующие варианты:

7)  $\frac{z_1^2}{a^2} = 1$  (пара параллельных вещественных прямых);

8)  $\frac{z_1^2}{a^2} = -1$  (пара параллельных мнимых прямых);

9)  $z_1^2 = 0$  (пара совпадающих прямых).

Мы доказали следующую теорему:

**Теорема.** Существуют 9 классов кривых 2-го порядка:

- 1) эллипс;
- 2) мнимый эллипс;
- 3) пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке;
- 4) гипербола;
- 5) пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых;
- 6) парабола;
- 7) пара параллельных вещественных прямых;
- 8) пара параллельных мнимых прямых;
- 9) пара совпадающих прямых.

## 20. Полярное уравнение кривой второго порядка

Эллипс, гиперболу и параболу можно охарактеризовать с единой точки зрения. Для этого зададим три элемента:

- точку, называемую *фокусом*,
- прямую, называемую *директрисой*, которая не проходит через фокус,
- неотрицательное число, называемое *эксцентриситетом*.

Термины "фокус" (по-латыни *focus*, очаг) и эксцентриситет (от латинского *ex*, вне и "центр") ввёл Кеплер в сочинениях по небесной механике. Термин "директриса" в данном значении ввёл Лопиталь.

Считая эти три элемента заданными, определим кривую как множество точек плоскости, содержащей фокус и директрису и удовлетворяющих фокально-директориальному условию. Пусть расстояние произвольной точки кривой от фокуса равно  $\rho$ , а её расстояние от директрисы равно  $d$ .

**Фокально-директориальное условие:** отношение для любой точки на кривой одинаково и равно эксцентриситету  $\varepsilon$ .

Плоскость, на которой расположена кривая 2-го порядка, подвергнем *преобразованию подобия*, при котором все расстояния умножаются на некоторое число – *коэффициент подобия*. При таком преобразовании эксцентриситет кривой сохраняется, т.е. эксцентриситеты у подобных кривых равны.

Из фокально-директориального условия следует, что прямая, проведённая через фокус перпендикулярно к директрисе, является осью симметрии кривой. Из этого условия можно вывести уравнение кривой в полярных координатах.

Введём полярную систему координат, будем считать ось симметрии полярной осью, фокус – началом координат, положительное направление примем от директрисы через фокус и дальше в бесконечность.

На рис. 2 фокус – точка  $F$ ,  
директриса – прямая  $DS$ ,  
полярная ось – прямая  $DF$ .

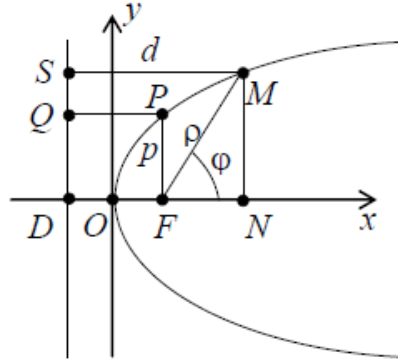


Рис. 2

Чтобы написать уравнение, надо как-то охарактеризовать размер конфигурации. Можно задать расстояние  $FD$  от фокуса до директрисы, но более традиционный вид уравнения получится, если для этой цели использовать длину отрезка  $FP = p$ , где  $P$  – точка пересечения прямой, проходящей через фокус параллельно директрисе, с кривой. Величина  $p$  называется *фокальным параметром* кривой.

Перепишем фокально-директориальное условие в виде

$$\rho = \varepsilon \cdot d \quad (20.1)$$

Расстояние

$$d = SM = DF + FN = QP + \rho \cdot \cos \varphi,$$

длину отрезка  $QP$  можно найти из условия (1.1) для точки  $P$ :

$$p = \varepsilon \cdot QP,$$

тогда расстояние между фокусом и директрисой

$$FD = QP = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cdot \cos \varphi.$$

Затем подставим это выражение в фокально-директориальное условие (20.1) для точки  $M$ , получим

$$\rho = \varepsilon \cdot \left( \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cdot \cos \varphi \right) = p + \varepsilon \cdot \rho \cdot \cos \varphi.$$

Сделаем следующие преобразования

$$\begin{aligned}\rho - \varepsilon \cdot \rho \cdot \cos \varphi &= p, \\ \rho \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi) &= p.\end{aligned}$$

Выразим  $\rho$  и получим уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (20.2)$$

Неравенство

$$\rho \leq \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

будет описывать внутреннюю область, которой принадлежит фокус.

С помощью полярного уравнения исследуем форму кривой. Необходимо различать три случая в зависимости от значения эксцентриситета  $\varepsilon$ .

*Замечание:* любые две кривые с одинаковым эксцентриситетом подобны (рис. 3).

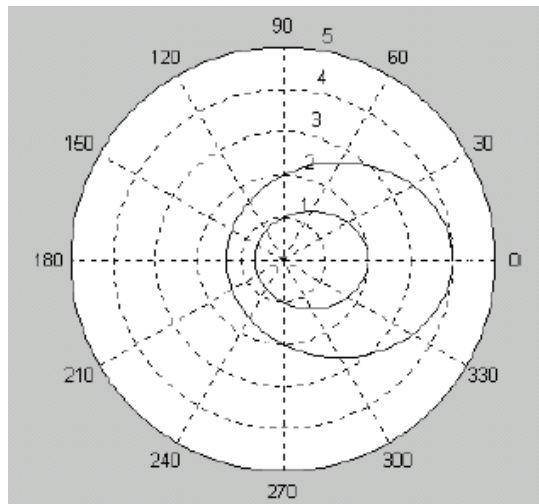


Рис. 3. Подобные эллипсы  
в полярной системе координат

**Случай 1:**  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Тогда выражение  $1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi$  будет положительным при любом  $\varphi$ . А это значит, что при любом  $\varphi$  радиус  $\rho$  конечен, следовательно, вся кривая расположена в ограниченной части плоскости. Такая кривая второго порядка называется *эллипсом* (рис. 4).

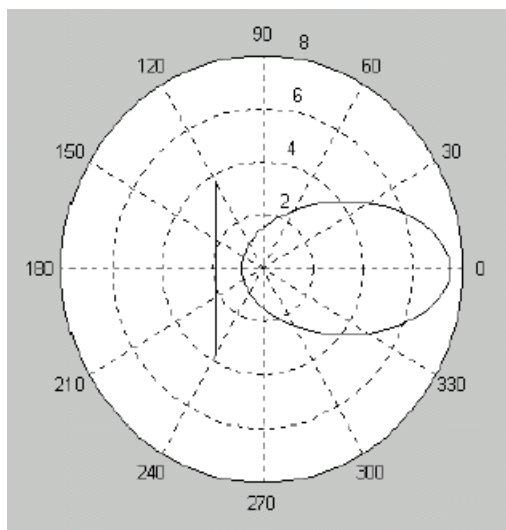


Рис. 4. Эллипс с директрисой

Если  $\varepsilon = 0$ , тогда из уравнения (20.2) получаем

$$\rho \cdot (1 - 0 \cdot \cos \varphi) = p,$$

$$\rho = p = \text{const},$$

а это значит, что кривая является окружностью радиуса  $p$  с центром в фокусе  $F$ .

С точки зрения фокально-директориального условия этот случай является особым, потому что расстояние от фокуса до директрисы

$$\frac{p}{\varepsilon} = \infty,$$

т.е. «директриса» окружности «уходит в бесконечность». На самом деле у окружности не существует директрисы. При возрастании эксцентриситета от 0 к 1 эллипс становится всё более вытянутым вдоль полярной оси. *Вершинами* эллипса называются точки эллипса, в которых расстояние от фокуса достигает минимума и максимума.

В астрономии эти точки орбиты небесного тела, вращающегося вокруг Солнца, называются *перигелий* и *апогелий* (*афелий*).

*Перигелий* – точка, ближайшая к Солнцу.

*Апогелий* (*афелий*) – точка, наиболее удаленная от Солнца.

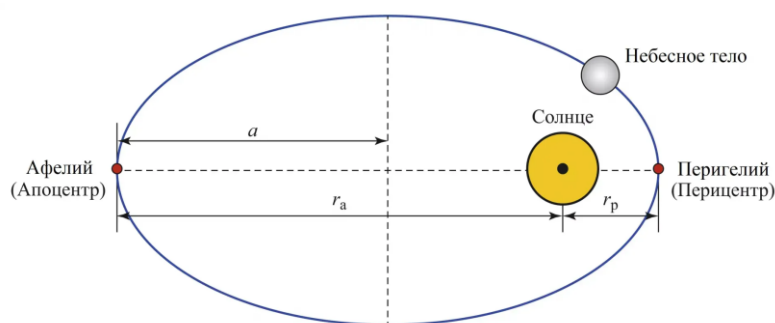


Рис. 5

Аналогичные точки орбиты Луны (или искусственного спутника Земли) называются *перигей* и *апогей*.

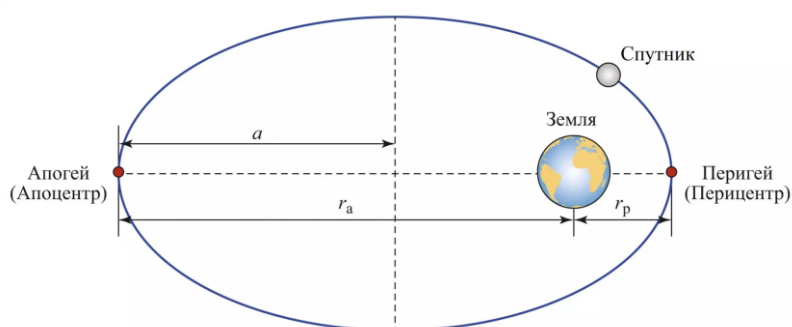


Рис. 6

Из уравнения кривой (20.2)

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad \rho_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}.$$

Найдём их отношение

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{p}{1 - \varepsilon} : \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Возьмём эксцентриситет  $\varepsilon = 0.5$ , тогда отношение экстремальных расстояний равно 3. Если представить себе планету с такой орбитой, интенсивность излучения, получаемого от центрального светила (она обратно пропорциональна квадрату расстояния) за период обращения будет меняться в 9 раз! Навряд ли в таких условиях возможно возникновение и существование жизни. Эксцентриситет орбиты Земли вокруг Солнца равен всего 0.017, отношение максимального расстояния к минимальному немного больше 1.03, его квадрат близок к

1.07. Благодаря такому небольшому значению мы достаточно комфортно можем существовать. Интересно, что Земля ближе всего к Солнцу в те месяцы, когда в северном полушарии стоит зима, так что природные сезоны определяются совсем другими факторами.

Рассмотрим в качестве примера орбиту кометы Галлея. Комету Галлея наблюдали ещё в древности. Первые письменные упоминания о небесном объекте относятся к 240 году до н.э. в Китае. Её наблюдали и описывали также вавилонские астрономы. В Европе первое достоверное изображение кометы датируется 1066 годом. На средневековом гобелене из Байе есть сцена, на которой изображены люди, смотрящие на комету.



Рис. 7

Комета Галлея – это короткопериодическая комета, которая возвращается в окрестности Земли примерно каждые 75–76 лет. Её возраст около 200 тыс. лет.



Рис. 8. Эдмунд Галлей

Она является первой кометой, для которой определили эллиптическую орбиту и установили периодичность вращения. Её назвали в честь английского астронома Эдмунда Галлея, который в 1705 году первым предсказал возвращение небесного тела.

Комета состоит из льда, камней и пыли и при приближении к Солнцу образует характерный хвост. Несмотря на то, что каждый век появляется много более ярких долгопериодических комет, комета Галлея – единственная короткопериодическая комета, хорошо видимая невооруженным глазом.

Последнее прохождение кометы через перигелий было в феврале 1986 года. Нетрудно догадаться, что следующее её появление ожидается в 2061 году. Она будет видна в июле и станет ярким зрелищем на ночном небе, а также её можно будет наблюдать на рассвете и закате. В этот раз её орбита окажется достаточно близкой к Земле: на расстоянии примерно 0,5 астрономических единиц (около 75 млн км). Это почти в два раза ближе, чем в 1986 году.

Эксцентриситет кометы Галлея равен  $\varepsilon = 0.97$ .

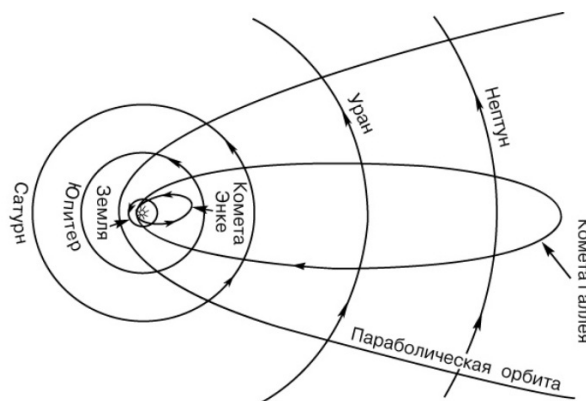


Рис. 9

Для неё минимальное расстояние от Солнца примерно 0.5 а.е., где а.е. – астрономическая единица. Астрономическая единица – это среднее расстояние Земли от Солнца, она равна примерно 150 млн. км. Для кометы Галлея отношение максимального расстояния к минимальному близко к 60, его квадрат – к 3600.

**Случай 2:**  $\varepsilon = 1$ .

Тогда уравнение (20.2) будет иметь вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

В этом уравнении знаменатель положителен при всех  $\varphi$ , кроме  $\varphi = 0$ , когда он обращается в нуль.

Эта кривая называется *параболой*. При  $\varphi \rightarrow 0$  расстояние точки на параболе от фокуса  $\rho \rightarrow \infty$ .

Расстояние от фокуса до директрисы параболы равно фокальному параметру  $p$ , вершина параболы, т.е. точка, соответствующая  $\varphi = \pi$ , делит это расстояние пополам (рис. 10).

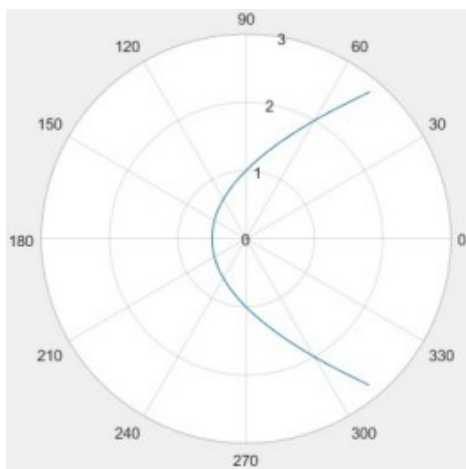


Рис. 10

Эксцентриситет любой параболы равен 1, поэтому *все параболы подобны*.

**Случай 3:**  $\varepsilon > 1$ .

Эта кривая называется *гиперболой* (рис. 11).

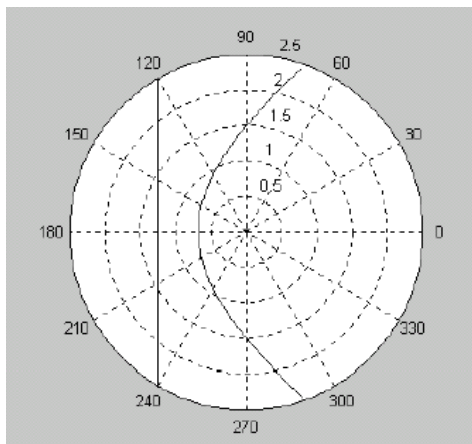


Рис. 11

Знаменатель в уравнении (20.2) должен оставаться положительным, для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\cos \varphi > \frac{1}{\varepsilon}$ ;  $\cos \varphi$  может быть и отрицательным.

Когда угол  $\varphi \rightarrow \arccos \frac{1}{\varepsilon} + 0$ , полярный радиус  $\rho \rightarrow \infty$ .

Любые две гиперболы с одинаковым эксцентриситетом подобны.

## 21. Аффинная группа

Пусть  $E$  – конечномерное линейное пространство над полем  $k$ . Положим  $GL(E) = \{A: E \rightarrow E \mid \det A \neq 0\}$  (general linear group). Это группа линейных автоморфизмов линейного пространства  $E$  над полем  $k$ .

Очевидно, вектор  $\vec{0}$  является неподвижным вектором любого линейного оператора  $A$  в силу соотношения  $A(\vec{0}) = \vec{0}$ .

Мы хотим расширить группу  $GL(E)$  обратимых операторов до аффинной группы

$$\text{Aff}(E) = \{\Phi: E \rightarrow E \mid \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \vec{a}, \quad A \in GL(E) \quad \vec{a} \in E\}.$$

Из определения тотчас следует, что  $\Phi(\vec{0}) = A(\vec{0}) + \vec{a} = \vec{a}$ .

Таким образом, элемент  $\vec{0}$  может переводиться элементами аффинной группы  $\text{Aff}(E)$  в произвольный элемент  $\vec{a} \in E$ , что более отвечает реальностям физического мира.

Проверим, что  $\text{Aff}(E)$  действительно является группой. Если  $\Psi(\vec{x}) = B(\vec{x}) + \vec{b}$ , то

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\vec{x}) &= \Psi(\Phi(\vec{x})) = \Psi(A(\vec{x}) + \vec{a}) = B(A(\vec{x}) + \vec{a}) + \vec{b} = \\ &= B(A(\vec{x})) + B(\vec{a}) + \vec{b} = C(\vec{x}) + \vec{c}, \end{aligned}$$

где  $C = BA \in GL(E)$  – произведение линейных операторов  $A, B \in GL(E)$ ,  $\vec{c} = B(\vec{a}) + \vec{b} \in E$  – фиксированный вектор.

Поэтому  $\Psi \circ \Phi \in \text{Aff}(E)$ .

С другой стороны, если  $\Psi$  – обратный элемент для  $\Phi$ , то мы

имеем  $\forall \vec{x} \in E \quad \Psi \circ \Phi(\vec{x}) = \vec{x}$ .

Поэтому  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) + \mathcal{B}(\vec{a}) + \vec{b} = \vec{x}$  и, следовательно,  $\forall \vec{x} \in E$   
 $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) = \vec{x}$ ,  $\mathcal{B}(\vec{a}) + \vec{b} = \vec{0}$ . Значит,  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ ,  $\vec{b} = -\mathcal{A}^{-1}(\vec{a})$ , поэтому

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi^{-1}(\vec{x}) = \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}) - \mathcal{A}^{-1}(\vec{a}) = \mathcal{A}^{-1}(\vec{x} - \vec{a}).$$

**Теорема.** Группа  $\text{Aff}(E)$  содержит в качестве нормальной подгруппы группу параллельных переносов

$$\text{Transl}(E) = \{T \in \text{Aff}(E) \mid \forall \vec{x} \in E \quad T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t} \xrightarrow{\sim} E,$$

причём

$$\text{Aff}(E) / \text{Transl}(E) \xrightarrow{\sim} \text{GL}(E).$$

*Доказательство.*

Рассмотрим каноническое отображение

$$f : \text{Aff}(E) \rightarrow \text{GL}(E),$$

$$\Phi \mapsto \mathcal{A}.$$

Проверим, что  $f$  – морфизм групп (т.е. что  $f(\Psi \circ \Phi) = f(\Psi) \circ f(\Phi) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ ).

Действительно, мы уже знаем, что

$$\Psi \circ \Phi(\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) + \mathcal{B}(\vec{a}) + \vec{b}.$$

Поэтому

$$f(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = f(\Psi) \circ f(\Phi).$$

С другой стороны, ядро  $f$  равно

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{\Phi \in \text{Aff}(E) \mid \mathcal{A} = 1\} = \\ &= \{\Phi \in \text{Aff}(E) \mid \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}\} = \\ &= \text{Transl}(E) \xrightarrow{\sim} E \end{aligned}$$

и является нормальной подгруппой в  $\text{Aff}(E)$  (согласно общей теореме из теории групп, ядра морфизмов являются нормальными подгруппами); кроме того, согласно общей теореме из теории групп фактор по ядру изоморфен образу, т.е.

$$\text{Aff}(E) / \text{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} f(\text{Aff}(E)) = \text{GL}(E),$$

что и требовалось доказать.

*Теорема доказана.*

**Определение.** Элементы группы  $\text{Aff}(E)$  называются аффинными морфизмами.

Очевидно, любой аффинный морфизм  $\Phi: E \rightarrow E$  является композицией линейного морфизма  $\mathcal{A}: E \rightarrow E$  и параллельного переноса  $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ .

## 22. Движения (изометрии) евклидова пространства

**Определение.** Пусть  $E$  – евклидово пространство (конечномерное линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , снабженное скалярным произведением). Тогда  $E$  имеет структуру метрического пространства с метрикой  $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ . Движением (изометрией) пространства  $E$  называется любое отображение  $\Phi: E \rightarrow E$ , сохраняющее расстояние, т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}).$$

В этом определении движения не предполагается, что  $\Phi$  – аффинное отображение, но на самом деле  $\Phi$  – аффинное.

**Теорема.** Отображение  $\Phi: E \rightarrow E$  является движением  $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$ , где  $\mathcal{A} \in \text{O}(E)$  – ортогональный оператор. Если, кроме того,  $\mathcal{A} \in \text{SO}(E)$  (другими словами,  $\mathcal{A}$  сохраняет ориентацию), то  $\Phi$  называется собственным движением.

*Доказательство.*

Предположим, что

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a},$$

где  $\mathcal{A} \in \text{O}(E)$  – ортогональный оператор.

Поскольку  $\mathcal{A}$  сохраняет длины векторов, то

$$\begin{aligned} \rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) &= \rho(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}, \mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a}) = \\ &= \|(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}) - (\mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a})\| = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

поэтому  $\Phi$  – изометрия.

Предположим теперь, что  $\Phi: E \rightarrow E$  – произвольная изометрия. Пусть  $\vec{a} = \Phi(\vec{0})$  и  $T_{\vec{a}}: E \rightarrow E$  – параллельный перенос на вектор  $\vec{a}$ ,

определенный формулой  $T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ .

Тогда  $\mathcal{A} = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi$  является изометрией (потому что композиция двух изометрий является изометрией). Очевидно,  $T_{\vec{a}}(\vec{0}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ , поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1}(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Следовательно,  $\Phi = T_{\vec{a}} \circ \mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$ , т.е. любая изометрия является произведением изометрии  $\mathcal{A}$ , оставляющей неподвижной точку  $\vec{0}$ , и сдвига  $T_{\vec{a}}$ . Осталось проверить, что  $\mathcal{A}$  — линейный ортогональный оператор.

