Владимирский государственный университет

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Владимир 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-1754-2

УДК 004.4
ББК 16.2

Авторы-составители: Е. А. Троицкая, Л. А. Артюшина

Рецензенты:
Кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры правового обеспечения государственного управления
и экономики Российского университета транспорта
Л. М. Малёшина

Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой информационных систем и программной инженерии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
И. Е. Жигалов

Троицкая, Е. А. Информационные технологии в математическом моделировании социально-экономических процессов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / авт.-сост. Е. А. Троицкая, Л. А. Артюшина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. – 400 с. – ISBN 978-5-9984-1754-2. – Электрон. дан. (11,4 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; WindowsXP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Излагаются методы и алгоритмы математического моделирования социально-экономических процессов. Приведено большое количество примеров реализации описываемых методов в MSExcel и MATHCAD и задания для самостоятельной работы, что позволяет использовать материал пособия в качестве практикума для выполнения практических и рейтинговых работ. Теоретический материал соответствует лекционному курсу дисциплины «Основы математического моделирования социальных и экономических процессов».

Предназначено для студентов бакалавриата и магистрантов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05, 38.04.05 «Бизнес-информатика», может быть использовано магистрантами, аспирантами других специальностей, если характер их научной работы предполагает обработку результатов социальных и экономических наблюдений.

Рекомендовано для формирования универсальных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 49. Ил. 74. Библиогр.: 25 назв.

ISBN 978-5-9984-1754-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для изучения дисциплины «Информационные технологии в математическом моделировании социально-экономических процессов». Цель освоения – изучение и освоение математических методов, позволяющих при наличии альтернативы и рисков сформировать, принять и реализовать обоснованное оптимальное управленческое решение, а также выработать практические навыки реализации данных методов средствами современных информационных технологий.

Развитие средств вычислительной техники и телекоммуникаций предопределяет курс на расширение знаний и способов владения навыками работы со специальным программным и аппаратным обеспечением информационных сетей и средств телекоммуникаций.

Основными задачами преподавания дисциплины являются:

– формирование общего понятия математического моделирования;

– изучение основ структурного анализа процессов на объекте моделирования;

– изучение технологии применения метода статистических испытаний;

– обучение студентов применению оптимизационных методов;

– выработка навыков применения средств информационных технологий для решения практических задач профессиональной деятельности.

В результате изучения курса обучающийся должен уметь использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний.

Достижение этих целей предполагает изучение студентами следующих модулей:

Модуль 1. Понятие математического моделирования. Линейные модели;

Модуль 2. Методы линейного программирования;

Модуль 3. Распределительные задачи;

Модуль 4. Статистические методы моделирования.

К каждому модулю даются контрольные вопросы, тестовые задания, приведен библиографический список литературы, представлен общий глоссарий.

Модуль 1. ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Тема 1. Математическое моделирование

Определение математического моделирования. Краткий обзор истории использования математического моделирования в социально-экономических исследованиях. Общая характеристика математического моделирования. Основные этапы моделирования. Структура математической модели, её основные составляющие. Классификация моделей. Достоинства и недостатки математического моделирования. Типовые системы математического моделирования. Линейные модели. Применение методов линейной алгебры в математическом моделировании

Моделирование — это метод исследования каких-либо явлений, процессов или систем объектов, который предполагает создание искусственных или естественных систем (моделей), имитирующих существенные свойства оригинала; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

Моделирование — одна из основных категорий теории познания: на идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования — как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели).

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передаёт всех его свойств и особенностей, а является его приближённым отображением.

Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведёт себя объект в различных условиях, т.е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Из определения моделей важны две характеристики: модель замещает объект изучения; находится с ним в определённых отношениях. Степень соответствия модели оригиналу может быть различной: подобие, аналогия, изоморфизм (взаимно однозначное соответствие структур модели и прототипа), гомоморфизм (обобщённое соответствие).

Моделирование — это процесс создания моделей и работа с ними.

Главные функции моделей — описательная, конструктивная и эвристическая.

Описательная функция модели состоит в том, что в исследуемом объекте выделяются и обобщаются существенные компоненты и взаимосвязи между ними.

Конструктивная функция модели состоит в её способности служить ориентиром, применять добытые знания в новых ситуациях.

Эвристическая функция модели способствует прогнозированию.

В зависимости от основной дидактической функции различают три вида моделей: описательные, конструктивные и эвристические. Описательные модели дают возможность сжато излагать информацию и воспроизводить её. Конструктивные модели больше ориентированы на применение знаний, эвристические — на овладение новыми знаниями, обобщение и систематизацию. При этом форма моделей может быть различной: модельная схема, знаковая модель, графическая, образная и т. д.

Модель в широком смысле- это любой образ, аналог мысленный или установленный изображение, описание, схема, чертеж, карта и т. п. какого-либо объема, процесса или явления, используемый в качестве его заменителя или представителя. Сам объект, процесс или явление называется оригиналом данной модели.

Моделирование – это исследование какого-либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Это использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

На идее моделирования базируется любой метод научного исследования, при этом, в теоретических методах используются различного рода знаковые, абстрактные модели, в экспериментальных - предметные модели.

При исследовании сложное реальное явление заменяется некоторой упрощенной копией или схемой, иногда такая копия служит лишь только для того чтобы запомнить и при следующей встрече узнать нужное явление. Иногда построенная схема отражает какие - то существенные черты, позволяет разобраться в механизме явления, дает возможность предсказать его изменение. Одному и тому же явлению могут соответствовать разные модели.

Задача исследователя - предсказывать характер явления и ход процесса.

Иногда, бывает, что объект доступен, но эксперименты с ним дорогостоящи или привести к серьезным экологическим последствиям. Знания о таких процессах получают с помощью моделей.

Важный момент - сам характер науки предполагает изучение не одного конкретного явления, а широкого класса родственных явлений. Предполагает необходимость формулировки каких - то общих категорических утверждений, которые называются законами. Естественно, что при такой формулировке многими подробностями пренебрегают. Чтобы более четко выявить закономерность сознательно идут на огрубление, идеализацию, схематичность, то есть изучают не само явление, а более или менее точную ее копию или модель. Все законы- это законы о моделях, а поэтому нет ничего удивительного в том, что с течением времени некоторые научные теории признаются непригодными. Это не приводит к краху науки, поскольку одна модель заменилась другой более современной.

Особую роль в науке играют математические модели, строительный материал и инструменты этих моделей - математические понятия. Они накапливались и совершенствовались в течении тысячелетий. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явление, то есть его математическая модель.

Изучение математической модели всегда связанно с некоторыми правилами действия над изучаемыми объектами. Эти правила отражают связи между причинами и следствиями.

Построение математической модели - это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение модели - это процедура не формальная. Сильно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и должна быть удобна для использования.

В последние три столетия необходимость решения различных задач естествознания, в основном физики и ее технических приложений, вызвала бурное развитие математических методов анализа (прежде всего дифференциального и интегрального исчисления, линейной и векторной алгебры, теории вероятностей).

Проникновение математики в экономику (как и в социологию, историю, психологию и другие гуманитарные науки) в большей степени связано с тем, что, как оказалось, анализ многих социально-экономических процессов не может быть выполнен без использования математических моделей. Применение математики в экономической науке - объективный этап ее развития, связанный с существованием устойчивых закономерностей и возможностью формализованного описания многих (хотя и не всех) экономических процессов.

И. Экланд, автор одной из первых книг по математической экономике, переведенной на русский язык, высказал такое мнение: "…экономика стремится стать математической, потому что со времен Декарта математизация стала идеалом строгости для всякой науки"

Убеждение о значении математики разделяли многие выдающиеся мыслители. Например, Леонардо да Винчи: " Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства." "Нет никакой достоверности там, где не находит приложения одна из математических наук, или там, где применяются науки, не связанные с математическими. "

Применение математических методов, в том числе и методов математического моделирования, в экономике в целом имеет длительную историю. В качестве примера приведем характеристику математического метода исследования основателем классической школы буржуазной политической экономии У. Петти (1623 - 1687). В предисловии к "Политической арифметике" У. Петти указывал, что его способ исследования "не обычный, ибо вместо того, чтобы употреблять слова только в сравнительной и превосходной степени и прибегать к умозрительным аргументам, я вступил на путь выражения своих мнений на языке чисел, весов и мер, что я уже давно стремился пойти по этому пути, чтобы показать пример политической арифметики".

Позже математика как метод анализа макроэкономических процессов была использована лейб - медиком короля Людовика XV доктором Ф. Кенэ, который в 1758 опубликовал "Экономическую таблицу". В этой работе сделана первая попытка построить схему взаимосвязи трех основных классов (производители-фермеры, землевладельцы и ремесленники). Идеи Ф. Кене позже получили развитие в схемах К. Маркса и в моделях народнохозяйственного баланса.

В конце XVIII в. Английский ученый Т. Мальтус в работе "Опыт о законе народонаселения " использовал математику при обосновании концепции, согласно которой численность населения строго ограничена средствами существования. Предполагая, что продовольственные ресурсы растут благодаря усилиям, предпринимаемым людьми из-за инстинктивного стремления к продолжению рода, он пришел к выводу, что, тем не менее, рост средств существования отстает от роста населения. Для подкрепления своей аргументации он утверждал, что рост численности населения определяется геометрической прогрессией, а рост производства продовольствия - арифметической. По Мальтусу, рост народонаселения может быть остановлен либо нравственными причинами (воздержание), либо несчастьями (голод, войны, эпидемии).

Математическое моделирование заявило о себе как о действенном методе анализа социально-экономических процессов в XVIII в. Первое логически последовательное изложение математической модели экономики было выведено французским математиком А.-О. Курно в книге "Исследование математических принципов теории богатства". В этой работе количественные методы были использованы для анализа конкуренции на рынке товара при различных рыночных ситуациях. А.-О. Курно ввел понятие функции спроса от цены, сформулировал основы математического аппарата теории фирмы, показал, что максимум прибыли достигается при условии равенства предельных издержек предельному доходу.

А.-О. Курно заложил основы не только теории фирмы и монополии, но и дуополии (рыночной ситуации, при которой на рынке соперничают 2 продавца). В модели дуополии Курно, которая описывается разностными уравнениями, используется гипотеза о том, что каждая конкурирующая фирма принимает свое решение о выпуске продукции из условия максимально возможной прибыли при предполагаемых действиях конкурента. Книга А.-О. Курно осталась незамеченной, также, как и работы некоторых других исследователей того времени (Ж. Дюпюи, Г. Госсена, П.-Ф. Ферхюльста), применявших при анализе социальных процессов аппарат дифференциального исчисления.

Сейчас Курно называют предтечей математического направления в экономической теории.

Во второй половине XIX века математическое моделирование стало активно развиваться в экономике. В опубликованных тогда книгах У. Джевонса "Теория политической экономии", К. Менгера "Основания политической экономии" и Л. Вальраса "Элементы чистой политической экономии" были заложены основы современной экономической теории. К началу XX в. усилиями Дж. Б. Кларка (США), В. Парето (Швейцария), А. Маршалла и Ф. Эджворта (Великобритания) и др. классическая экономическая наука была переведена на строгий математический язык. Поэтому начало XX в. можно считать периодом, когда математическое моделирование окончательно утвердилось в экономике как науке.

Удивительный исторический факт: в том же 1838 г., когда была опубликована ставшая впоследствии знаменитой работа А.-О. Курно бельгийский математик П.-Ф. Ферхюльст опубликовал статью "Замечания о законе, согласно которому происходит рост населения". В ней он построил дифференциальное уравнение, названное им позже логистическим, для прогнозирования численности населения. Введенный им в уравнение Мальтуса дополнительный отрицательный член, пропорциональный квадрату численности населения, отражает линейное уменьшение темпа прироста численности при увеличении последней.

Работа Ферхюльста, как и Курно, не была по достоинству воспринята современниками. Однако, позже выяснилось, что построенное им уравнение логистического роста носит универсальный характер: оно описывает динамические процессы в самых разных областях науки. Модифицированное уравнение Ферхюльста, в правую часть которого введена отрицательная константа, описывает в математической биологии процесс внутривидовой конкуренции с учетом постоянного отлова части особей. Оказалось, это уравнение описывает также динамику выпуска продукции однопродуктовой фирмы и монополии в соответствующих нелинейных динамических моделях, отражающих производственные, инвестиционные и амортизационные процессы.

С усложнением проблем экономики и управления в XX в. совершенствовались математические методы их анализа. Это в конечном итоге привело к развитию таких разделов, как линейное и нелинейное программирование, теория игр и др. В результате обобщения накопленного опыта и естественной эволюции науки сложилась современная методология исследования социально-экономических проблем, опирающаяся на системный подход. Использование принципа системности, без которого невозможно эффективное управление, включает, наряду содержательным анализом изучаемых процессов, применение метода математического моделирования.

Развитие математических методов исследования экономики осуществлялось в XX в. представителями разных стран, в том числе и России. Многие результаты, полученные российскими математиками-экономистами, стали достоянием мировой культуры. К ним, прежде всего, следует отнести анализ Е.Е. Слуцким модели поведения потребителя; открытие Н.Д. Кондратьевым длинных волн в экономике; разработку первого баланса народного хозяйства СССР за 1923-1924гг., на основе кот. была построена широко известная ныне модель В.В. Леонтьева. Особое значение имеет вклад Л.В. Канторовича в развитие линейного программирования - направления, оказавшего большое влияние на развитие экономической науки. Линейное программирование заявило о себе в 1939г., когда вышла в свет небольшая брошюра Л.В. Канторовича.

Благодаря исследованиям, выполненным на основе математического моделирования в Центральном экономико-математическом институте РАН и других ведущих научных центрах России, были получены значительные результаты в области анализа социально-экономических процессов. Тем не менее, метод математического моделирования до сих пор применяется в научных разработках.

Общая характеристика математического моделирования. Основные этапы моделирования.

Главная особенность моделирования в том, что оно дает возможность опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом, с помощью которого изучает интересующий его объект. Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно (когда объект недосягаем, как, например, ядро Земли и глубины Вселенной, либо еще реально не существует: будущее состояние экономики, будущие потребности общества и т.п.), или это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования состоит из трех структурных элементов: субъект (исследователь); объект исследования; модель, опосредствующая отношения познающего субъекта и познаваемого объекта (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Общая структура процесса моделирования

Пусть имеется некоторый объект Л, который необходимо исследовать. Мы конструируем или находим подходящую модель *B* для объекта *A*.

Этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обусловливаются тем, что модель отображает (воспроизводит, имитирует) какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от исследования других сторон. Для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На *втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования.* Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные об ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является множество (совокупность) знаний о модели.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал — формирование множества знаний об объекте. Одновременно мы переходим с «языка» модели на «язык» оригинала. Этот процесс проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта — оригинала, которые нашли отражения или были изменены при построении модели.

Четвертый этап — практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им. В итоге мы снова возвращаемся к проблематике реального объекта.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование — не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования «погружен» в общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Основные этапы процесса моделирования уже рассматривались выше. В различных отраслях знаний, в том числе и в экономике, они приобретают свои специфические черты. Проанализируем последовательность и содержание этапов одного цикла экономико-математического моделирования (рис. 1.2).

Первый этап — сбор сведений об объекте исследования. Необходимо аккумулировать имеющиеся знания об экономическом объекте (процессе). Установить основные свойства, признаки и зависимости по различным источникам информации, в том числе по натурным. Выявить внутренние и внешние связи, необходимые для функционирования ресурсы, используемые технические и технологические схемы. Чем полнее будет собранная информация, тем проще будет определяться с имеющимися проблемами или возможными путями развития.

Рис. 1.2. Этапы разработки экономико-математической модели

Второй этап — определение цели моделирования и постановка задачи. Для правильной постановки задачи важен качественный анализ собранной на первом этапе информации об экономическом объекте (процессе). Это поможет наиболее точно определиться с неизвестными характеристиками объекта, которые необходимо найти, а самое главное — с критерием, позволяющим установить, достигнута или нет конечная цель моделирования.

Поставить задачу и определиться с целью недостаточно, необходимо установить важные для достижения цели влияющие факторы, возможные предпосылки и допущения. Все факторы разделяются на существенные и несущественные, характеризующиеся количественными и качественными показателями. Установка количественных характеристик очень важна с точки зрения дальнейшего применения математического аппарата. Для качественных характеристик необходимо будет подобрать методику их числовых преобразований и алгоритм их включения в модель.

Третий этап — построение экономико-математической модели. Выполняется формализация экономической проблемы, выражения ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.). Обычно сначала уточняется конкретный перечень переменных и параметров, форма связей. Затем строится непосредственно сама модель. Таким образом, построение модели подразделяется, в свою очередь, на несколько стадий.

На этом этапе важно не только правильно подобрать метод решения проблемы, но и разделить влияющие факторы на существенные и несущественные. То же можно сказать о таких характеристиках сложности модели, как используемые формы математических зависимостей (линейные и нелинейные), учет факторов случайности и неопределенности и т.д. Излишняя сложность и громоздкость модели затрудняют процесс исследования. Нужно не только учитывать реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделирование с получаемым эффектом (при возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

Одна из важных особенностей математических моделей — потенциальная возможность их использования для решения разнокачественных проблем. Поэтому, даже сталкиваясь с новой задачей, не нужно стремиться «изобретать» модель; вначале необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели.

В процессе построения модели осуществляется взаимосопоставление трех систем научных знаний — экономических, естественных и математических. Необходимо стремиться к тому, чтобы получить модель, принадлежащую хорошо изученному классу математических задач. Часто это удается сделать путем некоторого упрощения исходных предпосылок модели, не искажающих существенных черт моделируемого объекта. Однако возможна и такая ситуация, когда формализация экономической проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре. Потребности экономической науки и практики в середине XX в. способствовали развитию математического программирования, теории игр, функционального анализа, вычислительной математики. Вполне вероятно, что в будущем развитие экономической науки станет важным стимулом для создания новых разделов математики

Четвертый этап — анализ модели. Целью этого этапа является выяснение общих свойств модели. Здесь применяются чисто математические приемы исследования. Наиболее важный момент — доказательство существования решений в сформулированной модели (теорема существования). Если удастся доказать, что математическая задача не имеет решения, то необходимость в последующей работе по первоначальному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку экономической задачи, либо способы ее математической формализации. При аналитическом исследовании модели выясняются такие вопросы, как: единственно ли решение, какие переменные (неизвестные) могут входить в решение, каковы будут соотношения между ними, в каких пределах и в зависимости от каких исходных условий они изменяются, каковы тенденции их изменения и т.д.

Аналитическое исследование модели по сравнению с эмпирическим (численным) имеет то преимущество, что получаемые выводы сохраняют свою силу при различных конкретных значениях внешних и внутренних параметров модели.

Знание общих свойств модели имеет столь важное значение, что часто ради доказательства подобных свойств исследователи сознательно идут на идеализацию первоначальной модели. И все же модели сложных производственных объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию. В тех случаях, когда аналитическими методами не удается выяснить общих свойств модели, а упрощения модели приводят к недопустимым результатам, переходят к численным методам исследования.

Пятый этап — сбор исходной информации.

Данный этап не менее важен, чем остальные. От точности и полноты собранной исходной информации, необходимой для модели, зависит успешность ее дальнейшей реализации. Необходимо определить источники и методы сбора информации. Основные требования, которые предъявляются к информации, — определенность, достоверность, точность, соответствие размерности, достаточность. Для моделирования процессов в сельскохозяйственном производстве источниками информации служат годовые отчеты, технологические карты, данные первичного учета, нормативные справочники, региональные сводки, заключенные договоры и т.д. Характер информации зависит от целей задачи. Если цель связана с перспективой развития, то применяется нормативная или эталонная информация. Если решаются задачи текущего, оперативного планирования, то нормативная, отчетная и первичная. В качестве исходной информации могут использоваться данные, также полученные на основе построенных ранее зависимостей, например, статистических.

Шестой этап — численное решение модели. Математическая модель наполняется собранными на предыдущем этапе числовыми характеристиками. Такую модель принято называть развернутой числовой моделью. Этот этап включает разработку алгоритмов для численного решения задачи, составления программ на ЭВМ и непосредственное проведение расчетов. Трудности этого этапа обусловлены прежде всего большой размерностью задач, необходимостью обработки значительных массивов информации.

Численные методы — раздел математики, изучающий методы, связанные с вычислениями и поиском численных решений математических задач, в том числе с помощью ЭВМ.

Обычно расчеты по экономико-математической модели носят многовариантный характер. Благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ удается проводить многочисленные «модельные» эксперименты, изучая «поведение» модели при различных изменениях некоторых условий. Исследование, проводимое численными методами, может существенно дополнить результаты аналитического исследования, а для многих моделей оно является единственно осуществимым. Класс задач, которые можно решать численными методами, значительно шире, чем класс задач, доступных аналитическому исследованию.

Первое известное применение численных методов — вавилонская табличка с расчетом приближенного значения 72 (1800 г. до н.э.). Это иррациональное число, не представимое в виде дроби. Другой пример — число га, которое к тому же трансцендентное. На практике часто не нужны точные выражения. Нужны числа. Платон: «Числа правят миром».

Седьмой этап — интерпретация численных результатов.

Проверяется адекватность модели по существенным свойствам объекта. Математические методы проверки могут выявлять некорректные построения модели и тем самым сужать класс потенциально правильных моделей. Неформальный анализ теоретических выводов и численных результатов, получаемых посредством модели, сопоставление их с имеющимися знаниями и фактами действительности также позволяют обнаруживать недостатки постановки экономической задачи, сконструированной математической модели, ее информационного и математического обеспечения.

Полученные результаты согласовываются не только с целью решения, но и с точки зрения их целесообразности и практического применения. Естественно, что в зависимости от конкретных условий и характера задачи этапы моделирования могут меняться: расширяться или сокращаться. В любом случае этот процесс будет носить циклический характер.

Таким образом, математические модели, основанные на экономическом анализе, обогащают его полученными количественными оценками явлений. В процессе работы над моделью удается, сохранив качественную сторону явления, несколько уточнить логическую структуру связей, описывающих исследуемый экономический процесс. Моделирование экономических явлений — теоретическая основа применения математики в экономике.

Структура математической модели, её основные составляющие. Классификация моделей. Достоинства и недостатки математического моделирования.

Конструктивно каждая модель представляет собой систему математических зависимостей (уравнений или неравенств) между переменными (показателями), отображающих определенные группы реальных экономических зависимостей.

Переменные, описывающие экономические объекты, выступают в модели в качестве либо известных, либо неизвестных величин. Известные величины определяются вне модели, поэтому они носят название экзогенных. Значения неизвестных величин определяются в результате решения экономической задачи в рамках модели, поэтому их называют эндогенными.

Модели конструируются таким образом, чтобы значения эндогенных переменных определялись в них однозначно либо неоднозначно. В последнем случае открывается возможность выбирать среди допустимых значений эндогенных переменных такие, которые соответствовали бы представлениям об их наилучших вариантах. Если эти представления формализованы, они имеют математическую форму целевых (критериальных) функций. I

Разделение переменных на экзогенные и эндогенные, до известной степени условно и связано с техникой прогнозных расчетов. Расчеты часто состоят в получении различных вариантов прогноза в зависимости от различных значений переменных, экзогенных в каждом варианте расчетов. Однако при этом задача расчетов заключается именно в выборе значений последних.

Параметры уравнений (неравенств) характеризуют интенсивность взаимосвязей между переменными.

В качестве простейшего примера прогнозной модели можно привести уравнение макроэкономической функции потребления:

$C = a + M$,

где У — использованный ВВП — экзогенная переменная; С — потребление в составе использованного ВВП — эндогенная переменная; а, Ь — параметры модели. В зависимости от того, каково значение параметра Ь (предельной склонности к потреблению), рост ВВП в прогнозном периоде сопровождается большим или меньшим ростом потребления.

Приведенное выше уравнение является так называемым уравнением поведения, или функциональным уравнением. Кроме того, в моделях всегда присутствуют балансовые уравнения (тождества), или уравнения определения. Они показывают выражение одних переменных через другие. Таково, например,

уравнение ресурсов и использования ВВП:

ВВП + импорт = потребление + накопление + экспорт.

С математической точки зрения балансовое уравнение эквивалентно уравнению поведения, в котором параметры при входящих в него переменных принимают значения 1 или —1 (т.е. переменные суммируются или вычитаются).

Модели можно классифицировать по различным основаниям. Ни одно из них не является полностью удовлетворительным, хотя каждое служит определенной цели. Некоторые типовые группы моделей, которые могут быть положены в основу системы классификации:

· статические (например, поперечный разрез объекта) и динамические (временные ряды);

· детерминистские и стохастические;

· дискретные и непрерывные;

· натурные, аналоговые, символические.

Удобно представлять себе модели в виде непрерывного спектра, простирающегося от точных моделей или макетов реальных объектов до совершенно абстрактных математических моделей (рис. 1.3).

Физические модели	Масштабные модели	Аналоговые модели	Управленческие игры	Математические модели

Конкретность Абстрактность

Рис. 1.3. Спектр моделей

Модели, находящиеся в начале спектра, часто называются физическими или *натурными,* потому что они внешне напоминают изучаемую систему.

Статические физические модели, такие, например, как модели архитектурных объектов или макеты расположения заводских сооружений, помогают наглядно представить себе пространственные соотношения. Примером динамической физической модели может служить модель самолета в уменьшенном масштабе, которая испытывается в аэродинамической трубе для оценки динамической устойчивости.

Аналоговыми моделями являются модели, в которых свойство реального объекта представляется некоторым другим свойством аналогичного по поведению объекта. Задача иногда решается путем замены одного свойства другим, после чего полученные результаты надо истолковывать применительно к исходным свойствам объекта. Примером аналоговой модели является график. Здесь расстояние отображает такие характеристики объекта, как время, срок службы, количество единиц и т. д. График может также показывать соотношение между различными количественными характеристиками и может предсказывать, как будут изменяться некоторые величины при изменении других величин. Различного рода схемы также являются полезными аналоговыми моделями; обычным примером такого рода схем может служить структурная схема какой-либо организации. Соединенные линиями «квадратики» в такой схеме отражают взаимоподчинение между членами организации ко времени составления схемы, а также каналы информационного обмена между ними.

По мере продвижения по спектру моделей мы достигнем тех из них, где во взаимодействие вступают люди и машинные компоненты. Такое моделирование часто называется игровым, или просто играми (управленческими, военными, планировочными). В так называемых управленческих (деловых) играх человек взаимодействует с информацией, поступающей с выхода вычислительной машины (которая моделирует все другие свойства системы), и принимает решения на основе полученной информации. Решения человека затем снова вводятся в машину в качестве входной информации, которая используется системой.

К символическим, или математическим, моделям относятся те, в которых для представления процесса или системы используются символы, а не физические устройства. Обычным примером представления систем можно считать системы дифференциальных уравнений. Поскольку последние представляют собой наиболее абстрактные и, следовательно, наиболее общие модели, математические модели находят широкое применение в системных исследованиях. Однако применение математических моделей таит в себе весьма реальные опасности и ловушки. Символическая модель является всегда абстрактной идеализацией задачи, и, если требуется, чтобы эта модель позволяла решить задачу, необходимы некоторые упрощающие предположения. Поэтому особое внимание должно быть обращено на то, чтобы модель служила действительным представлением задачи.

При моделировании сложной системы исследователь обычно вынужден использовать совокупность нескольких моделей из числа перечисленных разновидностей, а вычислительная машина может быть компонентом любой из них, хотя это и не обязательно.

Математическое моделирование, при всех его бесчисленных достоинствах, тем не менее, имеет при чрезмерном его употреблении ряд существенных недостатков. Эти недостатки анализировались в работах многих исследователей, и подобный анализ вполне уместен и в отношении экономической и социальных наук. Далее мы суммируем все эти слабые места математического моделирования в экономике в четыре основных пункта:

• данный метод не способен охватить и описать качественные процессы в экономике, а также дать им адекватное объяснение;

• математический метод с его усложненным математическим аппаратом значительно осложняет восприятие экономических истин и результатов представителями иных наук – в первую очередь, гуманитарных и социальных наук;

• математическое моделирование виртуализирует экономическую науку, отрывает ее от эмпирической почвы

• он плохо помогает решению практических проблем экономики и неэффективно работает на уровне здравого смысла.

У математических моделей есть и дидактическая задача. Разработчики совершенствуют свой образ мышления, так как модели позволяют знакомиться со структурой и логикой решаемых проблем и оттачивают аналитические мыслительные способности. Таким образом, интуитивная умозрительная модель получает твердую основу. При поиске проблемных решений можно научиться более целенаправленно и систематизированно продвигаться вперед и ставить под сомнение якобы надежные наблюдения.

В целом модели и теории, которые формулируются и решаются с помощью математических методов, представляют собой неотъемлемую составляющую диалога между теорией и практикой. В условиях быстро меняющихся постановок проблем, когда сегодняшние решения завтра уже не пригодны, требуются не только готовые к непосредственному использованию знания, но и умственная динамика, кругозор, компетентность, а также готовность постоянно критически оценивать свои знания.

Типовые системы математического моделирования. Линейные модели. Применение методов линейной алгебры в математическом моделировании.

Наибольшие затруднения и наиболее серьезные ошибки при моделировании возникают при переходе от содержательного к формальному описанию объектов исследования, что объясняется участием в этом творческом процессе коллективов разных специальностей: специалистов в области систем, которые требуется моделировать (заказчиков), и специалистов в области машинного моделирования (исполнителей). Эффективным средством для нахождения взаимопонимания между этими группами специалистов является язык математических схем, позволяющий во главу угла поставить вопрос об адекватности перехода от содержательного описания системы к ее математической схеме, а лишь затем решать вопрос о конкретном методе получения результатов с использованием ЭВМ: аналитическом или имитационном, а возможно, и комбинированном, т. е. аналитико-имитационном. Применительно к конкретному объекту моделирования, т. е. к сложной системе, разработчику модели должны помочь конкретные, уже прошедшие апробацию для данного класса систем математические схемы, показавшие свою эффективность в прикладных исследованиях на ЭВМ и получившие название типовых математических схем.

Исходной информацией при построении математических моделей процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы, исследуемой (проектируемой) системы. Эта информация определяет основную цель моделирования системы £ и позволяет сформулировать требования к разрабатываемой математической модели А. Причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь системы хочет получить ответ с помощью модели, и в какой-то степени определяет выбор математической схемы.

Введение понятия "математическая схема" позволяет рассматривать математику не как метод расчета, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса ее функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной). При пользовании математической схемой исследователя системы в первую очередь должен интересовать вопрос об адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе, а не возможность получения ответа (результата решения) на конкретный вопрос исследования. Например, представление процесса функционирования информационно-вычислительной системы коллективного пользования в виде сети схем массового обслуживания дает возможность хорошо описать процессы, происходящие в системе, но при сложных законах распределения входящих потоков и потоков обслуживания не дает возможности получения результатов в явном виде.

Математическая схема представляет собой звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая модель». Схематично процесс формализации представлен на рис. 1.4.

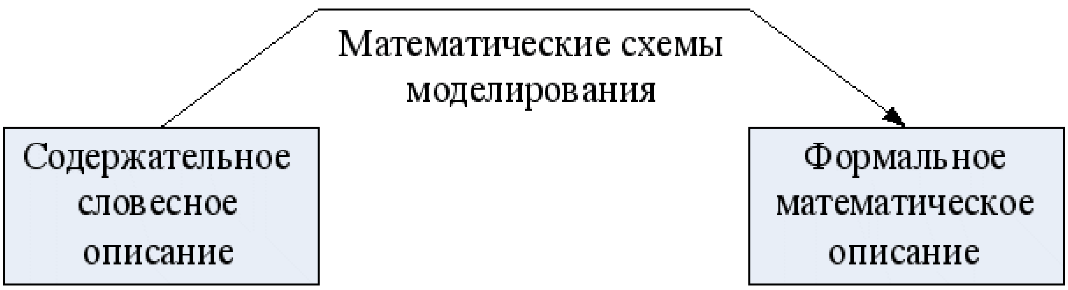


Рис. 1.4. Схема процесса формализации

Введение понятия математической схемы позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса её функционирования в виде математической модели. **Исходной информацией** при построении математических моделей процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой системы, причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь системы хочет получить ответы с помощью модели.

В отличие от содержательного словесного описания, образующего описательную модель, формальное описание процесса функционирования системы, представляющее собой математическую модель, не допускает неоднозначной интерпретации, так как представляет собой правило, которое необходимо выполнить для получения результата.

При пользовании математической схемой в первую очередь решается вопрос об **адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе**. Кроме того, при построении математической модели необходимо решить вопрос об её полноте. Полнота модели регулируется, в основном, выбором границы между системой и внешней средой. Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные.

В практике моделирования используются математическая схема общего вида и типовые математические схемы. **Математическая схема общего вида** позволяет формализовать широкий класс систем. **Типовые математические схемы**, включающие D–схемы, F–схемы, P–схемы, Q–схемы и A–схемы, не обладают общностью, но имеют преимущества простоты и наглядности.

При использовании математической схемы общего вида модель объекта моделирования, т.е. исследуемой системы, представляется в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих четыре непересекающихся подмножества (рис. 1.5).

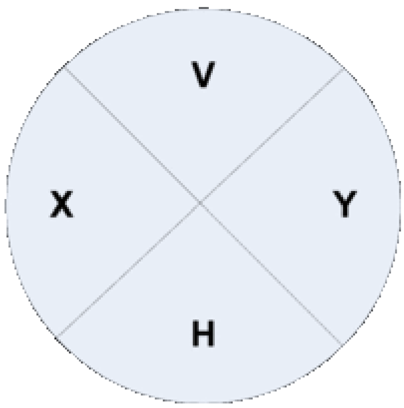


Рис. 1.5. Модель, построенная на основе математической схемы общего вида

- подмножество совокупности входных воздействий на систему $X=\{x_i\}$, $i=1, nx$
- подмножество совокупности воздействий внешней среды на систему $V=\{v_l\}$, $l = 1, nv$
- подмножество совокупности внутренних (собственных) параметров системы $H=\{h_k\}$, $k = 1, nh$
- подмножество совокупности выходных характеристик системы $Y=\{y_j\}$, $j=1, ny$

При моделировании системы входные воздействия X, воздействия внешней среды V и внутренние параметры системы H являются **независимыми (экзогенными) переменными**, а выходные характеристики Y –**зависимыми (эндогенными) переменными**.

Процесс функционирования системы описывается во времени оператором, который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением вида $Y(t)=Fs\ (X, V, H, t)$. Эта зависимость называется законом функционирования системы и обозначается Fs. В общем случае закон функционирования системы Fs может быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

Модель сложной системы, рассмотренная ранее, представляет собой математическую схему моделирования общего вида. На практике для формализации концептуальных моделей ряда систем выгоднее применять типовые математические схемы моделирования, учитывающие с одной стороны способ представления времени в модели (непрерывная переменная или дискретная), а с другой стороны степень случайности моделируемых процессов. По этим признакам различают следующие математические схемы моделирования (классы ММ).

Непрерывно – детерминированные модели (D – схемы).

Дискретно – детерминированные модели (F – схемы).

Дискретно – вероятностные модели (P – схемы).

Непрерывно - вероятностные модели (Q – схемы).

Сетевые модели (N – схемы).

Агрегатные модели (A – схемы).

Непрерывно-детерминированные модели. В этих моделях время t полагается непрерывной переменной, а случайными факторами в системе пренебрегают. Математический аппарат моделей – теория дифференциальных и интегральных уравнений, с помощью которой достигается адекватное описание динамических систем. Наиболее глубоко разработан операторный метод описания и исследования процессов функционирования динамических систем и их структур.

Примером непрерывно – детерминированной модели одноканальной системы автоматического управления является неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Если динамическая система описывается нелинейным дифференциальным уравнением, то его линеаризуют, и решают, как линейное.

Применение непрерывно – детерминированных моделей позволяет количественно осуществлять не только анализ динамических систем, но и оптимальный синтез их.

Дискретно-детерминированные модели.

Основным видом дискретно- детерминированных моделей является конечный автомат.

Конечным автоматом называют дискретный преобразователь информации, способный под воздействием входных сигналов переходить из одного состояния в другое и формировать сигналы на выходе. Это автомат с памятью. Для организации памяти в описание автомата вводят автоматное время и понятие состояние автомата.

Понятие «состояние» автомата означает, что выходной сигнал автомата зависит не только от входных сигналов в данный момент времени, но и учитывает входные сигналы, поступающие ранее. Это позволяет устранить время как явную переменную и выразить выходные сигналы как функцию состояний и входных сигналов.

Всякий переход автомата из одного состояния в другое возможен не ранее, чем через дискретный интервал времени. Причем сам переход считается, происходит мгновенно, то есть не учитывают переходные процессы в реальных схемах.

Существует два способа введения автоматного времени по которому автоматы делятся на *синхронные* и *асинхронные*.

В с*инхронных* автоматах моменты времени, в которых фиксируются изменения состояний автомата, задаются специальным устройством - генератором синхросигналов. Причем сигналы поступают через равные интервалы времени -Δt. Частота тактового генератора выбирается такой, чтобы любой элемент автомата успел закончить свою работу до появления очередного импульса.

В а*синхронном* автомате моменты перехода автомата из одного состояния в другое заранее не определены и зависят от конкретных событий. В таких автоматах интервал дискретности является переменным.

Также существуют *детерминированные* и *вероятностные* автоматы.

В *детерминированных* автоматах поведение и структура автомата в каждый момент времени однозначно определены текущей входной информацией и состоянием автомата.

В *вероятностных* автоматах они зависят от случайного выбора.

Абстрактно конечный автомат можно представить как математическую схему (F-схему), которая характеризуется шестью видами переменных и функций:

1. конечное множество x(t) входных сигналов (входной алфавит);
2. конечное множество y(t) выходных сигналов (выходной алфавит);
3. конечное множество z(t) внутренних состояний (алфавит состояний);
4. начальное состояние автомата z_0;
5. функция переходов φ(z, x) автомата из одного состояния в другое;
6. функция выходов ψ(z, x) автомата.

Абстрактный конечный автомат имеет один вход и один выход. В каждый дискретный момент времени t = 0, 1, 2,... F- автомат находится в определенном состоянии z(t) из множества Z - состояний автомата, причем в начальный момент времени t=0 он всегда находится в начальном состоянии $z(0)=z_0$. В момент t , будучи в состоянии z(t), автомат способен воспринять на входном канале сигнал $x(t)\in X$ и выдать на выходном канале сигнал $y(t)=\psi[z(t),x(t)]$, переходя в состояние $z(t+1)=\varphi[z(t),x(t)]$, где $z(t)\in Z$,$x(t)\in X$.

Абстрактный конечный автомат реализует некоторое отображение множества слов входного алфавита X на множество слов выходного алфавита Y , то есть , если на вход конечного автомата , установленного в начальное состояние z_0 , подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита x(0),x(1),x(2),..., которые составляют входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита y(0),y(1),y(2),...образуя выходное слово.

Следовательно, работа конечного автомата происходит по следующей схеме: на каждом t - ом такте на вход автомата, находящегося в состоянии z(t), подается некоторый сигнал x(t), на который автомат реагирует переходом на (t+1)-ом такте в новое состояние z(t+1) и выдачей некоторого выходного сигнала.

В зависимости от способа определения выходного сигнала абстрактные конечные автоматы (синхронные) подразделяются на два типа:

1) F - автомат первого рода, также называется *автомат Мили* (рис. 1.6):

$z(t+1)=\varphi[z(t),x(t)], t=0,1,2,...;$

$y(t)=\psi[z(t),x(t)], t=0,1,2,...;$

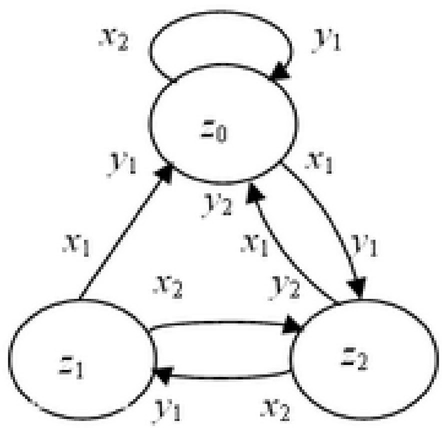


Рис. 1.6. Граф автомата Мили

2) F - автомат второго рода:

$z(t+1)=\varphi[z(t),x(t)], t=0,1,2,...;$

$y(t)=\psi[z(t-1),x(t)], t=1,2,3,...;$

Для которого $y(t)=\psi[z(t)], t=0,1,2,...;$

называется автомат Мура (рис. 1.7) - функция выходов не зависит от входной переменной x(t).

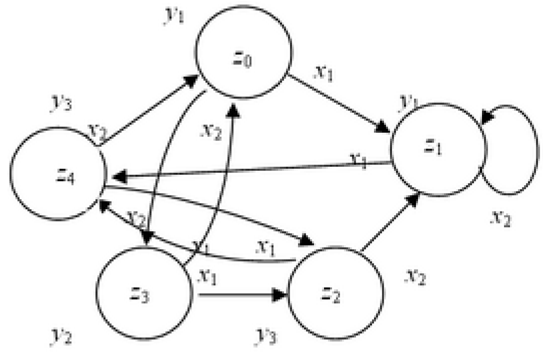


Рис. 1.7. Граф автомата Мура

Чтобы задать конечный F - автомат, необходимо описать все элементы множества $F=<z,x,y,\psi,z_0>$.

Существует несколько способов задания работы F - автоматов среди которых наибольшее применение нашли табличный, графический и матричный.

Дискретно-стохастические модели (P- схемы)

P-схемы принято называть вероятностными автоматами, с помощью которых можно определить дискретные преобразования информации с памятью.

Вероятностный автомат (англ, probabilistic automata) (ВА) - это дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти нем и может быть описано статистически.

Схемы вероятностных автоматов *(Р-схем)* применяются:

- в проектировании дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение;
- определении алгоритмических возможностей систем;
- обосновании границ целесообразности их использования;
- решении задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Математическое понятие *Р-автомата* формируется на понятиях, введенных для ***F'-автомата.***

Пусть множество G', элементами которого являются всевозможные пары где x_i'и z_s— элементы входного подмножества X' и подмножества состояний Z соответственно. Если существуют две такие функции и*,* то с их помощью осуществляются отображения и, то говорят, что (1) определяет конечный автомат детерминированного типа.

Введем более общую математическую схему. Пусть Ф — множество всевозможных пар вида $('z_k', 'y_j')$, где y_j'— элемент выходного подмножества Y', т.е. Пусть в любой элемент множества G' индуцирует на множестве Ф некоторый закон распределения следующего вида (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Элементы из Ф	•••	$('z'_1', 'y'_1')$	•••	$('z'_1', 'y'_2')$	•••	$('z_K', 'y_{J-1}')$	$('z_K', 'y_J')$
$('z_k', 'y_j')$	•••	b_{11}		b_{12}		$b_{k(j-1)}$	b_{kj}

При этом, (2) где b_{kj}'— вероятности перехода автомата в состояние z_k' и выдаче на выходе сигнала y_j, если автомат был в состоянии z_s, и на его вход в момент времени поступил сигнал x_i. Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества G'.

Обозначим множество этих таблиц через *B*. Тогда четверка элементов (3) называется вероятностным автоматом *(Р-автоматом).*

Вероятностный автомат Мили

Пусть элементы множества G' индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах Y' и Z, которые можно представить соответственно в виде (табл. 1.2):

Таблица 1.2

Элементы из Y	•••	y'_1	y_2	•••	Y_{J-1}	y_J
	•••	q_1	q_2	•••	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	•••	z_1	z_2	•••	z_{K-1}	z_K
	•••	n_1	n_2	•••	n_{K-1}	n_K

При этом и (4)— вероятности перехода *Р-автомата* в состояние z_k и выдачи выходного сигнала y_k'при условии, что *Р-автомат* находился в состоянии z_S'и на его вход поступил входной сигнал x_t'.

Если для всех k'и j имеет место соотношение (5), то такой автомат называется *вероятностным автоматом Мили.* Представленное требование означает выполнение условия независимости распределений для нового состояния *Р-автомата* и его выходного сигнала.

Вероятностный автомат Мура

Пусть выходной сигнал *Р-автомата* зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы, каждый элемент выходного подмножества *Y'* индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющее следующий вид (табл. 1.3):

Таблица 1.3

Элементы из Ф	•••	y_l	y_2	•••	y_{k-1}	y_k
('z_k', 'y_j')	•••	s'_1	S'_2	•••	S_{I-1}	S_I

Здесь (6) где S_i, — вероятность появления сигнала на выходе y_i'при условии, что *Р-автомат* находился в состоянии z_k'.

Частным случаем Р-автомата являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминированно. Такой автомат называется Y-детерминированным вероятностным автоматом.

Если состояние Р-автомата определяется детерменированно, то такой автомат называется *Z-детерминированным вероятностным автоматом.*

Аналогично, Z-детерминированным вероятностным автоматом называется Р-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Непрерывно – вероятностные модели. При построении и исследовании НВ – моделей используется теория стохастических дифференциальных уравнений и теория массового обслуживания.

При построении и исследовании НВ – моделей используется теория стохастических дифференциальных уравнений и теория массового обслуживания.

Теория стохастических дифференциальных уравнений и теория массового обслуживания. Стохастическое дифференциальное уравнение (в форме Ито) имеет вид:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t),$$

где $x(t)$ – случайный процесс, определяющий состояние системы в момент времени t;

$w(t)$ – стандартный винеровский случайный процесс;

$b(\cdot), a(\cdot)$ – коэффициенты диффузии и переноса.

НВ – модель часто используется при моделировании стохастических систем управления, процессов тепло – и массообмена.

Теория массового обслуживания применяется для построения математических моделей таких сложных систем, для которых характерно: 1) наличие потока многих заявок на выполнение определенных операций (заявок на обслуживание); 2) наличие многократно повторяемых операций (выходной поток). Теория массового обслуживания разрабатывает и исследует математические модели различных по своей природе процессов функционирования систем, например, поставок сырья и комплектующих изделий некоторому предприятию; заданий, поступающих на ЭВМ от удаленных терминалов; вызов на телефонных станциях и т.д. Для функционирования таких систем характерна стохастичность: случайность моментов времени появления заявок на обслуживание и т.д.

Сетевые модели используют для формализации причинно – следственных связей в сложных системах с параллельными процессами. В основе этих моделей лежит сеть Петри. При графической интерпретации сеть Петри представляет собой граф особого вида, состоящий из вершин двух типов *–позиций* и *переходов*, соединенных ориентированными дугами, причем каждая дуга может связывать лишь разнотипные вершины (позицию с переходом или переход с позицией). Вершины-позиции обозначаются кружками, вершины-переходы – черточками. С содержательной точки зрения переходы соответствуют событиям, присущим исследуемой системе, а позиции – условиям их возникновения.

Таким образом, совокупность переходов, позиций и дуг позволяет описать причинно-следственные связи, присущие системе, но в статике. Чтобы сеть Петри «ожила», вводят еще один вид объектов сети – так называемые *фишки* или *метки* позиций, которые перемещаются по переходам сети при условии наличия метки во входной позиции и отсутствии метки в выходной позиции. Расположение фишек в позициях сети называется *разметкой сети*.

Агрегатные модели. Анализ существующих задач приводит к выводу о том, что комплексное решение проблем возможно лишь в том случае, если моделирующие системы имеют в своей основе единую математическую схему моделирования. Такой подход к формализации процесса функционирования сложной системы предложен Бусленко Н.П. и базируется на понятии «агрегата».

При агрегатном описании сложная система разбивается по подсистемы, сохраняя при этом связи, обеспечивающие взаимодействие их. Если подсистема оказывается сложной, то процесс расчленения продолжается до тех пор, пока не образуются подсистемы, которые в условиях рассматриваемой задачи могут считаться удобными для математического описания.

В результате этого получается многоуровневая конструкция из взаимосвязанных элементов объединенных в подсистемы различных уровней. Элементами агрегатной модели являются агрегаты. Связи между агрегатами и внешней средой осуществляются с помощью операторов сопряжения. Сам агрегат тоже может рассматриваться как агрегатная модель, то есть разбиваться на элементы следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется множествами: моментов времени T, входных X и выходных Y сигналов, состояний агрегата Z в каждый момент времени t. Процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний $\delta\varepsilon$ в моменты поступлений входных сигналов x и изменений состояний между этими моментами t_x *и* t_{x+1}.

Моменты скачков $\delta\varepsilon$, не являющиеся моментами поступления входных сигналов называют особыми моментами времени t_δ, а состояния $z(t_j)$ особыми состояниями агрегатной схемы. В множестве состояний Z выделяют подмножество $z^{\langle t\rangle}$, что если $z(t_j)$ достигает $z^{\langle t\rangle}$, то это состояние является моментом выдачи выходного сигнала y.

Линейные модели. Применение методов линейной алгебры в математическом моделировании.

Линейные модели описывают поведение непрерывной переменной как функции одной или нескольких переменных. Они служат для понимания и предсказания поведения сложных систем или анализа экспериментальных, финансовых и биологических данных.

Линейная регрессия – это статистический метод, используемый для создания линейной модели. Модель описывает зависимость между зависимой переменной y (также называемой откликом) как функцией одной или нескольких независимых переменных X*i* (называемых предикторами). Общий вид для линейной модели:

$y=\beta_0+\sum \beta_i X_i+\varepsilon_i$

где β – вычисляемые линейные параметры и ε - остаточные члены (вектор ошибок).

Существует несколько типов линейной регрессии:

- Простая линейная регрессия: модели только с одним параметром
- Множественная линейная регрессия: модели с несколькими параметрами
- Многомерная линейная регрессия: модели с несколькими переменными отклика

Для расчёта простой линейной регрессии используется только MATLAB. Для множественной и многомерной линейной регрессии нужен Statistics Toolbox. Он позволяет строить пошаговую, робастную (устойчивую) и многомерную регрессию для:

- Прогнозирования
- Сравнения моделей линейной аппроксимации
- Визуализации невязок
- Оценки точности подбора модели
- Детектирования выбросов

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо явления или объекта реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений, но это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Следовательно, экономический процесс будет описан с помощью математического языка.