Поскольку  $\mathcal{A}$  — изометрия, то

$$\|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| = \rho(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Полагая в этом соотношении  $\vec{y} = \vec{0}$ , получим:

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

(другими словами,  $\mathcal{A}$  сохраняет длины векторов).

Проверим, что  $\mathcal{A}$  сохраняет скалярное произведение: действительно,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 &= (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = (\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\vec{y}\|^2, \end{aligned}$$

поэтому

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})).$$

Осталось проверить, что  $\mathcal{A}$  — линейный оператор. Для этого рассмотрим вектор  $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} 0 &= \|\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \|\vec{z}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2(\vec{z}, \vec{x}) - 2(\vec{z}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{z})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{x})) - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{y})) + 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \\ &= (\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) = \|\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{0}$  и  $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{z}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ .

Аналогично доказывается, что  $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$ .

*Теорема доказана.*

### 23. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства

Изометрии постоянно встречаются в геометрии и механике твердого тела, поэтому мы рассмотрим классификацию изометрий евклидовых пространств малых размерностей.

1) Пусть  $E = \mathbb{R}$  – аффинная прямая. Любая изометрия  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид

$$\Phi(x) = \varepsilon x + a,$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ .

Действительно, любой ортогональный оператор  $\mathcal{A}$  на  $\mathbb{R}$  сохраняет скалярное произведение и является гомотетией с коэффициентом  $\varepsilon$ , поэтому из соотношения  $\mathcal{A}(x)\mathcal{A}(x) = x^2$  следует, что  $\varepsilon x \varepsilon x = \varepsilon^2 x^2 = x^2$  и  $\varepsilon^2 = 1$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ .

Если  $\varepsilon = 1$ , то  $\Phi(x) = x + a$ , и поэтому  $\Phi$  – сдвиг (параллельный перенос прямой). Если, кроме того,  $a \neq 0$ , то  $\Phi$  не имеет неподвижных точек.

Если  $\varepsilon = -1$ , то  $\Phi(x) = -x + a$ . Неподвижная точка отображения  $\Phi$  находится из уравнения

$$x_0 = \Phi(x_0) = -x_0 + a.$$

Это точка  $x_0 = a/2$ .

Очевидно,

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(x) - a/2 = -(x - a/2),$$

поэтому  $\Phi$  – отражение прямой относительно неподвижной точки  $a/2$  (оно не сохраняет ориентацию):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & \Phi(x) & & a/2 & & x \\ \cdot & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & \cdot \end{array}$$

2) Пусть  $E$  – евклидова плоскость,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – ортонормированный базис  $E$ . Тогда  $\Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$ , где  $\mathcal{A}$  – поворот на угол  $\varphi$  (если  $\mathcal{A}$  сохраняет ориентацию) или  $\mathcal{A}$  – ортогональный оператор с определителем  $-1$ .

Предположим сначала, что  $\mathcal{A}$  имеет ненулевой собственный вектор. Можно считать, что  $\vec{e}_1$  является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}$  с собственным числом  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ . Поскольку оператор  $\mathcal{A}$  ортогональный, то

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_1)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1,$$

поэтому

$$(\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_1 \vec{e}_1) = \lambda_1^2 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$$

и, следовательно,  $\lambda_1 = \pm 1$ . С другой стороны,

$$0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)) = (\lambda_1 \vec{e}_1, \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) \perp \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_2.$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , то  $\forall \vec{x} \in E \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x}$  и  $\Phi$  – параллельный перенос на вектор  $\vec{a}$ .

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , то  $\forall \vec{x} \in E \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = -\vec{x}$  и  $\Phi(\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{a}$ .

Неподвижная точка отображения  $\Phi$  находится из уравнения

$$\vec{x}_0 = \Phi(\vec{x}_0) = -\vec{x}_0 + \vec{a}.$$

Это точка  $\vec{x}_0 = \vec{a}/2$ . Очевидно,

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) - \vec{a}/2 = -(\vec{x} - \vec{a}/2),$$

поэтому  $\Phi$  – отражение плоскости относительно неподвижной точки  $\vec{a}/2$  (оно сохраняет ориентацию). Легко видеть, что в этом случае мы имеем поворот плоскости  $E$  вокруг неподвижной точки  $\vec{a}/2$  на угол  $\pi$ .

Наконец, можно считать, что  $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ . В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2,$$

$$\Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = (x_1 + a_1) \vec{e}_1 + (-x_2 + a_2) \vec{e}_2.$$

Очевидно,  $\Phi$  является композицией отражения относительно оси, проходящей через точку  $(0, a_2/2)$  параллельно вектору  $\vec{e}_1$ , и сдвига на вектор  $a_1 \vec{e}_1$ .

Предположим теперь, что  $\mathcal{A}$  не имеет вещественных собственных векторов. Тогда комплексные собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  связаны соотношениями  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  (потому что  $\lambda_1$  является корнем ха-

рактистического уравнения

$$\lambda^2 - \text{Tr} \mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0$$

с вещественными коэффициентами и, следовательно,  $\bar{\lambda}_1$  также является корнем характеристического уравнения),

$$\{\pm 1\} \ni \det \mathcal{A} = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 > 0,$$

поэтому  $\det \mathcal{A} = 1$  и, следовательно,  $\mathcal{A}$  сохраняет ориентацию (т.е. является поворотом на угол  $\varphi \neq 0, \neq \pi$ ). В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2,$$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2,$$

поэтому

$$\Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2.$$

Неподвижная точка  $(x_1^0, x_2^0)$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} \Phi(x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2) &= \\ &= x_1^0 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2^0 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \\ &+ a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2, \end{aligned}$$

которое имеет единственное решение по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1^0 (\cos \varphi - 1) - x_2^0 \sin \varphi + a_1 = 0 \\ x_1^0 \sin \varphi + x_2^0 (\cos \varphi - 1) + a_2 = 0 \end{cases},$$

потому что определитель

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1 + \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos \varphi \neq 0.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + (x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2)) &= \\ &= (x_1 + x_1^0) (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + (x_2 + x_2^0) (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \\ &= x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \\ &+ x_1^0 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2^0 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \\ &= x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + (x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

следует, что  $\Phi$  — это поворот плоскости на угол  $\varphi$  вокруг неподвижной точки  $(x_1^0, x_2^0)$ .

В результате доказана следующая теорема:

**Теорема.** Любая изометрия евклидовой плоскости, сохраняющая ориентацию, является параллельным переносом или вращением вокруг неподвижной точки. Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой.

3) Изометрии 3-мерного евклидова пространства допускают следующее описание:

**Теорема.** Любая изометрия 3-мерного евклидова пространства, сохраняющая ориентацию, является винтовой, т.е. является композицией параллельного переноса вдоль некоторой прямой и вращения вокруг этой же прямой (винтовая изометрия включает как чистый параллельный перенос, так и чистое вращение). Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный той же плоскости, либо является композицией отражения относительно некоторой плоскости  $P$  и вращения на угол  $\varphi$  вокруг некоторой прямой  $L$ , перпендикулярной плоскости  $P$ .

**Следствие (теорема Эйлера).** Любое перемещение твердого тела с одной закрепленной точкой является вращением вокруг некоторой оси, проходящей через закрепленную точку.

## 24. Аффинная классификация кривых второго порядка

Две фигуры  $F_1$  и  $F_2$  в пространстве  $E$  называются аффинно эквивалентными  $\Leftrightarrow \exists g \in \text{Aff}(E) \ g(F_1) = F_2$ .

**Теорема.** Любая кривая второго порядка на плоскости аффинно эквивалентна одному из следующих объектов:

1) окружность

$$x^2 + y^2 = 1;$$

2) мнимая окружность

$$x^2 + y^2 = -1;$$

3) гипербола

$$x^2 - y^2 = 1;$$

4) парабола

$$y^2 = 2x;$$

5) пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых

$$x^2 + y^2 = 0;$$

6) пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке

$$x^2 - y^2 = 0;$$

7) пара параллельных вещественных прямых

$$x^2 = 1;$$

8) пара параллельных мнимых прямых

$$x^2 = -1;$$

9) пара совпадающих вещественных прямых

$$x^2 = 0.$$

*Доказательство.*

Из метрической классификации кривых 2-го порядка известно, что композиция ортогонального линейного оператора и параллельного переноса приводит уравнение кривой к одному из следующих типов:

1') эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

2') мнимый эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

3') гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

4') парабола

$$y^2 = 2px;$$

5') пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

6') пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

7') пара параллельных вещественных прямых

$$\frac{x^2}{a^2} = 1;$$

8') пара параллельных мнимых прямых

$$\frac{x^2}{a^2} = -1;$$

9') пара совпадающих вещественных прямых

$$x^2 = 0.$$

Замена координат

$$x = ax', \quad y = by'$$

отвечает некоторому аффинному линейному оператору и приводит уравнение 1') – 3'), 5') – 8') к соответствующему уравнению 1) – 3), 5) – 8).

Наконец, аффинная замена

$$x' = px, \quad y' = y$$

приводит уравнение 4') к виду 4).

Очевидно, эллипс аффинно неэквивалентен кривым 2) – 8), так как он является ограниченным замкнутым 1-мерным множеством (и это свойство сохраняется при аффинных морфизмах), в отличие от кривых 2) – 9), множество вещественных точек которых либо пусто (2,8), либо неограничено (3,4,6,7,9), либо нульмерно (5).

Аналогично проверяется неэквивалентность всех других классов. Например, гипербола состоит из двух ветвей, и поэтому неэквивалентна параболе. Наконец, надо учесть, что параллельность прямых сохраняется при аффинных морфизмах.

## 25. Историческая справка

Эллипс, гипербола и парабола играют очень важную роль в математике и её приложениях.

Эллипс, гипербола и парабола, как «конические сечения», появились ещё у греческих математиков IV века до н.э. Решающий вклад в их изучение сделал Апполоний Пергский (конец III века до н.э.), ему и принадлежат их названия.

Апполоний известен прежде всего, как «Великий геометр». Его работа по коническим сечениям заложила основу для многочисленных разработок в математике, астрономии и физике.

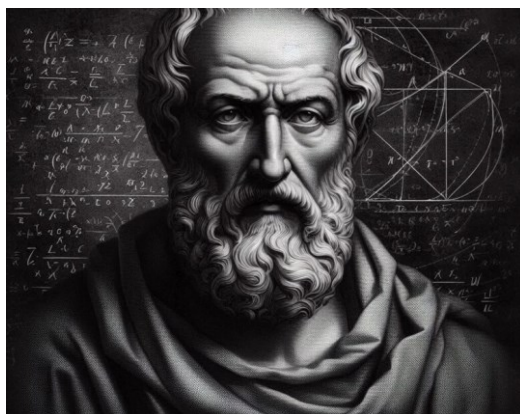


Рис. 12. Апполоний Пергский

Окунёмся в историю и вспомним знаменитых математиков, которые оказали огромное влияние на развитие математики своего времени и сформировали базу для последующих математических исследований.

Никколо Тарталья (1499 – 13 декабря 1557) – знаменитый итальянский математик, инженер фортификационных сооружений, геодезист. Его имя неразрывно связано с разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах.

Никколо родился в городе Брешиа. Жил во времена так называемых Итальянских войн. Эти войны вели между собой Франция и Испания за право владеть Италией. Его семья была очень бедной. Отец Микеле Фонтана старался делать всё возможное, чтобы обеспечить

жену, дочь и двух сыновей. Он занимался доставкой грузов и почты в близлежащие города. Никколо посещал школу. В 1506 году погибает его отец. Семья попадает в крайнюю нищету. Перебиваясь с крошки на крошку, речь уже не шла о его образовании.



Рис.13. Никколо Тарталья

В жизни Никколо в 1512 году происходит ещё одно трагическое событие. Город, в котором он живёт захватили французские войска. Жители города пытались укрыться от кровавой бойни, устроенной солдатами, в местном соборе. Но стены храма их не спасли. Мальчик получил серьёзное ранение. Французский солдат рассёк Никколо нижнюю челюсть, язык, губу и нёбо, повредив гортань. Из-за этого у ребёнка возникли проблемы с речью, он начал заикаться. Поэтому товарищи прозвали его заикой (с итальянского *tartaglia*). Это прозвище стало его фамилией. Чтобы скрыть шрамы, Никколо перестал бриться, отрастил бороду. В 14 лет мать отдала Никколо публичному писцу на обучение грамоте. Никколо Тарталья проучился всего 15 дней, освоив алфавит до буквы "к".

Тарталья так написал в одной из своих книг: «С тех пор я учился сам, и у меня не было другого наставника, кроме спутника бедности – предприимчивости». Обладая большой настойчивостью и безграничным терпением, писать и читать он научился сам. Изучил латинский и греческий языки. Но его страстью была математика. Никколо изучил математику так, что сдал экзамен на звание "маги-

стра абака" (учителя арифметики) и стал преподавать в частном коммерческом лице.

В 1517 году Никколо Тарталья переезжает в Верону. За мизерное вознаграждение он читал лекции по геометрии, арифметике и механике. Кроме этого, консультировал по разным вопросам математики и техники «мастеров, купцов, артиллеристов и архитекторов».

В 1531 году Никколо нашёл «в руках продавца сосисок в Вероне в 1531 году» (*in mano di un salzizaro в Вероне, l'anno 1531*, по его словам) работы Архимеда, и это дало новый толчок в развитии его математических способностей.

В 1534 году Тарталья переехал в Венецию.

Учеником Тартальи был другой выдающийся учёный эпохи Возрождения – Джамбатиста Бенедетти. Бенедетти – итальянский механик, математик, астроном, теоретик музыки, который был одним из предшественников Галилея в построении классической механики.

В те времена было обычным делом проведение научных поединков и турниров. На них учёные состязались между собой в том, кто быстрее и больше решит задач, которые предлагал противник. Победитель получал всё: деньги, славу, почётную и хорошо оплачиваемую должность.

В конце 1534 года Тарталья получил вызов на такое состязание от Антонио Фиоре – ученика известного профессора математики Болонского университета Сципиона дель Ферро. Фиоре владел секретом решения кубического уравнения, который ему сообщил его учитель дель Ферро. Никколо узнал об этом. Тарталья сел за письменный стол и за несколько дней до диспута нашёл способ решения уравнения третьей степени. «Я применил всё рвение, прилежание и искусство, чтобы найти правило этих уравнений, и это удалось за десять дней до срока... благодаря счастливой судьбе», – вспоминал позже Тарталья.

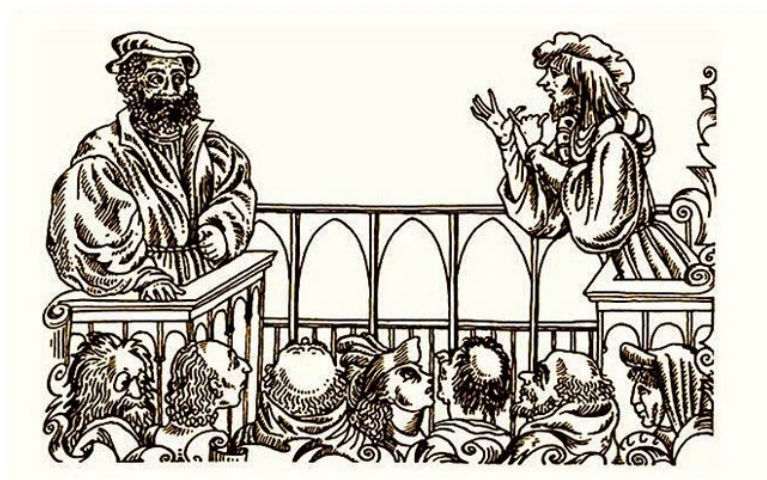


Рис. 14

Поединок состоялся 12 февраля 1535 года. Каждому из состязающихся надо было решить по 30 задач. За два часа Тарталья справился со всеми задачами, которые предложил ему Фиоре. Фиоре же не решил ни одной задачи противника. Победа была полной. Фиоре не мог поверить происходящему и обвинил Тарталья в краже формул, но доказать ничего не смог. К Тарталья пришли слава и почёт.

Неоднократно обсуждался вопрос о том, действительно ли Тарталья независимо открыл метод дель Ферро. Высказывалось предположение, что Тарталья каким-то образом получил доступ к записям дель Ферро. В качестве косвенных доказательств этой гипотезы историки ссылались на то, что других серьёзных математических достижений у Тарталья не было.

Историк науки Мориц Кантор считает, что у Тарталья было слишком мало времени для решения проблемы, над которой лучшие умы бились на протяжении двух тысячелетий. Кроме того, решения Тарталья и дель Ферро похожи как две капли воды.

В настоящее время большинство ученых сходится на том, что первым решение кубического уравнения нашёл дель Ферро. Фиоре узнал его от своего учителя. Тарталья переоткрыл формулу дель Ферро (такое бывает в науке). Кардано же дал полную и исчерпывающую теорию решения любого уравнения третьей степени.



Рис. 15. Джироламо Кардано

Джироламо Кардано был одновременно математиком и механиком, врачом и алхимиком, хиромантом и личным астрологом римского папы. Кардано изобрёл карданов подвес, карданов вал и кодовый замок.

Он занимался составлением большой подробной книги по математике и назвал её он «Ars Magna», что в переводе означает «Великое искусство». Он собирался включить в эту книгу все новейшие, для того времени, математические достижения.

Джироламо Кардано обратился с просьбой к Тарталье сообщить ему алгоритм решения алгебраического уравнения третьей степени. Он восхищается талантом Тартальи, льстит ему, называет его «величайшим математиком всех времён». Джироламо был готов на всё, лишь бы тот раскрыл заветную формулу. Много раз он просил Тарталью показать ему формулы, позволяющие находить корни кубического уравнения, и каждый раз получал отказ.

Тарталья был невысокого мнения об умственных способностях Кардано. Он всячески подтрунивал над Кардано, говоря, что открыл формулу всего за два дня, а Кардано никогда не сможет сделать это самостоятельно, ни за два года, ни за двадцать лет... Кардано, будучи хитрым, переносит все эти насмешки терпеливо и с улыбкой. Ведь для него главное узнать формулу, всё остальное совершенно неважно!

Наконец, 25 марта 1539 года Кардано улыбается удача. Тарталья в конце концов соглашается раскрыть тайну. Однако он прячет фор-

мулу в форме зашифрованного стихотворения из 25 строк. Это стихотворение он передаёт Кардано.

Кардано был человеком неглупым и с широким кругозором, но расшифровать стихотворение Тартальи не сумел. Попробуйте поставить себя на его место, когда вместо вожденной математической формулы вы получаете листок с вот таким вот текстом:

Quando chel cubo con le cose appresso  
Se agguaglia à qualche numero discreto  
Troman dui altri differenti in esso.  
Dapoi terrai questo per consueto  
Che'l lor prodotto sempre sta eguale  
Al terzo cubo delle cose neto,  
El residuo poi suo generale  
Delli lor lati cubi ben sottratti  
Varra la tua cosa principale.  
In el secondo de cotesti atti  
Quando che'l cubo restasse lui solo  
Tu osseruarai quest' altri coi cose in stolo  
Del numer farai due tal part' à uoi  
Che l'una in l'altra si produca schietto  
El terzo cubo delle  
Delle qual poi, per commun precetto  
Torrai li lati cubi insieme gionti  
Et cotal somma sarà il tuo concetto.  
El terzo poi de questi nostri conti  
Se solue col secondo se ben guardi  
Che per natura son quasi congiunti.  
Questi trouai, & non con passi tardi  
Nel mille cinquecentè, quatroe trenta  
Con fondamenti ben sald'è gagliardi  
Nella città dal mar' intorno centa.

В переводе это звучит так:

*Когда куб и вещь совместно  
Равняются числу некоему целому,  
Найди два других, с разностью в первое.*

*Затем возьми себе в привычку,  
Что произведение их равняется  
Чистой трети куба от вещи.  
То, что осталось, как правило,  
Из кубических корней их вычтенных,  
Будет равняться твоей главной вещи.  
Во втором же из этих действий,  
Когда куб остаётся один,  
Увидишь ты другие соглашения.  
Сразу раздели число на две части,  
Так, чтоб одна, на другую помноженная,  
Ясно давала треть куба от вещи.  
Тогда из двух этих вещей, как привычное правило,  
Возьми кубические корни, сложенные вместе,  
Сумма эта и будет твоей мыслью.  
Третье же из наших вычислений  
Решается, если постараться, как и второе,  
Поскольку природа их почти одна и та же.  
Узнал я эти вещи не запоздалыми шагами  
В году одна тысяча пятьсот тридцать и четыре,  
На основаниях прочных и крепких,  
В городе, опоясанном морем.*

Сказать, что Кардано был зол, это значит ничего не сказать. Он был в ярости. Единственное, что ему было понятно из текста – это 1534 год и «город, опоясанный морем», то есть Венеция. Но всё остальное? Что означают все эти загадки? Для того чтобы решить их, был нужен математик не менее талантливый, чем сам Тарталья... И, по странному совпадению, такой математик у Кардано был!

В доме у Кардано служил слуга по имени Люка Феррари, паренёк ленивый и нерадивый. Однажды он сбежал домой. Кардано остался без слуги. Он написал отцу Феррари письмо, в котором просил вернуть парня на службу. Однако отец вместо сына прислал к Кардано тринадцатилетнего племянника Лодовико. Сперва Кардано очень рассердился. Почему ему вместо здорового молодого парня

присылают сущего мальчишку? Вскоре он обратил внимание на то, что мальчишка не по годам сообразителен. Вместо того чтобы заставлять Лодовико чистить лошадей и выносить помои, Кардано учит паренька математике. Мальчик делает поразительные успехи! В итоге Лодовико Феррари становится личным секретарём и помощником Кардано.

Ему Кардано поручает разобраться с загадочным стихотворением Тартальи. Всего лишь за два дня Феррари разгадывает головоломку и с гордостью демонстрирует Кардано готовую формулу.

Наконец-то Кардано может торжествовать! Он приходит к Тарталье и в едких выражениях сообщает, что разгадал формулу. Сказать, что Тарталья взбешён – это ничего не сказать. Он выхватывает кинжал (не забываем, в те времена математики ходили с мечами и кинжалами) и под страхом смерти заставляет Кардано принести клятву на Библии, что тот никогда не опубликует формулу в своей книге. Кардано вынужден согласиться...

В 1540 году выходит книга Кардано «Великое искусство». Однако формулы для решения кубических уравнений там нет. Кардано вынужден скрепя сердце держать слово. Ему известна формула, но он не может её опубликовать! Все его помыслы только об одном – чтобы обойти клятву и отомстить Тарталье...