В экономике применение линейной алгебры наиболее показательно представлено в теоретической *модели Василия Леонтьева*. Это один из выдающихся экономистов, разработчик системы межотраслевых балансов «затраты – выпуск», используемых в практике моделирования национальной и мировой экономик. Родился в Петербурге, учился в Петроградском университете, работал в Китае, Германии. Теоретическая модель «затраты – выпуск» послужила основой для построения многоотраслевой модели экономики США. Разработка динамических моделей межотраслевого баланса использовалась для анализа последствий различных вариантов экономической политики. Правительство Рузвельта привлекло В. Леонтьева к разработке системы балансовых взаимосвязей, что, в частности, позволило достаточно четко регулировать массовое производство вооружений в годы Второй мировой войны. *Межотраслевой баланс* (МОБ, метод «затраты-выпуск») — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах. Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Он представляет собой таблицу, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе. Таблица показывает структуру затрат на производство каждого продукта и структуру его распределения в экономике. По столбцам отражается стоимостный состав выпуска, по строкам отражаются направления использования ресурсов каждой отрасли.

В качестве примера на экономической почве рассмотрим *задачу*:

Пусть экономика страны насчитывает n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Введём следующие обозначения:

x_i общий (валовый) объём продукции i-й отрасли;

a_{ij} коэффициенты прямых затрат, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли;

y_i объём конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объём продукции i-й отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$x_i=\sum_{j=1}^{n} a\,ij * xj + yi,$ (i=1,2,...,n) Это уравнение называется соотношениями баланса и задают модель многоотраслевой экономики.

Рассмотрим стоимостный межотраслевой баланс, когда все величины, входящие в эти уравнения имеют стоимостное выражение. Также введем коэффициенты прямых затрат: , (i,j = 1,2,..,n), показывающие затраты продукции i-ой отрасли на производство единицы стоимости j-ой отрасли. Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е. , (i,j = 1,2,..,n), вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название линейной. Теперь соотношения баланса принимают вид (i = 1, 2,…, n).

Обозначим: математический модель валовый выпуск

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

X=; A=; Y=; (10)

где X - вектор валового выпуска;

A - матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица);

Y - вектор конечного продукта.

Тогда соотношения баланса можно записать в виде: X = AX+Y. Отыскание такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y и есть основная задача межотраслевого баланса.

Перепишем матричное уравнение в виде: (E - A)X = Y. Если матрица (E - A) невырожденная, т.е. ее определитель не равен нулю, то $X=(E - A)^{-1}Y$.

Матрица $S=(E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат. Чтобы выяснить экономический смысл элементов матрицы S=, будем задаваться единичными векторами конечного продукта:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y1 =, Y2 =, ….., Yn=.(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда соответствующие векторы валового выпуска будут:

$$\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ \cdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \cdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}$$

Y_1 =, Y_2 =, …., Y_n=.(12)

$$\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \cdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}$$

Следовательно, каждый элемент матрицы S есть величина валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-ой отрасли. В соответствии с экономическим смыслом задачи значения должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях и. Матрица А называется продуктивной, если для любого вектора Y существует решение X уравнения (E - A) *X = Y. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной. Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Один из них говорит о том, что матрица А продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы.

В табл. 1.4 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период.

Таблица 1.4

Отрасль	Потребление	Конечный продукт	Валовой выпуск		
Энергетика	Машиностроение				
Производство	Энергетика	7	21	72	100
Машиностроение	12	15	123	150	

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне.

Итак, перейдя к решению, = 100, = 150, = 7, = 21, = 12, = 15, = 72, = 123. Найдем коэффициенты прямых затрат по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

= 0.7, = 0.14, = 0.12, = 0.1.

Матрица прямых затрат выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.14 \\ 0.12 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Кроме этого, имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности.

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле:

$X = (E - A)^{-1}Y$, ()

Запишем матрицу полных затрат: $S = (E - A)^{-1}$:

E - A =

$$\begin{pmatrix} 0.93 & -0.14 \\ -0.12 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Так как = 0.8202, то

$$|E - A|^{-1} = \frac{1}{0.8202}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.14 \\ 0.12 & 0.93 \end{pmatrix}$$

S = .

$$\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$$

По условию вектор конечного продукта Y = .

Тогда по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$ получаем вектор валового выпуска:

X =

$$\frac{1}{0.8202}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.14 \\ 0.12 & 0.93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179 \\ 160.5 \end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 усл. ед., а в машиностроительной - до 160,5 усл. ед.

Таким образом, на основе алгебры матриц и аппарате матричного анализа американский экономист В.В. Леонтьев создал математическую модель, которая решает проблему баланса между отдельными отраслями мирового хозяйства.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений.

Среди основных методов решения различных экономических задач является использование *элементов алгебры матриц.* Это особенно актуально при разработке и использовании баз данных, где почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме. Решение многих экономических задач приводит к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений на основе прогноза выпуска продукции по известным запасам сырья.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики - матричная алгебра - имеют большое значение для экономистов, основная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в простой и компактной матричной форме. С помощью матриц удобно описывать различные экономические закономерности.

Таким образом, применение элементов линейной алгебры значительно упрощает способы решения многих задач экономики.

Например, удобно записывать некоторые экономические зависимости с помощью матриц (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Ресурсы	Отрасли экономики	
Промышленность	Сельское хоз-во	
Электроэнергия	6,7	5,2
Трудовые ресурсы	4,6	3,3
Водные ресурсы	2,9	4,5

В виде матрицы данную таблицу и показатели можно записать в более компактной форме:

$$A=\begin{pmatrix} 6,7 & 5,2 \\ 4,6 & 3,3 \\ 2,9 & 4,5 \end{pmatrix}$$

Из полученной матрицы видно, что матричный элемент =6,7 показывает количество употребляемой промышленности электроэнергии, а элемент сколько трудовых ресурсов потребляется в сельском хозяйстве.

Кроме этого, существуют примеры, для решения которых необходимо составить систему линейных уравнений.

Например, фабрика конфет специализируется на выпуске трех видов сладкого: шоколадки, вафли и конфеты, при этом используется сырье трех типов:

В табл. 1.6 представлены нормы расхода каждого из них на одну пачку конфет, объем расхода сырья на один день заданы:

Таблица 1.6.

Виды сырья	Нормы расхода сырья на одну пачку	Расход сырья на 1 день	
Шоколадки	Вафли	Конфеты	
5	3	4	2700
2	1	1	900
3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида сладкого.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}, \quad (9)$$

Отсюда $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$.

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы основные преимущества применения методов моделирования?
2. Какими недостатками обладают методы моделирования?

3. Какие задачи являются несовместными?

4. При решении каких проблем привлекают стохастической методы?

5. Каковы основные этапы построения математической модели?

6. Что представляет собой алгоритм?

Тема 2. Модель межотраслевого баланса

Понятие межотраслевого баланса. Допущения модели Леонтьева. Математический аппарат модели Леонтьева. Построение математической модели Леонтьева. Коэффициенты прямых затрат. Основная задача межотраслевого баланса. Матрица полных затрат. Критерий продуктивности матрицы прямых затрат. Нахождение вектора валового выпуска X, который, при известной матрице прямых затрат A, обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y

Понятие межотраслевого баланса

Объектом исследования региональной экономики являются территориальные аспекты социально-экономической системы страны, функционирование территориальных подсистем национальной экономики, их отдельных элементов и взаимодействия между ними, а также механизмы управления социально-экономическим развитием регионов.

В региональной экономике как науке используются различные методы исследования: программно-целевой, балансовый, нормативный, методы социологических исследований и экономико-математического моделирования.

Программно-целевой метод можно охарактеризовать как метод постановки целей и задач социально-экономического развития региона, как метод реализации взаимоувязанных мероприятий по достижению этих целей и задач в намеченные сроки. При его использовании система целей и задач становится исходным пунктом регионального управления, каждой региональной проблеме соответствует программа ее решения. Таким образом, реализация этого метода происходит через разработку и выполнение целевых комплексных программ, концентрирующих всю совокупность мероприятий по решению конкретных проблем. Применение программно-целевого метода в управлении региональной экономикой является достаточно эффективным при соблюдении определенных требований:

• программные цели должны быть очень значимыми, предусматривать жизненно важные проблемы региона и страны;

• программных целей должно быть ограниченное количество в силу недостатка финансовых средств, следовательно, и число программ должно быть ограничено;

• необходим специальный методический инструментарий, механизм разработки и реализации целевых комплексных программ;

• должен быть упорядочен организационный процесс реализации целевых комплексных программ.

Балансовый метод является одним из традиционных и ведущих методов, используемых в деятельности региональных органов власти. Сущность его состоит в том, что при обосновании разделов, показателей региональных экономических документов (концепций, схем, прогнозов, планов, программ) используется такая совокупность приемов, которая позволяет увязать потребности с возможными ресурсами, обеспечить согласованность взаимозависимых показателей. И как бы ни были различны показатели, цель этих приемов одна – добиться равновесия, иными словами – баланса, между показателями. Этот метод является конкретной формой реализации принципа пропорциональности.

Использование балансового метода в системе регионального управления позволяет: выбрать наиболее рациональные соотношения между отраслями, определяющими хозяйственный профиль региона, и отраслями, дополняющими территориальный комплекс; разработать экономически обоснованные варианты размещения производства; оценить целесообразность размещения нового хозяйственного объекта на конкретной территории; определить его мощность и стоимость; определить потребность региона в ресурсах, товарах, рабочей силе; оценить степень удовлетворения региона в продукции за счет собственного производства и объема вывоза (ввоза) необходимой продукции. Практическое применение балансового метода в управлении региональной экономикой означает разработку системы балансов. Система региональных балансов и балансов расчетов незаменима при: анализе и определении необходимых пропорций регионального воспроизводственного процесса; выявлении диспропорций в развитии хозяйственного комплекса региона и принятии мер по их устранению и предупреждению; выявлении резервов дальнейшего развития производства и эффективном распределении ресурсов в целях обеспечения производства необходимого обществу товара; разработке и осуществлении рациональных внутриотраслевых, межотраслевых, региональных и межрегиональных связей.

Задачи МОБ:

1.МОБ детализирует счета товаров и услуг, производства и образования доходов, операций с капиталом;

2.отражает процессы, происходящие на нынешнем этапе развития экономики,

3.позволяет проводить системный счет основных показателей СНС и анализ взаимосвязей между отраслями экономики,

3.выявлять главные экономические пропорции,

4.изучать структурные сдвиги и особенности ценообразования в экономике.

Нормативный метод представляет собой метод обоснования показателей с помощью установленных норм и нормативов, в пределах которых должны совершаться проектные, экономические, социальные, технологические явления и процессы. Нормы и нормативы представляют собой необходимую базу научной разработки региональных прогнозов, планов, программ, балансов, технико-экономических проектов. Если общим выражением пропорций является балансовый метод, то частным, единичным выражением пропорций – нормативный метод. Этим определяется тесная связь нормативного метода с балансовым. Однако нормативный метод имеет большое самостоятельное значение в регулировании социально-экономических и экологических процессов, в частности через использование норм и нормативов в определении потребностей в сырье, материалах, товарах, услугах потребительского бюджета и т. д. Состав норм и нормативов весьма разнообразен. Существуют три подсистемы норм и нормативов:

• ресурсная подсистема (нормы и нормативы расхода и запасов сырья, материалов, топлива, энергии на единицу продукции, услуг, использования производственных мощностей; удельные капитальные вложения; нормы продолжительности строительства и т. д.);

• подсистема эффективности общественного производства (производство продукции на один рубль затрат, фондоотдача, производительность труда и т. д.);

• подсистема социально-экономических и экологических норм (денежные доходы на душу населения, средняя заработная плата, потребление продуктов питания на душу населения, потребительский бюджет, предельно допустимые концентрации вредных веществ и т. д.).

В современных условиях большое значение приобретают создание единой научно обоснованной системы норм и нормативов, их дифференциация на региональном уровне и поэтапное введение в каждом регионе с учетом имеющихся материальных и финансовых ресурсов. Особое внимание следует обратить на разработку научно обоснованных социальных норм и нормативов, а также норм, регулирующих финансовые отношения работодателей с бюджетами разных уровней: федерального, регионального, местного.

Метод социологических исследований находят все большее применение в управлении региональной экономикой. Они напрямую связаны с практической сферой. Задачи, решаемые прикладной социологией, зависят от регулирования конкретных социально-экономических процессов, прогнозирования, планирования и управления в четко очерченных сферах жизни. Например, в сфере развития какой-либо отрасли экономики региона могут решаться такие задачи:

• изучение, анализ, оценка современного состояния отрасли;

• выявление наиболее острых проблем, требующих безотлагательного решения, разработка возможных вариантов их устранения;

• формирование системы показателей как критериев определения приоритетов, планирования и прогнозирования;

• анализ и оценка возможных результатов, последствий и этапов реализации реформ, прогнозов, планов, программ стабилизации и развития отрасли;

• разработка научного обеспечения и практических рекомендаций решения конкретных проблем, возникающих в отдельных звеньях отрасли.

Методы экономико-математического моделирования представляют собой совокупность способов (приемов) расчета социально-экономических показателей с применением прикладной математики и математической статистики. Достаточно распространенными моделями региональной экономики являются модели региона, модели размещения, межрегиональные модели национальной экономики. Их применение позволяет выявить взаимосвязи в экономике региона, обосновать изменение социально-экономических показателей, осуществлять многовариантные расчеты региональных прогнозов, программ и других разработок и выбрать из них оптимальный.

Центральное место в моделировании региональной экономики занимают модели региона – *межотраслевой баланс и его модификации*. Методология разработки таких балансов является достаточно отработанной.

Моделирование размещения можно представить моделями транспортировки грузов (классическая транспортная задача), размещения производства (модель размещения сельскохозяйственного производства, производственно-транспортные модели), миграции населения. К межрегиональным моделям национальной экономики относятся: межрегиональный межотраслевой баланс, модель экономического взаимодействия регионов.

Схема МОБ и основное уравнение МОБ

Экономика стран на современном этапе представляет собой сложный многоотраслевой комплекс с перекрещивающимися связями. Состав отраслей и характер их взаимосвязей постоянно изменяются под воздействием непрерывно развивающихся и углубляющихся процессов разделения и кооперации общественного труда.

В мировой практике для выявления межотраслевых связей, анализа и формирования структуры экономики па прогнозируемый период широко используются межотраслевые балансы (МОБ).

В зарубежных странах (США, Япония, Германии и др.) межотраслевые балансы составляются в виде матрицы (таблицы) "затраты - выпуск", автором которой является известный ученый, лауреат Нобелевской премии В. Леонтьев.

На основе межотраслевого баланса рассчитываются макроэкономические показатели, промежуточное потребление, затраты ресурсов, осуществляется анализ влияния спроса, цен, изменений в заработной плате на экономику в целом и на отдельные отрасли.

Показатели межотраслевого баланса могут применяться также для международных сравнений производственных структур и результатов.

В бывшем СССР межотраслевой баланс разрабатывался в системе баланса народного хозяйства (БНХ) в соответствии с марксистской методологией, согласно которой основным макроэкономическим показателем, характеризующим развитие экономики, являлся совокупный общественный продукт. При переходе к рыночным отношениям в странах СНГ и других бывших социалистических странах ведутся исследования по разработке межотраслевого баланса в Системе национальных счетов (СНС), в котором основным макроэкономическим показателем является валовой национальный продукт, т.е. осуществляется переход от МОБ в системе баланса народного хозяйства к МОБ в системе национальных счетов.

Концепция СНС рассматривает экономику как единое целое без проведения принципиальных различий между производством материальных благ и деятельностью по оказанию услуг.

Схема межотраслевого баланса в СНС (табл.11) представлена тремя заполненными квадрантами и адекватна развернутому матричному представлению четырех основных счетов нации.

В схеме МОБ (табл. 1.7) выделяются три основные части (квадранты): внутренний (или первый) квадрант (I); боковое (или правое) крыло (II квадрант); нижнее крыло (III квадрант). IV квадрант не разрабатывается.

Внутренний (или первый) квадрант (I) характеризует взаимосвязи отраслей, отражает промежуточное потребление;

во II квадранте приводится структура конечного использования валового внутреннего продукта (ВВП);

в III квадранте показывается структура валовой добавленной стоимости по элементам.

Таким образом, если рассматривать данные МОБ по вертикали, то по колонкам показывается стоимостная структура выпуска продукции отдельных отраслей, который состоит из промежуточного потребления (I квадрант) и валовой добавленной стоимости (III квадрант), а по горизонтали — по строкам — натурально-вещественный состав продукции, которая расходуется на промежуточное потребление (I квадрант) и конечное использование (II квадрант).

Для каждой отрасли экономики ресурсы продуктов равны их использованию

Таблица 1.7

Выпуск / Затраты	Промежуточный спрос		Конечное использование (спрос)						Валовой выпуск
	Отрасли (j) 1, 2, 3, ... n	Итого	Потребление домашних хозяйств	Государственное потребление	Инвестиции	Экспорт	Итого	Импорт (минус)	
Промежуточные затраты отрасли (i)	I		II						
1	$q_{11} q_{12} \dots q_{1n}$	q_1	C_1	G_1	I_1	E_1	F_1	M_1	Q_1
2	$q_{21} q_{22} \dots q_{2n}$	q_2	C_2	G_2	I_2	E_2	F_2	M_2	Q_2
...									
n	$q_{n1} q_{n2} \dots q_{nn}$	q_n	C_n	G_n	I_n	E_n	F_n	M_n	Q_n
Добавленная стоимость	III		IV						
Зарплата	$W_1 \; W_2 \dots W_n$								
Амортизация	$Ам_1 \; Ам_2 \dots Ам_n$								
Прибыль	$Пр_1 \; Пр_2 \dots Пр_n$								
Итого	$Y_1 \; Y_2 \dots Y_n$								
Валовые затраты			C	G	I	E	F	M	–

В квадранте I представлены данные о промежуточных сделках между отраслями-производителями (продавцами) и отраслями-потребителями (покупателями), характеризующие промежуточный спрос (потребление).

В квадранте II представлено распределение продукции отраслей на личное потребление населения, государственное потребление, инвестиции, экспорт и импорт, объединенные общим понятием конечное использование (конечный спрос). Здесь конечный спрос имеет форму ВНП, который на стадии конечного использования может быть представлен основополагающим уравнением Кейнса.

В квадранте III отображается стоимостная структура затрат на производство валового национального продукта У по отраслям, т.е. сумма заработной платы W прибыли Пр и амортизации Ам в каждой отрасли:

$Y_j = W_j + Am_j + П_p$

Сумма промежуточного и конечного потребления по i-й строке характеризует объем валового выпуска продукции (услуг) i-й отрасли. Используя условные обозначения из табл.6, валовой выпуск i-й отрасли можно определить по формуле

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} + C_i + G_i + I_i + E_i - M_i = Q_i$$

По модели межотраслевого баланса можно выполнять два типа расчетов: первый, когда по заданному уровню конечного потребления определяются масштабы общественного производства и структура экономики; второй, когда по заданным объемам производства по одним отраслям (продуктам) и заданному конечному потреблению в других отраслях формируется баланс производства и потребления продуктов.

Первый тип применяется в основном при разработке прогнозных расчетов, второй - на стадии формирования планов, их корректировки (внесения уточнений по объемам производства той или иной продукции).

Для разработки межотраслевого баланса используются коэффициенты прямых у и коэффициенты полных b затрат.

Коэффициенты прямых затрат - это среднеотраслевые нормативы расхода материальных ресурсов на производство единицы определенного вида продукции (услуг). Они имеют натуральную и денежную форму в зависимости от того, в каком виде составляется МОБ. С их помощью рассчитываются межотраслевые потоки, и определяются материальные затраты по отраслям экономики $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j$

Коэффициенты полных затрат характеризуют затраты на производство единицы конечного продукта (конечного использования ВНП) по всей цепи сопряженных отраслей. Они определяются на основе коэффициентов прямых затрат и отличаются от последних на величину косвенных затрат. Коэффициенты полных затрат используются для расчета валовой продукции по каждой отрасли путем их умножения на объем конечного продукта (конечного использования ВНП).

Данные МОБ открывают широкие возможности для применения экономико-математических методов исследования межотраслевых связей. Это определяется тем, что количественное выражение экономических связей каждой отрасли с другими отраслями может быть представлено в виде системы линейных уравнений.

Если рассматривать данные МОБ по строкам, то выпуск продукции каждой отрасли можно описать в виде следующего уравнения:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + y_i \quad (i=1, 2, \dots , n),$$

где a_{ij} - коэффициент прямых затрат i-ой отрасли на производство единицы продукции j-ой отрасли ($a_{ij}=x_{ij} / x_j$);

x_i - выпуск продукции i–ой отрасли;

x_j – выпуск продукции j–ой отрасли;

y_i – конечный спрос i-ой отрасли (конечное потребление, валовое накопление, сальдо экспорта-импорта).

В матричной форме **основное уравнение МОБ** имеет вид:

$X=A \cdot X+Y$,

где X – вектор выпуска продукции;

A – матрица коэффициентов прямых затрат, позволяющая установить прямые производственные связи между отраслями;

Y – вектор конечного спроса.

Путем специальных математических расчетов на основе этой матрицы рассчитывается матрица коэффициентов полных затрат, характеризующих как прямые, так и косвенные затраты на производство единицы конечной продукции.

Из приведенной выше матричной формы записи уравнения выпуска продукции следует:

$Y= (E-A)*X$,

где E - единичная матрица.

Умножив обе части уравнения на $(E-A)^{-1}$ получим:

$(E-A)^{-1} Y= (E-A)^{-1} (E-A)*X$,

где $(E-A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных затрат.

Тогда:

$(E - A)^{-1} Y=X$.

Данное уравнение называют основным уравнением МОБ. Оно имеет большое практическое значение для прогнозирования, в связи с тем, что имея матрицу коэффициентов полных затрат и перебирая различные варианты вектора распределения конечного спроса, можно рассчитать различные варианты прогноза.

При рассмотрении МОБ по колонкам выпуск продукции в отрасли может быть представлен следующим уравнением:

$z_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + z_i$ (j=1, 2, … , n),

где z_j – валовая добавленная стоимость j-ой отрасли.

Данное уравнение характеризует стоимостной состав выпуска продукции каждой отрасли.

Информация межотраслевого баланса позволяет получить систему аналитических показателей, позволяющих охарактеризовать структуру и эффективность экономики в целом и отдельных ее составляющих. Эту систему показателей можно подразделить на две группы:

1. Структурные показатели, позволяющие определить:

- отраслевую структуру валового выпуска продуктов и услуг;

- отраслевую структуру валового внутреннего продукта;

- стоимостную структуру валового выпуска каждой отрасли;

- стоимостную структуру валовой добавленной стоимости каждой отрасли;

- отраслевую структуру конечного использования валового внутреннего продукта;

- структуру расходов на конечное потребление.

2. Коэффициенты прямых и полных затрат, используемые как при статистическом анализе, так и при прогнозировании.

Под **прямыми затратами** понимаются затраты одного продукта (или одной отрасли) на производство другого продукта (или другой отрасли).

Коэффициент прямых затрат равен отношению величины затрат отрасли на производство данного продукта к общему объему этого произведенного продукта. Коэффициенты прямых затрат позволяют установить меру технико-производственных связей между отраслями. Их значения не постоянны, они изменяются и в силу научно-технического прогресса и действий структурных факторов.

Под **полными затратами** понимается расход данного вида сырья и материалов, не только непосредственно вошедший в новый продукт, но и включенный в другие продукты (косвенные затраты), потребленные в процессе производства. Следовательно, полные затраты – это сумма прямых и косвенных затрат.

Системы показателей, характеризующих экономические процессы для регионов и экономики в целом

На основе системы национальных счетов рассчитывают макроэкономические показатели (агрегаты), характеризующие различные стадии экономической деятельности: производство товаров и услуг, образование, распределение и конечное использование доходов.

Агрегаты – это совокупные величины, позволяющие измерять результаты функционирования всей экономики с определенной точки зрения. Они служат для целей макроэкономического анализа и сопоставлений во времени и по регионам.

Одни агрегаты можно выводить напрямую как суммарные итоги по определенным операциям в СНС; это относится, например, к конечному потреблению, валовому накоплению основного капитала и отчислениям на социальное страхование. Другие агрегаты можно выводить путем суммирования балансирующих статей соответствующих счетов по институциональным секторам, это относится, например, к добавленной стоимости, сальдо первичных доходов, располагаемому доходу и сбережению.

1. Валовой (чистый) внутренний продукт (ВВП/ЧВП)

Основным макроэкономическим показателем как в отечественной, так и в зарубежной статистике является **валовой внутренний продукт** (ВВП). Он представляет конечный результат производственной деятельности на экономической территории страны за определенный период (как правило за год).

Существуют три способа расчета ВВП (производственный, распределительный и метод конечного использования).

ВВП производственным методом определяется (по данным счета производства) как сумма валовой добавленной стоимости всех отраслей или секторов экономики.

Выпуск товаров, оказание услуг и соответственно валовая добавленная стоимость, на основе которой исчисляют ВВП, могут быть выражены в ценах производителя или в основных ценах.

Для определения ВВП в рыночных ценах конечного потребителя сумма ВДС отраслей (секторов) должна быть скорректирована на величину чистых налогов на продукты и импорт. В зависимости от того, в каких ценах (основных или производителя) получена оценка ВДС, ВВП будет рассчитываться по следующим формулам:

$$ВВП = \sum ВДСосн + НПИ – СПИ,$$

$$ВВП = \sum ВДСпроиз + НДС – ЧНИ,$$

где $\sum$ ВДСосн , $\sum$ ВДСпроиз – это сумма ВДС отраслей (секторов) экономики в основных ценах или ценах производителя;

НПИ – сумма всех налогов на продукты и импорт;

СПИ– сумма всех субсидий на продукты и импорт;

НДС – сумма налогов на добавленную стоимость;

ЧНИ – чистые налоги на импорт (сумма налогов на импорт за вычетом субсидий на импорт).

Валовая добавленная стоимость (ВДС) – исчисляется на уровне отраслей как разница между выпуском товаров и услуг (ВВТиУ) и промежуточным потреблением (ПП):

$$ВДС = ВВТиУ – ПП.$$

Отметим, что величина ВДС по экономике в целом при расчете ВВП должна быть уменьшена на величину косвенно измеряемых услуг финансового посредничества (КИУФП), которые представляют собой разность между процентами, полученными и выплаченными финансовыми посредниками. Поскольку данные услуги трудно отнести к конкретному потребителю, их относят к промежуточному потреблению условной единицы с нулевым выпуском и соответственно, вычитают из итога ВДС по экономике в целом.

Общая формула расчета ВВП производственным методом может быть представлена в виде:

ВВП = ∑ ВДС – КИУФП + ЧНПИ,

где ЧНПИ – чистые налоги на продукты и импорт (налоги за вычетом субсидий).

ВВП распределительным методом определяется (по данным счета образования доходов) как сумма первичных доходов, выплаченных производственным единицам-резидентам: оплата труда наемных работников внутренней экономики (ОТ), чистые (т.е. за вычетом субсидий) налоги на производство и импорт (ЧНПрИ), валовая прибыль экономики и валовые смешанные доходы (ВП):

ВВП = ОТ + ЧНПрИ + ВП.

ВВП методом конечного использования рассчитывается (по данным счета товаров и услуг) как сумма следующих компонентов: конечное потребление товаров и услуг (КП), валовое накопление (ВН), сальдо экспорта и импорта товаров и услуг (Э - И):

ВВП = КП + ВН + (Э – И).

Объем ВВП часто интерпретируется как показатель размера рынка, т.к. он измеряет совокупную стоимость конечных товаров и услуг

Чистый внутренний продукт (ЧВП) - это валовой внутренний продукт за вычетом потребления основного капитала:

ЧВП = ВВП – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

Потребление основного капитала (ОК) – представляет собой уменьшение стоимости основного капитала в течение отчетного периода в результате его морального и физического износа. Рассчитывается как сумма амортизации основных средств за год во всех отраслях народного хозяйства плюс недоамортизованная стоимость выбывших основных фондов.

2. **Валовая (чистая) прибыль экономики и валовые смешанные доходы** (ВП/ЧП)

Валовая прибыль(ВП) экономики представляет собой ту часть ВВП, которая остается у производителей после вычета расходов, связанных с оплатой труда наемных работников и чистых налогов на производство и импорт. **Валовые смешанные доходы** – доходы, в которых сложно (или невозможно) отделить доходы от предпринимательской деятельности институциональной единицы от оплаты труда (доходы фермера, предпринимателя без образования юридического лица).

Чистая прибыль экономики (ЧП)- это валовая прибыль за вычетом потребления основного капитала:

ЧП = ВП – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

3. Валовой (чистый) национальный доход (ВНД/ЧНД)

Валовой национальный доход (ВНД**)** **–**это результат деятельности резидентов данной страны независимо от того, произведен он на экономической территории этой страны или за ее пределами. Представляет собой сумму первичных доходов, полученных резидентами данной страны за тот или иной период времени:

$ВНД = ВВП_{рын.цен.} + Д_с + Д_п$,

где $Д_с$ – чистые доходы от собственности, полученные из-за границы;

$Д_п$ – чистые предпринимательские доходы, полученные из-за границы.

Чистый национальный доход(ЧНД)- это валовой национальный доход за вычетом потребления основного капитала:

ЧНД = ВНД – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

4. **Валовой (чистый) национальный располагаемый доход**(ВНРД/ЧНРД)

Валовой национальный располагаемый доход (ВНРД) – характеризует доход, которым институциональная единица располагает для конечного потребления и сбережения:

ВНРД = ВНД + Стт,

где Стт – сальдо текущих трансфертов из-за границы, т.е. трансферты, полученные из-за границы, минус трансферты, отправленные за границу.

Трансферты – передача доходов в денежной или натуральной форме одной единицей другой на безвозмездной основе. Различают трансферты: текущие и капитальные.

Текущие трансферты (ТТ) – операции, которые совершаются более или менее регулярно и связаны с уменьшением или увеличением текущих расходов хозяйствующих единиц. ТТ включают:

- текущие налоги на доходы, имущество и др.;
- страховые платежи и возмещения;
- отчисления на соц.страх., социальные пособия;
- добровольные взносы и подарки, не имеющие капитального характера;
- штрафы и др.

Капитальные трансферты (КТ) – связаны с передачей капитала или сбережений, получение субсидий на капитальные вложения из бюджета, поступления в бюджет, пожертвования, списание долгов, продажа основных средств по ценам ниже рыночных или безвозмездная их передача. КТ являются единовременными и значительными по величине операциями, связанными с приобретением или выбытием активов у участников операции. Различают следующие виды КТ:

- налоги на капитал;
- инвестиционные субсидии;
- прочие капитальные трансферты.

Валовой национальный располагаемый доход (ВНРД) также может быть представлен как сумма конечного потребления (КП) и валового сбережения (ВС):

ВНРД= КП + ВС.

Конечное потребление (КП) - расходы на конечное потребление домашних хозяйств-резидентов на потребительские товары и услуги, а также расходы учреждений общего государственного управления и некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства, на товары и услуги для индивидуального и коллективного потребления.

Чистый национальный располагаемый доход(ЧНРД):

ЧНРД = ВНРД – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

5. Валовое (чистое) накопление(ВН/ЧП)

Валовое накопление (ВН) - охватывает валовое накопление основного капитала, изменение запасов материальных оборотных средств, чистое приобретение ценностей (ювелирных изделий, предметов антиквариата и т.д.).

Валовое накопление основного капитала включает стоимость построенных зданий и сооружений, а также приобретенных машин, оборудования, транспортных средств и других видов основных фондов.

Изменение запасов материальных оборотных средств включает прирост стоимости запасов сырья, материалов, топлива, инструмента, незавершенного производства, готовой, но нереализованной продукции и т.д. при исчислении этого показателя из него исключается прирост стоимости запасов этих активов в результате инфляции (так называемая холдинговая прибыль).

Чистое приобретение ценностей включает покупки (за вычетом продаж) таких ценных предметов. как ювелирные изделия, произведения искусства, антиквариат, золото и другие драгоценные металлы и т.д., которые обладают способностью сохранять стоимость в течение длительного периода времени. Ценности приобретаются как юридическими, так и физическими лицами не для производства и потребления, а для защиты активов от инфляции.

Чистое накопление (ЧН):

ЧН = ВН – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

6. **Валовое (чистое) национальное сбережение**(ВНС/ЧНС)

Валовое национальное сбережение (ВНС) - часть располагаемого дохода, которая не израсходована на конечное потребление и может быть обращена на цели финансирования накопления. Рассчитывается по формуле:

ВС = ВНРД – КП.

Чистое национальное сбережение (ЧНС):

ЧНС = ВНС – ОК,

где ОК – потребление основного капитала.

Модель Леонтьева «Затраты- выпуск»

Практически значимую модель экономического роста разработал американский экономист В. Леонтьев. В основу модели, которая стала надежным инструментом прогнозирования экономического развития, была положена система стоимостных и натуральных потоков, выступающих как издержки и результаты производства товаров и услуг. В. Леонтьев сумел представить в форме, так называемой шахматной таблицы основные материальные и стоимостные потоки национального хозяйства.

Суть модели наиболее доступно и понятно для первичного понимания описал сам В. Леонтьев. «Таблица «затраты-выпуск», – писал он, – показывает потоки товаров и услуг между различными отраслями экономики данной страны. Количество отраслей, на которые разбивается экономика, зависит от объема и детальности информации, которая должна содержаться в таблице. Цифры группируются в таблицы, напоминающие шахматную доску. Каждая строка показывает распределение продукции, выпущенной отдельной отраслью, между всеми другими отраслями, а каждый столбец – затраты продукции всех других отраслей в данной отрасли. Так, например, в столбце, показывающем потоки товаров и услуг, поглощенных автомобильной промышленностью, один показатель представляет собой количество стали, полученной от сталелитейной промышленности, другой – количество электроэнергии, полученной от отрасли, производящей электроэнергию, третий – объем труда работника из специфической отрасли «домашние хозяйства». Разделив каждый из этих показателей на объем годового выпуска автомобилей, мы получим набор коэффициентов затрат, представляющих собой все то, что необходимо для выпуска единицы продукции автомобильной промышленности. Аналогичные наборы технологических коэффициентов можно получить из других столбцов таблицы «затраты-выпуск» для каждой отрасли народного хозяйства. Вместе взятые, эти коэффициенты образуют жесткий каркас системы уравнений общего равновесия, которая может быть использована для того, чтобы конкретизировать прогнозируемую общую величину конечного продукта в детализированных оценках соответствующих количеств товаров и услуг, которые должны быть произведены и потреблены каждой отраслью, если следовать требованию сбалансированности между суммарным спросом на каждый продукт и суммарным объемом его выпуска… решение системы линейных уравнений общего равновесия ведет к построению внутренне согласованной таблицы «затраты-выпуск», описывающей состояние экономики, в котором она была бы способна произвести конечный продукт заданного объема и структуры… Численное решение такой большой системы уравнений может быть найдено только с помощью ЭВМ».

Модель «затраты-выпуск» описывается следующей формулой:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, xj + y_i ,$$

где X_i – объем производства в i-ой отрасли (i = 1,2,…,n); ij – коэффициент прямых затрат i-го ресурса на производство единицы j-го продукта; y_i – величина конечного производства продукта i-й отрасли.

В самой модели «затраты-выпуск» обращается, прежде всего, внимание на количественные связи в экономике. Эти связи между отраслями устанавливаются через технологические коэффициенты (i j). Схема межотраслевого баланса выражается четырьмя квадрантами. В первом квадранте содержатся показатели материальных издержек на производство продукции. Во втором квадранте показатели отражают конечную продукцию, используемую на личное потребление, накопление, государственные закупки и экспорт. В третьем – показатели добавленной стоимости (заработная плата, прибыль, налоги) и импорта. В четвертом – показатели перераспределения национального дохода. Таблица межотраслевых связей отражает по столбцам затраты (то есть элементы, образующие стоимость продукции по каждой отрасли), а по срокам – структуру распределения продукции каждой отрасли национальной экономики.

Таким образом, использование модели «затраты-выпуск» позволяет не только изучить взаимозависимость между различными отраслями национальной экономики в форме взаимовлияния цен, объемов производства и доходов, но и осуществлять прогнозирование развития экономики страны, так как задавая необходимый темп роста одного или группы продуктов, можно определить масштабы роста остальных отраслей, а тем самым и темпы экономического роста, и его отраслевую структуру.

Допущения модели Леонтьева

Теория «Межотраслевого баланса» была разработана в США В. В. Леонтьевым как действенный инструмент при анализе и прогнозировании структурных взаимосвязей в экономике. Она исходит из возможности достижения общего макроэкономического равновесия, для чего разработана модель этого состояния, включающая структурную взаимосвязь всех стадий производственного процесса — производства, распределения или обмена и конечного потребления.

В модели межобраслевого баланса Леонтьева для анализа применятся схема межотраслевого баланса, состоящая из четырех основных квадрантов, отражающих определенные стадии производственного процесса:

- объемы потребления на нужды производства — первый квандрант;
- группирование продукта в зависимости от того, как он используется — второй квандрант;
- включение добавленной стоимости товара, например, оплаты труда сотрудников, налогов и иного — третий квандрант;
- структура распределения национального дохода — четвертый квандрант.

Теория межотраслевого баланса позволяет:

1. произвести анализ и прогнозирование развития основных отраслей национальной экономики на различных уровнях — региональном, внутриотраслевом, межпродуктовом;
2. произвести объективное и актуальное прогнозирование темпов и характера развития национальной экономики;
3. определить характеристику основных макроэкономических показателей, при которых наступит состояние равновесия национальной экономики. В результате воздействия на них приблизиться к равновесному состоянию;
4. рассчитать полные и прямые затраты на производство определенной единицы блага;
5. определить ресурсоемкость всей национальной экономики и отдельных ее отраслей;
6. определить направления повышения эффективности и рационализации международного и регионального разделения труда.

Впервые метод межотраслевых балансов был использован в 1936 г. в США, когда В. В. Леонтьев рассчитал его для 42 отраслей. Тогда же была признана его эффективность при использовании для выработки государственной экономической политики и прогнозирования национальной экономики. Сегодня он широко применяется во многих странах мира.

На практике широко используется Международная стандартная классификация всех сфер экономической деятельности, в которой дана классификация всех отраслей национальной экономики. Она позволяет сформировать *систему национальных счетов (СНС)*. Классификация и группировка по отраслям национальной экономики позволяют определить объемы и вклад конкретной отрасли в общий ВВП и ВНП, охарактеризовать связи между отраслями и сформированные пропорции. Сформированная функциональная группа позволяет провести объективный анализ роли хозяйствующих субъектов в производстве национального богатства.

Количество отраслей, включенных в межотраслевой баланс, определяется конкретными его целями. Базовыми являются транспорт, связь, сельское хозяйство, производство. При необходимости отрасль национальной экономики может быть разделена на более мелкие отрасли, входящие в ее состав. Основания для отнесения единиц национальной экономики к определенной отрасли могут быть различными — схожесть технологического и производственного процесса, однородность необходимого сырья, характер производимой продукции.

Современная отраслевая структура национальной экономики России характеризуется преобладанием топливно-энергетического комплекса(ТЭК). Он является одной из наиболее капиталоемких отраслей, в связи с чем происходит отток капитала от других отраслей. Ориентация ТЭК на международный рынок делает Россию зависимой от мирового колебания цен. В результате чего более половины ВВП страны формируется от продажи ресурсов. Преобладание добывающих отраслей экономики негативным образом сказывается на общих темпах развития национальной экономики. Доминирование ТЭК препятствует развитию наукоемких отраслей экономики. Общая схема таблиц «Затраты-выпуск» представлена в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Отрасли / Продукты	Промежуточный спрос	Конечный спрос	Выпуск
Промежуточное потребление	I	II	
Добавленная стоимость	III		
Выпуск			

При составлении таблиц «Затраты-выпуск» используются классификаторы видов экономической деятельности, отраслей и продуктов (ОКВЭД) и (ОКПУД).

В таблицах выделяются три блока так называемых квадрантов. В I и II квадрантах отражаются соответственно промежуточный (производственный) и конечный спрос на ресурсы, в III квадранте — добавленная стоимость по отраслям производства.

Основное внимание в этих таблицах уделяется взаимосвязи отраслей по производству и использованию их продукции. В сказуемом таблицы приводятся отрасли-потребители продукции, в подлежащем — отрасли-поставщики.

Таким образом, по столбцам I и III квадрантов сумма промежуточного потребления и ДС представляет собой затраты на производство, а по строке I и II квадрантов сумма промежуточного и конечного спроса характеризует использование ресурсов.

Система таблиц «Затраты-выпуск», предлагаемая для разработки руководством ООН по национальным счетам 1993 г., включает в себя последовательность таблиц, характеризующих формирование ресурсов страны, направление их использования, образование добавленной стоимости, трансформацию стоимости товаров и услуг в основных ценах в стоимость в ценах покупателей.

Набор этих таблиц состоит:

- из таблиц ресурсов и использования;
- симметричных таблиц «Затраты-выпуск»;
- таблиц торгово-транспортных наценок;
- таблиц налогов и субсидий на продукты;
- таблиц использования импортной продукции.

Таблица «Ресурсы товаров и услуг», представленная в табл. 1.9, детально описывает процесс формирования ресурсов товаров и услуг по экономике страны за счет собственного производства и импорта.

Таблица 1.9

Отрасли / Продукты	Производство	Импорт	Н (+) С (-)	ТТН	Ресурсы (в ценах покупателей)
Товары и услуги					
Итого	Выпуск отраслей (в основных ценах)				

Таблица «Ресурсов» состоит из двух частей. В первой части таблицы отражается формирование ресурсов товаров и услуг за счет собственного производства и импорта. Во второй части дается количественная характеристика основных компонентов рыночной цены покупателей: налоги (Н); субсидии (С), торгово-транспортная наценка (ТТН).

Таблица «Использование» является логическим продолжением таблицы «Ресурсов». В ней дается подробная характеристика распределения располагаемых ресурсов по направлениям использования. Выделяется промежуточное (производственное) и конечное использование.

Таблица «Использование» строится по общей схеме таблиц «Затраты-выпуск», т.е. состоит из трех квадрантов и представляет собой вид «отрасль х продукт).

В I квадранте таблицы (табл. 1.10) показывается промежуточное потребление по столбцам — отраслей, по строкам — групп товаров и услуг.

Во II квадранте таблицы — конечное использование, которое подразделяется на следующие элементы:

- расходы на конечное потребление ДХ;
- расходы на конечное потребление некоммерческих организаций, обслуживающих ДХ;
- расходы на конечное потребление государственного управления;
- валовое накопление основного капитала;
- изменение запасов материальных оборотных средств; чистое приобретение ценностей;
- экспорт товаров и услуг.

Таблица 1.10

Товары и услуги	Промежуточный спрос (по отраслям)					Потребление		Накопление		Экспорт	Итого ресурсов
	1	2	3	4	…	ДХ	ГУ и НКО	ОК	ОбС		
1 2 3 …											
Добавленная стоимость											
Выпуск											

ДХ - домашние хозяйства; ГУ - государственные учреждения; НКО - некоммерческие организации; ОК - основной капитал; ОбС - оборотные средства.

В III квадранте таблицы «Использование» показывается образование добавленной стоимости по отраслям экономики. Основные компоненты ДС, выделяемые в этом квадранте, соответствуют компонентам счета образования доходов. Это: оплата труда наемных работников; валовой смешанный доход; другие чистые налоги на производство; потребление основного капитала; валовая прибыль; косвенно измеряемые услуги финансового посредничества.

В рамках СНС таблицы ресурсов и использования выполняют функции инструмента для согласования статистических данных, получения добавленной стоимости по отраслям, конечного спроса по продуктам, как в текущих, так и в сопоставимых ценах. Это достигается тем, что метод сопоставления этих таблиц предполагает согласование данных о располагаемых ресурсах (производство + импорт) с данными об использовании ресурсов по каждой группе товаров и услуг на достаточно высоком уровне детализации. Такой метод в статистике называется метод товарных потоков.

Симметричные таблицы «Затраты-выпуск» представляют собой таблицы по типу «продукт х продукт».

В этой таблице предполагается, что отрасль представляет собой совокупность однородных продуктов. В подлежащем и сказуемом I квадранта выделяется одинаковая номенклатура отраслей.

Симметричные таблицы «Затраты-выпуск» могут составляться двумя методами: путем непосредственного составления таблиц на основе специально проводимых обследований предприятий о структуре затрат продукции или посредством математической трансформации таблиц ресурсов и использования.

Покажем это на отвлеченном примере (табл. 1.11):

I этап (исходные данные)

Таблица 1.11

Отрасль / Продукт	1	2	3	Итого
1	20	2	0	22
2	5	10	30	45
3	0	0	5	5
Всего	25	12	35	72

Эти методы основаны на допущении об устойчивости отраслевой технологии или допущении об устойчивости технологии производства однородных продуктов. В условиях ограничений, формата пособия, рассмотрим алгоритм конвертации таблицы ресурсов и использования в симметричную матрицу на основе допущения об устойчивости отраслевой технологии производства (табл. 1.12, 1.13).

Таблица 1.12

Отрасль / Продукт	1	2	3
1	2	5	4
2	6	3	8
3	1	2	2
Добавленная стоимость	16	2	21
Всего	25	12	35

Таблица 1.13

Продукт / Отрасль	1	2	3
1	20/22=0,91	5/45=0,11	0/5=0
2	2/22=0,09	10/45=0,22	0/5=0
3	0/22=0	30/45=0,67	5/5=1
Всего	1,00	1,00	1,00

* С конвертацией таблицы подлежащего и сказуемого таблицы ресурсов.

По принятой гипотезе продукт i производится различными отраслями J. При этом каждая отрасль J затрачивает на производство всей своей продукции некоторое количество продукции q (табл. 1.14).

Таблица 1.14

Отрасль / Продукт	1	2	3
1	2/25=0,08	5/12=0,42	4/35=0,11
2	6/25=0,24	3/12=0,25	8/35=0,23
3	1/25=0,04	2/12=0,17	2/35=0,06
Добавленная стоимость	16/25=0,64	2/12=0,17	21/35=0,60
Всего	1,00	1,00	1,00

Для определения удельного расхода продукции q на производство продукции i находится средневзвешенная величина затрат продукции q на производство продукции j. В качестве весов при этом принимаются доли производства продукции I отраслям j в общем объеме производства продукции i.

Математическая запись алгоритма проведения данного вычисления выглядит следующим образом:

$A = KS$,

- A — матрица коэффициентов прямых затрат продукции i на производство продукции J для симметричной таблицы «Затраты-выпуск»;
- К — матрица коэффициентов прямых затрат продукции I на производство продукции J;
- S — таблица структуры производства продукции.

В обратной матрице коэффициенты прямых затрат, рассчитанные по формуле $a = A_{ij} / X_j$ и представленные в форме матрицы, характеризуют объем различных прямых затрат на производство единицы продукции и не учитывают косвенных затрат, связанных с производством этой продукции.

Таким образом, создается длинная цепочка взаимодействия производственных процессов. Если попытаться рассмотреть процесс производства любого продукта по всей производственной цепочке, то легко убедиться, что она практически бесконечна.

Определить объем полных затрат (прямых и косвенных) на производство продукта возможно на основе обратной матрицы. В экономической литературе ее часто называют матрицей Леонтьева. Формула исчисления этой матрицы выводится достаточно просто. Как уже говорилось выше, вектор выпуска продукции определяется по формулам:

$$X - AX = Y; \quad (I - A)X = Y; \quad X = (I - A)^{-1} Y$$

I представляет собой единичную матрицу, диагональные значения которой равны единице (1), а остальные равны нулю (0).

$(I - A)^{-1}$ — это и есть обратная матрица. Математическое решение этой задачи можно записать в следующем виде:

$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n$

При анализе межотраслевого взаимодействия методом «Затраты-выпуск» предполагается, что стимулом для увеличения спроса на продукцию является возрастание конечного спроса. Например, увеличивается спрос зарубежных стран на минеральное сырье. Такое допущение условно, поскольку повышение спроса на продукцию может возникнуть в результате различных обстоятельств. Вместе с тем, упрощение ситуации позволяет оценить влияние увеличения спроса на выпуск всей продукции с учетом всех межотраслевых взаимодействий.

Важной особенностью СНС является включение формулы «Затраты-выпуск» в общую структуру системы национальных счетов. Это касается в основном счетов товаров и услуг. Дополняя полную последовательность счетов для институциональных секторов, охватывающую все виды счетов в СНС, таблицы ресурсов и использования и симметричные таблицы позволяют обеспечить более детальный анализ отраслей и продуктов за счет разбивки счетов производства и образования доходов, а также счета товаров и услуг, что и приводит к составлению симметричной таблицы «Затраты-выпуск». «Симметричность» означает, что, как в строках, так и в столбцах, используются одинаковые классификации или единицы (т.е. одинаковые группы продуктов).

В СНС и экономическом анализе используются таблицы (или матрицы) «Затраты-выпуск» следующих видов:

- таблицы ресурсов и использования;
- симметричные таблицы (леонтьевские таблицы).

Квадратные симметричные таблицы построены по принципу «продукт — продукт», либо «отрасль — отрасль» («производитель — производитель»).

Институциональные единицы могут заниматься несколькими разными видами производственной деятельности одновременно. Поэтому для детального анализа СНС рекомендуется разбивать их на отдельные заведения, каждое из которых занимается только одним видом деятельности в одном месте. Следовательно, отрасли определяются как группы заведений, занимающихся одним и тем же видом производственной деятельности. В то же время необходимо учитывать принципиальное различие между основной и вторичной деятельностью, с одной стороны, и вспомогательной деятельностью, с другой:

- основная деятельность заведения — это деятельность, ВДС которой превышает ВДС любой другой деятельности, осуществляемой в рамках этой же единицы;

- вторичная деятельность — это деятельность, осуществляемая в рамках единого заведения в дополнение к основной деятельности;
- вспомогательная деятельность — это подсобная деятельность, предпринимаемая для создания условий, в которых могут осуществляться другие виды деятельности предприятия.

В результате вспомогательной деятельности обычно производится выпуск услуг, которые используются как факторы производства почти во всех видах производственной деятельности. Стоимость таких услуг, как правило, бывает невелика по сравнению со стоимостью результатов основной и вторичной деятельности предприятия. Поэтому вспомогательная деятельность рассматривается как неотъемлемая часть основной или вторичной деятельности, с которой она связана.

В процессе построения межотраслевого баланса требуется дезагрегирование счета товаров и услуг.

Счет товаров и услуг показывает соотношение между общим объемом имеющейся продукции (предложение) и общим объемом ее использования. Основные элементы исходного равенства (баланса) выражаются следующим образом: выпуск продукции + импорт (= все ресурсы) = промежуточное потребление + экспорт + конечное потребление + валовое накопление (= все использование).