Однажды в дверь дома Кардано стучит незнакомец, который тоже затаил на Тарталью обиду. Это был тот самый Антонио Мария дель Фиоре, опозоренный на математическом турнире в 1535 году.

Фиоре клянётся, что формулу знал ещё покойный профессор Болонского университета Сципион дель Ферро. И если эта формула есть в записях профессора, то Кардано может опубликовать формулу по этим записям. Теперь клятва, данная Тарталье, не имеет значения!

В 1545 году выходит второе издание книги «Великое искусство», в котором решению кубических уравнений посвящена целая глава. В предисловии к главе Кардано упомянул и Тарталью, и Фиоре – однако написал, что метод был изначально придуман «почтенным Сципионом дель Ферро». Не подкопаешься!

В предисловии к своей книге Кардано написал: «В наше время Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа... Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал её мне».

Тарталья публикует гневные письма, в которых называет Кардано вруном, бездарем и клятвопреступником. Он отправляет Кардано вызов на математический поединок. Тарталья уверен, что победит и посрамит своего соперника. Но... Не таков был Кардано! Вместо себя он отправил на поединок «своего юного ученика» Лодовико Феррари.

К тому времени Лодовико Феррари усовершенствовал формулу Тартальи и дель Ферро и самостоятельно открыл способ решения уравнений четвёртой степени, ещё более сложных. Тарталья был, естественно, талантлив, но Феррари был одарён ничуть не меньше.

10 августа 1548 года состоялся долгожданный турнир в Милане. Главным судьёй был губернатор города дон Ферранте ди Гонзага. Весь город болел за Феррари. Поддержать Тарталью приехал только его младший брат. В первый же день стало ясно, что Феррари решает задачи намного лучше. Косноязычному Тарталье было трудно противостоять молодому блестящему Феррари, и он потерпел поражение. Бесславное для Тартальи завершение диспута уронило его научный авторитет и сильно повредило дальнейшей карьере. Ночью опозоренный Тарталья бежал из Милана...

На юного Феррари посыпались предложения службы, одно привлекательнее другого – его приглашал в учителя математики для своего сына сам император. В восемнадцать лет Феррари стал профессором Миланского университета.

До самой своей смерти в 1557 году Тарталья пытался «восстановить справедливость» – но это ему так и не удалось.

В конце жизненного пути Кардано написал автобиографическую книгу "О моей жизни", в которой есть такие строчки: «Сознаюсь, что

в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо». Возможно, его всё-таки мучила совесть.

Но нас на самом деле интересует тот факт, как же связано имя великого математика Тарталья с кривыми второго порядка. В своём первом сочинении «Nuova scienza» (Новая наука), Тарталья впервые рассматривает вопрос о траектории выпущенного снаряда.



Рис. 16

Он утверждает, что траектория эта на всём её протяжении есть кривая линия, а именно парабола. А ведь до него учили, что траектория снаряда состоит из двух прямых, соединённых кривой линией. Тарталья показывает, что наибольшая дальность полёта соответствует углу в  $45^\circ$ .

Это открытие дало большие преимущества его родной Венеции в её нескончаемой войне с турками.

Последние годы Тарталья стал заниматься переводами Архимеда и Евклида на итальянский язык.

Другим выдающимся учёным, который имел непосредственное отношение к кривым второго порядка был Иоганн Кеплер.

В начале XVIII века он доказал, что по эллипсам движутся "материальные точки" в гравитационном поле: планеты, астероиды, кометы. Некоторые кометы, так называемые внесистемные, движутся по параболам или гиперболам, они приходят из бесконечности и уходят в бесконечность.

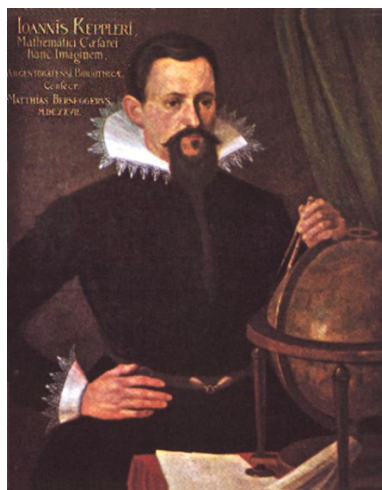


Рис. 17. Иоганн Кеплер

И. Кеплер родился 27 декабря 1571 года в городе Вейльдер-Штадт на юге Германии в бедной протестантской семье. В 1577 году юному Иоганну удалось увидеть полёт кометы, а затем лунное затмение 1580 года. С тех пор у мальчика появился сильный интерес к астрономии и другим наукам.

В 1589 году Кеплер окончил школу при монастыре Маульбронн, обнаружив выдающиеся способности. Городские власти назначили ему стипендию для помощи в дальнейшем обучении.

В 1591 году Кеплер поступает в университет в Тюбингене – на факультет искусств, а затем на теологический факультет. Здесь он знакомится с гелиоцентрической системой Николая Коперника и признаёт его правоту. Используя идею Коперника, а также результаты наблюдений астронома Тихо Браге, Кеплер установил законы движения планет вокруг Солнца. Кеплер в ходе своих исследований пришёл к выводу, что планеты обращаются не по окружностям, а по эллипсам. И. Кеплер составил планетные таблицы и выделил три основных закона движения планет:

- каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
- каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца;
- квадраты времени обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы расстояний между ними.

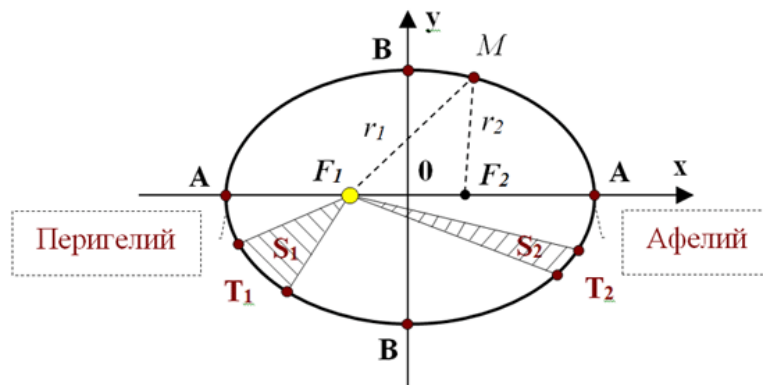


Рис. 18. Эллипс как орбита планет Солнечной системы  
(Солнце в фокусе  $F_1$  эллипса)

Кеплер изобрёл оптическую систему, применяемую в современных рефракторах-телескопах. Он впервые описал действие выпуклых и вогнутых линз, отразил зрачковые реакции на свет и дал правильное физическое объяснение зрительного действия. Телескоп Кеплера содержит объектив и окуляр – двояковыпуклые линзы. Свои идеи он изложил в труде «Диоптрика» (Dioptrice), который был издан в 1611 году. В рефракторе Кеплера в качестве окуляра выступала выпуклая линза, её передний фокус совмещался с задним фокусом линзы-объектива. Изображение при этом получается перевернутым, но в точке фокуса внутри трубы можно поместить измерительную сетку. В 1613 году Кристофом Штайнером был изготовлен первый телескоп по схеме Кеплера. Зеркало телескопа-рефлектора вытачивается как поверхность, полученная вращением параболы. Эта поверхность называется эллиптический параболоид.

Алгебраические свойства кривых второго порядка и их многомерных обобщений лежат в основе классификации линейных уравнений математической физики (эллиптические, гиперболические и параболические).

Интересный факт: «новое время» с его координатным методом не открыло никаких новых свойств эллипса, гиперболы и параболы, хотя этот метод существенно облегчил их изучение.

## 25. Каноническое уравнение эллипса

Расстояние между двумя точками  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  на плоскости вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (25.1)$$

Фиксируем точки  $F_1$  и  $F_2$  (**фокусы**).

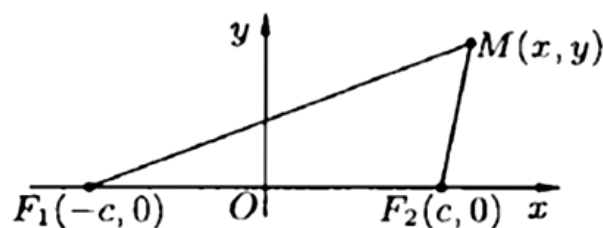


Рис. 19

**Определение 1.** Эллипсом с фокусами  $F_1$ ,  $F_2$  называется множество таких точек  $(x, y)$ , что сумма расстояний от точки  $(x, y)$  до фокусов равна постоянному числу:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Возьмём  $M(x, y)$ ,  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$ , где  $c \geq 0$  (рис. 19).

Тогда

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2 M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2,$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{c^2},$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Возведём обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 - xc)^2, \\ a^2((x-c)^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2, \\ a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2 &= a^4 - a^2c^2. \end{aligned}$$

Сгруппируем в левой части первое и третье слагаемые и вынесём общий множитель за скобки

$$\begin{aligned} x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^4 - a^2c^2, \\ x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

В нашем случае  $r_1 + r_2 = 2a > 2c$ , поэтому  $a > c$ , и можно разделить последнее из уравнений на  $a^2(a^2 - c^2)$ . Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Положим  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

**Определение 2.** Получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (25.2)$$

**Определение 3.** Точки  $A_1(a;0)$ ,  $A_2(-a;0)$ ,  $B_1(0;b)$ ,  $B_2(0;-b)$  называются **вершинами** эллипса (рис. 20).

**Определение 4.** Числа  $a$  и  $b$  называются **большой и малой полуосью** эллипса соответственно.

В частности, если  $a = b = r$ , то  $c = 0$ ,  $F_1 = F_2 = O(0,0)$ , и эллипс превращается в окружность  $x^2 + y^2 = r^2$  с центром в точке  $O(0,0)$  и радиусом  $r$ .

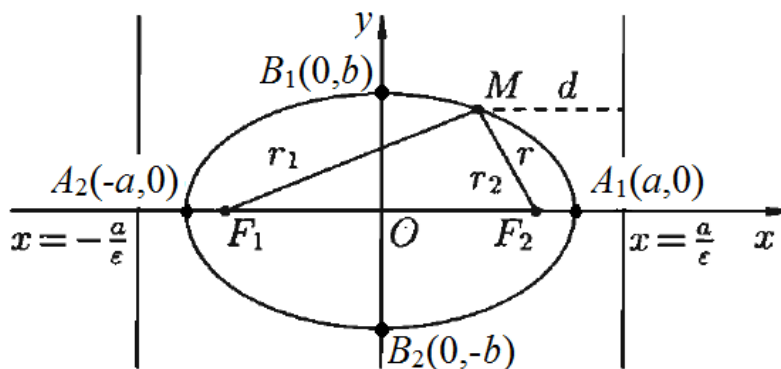


Рис. 20

**Определение 5.** В качестве характеристики формы эллипса пользуются отношением  $\frac{c}{a} = \varepsilon$ , которое называется **эксцентриситетом** эллипса ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплюснутым. В частности, если  $\varepsilon = 0$ , то эллипс превращается в окружность.

**Определение 6.** **Фокальные радиусы**  $r_1$  и  $r_2$  точки  $M(x, y)$  эллипса (расстояние от точки  $M$  до фокусов) вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x \text{ и } r_2 = a + \varepsilon x \quad (a \geq b) \quad (25.3)$$

или

$$r_1 = b - \varepsilon y \text{ и } r_2 = b + \varepsilon y \quad (b > a). \quad (25.4)$$

**Определение 7.** **Директрисами** эллипса называются прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (a \geq b) \text{ или } x = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad (b > a). \quad (25.5)$$

**Теорема.** Если  $r$  – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса,  $d$  – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение  $\frac{r}{d}$  есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:  $\frac{r}{d} = \varepsilon$ .

Взаимное расположение точки  $M(x, y)$  и эллипса определяется условиями:

- 1) если  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то точка  $M$  лежит на эллипсе;
- 2) если  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ , то точка  $M$  лежит вне эллипса;
- 3) если  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ , то точка  $M$  лежит внутри эллипса.

**Пример 1.** Составить уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны 5 и 3.

*Решение.*

Пусть  $a = 5$ ,  $b = 3$ . Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (25.2). Получим

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

*Ответ:*  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

**Пример 2.** Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая полуось равна 7.

*Решение.*

Расстояние между фокусами  $2c = 8 \Rightarrow c = 4$ .

Большая полуось  $a = 7$ .

Зная  $c$  и  $a$ , можем найти  $b^2$  по формуле

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (25.2). Получим

$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{33} = 1,$$

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$$

*Ответ:*  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$

**Пример 3.** Составить уравнение эллипса, если большая полуось равна 20 и эксцентриситет  $\varepsilon = 0,4$ .

*Решение.*

Большая полуось  $a = 20$ , эксцентриситет  $\varepsilon = 0,4$ .

Воспользуемся формулой  $\frac{c}{a} = \varepsilon$  и найдём  $c$ :

$$c = a\varepsilon = 20 \cdot 0,4 = 8.$$

Зная  $c$  и  $a$ , можем найти  $b^2$  по формуле

$$b^2 = a^2 - c^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (25.2). Получим

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{336} &= 1, \\ \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} &= 1.\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} = 1.$

**Пример 4.** Составить уравнение эллипса, если малая полуось равна 3 и эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Решение.*

Малая полуось  $b = 3$ , эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Для нахождения  $a$  воспользуемся формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 3^2}}{a},$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - 3^2}}{a}\right)^2,$$

$$\frac{2}{4} = \frac{a^2 - 9}{a^2},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a^2 - 9}{a^2},$$

$$a^2 = 2 \cdot (a^2 - 9),$$

$$a^2 = 2a^2 - 18,$$

$$a^2 = 18.$$

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

*Ответ:*  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$

**Пример 5.** Составить уравнение эллипса, если сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.

*Решение.*

По условию  $a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b,$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4.$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (8 - b)^2 - 4^2,$$

$$b^2 = 64 - 16b + b^2 - 16,$$

$$16b = 48,$$

$$b = 3.$$

$$a = 8 - 3 = 5$$

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

*Ответ:*  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

## 26. Каноническое уравнение гиперболы

**Определение 1.** Гиперболой с фокусами  $F_1$ ,  $F_2$  называется множество таких точек  $(x, y)$ , что модуль разности расстояний от точки  $(x, y)$  до фокусов равна постоянному числу:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (26.1)$$

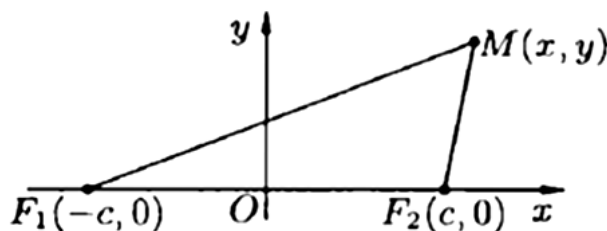


Рис. 21

Фиксируем точки  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$  – **фокусы**, где  $c \geq 0$  (рис. 21). Тогда

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2 M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad r_1 - r_2 = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведём обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{c^2} + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{c^2} + y^2,$$

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$xc = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2,$$

$$\begin{aligned} \left( \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 &= (xc - a^2)^2, \\ a^2((x-c)^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4, \\ a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4, \\ x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

В этом случае  $c > a$ , и можно разделить последнее из уравнений на  $a^2(c^2 - a^2)$ . Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Положим  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

**Определение 2.** Получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26.2)$$

Ось  $Ox$  проходит через фокусы, а ось  $Oy$  – через середину отрезка  $F_1F_2$ .

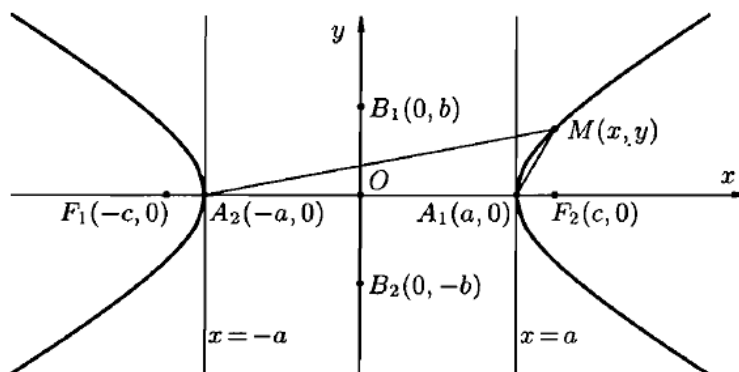


Рис. 22

Оси  $Ox$  и  $Oy$  – оси симметрии гиперболы,  
точка  $O(0,0)$  – центр симметрии гиперболы.

**Определение 3.** Точки  $A_1(a;0)$ ,  $A_2(-a;0)$ ,  $B_1(0;b)$ ,  $B_2(0;-b)$  называются вершинами гиперболы (рис. 23).

**Определение 4.** Отрезок  $A_1A_2 = 2a$  – действительной осью, число  $a$  – действительной полуосью гиперболы.

**Определение 5.** Отрезок  $B_1B_2 = 2b$  – мнимой осью, число  $b$  – мнимой полуосью гиперболы.

**Определение 6.** Прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$  называется **основным прямоугольником** гиперболы.

Так как  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$  или  $|x| \geq a$ , то точки гиперболы расположены справа от прямой  $x = a$  (**правая ветвь** гиперболы) и слева от прямой  $x = -a$  (**левая ветвь** гиперболы).

**Определение 7.** Эксцентриситетом гиперболы называется отношение

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1.$$

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем  $\varepsilon$  меньше, тем более вытянут её основной прямоугольник.

**Определение 8.** Кривая, определяемая уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

является гиперболой и называется **сопряжённой** к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У сопряжённой гиперболы:

$b$  – действительная полуось, расположенная на оси  $Oy$ ,

$a$  – мнимая полуось, расположенная на оси  $Ox$ ,

фокусы лежат на оси  $Oy$  и

$$\varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Сопряжённая гипербола изображена на рис. 23 пунктиром.

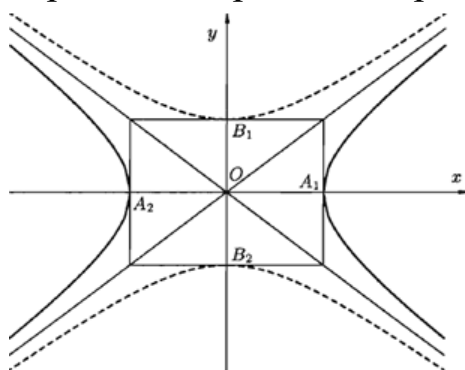


Рис. 23

**Определение 9.** Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ и } r_2 = \varepsilon x - a, \quad (26.3)$$

для точек левой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \text{ и } r_2 = -(\varepsilon x - a). \quad (26.4)$$

Для сопряжённой гиперболы:

$$r_1 = |b - \varepsilon y|, \quad r_2 = |b + \varepsilon y|. \quad (26.5)$$

**Определение 10.** Директрисами гиперболы называются прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  ( $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$  для сопряжённой гиперболы).

Правая директриса расположена между точками  $O$  и  $A_1$ , левая – между точками  $O$  и  $A_2$ .

Директрисы гиперболы имеют то же свойство  $\frac{r}{d} = \varepsilon$ , что и директрисы эллипса.

**Определение 11.** Асимптотами гиперболы являются прямые  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

Асимптоты проходят через вершины основного прямоугольника гиперболы (рис. 23).

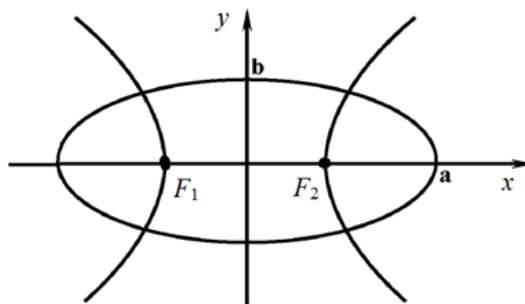
Асимптоты гипербол  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  совпадают.

В частности, гипербола называется **равносторонней**, если её полуоси равны, т.е.  $a = b$ . Её каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (26.6)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов, т.е.  $y = \pm x$ .

**Пример 1.** Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$  и имеющий фокусы в вершинах этого эллипса.



*Решение.*

Из уравнения эллипса следует, что вершинами эллипса являются точки  $(\pm 13; 0)$  и  $(0; \pm 12)$ , поэтому  $a = 13$ ,  $b = 12$  и, следовательно,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$$

поэтому  $c = 5$ .

По условию задачи вершины гиперболы совпадают с фокусами эллипса, т.е.  $a = c = 5$ , а её фокусы – с вершинами эллипса, т.е.  $c = a = 13$ .

Для гиперболы

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144,$$

поэтому  $b = 12$ .

Тогда уравнение гиперболы имеет вид  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ .

*Ответ:*  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ .

**Пример 2.** Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M(9; 8)$ , если асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x.$$

*Решение.*

Так как гипербола проходит через точку  $M(9; 8)$ , то её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{8^2}{b^2} = 1, \quad \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1.$$

Асимптоты гиперболы имеют уравнения  $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ , следовательно,  $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{\frac{8}{9}a^2} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{72}{a^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ a^2 = 9 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = 8 \\ a^2 = 9 \end{cases}.$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ .

Ответ:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ .

**Пример 3.** Угол между асимптотами гиперболы равен  $60^\circ$ . Вычислить эксцентриситет гиперболы.

*Решение.*

Уравнение асимптоты имеет вид  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

$$k = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ т.е. } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пусть  $b = \sqrt{3}$ ,  $a = 3$ .

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 9 + 3 = 12,$$

тогда  $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Эксцентриситет гиперболы вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

## 27. Каноническое уравнение параболы

Фиксируем прямую  $L$  (директрису) и точку  $F$  (фокус).

**Определение 1. Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

**Определение 2.** Расстояние от фокуса  $F$  до директрисы называется **параметром** параболы и обозначается через  $p$  ( $p > 0$ ).

Пусть  $r_1$  – расстояние от точки  $M(x, y)$  до директрисы,  $r_2$  – расстояние от точки  $M(x, y)$  до фокуса. По определению, уравнение параболы имеет вид  $r_1 = r_2$ .