Все стадии движения товаров и услуг в экономике прослеживаются от их первоначальных производителей до пользователей.

Детальное рассмотрение таких потоков принято называть методом товарных потоков. При этом используется исходная статистическая информация о товарах и услугах, а также дополнительные сведения, необходимые для надлежащей стоимостной оценки. Максимальная эффективность метода товарных потоков достигается в тех случаях, когда могут быть проведены независимые оценки по каждой из статей использования, т. е., когда за основу берется конкретная информация о распределении предложения продуктов между различными видами использования. При этом необходимо обеспечить согласование между стороной ресурсов и использования.

В таблицах представляются группы продуктов на основе классификации основных продуктов, и охватывается более 1800 товаров и услуг (пятизначный уровень) и около 300 продуктов (трехзначный уровень).

Стоимостная оценка и порядок учета налогов и наценок осуществляется по определенным правилам.

В СНС признаются следующие компоненты цены, уплачиваемой покупателем продукта:

- базисная цена продукта как результата производства;
- налоги на продукт;
- минус субсидии на продукт;
- торговые и транспортные наценки при доставке продукта покупателю.

Некоторые данные четырех компонентов поддаются дальнейшей разбивке, например, торговые и транспортные наценки могут рассматриваться в более дезагрегированном виде, в частности, путем подразделения этих наценок на отдельные торговые и розничные компоненты, а налог на добавленную стоимость (НДС) может выделяться в отдельный компонент.

Цена покупателя — это сумма, которая уплачивается покупателем (исключая НДС) за поставку единицы товара или услуги в установленный покупателем срок и место. Цена покупателя на товар включает любые транспортные расходы, отдельно оплаченные покупателем за поставку.

Цена производителя — это сумма, которая подлежит получению производителем от покупателя за единицу произведенной в виде товара или услуги продукции, минус любой НДС, начисленный на покупателя. Эта цена не включает никаких транспортных расходов, отдельно начисляемых производителем.

Базисная цена — это сумма, которая подлежит получению производителем от покупателя за единицу произведенной в виде товара или услуги продукции, минус любые подлежащие вычету налоги и плюс любые подлежащие получению субсидии по данной единице в связи с ее производством или реализацией. Эта цена не включает никаких транспортных расходов, отдельно начисляемых производителем.

Между этими тремя концепциями цен, играющими центральную роль при анализе таблицы «Затраты-выпуск», по определению, существуют следующие взаимосвязи:

- цена покупателя (которая включает не подлежащий вычету НДС) — торговые и транспортные наценки (включая налоги, кроме НДС, за вычетом субсидий на продукцию, подлежащие уплате / получению оптовыми и розничными торговцами), не подлежащие вычету налоги типа налогов на НДС = цена производителя (которая исключает не подлежащий вычету НДС);

- цена производителя — налоги (кроме НДС) за вычетом субсидий на продукцию, подлежащие уплате / получению ее производителями = базисная цена.

Для экспорта и импорта в СНС приняты аналогичные концепции цен: цена франко-борт (ФОБ) для экспорта и совокупного импорта и стоимость, страхование, фрахт (СИФ) для отдельных статей импорта. Разность между ценой ФОБ и ценой СИФ, издержки на транспортировку и страхование от границы страны-экспортера до границы страны-импортера и на оплату страхования на этом маршруте.

Цена СИФ — это цена товара, доставленного на границу страны-импортера, или цена услуги, оказанной резиденту, до уплаты каких-либо импортных пошлин и иных налогов на импорт или торговых и транспортных наценок внутри страны.

Таблицы ресурсов и использования составляются с детализацией товарных групп (предложение товаров и услуг). Данные о продуктах показываются в строках, об отраслях — в столбцах. Таблицы не могут составляться самостоятельно, так как они взаимосвязаны с балансом.

В таблице использования СНС содержится информация о видах использования товаров и услуг, а также о структуре затрат в отраслях.

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции и услуг представляет собой статистическую таблицу, в которой отражается взаимосвязь между валовой добавленной стоимостью, промежуточным потреблением и конечным использованием в отраслях экономики.

Из ВДС в МОБ выделяются следующие статьи:

1. Заработная плата	*в денежной форме* *в натуральной форме*
2.Отчисления на социальное страхование	*для выплаты пенсий,* *пособий,* *санаторно-курортное обследование*
3. Чистая прибыль	
4. Чистый смешанный доход.	
5. Налоги на производство, *кроме пенсионного фонда, фонда занятости, ФОМС.*	
6. Субсидии на производство (-)	*возмещение сельскому хозяйству* *компенсации за электроэнергию* *конверсии*
7. Потребление основного капитала (износ основных средств).	
8. Косвенно измеряемые услуги финансового посредничества	

Основным источником информации для определения объема и структуры расходов населения на покупку товаров являются данные статистики торговли о товарообороте, а также данные обследований ДХ.

МОБ детализирует счета товаров и услуг, обеспечивая органы управления информацией для построения межотраслевых моделей, прогнозов, анализа функционирования отраслей, а также выявления роли отдельных факторов производства (например, зависимости экономики от энергоснабжения или от изменения цен на энергоносители).

Итоги ВДС по отраслям МОБ рассчитываются двумя методами:

- как разница между валовым выпуском и промежуточным потреблением;
- как сумма элементов добавленной стоимости.

Межотраслевой баланс широко используется для статистических целей, определения товарной структуры потоков, а также для проверки сбалансированности всей системы статистических данных, охватывающих различные аспекты экономического процесса.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоят основные допущения модели межотраслевого баланса?
2. Какие задачи решаются с помощью модели межотраслевого баланса?
3. Что представляет собой матрица прямых затрат в модели межотраслевого баланса?
4. Что представляет собой матрица полных затрат?
5. Каковы условия продуктивности матрицы прямых затрат?

Модуль 2. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Тема 1. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения ЗЛП

Общая задача линейного программирования. Оптимальное решение (план) задачи линейного программирования. Система ограничений задачи линейного программирования. Задача линейного программирования в стандартном виде (в стандартной форме). Задача линейного программирования в каноническом виде (в канонической форме). Построение математической модели задачи. Непременное требование для задач оптимизации. Условие, при котором задачу линейного программирования можно решать графическим методом. Построение многоугольника решений. Построение вектора-градиента целевой функции. Нахождение решения геометрически. Расчет оптимального плана и ЦФ

Общая задача линейного программирования

Задачи линейного программирования(ЗЛП) являются частным случаем задачи оптимизации. Поэтому рассмотрим формулировку задач оптимизации.

Необходимость решать оптимизационные задачи возникает очень часто. Каждый раз, когда требуется удовлетворить некоторые свои потребности, приходится сопоставлять их с существующими возможностями. И решать подобного рода задачи человеку приходилось испокон веков. Для того чтобы обеспечить свое существование, надо было охотиться, ловить рыбу или птиц, собирать плоды. Чтобы укрыться от непогоды, требуется найти пещеру, построить хижину, добыть шкуру. Постепенно по мере развития возникли потребности в таких вещах, как посуда, орудия труда, приспособления для охоты и др. Эти предметы надо было изготовить, то есть, возникает производство. Там же, где возникает производство, возникают и вопросы: что, каких размеров, из чего (какого материала) делать? Другими словами, возникает спрос на проектирование. И независимо от того, какой предмет надо проектировать, объективно существует одна из двух постановок:

либо проектировать изделие *заданной стоимости с наилучшими свойствами*, либо проектировать изделие с *заданными свойствами, но наименьшей стоимости*.

Постановка задачи в другой форме приводит к излишней трате ресурсов и времени. Наилучшее решение может быть получено с помощью методов оптимального проектирования.

С развитием массового производства возникают новые вопросы, такие, как, например, у управляющего производством – кого на какую работу направить, т.е. ему необходимо решить *задачу распределения ресурсов.* Кроме того, возникает проблема *распределения ресурсов по времени,* когда надо определить, когда каждая работа должна быть начата и когда завершена. Если такая задача будет решена неправильно, результат будет менее эффективным, а то и вовсе пропадет. Например, если вы в походе не поставили засветло палатку, в темноте это будет сделать гораздо труднее. Если пока вы ловили рыбу, ваши товарищи даже не приготовили место для костра и не насобирали сушняка, ваш обед очень запоздает. Таким образом, мы говорим о том, что *ресурсы во времени должны распределяться оптимально*.

Существуют задачи, которые вообще не имеют решения. Например, как одной булкой хлеба накормить все человечество или из одного кубометра дров построить дворец. Не настолько очевидны в своей неразрешимости, подобные задачи встречаются довольно часто. Они получили свое название: *несовместные задачи*. Поэтому, чтобы не делать лишнюю работу, сначала надо все рассчитать, а потом уже приступать к работе.

Кроме того, как известно, в производстве возникают и такого рода проблемы, как выход из строя оборудования, перебои в поставке сырья, непредусмотренные отключения энергии и др. Для решения таких проблем привлекают методы решения *задач стохастической оптимизации*.

С дальнейшим развитием общественного производства возникают новые вопросы. Здесь необходимо определить, кто какой товар производит, кому продает и по какой цене, и вообще, нужен ли этот товар. И здесь важную роль играет понятие критерия. Перед принятием решения надо знать, *что мы хотим*. Мы, конечно, хотим, чтобы все было лучше. Что такое «все» и что такое «лучше» определяет критерий.

Сформулируем основные вопросы, которые требуют решения оптимизационной задачи:

1. Задачи проектирования изделия - либо задание стоимости с наилучшими свойствами, либо с заданными свойствами наименьшей стоимости.
2. Задачи распределения ресурсов вообще и распределения ресурсов во времени.
3. Выбор критерия.
4. Задачи стохастической оптимизации.
5. Анализ принимаемого решения.

Методы решения задач

Для успешного моделирования надо выполнить следующие правила:

- учитывать главные свойства объекта;
- пренебрегать второстепенными свойствами;
- уметь отделить главные свойства от второстепенных.

Чтобы грамотно составить математическую модель необходимо привлекать специалистов в данной предметной области - по управлению, проектированию, разработке технологических процессов и др. Составление модели, безусловно, можно считать искусством.

Для нахождения оптимального решения необходимо знать, что такое математическая модель, и представлять, каким образом можно получить решение. На современном этапе расчетное решение получают с использованием вычислительных средств.

Модель описывает зависимость между исходными данными или факторами производства и искомыми величинами, а алгоритм представляет собой последовательность действий, которые надо выполнить, чтобы от исходных данных перейти к искомым величинам.

Слово «алгоритм» произошло от имени арабского ученого по имени Аль-Джафар Магомет бен Муса Хорезми. Великий ученый родился в Хорезме, в последующем жил в Багдаде в IX веке. Он занимался точными науками - астрономией, математикой, написал учебник, где употреблял не римские, как тогда было принято, а арабские цифры. Его трактаты были переведены на латинский язык в XII веке и оказали большое влияние на развитие математики в Европе. Его сокращенное имя Аль-Хорезми было на латинском языке написано как Алгоритми.

Алгоритмы оптимизационных задач очень сложны, без применения компьютера их решить весьма проблематично. Программное обеспечение компьютера реализует алгоритмы поиска оптимального решения, которые преобразуют исходные данные в результат.

Метод поиска оптимального решения выбирается исходя из вида функции z и наложенных ограничений. Например, если z линейно зависит от решения x и все ограничения представляют собой линейные неравенства или уравнения, то возникает классическая задача *линейного программирования*.

Если, исходя из содержательного смысла задачи, ее решения должны быть целыми числами, то это задача *целочисленного программирования*.

Если критерий оптимальности и (или) ограничения задаются нелинейными функциями, то задача *нелинейного программирования*, в частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то задача *выпуклого программирования*.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности выражается косвенно, через уравнения, описывающие протекание операции во времени, то это *динамическое программирование*.

Если z или φ_i зависят от параметра, то *параметрическое программирование*, если эти функции носят случайный характер, то *стохастическое программирование*.

По своей содержательной постановке множество других типовых задач ИО может быть разбито на ряд классов.

Задачи сетевого планирования и управления рассматривают соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций и моментом начала всех операций комплекса. Эти задачи состоят в нахождении минимальной продолжительности комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Задачи массового обслуживания посвящены изучению и анализу систем обслуживания с очередями заявок и состоят в определение показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определение числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

Задача управления запасами состоит в отыскании оптимальных значений уровня запасов и размера заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на хранение, но с другой, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

Задача распределения ресурсов возникает при определенном наборе работ (операций), которые необходимо выполнить при ограничении наличных ресурсов, и требуется найти оптимальной распределение ресурсов между операциями или состав операций.

Задача ремонта и *замены оборудования* сводится к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также замены оборудования модернизированным.

Задача составления расписания состоит в определении оптимальной очереди выполнения операций на различных видах оборудования

Задача *планировки* и *размещения* состоит в определении оптимального числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой.

Задачи *выбора маршрута* или *сетевые задачи* состоят в определение наиболее экономичных маршрутов.

***Задачами линейного программирования (ЗЛП*) называются** задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. ЗЛП представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Так по оценкам американских экспертов около 75% от общего числа применяемых оптимизационных методов приходится на ЗЛП. Около четверти машинного времени, затраченного в последние годы на проведение научных исследований, было отведено решению задач ЛП и их многочисленных модификаций.

Примеры задач линейного программирования.

1. Задача об использовании ресурсов.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используется четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 2.1

Таблица 2.1

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	-	1	5
S_4	3	-	21

Прибыль, получаемая от единиц продукции P_1 и P_2, - соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 – число единиц продукции P_1 и P_2, соответственно, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_1, $(2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_2, $(1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_3 и $(3 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_4. Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 не должно превышать запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases} \qquad (2.1)$$

По смыслу задачи переменные:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (2.2)$$

Суммарная прибыль z составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. от реализации продукции P_2, т.е.:

$$z = 2x_1 + 3x_3 \to \max \qquad (2.3)$$

Итак, получили экономико-математическую модель задачи: *найти такой план выпуска продукции $X=(x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (2.1) и условию (2.2), при котором функция (2.3) принимает максимальное значение.*

Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

Имеются два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2, S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в табл. 2.2

Таблица 2.2

Питательное вещество(витамин)	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 руб.

Необходимо составить такой дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не меньше установленного предела.

Р е ш е н и е. Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 – количество кормов I и II, соответственно, входящих в дневной рацион. Этот рацион будет включать $(3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ единиц питательного вещества S_1, $(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ единиц питательного вещества S_2, $(1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_2)$ единиц питательного вещества S_3. Так как содержание питательных веществ S_1, S_2, S_3, в рационе должно быть не менее, соответственно 9, 8, 12 единицы, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases} \qquad (2.4)$$

По смыслу задачи переменные:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad (2.5)$$

Общая стоимость рациона z составит в руб.:

$$z = 4x_1 + 6x_3 \to \min \qquad (2.6)$$

Итак, получили экономико-математическую модель задачи: *составить дневной рацион $X=(x_1,x_2)$, удовлетворяющий системе (2.4) и условию (2.5), при котором функция (2.6) принимает минимальное значение*.

Общая задача линейного программирования

Пусть дана система m уравнений и неравенств с n переменными (неизвестными):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k12}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.7)$$

и линейная функция:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.8)$$

Найти решение системы $X^*(x_1,x_2, \ldots, x_n)$, где все $x_j \ge 0$ (для всех j от 0 до n), при котором функция z принимает оптимальное значение (максимальное или минимальное).

Такая задача называется задачей линейного программирования (ЗЛП) в общем виде. (2.7) называется системой ограничений; (2.8) – целевой функцией (функцией цели).

ЗЛП можно записать в сокращенном виде:

$$z = \sum_i^n c_i x_i \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_j^n a_{ij}x_j \le b_i \, (i = 1,2,\ldots, k) \\ \sum_j^n a_{ij}x_j = b_i \, (i = k+1,\ldots, m) \\ x_j \ge 0 (i = 1,2,\ldots n) \end{cases} \qquad (2.7', 2.8')$$

Оптимальным решением (планом) ЗЛП называется решение $X^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ системы ограничений, при котором целевая функция принимает оптимальное значение.

Если система ограничений (2.7) состоит из одних неравенств (не нарушая общности, будем говорить, что ограничения вида "≤", так как, если знак неравенства "≥", то мы можем,2 умножив его на –1 перейти к неравенству вида "≤"), то такую задачу называют задачей линейного программирования в *стандартном виде (в стандартной форме)*.

Если все ограничения системы (2.7) – уравнения (вида "="), то такую задачу называют задачей линейного программирования в *каноническом виде (в канонической форме).*

Любая ЗЛП может быть приведена к каноническому виду.

Терема: Любому решению $X^*(x_1,x_2,\dots,x_n)$ неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i12}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$ соответствует определенное решение $X^*(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ уравнения $a_{i1}x_1 + a_{i12}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ в котором $x_{n+1} \ge 0$.

И обратно.

Приведем ограничение (2.7) к каноническом виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k12}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Условие, при котором задачу линейного программирования можно решать графическим методом. Построение многоугольника решений. Построение вектора-градиента целевой функции. Нахождение решения геометрически. Расчет оптимального плана и ЦФ.

Графическое решение задачи линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$z = \sum_{i}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j}^{n} a_{ij}x_j \le b_i (i = 1,2,\dots,m) \\ x_j \ge 0 (i = 1,2,\dots n) \end{cases} \qquad (2.7)$$

Рассмотрим эту задачу (число на плоскости переменных n=2):

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ : \\ a_{m1}x_1 + a_{m12}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

Пусть система неравенств (2.8) совместна (имеет хотя бы одно решение).

Любое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i=1,2,…,m). Условия не отрицательности определяют полуплоскости с соответственными граничными прямыми x_1=0 и x_2=0.

Так как система совместна, то полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы. Совокупность всех этих точек называется *многоугольником решений*. Это может быть точка, отрезок, луч, прямая, замкнутый многоугольник, неограниченная многоугольная область.

Решение ЗЛП геометрически представляет собой поиск такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют целевой функции наибольшее (наименьшее) значение. Причем допустимым решением являются все точки многогранника.

Рассмотрим так называемую *линию уровня* целевой функции z, то есть линию, вдоль которой эта функция принимает одно и то же фиксированное значение x_0:

z= x_0 или $c_1x_1 + c_2x_2 = x_0$

Алгоритм решения ЗЛП графическим методом (число переменных n=2)

1. Строится многоугольная область допустимых решений на плоскости x_1Ox_2, соответствующая ограничениям.

2. Затем строится вектор-градиент $\nabla z = (\frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1; \frac{\partial z}{\partial x_2} = c_2)$ целевой функции z в любой точке x_0, принадлежащей области допустимых решений.

3. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = z_0$ (линии уровня функции z), перпендикулярная вектору-градиенту, передвигается параллельно самой себе в направлении вектора-градиента в случае задачи на максимум (в противоположном направлении – в случае задачи на минимум) до тех пор, пока она не покинет область допустимых решений. Предельная точка (или точки) области являются оптимальными точками.

4. Чтобы найти координаты оптимальной точки, надо решить систему уравнений, которая соответствует прямым, пересечение которых образует эту точку. Значение целевой функции в этой точке будет оптимальным, а сами координаты точки будут являться решением задачи ЛП.

Пусть

$$z = F(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max,$$

и есть только три функциональных ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1 & (2.9) \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le b_2 & (2.10) \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \le b_3 & (2.11) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Нарисуем на плоскости оси координат x_1 и x_2, в этих осях построим графики для ограничений (считая их равенствами); отметим штриховкой те области, которые для каждого ограничения удовлетворяют и неравенству также (рис. 2.1).

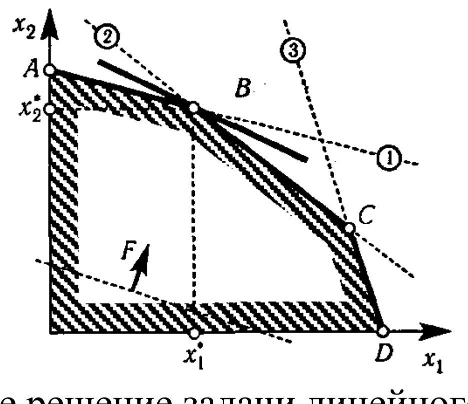


Рис. 2.1. Графическое решение задачи линейного программирования (номера линий соответствуют номерам неравенств)

Нарисуем график целевой функции для случая, когда она принимает некоторое небольшое фиксированное значение Z_1 (при росте Z график целевой функции смещается вверх – вправо):

$$x_1 \le -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}, \text{ при } a_{12} > 0$$

$$x_2 \le -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}, \text{ при } a_{22} > 0$$

$$x_3 \le -\frac{a_{31}}{a_{32}} x_1 + \frac{b_3}{a_{32}}, \text{ при } a_{32} > 0$$

Пусть $C_1x_1 + C_2x_2 = Z_1$, где Z_1 – какое-либо число. Выразим x_2и получим, что $x_2 = -\frac{C_1}{C_2} x_1 + \frac{Z_1}{Z_2}$. Пусть $C_1x_1 + C_2x_2 = Z > Z_1$. Для того чтобы росло значение целевой функции, надо прямую $x_2 = -\frac{C_1}{C_2} x_1 + \frac{Z_1}{Z_2}$ смещать в направлении, указанном стрелкой.

Максимум будет в какой-то вершине выпуклого многоугольника, то есть будут удовлетворяться ограничения и будет достигаться экстремум целевой функции.

Оптимальным решением в данном случае будут x^*_1 и x^*_2. Для данного графика (рис. 2.1) оптимальное решение – единственное. На рисунке указаны номера ограничений, пунктиром – целевая функция при некотором Z, сплошной линией – положение, при котором значение целевой функции максимально, x^*_1 и x^*_2– те значения переменных, при которых достигается максимум целевой функции. Максимальное значение целевой функции можно найти, подставив координаты любой точки отрезка AB в уравнение целевой функции.

Используя графический метод, что, конечно, приемлемо только для двух переменных, можно разобраться и с теми случаями, когда решений бесконечно много или когда их нет (рис. 2.2 – 2.4).

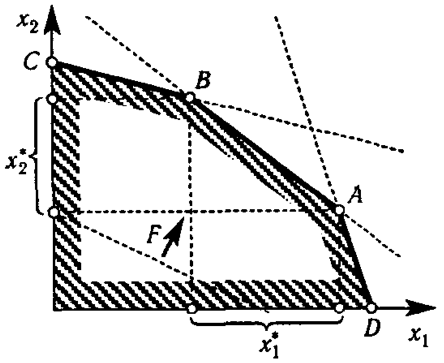


Рис. 2.2. Случай бесконечного числа решений задачи ЛП

Скажем, на рис. 2.2 линия, задающая целевую функцию, параллельна *AB*.

То есть, линия уровня с максимальным значением уровня совпадает с граничной линией AB области допустимых решений ABCD, т.е. с линией $x_1+x_2=c$ (*Внимание!* Данная ситуация возможна только в том случае, если коэффициенты целевой функции пропорциональны коэффициентам какой-либо прямой ограничений. Это условие необходимое, но не достаточное.). Следовательно, на всем отрезке AB целевая функция z принимает одно и то же оптимальное значение. Это означает, что задача имеет бесконечное множество оптимальных решений (их задают координаты отрезка AB), среди которых базисных оптимальных решений два -–соответственно в угловых точках A(3,5) и B(6,2) (точки находим решая соответствующие уравнения). Точки отрезка AB задаются как линейная комбинация точек A и B:

$$X = \alpha \frac{x_{1A}}{x_{2A}} + \beta \frac{x_{1B}}{x_{2B}}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

Комбинация точек из отрезков x^*_1 , x^*_2 даст оптимальное решение.

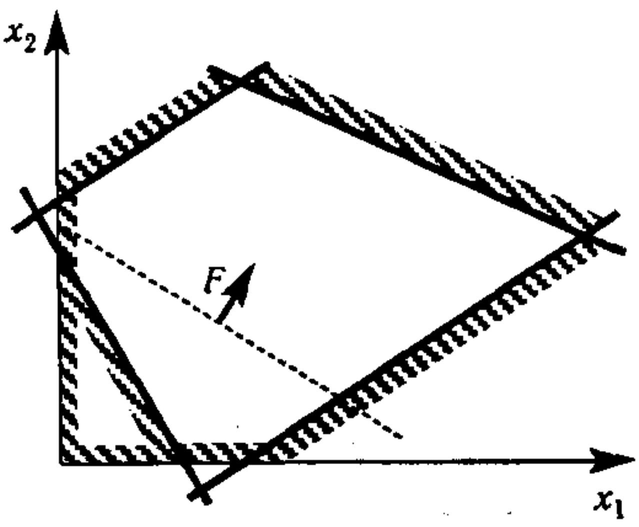


Рис. 2.3. Отсутствие допустимой области

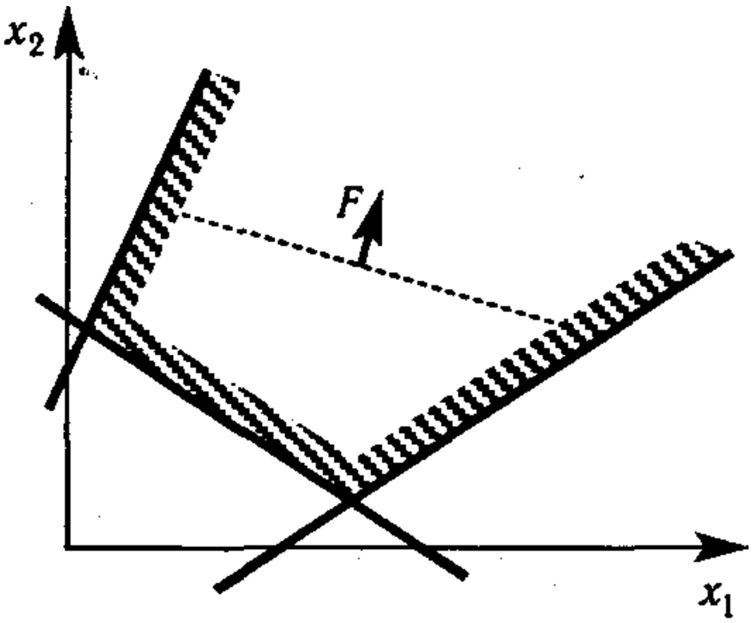


Рис. 2.4. Возможность неограниченного роста
целевой функции в задаче максимизации

Вопросы для самоконтроля

1.Какие задачи решаются методом линейного программирования?
2. Как формулируется общая задача линейного программирования (ЗЛП)?
3. Каковы основные составляющие математической модели ЗЛП?
4. В чем заключается каноническая формулировка задачи линейного программирования?
5. Всякую ли задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде?

Тема 2. Симплексный метод решения ЗЛП

Симплекс-метод как итеративная процедура решения задач линейного программирования в каноническом виде. Алгоритм симплекс – метода. Построение симплекс-таблиц. Условие оптимальности. Особые случаи симплексного метода. Искусственные переменные. Двойственная задача ЛП

Основы симплекс-метода линейного программирования

Симплекс-метод представляет собой итеративную процедуру решения задач ЛП, в каноническом виде (любую задачу ЛП можно привести к каноническому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k12}x_2 + ... + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_m = b_m \end{cases} \qquad (2.12)$$

Переменные, входящие с единичными коэффициентами только в одно уравнение системы и с нулевыми - в остальные, называются *базисными*. В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная. Остальные n-m переменных называются небазисными переменными.

Будем считать, что решается задача на максимум (задачу на минимум можно свести к задаче на максимум, умножив целевую функцию на (-1))

Алгоритм симплекс - метода:

I После введения добавочных переменных, система уравнений записывается в виде, который называется *расширенной системой* (1). Предполагается, что все добавочные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены.

II Исходную расширенную систему заносим в первую симплекс таблицу. Последняя строка, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется оценочной. В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком. В левом столбце таблицы записываем базисные переменные (на первом шаге за базисные переменные берутся дополнительные переменные), в первой строке – все переменные, во втором столбце – свободные члены расширенной системы $b_1,\ldots,b_m$. Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимый при расчете. В рабочую часть таблицы, начиная с третьего столбца и второй строки, занесены коэффициенты при переменных a_{ij} расширенной системы. Далее таблица преобразуется по определенным правилам.

III Проверяем выполнение критерия оптимальности (при решении задачи на максимум критерий оптимальности состоит в отсутствии отрицательных коэффициентов в оценочной строке). Если критерий оптимальности выполнен то, следовательно, максимум достигнут и оптимальное значение z равно c_0 (в левом нижнем углу таблицы). Базисные переменные принимают значения b_i, остальные переменные равны 0. Если критерий оптимальности не выполнен, переходим к следующему шагу.

IV По оценочной строке выбираем переменную вводимую в базис. Находим наибольший по модулю отрицательный коэффициент в оценочной строке. Соответствующая этому столбцу переменная x_s будет вводимой в базис, а сам столбец называется разрешающим.

V Находим переменную, выводимую из базиса. Для этого составляем оценочные отношения (они заносятся в столбец для оценочных отношений) по следующим правилам:

1) ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки;
2) ∞, если $b_i=0$ и $a_{is}<0$;
3) ∞, если $a_{is}=0$;
4) 0, если $b_i=0$ и $a_{is}>0$;
5) $\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$, если b_i и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем $\min_i\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума ($z_{max}=\infty$). Если минимум конечен, то выбираем строку q, на которой он достигается (если их несколько, то любую), и называем ее разрешающей строкой. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент a_{qs}.

VI Переходим к следующей таблице по правилам (преобразования Гаусса-Жордана):

1) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q – переменную x_s;

2) в столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1- на пересечении строки и столбца, соответствующих одной и той же базисной переменной; 0 – во всех других позициях столбцов базисных переменных;

3) Новую строку q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs};

4) все остальные элементы a_{ij}' вычисляем по правилу:

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$$
$$b_i' = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}} \tag{2.13}$$

Далее переходим к шагу III.

Пример 6.

Решим задачу:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду. Получим расширенную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Целевую функцию представим в виде $z-2x_1-3x_2=0$.

Базисными переменными будут являться дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6.

Заполним первую симплекс-таблицу:

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
x_5	5	0	1	0	0	1	0	5
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
z	0	-2	-3	0	0	0	0	

Проверяем критерий оптимальности задачи. В последней оценочной строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю – (-3). Следовательно, s = 2, переменная x_2 является выводимой из базиса, а соответствующий ей столбец – разрешающим.

Находим оценочные отношения и выбираем из них минимальное (=5). Следовательно, q=3, переменная x_5 является вводимой в базис, а соответствующая ей строка – разрешающей.

Переходим к новой симплекс-таблице:

a) в новом базисе основные переменные x_3, x_4, x_2, x_6;

b) расставляем 0 и1; например, на пересечении столбца и строки, соответсвущих переменной x_3 ставим 1, а остальные элементы столбца x_3 равны 0 и т.д. Третья строка получается делением на разрешающий элемент a_{33}=1. Остальные клетки таблицы заполняем по формулам (2). Например:

$$a_{11}' = 1 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1$$

$$b_1' = 18 - \frac{3 \cdot 5}{1} = 3$$

Получаем вторую симплекс таблицу:

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
x_4	11	2	0	0	1	-1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
z	15	-2	0	0	0	3	0	

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь разрешающий первый столбец и x_1 – вводимая переменная. Считаем оценочные отношения и находим разрешающую строку – первая и выводимую из базиса переменную – x_3. Разрешающий элемент a_{11}.

Переходим к новой симплекс-таблице:

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	-3	0	∞
x_4	5	0	0	-2	1	5	0	5/5
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
x_6	12	0	0	-3	0	9	1	12/9
z	21	0	0	2	0	-3	0	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен.

Выводимая переменная x_4; вводимая x_5. Переходим к новой таблице.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	6	1	0	-1/5	3/5		0	
x_5	1	0	0	-2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1	
z	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит z_{max}=24. Оптимальное решение (6; 4; 0; 0; 1; 3).

Особые случаи симплексного метода

Не единственность оптимального решения (альтернативный оптимум).

Рассмотрим задачу:

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

При решении задачи геометрически, мы убедились, что оптимум достигается на отрезке, принадлежащем прямой $x_1 + x_2 = 8$. Рассмотрим этот вариант при симплекс-методе. На очередном шаге получим:

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	5	0	1	2/3	1/3	0	15
x_1	3	1	0	1/3	-1/3	0	∞
x_5	9	0	0	1	1	1	9
F	24	0	0	1	0	0	

Здесь $X_1 = (3;5;0;0;9)$ допустимое решение и соответствует точке (3;5) на графике. Критерий оптимальности выполнен, следовательно X_1 оптимальное решение и максимальное значение функции $F_{\max} = 24$. Однако в оценочной строке коэффициент перед небазисной переменной x_4 равен нулю, поэтому изменение этой переменной не повлечет изменение целевой функции, следовательно, ее можно внести в основные переменные.

Базис	Свободный член	Переменные				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	2	0	1	1/3	0	-1/3
x_1	6	1	0	2/3	0	1/3
x_4	9	0	0	1	1	1
F	24	0	0	1	0	

Получим $X_2 = (3;5;0;0;9)$ - оптимальное решение и $F_{\max} = 24$. Данному решению соответствует точка (6;2) на графике.

Учитывая, что переменная $x_3 = 0$ в базисном решении X_2 остается не основной, а удовлетворяет неравенству $0 \le x_4 \le 9$, можно получить все множество оптимальных решений.

Пусть

$$x_4 = t; t \in [0;9]$$

$$x_1 = 3 + \frac{1}{3}t$$

$$x_2 = 5 - \frac{1}{3}t$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = t$$

$$x_5 = 9 + t$$

Замечание. Множество решений, в соответствии с Т3 и Т4 можно представить как выпуклую линейную комбинацию базисных решений

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

Появление вырожденного базисного решения

Рассмотрим задачу:

$$F = 3x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 6x_1 - 4x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим задачу симплексным методом. Введем дополнительные переменные и составим симплекс-таблицу.

Базис	Сво-бод-ный член	Переменные					Оце-ночные отноше-ния
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2	1	-1	1	0	0	2
x_4	6	3	-2	0	1	0	2
x_5	14	6	-4	0	0	1	7/3
F	0	-2	1	0	0	0	

Так как полученное решение $X_1 = (0;0;2;6;14)$ не оптимально, переходим к новой симплекс-таблице. Причем, в качестве разрешающей строки можно взять как первую, так и вторую.

Базис	Свобод-ный член	Переменные					Оценоч-ные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	1	-1	1	0	0	∞
x_4	0	0	1	-3	1	0	0
x_5	2	0	2	-6	0	1	1
F	4	0	-1	2	0	0	

Полученное решение $X_2 = (2;0;0;0;4)$ вырожденно, так как основная переменная $x_4 = 0$ и вновь не является оптимальным. Переходим к новой симплекс-таблице.

Базис	Свобод-ный член	Переменные					Оценоч-ные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	1	0	-2	0	0	
x_2	0	0	1	-3	1	0	
x_5	2	0	0	0	-2	1	
F	4	0	0	-1	1	0	

Решение $X_3 = (2;0;0;0;2)$ так же вырожденно, так как основная компонента $x_2 = 0$.

При этом целевая функция не увеличилась, но и не ухудшилась. Выполненный шаг, хотя и не улучшил значение целевой функции, лишнем не является, так как привел к новому базисному решению. На практике, наличие пустых шагов может привести к зацикливанию задачи.

Вывод: если на каком-либо шаге симплекс-метода наибольшее возможное значение переменной достигается в нескольких уравнениях одновременно, то в качестве разрешающего, можно выбрать одно из них (в симплекс-таблице совпадение оптимальных оценочных отношений). Тогда на следующем шаге получим вырожденное базисное решение, переход к очередному базисному решению может не изменить значение целевой функции.

Замечание: Вырождение, полученное при оптимальном решении, может привести к альтернативному оптимуму даже при нулевых коэффициентах при всех не основных переменных в целевой функции.

Отсутствие конечного оптимума

Рассмотрим задачу:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 1 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

При геометрическом решении мы убедились, что оптимум отсутствует. Рассмотрим симплекс-метод на очередном шаге:

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	5/3	1	0	-1/3	-1/3	0	∞
x_2	7/3	0	1	-2/3	1/3	0	∞
x_5	4	0	0	-1	1	1	∞
F	-1/3	0	0	2/3	-4/5	0	

Условие оптимальности целевой функции не выполнено, так как в строке целевой функции коэффициент при $x_3 < 0$. При попытке ввести x_3 в базис получаем $x_3 = \min(\infty;\infty;\infty) = \infty$. Уравнения не ограничивают рост x_3, следовательно, min не ограничен (не достигается).

Вывод: если на каком-либо шаге получается, что во всех уравнениях системы (строках симплекс-таблице) бесконечные оценочные отношения той переменной, которая переводится в основные, то задача не имеет конечного оптимума.

Метод искусственных переменных (М-метод)

В рассматриваемой вычислительной схеме симплекс-метода для получения начального базисного решения используются дополнительные переменные. Допустимое базисное решение получается в случае, когда ограничения вида "≤". Однако для ограничений вида "≥" или "=" начальное базисное решение может быть недопустимым.

Для получения системы в каноническом виде, обладающей допустимым базисным решением, существует специальный метод. Сначала задача ЛП приводится к канонической форме, в которой все переменные неотрицательные. Затем для каждого ограничения проверяется существование соответствующей базисной переменной. Если ее нет, то вводится новая *искусственная* переменная y_j с тем же знаком, что и свободный член (искусственных переменных столько, сколько ограничений дающих отрицательную компоненту в первоначальном базисе), играющая роль базисной для данного ограничения. После проверки всех ограничений получается расширенная система в каноническом виде и появляется возможность заполнить начальную симплексную таблицу. Так как введенные переменные не имеют отношения к существу задачи ЛП в исходной постановке, то необходимо добиться обращения в нуль искусственных переменных. Для этого составляем новую целевую функцию $T = z\text{-}M(y_1+\ldots+y_k)$, где M – произвольное, большое по отношению к задаче число; k – количество искусственных переменных, и ищем максимальное значение T-функции.

Теорема:

1. Если в оптимальном решение T-задачи все искусственные переменные равны 0, то соответствующие значения остальных переменных дают оптимальное решение исходной задачи.
2. Если имеется оптимальное решение T-задачи, в котором хотя бы одна из искусственных переменных отлична от 0, то система ограничений исходной задачи несовместна.
3. Если максим T-функции равен бесконечности, то исходная задача неразрешима (либо система несовместна, либо максимум неограничен).

На практике, как правило, T-задачу разбивают на две задачи и решают с помощью двухэтапного симплекс-метода.

- *Этап 1.* Рассматривается искусственная целевая функция -$M(y_1+\ldots+y_k)$ которая максимизируется при помощи симплекс-метода. Другими словами, производится исключение искусственных переменных. Если максимальное значение вспомогательной задачи равно нулю, то все искусственные переменные обращаются в нуль и получается допустимое базисное решение начальной задачи. Далее реализуется этап 2. Если минимальное значение вспомогательной задачи положительное, то по крайней мере одна из искусственных переменных также положительная, что свидетельствует о противоречивости начальной задачи, и вычисления прекращаются.

- *Этап 2.* Допустимое базисное решение, найденное на первом этапе, улучшается в соответствии с целевой функцией исходной задачи ЛП на основе симплекс-метода, т.е. оптимальная таблица 1 этапа превращается в начальную таблицу этапа 2 и изменяется целевая функция.

Пример 7.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

X_1= (0; 0; -1; 3; 3) не допустимое решение. В первое ограничение, дающее отрицательную компоненту, введем искусственную переменную y_1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - y_1 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Преобразуем систему ограничений, умножив первое и второе уравнение на –1.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Т-функция будет иметь вид: $T=x_1+2x_2-My_1 \to max$. Заполняем первую симплекс-таблицу.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
y_1	1	-1	1	-1	0	0	1	1
x_4	3	-1	1	0	1	0	0	3
x_5	3	1	0	0	0	1	0	∞
z	0	-1	-2	0	0	0	1	
$M_ф$	-M	M	-M	M	0	0	M	

Последняя строка таблицы – это (-М-функция), т.е. $-My_1$. Заполняется она путем выражения искусственных переменных через небазисные переменные (Строки, в которых присутствует искусственная переменная умножаются на –М и соответствующие их компоненты складываются; в данном случае умножается строка I). В качестве оценочной строки рассматривается строка $M_ф$. Критерий оптимальности не выполнен. Отрицательный коэффициент соответствует столбцу x_2. Считаем оценочные отношения и находим переменную, выводимую из базиса – y_1. Переходим к новой симплекс таблице.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
x_2	1	-1	1	-1	0	0	1	
x_4	2	0	0	1	1	0	1	
x_5	3	1	0	0	0	1	0	
z	2	-3	0	-2	0	0	-2	
$M_ф$	0	0	0	0	0	0	0	

Последняя строка показывает, что критерий оптимальности выполнен: $\max(-M_ф)=0$. Искусственная переменная тоже равна нулю. Допустимое базисное решение получено (0; 1; 0; 2; 3). Далее, отбросив последнюю строку и столбец с искусственной переменной переходим ко второму этапу.

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	-1	1	-1	0	0	
x_4	2	0	0	1	1	0	
x_5	3	1	0	0	0	1	
z	2	-3	0	-2	0	0	

Двойственные задачи

Экономическая интерпретация двойственной задачи.

Рассмотрим две задачи ЛП (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Задача 1 (исходная)	*Задача 2 (двойственная)*
Целевая функция: $F=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n \rightarrow \max$ При ограничениях $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le bm \end{cases}$ И условиях неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0$ Составить такой план выпуска продукции $X=(x_1, x_2, \ldots x_n)$, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов	Целевая функция: $Z=b_1y_1+ b_2y_2+\ldots+ b_ny_n \rightarrow \max$ При ограничениях $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$ И условиях неотрицательности $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots y_m \ge 0$ Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y=(y_1, y_2, \ldots y_n)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальны при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли от реализации этой продукции

Цены ресурсов $y_1, y_2 \ldots y_m$ - это цены на ресурсы, которые мы называем *учетными, неявными, теневыми*. Смысл этих названий состоит в том, что это условные "ненастоящие" цены, которые появились бы в том случае, если фирма, осуществляющая данный производственный процесс, вместо производства, решила бы продать имеющиеся ресурсы, причем таким образом, чтобы прибыль от их продажи была бы не меньше, чем прибыль от данного производственного процесса. А фирма, покупающая ресурсы, желала бы минимизировать затраты на покупку. В отличие от "внешних" цен $c_1, c_2 \ldots c_n$ на продукцию, известных до начала производства, цены ресурсов $y_1, y_2 \ldots y_m$ считаются "внутренними", не известными до начала производственного процесса, так как они определяются в процессе решения задачи. Их называют оценками ресурсов.

Свойства взаимно двойственных задач

1. В одной задачи ищется максимум, в другой минимум линейной функции.
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.
3. Каждая задача записана в стандартной форме, причем в задаче на минимум все неравенства вида "≥", а в задаче на максимум - вида "≤".
4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обоих задач являются транспонированными друг к другу: А и $A^т$.
5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи.
6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Две задачи ЛП, обладающие этими свойствами называются *симметричными взаимно двойственными (двойственными)*.

Алгоритм составления двойственных задач

1. Приводим все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному символу (причем в задаче на минимум к "≤", а в задаче на максимум к "≥").
2. Составляем расширенную матрицу A_1, в которую включаем матрицу А, столбец свободных членов и строку переменных коэффициентов целевой функции.
3. Находим $A_1^т$.
4. Формулируем двойственную задачу на основе полученной матрицы $A_1^т$ и условии неотрицательности переменных.

Пример 8.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем ограничения к виду "≤"

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1 \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу A_1

$$A_1 = \begin{matrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{matrix}$$

Транспонируем матрицу:

$$A_1^T = \begin{matrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & z \end{matrix}$$

И сформулируем двойственную задачу:

$$z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2 \end{cases}$$

Первая (основная) теорема двойственности: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая задача, причем оптимальные значения их целевых функций равны. $F_{max}=Z_{min}$. Если область допустимых решений одной из задач неограниченна, то условия другой задачи противоречивы.

Замечание. Обратное утверждение не верно. Если условия одной задачи противоречивы, это не означает, что другая задача неограниченна.

Экономический смысл первой теоремы двойственности. План производства $X^*=(x^*_1, x_2^*,\dots x^*_n)$ и набор оценок ресурсов $Y^*=(y^*_1, y_2^*,\dots y^*_m)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от продукции, найденная по "внешним", заранее известным ценам $c_1, c_2,\dots c_n$, равна затратам на ресурсы по "внутренним", определенным в процессе решения, ценам $y_1, y_2,\dots y_m$. Для всех других планов X и Y прибыль всегда меньше (или равна) затратам на ресурсы. Т.е. предприятию безразлично производить ли продукцию по оптимальному плану X^* или продавать ресурсы по оптимальным ценам Y^*. Прибыль и в том и в другом случае одинакова.

Тесная связь между двумя двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их целевых функций. Если каждую из двойственных задач решать симплекс-методом, то необходимо привести их к каноническому виду. Для этого в задаче I вводятся m неотрицательных переменных x_{n+i}, где i=1,2,…m, а во II задаче n неотрицательных переменных y_{m+j}, где j=1,2,…n. Системы ограничений принимают вид (таб.2.4):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i + y_{m+j} = c_j$$

Таблица 2.4

Переменные исходной задачи							
Первоначальные переменные				Дополнительные переменные			
x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
y_{m+1}	y_{m+2}	…	y_{m+n}	y_1	y_2	…	y_m
Дополнительные переменные				Первоначальные переменные			
Переменные двойственной задачи							

Теорема: положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых i выполнено: если $x^*_j>0$, то $y^*_{m+i}=0$ и если $x^*_j=0$, то $y^*_{m+i}>0$ и аналогично для любых j выполнено: если $y^*_j>0$, то $x^*_{n+j}=0$ и если $y^*_j=0$, то $x^*_{n+j}>0$.

Вторая теорема двойственности: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции, выраженной через не основные переменные, ее оптимального решения.

Пример 9:

Если в исходной задаче на последнем шаге выполнения симплекс-метода получили: $F=24-4/5x_3-3/5x_4$ и $F(x^*)=24$ - максимум функции, оптимальное решение $X^*=(6;4;0;0;1;3)$, то в двойственной задаче будем иметь: $z=24+y_3+3y_4+6y_5+4y_4z(x^*)=24$ - минимум функции, а оптимальным решением будет: $Y^*=(4/5;3/5;0;0;0;0)$.

Соответствие между переменными:

Таблица 2.5

Переменные исходной задачи					
Первоначальны е переменные		Дополнительные переменные			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4
Дополнительные переменные		Первоначальные переменные			
Переменные двойственной задачи					

Замечание: Если в одной из двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденно.

Метод, при котором сначала симплекс-методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи находится с помощью теорем двойственности, называется двойственным симплекс-методом. Он применяется в случаях, когда первое базисное решение недопустимо или $m > n$.

Объективно обусловленные оценки и их смысл

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются *оптимальными (двойственными или объективно обусловленными)* оценками исходной задачи (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Число единиц продукции		Остатки ресурсов			
p_1	p_2	S_1	S_2	S_3	S_4
$x_1=6$	$x_2=4$	$x_3=0$	$x_4=0$	$x_5=1$	$x_6=3$
$y_5=0$	$y_6=0$	$y_1=4/5$	$y_2=3/5$	$y_3=0$	$y_4=0$
превышение затрат на ресурсы над ценой ресурса		объективно обусловленные оценки ресурсов (условные цены ресурсов)			

Объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов по оптимальному плану производства. У дефицитных ресурсов объективно обусловленная оценка отлична от нуля, у недефицитных равна нулю. В нашем случаи ресурсы S_1 и S_2расходуются полностью, т.е. являются дефицитными, а ресурсы S_3 и S_4 носят избыточный характер, т.е. в данном производственном цикле полностью не расходуются.

Рассмотрим превышение затрат на ресурсы над ценой ресурса. Если бы, например, $y_6>0$, то $x_2=0$, и из этого следовало бы, что продукцию P_2 производить не выгодно, т.к. затраты на ресурсы превысили бы цену изготовляемой из них продукции. Следовательно, в оптимальный план производства могут попасть только рентабельные, неубыточные виды продукции.

Третья теорема двойственности: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных функции $F_{max}(b_1,b_2,\dots b_m)$ по соответствующим аргументам $\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*$

Двойственные оценки могут служить инструментом анализа и принятия правильных решений в условиях постоянно меняющегося производства. Так, например, с помощью объективно обусловленных оценок ресурсов возможно сопоставление оптимальных условий затрат и результатов производства.

Пример 10.

В результате решения задачи был получен оптимальный план P_1 и P_2. Появилась возможность выпуска продукции P_3. Затраты каждого ресурса S_1, S_2, S_3 и S_4 на выпуск этой продукции соответственно равны: $a_{13}=3$, $a_{23}=2$, $a_{33}=4$ и $a_{43}=1$. Цена продукции $c_3=3$. Даст ли прибыль включение в план дополнительной продукции?

$X^*=(6;4;0;0;1;3)$ и $Y^*=(4/5;3/5;0;0;0;0)$.

Сопоставим дополнительные затраты на ресурсы в расчете на единицу продукции P_3 с ценой ее реализации:

$a_{13}y_1^*+a_{23}y_2^*+a_{33}y_3^*+a_{43}y_4^*=3*4/5+2*3/5+4*0+1*0=3.6$

Полученный результат больше, чем цена продукции $c_3=3$, следовательно, ее выпуск не является рентабельным. Ясно, чтобы включение новой продукции в производство было выгодно, надо, чтобы ее цена мыла не менее 3,6.

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно маленьких изменениях ресурсов. При крупных изменениях меняются сами оценки, что делает невозможным использование оценок для анализа производства.

Модели целочисленного линейного программирования

Если компонентами решения задачи линейного программирования должны быть целыми числами, то такая задача называется задачей *целочисленного линейного программирования*. В экономике это часто связанно с неделимостью продукции.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$i = 1,2...m \qquad x_j \text{ - целые}$$

$$x_j > 0$$

$$j = 1,2...n$$

Существует несколько способов решения зада целочисленного линейного программирования.

Методы решения.

1. методы отсечения;
2. комбинированные методы;
3. приближенные методы.

Методы отсечения

Суть метода состоит в том, что сначала решается задача линейного программирования без условия целочисленности. Если полученный ответ удовлетворяет условию целочисленности, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- оно должно быть линейным;
- оно должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;
- оно не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Такие ограничения называются *правильными отсечениями*.

После введения нового ограничения вновь решается задача линейного программирования. Если вновь полученный план целочисленный, то задача решена. Если это не так, то к задаче добавляется новое ограничение. Процесс повторяется до тех пор, пока полученный оптимальный план не будет полностью целочисленным.

Геометрический смысл добавления каждого нового линейного ограничения состоит в проведении дополнительной прямой (гиперплоскости), которая отсекает от многоугольника (многогранника) допустимых решений его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами. В отсекаемую часть не должна попасть ни одна точка с целыми координатами. В результате новый многогранник решений содержит все точки с целыми координатами, содержавшиеся в первоначальном многограннике решений. Следовательно, полученное при этом многограннике оптимальное решение будет целочисленным.

Пример 11.

$$f = x_1 - 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 - целые.

Построим область допустимых решений задачи (рис.). Это многоугольник АВСДЕ. Построим вектор градиент целевой функции (1;-3). Ясно, что точкой оптимума будет точка В(3.5;6.5). Полученное решение не удовлетворяет условию целочисленности. Проведем прямую А'В', отсекающую точку В и не отсекающую ни одну целую точку. Получаем новый многоугольник АА'В'СДЕ, где А' и В' имеют целые координаты. Точка А'(3;6) - новое решение задачи целочисленного программирования.

Метод Гомори

Пусть задача линейного программирования имеет оптимальное решение. Не нарушая общности задачи предположим $x_1, x_2, \ldots x_m$ -это базисные переменные, полученные на последнем шаге симплекс-метода. Они выражены через небазисные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_i = \beta_i - \alpha_{im+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}x_n \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи $X^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots, 0)$.

Пусть в этом оптимальном решении β_i не целая компонента.

Алгоритм метода Гомори

1. Решаем задачу симплекс методом. Если найденное решение целочисленно, то задача решена. Если задача не разрешима, то она не имеет решений и в целых числах.

2. Если среди компонент оптимального решения есть не целые, то надо выбрать компоненту с оптимальной целой частью и сформулировать правильное отсечение из условия $\{\beta\}_i - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n \le 0$

3. Вводим дополнительную неотрицательную целую переменную x_{n+1} и получаем новое уравнение $\{\beta\}_i - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1} = 0$

4. Полученную расширенную задачу решаем симплекс-методом. Если новый найденный план целочисленный, то задача решена, если нет, то повторяем процедуру.

Замечание. $\{a\}$ - дробная часть числа.

Если задача разрешима в целых числах, то после конечного числа шагов (итераций) оптимальный целочисленный план будет найден. Если в процессе решения появится уравнение, выражающее основную переменную через неосновные, в котором свободный член не целый, а все остальные коэффициенты целые, то задача в целых числах решений не имеет. В симплекс таблице это условие соответствует тому, что в строке с нецелым свободным членом все остальные коэффициенты целые.

Пример 12.

Решить задачу в целых числах.

$$z = x_1 - 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 34 \\ x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

Построим симплекс таблицу

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	60	3	5	1	0	0	12
x_4	34	3	4	0	1	0	17/2
x_5	8	0	1	0	0	1	8
z	0	-2	-3	0	0	0	

Данный план не оптимален, так как в оценочной строке есть отрицательные элементы. Наибольший по модулю в столбце x_2. Следовательно x_2 переменная вводимая в базис. Построим оценочные отношения. Наименьшее соответствует строке x_5. Значит x_5 вводимая в базис переменная. Переходим к новой симплекс-таблице.

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	20	3	0	1	0	-5	20/3
x_4	2	3	0	0	1	-4	2/3
x_2	8	0	1	0	0	1	∞
z	24	-2	0	0	0	3	

Полученное решение не является оптимальным. x_1 вводимая, x_4 выводимая переменная. Переходим к новой симплекс-таблице.

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	18	0	0	1	-1	-1	
x_1	2/3	1	0	0	1/3	-4/3	
x_2	8	0	1	0	0	1	
z	76/3	0	0	0	2/3	1/3	

Полученное решение X(2/3; 8; 18; 0; 0) оптимально, но не является целочисленным ($x_1 = 2/3$).

Построим правильное отсечение из условия:

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 - \left\{-\frac{4}{3}\right\}x_5 \le 0$$

Найдем дробные части от чисел, стоящих в фигурных скобках:

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \quad \left\{\frac{1}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}; \quad \left\{-\frac{4}{3}\right\} = \left\{-2 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

Получим неравенство:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \le 0$$

Введем дополнительную целую переменную $x_6 \ge 0$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 + x_6 = 0$$

Полученное уравнение надо добавить в систему ограничений и решить симплекс-методом новую задачу.

Для сокращения числа шагов можно вводить новое уравнение в симплекс-таблицу, полученную на последнем шаге.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	0	0	1	-1	-1	0	∞
x_1	2/3	1	0	0	1/3	-4/3	0	∞
x_2	8	0	1	0	0	1	0	8
x_6	2/3	0	0	0	1/3	1/3	-1	1

z	76/3	0	0	0	2/3	1/3	0	

Полученное базисное решение не допустимо (x_6=-1).

Замечание. Включение в систему ограничений дополнительного ограничения, соответствующего правильному отсечению всегда дает недопустимое базисное решение.

Для получения допустимого базисного решения необходимо перевести в основные переменные переменную, входящую со знаком "+" в уравнение, в котором свободный член отрицательный. В нашем случае это переменная x_4 или. Введем x_5.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	19	0	0	1	-1/2	0	-2/3	
x_1	2	1	0	0	1	0	-2	
x_2	7	0	1	0	-1/2	0	3/2	
x_5	1	0	0	0	1/2	1	3/2	
z	25	0	0	0	1/2	0	1/2	

Полученное решение является оптимальным. Найденный план целочисленен X(2; 7; 19; 0; 1; 0).

Понятие о методе ветвей и границ

Метод ветвей и границ - один из комбинированных методов решения задач целочисленного линейного программирования. Его суть состоит в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых решений некоторым образом разбивается на подмножества, каждое из которых этим же способом разбивается еще на подмножества. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Пусть задача целочисленного линейного программирования решена симплекс-методом без учета целочисленности и известны верхняя и нижняя граница для каждой целой переменной $v_j \le x_j \le w_j, j = 1...n$ и нижняя граница целевой функции $Z_0 : Z(X) \ge Z_0$ для любого плана X.

Предположим что компонента решения оптимального плана x_1^* не удовлетворяет условию целочисленности. Тогда из области допустимых решений исключается область $\left[x^*\right] < x_1^* < \left[x_1^*\right] + 1$.

Начальная задача распадется на две (2) и (3). В задачу (2) добавится ограничение $v_1 \le x_1^* \le \left[x_1^*\right] + 1$, а в задачу (3) добавится ограничение $\left[x^*\right] \le x_1^* \le \omega_1$.

Решаем эти задачи. В результате список задач может либо расшириться, либо уменьшиться. Если в результате решения задач (2) или (3) нецелочисленный оптимальный план, при котором $Z(X^*) \le Z_0$, то эта задача исключается. Если $Z(X^*) > Z_0$, то из данной задачи формируются две новые.

Если полученное решение X^* удовлетворяет условию целочисленности и $Z(X^*) \le Z_0$, то значение Z_0 исправляется и за величину Z_0 принимается оптимум линейной функции полученного оптимального целочисленного плана.

Процесс продолжается до тех пор, пока весь список задач не будет исчерпан, то есть все задачи будут решены.

Вопросы для самоконтроля

1. Когда можно применять графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Как строится многоугольник решений?
3. Построение вектора-градиента целевой функции.
4. Как геометрически найти решение ЗЛП?
5. В чем суть симплекс-метода?
6. Когда применяется метод искусственных переменных?
7. Как формулируется двойственная задача линейного программирования?
8. Как формулируются теоремы двойственности?
9. Как соотносятся переменные прямой и двойственной задач линейного программирования?

Тема 3. Решение задач линейного программирования средствами MSExcel и MathCAD

Решение задачи ЛП в пакете MathCAD. Решение задачи линейного программирования в MicrosoftExcel

Задачи линейного программирования (ЛП) являются математическими моделями многих практических задач, возникающих в экономике, планировании, управлении и других областях. Кроме того, в ряде случаев решение задачи линейного программирования является этапом решения более сложной задачи оптимизации.

Классическим примером содержательной задачи, математической моделью которой, является задача линейного программирования, служит задача оптимального планирования производства.

Для решения задач ЛП малой и средней размерности (десятки и сотни переменных) используются стандартные программные продукты. Для решения задач ЛП большой размерности (тысячи переменных) требуется разработка специального программного обеспечения.

Далее рассмотрим решение задач ЛП в пакетах MathCAD и MSExcel на примере задачи с двумя переменными, которые, без ограничения общности, будем обозначать x и y.

<u>Решение задачи ЛП в пакете MathCAD</u>.

Требуется найти максимум целевой функции

$f(x,y) = 4x + 2y$

при ограничениях

$2x + 3y \le 18,$

$-x + 3y \le 9,$

$2x - y \le 10,$

$x \ge 0,\ y \ge 0.$

Прежде чем записать условие задачи в MathCAD, требуется установить режим автоматических вычислений (рис. 2.5).

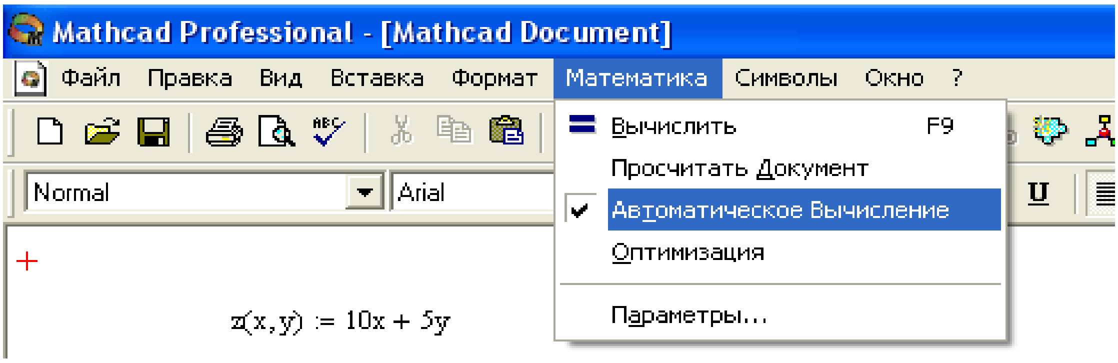


Рис. 2.5. Выбор режима «Автоматическое вычисление»

Далее необходимо выполнить следующие действия:

1) записать целевую функцию;

2) присвоить переменным **хиу** произвольные (допустимые) значения;

3) после зарезервированного слова **Given**записать ограничения задачи;

4) с помощью функции **Maximize (Minimize -** для задачи на минимум*)* найти

оптимальный вектор $z = (z_0, z_1) = (x,y)$ и значение функции на этом векторе.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа MathCAD.

$f(x,y) := 4x + 2y$

$x:=1 \qquad y:=1$

Given

$2x + 3y \le 18$

$-x + 3y \le 9$

$2x - y \le 10$

$x \ge 0 \quad y \ge 0$

$Z := \mathbf{Maximize}(f,x,y)$

$Z = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} f(z0, z\ 1)=28$

<u>Решение задачи линейного программирования в MicrosoftExcel</u>. Рассмотрим решение той же задачи ЛП

$f(x) = 4x + 2y \to max,$

$2x + 3y \le 18,$

$-x + 3y \le 9,$

$2x - y \quad \le 10,$

$x \ge 0,\ y \ge 0.$

Сначала выделим ячейки под значения под значения переменных x и y, например, ячейки С3 и С4. Далее в ячейку С6 введем целевую функцию

= 4*С3 + 2*С4.

В ячейки В9 : В11 введем левые части ограничений

= 2*С3 + 3*С4,

= - 1*С3 + 3*С4,

= 2*С3 - 1*С4,

а в ячейки С9 : С11 – правые части ограничений (рис. 2.6).

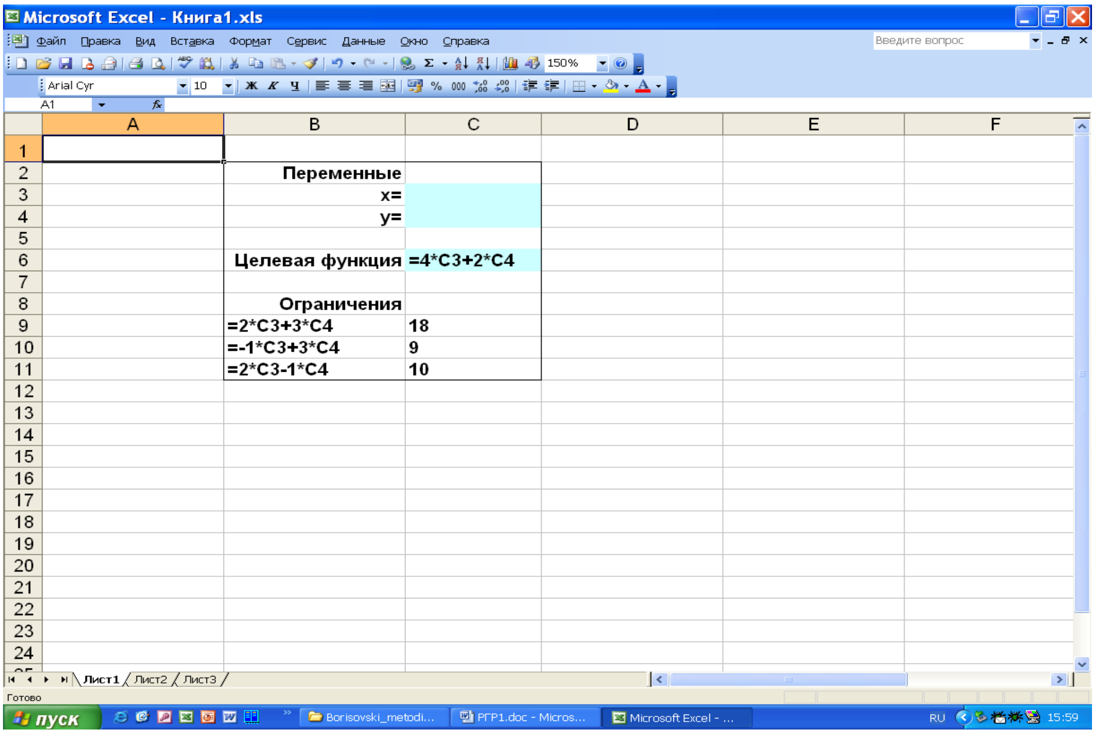


Рис. 2.6 Диапазоны, отведенные под переменные, целевую функцию и ограничения

После этого выберем в главном меню команду **Сервис, Поиск решения.** Если в меню **Сервис** этого пункта нет, нужно установить надстройку. Для этого выберем в меню **Сервис** пункт **Надстройки**. В диалоговом окне "Надстройки" нужно найти в списке надстроек "Поиск решения" и установить слева от него флажок. Загрузится Решатель. В дальнейшем при запуске Excel Решатель будет загружаться автоматически, пока не будет снят флажок в окне "Надстройки".

Заполним открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как показано на рис. 2.7.

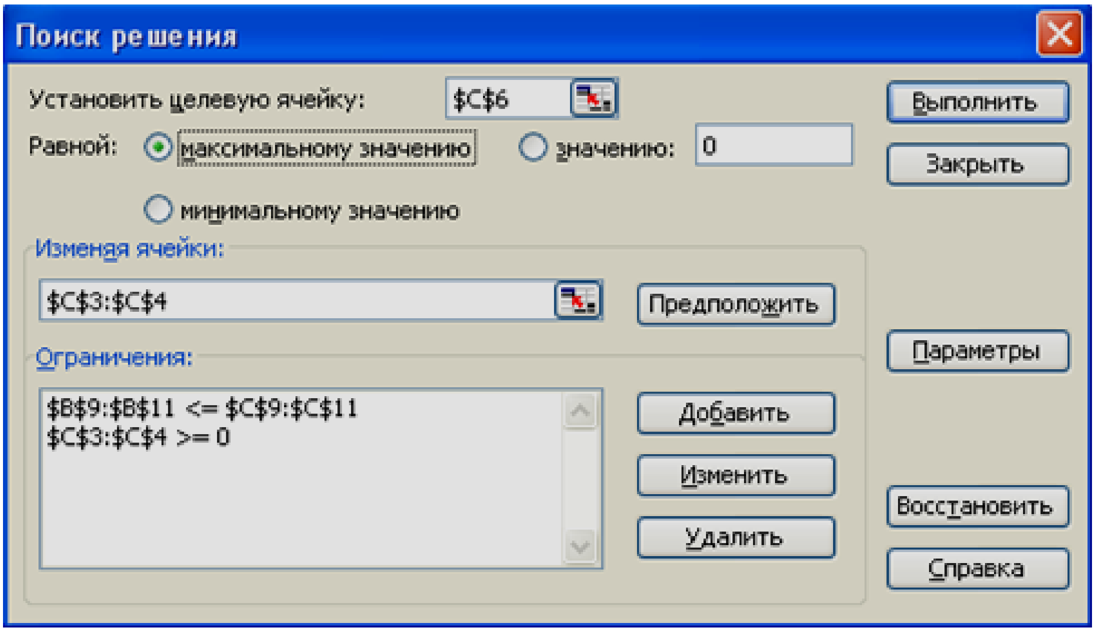


Рис. 2.7. Диалоговое окно **Поиск решений**

После нажатия на кнопку **Выполнить** открывается окно **Результаты поиска решения**, которое сообщает, что решение найдено (рис. 2.8).

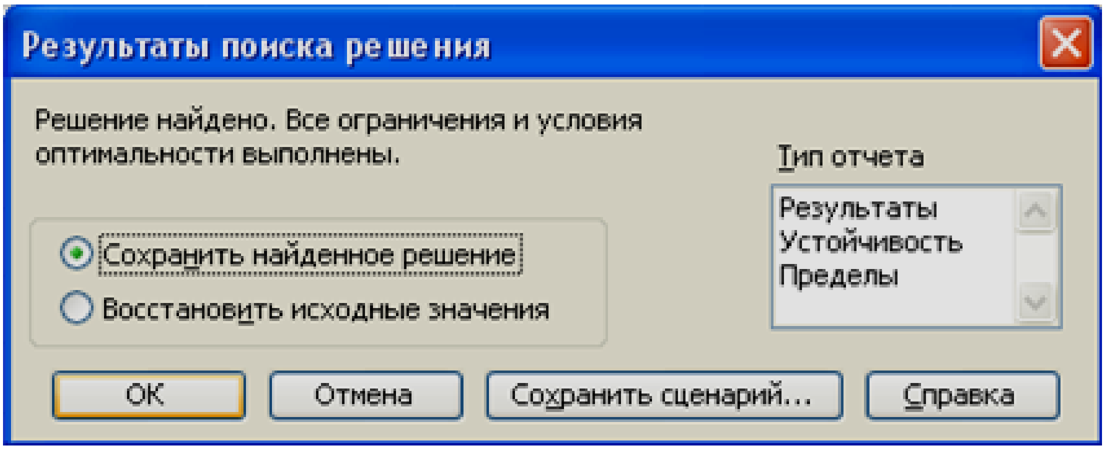


Рис. 2.8. Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

Оптимальное решение находится в ячейках **C3** и **C4**, а оптимальное значение целевой функции – в ячейке**C6** (рис. 2.9).

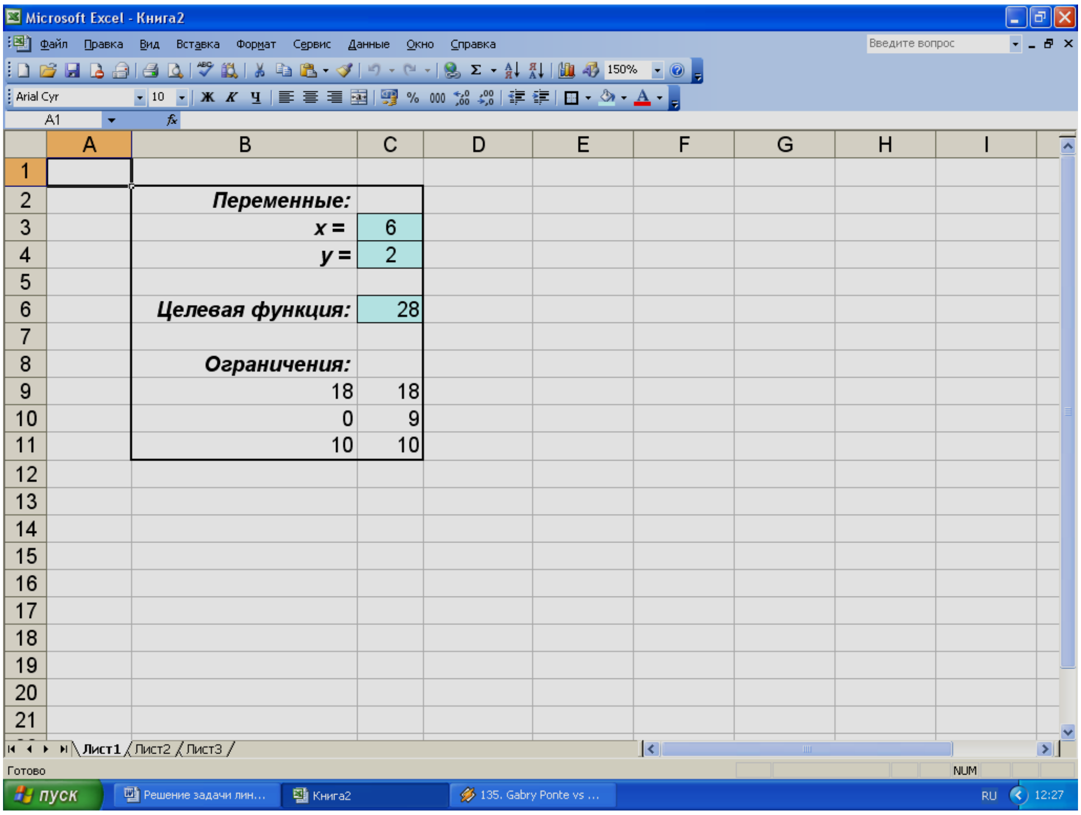


Рис. 2.9. Результаты решения

Задачи ЛП в общем случае решаются аналогично в обоих пакетах.

Задания для самоконтроля

Решить задачи ЛП в пакетах MathCAD и MSExcel

1) $3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 11x_2 &\le 50 \\ 12x_1 + 6x_2 &\le 54 \\ 6x_1 - 3x_2 &\ge 15 \\ 28x_1 + 56x_2 &\ge 112 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

2) $8x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 22x_1 + 7x_2 &\le 77 \\ 4x_1 + 9x_2 &\ge 18 \\ 15x_1 + 10x_2 &\le 60 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 16 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

3) $15x_1 + 13x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 12x_1 + 6x_2 &\le 32 \\ 8x_1 &\le 9 \\ 6x_1 + 14x_2 &\le 39 \\ 4x_1 + 15x_2 &\le 18 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4) $12x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 11x_1 + 5x_2 &\le 31 \\ 7x_1 &\le 7 \\ 2x_1 - 16x_2 &\ge 6 \\ 9x_1 + 3x_2 &\le 38 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

5) $7x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 16x_1 - 2x_2 &\le 18 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 20 \\ 13x_1 + 3x_2 &\le 4 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6) $7x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\le 26 \\ 3x_1 - 16x_2 &\ge -18 \\ 14x_1 - 2x_2 &\le 10 \\ 18x_1 + 16x_2 &\le 8 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

7) $x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 16x_2 &\le 32 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 17 \\ 14x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 4x_1 + 4x_2 &\le 5 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8) $-2x_1 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 &\le 39 \\ -2x_1 + 14x_2 &\le 5 \\ 2x_1 - 12x_2 &\ge 6 \\ -x_1 + 10x_2 &\le 6 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

9) $4x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 15x_2 &\le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge -1 \\ -x_1 + 14x_2 &\le 7 \\ -x_1 + 4x_2 &\ge 1 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

10) $9x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 11x_1 + 2x_2 &\le 42 \\ -2x_1 + 8x_2 &\le 19 \\ 14x_1 + 6x_2 &\le 38 \\ 13x_1 + 2x_2 &\le 26 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

11) $3x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 &\le 60 \\ 2x_1 - 3x_2 &\ge 1 \\ 28x_1 + 56x_2 &\ge 112 \\ 10x_1 + 15x_2 &\le 45 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

12) $2x_1 + 11x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 16x_1 + x_2 &\le 19 \\ 13x_1 + 20x_2 &\le 14 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 13 \\ 6x_1 - 3x_2 &\le 6 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

13) $13x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &\le 28 \\ 9x_1 + 8x_2 &\le 35 \\ x_1 + 8x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + 7x_2 &\le 20 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

14) $5x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\le -3 \\ -3x_1 + 12x_2 &\le 42 \\ 2x_1 + x_2 &\le 44 \\ 5x_2 &\le 11 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

15) $x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 14x_1 + 21x_2 &\le 28 \\ 20x_1 + 35x_2 &\le 70 \\ 12x_1 - 9x_2 &\ge 12 \\ 21x_1 + 15x_2 &\le 75 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

16) $2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 8x_1 + 9x_2 &\le 36 \\ 10x_1 + 14x_2 &\ge 12 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 16 \\ 6x_1 - 3x_2 &\le 9 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

17) $2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 14x_1 + 10x_2 &\le 23 \\ 2x_1 + 8x_2 &\le 25 \\ 15x_1 + 6x_2 &\le 32 \\ 18x_1 - 5x_2 &\le 26 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

18) $5x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 13x_1 + 5x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + x_2 &\le 4 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 11x_2 &\ge 6 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

19) $4x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\le 6 \\ 16x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ 10x_1 + x_2 &\le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 &\le 43 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

20) $4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 9x_1 &\le 15 \\ 15x_2 &\le 6 \\ -2x_1 + 13x_2 &\le 31 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 39 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

21) $7x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 12x_2 &\le 30 \\ 10x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 9x_1 - 2x_2 &\ge 12 \\ 11x_1 + 24x_2 &\ge 48 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

22) $3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\le 17 \\ 4x_1 + x_2 &\ge 8 \\ 5x_1 + 10x_2 &\le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

23) $5x_1 + 7x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 8x_2 &\le 24\\
6x_1 &\le 9\\
3x_1 + 10x_2 &\le 30\\
4x_1 + 12x_2 &\le 35
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

24) $9x_1 + 4x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
13x_1 + 2x_2 &\le 22\\
4x_1 &\le 7\\
4x_1 - 10x_2 &\ge 5\\
7x_1 + 13x_2 &\le 38
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

25) $2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
11x_1 - 4x_2 &\le 22\\
6x_1 + 4x_2 &\le 21\\
3x_1 + x_2 &\le 14
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

26) $3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 &\le 16\\
3x_1 - 10x_2 &\ge -11\\
4x_1 - 5x_2 &\le 10\\
3x_1 + 10x_2 &\le 8
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

27) $x_1 + 7x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + 13x_2 &\le 26\\
4x_1 + 9x_2 &\le 28\\
12x_1 + 5x_2 &\le 32\\
x_1 + 2x_2 &\le 5
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

28) $3x_1 + x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + 5x_2 &\le 29\\
-4x_1 + 12x_2 &\le 5\\
2x_1 - 9x_2 &\ge 6\\
-x_1 + 13x_2 &\le 7
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

29) $4x_1 + 7x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 15x_2 &\le 16\\
2x_1 + 3x_2 &\ge -1\\
-x_1 + 14x_2 &\le 7\\
-x_1 + 4x_2 &\ge 1
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

30) $3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$
\begin{aligned}
12x_1 + 7x_2 &\le 32\\
-4x_1 + 8x_2 &\le 15\\
12x_1 + 6x_2 &\le 38\\
10x_1 + 2x_2 &\le 26
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Модуль 3. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Тема 1. Транспортная задача

Назначение распределительных задач. Транспортная модель для составления наиболее экономичного плана перевозок. Основное предположение транспортной модели. Неизвестные транспортной задачи. Целевая функция, ограничения транспортной задачи. Разбор примера построения модели транспортной задачи. Сбалансированная (закрытая) и несбалансированная (открытая) модель транспортной задачи. Приведение несбалансированной задачи к сбалансированной. Фиктивные перевозки. Алгоритм решения транспортной задачи. Методы нахождения первоначального допустимого базисного решения. Критерий оптимальности и нахождение переменной, вводимой в базис. Метод потенциалов. Построение замкнутого цикла

Назначение распределительных задач.

Распределительная задача представляет собой специальную задачу линейного программирования транспортного типа, имеющую многочисленные приложения к задачам планирования, управления и проектирования.

Распределительная задача имеет весьма разнообразные приложения.

Поэтому распределительная задача заключается в отыскании наилучшего распределения ресурсов, при котором либо максимизируется общий доход или результат, выраженный в какой-либо другой форме, либо минимизируются затраты.

Перечисленные выше распределительные задачи решаются на основе энергетических характеристик и текущей информации о состоянии оборудования и параметрах технологического процесса.

К распределительным задачам сведены следующие задачи: распределения изделий между предприятиями, распределения самолетов между воздушными линиями, рационального использования машинно-транспортного парка, распределения башенных кранов между строительными площадками, планирования работы речного флота, распределения посевной площади между сельскохозяйственными структурами и многие другие задачи.

К распределительным задачам относятся такие широко распространенные задачи, как транспортная задача линейного программирования, задача о назначении и многие другие.

К статической распределительной задаче сводится задача планирования механического производства и в том случае, когда детали должны проходить обработку на станках различного типа, если последовательностью обработки можно пренебречь, например, в случае существенного избытка оборудования.

К общей математической формулировке распределительной задачи могут сводиться и другие задачи планирования и управления.

При решении распределительных задач в каждом звене прогнозируются будущие условия внешней среды (например, поведение конкурента) на время, не превышающее цикл управления вышестоящего звена.

Далее будут рассмотрены некоторые практические задачи, приводящие к распределительной задаче или ее модификациям.

1. *Распределение заказов по предприятиям.*

Пусть имеется m видов заказов, причем заказ i-того вида необходимо выполнить в количестве a_i единиц (i=1,m). Эти заказы могут быть размещены на n предприятиях. Стоимость выполнения единицы i-того вида заказа на j-том предприятии равна c_{ij}. Для производства единицы продукции i-того вида на j-том предприятии расходуется некоторый ресурс в количестве t_{ij} (например, сырье, трудовые ресурсы и т.п.), причем для каждого предприятия ресурс ограничен величиной b_j.

Необходимо распределить заказы по предприятиям так, чтобы выполнить все заказы имеющимися ресурсами предприятий и при этом суммарная стоимость выполнения заказов была бы минимальной.

Построение ММ.

Пусть x_{ij} - количество заказов вида i, выполняемых на j-том предприятии. Тогда ММ задачи будет иметь вид:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\ x_{ij} \Rightarrow min \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}x_{ij} \le b, j = 1, n \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \underset{i=1,m}{\longrightarrow} \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (3.4)$$

Здесь целевая функция (3.1) отображает суммарную стоимость выполнения заказов. Ограничения (3.2) требуют, чтобы расходуемые ресурсы на предприятиях не превышали заданной величины запасов. Ограничения (3.3) требуют выполнения всех заказов в необходимых объемах. Ограничения (3.4) очевидны. Задача (3.1) –(3.4) относится к классу ЗЛП . Она отличается от КТЗ (открытой) тем, что коэффициент $t_{ij} \neq 1$.

К модели вида (3.1) - (3.4) сводится также известная задача о распределении самолетов по авиалиниям.

2. <u>Распределение самолетов по авиалиниям.</u>

Пусть имеются n типов самолетов, которые должны быть использованы для перевозки пассажиров по m авиалиниям. Число самолетов j-того типа равно b_i. Исходя из данных о себестоимости пассажирокилометра и коммерческой загрузки каждого типа самолетов на каждой авиалинии, устанавливаются:

- месячные объемы a_iперевозок пассажиров одним самолетом j-того типа по i-той линии.

- месячные затраты c_{ij} на эксплуатацию одного самолета j-того вида на i-той линии.

Предполагается также известным число пассажиров a_i , подлежащих перевозке в течение месяца по i-той линии.

Необходимо распределить самолеты по авиалиниям для перевозки заданного количества пассажиров при минимальных затратах.

<u>Построение ММ.</u>

Обозначим через x_{ij} число самолетов j-того типа на i-той авиалинии. Тогда ММ задачи запишется:

$$F=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \; x_{ij} \Rightarrow min \qquad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq a, j = 1, m \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \underset{i=1,n}{\longrightarrow} \quad (3.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, (3.8)$$

По физическому смыслу параметры x_{ij} этой задачи, как и в предыдущей, должны быть целыми числами. В отличие от КТЗ в распределительной задаче целочисленность решения не гарантируется, если это условие не включено в систему ограничений. Нарушение условия целочисленности в задачах подобного рода, когда не равные нулю x_{ij} принимают, вообще говоря, немалые значения, приводит как правило, к несущественным отклонениям от оптимума. При дробных x_{ij} в качестве компонент решения задачи следует принимать ближайшие к ним целые числа. Требование целочисленности оказывается существенным, если значения x_{ij}ограничены малыми числами.

3. Планирование парка вагонов.

Одно из важнейших условий экономичной эксплуатации железных дорог заключается в рациональном планировании использования парка вагонов не только в пределах дороги, но и в пределах станции или узла. Под регулированием парка вагонов понимают распределение вагонов различных типов (крытых, полувагонов, платформ с разным числом осей и т.д.) под различные грузы.

Пусть имеются n видов вагонов $\underset{j=1,n}{\longrightarrow}$, в которые могут быть погружены грузы m видовi=1,m Количество вагонов j-того вида составляет b_i штук. Норма загрузки вагона j-того вида грузом i-того вида составляет a_{ij}. Количество грузов i-того вида, которое необходимо погрузить, определяется величиной a_i. Эксплуатационные расходы на погрузку i-того вида груза в один вагон j-того типа составляет c_{ij}. Требуется определить такое распределение вагонов, при котором все грузы были бы погружены в имеющиеся вагоны, а суммарная стоимость погрузки всех грузов была бы минимальной.

Построение ММ.

Пусть x_{ij} - число вагонов j-го типа, выделенных под погрузку грузом i-того вида. Тогда ММ задачи запишется:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \ x_{ij} \Rightarrow min \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq a, j = 1, m \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_{j\,,} j = 1, n \quad (3.7)$$

$x_{ij} \geq 0$, (3.8)

Целевая функция (3.5) отражает суммарную стоимость погрузки всех грузов, ограничение (3.6) требует, чтобы грузы каждого вида были погружены полностью, ограничение (3.7) требует, чтобы грузы были погружены в имеющееся количество вагонов.

К задаче вида (3.1) - (3.4) сводятся также задачи планирования работы речного флота. Так при анализе практических проблем Волжского речного пароходства грузового флота по грузовым линиям, пассажирского флота по линиям, задачи распределения по объектам перегрузочных машин, дноуглубительных снарядов и т.д.

Транспортная модель для составления наиболее экономичного плана перевозок. Основное предположения транспортной модели.

Транспортная модель используется для составления наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов изготовления (например, заводов) в пункты доставки (например, склады).

Транспортная модель может применяться при рассмотрении практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением именных графиков, назначением служащих не рабочие места, оборотом наличного капитала.

Транспортная задача может быть сведена к задаче линейного программирования и решена симплекс-методом. вместе с тем специфика транспортной задачи позволяет решить ее более эффективным методом. Однако, и этот метод по существу воспроизводит шаги симплекс-метода.

Такая модель используется для составления наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов (например, заводов) в пункты доставки (например, склады). Транспортную модель можно применять при рассмотрении ряда практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением служащих на рабочие места, оборотом наличного капитала, регулированием расхода воды в водохранилищах и многими другими. Кроме того, модель можно видоизменить, с тем, чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции.

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования, однако ее специфическая структура позволяет так модифицировать симплекс-метод, что вычислительные процедуры становятся более эффективными. При разработке метода решения транспортной задачи существенную роль играет теория двойственности.

В классической транспортной задаче рассматриваются перевозки (прямые или с промежуточными пунктами) одного или нескольких видов продукции из исходных пунктов в пункты назначения. Эту задачу можно видоизменить, включив в нее ограничения сверху на пропускные способности транспортных коммуникаций. Задачу о назначениях и задачу управления запасами можно рассматривать как задачи транспортного типа.

Определение транспортной модели

При построении транспортной модели используются:

1. величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте $a_1, a_2, ... a_m$;
2. величины, характеризующие объем спроса в каждом пункте потребления $b_1, b_2, ... b_n$;
3. стоимость перевозки единицы продукции из каждого пункта производства в пункт потребления $c_{ij}, i = 1,2,...m; j = 1,2,...n$.

Заметим, что потребности одного пункта назначения могут удовлетворяться из нескольких исходных пунктов, так же один пункт производства может поставлять товар в несколько пунктов потребления.

Цель построения модели заключается в определении количества продукции, которую следует перевозить из всех исходных пунктов в пункты потребления при минимальных общих транспортных расходах.

Основное предположения транспортной модели состоит в том, что величина расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимой продукции.

Рассмотрим графическое представление транспортной модели (рис. 3.1)

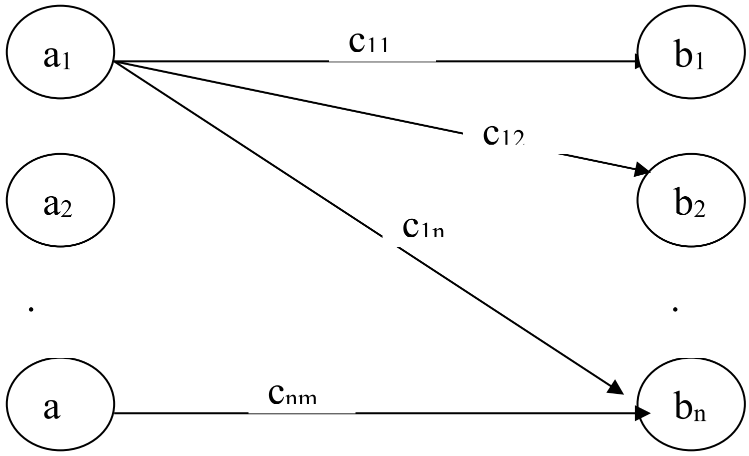


Рис. 3.1 Графическое представление транспортной модели

Транспортная модель такого вида называется сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.

Соответствующую математическую модель можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1,2,..., m(I) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, j = 1,2,..., n(II) \end{cases}$$

I отражает тот факт, что суммарный объем перевозок из некоторого исходного пункта не может превышать произведенного в этом пункте количества продукции.

II показывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворять потребность в спросе на эту продукцию.

Анализ транспортной модели показывает, что суммарный объем производства не должен быть меньше объема потребления.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В том случае, если что суммарный объем производства равен суммарному объему потребления, транспортная модель называется сбалансированной.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Такая модель является канонической моделью линейного программирования.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,..., m(I) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,..., n(II) \end{cases}$$

Пример транспортной модели

Заводы автомобильной фирмы расположены в Лос-Анджелесе, Детройте и Нью-Орлеане. Центры распределения в Денвере и Майами. Объем производства заводов 1000, 1500 и 1200 автомобилей соответственно. Ожидаемый спрос равен 2300 и 1400 автомобилей соответственно.

Стоимость перевозки одного автомобиля приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	80	215
Детройт	100	108
Нью-Орлеан	102	68

x_{ij}- количество автомобилей, которые перевозят из i-го пункта в j-й (i =1,2,3; j =1,2).

Суммарный объем производства автомобилей равен 3700 и равняется суммарному ожидаемому спросу. Следовательно, данная транспортная модель является сбалансированной и ее можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000 \\ x_{21} + x_{22} = 1500 \\ x_{31} + x_{32} = 1200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2 \end{cases}$$

Компактный способ записи транспортной модели связан с использованием транспортной таблицы или матрицы, у которой соответствуют исходным пунктам, а столбцы пунктам спроса (табл.3.2).

Таблица 3.2

	Денвер (2300)	Майами (1400)
Лос-Анджелес (1000)	80	215
Детройт (1500)	100	108
Нью-Орлеан (1200)	102	68

Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке

1. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что стоимость перевозки единицы груза из пункта Ai в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M и при этом условии известными методами находят решение транспортной задачи. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется запрещением перевозок.

2. В отдельных ТЗ дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из Ai в B_j требуется обязательно перевезти a_{ij} единиц груза. Тогда в соответствующую клетку таблицы, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывают указанное число a_{ij} и в дальнейшем считают эту клетку свободной со сколь угодно большой стоимостью перевозки M. Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.
3. Иногда требуется найти решение ТЗ, при котором из A_i в B_j должно быть перевезено не менее заданного количества груза a_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы Ai и потребности Bj меньше фактических на a_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой ТЗ, на основании которого и определяют решение исходной задачи.

Модель без дефицита

В соответствии с терминологией транспортной модели поставщики представлены обычным и сверхурочным производством для различных этапов. Потребители задаются спросом соответствующих этапов. Затраты на «транспортировку» единицы продукции от любого поставщика к любому потребителю представляются суммой соответствующих производственных затрат и затрат на хранение единицы продукции. Матрица полных затрат для эквивалентной транспортной задачи приведена в табл. 3.3.

Дополнительный столбец используется для балансировки транспортной задачи, т.е. $S = \sum a_i - \sum b_j$. Затраты на единицу продукции в дополнительном столбце равны нулю. Так как дефицит не допускается, то продукцию, выпускаемую на рассматриваемом этапе, нельзя использовать для удовлетворения спроса предыдущих этапов. В таблице это ограничение представлено заштрихованными ячейками, что, в сущности, эквивалентно очень большим затратам на единицу продукции.

Так как задолженность в модели не допускается, то для каждого этапа k в нее необходимо включить ограничение, состоящее в том, что накопленный спрос не должен превышать соответствующего общего объема произведенной продукции, т.е. $\sum (a_{ri} + a_{ti}) \geq \sum b_j$, k = 1,2,...,N.

Таблица 3.3

	спрос на этапе j					избыток	
	1	2	3	…	N		
$R1$	C_1	C_1+h_1	$C_1+h_1+h_2$		$C_1+h_1+\ldots+h_{N-1}$	0	a_{R1}
$T1$	d_1	d_1+h_1	$d_1+h_1+h_2$		$d_1+h_1+\ldots+h_{N-1}$	0	a_{T1}
$R2$		C_2	C_2+h_2		$C_2+h_2+\ldots+h_{N-1}$	0	a_{R2}
$T2$		d_2	d_2+h_2		$d_2+h_2+\ldots+h_{N-1}$	0	a_{T2}
•••							•••
RN					C_N	0	a_{RN}
TN					d_N	0	a_{TN}
	b_1	b_2	b_3	•••	b_N	S	

Так как спрос на этапе i должен быть удовлетворен прежде, чем спрос на этапах i + 1, i + 2,..., N, и поскольку на функцию производственных затрат наложены специальные требования, нет необходимости применять общий алгоритм решения транспортной задачи. Сначала путем последовательного назначения максимально возможных поставок по наиболее дешевым элементам первого столбца удовлетворяется спрос на этапе 1. Затем корректируются значения, которые после этого определяют оставшиеся мощности для различных этапов. Далее рассматривается этап 2, и его спрос удовлетворяется наиболее дешевыми поставками в пределах новых ограничений на производственные мощности. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос этапа N.

Модель с дефицитом

Рассмотрим обобщение описанной выше модели при условии, что допускается дефицит. Предполагается, что задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу N-этапного горизонта планирования. Таблицу 1 можно легко модифицировать, чтобы учесть влияние задолженности, введя соответствующие удельные издержки в заблокированные маршруты.

Так, например, если p_i – удельные потери от дефицита (т.е. на единицу продукции) в случае, когда продукция требуется на этапе i, а поставляется на этапе i+1, то удельные расходы, соответствующие ячейкам $R_{N,1}$ и $T_{R,1}$, составляют: $\{c_N + p1 + p_2 + \ldots + p_{N-1}\}$ и $\{d_N + p1 + p_2 + \ldots + p_{N-1}\}$ соответственно.

Заметим, что в общем случае описанный выше алгоритм может не привести к оптимальному решению.

Приведение любой транспортной модели к сбалансированной.

На практике спрос не всегда равен объему производства. Однако транспортную модель всегда можно сбалансировать. Сбалансированная таблица удобна для решения задач.

Рассмотрим предложенную задачу, предположив, что завод в Детройте производит не 1500, а 1300 автомобилей. в этом случаи имеется дисбаланс между объемом производства и объемом потребления в 200 автомобилей. Следовательно, спрос на автомобили не может быть удовлетворен полностью. Видоизменим транспортную модель, так чтобы недостаток автомобилей определенным образом распределялся между пунктами потребления. Так как спрос превышает предложение, то введем фиктивный завод с производительностью в 200 автомобилей. Количество автомобилей якобы отправленных в пункты назначения фиктивным заводом будет представлять собой объем недостающей продукции в этом пункте. Для завершения построения транспортной модели необходимо определить стоимость перевозок с фиктивного завода в пункты потребления. Так как реально завода не существует, то и перевозки не осуществляются и, следовательно, стоимость единицы перевозимой продукции можно полагать равной нулю. Однако целесообразно предполагать, что каждая единица недостающей продукции облагается штрафом, тогда транспортные расходы на единицу продукции равны штрафу за единицу продукции недополученную в том или ином пункте распределения.

Представим в виде табл. 3.4 сбалансированную модель с фиктивным заводом:

Таблица 3.4

	Денвер (2300)	Майами (1400)
Лос-Анджелес (1000)	80	215
Детройт (1300)	100	108
Нью-Орлеан (1200)	102	68
Фиктивный завод (200)	0	0

Заметим, что в случаи, когда объем производства превышает спрос (перепроизводство) можно ввести дополнительные пункты назначения, которые поглотят избыток продукции.

Например, пусть в Денвере спрос понизится до 1900 автомобилей. Тогда можно построить транспортную модель, в которой имеются фиктивные пункты распределения. В этом случаи автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный центр распределения, представляют избыток производства на этом заводе.

Соответствующая транспортная таблица может иметь вид (табл. 3.5):

Таблица 3.5

	Денвер (1900)	Майами (1400)	Фиктивный(400)
Лос-Анджелес (1000)	80	215	0
Детройт (1500)	100	108	0
Нью-Орлеан (1200)	102	68	0

Решение транспортной задачи

Принципиальный алгоритм.

1. Нахождение начального допустимого базисного решения (ДБР);
2. Если условие оптимальности не выполнено, то находится переменная вводимая в базис, если условие оптимальности выполнено, то задача решена;
3. Нахождение переменной, выводимой из базиса и поиск нового базисного решения.

Нахождение первоначального допустимого базисного решения

I. Метод северо-западного угла

Переменной x_1 расположенной в северо-западном углу присваивается $\max\{a_1, b_1\}$. После этого вычеркивается соответствующая строка или столбец, при этом остальные переменные, расположенные в строке или столбце, полагаются равными 0. Если $a_1 = b_1$, то вычеркивается и строка и столбец. Оставшаяся таблица сбалансированная. Для оставшейся таблицы процесс повторяется.

Процесс нахождения допустимого решения прекращается, когда остается не вычеркнутой одна строка или столбец.

Пример 1

	5		15		15		10	
15	x_{11}	10	x_{12}	0	x_{13}	20	x_{14}	11
25	x_{21}	12	x_{22}	7	x_{23}	9	x_{24}	20
5	x_{31}	0	x_{32}	14	x_{33}	10	x_{34}	18

Переменной x_{11} присваивается значение 5 (min(5;15)). Первый столбец вычеркивается, а в первом пункте производства остается 15-5=10 единиц продукции. В оставшейся таблице в верхнем левом углу переменная x_{12}. Ей присваивается min(10;15)=10 и вычеркивается первая стока. Во втором пункте назначения остается 15-10=5 единиц продукции. Далее процесс продолжается.

	5		15; 5		15		10	
15; 10	5	10	10	0		20		11
25; 20; 5		12	5	7	15	9	5	20
5		0		14		10	5	18

Начальное допустимое базисное решение:

$$x_{11} = 2; x_{12} = 10; x_{22} = 5; x_{23} = 15; x_{24} = 5; x_{34} = 5$$

Целевая функция при этом будет равна:

$$z = 10*5 + 0*10 + 7*5 + 9*15 + 20*5 + 18*5 = 410$$

Начальное допустимое базисное решение должно содержать m+n-1 переменных. если на каком -то шаге вычеркивается одновременно строка и столбец, то число базисных переменных становиться меньше, чем m+n-1. В этом случае в базисное решение добавляется любая переменная из вычеркнутой строки или столбца и ей присваивается значение 0.

Пример 2

	20		10		40	
30	x_{11}	10	x_{12}	0	x_{13}	20
30	x_{21}	12	x_{22}	7	x_{23}	9
10	x_{31}	0	x_{32}	14	x_{33}	10

Применим метод северо-западного угла. Получим:

	20		10		40; 10	
30; 10	20	10	10	0		20
30		12		7	30	9
10		0	0	14	10	10

На втором шаге одновременно вычеркнули второй столбец и вторую строку. Введем в базис любую переменную из вычеркнутых на этом шаге ячеек таблице и присвоим ей значение 0. Пусть $x_{32} = 0$.

Таким образом, получили начальное допустимое базисное решение:

$$x_{11} = 20; x_{12} = 10; x_{23} = 30; x_{32} = 0; x_{33} = 10$$

II. Метод минимальной стоимости.

Метод минимальной стоимости отличается от метода северо-западного угла тем, что на каждом шаге выбирается переменная не в верхней левой ячейке, а в ячейке, стоимость которой минимальна. Все дальнейшие действия осуществляются аналогично методу северо-западного угла.

Пример 3

	5		15		15		10	
15	x_{11}	10	x_{12}	0	x_{13}	20	x_{14}	11
25	x_{21}	12	x_{22}	7	x_{23}	9	x_{24}	20
5	x_{31}	0	x_{32}	14	x_{33}	10	x_{34}	18

Ячейка с наименьшей стоимостью соответствует переменной x_{12} , ей присваивается значение равное min(15;15)=15. вычеркивается первая строка и второй столбец. Поскольку вычеркнуты одновременно строка и столбец, то в вычеркнутых ячейках выбирается ячейка с минимальной стоимостью и соответствующей переменной присваивается значение 0, $x_{22} = 0$. Далее в оставшейся таблице выбираем ячейку с минимальной стоимостью $x_{31} = \min(5;5) = 5$. Вычеркиваем первый столбец и третью строку, $x_{33} = 0$. Осталось не вычеркнутыми две ячейки. Соответственно присваиваем $x_{23} = \min(15;25) = 15$. Во втором пункте потребления остается 10 единиц. Переменной $x_{24} = 10$.