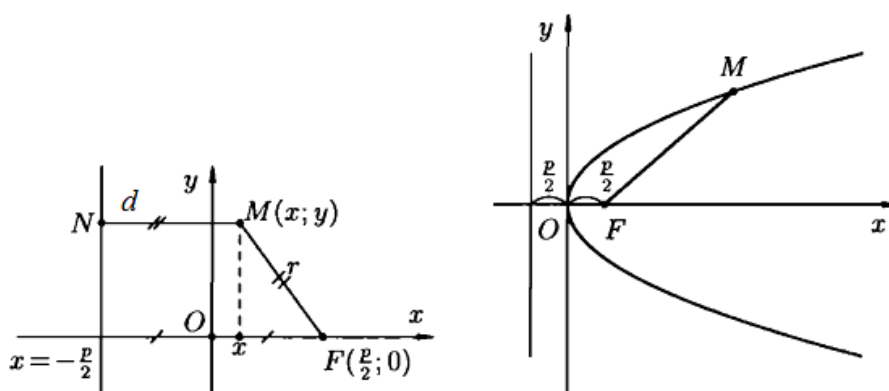


Рис. 24

Возьмем в качестве директрисы вертикальную прямую, проходящую через точку  $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ , и возьмем фокус  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  (рис. 24).

Тогда

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2, \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \\
x^2 + px + \frac{p^2}{4} &= x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2, \\
y^2 &= 2px
\end{aligned} \tag{27.1}$$

– каноническое уравнение параболы.

Ось  $Ox$  – ось симметрии параболы. Точка  $O(0,0)$  – вершина параболы.

**Определение 3.** Отрезок  $FM = r$  называется **фокальным радиусом точки  $M$**  (рис. 7), который вычисляется по формуле  $r = x + \frac{p}{2}$ ,  $r = d$ ,  $d$  – расстояние от точки  $M$  до директрисы (рис. 24).

**Определение 4.** Эксцентриситет параболы  $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$ .

Уравнения  $y^2 = -2px$ ,  $x^2 = 2py$ ,  $x^2 = -2py$ , ( $p > 0$ ) определяют параболы (рис. 25).

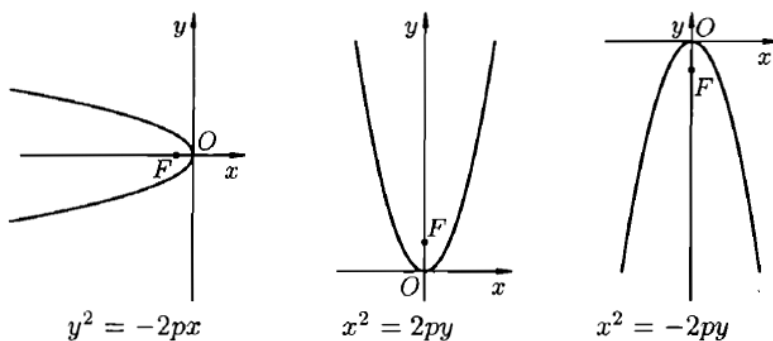


Рис. 25

**Пример 1.** Составить уравнение параболы, проходящей через точки  $O(0,0)$  и  $M(4,-1)$  и симметричной относительно оси  $Ox$ .

*Решение.*

Искомое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Подставляем в него координаты точки  $M$  и получаем

$$(-1)^2 = 2p \cdot 4$$

$$2p = \frac{1}{4}$$

$$\underline{y^2 = \frac{1}{4}x} \text{ — искомое уравнение параболы.}$$

$$\text{Ответ: } y^2 = \frac{1}{4}x.$$

**Пример 2.** Написать уравнение директрис параболы, проходящей через точки  $O(0,0)$ ,  $M(4,-1)$  и симметричной относительно оси  $Ox$ .

*Решение.*

Уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}, \text{ т.к. } p = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{16} \text{ — искомое уравнение директрисы.}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{16}.$$

**Пример 3.** Найти фокальный радиус вектор точки  $M$  (см. условия в примере 1).

*Решение.*

Фокальный радиус точки  $M$  вычисляем по формуле

$$\underline{r} = x + \frac{p}{2} = 4 + \frac{1}{16} = \frac{65}{16}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{65}{16}.$$

## 28. Понятие о плоскости Лобачевского

Напомним, что любое комплексное число  $z$  имеет вид  $z = x + iy$ , где  $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$  и  $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$  называются вещественной и мнимой частью  $z$ .

**Определение 1.** Пусть  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  — верхняя полуплоскость. Назовем "прямыми" в  $H$  лучи, перпендикулярные веще-

ственной оси  $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = y = 0\}$ , а также полуокружности, центры которых расположены на вещественной оси (такие полуокружности пересекаются с вещественной осью под прямым углом). Верхняя полуплоскость с такими "прямыми" называется плоскостью Лобачевского (или, более точно, моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского).

**Теорема.** Через любые две точки  $z_1 \neq z_2 \in H$  проходит единственная "прямая".

*Доказательство.*

Если  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) = a$ , то точки  $z_1, z_2$  лежат на одном вертикальном луче  $\operatorname{Re}(z) = a$  и не могут лежать на полуокружности с центром на вещественной оси  $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$  (потому что для любых точек  $z_1 \neq z_2$  на полуокружности выполнено соотношение  $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$ ). Следовательно, в этом случае существует единственная "прямая", проходящая через  $z_1$  и  $z_2$ .

Если  $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$ , то точки  $z_1, z_2$  не лежат на вертикальном луче. Существует единственная точка

$$a \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\},$$

для которой  $|z_1 - a| = |z_2 - a|$ , поэтому точка  $a$  является центром полуокружности, проходящей через точки  $z_1$  и  $z_2$ .

*Теорема доказана.*

Можно проверить, что все аксиомы обычной евклидовой геометрии (кроме 5-го постулата Евклида) выполнены на плоскости Лобачевского.

Напомним, что 5-й постулат Евклида утверждает существование и единственность прямой на евклидовой плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

На плоскости Лобачевского 5-й постулат Евклида не выполняется: через данную точку, не лежащую на "прямой"  $l$ , можно провести более одной "прямой", параллельной (т.е. не пересекающей)  $l$ .

На самом деле таких параллельных прямых бесконечно много.

Наша конструкция показывает, что 5-й постулат не является логическим следствием других аксиом евклидовой геометрии.

Хорошо известно, что 5-й постулат Евклида имеет следующую эквивалентную формулировку: сумма внутренних углов треугольника на евклидовой плоскости равна  $\pi$ .

**Теорема (без доказательства).** Сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского строго меньше  $\pi$  (угол в точке пересечения двух "прямых" по определению равен обычному углу между касательными в точке пересечения). Более того, сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского может быть сколь угодно малой.

**Определение 2.** Фиксируем вещественное положительное число  $a \neq 1$  и определим неевклидово расстояние между точками  $z_1, z_2 \in H$  формулой

$$\rho_L(z_1, z_2) = \log_a \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}.$$

Можно проверить, что неевклидовы окружности, т.е. множества точек, равноудаленных от одной точки в смысле неевклидова расстояния  $\rho_L$ , являются обычными окружностями на верхней полуплоскости, не пересекающими вещественную ось.

Отображение  $\Phi: H \rightarrow H$  называется изометрией плоскости Лобачевского  $\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in H \quad \rho_L(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) = \rho_L(z_1, z_2)$ .

**Теорема (без доказательства).** Любая изометрия  $\Phi: H \rightarrow H$  плоскости Лобачевского имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

или

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}\bar{z} + a_{12}}{a_{21}\bar{z} + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0.$$

## 29. Классификация поверхностей второго порядка в 3-мерном пространстве

В 3-мерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  рассмотрим поверхность 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ , в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = \\ = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2,$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3,$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^3 q_{ij}\vec{e}_i,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} - \text{ортогональная матрица перехода от базиса}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  к базису  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ .

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = \\ = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2 + q_{31}\vec{e}_3) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2 + q_{32}\vec{e}_3) + y_3(q_{13}\vec{e}_1 + q_{23}\vec{e}_2 + q_{33}\vec{e}_3).$$

Сравнивая коэффициенты при  $\vec{e}_j$  в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 \\ x_3 = q_{31}y_1 + q_{32}y_2 + q_{33}y_3. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение поверхности, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_0 = 0.$$

При этом  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ , потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что  $\lambda_1 > 0$ .

Предположим сначала, что  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_3 \neq 0$ . Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left( y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left( y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) + \\ & + \lambda_3 \left( y_3^2 + \frac{b_3}{\lambda_3} y_3 + \left( \frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 \right) + b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \lambda_3 \left( \frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 = 0; \\ & \lambda_1 \left( y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \\ & + \lambda_3 \left( y_3 + \frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \lambda_3 \left( \frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2}_{c_0} = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2 \\ y_3 + \frac{b_3}{2\lambda_3} = z_3. \end{cases}$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = -c_0.$$

1) Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 > 0$ , то положим  $a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{-c_0}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

(эллипсоид).

2) Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 < 0$ , то положим  $a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = -1$$

(мнимый эллипсоид).

3) Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 = 0$ , то положим  $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, b^2 = \frac{1}{\lambda_2}, c^2 = \frac{1}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(мнимый конус).

4) Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, -c_0 > 0$ , то положим  $a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

(однополостный гиперболоид).

5) Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, -c_0 < 0$ , то положим  $a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{-c_0}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = -1$$

(двуполостный гиперболоид).

б) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $-c_0 = 0$ , то положим  $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$ ,  $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$ ,  $c^2 = \frac{-1}{\lambda_3}$ . Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(конус).

Далее мы можем считать, что  $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ . Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left( y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left( y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) + \\ & + b_3 y_3 + b_0 - \lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = 0; \\ & \lambda_1 \left( y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \\ & + b_3 y_3 + b_0 - \underbrace{\lambda_1 \left( \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left( \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2}_{c_0} = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}.$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + b_3 z_3 = -c_0.$$

Если  $b_3 \neq 0$ , то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 + \frac{c_0}{b_3} = t_3 \end{cases},$$

и уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + b_3 t_3 = 0$$

Предположим сначала, что  $b_3 \neq 0$ .

7) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$ , то положим  $a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}$ ,  $b^2 = \frac{b_3}{\lambda_2}$ .

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$$

(эллиптический параболоид); случай  $b_3 < 0$  сводится к предыдущему заменой  $t_3$  на  $-t_3$  и не дает ничего нового.

8) Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $b_3 > 0$ , то положим  $a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}$ ,  $b^2 = \frac{-b_3}{\lambda_2}$ .

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$$

(гиперболический параболоид); случай  $b_3 < 0$  сводится к предыдущему заменой  $t_3$  на  $-t_3$  и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что  $b_3 = 0$  (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной  $t_3$  или  $\lambda_2 = 0$  (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной  $t_2$ )). В обоих случаях мы имеем дело с цилиндрами, основаниями которых служат кривые 2-го порядка. Так как кривые 2-го порядка классифицированы (существуют 9 типов), то каждый из этих типов дает соответствующий цилиндр.

Очевидно, цилиндры 2-го порядка задаются следующими каноническими уравнениями:

9) эллиптический цилиндр

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1;$$

10) мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1;$$

11) гиперболический цилиндр

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1;$$

12) параболический цилиндр

$$z_2^2 = 2pz_1;$$

13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых

$$\frac{z_1^2}{a^2} = 1$$

(пара параллельных плоскостей);

16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых

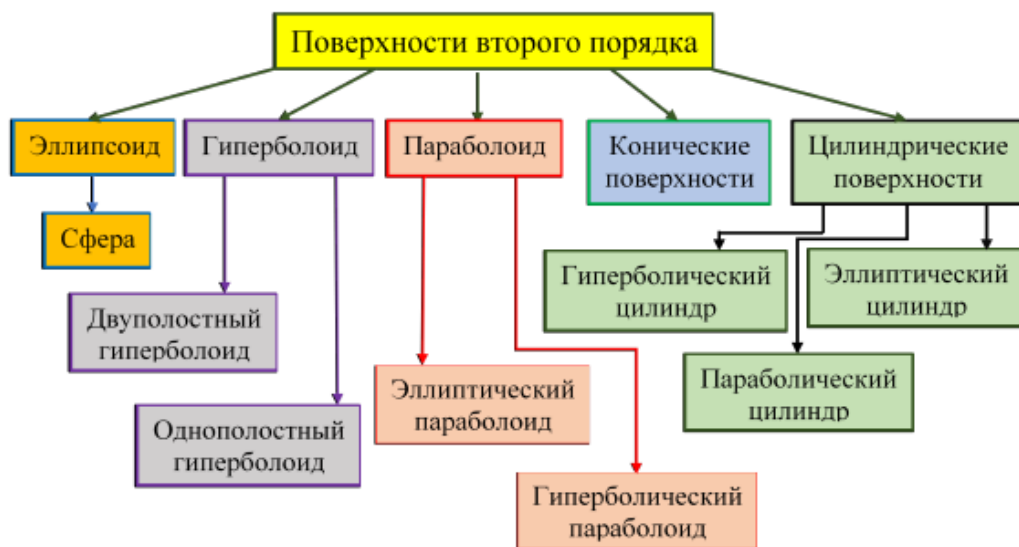
$$\frac{z_1^2}{a^2} = -1$$

(пара параллельных мнимых плоскостей);

17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых

$$z_1^2 = 0$$

(пара совпадающих плоскостей).



**Теорема.** Существуют 17 классов поверхностей 2-го порядка:

### 1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

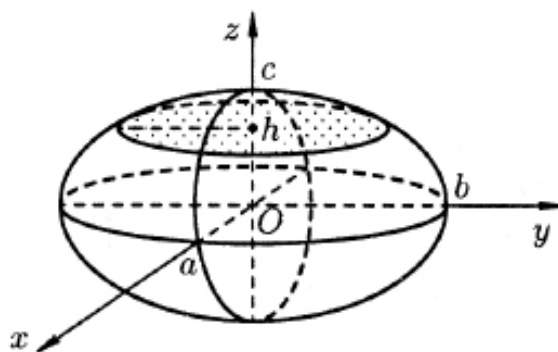


Рис. 26

Если полуоси  $a$ ,  $b$ ,  $c$  различны, то эллипсоид называется *трехосным*; если какие-либо две полуоси равны – *эллипсоидом вращения*; если все три полуоси равны, то получается *сфера*.

Геометрические свойства эллипсоида:

1. Сечения эллипсоида плоскостями  $x = h$ ,  $y = h$  или  $z = h$  есть эллипсы.

2. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке  $O(0, 0, 0)$ , с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными  $2a$ ,  $2b$  и  $2c$ .

## 2. Мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

## 3. Мнимый конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

## 4. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

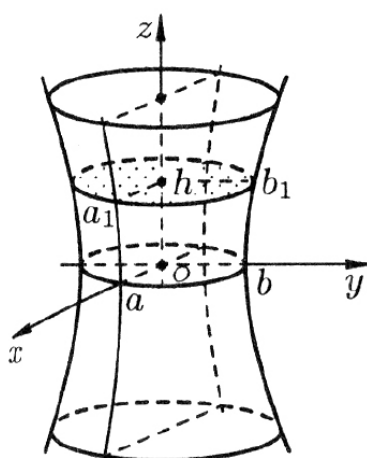


Рис. 27

### Геометрические свойства однополостного гиперболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость  $z = h$  пересекает гиперболоид по эллипсу. Эллипс получающийся при  $h = 0$ , называется *горловым эллипсом гиперболоида*.

2. Вертикальные плоскости  $x = 0$  и  $y = 0$  пересекают гиперболоид по гиперболам.

3. Ось  $Oz$  называется продольной осью гиперболоида, оси  $Ox$  и  $Oy$  называются поперечными осями гиперболоида.

Однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, расположенной вдоль оси  $Oz$  и расширяющейся как в положительном, так и в отрицательном направлении (рис. 27).

## 5. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

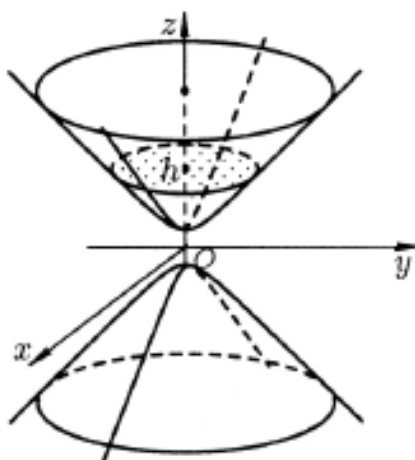


Рис. 28

Геометрические свойства двуполостного гиперboloида:

1. Каждая горизонтальная плоскость

$$z = h$$

при  $|h| < c$  не пересекает гиперboloид,

при  $|h| = c$  имеет единственную общую точку с гиперboloидом ( $(0, 0, c)$  при  $h = c$  и  $(0, 0, -c)$  при  $h = -c$ ).

При  $|h| > c$  плоскость  $z = h$  пересекает гиперboloид по эллипсу.

2. Вертикальные плоскости  $x = 0$  и  $y = 0$  пересекают гиперboloид по гиперболам, у которых действительной осью является ось Oz.

3. Поверхность состоит из двух симметричных полостей, имеющих форму неограниченных чаш, расположенных в полупространствах  $z \geq c$  и  $z \leq -c$ .

4. Ось Oz называется *продольной осью* гиперboloида, оси Ox и Oy называются *поперечными осями* гиперboloида.

Двуполостный гиперboloид является поверхностью, состоящей из двух отдельных «полостей», имеющих вид бесконечных чаш, направленных в разные стороны (рис. 28).

## 6. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

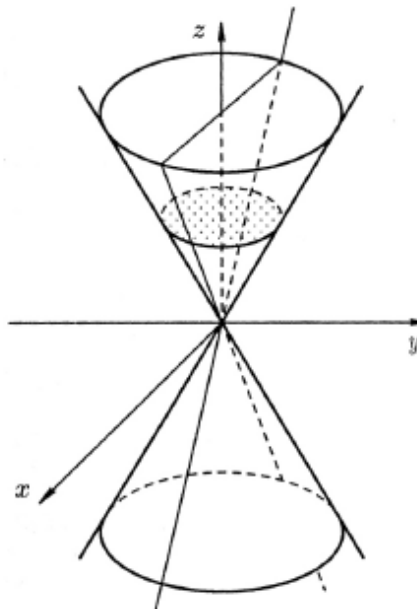


Рис. 29

### Геометрические свойства конуса:

1. Сечение эллиптического конуса плоскостью  $z = h$  при  $h \neq 0$  представляет собой эллипс.

Прямая проходящая через центры этих эллипсов, называется *осью конуса*.

Сечение конуса плоскостью  $z = 0$  состоит из одной точки  $O(0, 0, 0)$ .

2. Сечения конуса плоскостями  $x = h$  и  $y = h$ ,  $h \neq 0$  являются гиперболами.

3. Сечения конуса плоскостями  $x = 0$  и  $y = 0$  представляют собой пары пересекающихся прямых.

4. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными осям  $Ox$  или  $Oy$  можем получить параболу.

5. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах  $z \geq 0$  и  $z \leq 0$ .

## 7. Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

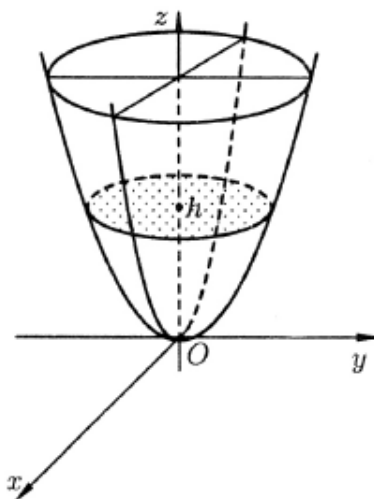


Рис. 30

### Геометрические свойства эллиптического параболоида:

1. Каждая плоскость  $z = h$  при  $h < 0$  не пересекает параболоид, при  $h = 0$  имеет с ним единственную общую точку  $O(0, 0, 0)$ , при  $h > 0$  пересекает параболоид по эллипсу.
2. Плоскости  $x = 0$  и  $y = 0$  пересекают параболоид по параболам.
3. Поверхность состоит из одной полости, имеющей форму неограниченной чаши, расположенной в полупространстве  $z \geq 0$ .
4. Ось  $Oz$  называется осью эллиптического параболоида, точка  $O(0, 0, 0)$  – его вершиной.

Эллиптический параболоид имеет вид бесконечной чаши с вершиной в начале координат (рис. 30).

Уравнение вида

$$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

определяет эллиптический параболоид, который направлен в противоположную сторону.

При  $a = b$  в сечении параболоида плоскостью  $z = h$  будет окружность. Тогда эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси симметрии.

## 8. Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

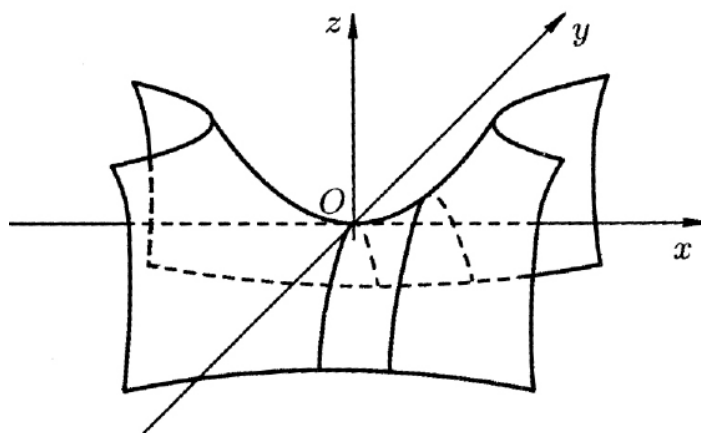


Рис. 31

### Геометрические свойства гиперболического параболоида:

1. Каждая плоскость  $z = h$  при  $h < 0$  пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси  $Oy$ , а мнимая – оси  $Ox$ . При  $h > 0$  плоскость  $z = h$  пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси  $Ox$ , а мнимая – оси  $Oy$ . Плоскость  $z = 0$  пересекает параболоид по паре прямых.

2. Плоскости  $y = h$  и  $x = h$  пересекают параболоид по параболам.

3. Поверхность имеет вид седла и может быть получена движением параболы, при условии, что эта парабола все время остается в плоскости, перпендикулярной к одной из осей координат, причем ось параболы не меняет своего направления, а вершина скользит по другой параболе.

Гиперболический параболоид имеет форму седла, установленного на оси  $Ox$  (рис. 31).

## 9. Эллиптический цилиндр

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, которую описывает прямая (образующая), которая, оставаясь параллельно самой себе, движется вдоль некоторой кривой, называемой направляющей. По названию направляющей получают свое название и цилиндры.

Если образующая параллельна какой-либо оси координат, то каноническое уравнение цилиндра не содержит в уравнении соответствующую переменную. В этом случае уравнение цилиндра повторяет уравнение своей направляющей.