	5		15		15		10	
15		10	15	0		20		11
25		12	0	7	15	9	10	20
5	5	0		14	0	10		18

Начальное допустимое базисное решение:

$x_{12} = 15; x_{22} = 0; x_{23} = 15; x_{24} = 10; x_{31} = 5; x_{33} = 0$

Целевая функция при этом будет равна:

$z = 0*15 + 7*0 + 9*15 + 20*10 + 0*5 + 10*0 = 335$

Критерий оптимальности и нахождение переменной, вводимой в базис

Метод потенциалов

Метод потенциалов эквивалентен выражению целевой функции через небазисные переменные.

Суть метода: столбцу i строке j ставится в соответствие переменные U_i, V_j потенциалы. Для всех базисных переменных x_{ij} выполнено $U_i + V_j = c_{ij}$. Совокупность таких уравнений образует систему m+n-1 уравнений с m+n неизвестными. Значение потенциалов определяется из этой системы, если одному из потенциалов придается произвольное значение.

Рассмотрим задачу примера 14:

$x_{11} : U_1 + V_1 = c_{11} = 10$

$x_{12} : U_1 + V_2 = c_{12} = 0$

$x_{22} : U_2 + V_2 = c_{22} = 7$

$x_{23} : U_2 + V_3 = c_{23} = 9$

$x_{24} : U_2 + V_4 = c_{24} = 20$

$x_{34} : U_3 + V_4 = c_{34} = 18$

Пусть $U_1 = 0$, тогда

$V_1 = 10$

$V_2 = 0$

$U_2 = 7$

$V_3 = 2$

$V_4 = 13$

$U_3 = 5$

Далее, с помощью полученных потенциалов строятся оценки для небазисных переменных $\overline{c_{ij}} = U_i + V_j - c_{ij}$.

Получим оценки небазисных переменных для рассматриваемой задачи:

$x_{13} : \overline{c_{13}} = 0 + 2 - 20 = -18$

$x_{14} : \overline{c_{14}} = 0 + 13 - 11 = 2$

$x_{21} : \overline{c_{21}} = 7 + 10 - 112 = 5$

$x_{31} : \overline{c_{31}} = 5 + 10 - 0 = 15$

$x_{32} : \overline{c_{32}} = 5 + 0 - 14 = -9$

$x_{33} : \overline{c_{33}} = 5 + 2 - 10 = -3$

Критерий оптимальности: если все оценки небазисных переменных $\overline{c_{ij}} \le 0$, то полученное решение оптимально.

Если критерий оптимальности не выполнен, то переменная, имеющая самую большую оценку, будет вводиться в базис. В нашем случае в базис должна быть введена переменная x_{31}.

Нахождение переменной, выводимой из базиса.

Этот шаг эквивалентен применению условия допустимости в симплекс-методе. Увеличивать поставку в клетку вводимой переменной (3;1) можно до тех пор, пока одна из базисных переменных не станет равной 0.

Распределительный метод (построение замкнутого цикла).

Для вводимой переменной строится замкнутый цикл (цикл начинается и заканчивается в ячейке вводимой переменной). Он состоит из вертикальных и горизонтальных перемещений по транспортной таблице, причем смена направлений происходит только в ячейках с базисными переменными.

	5		15		15		10	
15	5 (-)	10	10(+)	0		20		11
25		12	5(-)	7	15	9	5(+)	20
5	x_{31}(+)	0		14		10	5(-)	18

Так как количество перевозимого груза не измениться, то увеличение переменной x_{31} на 1 единицу эквивалентно уменьшению переменной x_{11} на 1 единицу, увеличению x_{12} на 1 единицу, уменьшению x_{22} на 1 единицу, увеличению x_{24} на 1 единицу, уменьшению x_{34} на 1 единицу. Ячейки, в которых перевозимая продукция увеличится, пометим знаком "+", а в которых уменьшиться - "-" (помечаются ячейки, в которых меняется направление построенного цикла).

Соответствующий процесс всегда начинается на "+" и заканчивается на "-". При этом, переменная, выводимая из базиса, расположена в ячейке, помеченной знаком "-". Чтобы выполнилось условие допустимости выбирается минимальное значение в клетках, помеченных "-". Эта переменная будет выводится из базиса.

Переход к новой транспортной таблице осуществляется по правилу: значение переменной, выводимой из базиса прибавляется ко всем значениям переменных к ячейкам, помеченным знаком "+" и отнимается от переменных в ячейках, помеченных "-".

В нашем случаи min (5;5;5) =5. Следовательно любую соответствующую переменную модно вывести из базиса. Возьмем переменную x_{34}

	5		15		15		10	
15	0	10	15	0		20		11
25		12	0	7	15	9	10	20
5	5	0		14		10		18

Значение целевой функции при этом уменьшилось на величину $x_{31}\overline{c_{31}} = 5*15 = 75$

$z = 410 - 75 = 335$

Далее проверяем условие оптимальности с помощью метода потенциалов. Можно считать потенциалы по транспортной таблице, не выписывая отдельно систему. Оценки для небазисных переменных так же можно записать сразу в таблицу 3.7.

	V_1=10		V_2=0		V_3=2		V_4=13	
U_1=0	0(-)	10	15(+)	0	-18	20	2	11
U_2=7	5(+)	12	0(-)	7	15	9	10	20
U_3=-10	5	0	-24	14	-24	10	-15	18

Условие оптимальности не выполнено.

x_{21} - переменная, вводимая в базис; $x_{21} = 0$

x_{11} - переменная, выводимая из базиса;

$x_{21}\overline{c_{21}} = 0*5 = 0$
$z = 335 - 0 = 335$ Значение целевой функции не изменилось. Продолжим решать задачу и перейдем к новой транспортной таблице:

	V_1=5		V_2=0		V_3=2		V_4=13	
U_1=0	-5	10	15(-)	0	-18	20	2(+)	11
U_2=7	0	12	0(+)	7	15	9	10(-)	20
U_3=-5	5	0	-19	14	-13	10	-10	18

Критерий оптимальности вновь не выполнен.

x_{14} - переменная, вводимая в базис; $x_{14} = 10$

x_{11} - переменная, выводимая из базиса;

$x_{14}\overline{c_{14}} = 10*2 = 20$
$z = 335 - 20 = 315$ Значение целевой функции не изменилось. Продолжим решать задачу и перейдем к новой транспортной таблице :

	V_1=5		V_2=0		V_3=2		V_4=11	
U_1=0	-5	10	15	0	-18	20	10	11
U_2=7	0	12	0	7	15	9	-2	20
U_3=-5	5	0	-19	14	-13	10	-12	18

Критерий оптимальности выполнен. Транспортная задача решена. Ответ можно записать в форме таблицы.

	5	15	15	10
15	x_{11}=0	x_{12}=15	x_{13}=0	x_{14}=10
25	x_{21}=0	x_{22}=0	x_{23}=15	x_{24}=0
5	x_{31}=5	x_{32}=0	x_{33}=0	x_{34}=0

Суммарная стоимость всех перевозок равна 315.

Использование Excel при решении задач линейного программирования.

Для решения оптимизационных задач в Excel существует мощный инструмент –**Поиск решения** (Solver). Для решения надо грамотно сформулировать задачу.

Рассмотрим задачу о планировании производства.

Предположим, хлебозавод (или цех хлебозавода)выпускает два вида хлеба: Столичный и Городской, которые поступают в оптовую продажу. Для их производства используются два выходных: мука Ри муку П. Максимально возможные суточные запасы составляют 6и8тсоответственно.Составим таблицу расходов этих продуктов (таб 3.6).

Таблица 3.6 Таблица расходов продуктов

Расходуемая продукция - мука	Затраты расходуемой продукции в т на т хлеба		Максимально возможный запас, т
	Столичный	Городской	
Р	1	2	6
П	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на хлеб Городской никогда не превышает спрос на хлеб Столичный более чем на 1т. Спрос на хлеб Городской никогда не превышает 2т в сутки. Оптовые цены на хлеб за 1т: Столичный - 4,5 тыс. руб., Городской - 3тыс. руб.

Какое количество хлеба каждого вида надо производить для того, чтобы прибыль от реализации был максимальный?

Нужно построить математическую модель. Для этого необходимо определить:

• что является переменными модели?

• в чем цель, для достижения которой из множества допустимых значений переменных выбирается оптимальное?

• каким значением должны удовлетворять переменные?

В нашем случае необходимо спланировать объем производства хлеба таким образом, чтобы максимизировать прибыль. Поэтому переменные:

• хг - суточный объем производства хлеба Городской;

• хс - суточный объем производства хлеба Столичный. Суммарный суточный доход от производства всего хлеба равна: F = Z = 4500хс +3000 хг.

Целью является определение среды всех допустимых значений хг и хс таких, которые максимизируют прибыль, т.е. целевую функцию Z.

Определим ограничения, налагаются на хг и хс. Объем производства не может быть отрицательными. То есть:

хс, хг $\geq$ 0.

Расходы и сходных продуктов для производства обоих видов хлеба не может превышать максимально возможный запас.

хс+2хг$\leq$ 6

$2xc+xг \leq 8$

Кроме того, ограничением на величину спроса имеет вид:

$xг-xc \leq 1$

$xг \leq 2$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$F = Z = 4500xc+3000\ xг \rightarrow \max$

$xc+2xг \leq 6$

$2xc+xг \leq 8$

$xг-xc \leq 1$

$xг \leq 2$

$xc,\ xг \geq 0$

Модель является линейной.

Сейчас подготовим ввод исходных данных на рабочем месте Excel.

1.ОтводА3и В3под значение xг и xc.

2.В ячейкуD4введемЦФ: = 4500* A3+3000 *B3

3.В ячейкудиапазонаA7: A10 введем левые части ограничения, ав ячейкуB7:B10-правые части. См. рисунок 3.2

Ячейка	**Формула**	**Ячейка**	**Формула**
A7	=A3+2*B3	B7	6
A8	=2*A3+B3	B8	8
A9	=B3-A3	B9	1
A10	=B3	B10	2

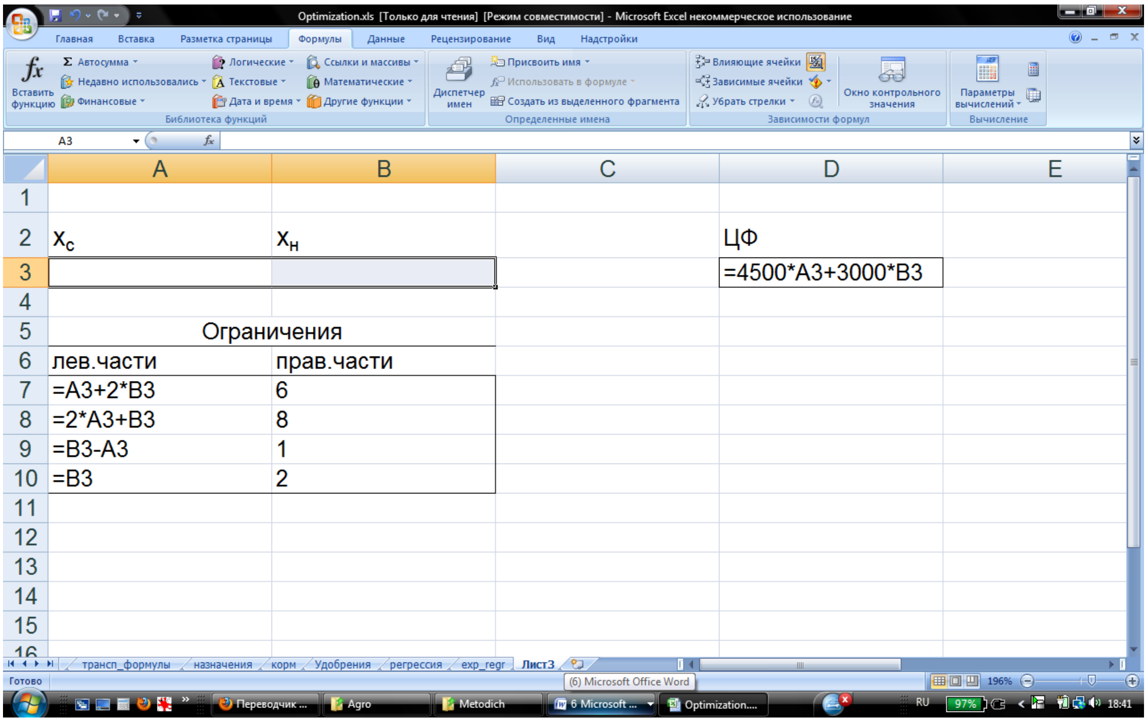


Рис. 3.2. Пример окна в Excel

Приступим к решению с помощью средства **Поиск решения**. Если в меню **Сервис** нет этой команды, ее необходимо установить: **Сервис-Надстройки**. В списке **Список надстроек** надо выбрать**Поиск решения**.(Если его нет в перечне, установить с CDMS Office). Выбираем команду **Сервис –Поиск решений**. Появится диалоговое окно.

В поле **Установить целевую ячейку** Приводятся ссылки наячейки с функцией, мах, min и значение, которое будет искать **Поискрешений**, изменяя значение параметра так, чтобы удовлетворить ограничениям. Установите адрес ячейкиD4.

В группе **Равной** устанавливается тип взаимосвязи выбором переключателя (максимальному значению, минимальному значению, значению). Установим **мах**.

В поле **Изменяя ячейки вводится** ссылка на диапазон или группу диапазонов ячеек, где находится неизвестные. Установите А3:В3.

Список **Ограничения.** Ограничения могут быть в виде неравенства, равенства, требования только целых значений или только 0 или 1. Ограничения добавляют по одному на кнопку **Добавить**: появится окно **Добавление ограничения**.

В поле **Ссылка на ячейку** вводим левую часть ограничения: А3: В3. В поле **Ограничения** - правую часть, в нашем примере - 0.Тип отношений – выбираем > =. Введя эту группу ограничений, кнопкой **Добавить** добавляем вторую группу ограничений:

A7: A10 <= B7: B10. Нажимаем **ОК**. Заметим, что ссылки в окне **Поиск решений** автоматически превращается в абсолютные.

Затем нажимаем кнопку **Параметры**. Появится диалоговое окно **Параметры поиска решения**. Здесь можно изменять условия и варианты поиска решения, а также загружать и сохранять оптимизируемые модели. Обычно значения по умолчанию подходят для решения многих задач.

В нашем примере установим флажок **Линейная модель**, остальные параметры оставим по умолчанию. Щелкнем **ОК**. Опять появится окно **Поиск решения**. Нажмем кнопку **Выполнить**. Откроется окно **Результаты поиска решения**. После того, как нажали **ОК**, результаты будут внесены в ячейку рабочего листа. В ячейках A3: B3 будут даны оптимальные объемы производства хлеба. В ячейке D4 - значение максимальной прибыли. (рис. 3.3).

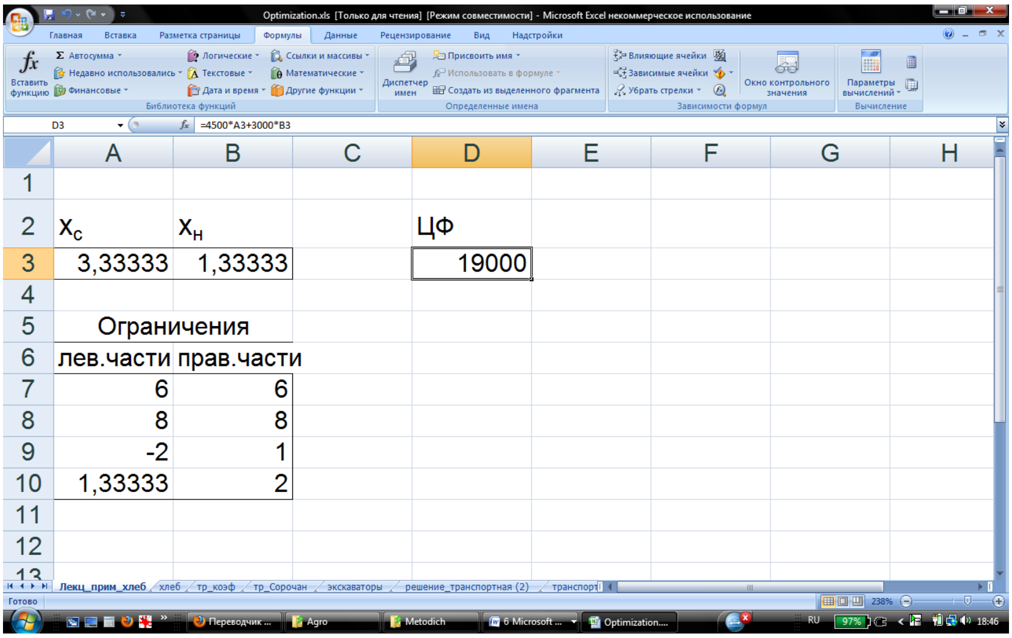


Рис. 3.3. Пример окна в Excel

Транспортная задача.

Допустим, что фирма имеет 4фабрики, свои товары она поставляет в 5центров распределения. Фабрики располагаются в городах1, 2, 3, 4 с возможностями ежедневно производить 200, 150, 225 и175 единиц продукции. Распределительные центры располагаются в городах A, B, C, D, E и ежедневно испытывают потребность в товарах100,200, 50, 250, 150единиц продукции. Хранение на фабрике продукции обходится в 0,75 руб. в день, а штраф за просрочку поставки, которая заказана в центр распределения продукции, но которая там не находится, равна2,5 руб. в день.

Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в центры распределения такова (табл. 3.12):

Таблица 3.12

	A	B	C	D	E	Производство
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25	200
2	2,5	2	1,75	1	1,5	150
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75	225
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75	175
Потребление	100	200	50	250	150	

Требуется так запланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что данная модель сбалансирована, то есть суммарный объем произведенной продукции равен суммарному объему потребностей в этой продукции. Так что, в этой модели не надо учитывать расходы, связанные со складированием и с недопоставкой.

Если модель несбалансированная, то надо ввести:

• в случае перепроизводства - фиктивный пункт распределения, при этом стоимость перевозки в i-й пункт положить равной стоимости складирования, тогда объем «перевозок» груза в j-й пункт будет равен объему складирования излишков продукции на фабриках.

• в случае дефицита - фиктивную фабрику, стоимость перевозки единицы продукции с этой фабрики положить равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы «перевозки» будут равны объемам недопоставок продукции в соответствующий пункт распределения.

Построим математическую модель нашей транспортный задачи.

Неизвестные здесь - объемы перевозок x_{ij} - с i-ой фабрики в j-тый центр распределения.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

c_{ij}- стоимость перевозки единицы продукции с i-ой фабрики в j-тый центр распределения.

Налагаются ограничения обязательного соблюдения объемов перевозки; то есть вся продукция должна быть вывезена из фабрик, при этом потребность всех центров должна быть удовлетворена полностью.

Таким образом, мы имеем следующую модель:

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ \rightarrow min \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ = b_i \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \ = a_j \\ x_{ij} \geq 0, i = \ 1, \dots, 4, \qquad , \end{cases}$$

b_i- объем производства на i фабрике.

a_j- спрос в j центре.

Теперь вводим данные на лист Excel.

Вводим матрицу коэффициентов целевой функции, элементами которой являются стоимости перевозки единицы груза из одного пункта в другой. Далее отводим диапазон ячеек под неизвестные нашей задачи, то есть под матрицу объемов перевозки грузов, которая и составит оптимальный план задачи перевозок. Можно ввести первоначальные опорные значения объемов перевозки, а можно оставить эти ячейки пустыми (рис. 3.4).

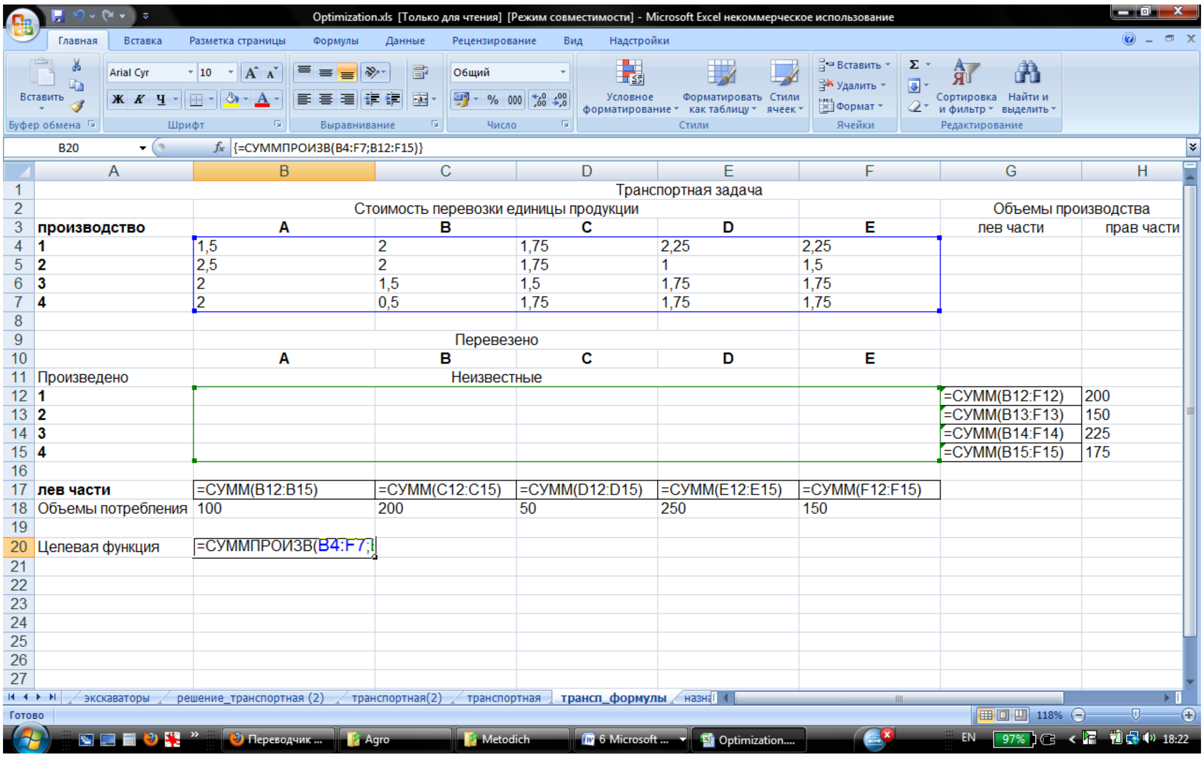


Рис. 3.4. Пример окна Excel

Следующим шагом записываем формулы левых частей ограничений, как показано на листе Excel в ячейках G12:G15. В ячейки H12:H15 вводим значения объемов производства, то есть правые части соответствующих ограничений. Аналогично в ячейки B17:F17 вводим левые части ограничений по потребностям в пунктах распределения продукции. А в ячейки B18:F18 введем правые части соответствующих ограничений.

В ячейку B20 вводим формулу целевой функции. Оставляем для удобства эту ячейку активной.

Подготовив все данные, вызываем **Поиск решения**.

В поле **Установить целевую ячейку** задаем минимум.

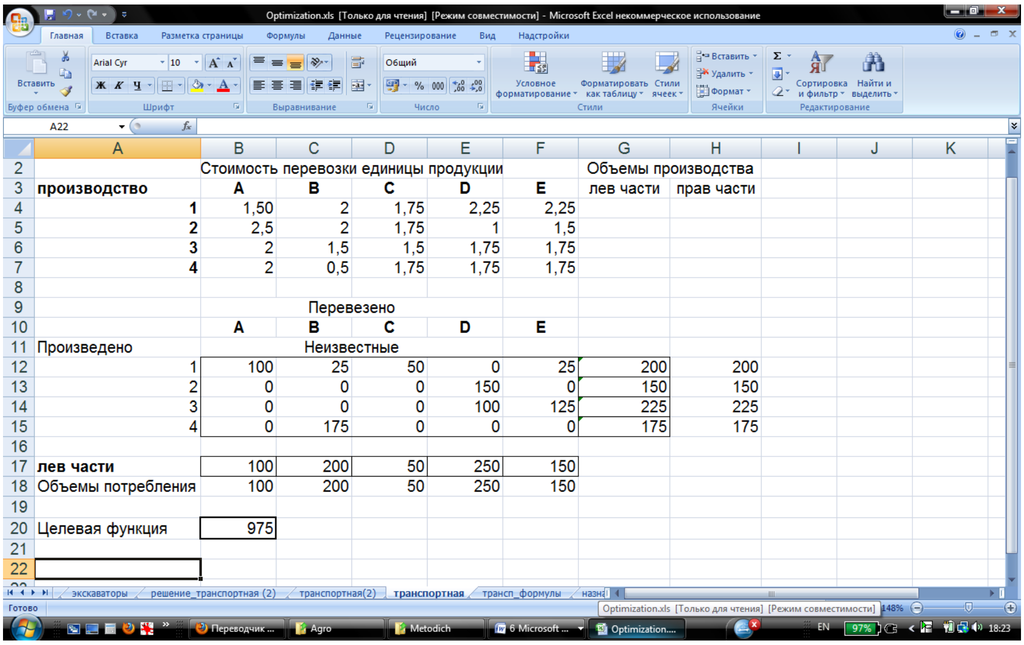
В поле **Изменяя ячейки** задаем ссылку на диапазон B12:F15

Список **Ограничения** заполняем нашими ограничениями. Задаем ссылку на ячейки с левыми частями ограничений и с правыми частями. Соотношение выбираем **равно.**

В окне **Параметры** отмечаем **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**.

Возвращаемся с окно **Поиск решения** и нажимаем кнопку **Выполнить**.

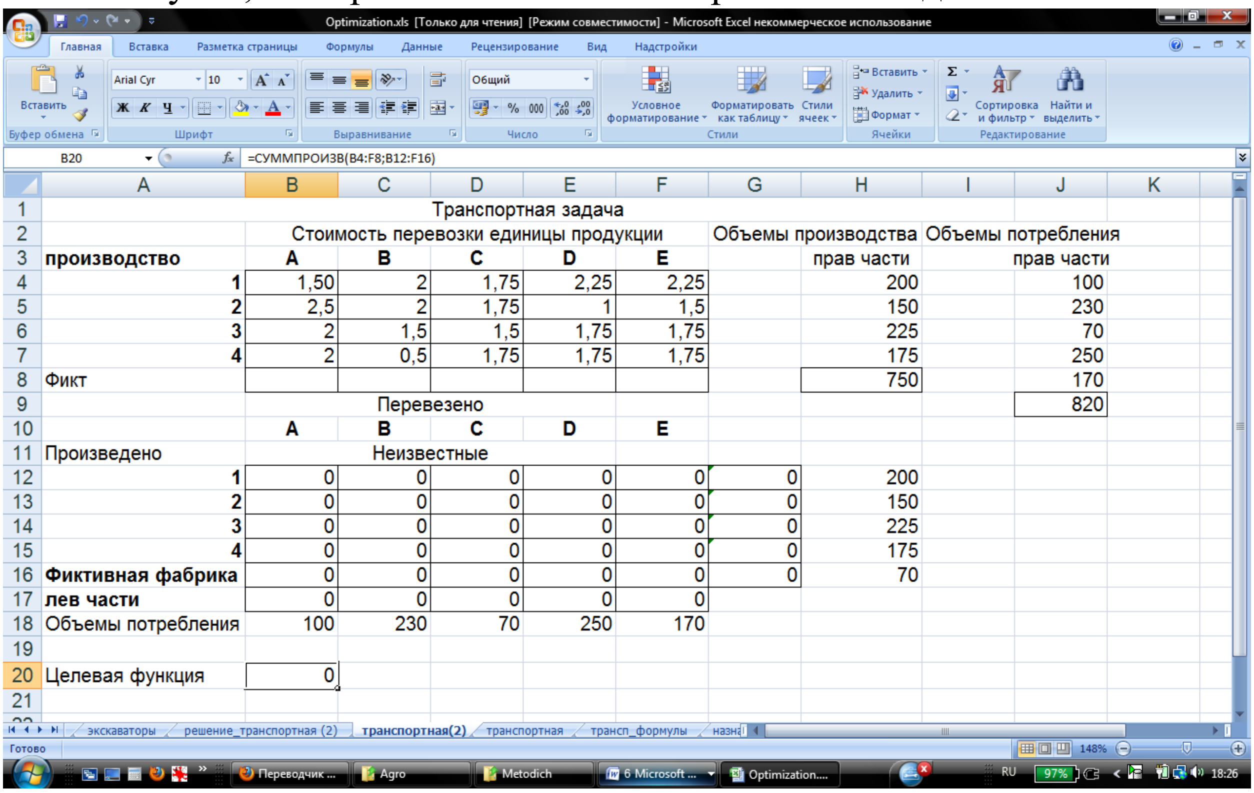
В результате получим оптимальное решение в виде матрицы объемов перевозимой продукции и значение целевой функции.См. рис. 3.5-3.7.



	A	B	C	D	E	F	G	H
2		Стоимость перевозки единицы продукции					Объемы производства	
3	**производство**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	лев части	прав части
4	**1**	1,50	2	1,75	2,25	2,25		
5	**2**	2,5	2	1,75	1	1,5		
6	**3**	2	1,5	1,5	1,75	1,75		
7	**4**	2	0,5	1,75	1,75	1,75		
8								
9			Перевезено					
10		**A**	**B**	**C**	**D**	**E**		
11	Произведено		Неизвестные					
12	1	100	25	50	0	25	200	200
13	2	0	0	0	150	0	150	150
14	3	0	0	0	100	125	225	225
15	4	0	175	0	0	0	175	175
16								
17	**лев части**	100	200	50	250	150		
18	Объемы потребления	100	200	50	250	150		
19								
20	Целевая функция	975						

Рис. 3.5. Пример окна Excel

В случае, если решается несбалансированная модель.



B20 =СУММПРОИЗВ(B4:F8;B12:F16)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Транспортная задача						
2		Стоимость перевозки единицы продукции					Объемы производства		Объемы потребления	
3	**производство**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**		прав части		прав части
4	**1**	1,50	2	1,75	2,25	2,25		200		100
5	**2**	2,5	2	1,75	1	1,5		150		230
6	**3**	2	1,5	1,5	1,75	1,75		225		70
7	**4**	2	0,5	1,75	1,75	1,75		175		250
8	Фикт							750		170
9			Перевезено							820
10		**A**	**B**	**C**	**D**	**E**				
11	Произведено		Неизвестные							
12	**1**	0	0	0	0	0	0	200		
13	**2**	0	0	0	0	0	0	150		
14	**3**	0	0	0	0	0	0	225		
15	**4**	0	0	0	0	0	0	175		
16	**Фиктивная фабрика**	0	0	0	0	0	0	70		
17	**лев части**	0	0	0	0	0				
18	Объемы потребления	100	230	70	250	170				
19										
20	Целевая функция	0								

Рис. 3.6. Пример окна Excel

Решение

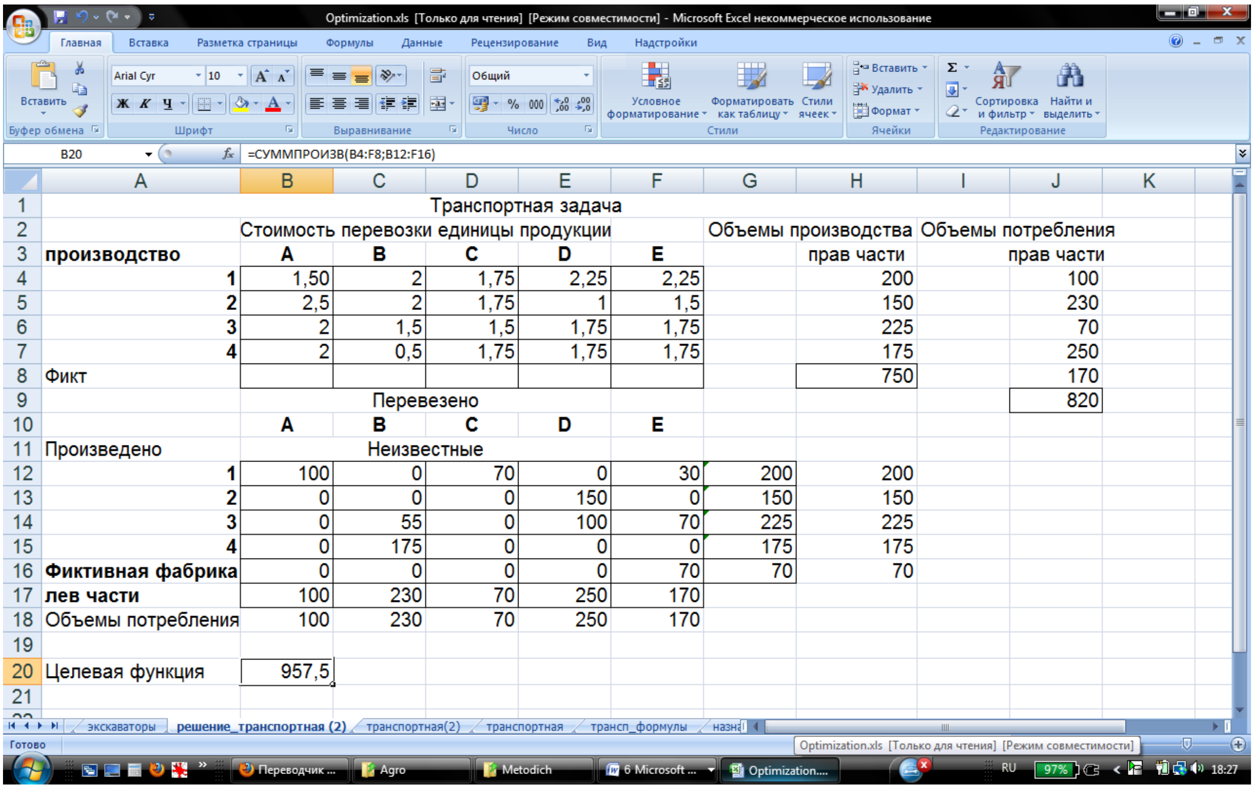


Рис. 3.7. Пример окна Excel

В матрице распределения перевозок продукции получено, что в пункт назначения **Е** доставляется продукция с первой фабрики, третьей фабрики и с фиктивной фабрики. Это означает, данный пункт назначения недополучит продукцию в виде 70 единиц, которая «доставляется» с фиктивной фабрики. Этот важный аспект надо обязательно учитывать в формулировке решения задачи.

Матрица перевозок будет иметь вид (табл. 3.13):

Таблица 3.13

100	0	70	0	30	200
0	0	0	150	0	150
0	55	0	100	70	225
0	175	0	0	0	175

При этом в пункт назначения Е будет доставлено не 170 единиц продукции, а только 100.

Сбалансированная (закрытая) и несбалансированная (открытая) модель транспортной задачи. Приведение несбалансированной задачи к сбалансированной. Фиктивные перевозки.

Транспортная задача является задачей наиболее рационального прикрепления пунктов назначения к пунктам отправления, чтобы транспортные издержки были минимальными.

В общей постановке она выглядит следующим образом.

Имеется m пунктов отправления с запасами a_i единиц груза в каждом. Имеется n пунктов назначения с потребностями в грузах b_j. Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij}.

Матрица $(c_{ij})_{mxn}$ называется ***матрицей тарифов*** (транспортных расходов).

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{mxn}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Матрица X называется еще ***матрицей перевозок***. Чаще всего матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну двойную матрицу (табл. 3.14).

Таблица 3.14

Пункты назначения Пункты отправления	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	Запасы груза
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	$c_{m1}x_{m1}$	$c_{m2}x_{m2}$	…	$c_{mj}x_{mj}$	…	$c_{mn}x_{mn}$	a_m
Потребности в грузе	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Стоимость перевозок z можно записать в виде двойной суммы

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Это и будет функционалом задачи, для которого надо отыскать минимум.

На искомые перевозки x_{ij} по смыслу задачи необходимо наложить следующие условия:

1) условия вывоза всех грузов из пунктов отправления (m уравнений):

$$\left.\begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=a_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}=a_i\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=a_m
\end{array}\right\}$$

2) условия доставки потребителям необходимого количества грузов (n уравнений):

$$\left.\begin{array}{l}
x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}=b_1\\
x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}=b_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}=b_j\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots+x_{mn}=b_n
\end{array}\right\}$$

3) условия неотрицательности переменных, исключающие обратные перевозки:

$x_{ij} \geq 0, i = 1,2\ldots m, j=1,2\ldots n$

Эти условия образуют систему ограничений. Любой план, компоненты которого удовлетворяют этой системе, будет допустимым.

Равенство запасов потребностям есть необходимое и достаточное условие совместности и, следовательно, разрешимости транспортной задачи.

Транспортная задача, в которой выполнено указанное условие, называется ***сбалансированной (закрытой)***.

Однако может случиться, что в рассматриваемых пунктах запасы не равны потребностям: или $\sum a_i > \sum b_j$, т. е. запасы превосходят потребности, или же $\sum a_i < \sum b_j$. — запасы не обеспечивают потребностей.

Такая модель задачи называется ***несбалансированной*** (***открытой)***. Для нее тоже можно отыскать план с минимумом транспортных расходов, но не будут удовлетворены потребности или не будет вывезен весь груз, так как нельзя подобрать такую систему чисел, которая при суммировании по строкам давала бы один результат, а при суммировании по столбцам — другой.

Для решения задачи поступаем следующим образом.

Первый случай. $\sum a_i > \sum b_j$. В математическую модель транспортной задачи введем фиктивный (n + 1)-й пункт назначения. Для этого в матрице задачи предусмотрим один столбец (табл. 3.15), для которого потребность будет равна излишку груза: $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$

Таблица 3.15

Пункты назначения Пункты отправления	B_1	B_2	…	B_n	B_{n+1}	Запасы груза
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_m
Потребности в грузе	b_1	b_2	…	bn	b_{n+1}	$\sum a_i = \sum b_j$

Все тарифы на доставку груза в этот пункт будем считать равными нулю. Получим новую задачу, причем для старой и новой задачи функционал будет один и тот же, так как цены на дополнительные перевозки равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Фиктивный потребитель обеспечивает совместность системы ограничений, не внося искажений в решение.

Второй случай. Если запасов не хватает для удовлетворения потребностей, т. е. $\sum a_i < \sum b_j$, то вводим фиктивный (m+1)-й пункт отправления, которому приписываем запас груза, равный

$$a_{m+1}=\sum b_j - \sum a_i$$

тарифы на доставку грузов из этого фиктивного склада опять, полагаем нулевыми. В матрице добавится одна строка (табл. 3.16)

Таблица 3.16

Пункты назначения Пункты отправления	B_1	B_2	…	B_n	Запасы груза
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
A_{m+1}	0 $x_{m+1,1}$	0 $x_{m+1,2}$	…	0 $x_{m+1,n}$	a_{m+1}
Потребности в грузе	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

на функционале это не отразится, а система ограничений задачи станет совместной, т. е. станет возможным отыскание оптимального плана на минимум стоимости перевозок.

Транспортная задача имеет такую специфику.

1. Ограничения заданы уравнениями (всего $m+n$ уравнений).

2. Каждое неизвестное плана входит только в два уравнения. Неизвестное x_{ij} входит в уравнение с правой частью a_i и в уравнение с правой частью b_j.

3. Коэффициентами в уравнениях являются единицы.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте транспортную задачу.
2. Какова математическая модель транспортной задачи?
3. В чем состоят открытая и закрытая транспортные задачи?
4. Как ищется первоначальное решение транспортной задачи?
5. В чем состоит сущность метода потенциалов?
6. Каковы правила построение циклов транспортной задачи?

7. В чем состоит метод Гомори решения задачи целочисленного программирования?

Тема 2. Задачи назначения

Области применения задач о назначениях. Задача о назначениях как частный случай транспортной задачи. Особенность учета ресурсов в задачах на назначения. Построение математической модели задачи. Неизвестные задачи, целевая функция, ограничения задачи. Разбор примера задачи о назначениях

Области применения задач о назначениях

Задача о назначениях - одна из фундаментальных задач комбинаторной оптимизации в области математической оптимизации или исследовании операций. Задача состоит в поиске минимальной суммы дуг во взвешенном двудольном графе.

В наиболее общей форме задача формулируется следующим образом:

Имеется некоторое число *работ* и некоторое число *исполнителей*. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

Если число работ и исполнителей совпадает, то задача называется *линейной задачей о назначениях*. Обычно, если говорят о *задаче о назначениях* без дополнительных условий, имеют в виду *линейную задачу о назначениях*

Предположим, что таксомоторная компания имеет три свободные машины (исполнители), и три заказчика (работы), желающих получить такси как можно быстрее. Фирма заботится о времени доставки такси к заказчику, так что для каждой машины *стоимость* определяется временем, с какой машина доберётся до места ожидания, определённого заказчиком. Решением задачи о назначениях будет распределение машин по заказчикам такое, что суммарная стоимость (суммарное время ожидания) минимальна.

Задачу о назначениях можно сделать более гибкой. В вышеприведенном примере могут оказаться не три, а четыре свободных такси, но заказчика по-прежнему три. Можно назначить четвёртого фиктивного заказчика с нулевой стоимостью, распределение же машины на фиктивного заказчика означает — «ничего не делай».

Аналогичный приём можно использовать в случае, когда число заказов может превышать число доступных машин, и машина может быть назначена на выполнение нескольких работ, а также когда работа может быть назначена нескольким исполнителям (например, если заказчик — группа, не помещающаяся в одно такси). Можно также поставить задачу увеличения дохода, а не минимизацию цены.

Задача о назначениях как частный случай транспортной задачи

Построение математической модели задачи.

В общем виде задача о назначениях формулируется следующим образом.

Имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Затраты i-го кандидата на выполнение j-й работы равны c_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$. Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при
котором суммарные затраты на выполнение работ минимальны.

Запишем формально данную задачу. Пусть x_{ij} – переменная, значение которой равно 1, если i-й кандидат выполняет j-ю работу, и 0 – в противном случае. Тогда условие о том, что каждый кандидат выполняет только одну работу, запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

Условие о том, что каждая работа может выполняться одним кандидатом, запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}$$

Целевая функция задачи имеет вид

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

В функцию входят только те значения c_{ij} $(i = \overline{1, n}\ ;\ j = \overline{1, n})$, для которых x_{ij} отличны от 0, т.е. входят затраты, соответствующие назначенным работам.

Математическая модель выглядит следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (3.9)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (3.10), (3.11), (3.15)$$

Решить задачу о назначениях – значит найти x_{ij}, удовлетворяющие (3.10) – (3.15) и доставляющие минимум функции (3.9). Задача (3.9) – (3.15) является, очевидно, задачей линейного программирования (целевая функция линейна, ограничения линейны) и может быть решена симплекс-методом. Также задача (3.9) – (3.15) – это транспортная задача, в которой правые части ограничений равны 1, а переменные могут принимать только два значения. Однако относительно простая форма задачи позволила разработать для ее решения достаточно простые методы, один из которых – венгерский.

Мастер должен расставить трех рабочих для выполнения трех операций. Причем, каждый рабочий должен выполнять только одну операцию, и каждая операция должна выполняться только одним рабочим. Известно сколько минут в среднем тратит каждый из рабочих на выполнение каждой операции. Данные представлены в табл. 3.17.

Таблица 3.17

Работники	***Работы***		
	1	***2***	***3***
1	*10*	*12*	*14*
2	*11*	*13*	*14*
3	*10*	*9*	*12*

Как распределить рабочих по операциям, чтобы минимизировать суммарные затраты рабочего времени?

Решение

I этап: Составление математической модели

Элементы модели

1. ***Переменные (неизвестные) задачи***

Так как в задании требуется распределить рабочих по операциям, то введем переменные x_{ij}, которые будут принимать только два значении:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, i \text{ работник не назначен на } j \text{ операцию}, \\ 1, i \text{ работник назначен на } j \text{ операцию}, \end{cases}$$

i=1,2,3, j = 1, 2, 3.

В итоге мы имеем 9 неизвестных.

2. ***Целевая функция V***

Цель задачи – минимизировать суммарные затраты рабочего времени. Т.к. время выполнения каждым рабочим каждой операции известно, то можно составить целевую функцию.

V будет иметь вид:

$V=10*x_{11}+12*x_{12}+14*x13+$

$+11*x_{21}+13*x_{22}+14*x_{23}+$

$+10*x_{31}+9*x_{32}+12*x_{33}$ (мин.)

3. ***Ограничения***

Так каждый рабочий должен выполнять только одну операцию и каждая операция должна выполняться только одним рабочим, то на неизвестные x_{ij} накладывается ряд ограничений:

Каждый рабочий выполняет только одну операцию

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1,$ *(22)*

$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1,$ *(23)*

$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1,$ *(24)*

Каждая операция выполняется только одни рабочим

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$, *(25)*

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$, *(26)*

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$, *(27)*

x_i *–двоичные (28)*

Примечание:

Ограничение 7 представляют собой следующие условие:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, i \text{ работник не назначен на } j \text{ операцию,} \\ 1, i \text{ работник назначен на } j \text{ операцию.} \end{cases}$$

<table>
<tr><td colspan="2">Неизвестные</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_{ij} = \begin{cases} 0, i \text{ работник не назначен на } j \text{ операцию,} \\ 1, i \text{ работник назначен на } j \text{ операцию,} \end{cases}$
i=1,2,3,j= 1,2,3,.</td></tr>
<tr><td>Целевая функция</td><td>Ограничения</td></tr>
<tr><td>$V=10*x_{11}+12*x_{12}+14*x_{13}+$
$+11*x_{21}+13*x_{22}+14*x_{23}+$
$+10*x_{31}+9*x_{32}+12*x_{33}$ (мин.)</td><td>$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$,
$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$,
$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$,
$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$,
$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$,
$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$,
x_i –двоичные</td></tr>
</table>

Численное решение задачи в MSExcel, аналогично решению транспортной задачи.

В венгерском методе решения задачи о назначениях используется следующий принцип: оптимальность решения задачи о назначениях не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину.

Решение считается оптимальным, если все измененные таким образом затраты $c_{ij}^{*} \geq 0$, ($i = 1, m;\ j = 1, n$) и можно отыскать такой набор x_{ij}, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{*} x_{ij} = 0$.

Шаг 1. Получение нулей в каждой строке

Выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем его значение в правом столбце. Вычтем минимальные элементы из соответствующих строк. Переход к шагу 2.

Шаг 2. Получение нулей в каждом столбце.

В преобразованной таблице найдем минимальные значения в каждом столбце (графе) и запишем их в нижней строке. Вычтем минимальные элементы из соответствующих столбцов. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Поиск оптимального решения

Сделаем назначения. Для этого просматривают строку, содержащую наименьшее число нулей. Отмечают один из нулей этой строки и зачеркивают все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится отмеченный нуль. Аналогичные операции последовательно проводят для всех строк. Если назначение, которое получено при всех отмеченных нулях, является полным (число отмеченных нулей равно *n*), то решение является оптимальным. В противном случае переходят к шагу 4.

Шаг 4. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули.

Для этого необходимо отметить:

1. Все строки, в которых не имеется ни одного отмеченного нуля;
2. Все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных строк;
3. Все строки, содержащие отмеченные нули хотя бы в одном из отмеченных столбцов.

Действия 2) и 3) повторяются поочередно до тех пор, пока есть что отмечать. После этого необходимо зачеркнуть каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец.

Цель этого шага – провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих, по крайней мере, один раз все нули.

Шаг 5. Перестановка некоторых нулей.

Взять наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые. Вычесть его из каждого числа, стоящего в невычеркнутых столбцах и прибавить к каждому числу, стоящему в вычеркнутых строках. Эта операция не изменяет оптимального решения, после чего весь цикл расчета повторить, начиная с шага 3.

ПРИМЕР

Научный руководитель, *i*	Время выполнения *i*-м научным руководителем *j*-го исследовательского проекта			
	1	2	3	4
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

В венгерском методе используется следующий принцип: оптимальность решения задачи о назначениях не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину.

Решение считается оптимальным, если все измененные таким образом затраты $c_{ij}^* \geq 0$, $(i = 1, m;\ j = 1, n)$ и можно отыскать такой набор x_{ij}, что $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* x_{ij} = 0$.

Выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем его значение в правом столбце.

Научный руководитель, *i*	Время выполнения *i*-м научным руководителем *j*-го исследовательского проекта				Минимальное время по строке
	1	2	3	4	
1	3	7	5	8	3
2	2	4	4	5	2
3	4	7	2	8	2
4	9	7	3	8	3

Вычтем минимальные элементы из соответствующих строк, перейдем к новой таблице, в которой найдем минимальные значения в каждом столбце (графе) и запишем их в нижней строке.

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	4	2	5
2	0	2	2	3
3	2	5	0	6
4	6	4	0	5
Минимальное время по графе	0	2	0	3

Вычтем минимальные элементы из соответствующих столбцов.

Сделаем назначения

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Число отмеченных (желтым цветом) нулей равно 3, т.е. назначение не является полным (3<4).

Найдем минимальный набор строк и столбцов, содержащий все нули.

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Научный руководи-тель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

В оставшихся клетках минимальный элемент равен 2.

Научный руководи-тель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Вычтем минимальный элемент равный 2 из каждого числа (каждой клетки) невычеркнутых (1,2,4) столбцов. Получим таблицу

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	-2	0	2	0
2	-2	-2	2	-2
3	0	1	0	1
4	4	0	0	0

Прибавим минимальный элемент равный 2 к каждому числу вычеркнутых строк в преобразованной таблице. Получим таблицу

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	0	0	4	0
3	0	1	0	1
4	4	0	0	0

Вновь сделаем назначение, отметив по порядку нули в таблице

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	0	0	4	0
3	0	1	0	1
4	4	0	0	0

Это назначение является полным, так как число отмеченных (желтым цветом) нулей равно 4.

Время выполнения всех (четырех) проектов:

T=3x1+4x1+2x1+8x1=17.

Данное назначение не единственное. Если во второй строке сначала отметить не второй, а четвертый нуль, получим следующее назначение.

Научный руководитель, i	a_{ij}			
	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	0	0	4	0
3	0	1	0	1
4	4	0	0	0

Время на выполнение всех проектов не изменилось:

T=3x1+5x1+2x1+7x1=17.

Таким образом, получены два оптимальных назначения, которым соответствует минимальное время выполнения проектов равное 17 месяцам.

Неизвестные задачи, целевая функция, ограничения задачи. Разбор примера задачи о назначениях.

Задача о назначениях является типичным примером оптимального принятия управленческих решений. Эта задача позволяет распределить объекты из некоторого множества по группе субъектов из другого множества и это распределение должно соответствовать оптимальности одного или нескольких итоговых показателей.

Постановка задачи. Пусть на предприятии имеется 4 разных грузовых автомобиля. Необходимо доставить разный товар в 4 разных района области. Общие затраты на перевозку каждого вида товара каждым автомобилем известны. Требуется так выбрать для каждого вида товара автомобиль так, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Исходные данные представлены на рис. 3.8.

	A	B	C	D	E
1	Автомобили	Груз			
2		1	2	3	4
3	1	25	29	27	23
4	2	31	33	29	27
5	3	34	36	31	30
6	4	28	26	29	31
7					

Рис. 3.8 Исходные данные

Математическая модель задачи о назначениях имеет следующий вид.

1. Переменные x_{ij} принимают два значения:

$$\begin{cases} x_{ij} = 0, \text{если перевозка автомобилем } i \text{ груза } j \text{ не осуществляется} \\ x_{ij} = 1, \text{если перевозка автомобилем } i \text{ груза } j \text{ осуществляется} \\ i = 1, m, \quad j = 1, n \end{cases}$$

(1)

2. Все переменные задачи – неотрицательные значения и целые числа:

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1, m, \quad j = 1, n$ (2)

x_{ij}-целые

Также, так как каждый автомобиль может выполнять доставку только одного груза и весь груз должен быть доставлен, переменные должны отвечать следующим ограничениям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, m$$

(3.16)

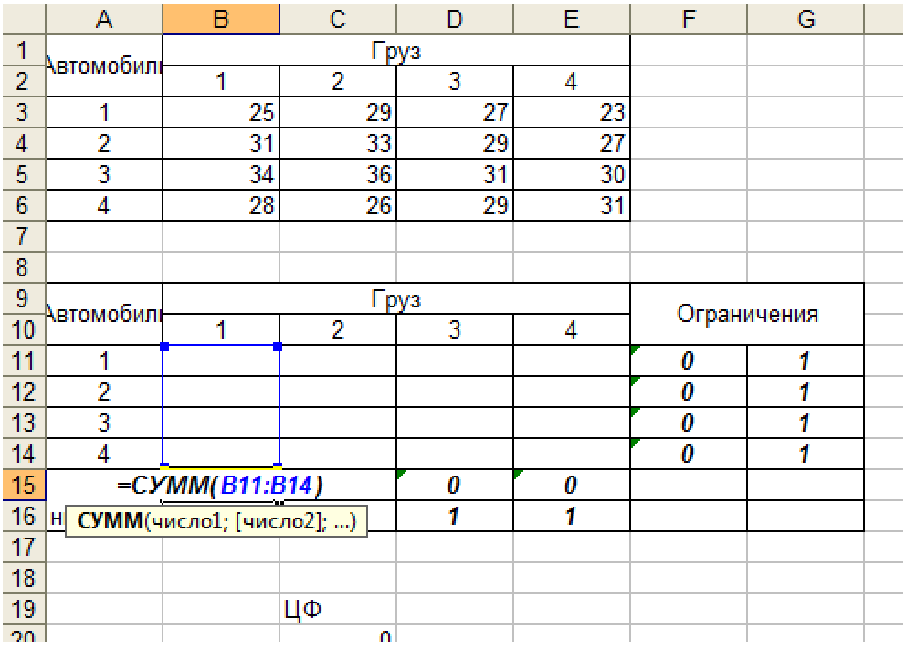
Это условие означает, что выбор вариантов доставки должен быть таким, чтобы в таблице, представляющей решение задачи, было по одной единице в каждой строке и в каждом столбце. Остальные элементы должны равняться нулю.

3. Целевая функция, направленная на минимум суммарных затрат:

$Z=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} * x_{ij} \to min$ (3.17)

Рассмотрим решение данной задачи.

На рис. 3.9 показано поле для решения задачи о назначениях.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Автомобили	Груз					
2		1	2	3	4		
3	1	25	29	27	23		
4	2	31	33	29	27		
5	3	34	36	31	30		
6	4	28	26	29	31		
7							
8							
9	Автомобили	Груз				Ограничения	
10		1	2	3	4		
11	1					*0*	*1*
12	2					*0*	*1*
13	3					*0*	*1*
14	4					*0*	*1*
15		=СУММ(B11:B14)		*0*	*0*		
16	н	СУММ(число1; [число2]; ...)		*1*	*1*		
17							
18							
19			ЦФ				
20			0				

Рис.3.9 Окно Excel при решении задачи

В ячейки B15, C15, D15, E15 заносится сумма x по каждому соответствующему столбцу. В строки F11, F12, F13, F14 – сумма x_{ij} по каждой строке. Каждая из сумм приравнивается к единице (то есть - может быть выбрана только одна ячейка в строке и в столбце).

Целевая функция рассчитывается как сумма произведений $c_{ij}x_{ij}$ (рис. 3.10)

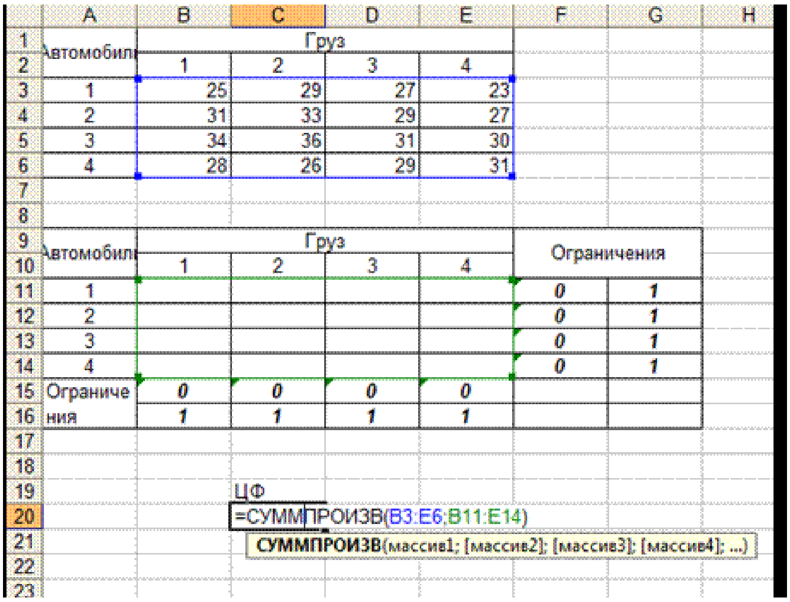


рис.3.10 Пример окна Excel

«Поиск решения» производится следующим образом (рис. 3.11)

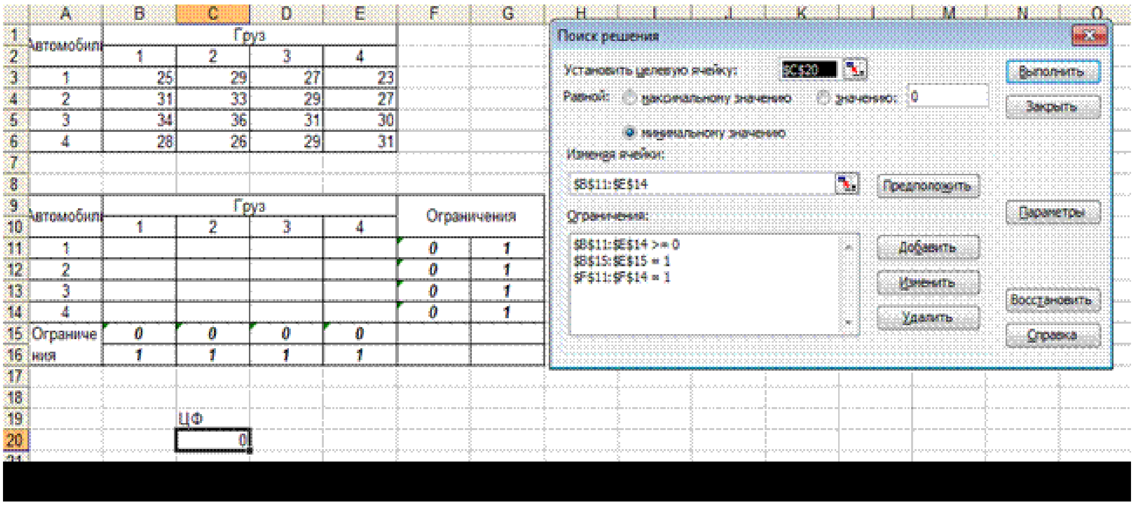


Рис. 3.11Окно «Поиск решения»

В меню «Параметры» «Поиска решения» необходимо установить «Линейная модель». Результаты расчетов приведены на рис. 3.12.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Автомобил		Груз				
2		1	2	3	4		
3	1	25	29	27	23		
4	2	31	33	29	27		
5	3	34	36	31	30		
6	4	28	26	29	31		
7							
8							
9	Автомобил		Груз			Ограничения	
10		1	2	3	4		
11	1	1	0	0	0	*1*	*1*
12	2	0	0	0	1	*1*	*1*
13	3	0	0	1	0	*1*	*1*
14	4	0	1	0	0	*1*	*1*
15	Ограниче	*1*	*1*	*1*	*1*		
16	ния	*1*	*1*	*1*	*1*		
17							
18							
19			ЦФ				
20			109				
21							

Рис. 3.12 Результаты расчетов

Применение распределительного метода к задаче коммивояжера

Задача коммивояжера – задача нахождения замкнутого маршрута минимальной длины, по которому коммивояжер (бродячий торговец) может объехать n населенных пунктов, расстояния между которыми заданы матрицей $C = (c_{ij})$, $c_{ii} = \infty$. Предполагается, что каждый из n пунктов он посещает только один раз.

Математическая модель задачи коммивояжера [2] также имеет вид (1, 2), но есть дополнительное условие, состоящее в односвязности плана X. Поэтому, если под циклами пересчета понимать такие циклы пересчета (3, 4), которые переводят односвязный план X в односвязный план X*, то распределительный метод данного пункта можно применять к задаче коммивояжера.

Пример. Решить задачу коммивояжера, применяя распределительный метод:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & 3 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & \infty & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & \infty & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение. Составляем первоначальный план:

$$\begin{pmatrix} \infty & (3) & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & (3) & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & (3) & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & \infty & (9) & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & \infty & (4) \\ (4) & 5 & 8 & 7 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Перебирая 4-циклы, приходим к соотношению 3+9>3+8, то есть план можно улучшить, но пересчет по циклу $c_{23}-c_{25}-c_{45}-c_{43}-c_{23}$ приводит к распадающемуся маршруту 1→2→5 →6→1, 3→4→3. Поэтому этот цикл из рассмотрения исключаем. По этой же причине исключаем из рассмотрения цикл $c_{41}-c_{45}-c_{65}-c_{61}-c_{41}$, несмотря на то, что 4+9>2+8. В результате приходим к тому, что с помощью 4-циклов пересчета улучшить первоначальный план нельзя, переходим к 6-циклам.

Наибольшее положительное значение разность $\max(c_{ik}^1, c_{rj}^1) - c_{ij}$ принимает для стоимостей $c_{35} = c_{65} = 2$. Составляем 6-цикл, содержащий, например, c_{35}:

$c_{35}-c_{45}-c_{43}-c_{23}-c_{24}-c_{34}-c_{35}$

Так как 3+3+9>7+2+3 и пересчет по циклу приводит к односвязному маршруту, то переходим к новому улучшенному плану:

$$\begin{pmatrix} \infty & (3) & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & 3 & (7) & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & 3 & (2) & 1 \\ 8 & 6 & (3) & \infty & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & \infty & (4) \\ (4) & 5 & 8 & 7 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Рассматривая цикл

$c_{36}-c_{56}-c_{51}-c_{61}-c_{65}-c_{35}-c_{36}$,

получаем 2+4+4>1+2+3, причем пересчет по циклу приводит к односвязному маршруту. Поэтому переходим к новому улучшенному плану:

$$\begin{pmatrix} \infty & (3) & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & 3 & (7) & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & 3 & 2 & (1) \\ 8 & 6 & (3) & \infty & 9 & 8 \\ (3) & 7 & 4 & 6 & \infty & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & (2) & \infty \end{pmatrix}$$

Выписываем оценки строк и столбцов:

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \infty & (3) & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & 3 & (7) & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & 3 & 2 & (1) \\ 8 & 6 & (3) & \infty & 9 & 8 \\ (3) & 7 & 4 & 6 & \infty & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & (2) & \infty \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

Из оценок столбцов следует, что цикл пересчета, улучшающий план, может находиться или в первых 5 столбцах, или в последних 4 столбцах, но анализ показывает, что таких циклов в наборах этих столбцов нет. Поэтому последний план является оптимальным.

Ответ: 1→2→4 →3→6→5→1, z_{min}=19.

Постановка и решения задачи о назначении

Цель: Научиться составлять модели и решать задачи о назначении. Решение задачи о назначении (Венгерский алгоритм). Проверка решения с помощью Excel.

Решение задачи о назначениях в Excel с использованием настройки Поиск решения

Задача о назначениях является частным видом линейной **оптимизационной задачи**. Наиболее часто **задача о назначениях** представляется следующим образом:

Имеются **n** рабочих и **m** видов работ. Стоимость $\mathbf{c_{ij}}$ выполнения**i**-м рабочим **j**-той работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

Решение задачи о назначениях очень похоже на решение **транспортной задачи**. Особеность лишь в том, что плановые переменные могут принимать только значения 0 или 1 и в каждом столбце и строке может быть только одно ненулевое значение. **Для решения задачи о назначениях в Excel** с использованием настройки **Поиск решения** следует выделить ячейки назначений и подсчитать для них суммы по столбцам и по строкам. В ячейку целевой функции следует ввести формулу вычисляющую сумму произведений стоимости работы на план назначений.

После чего следует выбрать в **Excel** пункт меню *Данные/Поиск решения*, в окне *Поиск решения* выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения. Как правила используются ограничения следующего вида:

1. Неотрицательность значений изменяемых ячеек;
2. Суммы значений изменяемых ячеек для каждой строки и столбца должны быть равны 1;
3. Иногда бывает необходимо задать целочисленные ограничения на изменяемые ячейки.

Далее следует нажать кнопку *Выполнить*, после чего будет получено решение **задачи о назначениях**.

Довольно часто **задача о назначениях** бывает представлена в так называемом несбалансированном виде (*количество работ не равно количеству работников*). В этом случае для приведения **задачи о назначениях** к сбалансированному виду следует добавить в таблицу одну или несколько фиктивных работ или работников.

Задание 1.Решение задачи о назначениях.

Имеются n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-той работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены (рис. 3.13), каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

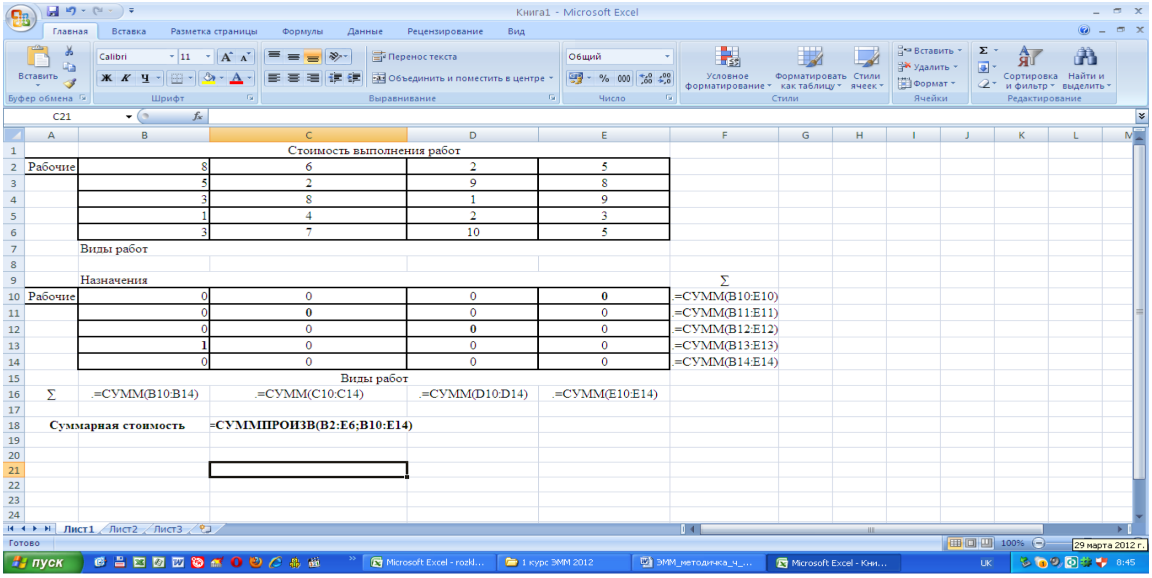


Рис. 3.13 Пример окна Excel

В результате должен получится следующее (рис.3.14):

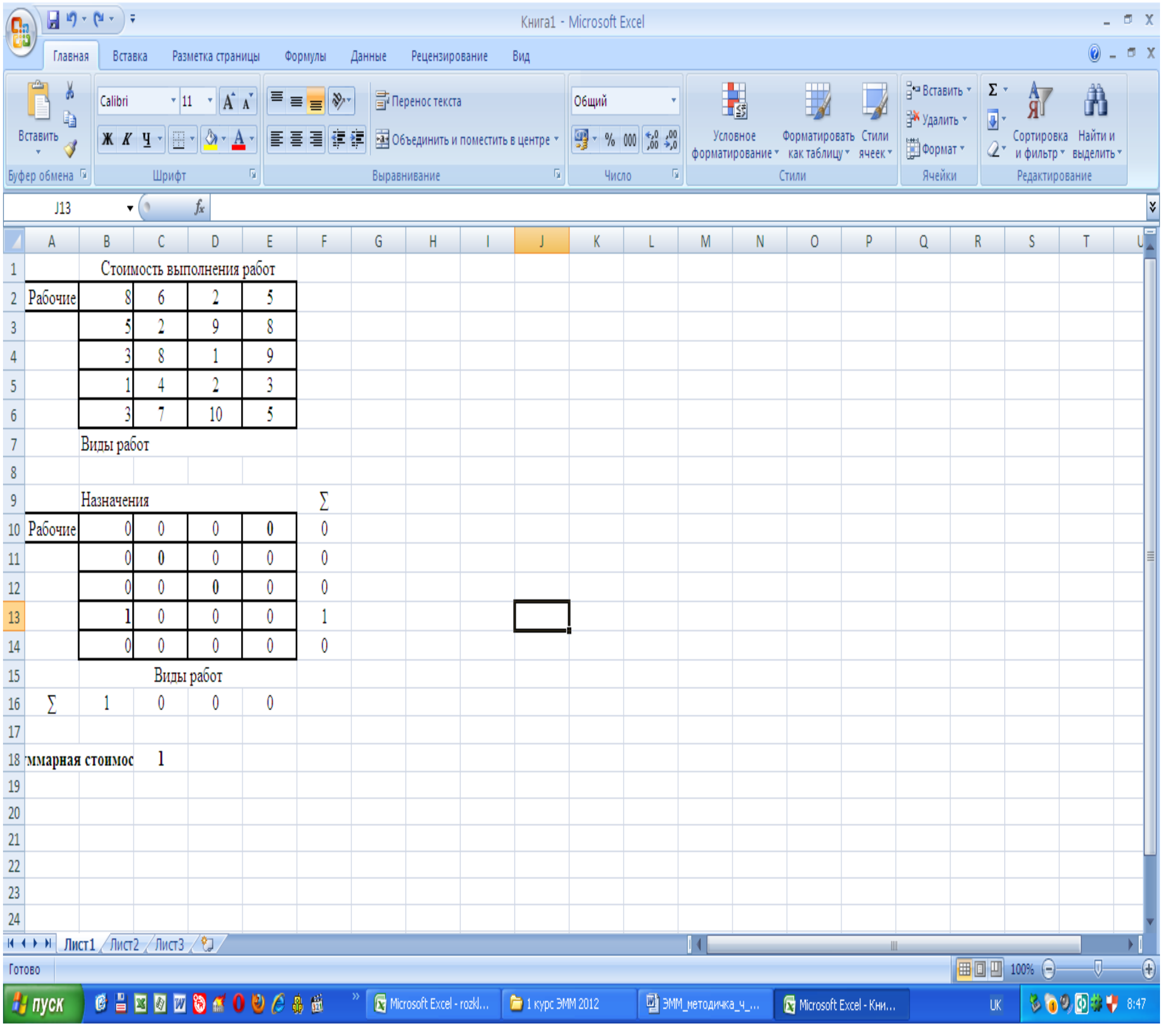


Рис.3.14 Пример окна Excel

Математическая модель задачи

Переменными $x_{i,j}$ обозначим назначение с i-го рабочего на j-ую пункт работу. $x_{i,j}$ может принимать значения 1 (назначен) и 0 (не назначен). $c_{i,j}$ – стоимость выполнения i-м рабочим j-той работы. $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$. Так как количество рабочих превышает количество работ, то не всем рабочим будет назначена работа.

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \to min$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 \\ \sum_j x_{ij} \le 1 \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

$$i=\overline{1,n}$$
$$j=\overline{1,m}$$

Решение задачи средствами MS Excel.

В качестве переменных x_{ij} будем использовать диапазон **B10:E14**. Для значения целевой функции будем использовать ячейку **C18** в которую введем формулу =СУММПРОИЗВ(B2:E6;B10:E14). Функция СУММПРОИЗВ перемножает соответствующие элементы заданных массивов и возвращает сумму произведений. Для вычисления ограничений задачи используется функция СУММ. Функция СУММ суммирует все числа в интервале ячеек.

Далее выбираем пункт меню *Данные/Поиск решения.*Открывается диалоговое окно *Поиск решения*. В нём указываем, что нам необходимо установить ячейку **C18** минимальному значению, изменяя ячейки **B10:E14** (рис. 3.15)

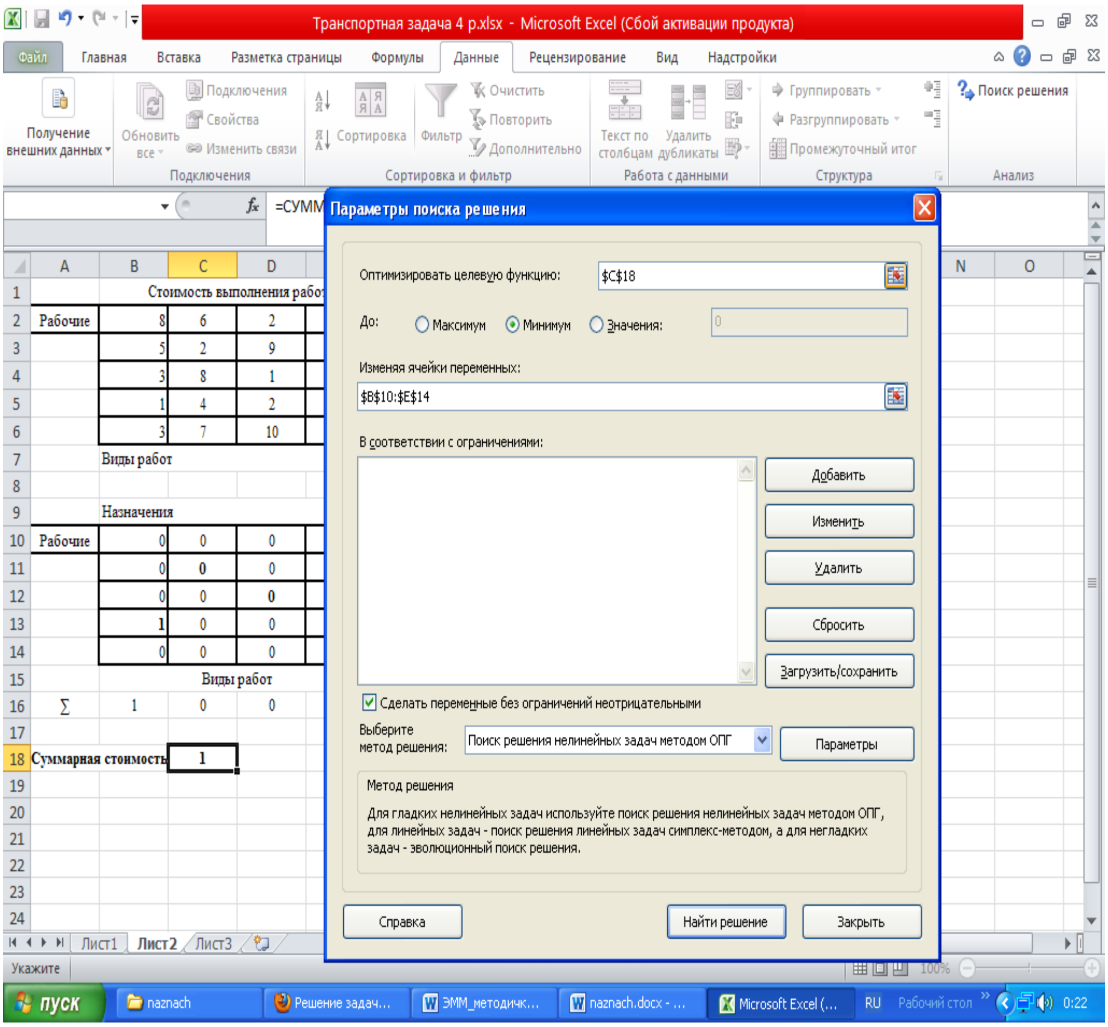
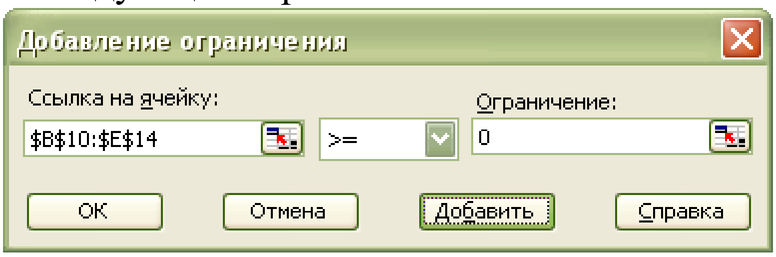
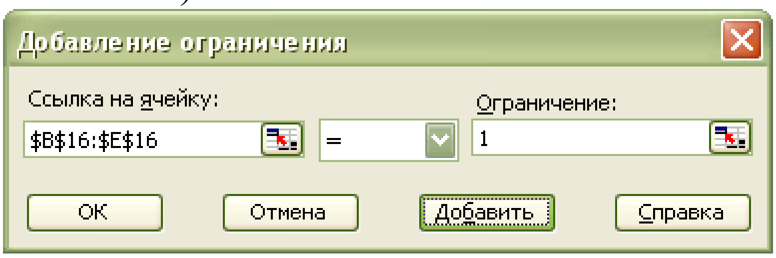


Рис. 3.15 Диалоговое окно Excel

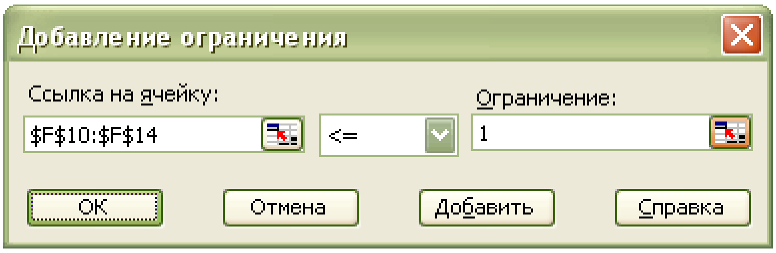
Далее нажимаем кнопку *Добавить* для добавления ограничений. И добавляем следующие ограничения:



(неотрицательность)



(работы)



(работники)

После ввода каждого ограничения нажимаем кнопку *Добавить*. После ввода последнего ограничения нажимаем кнопку *ОК*. И диалоговое окно *Поиск решения* принимает следующий вид (рис. 3.16):

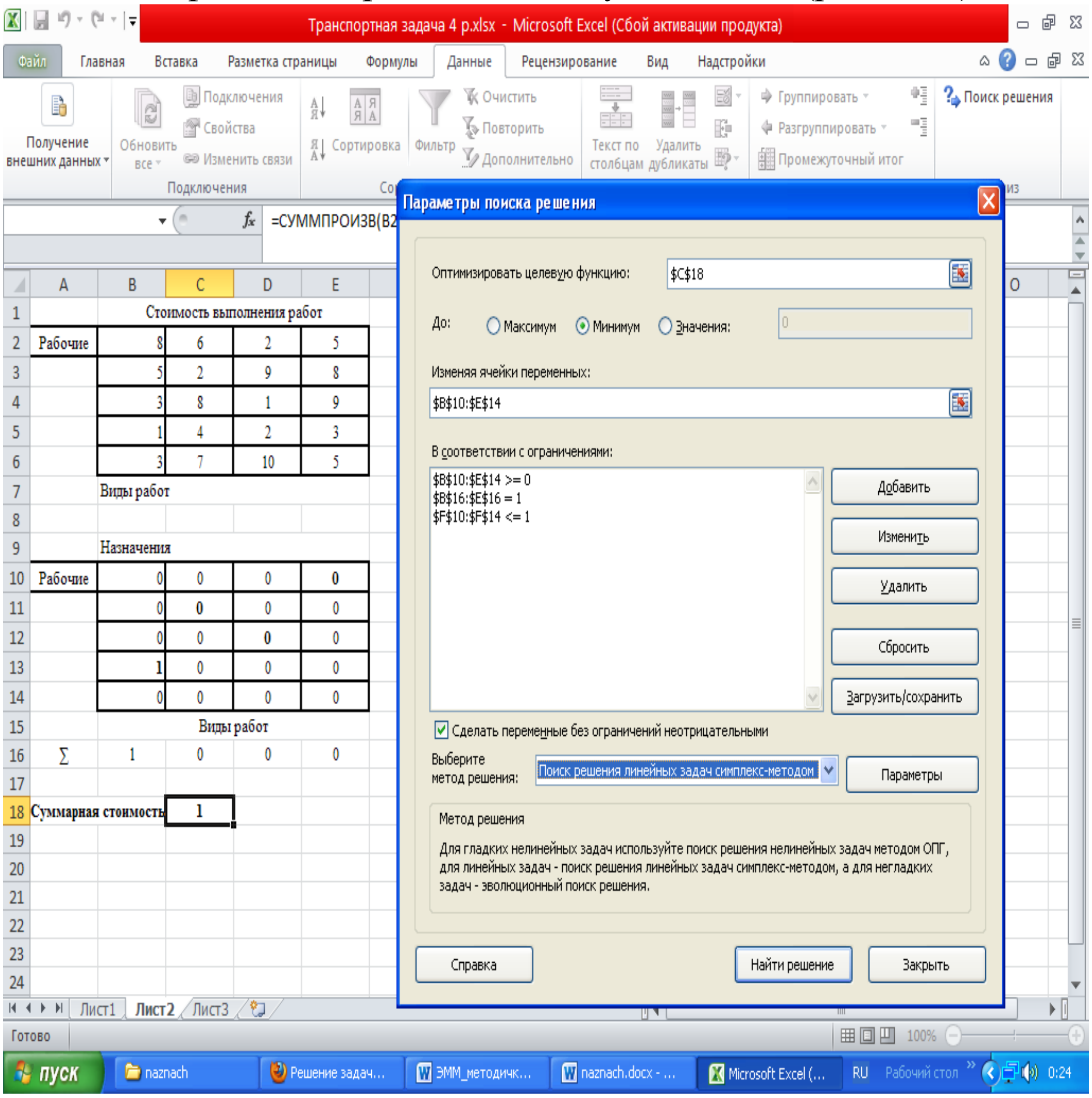


Рис. 3.16 Пример диалогового окна

В параметрах ввести (рис.3.17)

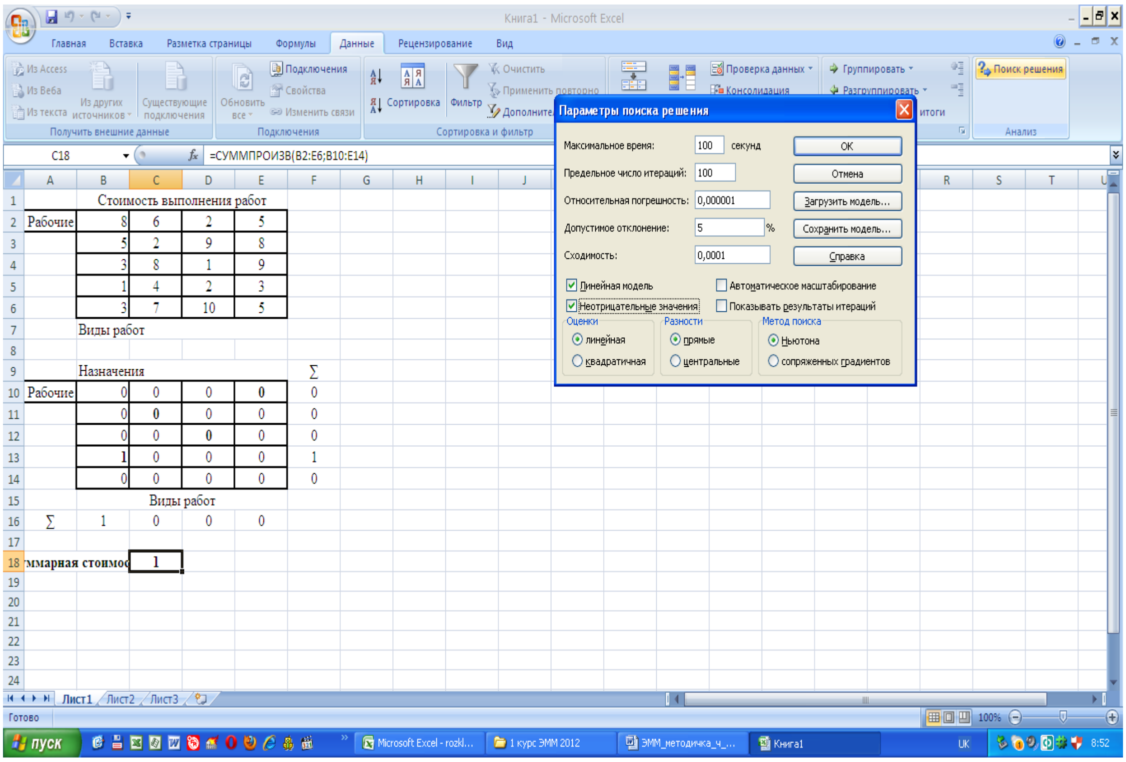


Рис. 3.17 Окно ввода параметров

Нажимаем кнопку *Выполнить*. И перед нами открывается диалоговое окно *Результаты поиска решения*(рис. 3.18).

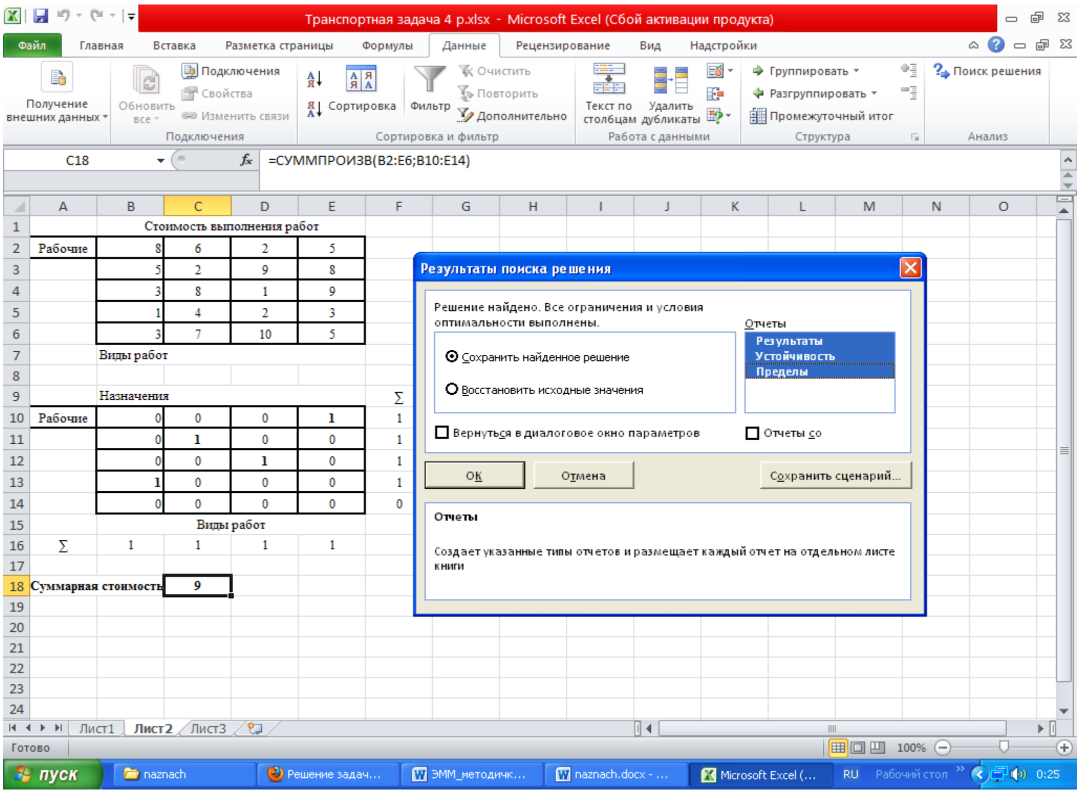


Рис. 3.18 Окно *Результаты поиска решения*

Выбираем создание отчётов всех типов. После нажатия кнопки ОК в рабочей книге появляются новые листы с названиями: «Отчет по результатам 2», «Отчет по устойчивости 2», «Отчет по пределам 2». Получаем следующие результаты (рис.3.19).

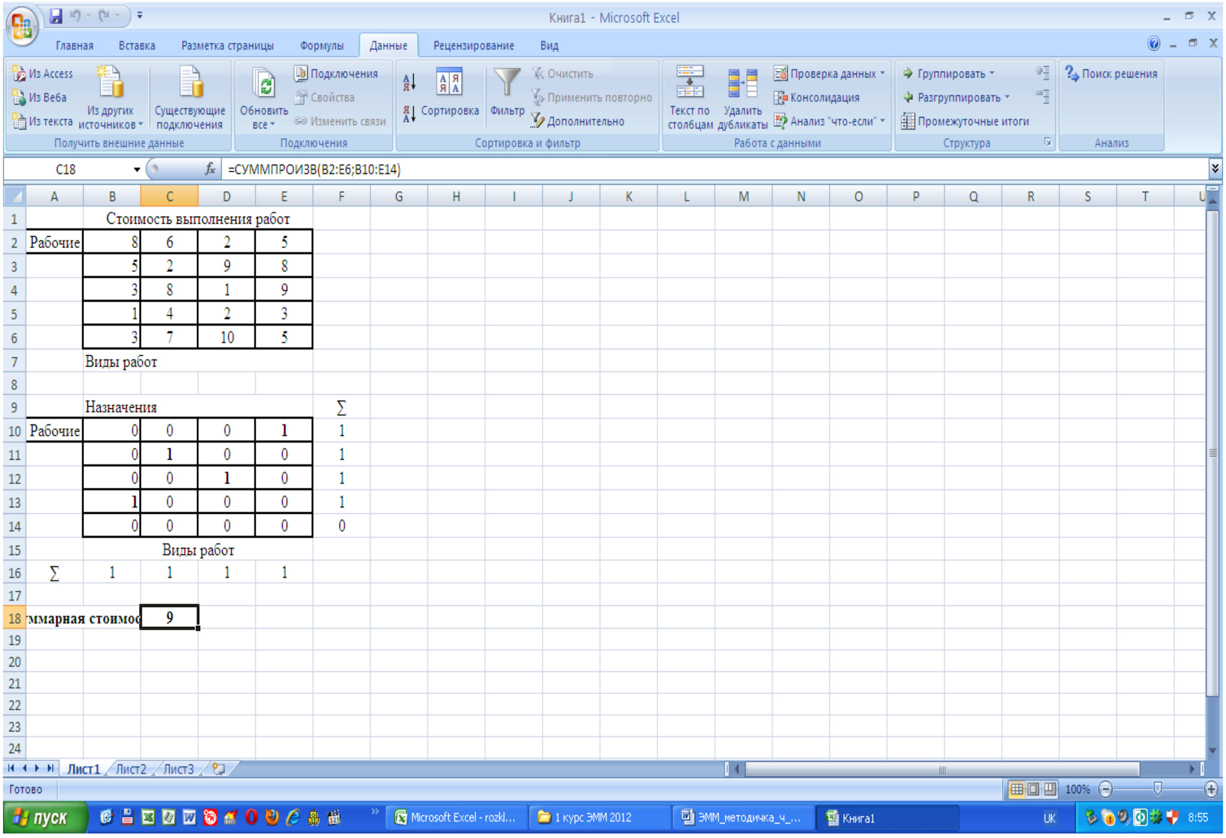


Рис. 3.19 Окно отчетов

Вопросы для самоконтроля

1. Решение каких вопросов связано с распределительными задачами?
2. В чем заключается постановка транспортной задачи?
3. В чем состоит особенность построения математической модели транспортной задачи?
4. Какая задача является открытой (сбалансированной) транспортной задачей?
5. Какая задача является закрытой (несбалансированной) задачей?
6. Каким способом решается несбалансированная транспортная задача?
7. В чем заключается метод северо-западного угла при поиске первоначального решения?

8. В чем заключается метод минимального элемента при поиске первоначального решения?

9. Как устанавливается критерий оптимальности транспортной задачи?

10. В чем состоит метод потенциалов?

11. В чем особенность постановки задач назначения на работы?

12. Какие дополнительные ограничения необходимы в задачах назначения?

13. Как решается несбалансированная задача назначений на работы?

Тема 3. Решение транспортной задачи в пакете MSExcel

Транспортная задача. Алгоритм решения в пакете MSExcel

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции, производимой в нескольких пунктах производства. В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом.

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах производства, необходимо распределить между n пунктами потребления. Стоимость перевозки единицы продукции известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были бы минимальными.

Примем следующие обозначения: i – номер пункта производства, j –номер пункта потребления, a_i – количество продукта, имеющееся в i-ом пункте производства, b_j – количество продукта, необходимое для j-го пункта потребления, c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, x_{ij} – количество груза, планируемого к перевозке из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, i=1,2,…,m; j=1,2,…,n. Математическая модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,\dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,\dots, n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1,\dots, m,\ j = 1,\dots, n.$$

Условия задачи удобно записывать в виде таблицы, которая называется матрицей планирования*:*

$c_{11}\ c_{12} \ldots\ c_{1n}$ . . . $c_{m1}\ c_{m2} \ldots\ c_{mn}$	a_1 … a_m
$b_1 b_2 \ldots b_n$	

Рассмотрим решение транспортной задачи в табличном процессоре MSExcel. Так как транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то эту задачу можно решать так, как описано выше. Однако, благодаря свойствам задачи, ее можно записать в более компактной форме.

Рассмотрим транспортную задачу, матрица планирования которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	25	18	19	23	33
A_2	2	17	16	24	2	25
A_3	29	3	7	15	22	25
A_4	5	20	17	23	10	17
	33	11	11	11	34	b_j / a_i

Для решения транспортной задачи введем данные, как показано на рис.3.20.

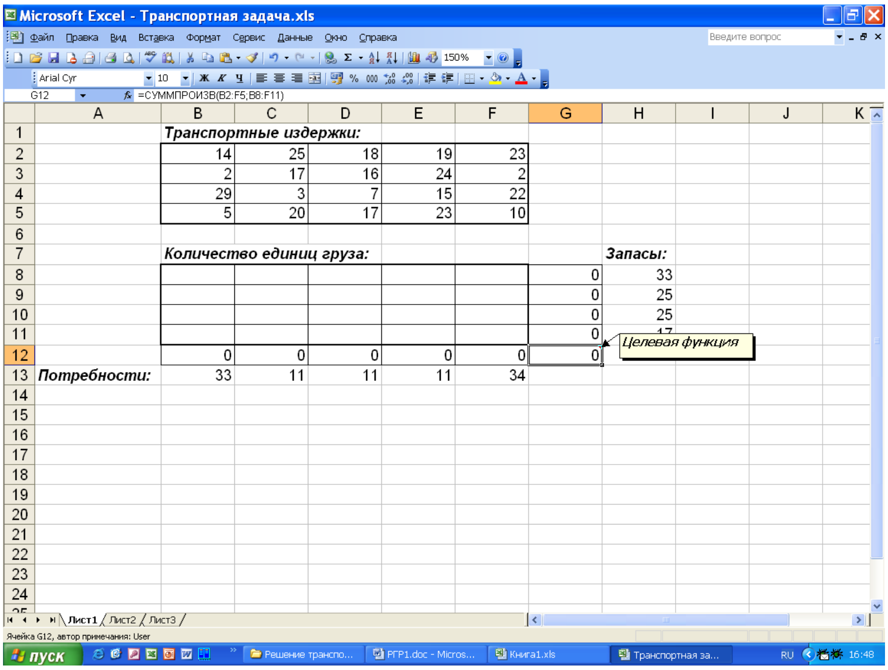


Рис.3.20. Исходные данные транспортной задачи

В ячейки B2 : F5 введем стоимость перевозок. Ячейки B8 : F11 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестные. В ячейки H8 : H11 введены объемы производства, а в ячейки B13 : F13 - потребности (спрос) в продукции в пунктах потребления.

В ячейку G12 вводится целевая функция

= СУММПРОИЗВ (B2 : F5; B8 : F11) .

В ячейки B12 : F12 вводятся формулы

= СУММ (B8 : B11),

= СУММ (C8 : C11),

= СУММ (D8 : D11),

= СУММ (E8 : E11),

= СУММ (F8 : F11),

определяющие объем продукции, ввозимой в пункты потребления. В ячейки

G8 : G11 введены формулы

= СУММ (B8 : F8),

= СУММ (B9 : F9),

= СУММ (B10 : F10),

= СУММ (B11 : F11),

характеризующие объем продукции, вывозимой из пунктов производства.

Далее выбираем команду **Сервис, Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как показано на рис.3.21.

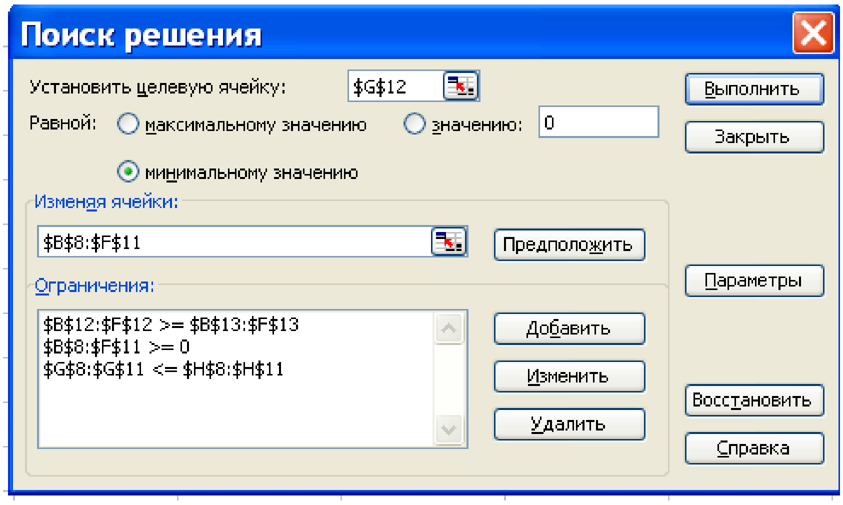


Рис.3.21. Диалоговое окно **Поиск решения** для транспортной задачи.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** установить флажок **Линейная модель** (рис.3.22).