Для построения цилиндра нужно построить направляющую в той плоскости, в которой она задана, а затем «тянуть» эту линию вдоль той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

Признак уравнения цилиндрической поверхности: в уравнении отсутствует одна из трех переменных.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

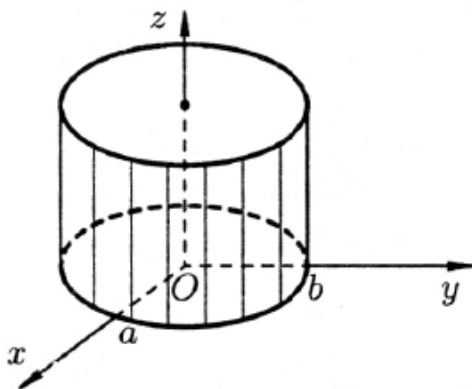


Рис. 32

## 10. Мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

## 11. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

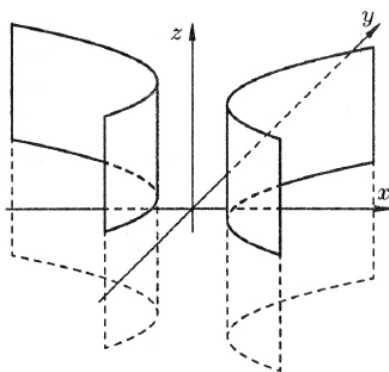


Рис. 33

## 12. Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

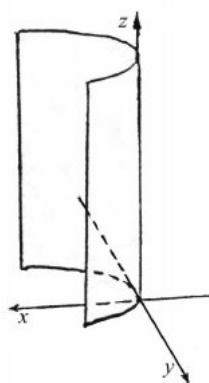


Рис. 34

**13. Цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой)**

**14. Цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой)**

**15. Цилиндр над парой параллельных вещественных прямых (пара параллельных плоскостей)**

**16. Цилиндр над парой параллельных мнимых прямых (пара параллельных мнимых плоскостей)**

**17. Цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых (пара совпадающих плоскостей).**

### 30. Гиперболоидные конструкции в строительстве и архитектуре

**Гиперболоидные конструкции** в строительстве и архитектуре – сооружения в форме однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида. Эти конструкции, имею кривизну, строятся из прямых балок. В однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде через любую точку можно провести две прямые, которые пересекаются и целиком принадлежат поверхности. Вдоль этих прямых устанавливают балки, которые образуют решётку. Не смотря на свою ажурность подобные конструкции очень жёсткие и сохраняют форму. Самую большую опасность для высоких сооружений несёт ветровая нагрузка. У решётчатой конструкции она невелика.

Самая первая в мире гиперболоидная конструкция была построена В.Г. Шуховым на Всероссийской выставке в Нижнем Новгороде. Это была водонапорная башня.



Рис. 35. Водонапорная башня на Всероссийской промышленной и художественной выставке 1896 года в Нижнем Новгороде

Любовь и способности Шухова к точным наукам обнаружились еще в юности. Владимир в тринадцатилетнем возрасте, будучи гимназистом, сумел совершенно самостоятельно - кратко и оригинально - доказать теорему Пифагора.

Учёба давалась ему легко: после блестящего окончания Пятой Петербургской гимназии Шухов поступил в Императорское Московское техническое училище, которое сейчас современному студенту известно как Бауманка. Талантливый инженер заканчивает с отличием. Ему предлагают продолжить научную работу в стенах родного университета под руководством академика Пафнутия Чебышева.

Интересным фактом является то, что на обложке вышедшей годы спустя книги Дмитрия Менделеева "Основы фабрично-заводской промышленности" была изображена паровая форсунка, позволившая использовать мазут как топливо, которую Шухов изобрел ещё в студенческие годы. Патент на изготовление этой форсунки был приобретен Людвигом Нобелем, старшим братом основателя всемирно известной премии.

В 1876 году Шухов в составе научной делегации отправляется на всемирную международную выставку в Филадельфию как лучший выпускник училища. Именно там он знакомится с "русским американцем", предпринимателем Александром Вениаминовичем Бари. Бари является создателем первой в России инжиниринговой компании.

Их встреча окажется судьбоносной не только потому, что позволит юному Шухову в необходимой мере развернуть свою деятельность, но и потому, что благодаря этому тандему в российской нефтяной промышленности появится немало изобретений. Шухов в фирме Бари займёт должность главного конструктора и главного инженера.

В числе его изобретений первая в мире промышленная установка непрерывного термического крекинга нефти, резервуары, форсунки, нефтеналивные суда, печи для перегонки. А в 1884 году Шухов становится автором первого проекта российского магистрального нефтепровода Баку-Батум.

Научные и инженерные интересы Владимира Григорьевича Шухова охватывали многие области.

Он внёс огромный вклад в развитие нефтяной отрасли и тепловых машин, в создание строительных и инженерных конструкций. Вот далеко неполный список его разработок:

- 1) первый нефтепровод в Российской империи;

- 2) первые в мире цилиндрические резервуары — нефтехранилища;
- 3) форсунка для промышленного сжигания мазута;
- 4) базовые принципы расчета и строительства цилиндрических стальных резервуаров на песчаных подушках и обоснование их оптимальности;
- 5) основы классической теории нефтепроводов, используемые по настоящее время;
- 6) процесс крекинга для разделения нефти на фракции (для получения керосина, моторного масла, солярки, мазута, бензина);

До 1891 года в мире не существовало промышленного устройства для перегонки нефти. В царской России аппарат не был востребован ввиду отсутствия автомобилей. Первыми с необходимостью конструирования такого приспособления столкнулись американцы и изобрели свой крекинг. Когда западные коллеги узнали, что двадцать лет назад крекинг-процесс уже был смоделирован и запатентован русским инженером, они предложили ему немислимые по тем временам деньги. Однако Шухов отказался, заявив: «Меня устраивает зарплата, которую я получаю от советского правительства».

- 7) установка термического крекинга нефти;
- 8) метод подъема нефти с помощью сжатого воздуха — эрлифт;
- 9) новый водотрубный паровой котёл в горизонтальном и вертикальном исполнении;
- 10) оригинальные конструкции газгольдеров и типовые проекты хранилищ природного газа ёмкостью до 100 тысяч м<sup>3</sup>;
- 11) первые в мире гиперболоидные конструкции и металлические сетчатые оболочки строительных конструкций (перекрытия общественных зданий и промышленных объектов, водонапорных башнях, морских маяках, мачтах военных кораблей и опорах линий электропередач, радиобашни).

Инженера Владимира Григорьевича Шухова называют выдающимся. Даже профессор Сергей Капица в своём интервью (журнал «Профиль» № 18) поставил Шухова рядом с Леонардо да Винчи.



Рис.36. Владимир Григорьевич Шухов

Владимир Григорьевич творил в самых разных областях техники, гармонично сочетая в себе талант крупного ученого с интуицией блестящего инженера.

Он проектировал и строил паровые котлы и насосы, резервуары для хранения нефтепродуктов и трубопроводы, мосты и доменные печи, создавал нефтеперегонные установки и наливные баржи, изобретал и возводил уникальные строительные конструкции, реставрировал памятники архитектуры ...

И что бы он ни делал, всё оказывалось на уровне открытия, изобретения, всё было прорывом во времени.

Шухов создавал столь совершенные конструкции, аппараты и системы, что спустя столетие они продолжают восхищать специалистов. Его творения в самых разных областях техники определили мировой приоритет России.

Конструкции, которые проектировал Шухов, не знал строительный мир. Его идеи высоко оценили профессионалы из разных стран, подхватили и непрерывно развивают во времени.

Очень многое, что сегодня поражает и восхищает в архитектуре

и в строительстве своим новаторством и масштабом, берёт начало от шуховских изобретений конца XIX века. Речь идёт о его ажурной башне в форме гиперboloида, подобные натянутому тенту висячие покрытия, составленные из стальных полос, цилиндрические своды с особой системой затяжек и покрытия в виде тонкой металлической мембраны...

Все эти типы конструкций В.Г. Шухов изобрёл, спроектировал, рассчитал специально для XVI Всероссийской промышленной и художественной выставки. Эта идея родилась у Шухова при самых прозаических обстоятельствах: он наблюдал за горничной. Убираясь, она поставила тяжёлый горшок с домашним растением на перевёрнутую вверх дном плетёную корзину. Корзина вес прекрасно выдержала. Инженеру же осталось тщательно высчитать пропорции фигуры и высоту "талы" гиперboloида, найдя необходимое соотношение диаметров его нижнего и верхнего колец.

«Великая» выставка проходила в 1896 году в Нижнем Новгороде. Особенность любой выставки – необходимость перекрывать большие пространства для экспозиций. Выставка в Нижнем Новгороде оказалась для инженера своеобразной экспериментальной мастерской. Здесь он смог реализовать идеи, которые годами формировались в его сознании, но не было возможности их воплотить в строительную практику, поскольку он занимался другими вещами. В старинном городе, живописно раскинувшемся по берегам двух великих рек: Волги и Оки, эти идеи оказались востребованными. Выставка 1896 года стала подлинным триумфом в творческой биографии инженера.

В начале XX века по проектам Шухова было построено около 60 гиперболических башен, согласно перечню документов архива РАН.

Например, два маяка под Херсоном. Название одного из них – Задний Станислав-Аджигольский маяк.

Задний, потому что существует ещё и его брат— Передний Станислав-Аджигольский маяк.



Рис.37. Задний Станислав-Аджигольский маяк

Задний, потому что существует ещё и его брат— Передний Станислав-Аджигольский маяк.



Рис.38. Передний Станислав-Аджигольский маяк

Его высота составляет 34 метра. Он почти вдвое ниже первого. Но как и первый, построен на искусственном насыпном острове. Если внимательно посмотреть на две картинки, то можно увидеть, что конструкция маяков очень похожа.

Водонапорные сетчатые башни Шухова были экономичнее других металлических башен в два раза, кроме того, они легко собирались и транспортировались, были легче других аналогичных конструкций, а вес резервуара с водой, который они несли, был больше их собственного веса.

Самой высокой и самой известной стала Шаболовская радиобашня (1922) в Москве. Её высота почти сто пятьдесят метров.



Рис.39. Шаболовская башня в Москве

В первоначальном проекте её высота составляла триста пятьдесят метров. Она должна была быть выше Эйфелевой башни. Но в тяжёлое послевоенное время нехватка металла не позволила реализовать замысел полностью. Башня стала символом советского радиовещания, а потом и телевидения. Эффектные снимки башни украшали страницы журналов.

Круглый конусный корпус башни состоит из шести 25-метровых секций. Нижняя секция установлена на бетонном фундаменте диаметром 40 метров и глубиной 3 метра. Элементы башни скреплены заклёпками.

Строительство башни велось без лесов и подъемных кранов. Верхние секции по очереди собирались внутри нижней и при помощи блоков и лебедок поднимались друг на друга.

Работа по возведению конструкции неоднократно прерывалась из-за отсутствия материалов. После аварии при подъеме 4-й секции башни В. Г. Шухов был приговорён к условному расстрелу с отсрочкой исполнения приговора до завершения строительства.

За разработку проекта оригинальной металлической башни и непосредственное участие в ее строительстве В. Г. Шухов был удостоен звания заслуженного деятеля науки и техники и многих других почетных званий, в том числе Героя труда (1932 г.).

За свою длительную историю Шуховская башня служила опорой для антенн крупных радио и телевизионных станций: Московской радиотелеграфной станции, 40-киловаттной радиовещательной станции «Большой Коминтерн», а позже антенн Московского телевизионного центра.

Регулярные телевизионные трансляции (четыре раза в неделю) через передатчики Шуховской башни начались 10 марта 1939 года. В этот день московский телецентр на Шаболовке передал в эфир документальный фильм об открытии XVIII съезда ВКП(б). В дальнейшем передачи велись 4 раза в неделю по 2 часа.

Шуховская башня на Шаболовке вдохновила советского писателя Алексея Толстого на создание романа «Гиперболоид инженера Гарина».

В 1941 г. в связи с начавшейся Великой Отечественной войной оборудование радиотелевизионной станции было демонтировано и эвакуировано из Москвы. С приближением немецких войск к столице металлические конструкции башни были заминированы и подготовлены для взрыва. К счастью, этого делать не пришлось. А спустя три года оборудование телецентра было возвращено в Москву и в короткий срок силами организаций Министерства связи, специалистов и многочисленных энтузиастов МТЦ вещание было восстановлено, и в День радио 7 мая 1945 года в Москве состоялась первая послевоенная передача Московского телевизионного центра, которая была первой и в Европе.

Шуховская башня использовалась также и для других радиотехнических целей. Например, в 1949 году на МТЦ появилась первая в

стране передвижная телевизионная станция (ПТС), созданная специалистами МТЦ с частичным применением импортных блоков (ТВ камеры с усилителями, автобус).

В 1960-х годах башня использовалась на кинозаставке, которая показывалась перед началом вещания телепрограмм.

Долгие годы изображение Шуховской башни являлось эмблемой советского телевидения и заставкой многих телепередач, включая знаменитый «Голубой огонёк».

На выставке «Инженерное искусство» в центре Помпиду в Париже изображение Шуховской башни использовалось в качестве логотипа. Кроме того, в каталоге выставки было приведено многостраничное описание этой башни.

В Мюнхене в 2003 году на выставке «Лучшие конструкции и сооружения в архитектуре XX века» был установлен позолоченный шестиметровый макет Шуховской башни. Шаболовская башня является объектом культурного наследия РФ. Сейчас башня признана международными экспертами одним из высших достижений инженерного искусства. В декларации международной научной конференции «Heritage at Risk. Сохранение архитектуры XX века и Всемирное наследие», прошедшей в апреле 2006 года в Москве с участием более 160 специалистов из 30 стран Шуховская башня названа в числе семи архитектурных шедевров русского авангарда, рекомендованных на Включение в список Всемирного наследия ЮНЕСКО.

Шухов сконструировал:

- стеклянную крышу ГУМа на Красной Площади (1889 - 1894 гг.)



Рис. 40

- светопрозрачные перекрытия Музея изобразительных искусств им. А. С. Пушкина (1898 - 1912 гг.)



Рис.41

- перекрытия залов Киевского вокзала в Москве (1912 - 1917)



Рис. 42

- и ещё десятки зданий — торговых пассажей, перекрытий цехов и трамвайных депо. Авторству Шухова принадлежит более 180 мостов через Волгу, Днепр и другие реки.

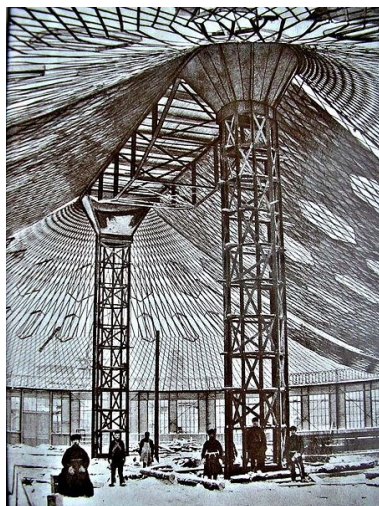


Рис. 43. Сетчатая оболочка Овального павильона Шухова в Нижнем Новгороде.

- гиперболоидные мачты кораблей

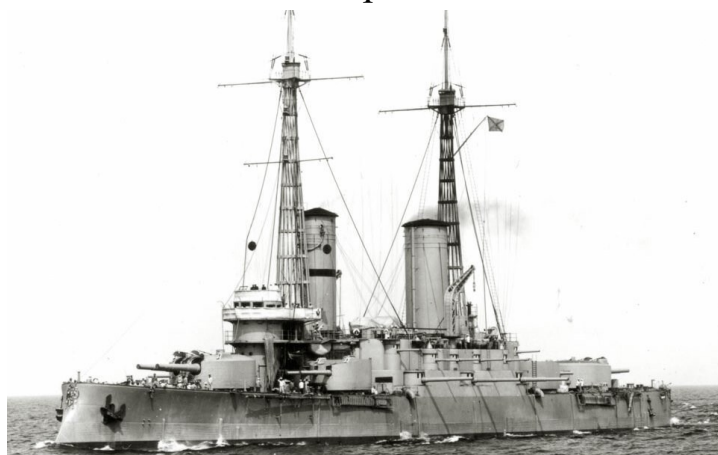


Рис. 44. Гиперболоидные мачты броненосца «Император Павел I»

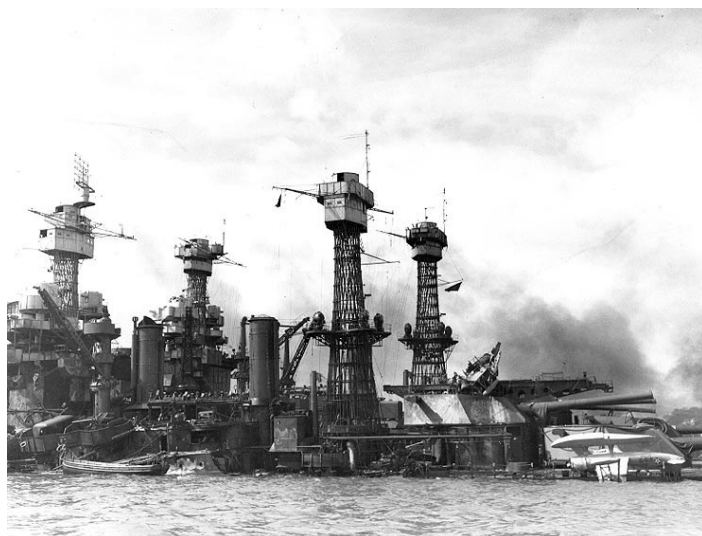


Рис. 45. Гиперболоидные мачты американского линкора «Западная Вирджиния»

Многие архитекторы использовали сетчатые конструкции Шухова.



Рис. 46. Архитектор Михаэль Хопкинс, перекрытие двора адм. здания парламента, Лондон, 2008 г.

Экологичность зданий и сооружений, построенных с использованием сетчатых оболочек В.Г. Шухова доказана шедеврами Лорда Нормана Фостера. "Шухов - один из моих героев!" - говорит в своих интервью Норман Фостер.



Рис. 47. Норман Фостер, сетчатые оболочки Smithsonian American Art Museum, 2007



Рис. 48. Небоскрёб 30 St Mary Axe – "The Gherkin" – "Swiss Re"



Рис. 49. Лорд Норман Фостер: перекрытие двора Британского музея, 2000 г.



Рис. 50. Гиперболоидный мост в Манчестере - Corporation street bridge

Знаменитый Пекинский стадион, который известен под именем «Птичье гнездо», специально построили для организации Олимпиады – 2008. Высота конструкции объекта составляет практически 70 метров. Так как стадион выполнен в форме овала, можно его размеры обозначить двумя диаметрами: большой составляет 330 метров, малый – 220 метров.



Рис. 51. Стадион «Птичье гнездо» в Пекине (вид днём)

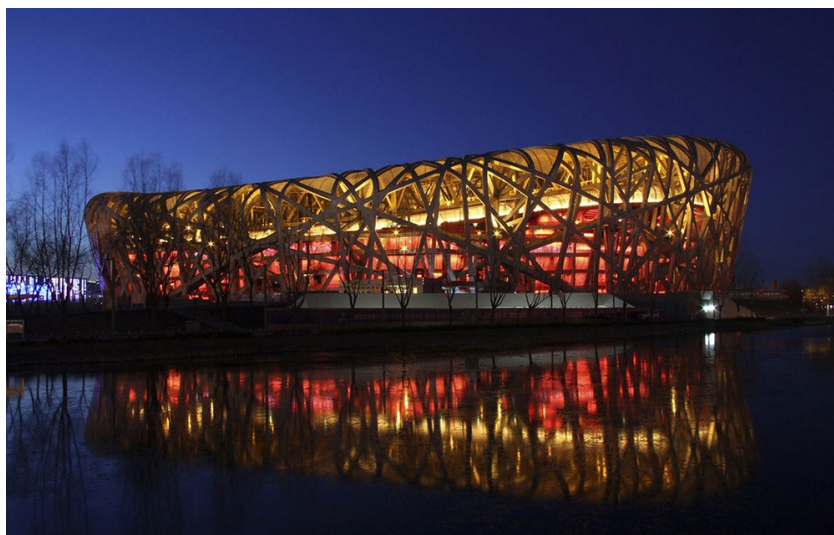


Рис. 52. Стадион «Птичье гнездо» в Пекине (вид ночью)



Рис. 53. Международный аэропорт Шэньчжэнь Баоань, Китай (вид снаружи)



Рис. 54. Международный аэропорт Шэньчжэнь Баоань, Китай (вид внутри)

Гиперболоидные шуховские башни востребованы в настоящее время. Примером служит телебашня Гуанчжоу в Китае. Её строительство заняло пять лет – с 2005 по 2010.



Рис. 55. Телебашня Гуанчжоу в Китае (днём)



Рис. 56. Телебашня Гуанчжоу в Китае (ночью)

Телебашня Гуанчжоу известна также Xiao Man Yao, что в переводе с китайского означает «молодая девушка с тонкой талией». В настоящее время это самая высокая башня в Китае и вторая по высоте башня в мире. Её высота составляет 600 метров: из них –450 метров основного корпуса и 150 метров – металлический шпиль, на котором располагаются радио и телевизионные передающие антенны.



Рис. 57. Гиперboloидная башня в порту Кобе, Япония

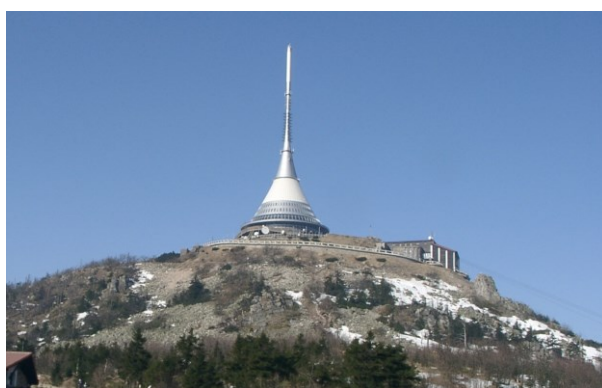


Рис. 58. Гиперboloидная башня Йештед, Либерец, Чехия

Ещё одним ярким примером гиперboloидных построек является Собор Пресвятой Девы Марии в Бразилии. Каркас надземной части здания состоит из 16 гиперboloидных бетонных колонн, весом 90 тонн каждая. По замыслу Нимейера, они символизируют руки, воздетые молящимися к небу. Но в народе Собор Пресвятой Девы Марии вызывает и другие ассоциации - многие называют его храмом Тернового венца.



Рис. 59. Собор Пресвятой Девы Марии, Бразилия

Массивная часть собора, видимая с улицы имеет высоту 40 метров. Эта часть является всего лишь куполом. Неф храма расположен на три метра ниже уровня земли. Ко входу в Собор Пресвятой Девы Марии ведёт слабоосвещенный подземный коридор, внутренние стены и пол которого облицованы черным гранитом. Это сделано для того, чтобы залитый светом интерьер собора на контрасте производил на входящих еще большее впечатление.

Были и конструктивные просчеты при строительстве собора. В первую очередь, это слабая для религиозного здания акустика и недостаточная для жаркого бразильского климата система вентиляции. Возникли проблемы и с оригинальными витражами, изготовленными вручную из дутого стекла. Из-за перепада температур они деформировались и в конце концов трескались. В ходе реконструкции, проведенной уже в нынешнем столетии, для витражей было использовано специальное стекло, задерживающее часть тепла.

Под куполом Собора Пресвятой Девы Марии парят три скульптуры ангелов, выполненные Альфредо Ческьятти. А венчает здание десятиметровый крест, расходящиеся лучи которого - отсылка к Вифлеемской звезде.

### 31. Прямые на однополостном гиперboloиде

Пусть однополостный гиперboloид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (31.1)$$

Рассмотрим пару вещественных чисел  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  и систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \\ \beta \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \end{cases} \quad (31.2)$$

Для каждой пары чисел  $(\alpha, \beta)$  наши уравнения (31.2) определяют пару плоскостей, пересекающихся по прямой, и эта прямая целиком лежит на однополостном гиперboloиде, так как решение системы уравнений (31.2) дает решение уравнения (31.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих однополостного гиперboloида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра  $u = \beta / \alpha$ . Аналогично уравнениям (31.2) можно было бы для любой пары чисел  $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$  рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha' \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta' \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \\ \beta' \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha' \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \end{cases}, \quad (31.3)$$

определяющую прямую, лежащую на однополостном гиперboloиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих однополостного гиперboloида, зависящее от одного параметра  $v = \beta' / \alpha'$ .

Легко проверяется, что через каждую точку однополостного гиперboloида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II.

## 32. Прямые на гиперболическом параболоиде

Пусть гиперболический параболоид задаётся своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

(согласно классификации поверхностей 2-го порядка он задаётся

уравнением  $\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$ , и мы полагаем здесь  $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = -2z$ ).

Перепишем каноническое уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z \quad (32.1)$$

Для каждой пары вещественных чисел  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2\beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \alpha \end{cases} \quad (32.2)$$

Эта система задаёт прямую (пересечение двух плоскостей, задаваемых двумя линейными уравнениями из системы (32.2)), и эта прямая лежит на гиперболическом параболоиде, потому что решение системы (32.2) дает решение уравнения (32.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра  $u = \beta / \alpha$ .

Аналогично уравнениям (32.2) можно было бы для любой пары чисел  $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$  рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha'\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2\beta' z \\ \beta'\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \alpha' \end{cases}, \quad (32.3)$$

определяющую прямую, лежащую на гиперболическом параболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих гиперболического параболоида, зависящее от одного параметра  $v = \beta' / \alpha'$ .

Легко проверяется, что через каждую точку гиперболического параболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II, причем любые две образующие, принадлежащие разным семействам, пересекаются, а принадлежащие одному семейству всегда скрещиваются.

### 33. Проективное пространство

Проективизацией  $\mathbb{P}(E)$  конечномерного линейного пространства  $E$  над полем  $k$  называется фактормножество  $(E \setminus 0 / \sim)$ , где векторы  $\vec{x} \neq \vec{0}$  и  $\vec{y} \neq \vec{0}$  эквивалентны  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \quad \vec{x} = \lambda \vec{y}$  (здесь  $k^\times = k \setminus 0$  – группа ненулевых элементов поля  $k$  с операцией умножения).

Таким образом,  $\mathbb{P}(E)$  – это множество всех прямых пространства  $E$ , проходящих через точку  $0$ .

Положим  $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$ .

В этих обозначениях  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  называется  $n$ -мерным вещественным проективным пространством,  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  называется  $n$ -мерным комплексным проективным пространством.

Очевидно, проективная вещественная прямая  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$  – это множество всех прямых в  $\mathbb{R}^2$ , проходящих через начало координат.

Каждая такая прямая пересекает единичную окружность  $U^1$  с центром  $0$  в двух диаметрально противоположных точках; эта пара диаметрально противоположных точек задает единственную точку проективной прямой  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ .

В итоге можно рассматривать  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$  как окружность с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Более точно, существует каноническое непрерывное сюръективное отображение  $U^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mathbb{R}$  склеивания диаметрально противоположных точек единичной окружности. Отождествим  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$ , и будем рассматривать  $U^1$  как группу комплексных чисел  $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ . Тогда точки  $z_1, z_2 \in U^1$  диаметрально противоположны  $\Leftrightarrow z_1 = -z_2$ . Таким образом,  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$  можно естественным образом отождествить с факторгруппой  $U^1 / \{\pm 1\}$ .

Попробуем найти такой сюръективный морфизм групп  $f: U^1 \rightarrow U^1$ , чтобы  $\text{Ker} f = \{\pm 1\}$ . Можно взять, например,  $f(z) = z^2$ . Поскольку фактор по ядру изоморфен образу, то имеем:

$$U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} f(U^1) = U^1.$$

Значит,  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} U^1$  (как топологическое пространство).

Итак, вещественная проективная прямая  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  топологически устроена как единичная окружность.

Другой топологический изоморфизм  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1$  можно построить, если перенести центр единичной окружности в точку  $i$  и рассмотреть прямые, проходящие через точку  $2i$ . Каждая такая прямая (кроме прямой, параллельной вещественной оси  $\mathbb{R}$ ) пересекает вещественную ось в единственной точке и пересекает окружность в единственной точке; это устанавливает диффеоморфизм вещественной оси и окружности с выколотой точкой  $2i$ .

Прямая, параллельная вещественной оси и проходящая через точку  $2i$ , играет роль бесконечно удаленной точки  $\infty$  на проективной прямой  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$ .

Заметим, что  $U^1$  — компакт (любое покрытие  $U^1$  открытыми подмножествами содержит конечное подпокрытие). Поэтому компакт  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$  можно рассматривать как одноточечную компактификацию аффинной прямой  $\mathbb{R}$ .

В теории функций одной комплексной переменной важную роль играет комплексная проективная прямая  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \infty$ , отождествляемая (с помощью стереографической проекции) с единичной сферой.

Вещественная проективная плоскость  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  естественным образом изоморфна (как топологическое пространство) сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Пусть  $\Phi: (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R} = (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$  — каноническое сюръективное отображение. Проективной прямой на  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  называется образ  $\pi \setminus 0$  при отображении  $\Phi$ , где  $\pi$  — это плоскость в  $\mathbb{R}^3$ , проходящая через начало координат. Так как любые две несовпадающие плоскости  $\pi_1, \pi_2$  в  $\mathbb{R}^3$  пересекаются по прямой  $l = \pi_1 \cap \pi_2$ , то соответствующие проективные прямые  $\Phi(\pi_1 \setminus 0)$  и  $\Phi(\pi_2 \setminus 0)$  пересекаются в одной точке  $\Phi(l \setminus 0)$  проективной плоскости.

Итак, любые две несовпадающие проективные прямые на вещественной проективной плоскости пересекаются в единственной точке.

Пусть  $E$  — конечномерное линейное пространство над полем  $k$ . Группа  $GL(E)$  обратимых линейных операторов  $A: E \rightarrow E$  есте-

ственным образом действует на проективизации  $\mathbb{P}(E)$ . Действительно, если векторы  $\vec{x} \neq \vec{0}$  и  $\vec{y} \neq \vec{0}$  эквивалентны, то  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$  для некоторого  $\lambda \in k^\times$ , поэтому  $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\lambda \vec{y}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{y})$  и, следовательно,  $\mathcal{A}(\vec{x}) \sim \mathcal{A}(\vec{y})$ . Значит, можно определить действие оператора  $\mathcal{A}$  на проективизации  $\mathbb{P}(E)$  формулой  $\mathcal{A}(\vec{x} \bmod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \bmod \sim$ .

Если  $\mathcal{A}$  – гомотетия с коэффициентом  $\mu \in k^\times$ , то для любого вектора  $\vec{x} \neq \vec{0}$  имеем:

$$\mathcal{A}(\vec{x} \bmod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \bmod \sim = \mu \vec{x} \bmod \sim = \vec{x} \bmod \sim.$$

Поэтому гомотетии действуют тривиально на проективизации  $\mathbb{P}(E)$ . Значит, на  $\mathbb{P}(E)$  определено каноническое действие факторгруппы  $\text{PGL}(E) = \text{GL}(E)/k^\times$ , где  $k^\times \hookrightarrow \text{GL}(E)$  – подгруппа гомотетий. Группа  $\text{PGL}(E)$  называется проективной линейной группой. Поскольку элементы из  $\text{GL}(E)$  переводят любую плоскость в пространстве  $E$  в любую другую плоскость, то элементы из  $\text{PGL}(E)$  переводят любую проективную прямую в проективизации  $\mathbb{P}(E)$  в любую другую проективную прямую.

Пусть  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – базис линейного пространства  $E$  над полем  $k$ ,  $\vec{x} = x_0 \vec{e}_0 + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ . Пусть  $E \setminus 0 \rightarrow \mathbb{P}(E)$  – каноническое отображение, которое вектору  $\vec{x} \neq \vec{0}$  ставит в соответствие точку  $\vec{x} \bmod \sim \in \mathbb{P}(E)$ . Ясно, что для любого  $\lambda \in k^\times$  векторы с координатами  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  и  $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  дают одну и ту же точку проективного пространства, которую мы обозначим через  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ . По определению, имеем:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n).$$

Набор  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  называется набором однородных координат точки проективного пространства  $\mathbb{P}(E)$ .

Очевидно,

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{i=0}^n D_+(x_i),$$

где

$$D_+(x_i) = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}.$$

Рассмотрим для примера

$$D_+(x_0) = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\} = \left\{ \left( 1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0} \right) \right\}.$$

Поскольку  $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$  могут принимать любые значения из поля  $k$ , то

$$D_+(x_0) \xrightarrow{\sim} k^n.$$

Значит,  $\mathbb{P}(E)$  склеено из множеств  $D_+(x_0), D_+(x_1), \dots, D_+(x_n)$ , каждое из которых изоморфно  $k^n$ .

### 34. Проективная классификация кривых второго порядка

Проективная кривая 2-го порядка на проективной плоскости  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$  задается уравнением

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Существует такой ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^3$ , в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 0.$$

Предположим сначала, что квадратичная форма невырождена (т.е.  $\det A \neq 0$ , что эквивалентно неравенству  $\forall i \quad \lambda_i \neq 0$ ). Можно считать, что замена координат

$$z_i = \sqrt{|\lambda_i|} \cdot y_i$$

приводит квадратичную форму к одному из следующих видов:

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \text{ (мнимый овал);}$$

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0 \text{ (вещественный овал).}$$

В открытом множестве  $D_+(z_0)$  вещественный овал задается уравнением

$$1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{z_2^2}{z_0^2} = 0$$

(гипербола), в то же время в  $D_+(z_2)$  этот овал задается уравнением

$$\frac{z_0^2}{z_2^2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} - 1 = 0$$

(окружность).

Если квадратичная форма вырождена, то можно считать, что уравнение кривой принимает один из следующих видов:

$$z_0^2 + z_1^2 = 0 \text{ (пара мнимых проективных прямых);}$$

$$z_0^2 - z_1^2 = 0 \text{ (пара вещественных проективных прямых);}$$

$$z_0^2 = 0 \text{ (пара совпадающих проективных прямых).}$$

Мы доказали следующую теорему:

**Теорема.** Любая кривая 2-го порядка на вещественной проективной плоскости  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  проективно эквивалентна одному из следующих объектов:

мнимый овал;

вещественный овал;

пара мнимых проективных прямых;

пара вещественных проективных прямых;

пара совпадающих проективных прямых.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти скалярное произведение векторов:

1)  $\vec{a} = (7; -2; 3)$  и  $\vec{b} = (-5; 1; 4)$

2)  $\vec{a} = (9; -4; 3)$  и  $\vec{b} = (2; -1; 6)$

3)  $\vec{a} = (11; -2; 5)$  и  $\vec{b} = (2; 7; -4)$

4)  $\vec{a} = (-7; 2; 6)$  и  $\vec{b} = (5; -1; 3)$

5)  $\vec{a} = (9; -2; 4)$  и  $\vec{b} = (-5; -1; -4)$

6)  $\vec{a} = (0; -12; -3)$  и  $\vec{b} = (-3; -1; 7)$

7)  $\vec{a} = (8; -1; 6)$  и  $\vec{b} = (1; -4; 5)$

8)  $\vec{a} = (8; -2; -2)$  и  $\vec{b} = (-3; -6; 4)$

9)  $\vec{a} = (1; 2; 7)$  и  $\vec{b} = (-5; -1; 4)$

10)  $\vec{a} = (-7; 2; -8)$  и  $\vec{b} = (-2; -21; 0)$

2. При каком значении  $\lambda$  векторы перпендикулярны?

1)  $\vec{a} = \lambda \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$  и  $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\lambda \vec{j} + 3\vec{k}$

2)  $\vec{a} = 4\vec{i} + \lambda \vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = \lambda \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$

3)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\lambda \vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} - 5\lambda \vec{j} + 3\vec{k}$

4)  $\vec{a} = \lambda \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$  и  $\vec{b} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\lambda \vec{k}$

5)  $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\lambda \vec{j} - 7\vec{k}$  и  $\vec{b} = 5\lambda \vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$

6)  $\vec{a} = -\vec{i} + 6\vec{j} - 2\lambda \vec{k}$  и  $\vec{b} = 9\vec{i} + 7\lambda \vec{j} + 3\vec{k}$

7)  $\vec{a} = 4\lambda \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$  и  $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\lambda \vec{j} - \vec{k}$

8)  $\vec{a} = 2\vec{i} - \lambda \vec{j} - 7\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\lambda \vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$

9)  $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 3\lambda \vec{k}$  и  $\vec{b} = -\lambda \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

10)  $\vec{a} = \lambda \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{i} - 8\lambda \vec{j} + 3\vec{k}$

3. Найти скалярное произведение векторов:

1)  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $5\vec{a} - 6\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

- 2)  $-\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$
- 3)  $2\vec{a} - 5\vec{b}$  и  $\vec{a} + 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$
- 4)  $-3\vec{a} - 7\vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$
- 5)  $4\vec{a} - \vec{b}$  и  $-\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$
- 6)  $3\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $-2\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$
- 7)  $7\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $4\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
- 8)  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $-5\vec{a} + 6\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$
- 9)  $-2\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $\vec{a} - 8\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$
- 10)  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $6\vec{a} - 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
4. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если
- 1)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(1; 5; -2)$ ,  $C(-3; 2; -1)$
  - 2)  $A(-2; 4; -6)$ ,  $B(0; 2; -4)$ ,  $C(-6; 8; -10)$
  - 3)  $A(-4; 0; 4)$ ,  $B(-1; 6; 7)$ ,  $C(1; 10; 9)$
  - 4)  $A(1; 4; -1)$ ,  $B(-2; 4; -5)$ ,  $C(8; 4; 0)$
  - 5)  $A(0; 3; -6)$ ,  $B(9; 3; 6)$ ,  $C(12; 3; 3)$
  - 6)  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $C(-3; 4; -5)$
  - 7)  $A(7; 0; 2)$ ,  $B(7; 1; 3)$ ,  $C(8; -1; 2)$
  - 8)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(5; 1; -2)$ ,  $C(4; 1; 1)$
  - 9)  $A(6; 2; -3)$ ,  $B(6; 3; -2)$ ,  $C(7; 3; -3)$
  - 10)  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(6; -1; -4)$ ,  $C(4; 2; 1)$
5. Найти векторное произведение векторов:
- 1)  $\vec{a} = (7; -2; 3)$  и  $\vec{b} = (-5; 1; 4)$

- 2)  $\vec{a} = (9; -4; 3)$  и  $\vec{b} = (2; -1; 6)$
- 3)  $\vec{a} = (11; -2; 5)$  и  $\vec{b} = (2; 7; -4)$
- 4)  $\vec{a} = (-7; 2; 6)$  и  $\vec{b} = (5; -1; 3)$
- 5)  $\vec{a} = (9; -2; 4)$  и  $\vec{b} = (-5; -1; -4)$
- 6)  $\vec{a} = (0; -12; -3)$  и  $\vec{b} = (-3; -1; 7)$
- 7)  $\vec{a} = (8; -1; 6)$  и  $\vec{b} = (1; -4; 5)$
- 8)  $\vec{a} = (8; -2; -2)$  и  $\vec{b} = (-3; -6; 4)$
- 9)  $\vec{a} = (1; 2; 7)$  и  $\vec{b} = (-5; -1; 4)$
- 10)  $\vec{a} = (-7; 2; -8)$  и  $\vec{b} = (-2; -21; 0)$

6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

- 1)  $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 5$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
- 2)  $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 1$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$
- 3)  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
- 4)  $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
- 5)  $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$
- 6)  $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$
- 7)  $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 7$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
- 8)  $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
- 9)  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 5$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
- 10)  $\vec{a} = -\vec{p} - \vec{q}$ ,  $\vec{b} = 7\vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$
- 11)

7. Даны точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Вычислить площадь треугольника  $ABC$ :
- 1)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(1; 5; -2)$ ,  $C(-3; 2; -1)$
  - 2)  $A(-2; 4; -6)$ ,  $B(0; 2; -4)$ ,  $C(-6; 8; -10)$
  - 3)  $A(-4; 0; 4)$ ,  $B(-1; 6; 7)$ ,  $C(1; 10; 9)$
  - 4)  $A(1; 4; -1)$ ,  $B(-2; 4; -5)$ ,  $C(8; 4; 0)$
  - 5)  $A(0; 3; -6)$ ,  $B(9; 3; 6)$ ,  $C(12; 3; 3)$
  - 6)  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $C(-3; 4; -5)$
  - 7)  $A(7; 0; 2)$ ,  $B(7; 1; 3)$ ,  $C(8; -1; 2)$
  - 8)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(5; 1; -2)$ ,  $C(4; 1; 1)$
  - 9)  $A(6; 2; -3)$ ,  $B(6; 3; -2)$ ,  $C(7; 3; -3)$
  - 10)  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(6; -1; -4)$ ,  $C(4; 2; 1)$
8. Даны вершины треугольника  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины  $B$  на сторону  $AC$ .
- 1)  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(5; -6; 2)$ ,  $C(1; 3; -1)$
  - 2)  $A(2; 4; -3)$ ,  $B(0; 2; -4)$ ,  $C(-6; 8; -10)$
  - 3)  $A(-4; 0; 4)$ ,  $B(1; -6; 7)$ ,  $C(-1; 10; 9)$
  - 4)  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(-3; 4; -1)$ ,  $C(8; 4; 10)$
  - 5)  $A(2; 3; -4)$ ,  $B(9; 3; 5)$ ,  $C(2; -3; 3)$
  - 6)  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $C(-3; 4; -5)$
  - 7)  $A(-7; 0; 2)$ ,  $B(2; 1; 3)$ ,  $C(-8; -1; 2)$
  - 8)  $A(3; -3; -1)$ ,  $B(-5; 1; -2)$ ,  $C(4; 1; 3)$
  - 9)  $A(-6; 1; -3)$ ,  $B(6; 2; -2)$ ,  $C(5; 3; -1)$
  - 10)  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(6; -1; -4)$ ,  $C(4; 2; 1)$
9. Вектор  $\vec{x}$ ,  $\perp$  к векторам  $\vec{a} = (4; -2; -3)$  и  $\vec{b} = (0; 1; 3)$ , образует с осью  $Oy$  тупой угол. Зная, что  $|\vec{x}| = 6$ , найти его координаты.
10. Вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярный к оси  $Oz$  и к вектору  $\vec{a} = (8; -15; 3)$ , образует острый угол с осью  $Ox$ . Зная, что  $|\vec{x}| = 51$ , найти его координаты.