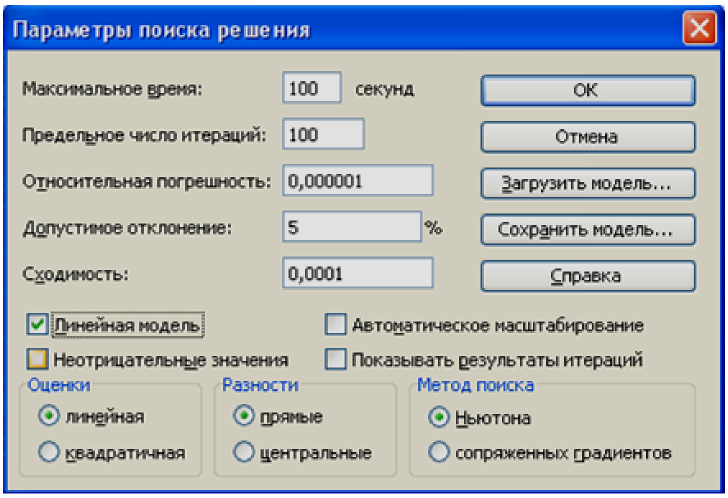
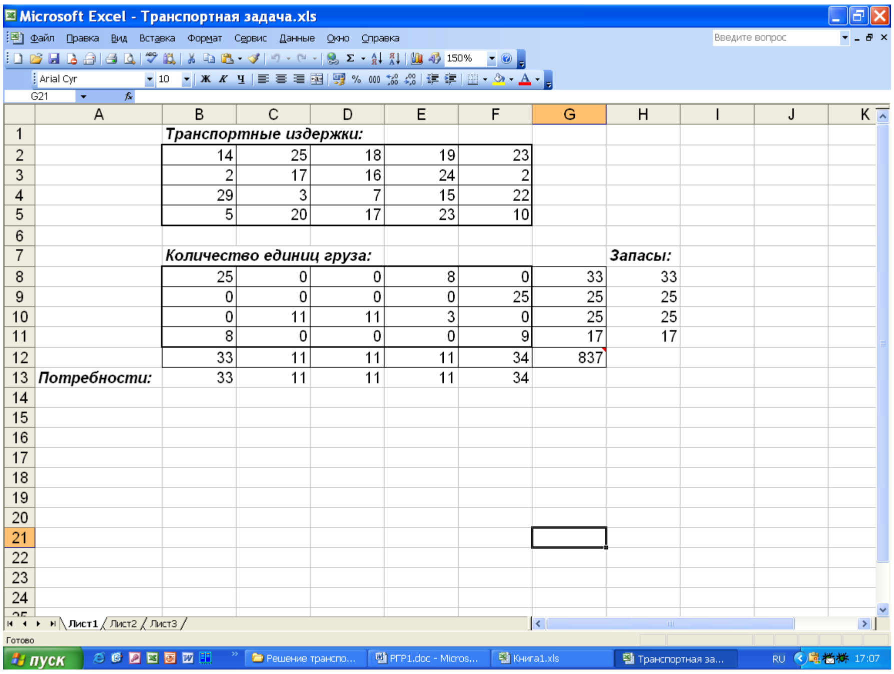


Рис.3.22. Диалоговое окно **Параметры поиска решений**

После нажатия кнопки **Выполнить** получаем оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рис. 3.23).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		*Транспортные издержки:*						
2		14	25	18	19	23		
3		2	17	16	24	2		
4		29	3	7	15	22		
5		5	20	17	23	10		
6								
7		*Количество единиц груза:*						*Запасы:*
8		25	0	0	8	0	33	33
9		0	0	0	0	25	25	25
10		0	11	11	3	0	25	25
11		8	0	0	0	9	17	17
12		33	11	11	11	34	837	
13	*Потребности:*	33	11	11	11	34		

Рис.3.23 Оптимальное решение транспортной задачи

Задания для самоконтроля
Решить транспортную задачу в MSExcel

1)

40	36	9	20	24
26	11	22	26	42
6	3	12	3	23
5	37	33	26	36
35	29	21	35	

2)

11	9	12	30	17
39	22	7	28	49
28	4	36	32	35
28	7	19	37	45
13	43	33	45	

3)

40	33	8	32	43
22	27	15	24	33
23	23	39	41	15
32	26	34	17	27
19	11	10	25	

4)

12	20	37	38	24
30	25	20	29	48
9	8	39	36	31
6	11	12	16	17
37	15	11	48	

5)

28	36	17	34	26
12	33	35	7	35
22	27	26	40	31
32	31	39	19	33
41	24	15	37	

6)

11	14	6	3	44
5	15	20	35	44
9	28	31	23	39
35	32	23	4	49
13	27	31	20	

7)

29	11	41	42	36
33	32	6	28	50
35	39	42	3	20
31	10	14	42	50
38	40	20	24	

8)

37	14	7	39	45
13	38	14	31	26
10	19	40	10	17
34	36	16	14	19
25	21	32	17	

9)

16	13	7	3	38
29	25	22	20	54
7	19	30	29	33
4	37	32	25	29
25	11	15	15	

10)

4	33	10	22	32
28	40	39	34	33
23	13	18	16	32
11	18	29	33	46
33	37	14	10	

11)

38	38	34	37	37
39	40	30	18	38
42	39	8	40	37
38	3	36	16	51
36	49	28	16	

12)

37	4	28	35	33
6	36	4	25	29
14	5	10	39	28
11	30	12	8	43
21	31	17	26	

13)

12	40	19	27	41
39	8	19	11	52
27	42	15	14	32
7	16	31	42	35
20	11	41	43	

14)

29	12	10	35	32
8	20	37	7	41
24	33	34	4	43
41	6	13	21	51
45	14	18	48	

15)

6	16	35	13	26
41	26	31	35	30
29	30	7	34	46
24	36	22	22	47
39	11	13	29	

16)

41	38	13	9	22
4	25	29	30	27
16	14	38	4	43
21	23	28	36	34
41	11	13	49	

17)

9	19	13	11	33
25	33	29	41	28
29	33	3	7	54
37	21	11	33	37
11	44	46	30	

18)

14	15	12	35	29
35	29	32	4	30
11	18	36	4	18
23	38	23	33	54
14	15	47	27	

19)

4	42	15	13	46
17	10	20	4	40
41	39	4	10	45
38	12	41	3	43
37	19	21	30	

20)

20	15	32	35	36
11	4	26	19	54
15	20	32	10	51
23	16	34	8	39
42	25	25	35	

21)

2	18	35	10	26
21	16	31	25	30
19	20	17	14	46
4	36	21	22	47
39	11	13	29	

22)

21	18	13	19	22
14	25	19	30	27
16	12	28	15	43
29	23	28	16	34
41	11	13	49	

23)

19	19	10	17	33
35	33	29	41	28
27	31	3	27	54
17	21	18	23	37
11	44	46	30	

24)

11	18	12	15	29
35	29	22	44	30
17	18	16	24	18
23	38	20	33	54
14	15	47	27	

25)

11	22	15	23	46
27	30	20	14	40
41	29	12	10	45
18	12	41	33	43
37	19	21	30	

26)

20	19	32	35	36
11	19	26	13	54
25	20	32	18	51
33	16	34	12	39
42	25	25	35	

Тема 4. Решение задачи о назначениях

Задача о назначениях (ЗН). Математическая модель решения задачи. Алгоритм решения задачи о назначениях средствами MSExcel. Решение задачи ЗН с помощью пакета Mathcad

Задача о назначениях

Задача о назначениях (ЗН) – это так называемая распределительная задача, в которой на выполнение каждой работы требуется только один ресурс и каждый ресурс может быть использован только на одной работе. То есть ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами. К задачам о назначениях относятся задачи распределения людей на должности или работы, автомашин на маршруты, групп по аудиториям, тематики работ по лабораториям и т.д. Особенностью этих задач является то, что переменные могут принимать только два значения: 0 или 1.

Пример формулировки задачи о назначениях

Для выполнения n работ могут быть использованы n работников. Эффективность i-го работника i = 1, …, n при выполнении им j-ой работы j = 1, …, n равна c_{ij} . Предполагается, что каждый работник может быть использован только на одной работе, а каждая работа может выполняться только одним работником. Определить, какую работу необходимо поручить каждому работнику, чтобы достичь максимальной эффективности по выполнению всех работ.

Математическая модель.

Введем переменную x_{ij} значение которой равно 1, если выполнение j-ой работы поручено i-му работнику, и равно 0, в противном случае. Тогда, поскольку на работе j может быть задействован только один работник, то справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n$$

Так как один работник может выполнять только одну работу, то справедливо следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,n \, .$$

Целевая функция определяет эффективность всех работников при выполнении всех работ, которая должна быть максимальной

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \, .$$

По своей постановке эта задача относится к целочисленной транспортной задаче закрытого типа (суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей).

Решение ЗН с помощью MSExcel

Такие типы задач решаются средствами MS**Exce**l также как и обычные транспортные задачи, за одним исключением: так как переменные по смыслу задачи могут принимать только двоичные значения 0 или 1, то в ограничениях, задаваемых в диалоговом окне Поиск решения, необходимо указать, что переменные имеют булевы значения.

Для этого необходимо нажать в окне **Поиск решения** кнопку **Добавить** (добавить ограничения) и в открывшемся диалоговом окне Добавление ограничения в левом поле занести ячейки с изменяемыми переменными, а в среднем поле, нажать на среднюю кнопку и выбрать в предложенных видах ограничений требование двоичности (рис. 3.24). Дальнейший алгоритм действий остается без изменений

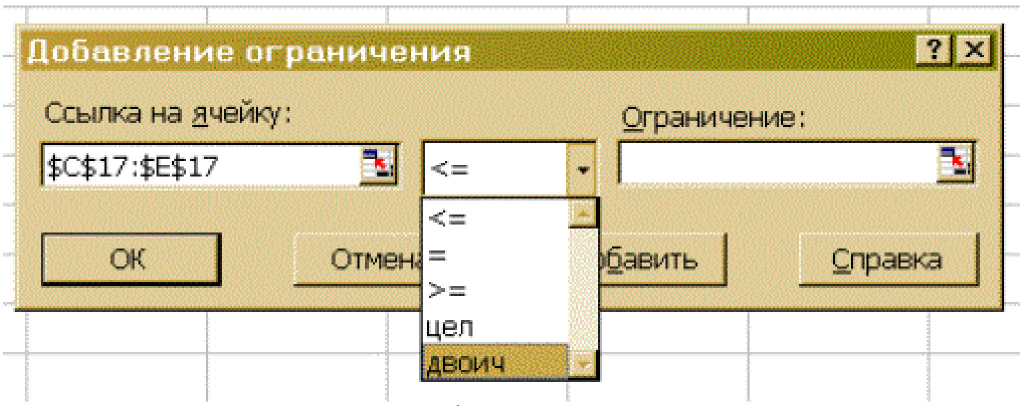


Рис. 1.

Рис. 3.24 Окно *Добавление счетчика*

Решение ЗН с помощью пакета Mathcad

Задача X.1.<u>Задача о назначениях.</u> Имеются n=4 рабочих и m=4 видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-и работником j-й работы приведена в таблице X.1, где рабочему соответствует строка, а работе – столбец. Необходимо составить план работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной (таб. 3.18).

Таблица 3.18

Рабочие $Раб_i$	Стоимость вып. работы Pi				Число Раб
	P_1	P_2	P_3	P_4	
$Раб_1$	14	21	14	22	1
$Раб_2$	12	12	23	31	1
$Раб_3$	13	17	45	33	1
$Раб_4$	14	15	75	34	1
Потреб-ность	1	1	1	1	

Решение задачи X.1

1) Введем исходные данные в матричной форме.

$ORIGIN := 1$

$n := 4 \qquad m := 4$

$j := 1..n \qquad i := 1..m$

$t_j := 1 \qquad l_i := 1$

$$c := \begin{pmatrix} 14 & 21 & 14 & 22 \\ 12 & 12 & 23 & 31 \\ 13 & 17 & 45 & 33 \\ 14 & 15 & 75 & 34 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Вводим линейную целевую функцию.

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

3) Зададим начальные значения переменных:

$$x_{m,n} := 0$$

4) Вводим ограничения задачи в матричной форме.

Given

$$x \cdot t = a$$

$$x^T \cdot 1 = b$$

$$x \geq 0$$

5) Определяем оптимальное решение задачи с помощью встроенной функции Minimize:

$$x := \text{Minimize}(f, x)$$

$$f(x) = 73$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача Х.2. Пусть управление механизации имеет 3 крана и требуется возвести 3 объектов. Известна себестоимость строительства каждым краном отдельного объекта. Требуется так распределить машины по объектам, чтобы обеспечить возведение всех объектов с минимальными суммарными затратами. Исходная информация представлена в табл.3.19.

Таблица 3.19

Краны K_i	Стоимость вып. работы Oi			Число кранов
	O_1	O_2	O_3	
K_1	50	30	70	1
K_2	20	40	40	1
K_3	40	70	50	1
Потребность	1	1	1	

Решение.

Введем сначала поясняющий текст в рабочем листе (см. Рис.3.24). Далее введем критерий оптимизации - целевую функцию. Для этого вначале разместим курсор (визир - красный крестик) в месте ввода математического выражения. Затем начнем ввод с нажатия соответствующих клавиш. Сначала введем имя критерия оптимизации с аргументами, записанными через запятые и заключенными в скобки. Далее нажмем комбинацию клавиш Shift+: (двоеточие) для ввода знака присваивания :=. На месте правой метки вводим все выражение критерия оптимизации. Аналогично вводятся начальные приближения (рис. 3.25).

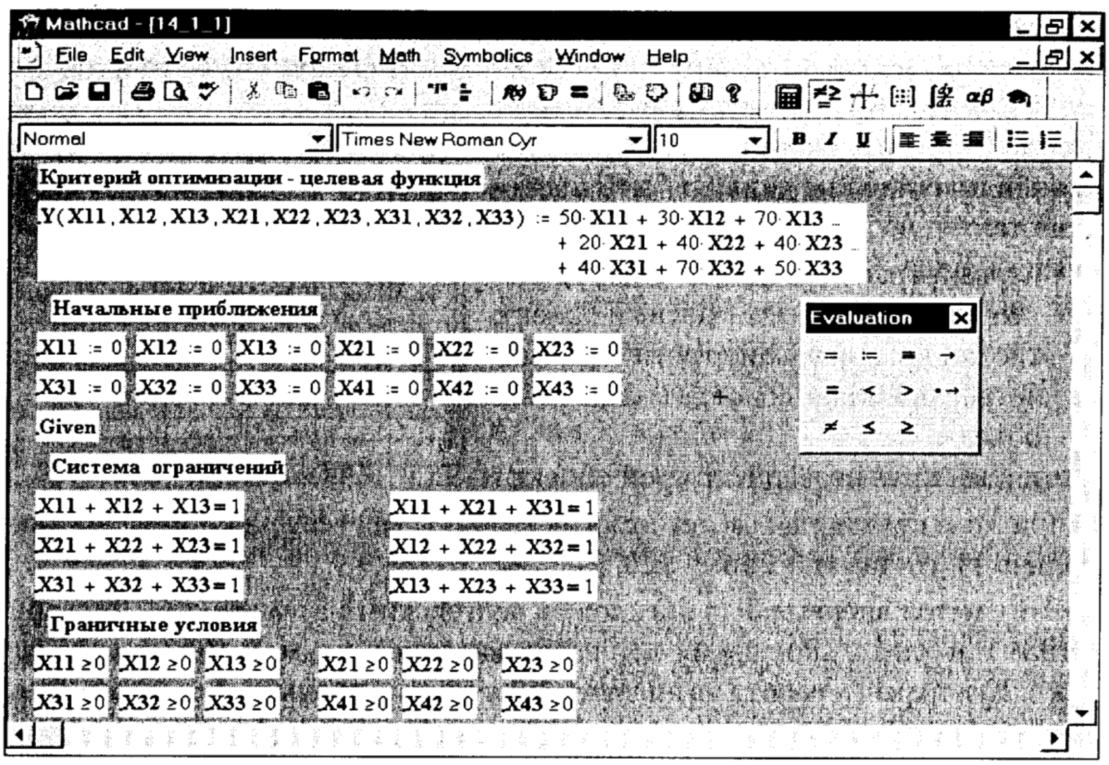


Рис. 3.25 Формирование математической модели в Mathcad

Для решения задачи используем блок функций **Given ... Minimize**. Для этого нужно:

ввести, если необходимо, комментарии, нажав клавишу с двойной кавычкой;

- ввести ключевое слово **Given**;

- ввести систему ограничений. При вводе ее используйте жирный знак равенства, вызвав его нажатием комбинации клавиш Ctrl+=;

- ввести граничные значения;

- ввести вектор-столбец искомых параметров, используя диалоговое окно Insert Matrix (Вставить матрицу). Для этого щелкните по левой верхней кнопке на панели инструментов Matrix (Матрица) (рис. 3.25) или нажмите комбинацию клавиш Ctrl+M. В появившемся диалоговом окне Insert Matrix в поле Rows (Строки) число строк (элементов вектора-столбца) должно быть равно 9, а в поле Columns (Столбцы) - 1;

- ввести знак присваивания, нажав комбинацию клавиш Shift+: (двоеточие);

- ввести функцию Minimize с искомыми параметрами, используя диалоговое окно Insert Function (Вставить функцию), вызвав его нажатием комбинации клавиш Ctrl+E;

- ввести вектор-столбец искомых параметров и знак «равно»

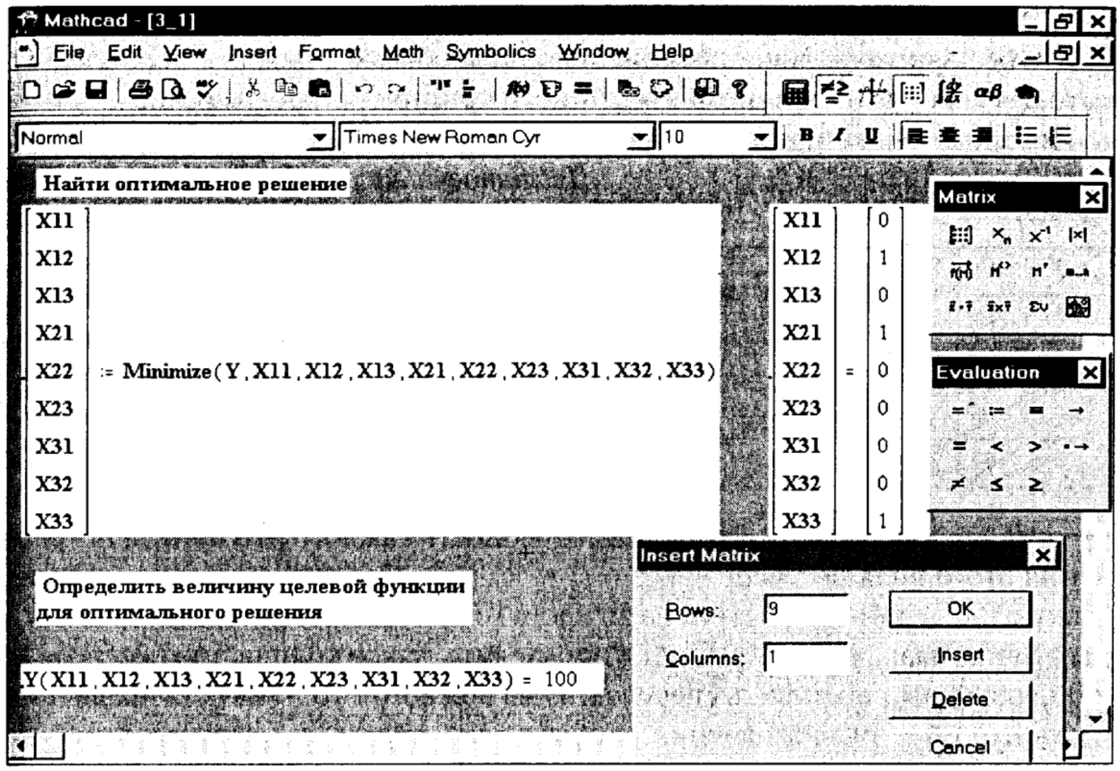


Рис. 3.26 Поиск оптимальных распределений в Mathcad

На рис. 3.26 показан процесс и результаты решения задачи о назначении. Оптимальное распределение зафиксировано в векторе (X11 X12 X21 ...). Из полученного решения видно, что X12=1, X21 = 1 и X33 = 1. Это означает: чтобы оптимально распределить три крана на три объекта, необходимо первый кран направить на второй объект, второй на первый, а третий - на третий. Первая цифра в переменной X определяет машину, а вторая - объект работы. При таком распределении кранов по объектам минимальные суммарные затраты Y составят 100 условных единиц.

Задания для самоконтроля

1. Решить задачу средствами MSExcel

Имеются n=6 рабочих и m=6 видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-и работником j-й работы приведена в таблице X.1, где рабочему соответствует строка, а работе – столбец. Необходимо составить план работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной.

2. Решить задачу средствами пакета Mathcad

Пусть управление механизации имеет 3 крана и требуется возвести 3 объектов. Известна себестоимость строительства каждым краном отдельного объекта. Требуется так распределить машины по объектам, чтобы обеспечить возведение всех объектов с минимальными суммарными затратами.

Модуль 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тема 1. Основные понятия статистического моделирования

Исходные данные. Ряды распределения. Вариационный ряд. Построение статистического ряда. Понятие средних. Параметры вариации. Корреляция, коэффициент корреляции

Результаты сводки и группировки материалов статистического наблюдения оформляются в виде статистических рядов распределения. **Рядами распределения** называются группировки особого вида, при которых по каждому признаку, группе признаков или классу признаков известны численность единиц в группе либо удельный вес этой численности в общем итоге. **Ряд распределения**– упорядоченная совокупность значений признака, расположенных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами. Ряды распределения могут быть построены или по количественному, или по качественному (атрибутивному)признаку.

Атрибутивный признак выражает такое свойство единиц изучаемой совокупности, которое не может быть количественно измерено. Например, при изучении населения выделяются такие атрибутивные признаки, как пол человека, его профессия, образование, семейное положение. При изучении субъектов хозяйствования – отрасль, к которой принадлежит организация, вид деятельности, форма собственности.

Атрибутивными называют ряды распределения, построенные по качественным признакам (распределение по видам труда, по полу, по профессии, по религиозному признаку, национальной принадлежности и т.д.).

Ряд распределения принято оформлять в виде таблиц. Ниже приведем атрибутивный ряд распределения юридической помощи адвокатов гражданам. Представленный в табл. 4.1 ряд показывает, как общее число случаев юридической помощи адвокатов распределялось по видам и формам правовой помощи в 1994 г.

Таблица 4.1

п/п	Вид юридической помощи, оказанной адвокатами	Число случаев юридической помощи	
		всего, тыс.	% к итогу
1	Устные советы	5 109	69,43
2	Составление документов	991	13,47
3	Поручения по ведению уголовных дел	1021	13,87
4	Поручения по ведению гражданских дел	238	3,23
	Всего	7 359	100,00

Элементами этого ряда распределения являются значения атрибутивного признака, представленного названиями видов правовой помощи, оказанной адвокатами, и числа случаев, относящихся к каждому виду и форме помощи. Наибольший удельный вес (почти 79%) приходится на оказание юридической помощи и виде устных советов.

Атрибутивные ряды распределения характеризуют состав совокупности по тем или иным существенным признакам. Взятые на несколько периодов, эти данные позволят исследовать изменение структуры.

Ряды распределения, построенные по **количественному** признаку, называются вариационными рядами. Ряд распределения может быть построен по непрерывно варьирующему признаку (когда признак может принимать любые значения в рамках какого-либо интервала) и по дискретно варьирующему признаку (принимает строго определенные целочисленные значения).

При этом вариационные ряды по способу построения бывают **дискретными (прерывными) и интервальными (непрерывными).** Перед их построением массив исходных данных следует ранжировать.

Массив ранжированных данных(МРД) – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака. Таким образом, в МРД выделяется только один элемент – варианты признака x_i.

Вариантами массива ранжированных данных (x_i) называются *индивидуальные* значения признака.

Пример1. В таблице 4.2 представлен массив ранжированных данных 30 компаний, входящих в рейтинг крупнейших компаний мира Global-500, по размеру совокупного дохода в истекшем финансовом году.

Обозначим через i номер *индивидуальных* вариант в массиве ранжированных данных, тогда $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ в общем случае и $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 30$ в нашем примере. Тогда изучаемый признак x – годовой доход компании – можно обозначить как x_i . Например, совокупный доход четвертой по рангу компании (ОАО «Газпром») составил в истекшем году $x_4 =$ *99 млн. $.*

Таблица 4.2

Место (ранг) i	Наименование компании	Годовой доход компании (100 млн. $) x_i
	Nissan Motor	0,95
	Valero Energy	0,98
	Hitachi	0,98
	Gazprom	0,99
	International Business Machines	0,99
	HBOS	1,00
	McKesson	1,02
	Societe Generale	1,03
	Pemex	1,04
	Hewlett-Packard	1,04
	Honda Motor	1,05
	ArcelorMittal	1,05
	Samsung Electronics	1,06
	Siemens	1,06
	Royal Bank of Scotland	1,08
	American International Group	1,10
	Assicurazioni Generali	1,14
	Carrefour	1,16

	J.P. Morgan Chase & Co.	1,16
	UBS	1,17
	Berkshire Hathaway	1,18
	AT&T	1,19
	Bank of America Corp.	1,19
	ENI	1,21
	Deutsche Bank	1,23
	China National Petroleum	1,30
	State Grid	1,33
	Crйdit Agricole	1,38
	Allianz	1,41
	BNP Paribas	1,41

Вариационные ряды строятся на основе количественного группировочного признака. Вариационные ряды состоят из двух элементов: вариант и частот.

Вариантами дискретного или интервального рядов распределения (x_j) называютс я*групповые* значения признака в ряду.

Частоты(f_j) – это численности каждой группы вариант (x_j) вариационного ряда, т.е. это числа, показывающие, как часто встречаются (или как часто повторяются) те или иные группы вариант в дискретном или интервальном ряду распределения.

Частоты, выраженные в долях единицы или в процентах к итогу, называются ***частостями*** (d_j):

$$d_j = \frac{f_j}{n} \text{ или } d_j = \frac{f_j}{n} \cdot 100\% . \quad (4.1)$$

Сумма частот составляет объем ряда распределения.

Дискретный вариационный ряд (ДВР) характеризует распределение единиц совокупности по дискретному признаку. **Дискретным** вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями. Варианты дискретного ряда – это дискретно прерывно изменяющиеся значения признак, обычно это результат подсчета.

В случае дискретной вариации в качестве значения признака выступает *число* (величина абсолютная или относительная, целая или дробная, положительная или отрицательная), а не интервал значений признака от… и до…

Построение дискретного вариационного ряда осуществляется с помощью *метода группировок*.

Для того, чтобы построить дискретный вариационный ряд нужно выполнить **следующие действия:**

1) упорядочить единицы наблюдения по возрастанию изучаемого значения признака,

2) определить все возможные значения признака x_i, упорядочить их по возрастанию,

3) подсчитать сколько раз встречается каждое значение признака в изучаемой совокупности, т.е. определить частоту каждого значения признака f_i.

4) записать полученные данные в таблицу из двух строк (столбцов) - x_i и f_i .

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе наблюдаемых данных, называют **значением признака, вариантом (вариантой) и обозначают x_i.**

Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующее значение признака в ряде наблюдений называют ***частота значения признака*** и обозначают **f_i.** Сумма всех частот ряда равна количеству элементов в изучаемой совокупности.

<u>Пример 2</u>.

Список оценок полученных студентами на экзаменах: 3; 4; 3; 5; 4; 2; 2; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 2; 5; 5; 4; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 4; 5; 2; 5; 5; 4; 3; 3; 4; 2; 4; 4; 5; 4; 3; 5; 3; 5; 4; 4; 5; 4; 4; 5; 4; 5; 5; 5.

*Здесь число **X** – оценка является дискретной случайной величиной, а полученный список оценок - **статистические (наблюдаемые) данные**.*

1) упорядочить единицы наблюдения по возрастанию изучаемого значения признака:

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5.

2) определить все возможные значения признака x_i, упорядочить их по возрастанию:

В данном примере все оценки можно разделить на четыре группы со следующими значениями: 2; 3; 4; 5.

3) подсчитать сколько раз встречается каждое значение признака в изучаемой совокупности, т.е. определить частоту каждого значения признака f_i.

Для нашего примера
оценка 2 встречается - 8 раз,
оценка 3 встречается - 12 раз,
оценка 4 встречается - 23 раза,
оценка 5 встречается - 17 раз.

Всего 60 оценок.

4) записать полученные данные в таблицу (таб. 4.3) из двух строк (столбцов) - x_i и f_i.

На основании этих данных можно построить дискретный вариационный ряд

Дискретный вариационный ряд – это таблица, в которой указаны встречающиеся значения изучаемого признака как отдельные значения по возрастанию и их частоты

Таблица 4.3

x_i (оценка)	f_i (кол-во студентов с такой оценкой)
2	8
3	12
4	23
5	17
Всего	60

Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на некоторую конечную величину. В дискретных рядах задаются точечные значения признака.

Интервальный вариационный ряд (ИВР) строится при непрерывной вариации признака, а также, если дискретная вариация проявляется в широких пределах.

Таким образом, интервальный ряд строится если:

1. признак имеет непрерывный характер изменения;
2. дискретных значений получилось очень много (больше 10)
3. частоты дискретных значений очень малы (не превышают 1-3 при относительно большем количестве единиц наблюдения);
4. много дискретных значений признака с одинаковыми частотами.

Интервальный вариационный ряд – это способ группировки данных в виде таблицы, которая имеет две графы (значения признака в виде интервала значений и частота каждого интервала).

В отличие от дискретного ряда значения признака интервального ряда представлены не отдельными значениями, а интервалом значений («от - до»).

Число, которое показывает, сколько единиц наблюдения попало в каждый выделенный интервал, называется ***частота значения признака*** и обозначают $\mathbf{f}_i$**.** Сумма всех частот ряда равна количеству элементов (единиц наблюдения) в изучаемой совокупности.

Если единица обладает значением признака, равным величине верхней границы интервала, то ее следует относить к следующему интервалу.

Например, ребёнок с ростом 100 см попадёт во 2-ой интервал, а не в первый; а ребёнок с ростом 130 см попадёт в последний интервал, а не в третий.

На основании этих данных можно построить интервальный вариационный ряд (таб. 4.4)

Таблица 4.4

x_i (рост ребенка)	f_i (кол-во детей с таким ростом)
90-100	16
100-110	24
110-130	46
больше 130	34
Всего	120

У каждого интервала есть нижняя граница ($х_н$), верхняя граница ($х_в$) и ширина интервала (*i*).

Граница интервала – это значение признака, которое лежит на границе двух интервалов (табл. 4.5).

Таблица 4.5

рост детей (см)	рост детей (см)		количество детей
	$х_н$	$х_в$	
90-100	90	100	16
100-110	100	110	24
110-130	110	130	46
больше 130	130	-	34
Всего			120

Если у интервала есть верхняя и нижняя граница, то он называется закрытый интервал. Если у интервала есть только нижняя или только верхняя граница, то это – открытый интервал. Открытым может быть только самый первый или самый последний интервал. В приведённом примере последний интервал – открытый.

Ширина интервала (i) – разница между верхней и нижней границей.

$$I = х_н - х_в$$

Ширина открытого интервала принимается такой же, как ширина соседнего закрытого интервала (таб. 4.6)

Таблица 4.6

рост детей (см)		количество детей	Ширина интервала (i)
$х_н$	$х_в$		
90	100	16	100-90=10
100	110	24	110-100=10
110	130	46	130-110=20
130	для расчётов 130+20=150	34	20 (потому что ширина соседнего закрытого интервала – 20)
всего		120	

Все интервальные ряды делятся на *интервальные ряды с равными интервалами и интервальные ряды с неравными интервалами*.

В интервальных рядах с равными интервалами ширина всех интервалов одинаковая. В интервальных рядах с неравными интервалами ширина интервалов разная.

В рассматриваемом примере - интервальный ряд с неравными интервалами.

В отличие от обычной группировки данных, в интервальных вариационных рядах распределения принципиальным является вопрос о количестве единиц наблюдения в каждой группе, т.е. изучается *характер распределения частот* по выделенным группам значений признака.

Чтобы выявить характер распределения, число групп принимается оптимальным (по формуле Стерджеса), проводится построение ряда методом группировки данных, а затем фактические частоты сравниваются с теоретическими частотами, отвечающими нормальному закону распределения случайных величин. В случае резкого отличия фактических частот от теоретических число интервалов корректируется в сторону увеличения или уменьшения до тех пор, пока фактическое распределение частот не приблизится к нормальному (теоретическому).

Алгоритм построения интервального вариационного ряда с равными интервалами

1. **Определяем число интервалов (групп) вариационного ряда**

Число групп (интервалов) приближенно определяется по формуле Стерджесса:

$m = 1 + 3{,}322 \times \lg(n)$

где n - общее число единиц наблюдения (общее количество элементов в совокупности и т.д.), lg(n) – десятичный логарифм от n.

Полученную по формуле Стерджесса величину округляют обычно до целого большего числа, поскольку количество групп не может быть дробным числом.

Если ряд интервальный ряд с таким количеством групп по каким-то критериям не устраивает, то можно построить другой интервальный ряд, округлив **m** до целого меньшего числа и выбрать из двух рядов более подходящий.

Число групп не должно быть больше 15.

Также можно пользоваться таблицей 4.7, если совсем нет возможности вычислить десятичный логарифм.

Таблица4.7

Объем выборки, n	25-40	40-60	60-100	100-200	Больше 200
Число интервалов, m	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

2. **Определяем ширину интервала**

Ширина интервала для интервального вариационного ряда с равными интервалами определяется по формуле:

$$i = \frac{x_{макс} - x_{мин}}{m}$$

где $X_{макс}$ - максимальное из значений x_i, $X_{мин}$ - минимальное из значений x_i; m - число групп (интервалов).

Величину интервала (i) обычно округляют до целого числа, исключение составляют лишь случаи, когда изучаются малейшие колебания признака (например, при группировке деталей по величине размера отклонений от номинала, измеряемого в долях миллиметра).

Часто применяется следующее правило (см. таб. 4.8):

Таблица 4.8

Количество знаков до запятой	Количество знаков после запятой	Пример ширины интервала по формуле	До какого знака округляем	Пример округленной ширины интервала
0	3	0,375	0,01	0,38
0	2	0,56	0,1	0,6
1	3	4,658	0,01	4,66
1	2	2,54	0,1	2,5
2	любое	12,54	1,0	13
3	любое	672,54	10,00	670
4	любое	3472,45	100,00	3500
и т.д.				

3. **Определяем границы интервалов**

<u>**Нижнюю границу** первого интервала</u> принимают равной минимальному значению признака (чаще всего его предварительно округляют до целого меньшего числа с таким же разрядом как ширина интервала). Например, $x_{мин}$= 15, i=130, $x_н$ первого интервала = 10.

$x_{н1} \approx x_{мин}$

Верхняя граница первого интервала соответствует значению (Xmin + *i*).

Нижняя граница второго интервала всегда равна верхней границе первого интервала. Для последующих групп границы определяются аналогично, т е. последовательно прибавляется величина интервала.

$Xвi = x_{нi} + I$

$Xнi = x_{вi}$-I

4. **Определяем частоты интервалов.**

Считаем, сколько значений попало в каждый интервал. При этом помним, что если единица обладает значением признака, равным величине верхней границы интервала, то ее следует относить к следующему интервалу.

5. **Строим интервальный ряд в виде таблицы.**
6. **Определяем середины интервалов.**

Для дальнейшего анализа интервального ряда понадобится выбрать значение признака для каждого интервала. Это значение признака будет общим для всех единиц наблюдения, попавшим в этот интервал. Т.е. отдельные элементы «теряют» свои индивидуальные значения признака и им присваивается одно общее значение признака. Таким общим значением является **середина интервала**, которая обозначается $\mathbf{x'_i}$ **.**

$$x_i' = \frac{x_{вi} + x_{нi}}{2}$$

Графические представления вариационного ряда

Ряды распределения удобно анализировать при помощи их графического изображения, позволяющего судить и о форме распределения, о закономерностях. Дискретный ряд изображается на графике в виде ломаной линии – **полигона распределения** . Для его построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные (упорядоченные) значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения частот (рис.4.1).

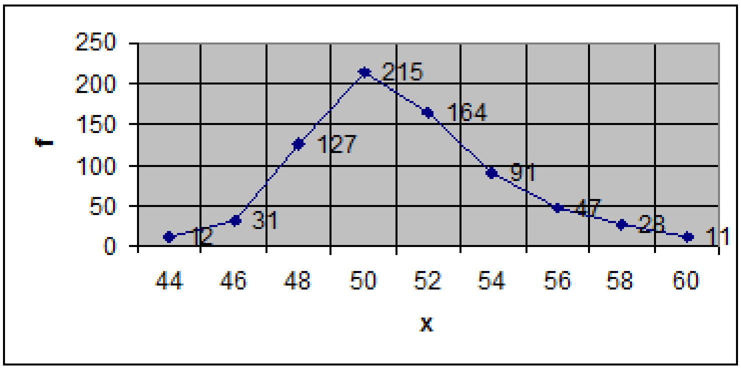


Рис.4.1 Пример изображения дискретного ряда

Интервальные ряды изображаются в виде **гистограмм распределения** (то есть столбиков диаграмм).

При построении гистограммы на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах. Высота столбиков в случае равных интервалов должна быть пропорциональна частотам (рис.4.2).

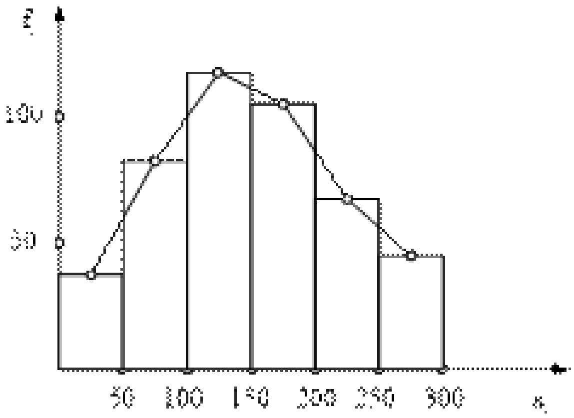


Рис.4.2 Пример гистограммы распределения

Любая гистограмма может быть преобразована в полигон распределений, для этого необходимо соединить между собой отрезками прямой вершины ее прямоугольников.

Для графического изображения вариационных рядов может также использоваться **кумулятивная кривая.** При помощи **кумуляты** (кривой сумм) изображается ряд накопленных частот. Накопленные частоты определяются путем последовательного суммирования частот по группам и показывают, сколько единиц совокупности имеют значения признака не больше, чем рассматриваемое значение.

При построении кумуляты интервального вариационного ряда по оси абсцисс откладываются варианты ряда, а по оси ординат накопленные частоты, которые наносят на поле графика в виде перпендикуляров к оси абсцисс в верхних границах интервалов. Затем эти перпендикуляры соединяют и получают ломаную линию, т. е. кумуляту.

Таблица 4.9

п/п	Группы семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека, м2	Число семей с данным размером жилой площади	Накопленное число семей
1	3-5	10	10
2	5-7	20	30
3	7-9	30	70
4	9-11	40	100
5	11-13	50	115
	Всего	115	-

Используя данные накопленного ряда (табл. 4.9), построим кумуляту распределения (рис. 4.3).

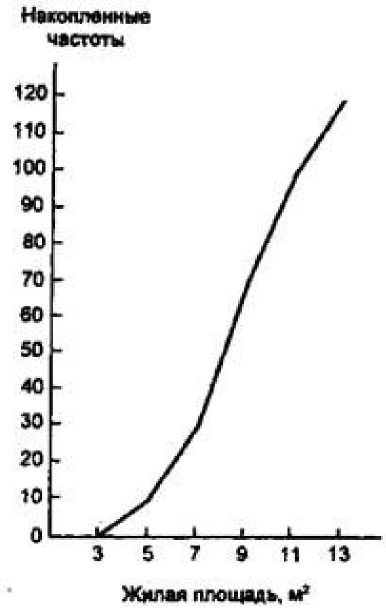


Рис. 4.3. Кумулята распределения семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека

Изображение вариационного ряда в виде кумуляты особенно эффективно для вариационных рядов, частоты которых выражены в долях или процентах к сумме частот ряда, принятой соответственно за единицу или за 100%, т. е. частостями.

Если при графическом изображении вариационного ряда в виде кумуляты оси поменять местами, то мы получим **огиву.** На рис. 4.4 приведена огива, построенная на основе данных табл. 9.

С помощью кумулятивных кривых графически изображают процесс концентрации.

Широкое применение ПК облегчает как построение рядов распределения, так и их графическое представление. Особо в этой связи следует отметить использование стандартизированных процедур определения величины интервала.

Ряд распределения представляет собой простейшую группировку, в которой каждая выделяемая группа характеризуется одним показателем - численностью единиц объекта, попавших в каждую группу. Построение рядов распределения является составной частью сводной обработки данных, при которой каждая группа единиц характеризуется многими показателями. Поэтому важным моментом в построении группировки является перечень тех показателей, которыми будет характеризоваться каждая группа.

Рис. 4.4 Огива распределения семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека

Состав таких показателей формируется в соответствии с целями статистического исследования и задачами группировки. Для получения обобщенной, комплексной характеристики социально-экономического явления используют не отдельные показатели, а систему статистических показателей, которая предусматривает исчисление абсолютных, относительных и средних величин.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие ряда распределения.
2. Перечислите виды рядов распределения.
3. Что такое атрибутивный ряд?
4. Что такое вариационный ряд?
5. Какие виды вариационных рядов Вы можете назвать?
6. Перечислите элементы вариационного ряда и дайте их определения.
7. Какие методы построения вариационного ряда Вы знаете?
8. Опишите алгоритм построения равно интервального вариационного ряда.
9. Перечислите и опишите варианты графического представления вариационного ряда

Тема 2. Средние величины, корреляция

Сущность, виды средних, сгруппированные данные и взвешенные средние. Свойства средней арифметической. Вариация признака в совокупности и недостаточность одной средней для характеристики совокупности. Показатели вариации. Корреляция, коэффициент корреляции

В целях анализа и получения статистических выводов по результатам сводки и группировки исчисляют обобщающие показатели – средние величины.

Задача средних величин– охарактеризовать все единицы статистической совокупности одним значением признака.

Средними величинами характеризуются качественные показатели предпринимательской деятельности: издержки обращения, прибыль, рентабельность и др.

Средняя величина– это обобщающая характеристика единиц совокупности по какому–либо варьирующему признаку.

Средние величины позволяют сравнивать уровни одного и того же признака в различных совокупностях и находить причины этих расхождений.

В анализе изучаемых явлений роль средних величин огромна. Английский экономист В. Петти (1623—1687 гг.) широко использовал средние величины. В. Петти хотел использовать средние величины в качестве меры стоимости расходов на среднее дневное пропитание одного работника. Устойчивость средней величины – это отражение закономерности изучаемых процессов. Он считал, что информацию можно преобразовать, даже если нет достаточного объема исходных данных.

Применял средние и относительные величины английский ученый Г. Кинг (1648—1712) при анализе данных о населении Англии.

Теоретические разработки бельгийского статистика А. Кетле (1796—1874 гг.) основаны на противоречивости природы социальных явлений – высокоустойчивых в массе, но сугубо индивидуальных.

Согласно А. Кетле, постоянные причины действуют одинаково на каждое изучаемое явление и делают эти явления похожими друг на друга, создают общие для всех них закономерности.

Следствием учения А. Кетле явилось выделение средних величин в качестве основного приема статистического анализа. Он говорил, что статистические средние величины представляют собой не категорию объективной действительности.

А. Кетле выразил взгляды на среднюю величину в своей теории среднего человека. Средний человек – это человек, обладающий всеми качествами в среднем размере (средняя смертность или рождаемость, средний рост и вес, средняя быстрота бега, средняя наклонность к браку и самоубийству, к добрым делам и т. д.). Для А. Кетле средний человек – это идеал человека. Несостоятельность теории среднего человека А. Кетле была доказана в русской статистической литературе в конце XIX—XX вв.

Известный русский статистик Ю. Э. Янсон (1835—1893 гг.) писал, что А. Кетле предполагает существование в природе типа среднего человека как чего–то данного, от которого жизнь отклонила средних людей данного общества и данного времени, а это приводит его к совершенно механическому взгляду и на законы движения социальной жизни: движение – это постепенное возрастание средних свойств человека, постепенное восстановление типа; следовательно, такое нивелирование всех проявлений жизни социального тела, за которым всякое поступательное движение прекращается.

Сущность данной теории нашла свое дальнейшее развитие в работах ряда теоретиков статистики как теория истинных величин. У А. Кетле были последователи – немецкий экономист и статистик В. Лексис (1837—1914 гг.), перенесший теорию истинных величин на экономические явления общественной жизни. Его теория известна под названием теория устойчивости. Другая разновидность идеалистической теории средних величин основана на философии

Ее основатель – английский статистик А. Боули (1869– 1957гг.) – один из самых видных теоретиков новейшего времени в области теории средних величин. Его концепция средних величин изложена в книге «Элементы статистики».

А. Боули рассматривает средние величины лишь с количественной стороны, тем самым отрывает количество от качества. Определяя значение средних величин (или «их функцию»), А. Боули выдвигает махистский принцип мышления. А. Боули писал, что функция средних величин должна выражать сложную группу с помощью немногих простых чисел. Статистические данные должны быть упрощены, сгруппированы и приведены к средним Эти взгляды: разделяли Р. Фишер (1890—1968 гг.), Дж. Юл (1871 – 1951 гг.), Фредерик С. Миллс (1892 г) и др.

В 30—е гг. XX в. и последующие годы средняя величина рассматривается как социально значимая характеристика, информативность которой зависит от однородности данных.

Виднейшие представители итальянской школы Р. Бенини (1862—1956 гг.) и К. Джини (1884—1965 гг.), считая статистику отраслью логики, расширили область применения статистической индукции, но познавательные принципы логики и статистики они связывали с природой изучаемых явлений, следуя традициям социологической трактовки статистики.

Средние величины являются обобщающими показателями, в которых находят выражение действие общих условий, закономерность изучаемого явления.

Статистические средние величины рассчитываются на основе массовых данных статистически правильно организованного массового наблюдения. Если статистическая средняя рассчитывается по массовым данным для качественно однородной совокупности (массовых явлений), то она будет объективной.

Средняя величина абстрактна, так как характеризует значение абстрактной единицы.

Абсолютная величина, характеризующая уровень признака отдельной единицы совокупности, не позволяет сравнивать значения признака у единиц, относящихся к разным совокупностям. Сравнивать можно лишь средние показатели.

Признаки единиц статистических совокупностей различны по своему значению, например, заработная плата рабочих одной профессии какого-либо предприятия не одинакова за один и тот же период времени, различны цены на рынке на одинаковую продукцию, урожайность сельскохозяйственных культур в хозяйствах района и т.д. Поэтому, чтобы определить значение признака, характерное для всей изучаемой совокупности единиц, рассчитывают средние величины.

Средняя величина – это обобщающая характеристика множества индивидуальных значений некоторого количественного признака.

Совокупность, изучаемая по количественному признаку, состоит из индивидуальных значений; на них оказывают влияние, как общие причины, так и индивидуальные условия. В среднем значении отклонения, характерные для индивидуальных значений, погашаются. Средняя, являясь функцией множества индивидуальных значений, представляет одним значением всю совокупность и отражает то общее, что присуще всем ее единицам.

Средняя, рассчитываемая для совокупностей, состоящих из качественно однородных единиц, называется *типической средней*. Например, можно рассчитать среднемесячную заработную плату работника той или иной профессиональной группы (шахтера, врача библиотекаря). Разумеется, уровни месячной заработной платы шахтеров в силу различия их квалификации, стажа работы, отработанного за месяц времени и многих других факторов отличаются друг от друга, так и от уровня средней заработной платы. Однако в среднем уровне отражены основные факторы, которые влияют на уровень заработной платы, и взаимно погашаются различия, которые возникают вследствие индивидуальных особенностей работника. Средняя заработная плата отражает типичный уровень оплаты труда для данного вида работников. Получению типической средней должен предшествовать анализ того, насколько данная совокупность качественно однородна. Если совокупность состоит их отдельных частей, следует разбить ее на типические группы (средняя температура по больнице).

Средние величины, используемые в качестве характеристик для неоднородных совокупностей, называются *системными средними*. Например, средняя величина валового внутреннего продукта (ВВП) на душу населения, средняя величина потребления различных групп товаров на человека и другие подобные величины, представляющие обобщающие характеристики государства как единой экономической системы.

Средняя должна вычисляться для совокупностей, состоящих из достаточно большого числа единиц. Соблюдение этого условия необходимо для того, чтобы вошел в силу закон больших чисел, в результате действия которого случайные отклонения индивидуальных величин от общей тенденции взаимно погашаются.

Виды средних и способы их вычисления

В статистической обработке материала возникают различные задачи, которые необходимо решать, и поэтому в статистической практике используются различные средние величины. Математическая статистика использует различные средние, такие как: средняя арифметическая; средняя геометрическая; средняя гармоническая; средняя квадратическая.

Для того чтобы применить одну из вышеперечисленных видов средней, необходимо проанализировать изучаемую совокупность, определить материальное содержание изучаемого явления, все это делается на основе выводов, полученных из принципа осмысленности результатов при взвешивании или суммировании.

В изучении средних величин применяются следующие показатели и обозначения.

Признак, по которому находится средняя, называется ***осредняемым признаком*** и обозначается x; величина осредняемого признака у любой единицы статистической совокупности называют **индивидуальным его значением,** или **вариантами,** и обозначают как $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$; частота – это повторяемость индивидуальных значений признака, обозначается буквой *f.*

Выбор вида средней определяется экономическим содержанием определенного показателя и исходных данных. Однако любая средняя величина должна вычисляться так, чтобы при замене ею каждой варианты осредняемого признака не изменился итоговый, обобщающий, или, как его принято называть, *определяющий показатель*, который связан с осредняемым показателем.

Например, при замене фактических скоростей на отдельных отрезках пути их средней скоростью не должно измениться общее расстояние, пройденное транспортным средством за одно и тоже время; при замене фактических заработных плат отдельных работников предприятия средней заработной платой не должен измениться фонд заработной платы. Следовательно, в каждом конкретном случае в зависимости от характера имеющихся данных, существует только одно истинное среднее значение показателя, адекватное свойствам и сущности изучаемого социально-экономического явления.

Наиболее часто применяются средняя арифметическая, средняя гармоническая, средняя геометрическая, средняя квадратическая и средняя кубическая.

Перечисленные средние относятся к классу *степенных* средних и объединяются общей формулой:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m}{n}},$$

где $\bar{x}$ – среднее значение исследуемого признака;

m – показатель степени средней;

x_i– текущее значение (варианта) осредняемого признака;

В зависимости от значения показателя степени m различают следующие виды степенных средних:

при m = -1 – средняя гармоническая $\bar{x}_{гар}$;

при m = 0 – средняя геометрическая $\bar{x}_{г}$;

при m = 1 – средняя арифметическая $\bar{x}_{ар}$;

при m = 2 – средняя квадратическая $\bar{x}_{кв}$;

при m = 3 – средняя кубическая $\bar{x}_{куб}$.

При использовании одних и тех же исходных данных, чем больше показатель степени m в вышеприведенной формуле, тем больше значение средней величины: $\bar{x}_{гар} \le \bar{x}_{г} \le \bar{x}_{ар} \le \bar{x}_{кв} \le \bar{x}_{куб}$.

Это свойство степенных средних возрастать с повышением показателя степени определяющей функции называется *правилом мажорантности средних*.

Каждая из отмеченных средних может приобретать две формы: *простую* и *взвешенную*.

*Простая форма средней*применяется, когда средняя вычисляется по первичным (несгруппированными) данным.

Взвешенная форма – при расчете средней по вторичным (сгруппированным) данным.

Существует **2 класса** средних величин: <u>степенные</u> и <u>структурные</u>.

К структурным средним относятся *мода* и *медиана*, но наиболее часто применяются *степенные средние* различных видов.

Средняя арифметическая

Один из наиболее распространенных видов средней – ***средняя арифметическая,*** которая исчисляется тогда, когда объем осредняемого признака образуется как сумма его значений у отдельных единиц изучаемой статистической совокупности.

Для вычисления средней арифметической величины сумму всех уровней признака делят на их число.

$$x = \frac{\sum x}{n}$$

Если некоторые варианты встречаются несколько раз, то сумму уровней признака можно получить умножением каждого уровня на соответствующее число единиц совокупности с последующим сложением полученных произведений, исчисленная таким образом средняя арифметическая называется средней арифметической взвешенной.