11. Найти вектор  $\vec{x}$ , зная, что он перпендикулярен векторам  $\vec{a} = (2; -3; 1)$  и  $\vec{b} = (1; -2; 3)$  и удовлетворяет условию  $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ .
12. Вычислить объем треугольной пирамиды  $ABCD$ , с вершиной в точке  $C(-3; 4; -1)$ , если
- 1)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(1; 5; -2)$ ,  $C(-3; 2; -1)$
  - 2)  $A(-2; 4; -6)$ ,  $B(0; 2; -4)$ ,  $C(-6; 8; -10)$
  - 3)  $A(-4; 0; 4)$ ,  $B(-1; 6; 7)$ ,  $C(1; 10; 9)$
  - 4)  $A(1; 4; -1)$ ,  $B(-2; 4; -5)$ ,  $C(8; 4; 0)$
  - 5)  $A(0; 3; -6)$ ,  $B(9; 3; 6)$ ,  $C(12; 3; 3)$
  - 6)  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $C(-3; 4; -5)$
  - 7)  $A(7; 0; 2)$ ,  $B(7; 1; 3)$ ,  $C(8; -1; 2)$
  - 8)  $A(3; 3; -1)$ ,  $B(5; 1; -2)$ ,  $C(4; 1; 1)$
  - 9)  $A(6; 2; -3)$ ,  $B(6; 3; -2)$ ,  $C(7; 3; -3)$
  - 10)  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(6; -1; -4)$ ,  $C(4; 2; 1)$
13. Написать разложение вектора  $\vec{x}$  по векторам  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ :
- 1)  $\vec{x} = (-1; 3; 1)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 4; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (3; 5; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 1; 2)$
  - 2)  $\vec{x} = (-2; 4; 7)$ ,  $\vec{e}_1 = (0; 1; 2)$ ,  $\vec{e}_2 = (1; 0; 1)$ ,  
 $\vec{e}_3 = (-1; 2; 4)$
  - 3)  $\vec{x} = (6; 12; -1)$ ,  $\vec{e}_1 = (1; 3; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (2; -1; 1)$ ,  
 $\vec{e}_3 = (0; -1; 2)$
  - 4)  $\vec{x} = (1; -4; 4)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 3; 2)$ ,  
 $\vec{e}_3 = (1; -1; 1)$
  - 5)  $\vec{x} = (-9; 5; 5)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 7; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (2; 5; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (1; 1; 2)$
  - 6)  $\vec{x} = (-1; 4; 1)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 5; -1)$ ,  $\vec{e}_2 = (2; 3; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 1; 2)$
  - 7)  $\vec{x} = (-3; 3; 2)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 5; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (3; 5; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 1; 2)$
  - 8)  $\vec{x} = (-1; 3; 1)$ ,  $\vec{e}_1 = (2; 4; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 4; 2)$
  - 9)  $\vec{x} = (1; 6; 1)$ ,  $\vec{e}_1 = (7; 4; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (3; 5; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (3; 2; 2)$
  - 10)  $\vec{x} = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{e}_1 = (0; 4; 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (3; 5; 2)$ ,  $\vec{e}_3 = (5; 1; 2)$
  - 11)

14. Выяснить компланарны векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  или нет:

- 1)  $\vec{a}(3; 2; 1)$ ,  $\vec{b}(1; -3; -7)$ ,  $\vec{c}(1; 2; 3)$
- 2)  $\vec{a}(1; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(1; -4; -7)$ ,  $\vec{c}(5; 2; 3)$
- 3)  $\vec{a}(3; 5; 1)$ ,  $\vec{b}(1; -3; -2)$ ,  $\vec{c}(1; 3; 3)$
- 4)  $\vec{a}(0; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(4; 3; -7)$ ,  $\vec{c}(5; 3; 2)$
- 5)  $\vec{a}(2; 3; 1)$ ,  $\vec{b}(7; -3; -8)$ ,  $\vec{c}(0; 1; 4)$
- 6)  $\vec{a}(-3; 1; 4)$ ,  $\vec{b}(-1; -3; 7)$ ,  $\vec{c}(-1; -2; 3)$
- 7)  $\vec{a}(9; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(11; -4; -7)$ ,  $\vec{c}(3; 1; 3)$
- 8)  $\vec{a}(-3; -2; -1)$ ,  $\vec{b}(1; -3; -7)$ ,  $\vec{c}(1; 2; 3)$
- 9)  $\vec{a}(0; 12; 1)$ ,  $\vec{b}(6; -3; 1)$ ,  $\vec{c}(1; 2; 3)$
- 10)  $\vec{a}(8; 6; 1)$ ,  $\vec{b}(1; -1; -5)$ ,  $\vec{c}(2; -4; 1)$

15. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

- 1)  $\vec{a} = (-2; 1; 5)$ ,  $\vec{b} = (4; -3; 0)$ ,  $\vec{c}(0; -1; 10)$ ;
- 2)  $\vec{a} = (2; 0; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(0; -1; -2)$ ;

16. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений систем:

- 1) 
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
- 2) 
$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$
- 3) 
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

17. Найти координаты вектора  $\vec{x}$  в базисе  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , если он задан в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

$$1) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (2; 4; 1)$$

$$2) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{6}{5}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (10; 5; 1)$$

$$3) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{7}{6}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-12; 6; 1)$$

$$4) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{8}{7}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-1; 7; 14)$$

$$5) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-3; 2; 4)$$

$$6) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-1; 2; 0)$$

$$7) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-5; 0; 4)$$

$$8) \begin{cases} \vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (2; 1; 3)$$

$$9) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-2; 2; 1)$$

$$10) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (3; -2; 2)$$

18. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок  $b=1$  и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .
19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2; 5)$  и отсекающей на оси ординат отрезок  $b=7$ .
20. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки  $A(-2; 3)$  и  $B(4; 5)$ .
21. Дано общее уравнение прямой  $4x - 3y + 12 = 0$ . Составить нормальное уравнение прямой.
22. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки  $A(6; 2)$  и  $B(-3; 5)$ .

23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2; -5)$  и параллельно прямой  $3x + 4y + 2 = 0$ .
24. Найти острый угол между прямыми  $y = -3x + 7$  и  $y = 2x + 1$ .
25. Определить расстояние от точки  $A(2; -1)$  до прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a = 8$ ,  $b = 6$ .
26. Найти расстояние от точки  $A(-1; 2)$  до прямой  $2x - 5y + 4 = 0$ .
27. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $x + 2y + 3 = 0$ ,  $2x + 3y + 4 = 0$  и параллельную прямой  $4x - 3y = 0$ .
28. Даны вершины треугольника  $A(-4; -3)$ ,  $B(6; 2)$ ,  $C(-2; 11)$ . Составить уравнения его медиан.
29. Даны вершины треугольника  $A(-4; -3)$ ,  $B(6; 2)$ ,  $C(-2; 11)$ . Составить уравнения его высот.
30. Даны стороны треугольника  $AB: x + y - 6 = 0$ ,  $AC: 3x - 5y + 14 = 0$ ,  $BC: 5x - 3y - 14 = 0$ . Составить уравнение высоты, опущенной из вершины  $B$ .
31. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек  $A(1; -4; 2)$ ,  $B(7; 1; -5)$ .
32. Найти точку  $A$ , симметричную точке  $B(3; -3; -1)$  относительно плоскости  $2x - 4y - 4z - 13 = 0$ .
33. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; 0; -1)$ ,  $B(1; -1; 3)$  и перпендикулярной плоскости  $3x + 2y - z + 5 = 0$ .
34. Найти точку  $A$ , симметричную точке  $B(0; 2; 1)$  относительно прямой  $\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ .
35. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:
- 1)  $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 2)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$3) \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

36. Написать уравнение эллипса, пересекающего одну из координатных осей в точках  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  и касающегося второй координатной оси в точке  $C(x_3; y_3)$ , если его оси симметрии параллельны осям координат:

1.  $(3, 0), (9, 0), (0, 5)$ ;
2.  $(0, -15), (0, -3), (15, 0)$ ;
3.  $(2, 0), (12, 0), (0, -4)$ ;
4.  $(0, 6), (0, 2), (9, 0)$ ;
5.  $(3, 0), (15, 0), (0, 5)$ ;
6.  $(0, 6), (0, 14), (7, 0)$ ;
7.  $(-2, 0), (-8, 0), (0, 16)$ ;
8.  $(0, 6), (0, 16), (-8, 0)$ ;
9.  $(-9, 0), (-1, 0), (0, 3)$ ;
10.  $(0, -3), (0, -1), (-6, 0)$ ;
11.  $(-12, 0), (-4, 0), (0, 9)$ ;
12.  $(0, 3), (0, 15), (10, 0)$ ;
13.  $(2, 0), (8, 0), (0, -4)$ ;
14.  $(0, 4), (0, 12), (-6, 0)$ ;
15.  $(-16, 0), (-8, 0), (0, 8)$ ;
16.  $(0, 2), (0, 8), (-16, 0)$ ;
17.  $(5, 0), (11, 0), (0, 10)$ ;
18.  $(0, 10), (0, 18), (-15, 0)$ ;
19.  $(1, 0), (3, 0), (0, 6)$ ;
20.  $(0, -1), (0, -5), (10, 0)$ ;
21.  $(4, 0), (10, 0), (0, -8)$ ;
22.  $(0, -9), (0, -3), (-5, 0)$ ;
23.  $(6, 0), (14, 0), (0, -7)$ ;
24.  $(0, -1), (0, -9), (6, 0)$ ;
25.  $(-6, 0), (-2, 0), (0, -9)$ ;
26.  $(0, -20), (0, -4), (15, 0)$ ;
27.  $(-12, 0), (-2, 0), (0, 12)$ ;
28.  $(0, -8), (0, -2), (4, 0)$ ;
29.  $(-7, 0), (-3, 0), (0, -7)$ ;
30.  $(0, -6), (0, -14), (-21, 0)$ .

37. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку

$A(x_0; y_0)$ , асимптотами которой служат прямые  $y = \pm \frac{b}{a}x$ :

1.  $A(4, 3), y = \pm \frac{3}{2}x;$

2.  $A(3, 2), y = \pm 2x;$

3.  $A(4, 1), y = \pm \frac{1}{2}x;$

4.  $A(3, 1), y = \pm \frac{2}{3}x;$

5.  $A(6, 1), y = \pm \frac{1}{3}x;$

6.  $A(8, 9), y = \pm \frac{3}{2}x;$

7.  $A(4, 2), y = \pm 2x;$

8.  $A(6, 2), y = \pm \frac{1}{2}x;$

9.  $A(6, 2), y = \pm \frac{2}{3}x;$

10.  $A(9, 2), y = \pm \frac{1}{3}x;$

11.  $A(10, 9), y = \pm \frac{3}{2}x;$

12.  $A(5, 2), y = \pm 2x;$

13.  $A(6, 1), y = \pm \frac{1}{2}x;$

14.  $A(9, 2), y = \pm \frac{2}{3}x;$

15.  $A(12, 2), y = \pm \frac{1}{3}x;$

16.  $A(6, 3), y = \pm \frac{3}{2}x;$

17.  $A(5, 6), y = \pm 2x;$

18.  $A(8, 3), y = \pm \frac{1}{2}x;$

19.  $A(9, 4), y = \pm \frac{2}{3}x;$

20.  $A(15, 3), y = \pm \frac{1}{3}x;$

21.  $A(8, 3), y = \pm \frac{3}{2}x;$

22.  $A(4, 4), y = \pm 2x;$

23.  $A(8, 2), y = \pm \frac{1}{2}x;$

24.  $A(12, 2), y = \pm \frac{2}{3}x;$

25.  $A(15, 4), y = \pm \frac{1}{3}x;$

26.  $A(4, 6), y = \pm 2x;$

27.  $A(12, 4), y = \pm \frac{2}{3}x;$

28.  $A(18, 5), y = \pm \frac{1}{3}x;$

29.  $A(6, 4), y = \pm 2x;$

30.  $A(12, 6), y = \pm \frac{2}{3}x.$

38. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку  $A(x_0; y_0)$ , асимптотами которой служат прямые  $l_1$  и  $l_2$ :

1.  $A(0, 0)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ;
2.  $A(1, 3)$ ,  $x = -3$ ,  $y = 2$ ;
3.  $A(2, 3)$ ,  $x = 5$ ,  $y = -2$ ;
4.  $A(1, 5)$ ,  $x = -1$ ,  $y = 4$ ;
5.  $A(4, -1)$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ;
6.  $A(4, 1)$ ,  $x = 2$ ,  $y = -3$ ;
7.  $A(3, 2)$ ,  $x = -2$ ,  $y = 4$ ;
8.  $A(4, 2)$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ;
9.  $A(1, 0)$ ,  $x = -1$ ,  $y = -2$ ;
10.  $A(-1, -2)$ ,  $x = 0$ ,  $y = -3$ ;
11.  $A(-2, 3)$ ,  $x = -4$ ,  $y = 2$ ;
12.  $A(3, -2)$ ,  $x = 6$ ,  $y = -1$ ;
13.  $A(1, 1)$ ,  $x = 0$ ,  $y = -3$ ;
14.  $A(-2, 1)$ ,  $x = -6$ ,  $y = 3$ ;
15.  $A(1, 3)$ ,  $x = -5$ ,  $y = 1$ ;
16.  $A(6, 1)$ ,  $x = 4$ ,  $y = -2$ ;
17.  $A(2, 1)$ ,  $x = 3$ ,  $y = -1$ ;
18.  $A(0, 2)$ ,  $x = -1$ ,  $y = -1$ ;
19.  $A(1, 3)$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ;
20.  $A(8, 5)$ ,  $x = -2$ ,  $y = 2$ ;
21.  $A(4, 5)$ ,  $x = -3$ ,  $y = 4$ ;
22.  $A(5, -1)$ ,  $x = 7$ ,  $y = -2$ ;
23.  $A(1, 8)$ ,  $x = -7$ ,  $y = 3$ ;
24.  $A(-1, 5)$ ,  $x = -2$ ,  $y = 7$ ;
25.  $A(1, -1)$ ,  $x = -1$ ,  $y = 2$ ;
26.  $A(1, -2)$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$ ;
27.  $A(4, 5)$ ,  $x = 3$ ,  $y = 3$ ;
28.  $A(0, 2)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ ;
29.  $A(3, 8)$ ,  $x = 2$ ,  $y = -2$ ;
30.  $A(-2, 1)$ ,  $x = -5$ ,  $y = 3$ .

39. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в данной точке, ось симметрии параллельна оси  $Ox$  ( $Oy$ ), если на другой оси координат эта парабола высекает хорду длины  $q$ :

1.  $Oy$ ,  $(-5, 12)$ ,  $q = 12\sqrt{2}$ ;
2.  $Ox$ ,  $(-4, 3)$ ,  $q = 8$ ;
3.  $Oy$ ,  $(3, 5)$ ,  $q = 10$ ;
4.  $Ox$ ,  $(3, -1)$ ,  $q = 12$ ;
5.  $Oy$ ,  $(-3, -8)$ ,  $q = 8$ ;
6.  $Ox$ ,  $(-10, 1)$ ,  $q = 20$ ;
7.  $Ox$ ,  $(4, 8)$ ,  $q = 12$ ;
8.  $Oy$ ,  $(3, 2)$ ,  $q = 4$ ;
9.  $Ox$ ,  $(-5, -1)$ ,  $q = 10\sqrt{2}$ ;
10.  $Oy$ ,  $(1, -12)$ ,  $q = 12$ ;
11.  $Oy$ ,  $(1, -3)$ ,  $q = 6$ ;
12.  $Ox$ ,  $(7, -3)$ ,  $q = 28$ ;
13.  $Oy$ ,  $(-8, 10)$ ,  $q = 8\sqrt{5}$ ;
14.  $Ox$ ,  $(-12, 3)$ ,  $q = 24$ ;
15.  $Ox$ ,  $(-1, -3)$ ,  $q = 4$ ;
16.  $Oy$ ,  $(9, -3)$ ,  $q = 12$ ;
17.  $Ox$ ,  $(4, -5)$ ,  $q = 16$ ;
18.  $Oy$ ,  $(9, 10)$ ,  $q = 4\sqrt{10}$ ;
19.  $Oy$ ,  $(-2, 4)$ ,  $q = 8$ ;
20.  $Ox$ ,  $(5, 2)$ ,  $q = 4\sqrt{5}$ ;
21.  $Oy$ ,  $(-11, -6)$ ,  $q = 6\sqrt{2}$ ;
22.  $Ox$ ,  $(-6, 2)$ ,  $q = 12$ ;
23.  $Ox$ ,  $(3, 2)$ ,  $q = 12$ ;
24.  $Oy$ ,  $(-6, 4)$ ,  $q = 16$ ;
25.  $Ox$ ,  $(8, 5)$ ,  $q = 16$ ;
26.  $Oy$ ,  $(6, -8)$ ,  $q = 8$ ;
27.  $Ox$ ,  $(-4, -3)$ ,  $q = 8$ ;
28.  $Oy$ ,  $(7, 8)$ ,  $q = 8$ ;
29.  $Ox$ ,  $(6, 4)$ ,  $q = 12$ ;
30.  $Oy$ ,  $(-7, -4)$ ,  $q = 8$ .

40. Написать уравнение линии второго порядка, зная её фокус  $F(x_1; y_1)$ , соответствующую ему директрису  $\delta$  и эксцентриситет  $e$ . Найти второй фокус и вторую директрису:

1.  $F(4, 0)$ ,  $\delta : x = 5$ ,  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
2.  $F(1, 4)$ ,  $\delta : y = \frac{44}{3}$ ,  $e = \frac{3}{5}$ ;
3.  $F(4, 0)$ ,  $\delta : x = 8$ ,  $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
4.  $F(-1, 10)$ ,  $\delta : y = \frac{85}{7}$ ,  $e = \frac{7}{8}$ ;
5.  $F(2, -1)$ ,  $\delta : x = 5$ ,  $e = \frac{2}{\sqrt{10}}$ ;
6.  $F(1, 6)$ ,  $\delta : y = \frac{54}{5}$ ,  $e = \frac{5}{7}$ ;
7.  $F(3, -1)$ ,  $\delta : x = 5$ ,  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
8.  $F(-1, 3)$ ,  $\delta : y = \frac{45}{4}$ ,  $e = \frac{4}{7}$ ;
9.  $F(1, 0)$ ,  $\delta : x = 2$ ,  $e = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ;
10.  $F(-1, 7)$ ,  $\delta : y = \frac{46}{5}$ ,  $e = \frac{5}{6}$ ;
11.  $F(1, 1)$ ,  $\delta : x = \frac{3}{2}$ ,  $e = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;
12.  $F(2, 2)$ ,  $\delta : y = 7$ ,  $e = \frac{2}{3}$ ;
13.  $F(3, 1)$ ,  $\delta : x = \frac{13}{3}$ ,  $e = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ;
14.  $F(0, 5)$ ,  $\delta : y = \frac{29}{4}$ ,  $e = \frac{4}{5}$ ;
15.  $F(6, 0)$ ,  $\delta : x = \frac{23}{3}$ ,  $e = \frac{3}{\sqrt{14}}$ ;
16.  $F(1, 3)$ ,  $\delta : y = 12$ ,  $e = \frac{1}{2}$ ;
17.  $F(4, 2)$ ,  $\delta : x = \frac{13}{3}$ ,  $e = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ;
18.  $F(1, 1)$ ,  $\delta : y = 17$ ,  $e = \frac{1}{3}$ ;

$$19. F(1, -1), \quad \delta : x = \frac{9}{2}, \quad e = \frac{2}{\sqrt{11}};$$

$$20. F(0, 4), \quad \delta : y = \frac{13}{2}, \quad e = \frac{2}{3};$$

$$21. F(1, 1), \quad \delta : x = 3, \quad e = \frac{3}{\sqrt{15}};$$

$$22. F(3, 3), \quad \delta : y = \frac{16}{3}, \quad e = \frac{3}{4};$$

$$23. F(2, 2), \quad \delta : x = \frac{14}{3}, \quad e = \frac{3}{\sqrt{17}};$$

$$24. F(3, 4), \quad \delta : y = \frac{28}{3}, \quad e = \frac{3}{5};$$

$$25. F(1, -2), \quad \delta : x = \frac{5}{2}, \quad e = \frac{2}{\sqrt{7}};$$

$$26. F(-1, 8), \quad \delta : y = \frac{88}{7}, \quad e = \frac{7}{9};$$

$$27. F(3, 0), \quad \delta : x = 27, \quad e = \frac{1}{2};$$

$$28. F(1, 11), \quad \delta : y = \frac{37}{2}, \quad e = \frac{2}{3};$$

$$29. F(6, 0), \quad \delta : x = \frac{27}{2}, \quad e = \frac{2}{3};$$

$$30. F(-3, 7), \quad \delta : y = \frac{91}{5}, \quad e = \frac{5}{9}.$$

41. Написать уравнение линии второго порядка, зная её фокус  $F(x_1; y_1)$ , соответствующую ему директрису  $\delta$  и эксцентриситет  $e$ . Найти второй фокус и вторую директрису:

$$1. F(1, 6), \quad \delta : y = \frac{29}{7}, \quad e = \frac{7}{6};$$

$$2. F(5, 1), \quad \delta : x = \frac{5}{6}, \quad e = \frac{6}{\sqrt{11}};$$

$$3. F(-1, 9), \quad \delta : y = \frac{11}{2}, \quad e = \frac{4}{3};$$

$$4. F(2, 1), \quad \delta : x = 1, \quad e = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$5. F(2, 7), \quad \delta : y = \frac{31}{6}, \quad e = \frac{6}{5};$$

6.  $F(9, 0), \delta : x = \frac{15}{2}, e = \frac{2}{\sqrt{3}};$
7.  $F(1, 9), \delta : y = \frac{39}{7}, e = \frac{7}{5};$
8.  $F(5, -2), \delta : x = \frac{11}{4}, e = \frac{4}{\sqrt{7}};$
9.  $F(-2, 7), \delta : y = \frac{11}{3}, e = \frac{3}{2};$
10.  $F(7, -1), \delta : x = \frac{31}{5}, e = \frac{5}{\sqrt{21}};$
11.  $F(2, 4), \delta : y = \frac{11}{5}, e = \frac{5}{4};$
12.  $F(5, -1), \delta : x = 2, e = 2;$
13.  $F(-1, 6), \delta : y = \frac{17}{4}, e = \frac{4}{3};$
14.  $F(6, 0), \delta : x = \frac{29}{7}, e = \frac{7}{6};$
15.  $F(1, 3), \delta : y = -\frac{1}{5}, e = \frac{5}{3};$
16.  $F(3, 0), \delta : x = \frac{7}{6}, e = \frac{6}{5};$
17.  $F(-2, 2), \delta : y = \frac{1}{3}, e = \frac{3}{2};$
18.  $F(8, 1), \delta : x = \frac{23}{7}, e = \frac{7}{4};$
19.  $F(-1, 2), \delta : y = -1, e = 2;$
20.  $F(9, 1), \delta : x = \frac{54}{7}, e = \frac{7}{2\sqrt{10}};$
21.  $F(3, 6), \delta : y = \frac{9}{5}, e = \frac{5}{2};$
22.  $F(8, 2), \delta : x = \frac{20}{7}, e = \frac{7}{\sqrt{13}};$
23.  $F(1, 9), \delta : y = \frac{11}{3}, e = 3;$
24.  $F(8, -2), \delta : x = \frac{16}{7}, e = \frac{7}{3};$
25.  $F(1, 8), \delta : y = \frac{49}{8}, e = \frac{8}{7};$

$$26. F(9, -1), \quad \delta : x = \frac{38}{7}, \quad e = \frac{7}{2\sqrt{6}};$$

$$27. F(0, 8), \quad \delta : y = \frac{40}{9}, \quad e = \frac{9}{7};$$

$$28. F(4, -1), \quad \delta : x = \frac{9}{4}, \quad e = \frac{4}{3};$$

$$29. F(1, 11), \quad \delta : y = \frac{59}{10}, \quad e = \frac{10}{7};$$

$$30. F(8, 0), \quad \delta : x = \frac{32}{7}, \quad e = \frac{7}{5}.$$

42. Написать уравнение линии второго порядка, зная её фокус  $F(x_1; y_1)$  и соответствующую ему директрису  $\delta$ , если эксцентриситет линии равен 1.

$$1. F(1, 3), \quad \delta : x = -3;$$

$$2. F(3, 6), \quad \delta : y = 12;$$

$$3. F(-2, 3), \quad \delta : x = 2;$$

$$4. F(1, 2), \quad \delta : y = -3;$$

$$5. F(4, 5), \quad \delta : x = 0;$$

$$6. F(1, 2), \quad \delta : y = 6;$$

$$7. F(1, -1), \quad \delta : x = 5;$$

$$8. F(3, 0), \quad \delta : y = -5;$$

$$9. F(-2, -2), \quad \delta : x = -6;$$

$$10. F(-1, 3), \quad \delta : y = 9;$$

$$11. F(8, -3), \quad \delta : x = 10;$$

$$12. F(-1, -2), \quad \delta : y = -10;$$

$$13. F(5, -2), \quad \delta : x = 3;$$

$$14. F(-5, -1), \quad \delta : y = 1;$$

$$15. F(7, -8), \quad \delta : x = 13;$$

$$16. F(2, 3), \quad \delta : y = -1;$$

$$17. F(-1, 7), \quad \delta : x = -5;$$

$$18. F(6, 1), \quad \delta : y = 7;$$

$$19. F(2, 6), \quad \delta : x = 10;$$

$$20. F(5, -4), \quad \delta : y = -7;$$

$$21. F(-9, 1), \quad \delta : x = -11;$$

$$22. F(3, -2), \quad \delta : y = 3;$$

$$23. F(3, -7), \quad \delta : x = 15;$$

24.  $F(-3, 1), \delta : y = -6;$
25.  $F(7, -5), \delta : x = 1;$
26.  $F(7, 0), \delta : y = 6;$
27.  $F(1, 1), \delta : x = 5;$
28.  $F(-6, 2), \delta : y = -3;$
29.  $F(-6, 9), \delta : x = -15;$
30.  $F(-5, -3), \delta : y = 5.$

43. Написать уравнение линии второго порядка, зная её фокус  $F(x_1; y_1)$ , соответствующая ему директриса задана уравнением  $x = a$  ( $y = b$ ), если линия проходит через точку  $A(x_2; y_2)$ . Найти второй фокус и вторую директрису:

1.  $F(1, 4), y = \frac{44}{3}, A\left(\frac{29}{5}, 6\right);$
2.  $F(7, -1), x = \frac{46}{5}, A\left(7, \frac{5}{6}\right);$
3.  $F(-1, 10), y = \frac{85}{7}, A\left(\frac{7}{8}, 10\right);$
4.  $F(2, 1), x = \frac{22}{3}, A\left(2, \frac{21}{5}\right);$
5.  $F(1, 6), y = \frac{54}{5}, A\left(\frac{31}{7}, 6\right);$
6.  $F(5, 2), x = 10, A\left(5, \frac{16}{3}\right);$
7.  $F(-1, 3), y = \frac{45}{4}, A\left(\frac{26}{7}, 3\right);$
8.  $F(3, 2), x = \frac{11}{2}, A\left(3, \frac{11}{3}\right);$
9.  $F(-1, 7), y = \frac{46}{5}, A\left(\frac{5}{6}, 7\right);$
10.  $F(4, 0), x = 10, A(4, 3);$
11.  $F(0, 5), y = \frac{29}{4}, A\left(\frac{12}{5}, 4\right);$
12.  $F(6, -2), x = \frac{54}{5}, A\left(6, \frac{10}{7}\right);$

13.  $F(1, 1), \quad y = 17, \quad A\left(\frac{19}{3}, 1\right);$
14.  $F(-1, 0), \quad x = \frac{43}{2}, \quad A\left(-1, \frac{45}{7}\right);$
15.  $F(0, 4), \quad y = \frac{13}{2}, \quad A\left(\frac{5}{3}, 4\right);$
16.  $F(5, 0), \quad x = 14, \quad A\left(5, \frac{9}{2}\right);$
17.  $F(3, 3), \quad y = \frac{16}{3}, \quad A\left(\frac{19}{4}, 3\right);$
18.  $F(5, 2), \quad x = \frac{47}{3}, \quad A\left(7, \frac{34}{5}\right);$
19.  $F(3, 4), \quad y = \frac{28}{3}, \quad A\left(\frac{31}{5}, 4\right);$
20.  $F(6, 1), \quad x = \frac{57}{4}, \quad A\left(6, \frac{40}{7}\right);$
21.  $F(-1, 8), \quad y = \frac{88}{7}, \quad A\left(\frac{13}{3}, 4\right);$
22.  $F(4, -1), \quad x = \frac{52}{3}, \quad A\left(4, \frac{33}{7}\right);$
23.  $F(1, 11), \quad y = \frac{37}{2}, \quad A(6, 11);$
24.  $F(2, -3), \quad x = \frac{17}{4}, \quad A\left(1, -\frac{3}{5}\right);$
25.  $F(1, 6), \quad y = \frac{65}{8}, \quad A\left(\frac{26}{9}, 6\right);$
26.  $F(4, 0), \quad x = 5, \quad A(-10, 2);$
27.  $F(-1, 8), \quad y = \frac{71}{7}, \quad A\left(\frac{7}{8}, 8\right);$
28.  $F(7, -1), \quad x = \frac{15}{2}, \quad A(6, 0);$
29.  $F(-3, 5), \quad y = \frac{25}{2}, \quad A(2, 5);$
30.  $F(0, 1), \quad x = \frac{7}{3}, \quad A\left(0, \frac{11}{4}\right).$

44. Написать уравнение линии второго порядка, зная её фокус  $F(x_1; y_1)$ , соответствующая ему директриса задана уравнением  $x = a$  ( $y = b$ ), если линия проходит через точку  $A(x_2; y_2)$ . Найти второй фокус и вторую директрису:

$$1. F(6, -1), \quad x = \frac{14}{5}, \quad A\left(\frac{19}{4}, 2\right);$$

$$2. F(-1, 9), \quad y = \frac{11}{2}, \quad A(41, 49);$$

$$3. F(7, -1), \quad x = \frac{5}{2}, \quad A(-5, 8);$$

$$4. F(2, 7), \quad y = \frac{31}{6}, \quad A(35, 51);$$

$$5. F(4, 0), \quad x = \frac{8}{3}, \quad A\left(\frac{7}{2}, 1\right);$$

$$6. F(1, 9), \quad y = \frac{39}{7}, \quad A(25, 27);$$

$$7. F(8, 1), \quad x = \frac{22}{3}, \quad A(10, 3);$$

$$8. F(-2, 7), \quad y = \frac{11}{3}, \quad A(3, 7);$$

$$9. F(4, 1), \quad x = -\frac{1}{2}, \quad A(4, 10);$$

$$10. F(2, 4), \quad y = \frac{11}{5}, \quad A\left(6, \frac{17}{3}\right);$$

$$11. F(5, 0), \quad x = \frac{5}{3}, \quad A(5, 5);$$

$$12. F(-1, 6), \quad y = \frac{17}{4}, \quad A\left(\frac{4}{3}, 6\right);$$

$$13. F(8, -1), \quad x = \frac{16}{3}, \quad A(7, 1);$$

$$14. F(1, 3), \quad y = -\frac{1}{5}, \quad A\left(4, \frac{7}{4}\right);$$

$$15. F(9, -2), \quad x = \frac{19}{3}, \quad A(-2, 0);$$

$$16. F(-2, 2), \quad y = \frac{1}{3}, \quad A\left(\frac{1}{2}, 2\right);$$

$$17. F(4, 0), \quad x = -\frac{1}{2}, \quad A(4, 9);$$

18.  $F(-1, 2), y = -1, A(5, 2);$
19.  $F(4, 1), x = \frac{11}{5}, A\left(4, \frac{13}{4}\right);$
20.  $F(1, 9), y = \frac{11}{3}, A(17, 9);$
21.  $F(5, 2), x = \frac{5}{3}, A(5, -3);$
22.  $F(1, 8), y = \frac{49}{8}, A(16, 28);$
23.  $F(7, 1), x = \frac{5}{3}, A(7, 17);$
24.  $F(0, 8), y = \frac{40}{9}, A(16, 20);$
25.  $F(2, 0), x = 5, A(10, 6);$
26.  $F(2, 3), y = -\frac{1}{3}, A(7, 3);$
27.  $F(8, -3), x = 5, A(8, 3);$
28.  $F(-1, 6), y = \frac{13}{3}, A\left(\frac{3}{2}, 0\right);$
29.  $F(-4, -3), x = -\frac{4}{3}, A(7, -1);$
30.  $F(-1, 7), y = \frac{41}{8}, A(14, 27).$

45. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через точку  $A(x_0; y_0)$ , если дан фокус  $F(x_1; y_1)$  линии и соответствующая ему директриса  $\delta$ :

1.  $A(-2, 7), F(4, -1), \delta : x = 8;$
2.  $A(7, 2), F(3, 5), \delta : y = 7;$
3.  $A(1, 9), F(1, 3), \delta : x = -5;$
4.  $A(9, -4), F(3, -4), \delta : y = -10;$
5.  $A(-4, 11), F(2, 3), \delta : x = 6;$
6.  $A(5, 5), F(-1, 5), \delta : y = -1;$
7.  $A(9, 13), F(0, 1), \delta : x = -6;$
8.  $A(2, 3), F(-2, 3), \delta : y = 7;$
9.  $A(13, 16), F\left(\frac{5}{2}, 2\right), \delta : x = -\frac{9}{2};$
10.  $A(-7, 13), F(-1, 5), \delta : x = 3;$

11.  $A(13, -10), F(1, -1), \delta : y = 5;$
12.  $A(6, 3), F(2, 3), \delta : y = -1;$
13.  $A(3, -5), F(3, -1), \delta : x = -1;$
14.  $A(-3, -6), F(7, -6), \delta : y = 4;$
15.  $A(5, -1), F(5, -5), \delta : x = 1;$
16.  $A(-6, 2), F(-2, -1), \delta : y = -3;$
17.  $A(8, -2), F(2, -2), \delta : y = 4;$
18.  $A(17, 13), F\left(3, \frac{5}{2}\right), \delta : y = -\frac{9}{2};$
19.  $A(-4, 13), F(5, 1), \delta : x = 11;$
20.  $A(9, 1), F(-3, 1), \delta : y = 13;$
21.  $A(7, 10), F(7, -2), \delta : x = -5;$
22.  $A(7, 2), F(3, 2), \delta : y = -2;$
23.  $A(1, 7), F(-2, 3), \delta : x = -4;$
24.  $A(-1, 15), F\left(\frac{43}{2}, 1\right), \delta : x = -\frac{55}{2};$
25.  $A(-1, 1), F(-5, 1), \delta : y = -3;$
26.  $A(11, 5), F(5, -3), \delta : x = 1;$
27.  $A(12, -3), F(4, 3), \delta : y = -13;$
28.  $A(7, 4), F(1, 4), \delta : y = -2;$
29.  $A(10, -1), F(2, -1), \delta : y = -9;$
30.  $A(1, 5), F(7, -3), \delta : x = -9.$

46. Дан эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Написать уравнение параболы, вершины которой находятся в левом (нижнем) фокусе эллипса, если парабола проходит через вершины эллипса, лежащие на его малой оси:

1.  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1;$
2.  $\frac{x^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1;$
3.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;$
4.  $\frac{x^2}{27} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1;$

5.  $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1;$
6.  $\frac{x^2}{13} + \frac{(y+1)^2}{49} = 1;$
7.  $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1;$
8.  $\frac{x^2}{24} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1;$
9.  $\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1;$
10.  $\frac{x^2}{33} + \frac{(y-3)^2}{49} = 1;$
11.  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1;$
12.  $\frac{x^2}{40} + \frac{(y+3)^2}{49} = 1;$
13.  $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{16} = 1;$
14.  $\frac{x^2}{45} + \frac{(y+1)^2}{49} = 1;$
15.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Дан эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Написать уравнение параболы, вершины которой находятся в правом (верхнем) фокусе эллипса, если парабола проходит через вершины эллипса, лежащие на его малой оси:

16.  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1;$
17.  $\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{7} = 1;$
18.  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1;$
19.  $\frac{x^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{10} = 1;$

20.  $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1;$
21.  $\frac{x^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{10} = 1;$
22.  $\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1;$
23.  $\frac{x^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{11} = 1;$
24.  $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1;$
25.  $\frac{x^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{11} = 1;$
26.  $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{4} = 1;$
27.  $\frac{x^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{14} = 1;$
28.  $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1;$
29.  $\frac{x^2}{10} + \frac{(y-3)^2}{14} = 1;$
30.  $\frac{x^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{15} = 1.$

47. Написать уравнение эллипса и гиперболы с фокусами  $F_1(x_1; y_1)$  и  $F_2(x_2; y_2)$ , проходящих через точку  $A(x_3; y_3)$ :

1.  $(7, 0), (-7, 0), \left( \frac{15\sqrt{10}}{7}, \frac{2}{7} \right);$
2.  $(6, 0), (-6, 0), \left( \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right);$
3.  $(5, 0), (-5, 0), (-\sqrt{7}, 2\sqrt{2});$
4.  $(4, 0), (-4, 0), (\sqrt{15}, -1);$
5.  $(3, 0), (-3, 0), \left( \frac{5\sqrt{7}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3} \right);$
6.  $(7, 0), (-7, 0), (-2, 12);$
7.  $(6, 0), (-6, 0), (3\sqrt{3}, -3);$

8.  $(5, 0), (-5, 0), (3\sqrt{2}, 2\sqrt{3});$
9.  $(4, 0), (-4, 0), \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right);$
10.  $(3, 0), (-3, 0), \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right);$
11.  $(7, 0), (-7, 0), \left(-\frac{20\sqrt{5}}{7}, -\frac{3}{7}\right);$
12.  $(6, 0), (-6, 0), (5, 2);$
13.  $(5, 0), (-5, 0), (-3\sqrt{2}, \sqrt{2});$
14.  $(4, 0), (-4, 0), \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
15.  $(3, 0), (-3, 0), \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right);$
16.  $(6, 0), (-6, 0), \left(-\frac{4\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right);$
17.  $(5, 0), (-5, 0), (2\sqrt{7}, -\sqrt{2});$
18.  $(10, 0), (-10, 0), (8\sqrt{2}, -6);$
19.  $(6, 0), (-6, 0), \left(-\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right);$
20.  $(4, 0), (-4, 0), \left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right);$
21.  $(3, 0), (-3, 0), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right);$
22.  $(6, 0), (-6, 0), (2\sqrt{2}, -\sqrt{10});$
23.  $(4, 0), (-4, 0), (2\sqrt{3}, 2);$
24.  $(5, 0), (-5, 0), (-4\sqrt{2}, -3);$
25.  $(6, 0), (-6, 0), \left(\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right);$
26.  $(4, 0), (-4, 0), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right);$

27.  $(5, 0), (-5, 0), (6, 2);$   
 28.  $(6, 0), (-6, 0), \left(\frac{10}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right);$   
 29.  $(4, 0), (-4, 0), (3, 1);$   
 30.  $(3, 0), (-3, 0), (4, 1).$

48. Написать уравнение эллипса, для которого даны уравнения большой и малой оси, известны длины полуосей  $a$  и  $b$ :

1.  $x + y - 1 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1;$
2.  $x - y = 0, \quad x + y - 2 = 0, \quad a = 3, \quad b = 2;$
3.  $3x + 2y - 1 = 0, \quad 2x - 3y - 5 = 0, \quad a = 4, \quad b = 1;$
4.  $2x + y + 1 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1;$
5.  $4x - y + 1 = 0, \quad x + 4y - 4 = 0, \quad a = 3, \quad b = 1;$
6.  $3x - 4y - 3 = 0, \quad 4x + 3y - 4 = 0, \quad a = 5, \quad b = 2;$
7.  $x - y - 1 = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad a = 3, \quad b = 2;$
8.  $5x - y + 4 = 0, \quad x + 5y + 6 = 0, \quad a = 4, \quad b = 2;$
9.  $2x + 5y + 8 = 0, \quad 5x - 2y - 9 = 0, \quad a = 4, \quad b = 3;$
10.  $5x - 3y - 8 = 0, \quad 3x + 5y + 2 = 0, \quad a = 5, \quad b = 3;$
11.  $4x + 5y + 19 = 0, \quad 5x - 4y - 7 = 0, \quad a = 3, \quad b = 1;$
12.  $x - 4y + 6 = 0, \quad 4x + y - 10 = 0, \quad a = 3, \quad b = 2;$
13.  $x + y - 2 = 0, \quad x - y = 0, \quad a = 4, \quad b = 2;$
14.  $x + 5y - 14 = 0, \quad 5x - y + 8 = 0, \quad a = 4, \quad b = 1;$
15.  $3x - y - 3 = 0, \quad x + 3y - 11 = 0, \quad a = 5, \quad b = 4;$
16.  $x + 4y + 6 = 0, \quad 4x - y - 10 = 0, \quad a = 5, \quad b = 3;$
17.  $x - 5y + 9 = 0, \quad 5x + y - 7 = 0, \quad a = 5, \quad b = 2;$
18.  $3x + 4y - 3 = 0, \quad 4x - 3y - 4 = 0, \quad a = 3, \quad b = 1;$
19.  $3x - 2y + 1 = 0, \quad 2x + 3y - 8 = 0, \quad a = 3, \quad b = 1;$
20.  $x + y - 1 = 0, \quad x - y - 3 = 0, \quad a = 4, \quad b = 3;$
21.  $3x + y + 5 = 0, \quad x - 3y - 5 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1;$
22.  $5x + 2y + 8 = 0, \quad 2x - 5y + 9 = 0, \quad a = 3, \quad b = 2;$
23.  $3x - 5y - 5 = 0, \quad 5x + 3y + 3 = 0, \quad a = 4, \quad b = 3;$
24.  $4x + 3y - 6 = 0, \quad 3x - 4y + 8 = 0, \quad a = 4, \quad b = 2;$
25.  $x - 2y + 3 = 0, \quad 2x + y + 1 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1;$
26.  $5x + 4y - 3 = 0, \quad 4x - 5y + 14 = 0, \quad a = 3, \quad b = 1;$
27.  $x + 3y - 1 = 0, \quad 3x - y + 7 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1;$

$$28. x - 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 12 = 0, \quad a = 3, \quad b = 2;$$

$$29. 2x + 3y + 4 = 0, \quad 3x - 2y + 6 = 0, \quad a = 4, \quad b = 1;$$

$$30. x - 3y - 7 = 0, \quad 3x + y - 1 = 0, \quad a = 5, \quad b = 2.$$

49. Составить уравнения кривой в полярных координатах, если дано её каноническое уравнение:

$$1. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{400} = 1;$$

$$2. \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{27} = 1;$$

$$3. \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$4. \frac{x^2}{63} - \frac{y^2}{28} = 1;$$

$$5. y^2 = 4x;$$

$$6. \frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{16} = 1;$$

$$7. \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{144} = 1;$$

$$8. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1;$$

$$9. \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{72} = 1;$$

$$10. y^2 = 10x;$$

$$11. \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1;$$

$$12. \frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{135} = 1;$$

$$13. \frac{x^2}{112} + \frac{y^2}{64} = 1;$$

$$14. \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1;$$

$$15. y^2 = 6x;$$

$$16. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1;$$

$$17. \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{60} = 1;$$

$$18. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{72} = 1;$$

$$19. \frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{96} = 1;$$

$$20. y^2 = 12x;$$

$$21. \frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{64} = 1;$$

$$22. \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1;$$

$$23. \frac{x^2}{180} + \frac{y^2}{81} = 1;$$

$$24. \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1;$$

$$25. y^2 = 14x;$$

$$26. \frac{x^2}{294} + \frac{y^2}{49} = 1;$$

$$27. \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{28} = 1;$$

$$28. \frac{x^2}{245} + \frac{y^2}{196} = 1;$$

$$29. \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{128} = 1;$$

$$30. y^2 = 8x.$$

50. Привести к каноническому виду следующие общие уравнения кривых 2-го порядка и нарисовать получившиеся фигуры:

1)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ ;

2)  $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ ;

3)  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ ;

4)  $7xy - 3 = 0$ ;

5)  $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ ;

6)  $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$ ;

7)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ ;

8)  $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$ ;

9)  $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$ ;

10)  $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$ ;

11)  $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$ ;

12)  $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$ ;

13)  $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$ ;

14)  $2xy + 3x - y - 2 = 0$ ;

15)  $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$ ;

16)  $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ ;

17)  $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$ ;

18)  $3x^2 - 4y + 5 = 0$ ;

19)  $x^2 - 5y = 0$ ;

20)  $4x^2 - 2x - 3 = 0$ ;

21)  $2xy + 3x - y - 2 = 0$ ;

22)  $x^2 + 2y^2 - 16 = 0$ ;

23)  $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ ;

24)  $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ ;

25)  $x^2 + y = 0$ ;

26)  $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ ;

27)  $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$ ;

28)  $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ ;

29)  $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ ;

30)  $y^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = 0$ ;

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-практическом пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения основных разделов высшей математики, таких как векторная алгебра, кривые и поверхности второго порядка, изучаемых в высшей школе студентами всех инженерно-технических и математических специальностей; проиллюстрировать теорию примерами и разобрать задачи разного уровня сложности.

Дополнительный дидактический материал позволит студентам самостоятельно закрепить полученные знания и отработать на практике приобретённые навыки решения задач.

Автор надеется, что пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 911 с.
2. Архангельский, А. В. Конечномерные векторные пространства / А. В. Архангельский. – М. : Изд-во МГУ, 1982. – 248 с.
3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. : Высшая школа, 1998. – 320 с.
4. Беклемишева, Л.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А Чубаров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.
5. Кривые второго порядка : метод. указания / сост. С. И. Яблокова ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : Изд-во ЯрГУ, 2014. – 60 с.
6. Кривые и поверхности второго порядка : учеб.-метод. пособие / сост.: Л. Г. Киселева, Т. Г. Смирнова, М. М Шульц. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2009. – 77 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учеб. пособие. – 9-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 240 с.
8. Милнор, Дж. Симметрические билинейные формы / Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. – М. : Наука, 1986. – 175 с.
9. Моденов, П. С. Аналитическая геометрия. – М. : Изд-во МГУ, 1969. – 698 с.
10. Моденов, П. С. Сборник задач по аналитической геометрии / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – М. : Наука, Гл. ред. физико-математической литературы, 1976. – 384 с.
11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 3 ч. Ч.1 / Д.Т. Письменный. – 10-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
12. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Наука, 1967. – 384 с.
13. Шихобалов, Л. С. Матрицы и определители. – СПб., 2015. – 55 с.
14. Шухова, Е. М. Владимир Григорьевич Шухов. Первый инженер России / Е. М. Шухова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 368 с.

*Учебное электронное издание*

ПРОХОРОВА Татьяна Вячеславовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Основы векторной алгебры.  
Кривые и поверхности второго порядка

Учебно-практическое пособие

*Издается в авторской редакции*

**Системные требования:** Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;  
дисковод CD-ROM.

**Тираж 8 экз.**

Издательство Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.