Формула средней арифметической взвешенной выглядит следующим образом:

$$x = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

Где x_i – варианты,

f_i – частоты или веса.

Взвешенная средняя величина должна употребляться во всех случаях, когда варианты имеют различную численность.

Арифметическая средняя как бы распределяет поровну между отдельными объектами общую величину признака, в действительности варьирующуюся у каждого из них.

Вычисление средних величин производят по данным, сгруппированным в виде интервальных рядов распределения, когда варианты признака, из которых исчисляется средняя, представлены в виде интервалов (от – до).

Свойства средней арифметической:

1) средняя арифметическая суммы варьирующих величин равна сумме средних арифметических величин: Если $x_i = y_i+z_i$, то

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum (y_1 + z_1)}{n} = \frac{\sum \overline{y_i}}{n} + \frac{\sum \overline{z_i}}{n} = y + z$$

Данное свойство показывает, в каких случаях можно суммировать средние величины.

2) алгебраическая сумма отклонений индивидуальных значений варьирующего признака от средней равна нулю, так как сумма отклонений в одну сторону погашается суммой отклонений в другую сторону:

$$\sum (x - \bar{x}) = 0 = \sum (x - \bar{x}) = \sum x - \sum \bar{x} = \sum x - \sum n\bar{x} =$$

$$= \sum x - n\frac{\sum x}{n}$$

Это правило демонстрирует, что средняя является равнодействующей.

3) если все варианты ряда увеличить или уменьшить на одно и тоже число α, то средняя увеличится или уменьшится на это же число α

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum (x_1 \mp \alpha) f_i}{\sum f_i} \pm \alpha$$

4) если все варианты ряда увеличить или уменьшить в А раз, то средняя также увеличится или уменьшится в А раз:

$$\bar{x} = \frac{\sum x f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum \frac{x_i}{A}}{\sum f_i} * A = \frac{\sum AX_1 f_i}{\sum f_i} / A$$

5) пятое свойство средней показывает нам, что она не зависит от размеров весов, но зависит от соотношения между ними. В качестве весов могут быть взяты не только относительные, но и абсолютные величины.

Если все частоты ряда разделить или умножить на одно и тоже число d, то средняя не изменится.

$$\bar{x} = \frac{\sum x f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i \frac{f_i}{d}}{\sum \frac{f_i}{d}} \frac{\sum X_i f_i d}{\sum f_i d}$$

Средняя гармоническая. Для того чтобы определить среднюю арифметическую, необходимо иметь ряд вариантов и частот, т. е. значения *x* и *f*.

Допустим, известны индивидуальные значения признака *x* и произведения *xi,* а частоты *f* неизвестны, тогда, чтобы рассчитать среднюю, обозначим произведение = *xi;* откуда:

$$f = \frac{m}{x}.$$

Далее преобразуем формулу средней арифметической так, чтобы по существующим данным x и m исчислить среднюю. Выразив в формуле средней арифметической / через *x* и m, получим:

$$x_{гарм.вз.} = \frac{\sum m}{\sum\left(\frac{m}{xi}\right)}.$$

Средняя в этой форме называется средней гармонической взвешенной и обозначается *x гармоническая взвешенная.*

Соответственно, средняя гармоническая тождественна средней арифметической. Она применима, когда неизвестны действительные веса *f*, а известно произведение *fx* = *z*

Когда произведения *fx* одинаковы или равны единицы (m = 1) применяется средняя гармоническая простая, вычисляемая по формуле:

$$x_{гарм.} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)},$$

где *x* – отдельные варианты;

n – число.

Средняя геометрическая

Если имеется n коэффициентов роста, то формула среднего коэффициента:

$$K = \sqrt{K_1 \times K_2} \times \ldots K_n.$$

Это формула средней геометрической.

Средняя геометрическая равна корню степени *n* из произведения коэффициентов роста, характеризующих отношение величины каждого последующего периода к величине предыдущего.

Если осреднению подлежат величины, выраженные в виде квадратных функций, применяется средняя квадратическая. Например, с помощью средней квадратической можно определить диаметры труб, колес и т. д.

Средняя квадратическая простая определяется путем извлечения квадратного корня из частного от деления суммы квадратов отдельных значений признака на их число.

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

Средняя квадратическая взвешенная равна:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$$

В случае, когда данные сгруппированы по значениям признака (т. е. построен дискретный вариационный ряд распределения) с*редняя арифметическая взвешенная* рассчитывается с использовании либо частот f_i, либо частостей w_i наблюдения конкретных значений признака x_i, число которых (k) значительно меньше числа наблюдений (N)

$$\bar{x}_{ap} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_i f_i + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_i + \ldots + f_k} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i},$$

$$\bar{x}_{ap} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i},$$

где k – количество групп вариационного ряда,i – номер группы вариационного ряда. Поскольку $\sum f_i = N$, а $\sum w_i = 1$, получаем формулы, используемые для практических расчетов: $\bar{x}_{ap} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N}$ и $\bar{x}_{ap} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i$

Пример 1.Рассчитаем средний стаж рабочих бригад по сгруппированному ряду

а) с использованием частот: $\bar{x}_{ap} = \frac{2*1+3*2+4*4+5*3}{10} = 3{,}9$ года

б) с использованием частостей:

$$x_{ap} = 2*0{,}1+3*0{,}2+4*0{,}4+5*0{,}3 = 3{,}9$$

В случае, когда данные сгруппированы по интервалам, т.е. представлены в виде интервальных рядов распределения, при расчете средней арифметической в качестве значения признака принимают середину интервала, исходя из предположения о равномерном распределении единиц совокупности на данном интервале. Расчет ведется по формулам:

$$\bar{x}_{ap} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i f_i}{N} \quad \text{и} \quad \bar{x}_{ap} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i w_i$$

где $\bar{x}_i$ - середина интервала: $\bar{x}_i = \frac{(a_i + b_i)}{2}$,

где a_i и b_i – нижняя и верхняя границы интервалов (при условии, что верхняя граница данного интервала совпадает с нижней границей следующего интервала).

Пример2. Рассчитаем среднюю арифметическую интервального вариационного ряда, построенного по результатам исследования годовой заработной платы 30 рабочих (таб. 4.5).

Таблица 4.5

Интервалы, грн.	Частота, чел. f_i	Частость, w_i	Середина интервала, $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i f_i$	$\bar{x}_i w_i$
600-700					
700-800	3	0,10	(600+700):2=650	1950	65
800-900	6	0,20	(700+800):2=750	4500	150
900-1000	8	0,267	850	6800	226,95
1000-	9	0,30	950	8550	285
1100	3	0,10	1050	3150	105
1100-	1	0,033	1150	1150	37,95
1200					
	$N = \sum f_i = 30$	$\Sigma W_i = 1$	-	26100	869,9

$\bar{x}_{ар} = \dfrac{\sum \bar{x}_i f_i}{N} = \dfrac{26100}{30} = 870$ грн. или $\bar{x}_{ар} = \sum \bar{x}_i w_i = 869{,}9$ грн.

Групповые и общие средние.

Структурные средние - медиана и мода.

Средние арифметические, вычисленные на основе исходных данных и интервальных вариационных рядов, могут не совпадать из-за неравномерности распределения значений признака внутри интервалов. В этом случае для более точного вычисления средней арифметической взвешенной следует использовать не средины интервалов, а средние арифметические простые, рассчитанные для каждой группы (*групповые средние*). Средняя, вычисленная по групповым средним с использованием взвешенной формулы расчета, называется *общей средней*.

Использование свойств средней позволяет упростить ее вычисление.

Допустим, что все варианты (х) сначала уменьшены на одно и то же число А, а затем уменьшены в В раз. Наибольшее упрощение достигается, когда в качестве А выбирается значение середины интервала, обладающего наибольшей частотой, а в качестве В – величина интервала (для рядов с одинаковыми интервалами). Величина А называется началом отсчета, поэтому этот метод вычисления средней называется *способом отсчета от условного нуля*или *способом моментов*.

После такого преобразования получим новый вариационный ряд распределения, варианты которого равны $x_1 = \frac{x - A}{B}$. Их средняя арифметическая, называемая *моментом первого порядка,* выражается формулой $m_1 = \frac{\sum x_1 f}{\sum f}$ и согласно второго и третьего свойств средней арифметической равна средней из первоначальных вариант, уменьшенной сначала на А, а потом в В раз, т. е. $m_1 = \frac{\bar{x} - A}{B}$.

Для получения *действительной средней*(средней первоначального ряда)нужно момент первого порядка m_1 умножить на В и прибавить А:

$$\bar{x}_{ap} = m_1 B + A = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{B}\right) f}{\sum f} B + A$$

Для характеристики структуры статистической совокупности применяются показатели, которые называют **структурными средними.** К ним относятся мода и медиана.

Мода (M_o)– чаще всего встречающийся вариант. **Модой** называется значение признака, которое соответствует максимальной точке теоретической кривой распределений.

Мода представляет наиболее часто встречающееся или типичное значение.

Мода применяется в коммерческой практике для изучения покупательского спроса и регистрации цен.

В дискретном ряду мода – это варианта с наибольшей частотой. В интервальном вариационном ряду модой считают центральный вариант интервала, который имеет наибольшую частоту (частность).

В пределах интервала надо найти то значение признака, которое является модой.

$$M_0 = x_0 + h \cdot \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})}$$

где x_o – нижняя граница модального интервала;

h – величина модального интервала;

f_m – частота модального интервала;

f_{m-1} – частота интервала, предшествующего модальному;

f_{m+1} – частота интервала, следующего за модальным.

Мода зависит от величины групп, от точного положения границ групп.

Мода – число, которое в действительности встречается чаще всего (является величиной определенной), в практике имеет самое широкое применение (наиболее часто встречающийся тип покупателя).

Медиана (М$_e$ – это величина, которая делит численность упорядоченного вариационного ряда на две равные части: одна часть имеет значения варьирующего признака меньшие, чем средний вариант, а другая – большие.

Медиана – это элемент, который больше или равен и одновременно меньше или равен половине остальных элементов ряда распределения.

Свойство медианы заключается в том, что сумма абсолютных отклонений значений признака от медианы меньше, чем от любой другой величины.

Медиана — это такое значение признака, которое разделяет ранжированный ряд распределения на две равные части — со значениями признака меньше медианы и со значениями признака больше медианы. Для нахождения медианы, нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда.

Применение медианы позволяет получить более точные результаты, чем при использовании других форм средних.

Порядок нахождения медианы в интервальном вариационном ряду следующий: располагаем индивидуальные значения признака по ранжиру; определяем для данного ранжированного ряда накопленные частоты; по данным о накопленных частотах находим медианный интервал:

$$M_e = \frac{x_{me} + i_{me} \times \left(\frac{\sum F}{2} - S_{me} \right)}{f_{me}},$$

где x_{Me}– нижняя граница медианного интервала;

i_{Me} – величина медианного интервала;

$f/2$ – полусумма частот ряда;

S_{Me-1} – сумма накопленных частот, предшествующих медианному интервалу;

f_{Me} – частота медианного интервала.

Медиана делит численность ряда пополам, следовательно, она там, где накопленная частота составляет половину или больше половины всей суммы частот, а предыдущая (накопленная) частота меньше половины численности совокупности.

Вариационными называют ряды распределения, построенные по количественному признаку. Значения количественных признаков у отдельных единиц совокупности непостоянны, более или менее различаются между собой.

Вариация - колеблемость, изменяемость величины признака у единиц совокупности. Отдельные числовые значения признака, встречающиеся в изучаемой совокупности, называют **вариантами** значений. Недостаточность средней величины для полной характеристики совокупности заставляет дополнять средние величины показателями, позволяющими оценить типичность этих средних путем измерения колеблемости (вариации) изучаемого признака.

Наличие вариации обусловлено влиянием большого числа факторов на формирование уровня признака. Эти факторы действуют с неодинаковой силой и в разных направлениях. Для описания меры изменчивости признаков используют показатели вариации.

Задачи статистического изучения вариации:

1) изучение характера и степени вариации признаков у отдельных единиц совокупности;

2) определение роли отдельных факторов или их групп в вариации тех или иных признаков совокупности.

В статистике применяются специальные методы исследования вариации, основанные на использовании системы показателей, *с* помощью которых измеряется вариация.

Исследование вариаций имеет важное значение. Измерение вариаций необходимо при проведении выборочного наблюдения, корреляционном и дисперсионном анализе и т. д.

Вариация — это различия индивидуальных значений признака у единиц изучаемой совокупности. Исследование вариации имеет большое практическое значение и является необходимым звеном в экономическом анализе. Необходимость изучения вариации связана с тем, что средняя, являясь равнодействующей, выполняет свою основную задачу с разной степенью точности: чем меньше различия индивидуальных значений признака, подлежащих осреднению, тем однороднее совокупность, а, следовательно, точнее и надежнее средняя, и наоборот. Следовательно, по степени вариации можно судить о границах вариации признака, однородности совокупности по данному признаку, типичности средней, взаимосвязи факторов, определяющих вариацию.

Изменение вариации признака в совокупности осуществляется с помощью **абсолютных и относительных** показателей.

Абсолютные показатели вариации включают:

размах вариации R

среднее линейное отклонение $\bar{d}$

дисперсию σ^2

среднее квадратическое отклонение σ

Размах вариации — это разность между максимальным и минимальным значениями признака

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Он показывает пределы, в которых изменяется величина признака в изучаемой совокупности.

Среднее линейное и квадратическое отклонение

Среднее линейное отклонение $\bar{d}$ — это средняя арифметическая из абсолютных отклонений отдельных значений признака от средней.

Среднее линейное отклонение простое:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Среднее линейное отклонение взвешенное применяется для сгруппированных данных:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| * f}{\sum f}$$

Среднее квадратическое отклонение

Наиболее совершенной характеристикой вариации является среднее квадратическое отклужение, которое называют стандартом (или стандартным отклонение). **Среднее квадратическое отклонение** (σ) равно квадратному корню из среднего квадрата отклонений отдельных значений признака от средней арифметической:

Среднее квадратическое отклонение простое:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

Среднее квадратическое отклонение, являясь основной абсолютной мерой вариации, используется при определении значений ординат кривой нормального распределения, в расчетах, связанных с организацией выборочного наблюдения и установлением точности выборочных характеристик, а также при оценке границ вариации признака в однородной совокупности.

Дисперсия

Дисперсия σ^2 - представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины.

Дисперсия простая:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

Дисперсия взвешенная:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Более удобно вычислять дисперсию по формуле:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

которая, получается из основной путем несложных преобразований. В этом случае средний квадрат отклонений равен средней из квадратов значений признака минус квадрат средней.

Стандартное отклонение

Дабы вернуть дисперсию в реальность, то есть использовать результат расчета для более приземленных целей, из нее извлекают квадратный корень. Получается так называемое **стандартное отклонение**. В статистике этот показатель еще называют среднеквадратическим отклонением, но первое название более короткое и распространенное. Будем им пользоваться. Формула стандартного отклонения имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2}{n}}$$

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение как показатель вариации. Методы расчета. Дисперсия - средняя из квадратов отклонений вариантов значений признака от их средней величины:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Или для не сгруппированных данных, $\sigma^2 = (x_i - x)^2$

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x\,i - x)2fi}{\Sigma fi}$ для сгруппированных данных (1)

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение. Коэффициент вариации

Среднее квадратическое отклонение основано на рассмотрении отклонений значений признака отдельных единиц совокупности от средней арифметической. При этом используется способ усреднения отклонений вариантов от средней арифметической, позволяющий обойти трудность, обусловленную равенством нулю их алгебраической суммы. Данный способ сводится к расчету квадратов отклонений вариантов от средней с их последующим усреднением.

Дисперсия (σ^2) - средняя из квадратов отклонений вариантов значений признака от их средней величины:

формула (1)применяется при наличии у вариантов своих весов (или частот вариационного ряда).

Среднее квадратическое отклонение (σ) представляет собой корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(xi - x)2fi}{\Sigma fi}}$$

Коэффициент вариации - наиболее часто применяемый показатель относительной колеблемости, характеризующий однородность совокупности. Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33 %.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\%$$.

Для целей сравнения колеблемости различных признаков в одной и той же совокупности или же при сравнении колеблемости одного и того же признака в нескольких совокупностях исчисляют *показатели вариации в относительных величинах.* Базой для сравнения должна служить средняя арифметическая. Эти показатели вычисляются как отношение размаха вариации, среднего линейного отклонения или среднего квадратического отклонения к средней арифметической (реже к медиане). Чаще всего они выражаются в процентах и определяют не только сравнительную оценку вариации, но и дают характеристику однородности совокупности. *Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33%* (для распределения близкого к нормальному). Различают следующие относительные показатели вариации:

***Коэффициент осцилляции** (v_R)* рассчитывается по формуле:

$$v_R = \frac{R}{\overline{\overline{X}}} \times 100\%$$

и отражает относительную меру колеблемости крайних значений признака вокруг средней.

Линейный коэффициент вариации (v_d) рассчитывается по формуле:

$$v_d = \frac{\overline{d}}{\overline{\overline{X}}} \times 100\%$$

и отражает долю усреднённого значения абсолютных отклонений от средней величины.

***Коэффициент вариации** (v_σ)* как относительное квадратическое отклонение от средней величины рассчитывается по формуле:

$$v_\sigma = \frac{\sigma}{\overline{\overline{X}}} \times 100\%$$

Например, для оценки вариации в случае асимметрического распределения вычисляют отношение среднего линейного отклонения к медиане, так как благодаря свойству медианы сумма абсолютных отклонений признака от ее величины всегда меньше, чем от любой другой. В качестве относительной меры рассеивания, оценивающей вариацию центральной части совокупности, вычисляют относительное квартильное отклонение $V_g \frac{Q}{Me}$, где Q — средний квартиль полусуммы разности третьего (или верхнего) квартиля (Q_3) и первого (или нижнего) квартиля (Q_1).

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

На практике чаще всего вычисляют коэффициент вариации. Нижней границей этого показателя является нуль, верхнего предела он не имеет, однако известно, что с увеличением вариации признака увеличивается и его значение. Коэффициент вариации является в известном смысле критерием однородности совокупности (в случае нормального распределения).

Вычисление средней арифметической и показателей вариации. Для больших выборок (п > 30) применяют непрямой способ вычисления средней арифметической и других статистических показателей. Здесь мы рассмотрим способ произведений. Для этого строят вариационный ряд и среднюю арифметическую вычисляют по формуле

$$\bar{x} = A + b = A + k\frac{\sum fa}{n},$$

где А — условная средняя; b — поправка к условной средней; к — классный промежуток; *f*— число вариантов в классе; а — условное отклонение отдельных классов (выраженное в классных промежутках) от среднего условного класса (А); п — число вариантов в выборке.

За условную среднюю А обычно принимается среднее значение класса с наибольшей частотой вариант или находящееся приблизительно в середине вариационного ряда.

Дисперсия, ее свойства. Межгрупповая дисперсия и правило сложения дисперсий.

Дисперсия представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и вычисляется по формулам простой и взвешенной дисперсий (в зависимости от исходных данных):

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \text{ (простая дисперсия)},$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \text{ (взвешенна я дисперсия)},$$

среднее квадратическое отклонение (σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$ (простое среднеквадратическое отклонение),

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}}$$ (взвешенное среднеквадратическое отклонение).

Среднее квадратическое отклонение – это обобщающая характеристика размеров вариации признака в совокупности. Оно выражается в тех же единицах, что и признак.

Расчет дисперсии может быть упрощен. В случае равных интервалов в вариационном ряду распределения используется способ отсчета от условного нуля (способ моментов). Для его понимания необходимо знать следующие **свойства дисперсии:**

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Свойство 2. Уменьшение всех значений признака на одну и ту же величину А не меняет величины дисперсии $\sigma^2_{(X-A)} = \sigma^2_X$. Значит, средний квадрат отклонений можно вычислить не по заданным значениям признака, а по отклонениям их от какого-либо постоянного числа.

Свойство 3. Уменьшение всех значений признака в К раз уменьшает дисперсию в K^2 раз, а среднее квадратическое отклонение в К раз $\sigma^2_{(X/K)} = \sigma^2_X / K^2$.

Значит, все значения признака можно разделить на какое-то постоянное число, например, на величину интервала ряда, исчислить среднее квадратическое отклонение, а затем умножить его на постоянное число: $\sigma_X = \sigma_{X/K} \cdot K$.

Свойство 4. Если вычислить средний квадрат отклонений от любой величины А, в той или иной степени отличающейся от средней арифметической, то он всегда будет больше среднего квадрата отклонений, вычисленного от средней арифметической $\sigma^2_A > \sigma^2_X$. Средний квадрат отклонений при этом будет больше на величину $(A)^2$

$$\sigma^2_A = \sigma^2_X + (\bar{x} - A)^2, \text{ или } \quad \sigma^2_X = \frac{\sum (x_i - A)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - (\bar{x} - A)^2.$$

Значит, дисперсия от средней величины всегда меньше дисперсий, вычисленных от любых других величин, т.е. она имеет свойство минимальности.

В общем случае вариация результативного признака обусловлена различными факторами в их совокупности, а не только воздействием одного из них. Если статистическую совокупность разбить на группы по какому-либо признаку, то наряду с изучением вариации результативного признака по всей совокупности в целом под воздействием всех факторов получаем возможность изучить вариацию для каждой из составляющих всю совокупность групп по отдельности. Также можно изучить при этом вариацию между группами. В простейшем случае вся исходная совокупность разбивается на отдельные группы по одному фактору. Тогда указанный выше анализ вариации сводится к расчету и анализу трех видов дисперсии: общей, внутригрупповой и межгрупповой. Общая дисперсия измеряет вариацию результативного признака по всей совокупности под влиянием всех факторов, обусловивших эту вариацию.

Межгрупповая дисперсия δ^2 характеризует систематическую вариацию под воздействием признака-фактора, положенного в основание группировки. Она равна среднему квадрату отклонений групповых (частных) средних от общей средней для всей совокупности:

$$\delta^2 = \frac{\sum\left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)^2 \cdot f}{\sum f}, \quad (4.3)$$

где f — численность единиц в группе (частота).

Внутригрупповая дисперсия есть уже известная нам дисперсия (для всей совокупности, называемая общей), но теперь эта формула применяется только к отдельной группе. Соответственно и обозначается она σ2, но уже с индексом i, который подчеркивает, что расчет выполняется для отдельной i-группы.

Внутригрупповая дисперсия отражает случайную вариацию, т.е. ту ее часть, которая обусловлена влиянием прочих (неучтенных) факторов, отличных от основания группировки. По отдельным внутригрупповым дисперсиям, рассматривая их как значения некоторого особого признака, рассчитывают **среднюю по внутригрупповым дисперсиям**, которая уже характеризует вариацию по всей совокупности в целом под воздействием всех прочих (неучтенных) факторов, отличных от основания группировки.

Существует простая и важная формула, связывающая общую дисперсию, межгрупповую дисперсию и среднюю по внутригрупповым дисперсиям:

$$\sigma^2 = \delta^2 + \sigma_i^2. \quad (4.4)$$

Это означает, что общая дисперсия равна сумме межгрупповой дисперсии и средней по внутригрупповым дисперсиям. Следовательно, зная две из трех дисперсий, можно всегда найти и третью.

Правило сложения дисперсий показывает, что чем больше доля межгрупповой дисперсии в общей дисперсии, тем сильнее влияние группировочного признака на изучаемый результативный признак. Такие соображения естественным образом приводят к количественной характеристике такого влияния, мере стохастической связи между признаками. Она называется эмпирическим **коэффициентом детерминации** и обозначается η2, характеризуя силу влияния группировочного признака на образование общей вариации:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} \quad . (4.5)$$

При отсутствии связи он просто равен нулю, при чисто функциональной связи — 1. В общем случае коэффициент детерминации принимает значения между 0 и 1. Это видно и из правила сложения дисперсий.

Помимо коэффициента детерминации используют также и эмпирическое корреляционное отношение, которое представляет собой корень квадратный из коэффициента детерминации. И опять оно весьма подходит для измерения линейной связи.

В общем случае нелинейной связи предпочтительнее использовать, что правильнее, коэффициент детерминации. Если связь отсутствует, то корреляционное отношение равно нулю и, следовательно, все групповые средние равны между собой, а межгрупповой вариации просто в этом случае нет.

Группировочный признак при этом никак не влияет на образование общей вариации. Если связь функциональная, то корреляционное отношение равно 1. Дисперсия групповых средних равна общей дисперсии и межгрупповой дисперсии, поэтому внутригрупповой вариации не будет. Таким образом, группировочный признак целиком определяет вариацию изучаемого результативного признака.

Любой закон природы или общественного развития может быть представлен описанием совокупности взаимосвязей. Если эти зависимости стохастичны, а анализ осуществляется по выборке из генеральной совокупности, то данная область исследований относится к задачам статистического исследования зависимостей, которые включают в себя корреляционный, регрессионный, дисперсионный, ковариационный анализ и анализ таблиц сопряженности.

Основное содержание анализа взаимосвязей – это поиск ответа на вопросы:

- Существует ли связь между исследуемыми переменными?
- Как измерить тесноту связей?

Общая схема взаимосвязи параметров при статистическом исследовании приведена на рис. 4.5.

Рис 4.5. Общая схема взаимосвязи параметров при статистическом исследовании

На рисунке S – модель исследуемого реального объекта, объясняющие (независимые, факторные) переменные описывают условия функционирования объекта. Случайные факторы – это факторы, влияние которых трудно учесть или влиянием которых в данный момент пренебрегают. Результирующие (зависимые, объясняемые) переменные характеризуют результат функционирования объекта.

Выбор метода анализа взаимосвязи осуществляется с учетом природы анализируемых переменных (таб.4.7).

Таблица 4.7

	Метрическая	Порядковая	Дихотомическая
Метрическая	Корреляция Пирсона		бисериальная корреляция
Порядковая		ранговые корреляции Спирмена, Кенделла, полихорическая корреляция и др.	рангово-бисериальная корреляция и меры ассоциации
Дихотомическая			меры ассоциации,отношение шансов

Корреляционный анализ — метод обработки статистических данных, заключающийся в изучении связи между переменными.

Цель корреляционного анализа - обеспечить получение некоторой информации об одной переменной с помощью другой переменной. В случаях, когда возможно достижение цели, говорят, что переменные коррелируют. Корреляция отражает лишь линейную зависимость величин, но не отражает их функциональной связности. Например, если вычислить коэффициент корреляции между величинами A = sin(x) и B = cos(x), то он будет близок к нулю, т.е. зависимость между величинами отсутствует.

При исследованиях корреляции используются графический и аналитический подходы.

Графический анализ начинается с построения корреляционного поля. Корреляционное поле (или диаграмма рассеяния) является графической зависимостью между результатами измерений двух признаков. Для ее построения исходные данные наносят на график, отображая каждую пару значений (xi,yi) в виде точки с координатами xi и yi в прямоугольной системе координат.

Визуальный анализ корреляционного поля позволяет сделать предположение о форме и направлении взаимосвязи двух исследуемых показателей. По форме взаимосвязи корреляционные зависимости принято разделять на линейные (см. рис. 4.6а) и нелинейные (см. рис. 4.6б). При линейной зависимости огибающая корреляционного поля близка к эллипсу. Линейная взаимосвязь двух случайных величин состоит в том, что при увеличении одной случайной величины другая случайная величина имеет тенденцию возрастать (или убывать) по линейному закону.

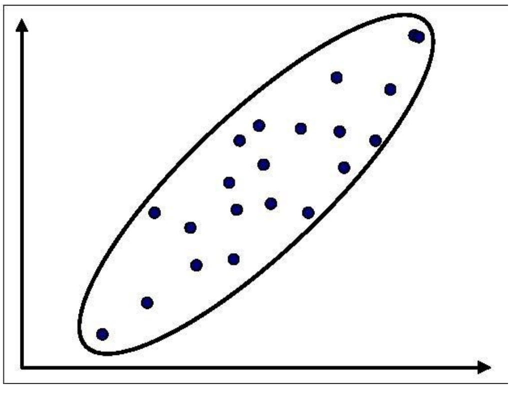


Рис 4.6а. Линейная статистическая связь

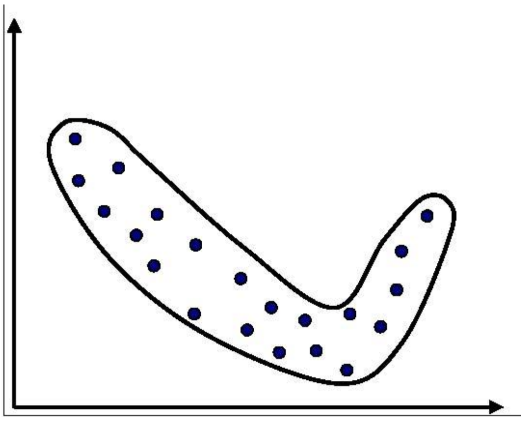


Рис 4.6б. Нелинейная статистическая связь

Направление связи является положительным, если увеличение значения одного признака приводит к увеличению значения второго (см. рис. 9в) и отрицательным, если увеличение значения одного признака приводит к уменьшению значения второго (см. рис. 9г).

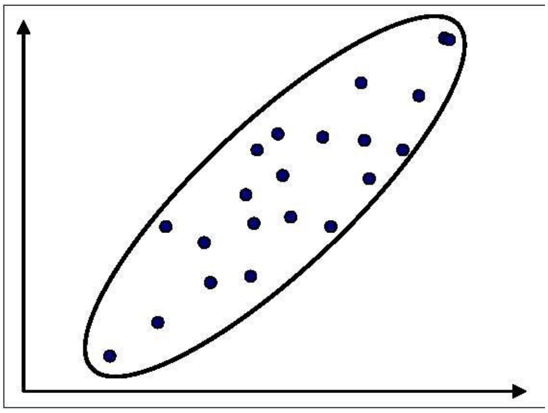


Рис 4.6в. Положительная направленность

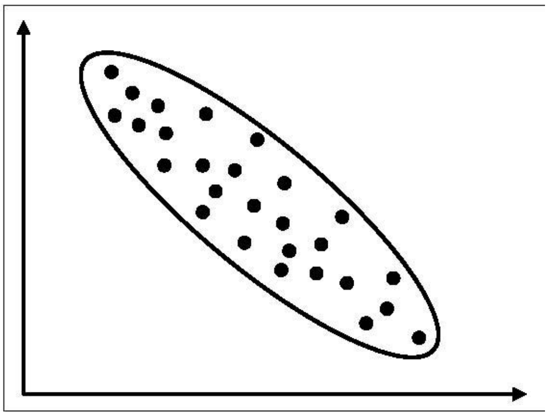


Рис 4.6г. Отрицательная направленность

Зависимости, имеющие только положительные или только отрицательные направленности, называются монотонными.

Коэффициент корреляции

Количественная оценка тесноты взаимосвязи двух случайных величин осуществляется с помощью коэффициента корреляции. Вид коэффициента корреляции и, следовательно, алгоритм его вычисления зависят от шкалы, в которой производятся измерения изучаемых показателей и от формы зависимости.

Значение коэффициента корреляции может изменяться в диапазоне от -1 до +1:

$$-1 \le r \le 1 .$$

Абсолютное значение коэффициента корреляции показывает силу взаимосвязи. Чем меньше его абсолютное значение, тем слабее связь. Если он равен нулю, то связь вообще отсутствует. Чем больше значение модуля коэффициента корреляции, тем сильнее связь и тем меньше разброс в значениях y_i при каждом фиксированном значении x_i. Знак коэффициента корреляции определяет направленность взаимосвязи: минус – отрицательная, плюс – положительная (см. рис. 4.7а).

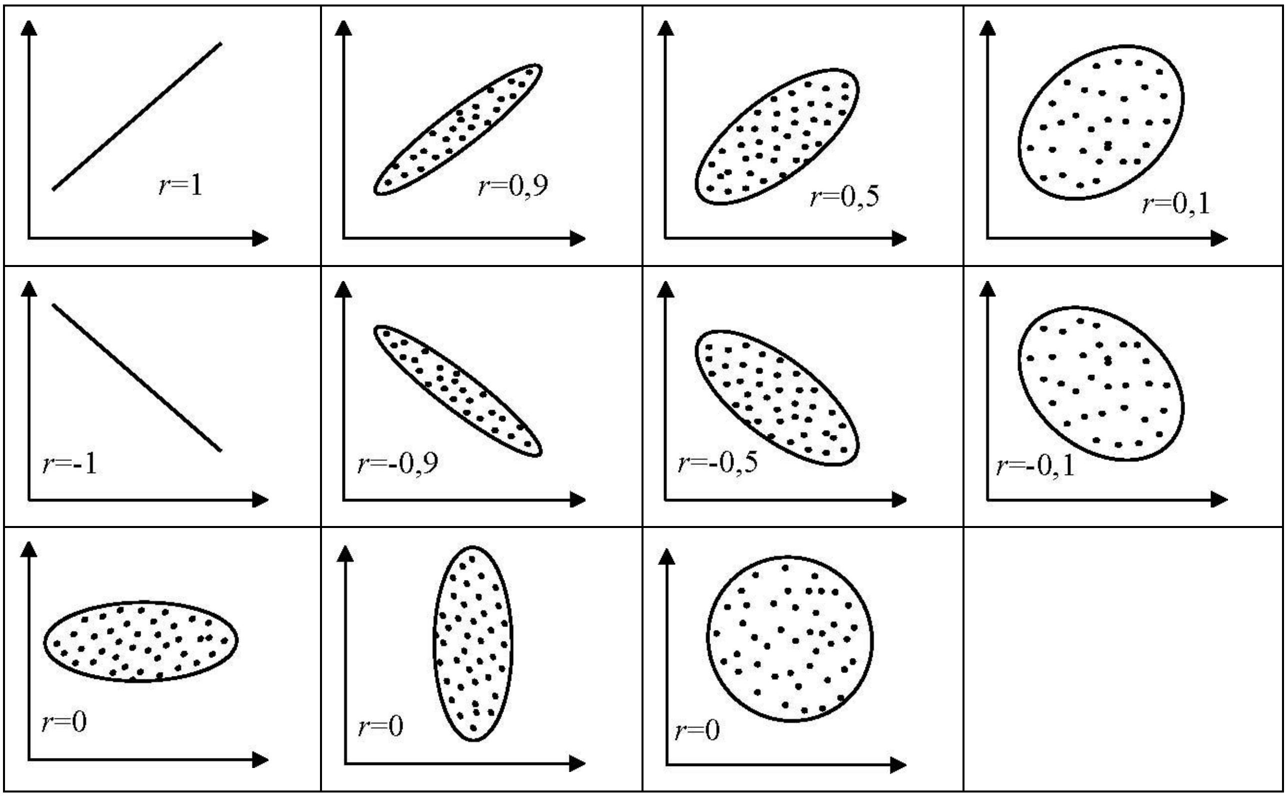


Рис.4.7а. Корреляционные поля при различных значениях коэффициента корреляции

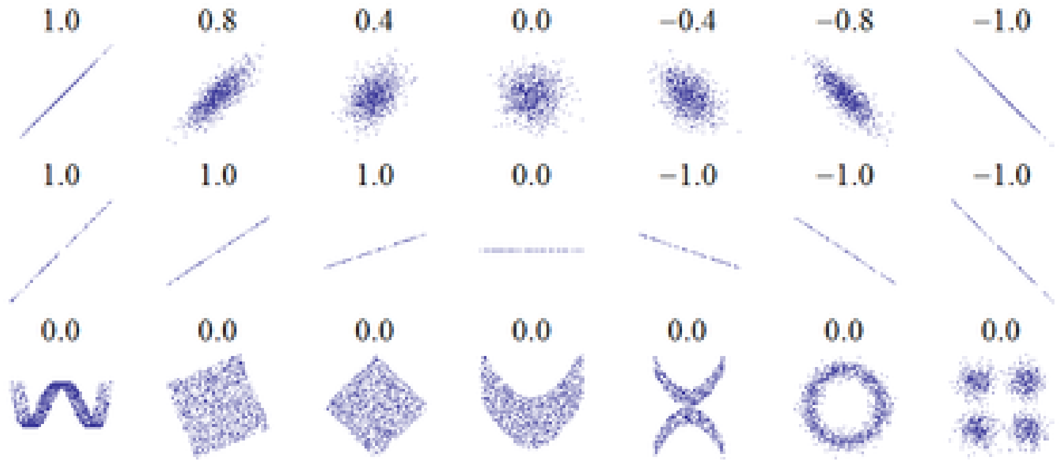


Рис.4.7б. Коэффициенты корреляции при различной форме корреляционного поля.

Коэффициент корреляции отражает линейную зависимость и совсем не подходит для описания сложных, нелинейных зависимостей (нижняя строка).

Достаточно условно может быть использована следующая классификация взаимосвязей по значению коэффициента корреляции (см. табл. 4.8).

Таблица 4.8

1	$\lvert r \rvert = 1$	функциональная зависимость
2	$0{,}7 \le \lvert r \rvert \le 0{,}99$	сильная статистическая взаимосвязь
3	$0{,}5 \le \lvert r \rvert \le 0{,}69$	средняя статистическая взаимосвязь
4	$0{,}2 \le \lvert r \rvert \le 0{,}49$	слабая статистическая взаимосвязь
5	$0{,}09 \le \lvert r \rvert \le 0{,}19$	очень слабая статистическая взаимосвязь
6	$\lvert r \rvert = 0$	корреляции нет (линейной)

Квадрат коэффициента корреляции выборки, как правило, обозначается r^2 и называется *коэффициентом детерминации*.

Коэффициент детерминации оценивает *долю* дисперсии (*изменчивости*) Y, которая объясняется с помощью X в простой *линейной* регрессионной модели.

Итак, пусть мы наблюдаем значения X_i и соответствующие значения Y_i , например, доза лекарственного препарата, назначенного пациенту и эффект, доля примеси в меди и проводимость и тд.

Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Покажем, как коэффициент корреляции и коэффициент детерминации связан с *линейной* регрессией.

Пусть по наблюдениям X_i, Y_i построена линейная регрессионная модель:

$$\hat{Y} = aX + b$$

где коэффициенты a,b оценки по методу наименьших квадратов.

Общее изменение Y_i относительно среднего значения можно разложить следующим образом:

$$\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, \qquad (*)$$

где $\hat{Y}_i$ - предсказанные значения Y. Формула (*) это основное тождество регрессионного анализа.

Выражение (*) можно преобразовать:

$$1 = \frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}.$$

Затем мы применяем свойство наименьших квадратов регрессионной модели, что ковариация выборки между *предсказанными* значениями и *остатками* $\hat{Y}_i$ и $Y_i - \hat{Y}_i$ равна нулю.

Таким образом, коэффициент корреляции выборки между наблюдаемыми и предсказанными значениями равен:

$$\begin{aligned} r(Y, \hat{Y}) &= \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \\ &= \frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \\ &= \frac{\sum_i [(Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2]}{\sqrt{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \\ &= \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sqrt{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что квадрат коэффициента корреляции между наблюдаемыми и предсказанными равен доле дисперсии, которая объясняется X в линейной регрессионной модели.

$$r(Y, \hat{Y})^2 = \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Вопросы для самоконтроля

1.Вариация признака в совокупности и недостаточность одной средней для характеристики совокупности.

2.Показатели вариации.

3. Что такое дисперсия?

4.Каковы свойства дисперсии?

5.Что такое межгрупповая дисперсия?

6.В чем заключается правило сложения дисперсий. –

7.Охарактеризуйте коэффициенты корреляции и детерминации как показатели тесноты связи.

Тема 3. Модели регрессии

Основы математического обоснования методов эконометрики. Линейная модель. Понятие парной регрессии, спецификация. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Условия применения метода наименьших квадратов

Основы математического обоснования методов эконометрики. Линейная модель.

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость некоторого экономического показателя от одного или нескольких других показателей. Очевидно, любые экономические показатели, как правило, находятся под влиянием случайных факторов, а потому с математической точки зрения интерпретируются как случайные величины. Из теории вероятностей известно, что случайные величины могут быть связаны функциональной или статистической зависимостью или вообще быть независимыми. Строгая функциональная зависимость реализуется в экономике редко. Чаще наблюдается так называемая статистическая зависимость.

Статистическая зависимость, когда с изменением одной случайной величины изменяется закон распределения вероятностей другой. Корреляционная зависимость статистическая зависимость, которая проявляется в том, что с изменением одной величины изменяется среднее значение другой.

Можно отметить два типа взаимосвязи переменных. В одном случае неизвестно, какая из переменных независимая, а какая — зависимая, то есть они равноправны и связь можно рассматривать как в одну, так и в другую сторону. Во втором случае переменные неравноправные, то есть изменения лишь одной из них влияет на изменение другой, а не наоборот. В этом случае при рассмотрении связи между двумя переменными величинами важно установить отношение логического рассуждения: которое из признаков является причиной, а какое следствием. Например, доходность банковского учреждения зависит от размера ставки по кредитам (депозитам), а не наоборот, то есть экономическая оценка процентной ставки является независимой переменной, а доходность — зависимой. Следует иметь в виду, что статистический анализ зависимостей сам по себе не раскрывает сущности причинных связей между явлениями, то есть он не решает вопрос, по каким причинам одна переменная влияет на другую. Решение такой задачи является результатом качественного (содержательного) изучения связей, обязательно должен либо предшествовать статистическому анализу или сопровождать его. Применение методов математического аппарата для эконометрических моделей на различных уровнях экономической деятельности позволяет решать экономические проблемы разного уровня сложности. На уровне макроэкономики математическими средствами эконометрики исследуют закономерности в производстве, распределении, перераспределении и конечном использовании валового внутреннего продукта, в которых существенную роль играют государственный бюджет, налоговая политика, страхование, кредит, сберегательное дело. Согласованность всех отраслей финансово-кредитной системы определяет эффективность распределительных отношений, сбалансированность доходов и расходов в народном хозяйстве, обеспечение процессов воспроизводства денежных ресурсов, финансовой защищенности государственного, коллективного и личного имущества от инфляции и других негативных явлений. На микроуровне эконометрические исследования предполагают научное обоснование управленческих решений, принимаемых на предприятиях различных форм собственности и должны учитывать постоянное воздействие внешней среды. Модели могут использоваться для анализа экономических и социально-экономических показателей, характеризующих соответствующую экономическую систему, для прогнозирования их дальнейшего изменения или для имитации возможных сценариев социально-экономического развития исследуемой системы при условии, что некоторые показатели можно изменять целенаправленно. Особое значение эконометрические исследования приобретают в макроэкономике, где взаимосвязи величин часто неочевидные и изменчивы. Не исключены ситуации, когда модель вдруг перестает «работать» из-за появления или активизации какого-нибудь фактора. Именно такие ситуации вызывают развитие макроэкономической теории. С другой стороны, именно эконометрический анализ позволяет обосновать и уточнить форму зависимостей в макроэкономических моделях, лучше понять механизмы взаимосвязи макроэкономических показателей. Итак, сочетая в себе экономическую теорию и математико-статистические методы, эконометрическое моделирование широко применяется при принятии практических решений в экономической деятельности (в бизнесе, банковском деле, прогнозировании, государственном регулировании экономики), а также является мощной базой для получения новых знаний по экономике.

Термин «эконометрика» означает измерения в экономике, но не все прикладные исследования экономики средствами математики относятся к эконометрии. Эконометрика изучает модели и методы количественной оценки параметров моделей, характеризующих взаимосвязи между экономическими показателями на макро и микроуровне экономики. Именно поэтому процесс изучения экономических явлений и процессов методами эконометрики называется эконометрическим моделированием. В эконометрике любой результат хозяйственной деятельности на макро и микроуровне экономики рассматривается как очень сложная функция, как по аналитической форме, так и по неопределенно большому количеству условий-факторов. Общий ее вид такой:

$y = f(x_1, x_2, ...)$ (1) где y — зависимая переменная (результат); xi — независимые переменные (факторы), влияющие на уровень и вариацию y.

Такой сложный объект моделирования объективно невозможно аналитически аппроксимировать однозначным (детерминированным) уравнением. В эконометрическую модель не могут быть включены все условия-факторы, потому что:

-много условий-факторов аналитику неизвестны;

- часть факторов не имеют количественного измерения;

-о некоторых факторах отсутствует информация; -влияние многих факторов очень незначительно и его можно оставить без внимания.

В эконометрическую модель включается ограниченное количество наиболее важных факторов, и она приобретает вид:

$\hat{y} = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ (2), где — математическое ожидание, или наиболее вероятное, среднее из возможных значений y. Такое упрощение действительности обусловливает возникновение ошибки аппроксимации, или прогноза, потому что в таком случае

$y = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \varepsilon$ (3), где — случайная составляющая y, что объясняется влиянием других (не учтенных и неизвестных) факторов. Это означает, что эконометрические модели является стохастическими, вероятностными. Стохастические зависимости в эконометрике называются также корреляционными. Термин «корреляция» (лат. correlatio) ввел в научной терминологии английский ученый Ф. Гальтон в 1877. Этот термин буквально означает соотношение, пропорции, связь, зависимость. Для определения зависимостей в эконометрии используются такие обозначения: у — зависимая (эндогенная) переменная; хі — независимые (экзогенные), объясняющие переменные, или факторы. Уравнение (2) называется уравнением регрессии. Такое название введено английским антропологом К. Пирсоном в начале XX века. Уравнения регрессии могут иметь линейную:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \varepsilon, \quad (4)$$

и нелинейную, форму, например степенную,

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \ldots + x_m^{\alpha_m} + \varepsilon, \quad (5)$$

где $\alpha_i \left(i = \overline{0,m}\right)$ — параметры уравнения регрессии, или коэффициенты регрессии. Они определяют влияние изменение факторов хі на уровень у.

Если модель линейная, то показывает, на сколько единиц изменяется у при изменении x_i на единицу.

В степенной модели коэффициент регрессии является относительной мерой изменения, он определяет, на сколько процентов изменится у, если хі изменится на один процент. Итак, предметом эконометрии являются методы оценивания параметров уравнений регрессии. Поскольку независимых переменных в действительности может быть неопределенно много и истинная аналитическая форма зависимостей у от хі неизвестна, коэффициенты регрессии и величину определить однозначно объективно невозможно.

Оценивание параметров модели сводится к определению их эмпирических, вероятностных оценок.

В процессе эконометрического моделирования решаются в общем две проблемы:

1) построение уравнения регрессии, то есть зависимости зависимой (эндогенной) переменной в от независимых (экзогенных) переменных;

2) определение доверительных границ для математического ожидания у, в пределах которых находится случайная составляющая, которая означает ошибку прогноза или аппроксимации у.

Решение первой проблемы осуществляется путем решения ряда задач, а именно: идентификация переменных, спецификация аналитической формы уравнения регрессии, оценки параметров уравнения регрессии и его качества.

Идентификация, то есть обоснование выбора независимых переменных сначала основывается на предварительном теоретическом, качественном анализе экономической сущности моделируемой зависимости. Затем предварительный перечень независимых переменных должен подвергаться количественной оценке силы и автономности влияния их на зависимую переменную и только после этого можно определить окончательный состав независимых переменных. Для понимания смысла и целей идентификации вводится понятие коэффициента детерминации d. Он определяет удельный вес вариации (колебания) зависимой переменной y под влиянием независимой переменной x_i в общей изменчивости зависимой переменной под влиянием совершенно всех независимых переменных. Спецификация аналитической формы уравнения регрессии заключается в обосновании линейной или определенного вида нелинейной формы зависимостей y от x_i. Она сводится к выбору наиболее адекватного теоретической гипотезе аналитика типа из известных в математике уравнений (линейное, параболическое, гиперболическое степенное, экспоненциальное).

Оценивание параметров уравнения регрессии — очень сложная и трудоемкая задача моделирования. Это обусловлено особенностями массивов экономической информации о развитии экономических объектов. Решение второй проблемы эконометрического моделирования состоит в определении доверительных границ для оценки, в пределах которых находится истинное значение y, или ошибка аппроксимации e, то есть разница. Следовательно, решение проблем эконометрического моделирования путем последовательного решения ряда прикладных задач должно привести к получению эконометрической модели в виде:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \Delta y \quad (6)$$

Методы эконометрики являются самыми современными средствами анализа и исследования различных социально-экономических систем. С помощью эконометрических методов можно отклонить некоторые экономические гипотезы или показать невозможность применения в конкретных условиях. Хотя средства эконометрики не позволяют доказать теоретические утверждения, но за счет ее методов можно показать, что то, или иное утверждение не противоречит данным наблюдений. Овладев элементарным инструментарием эконометрики, можно обоснованно прогнозировать развитие этих систем, оценивать влияние решений или правительственных постановлений об изменении цен, налогов и т. д. на положение дел любого предприятия, разрабатывать пути эффективного управления ими, принимать эффективные управленческие решения. Если результаты экономической теории имеют качественное содержание, то эконометрия привносит в них эмпирическую суть. Если математическая экономика выражает экономические законы в виде математических соотношений, то эконометрика осуществляет статистическую проверку этих законов, используя эмпирическую информацию. Полученные математическими методами и выражены языком математики результаты только тогда имеют ценность, если их можно интерпретировать языком экономики. Эконометрика использует традиционные математико-статистические и специально разработанные методы для выявления количественных взаимосвязей между экономическими показателями. Эконометрика имеет экономическую и математическую составляющие, причем экономическая составляющая является предпочтительней. Изучение эконометрики предполагает соответствующую математическую и экономическую подготовку. Однако для того, чтобы ознакомиться с проблемами, которые изучает эконометрика и с которыми сталкиваются те, кто использует эконометрические методы, не нужно быть специалистом по всем разделам математики и экономики. Знание определенных разделов математики, в частности основ линейной алгебры, теории матриц, теории вероятностей, математической статистики и основ экономики, могут оказаться достаточными для изучения эконометрики.

Понятие парной регрессии, спецификация. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов Условия применения метода наименьших квадратов.

В практических исследованиях возникает необходимость аппроксимировать (описать приблизительно) диаграмму рассеяния математическим уравнением. То есть зависимость между переменными величинами Y и X можно выразить аналитически с помощью формул и уравнений и графически в виде геометрического места точек в системе прямоугольных координат. График корреляционной зависимости строится по уравнениям функции $\bar{y}_x = f(x)$ и $\bar{x}_y = f(y)$, которые называются ***регрессией*** (термин "регрессия" происходит от лат. Regressio - движение назад). Здесь $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$ - средние арифметические из числовых значений зависимых переменных Y и X.

Для выражения регрессии служат эмпирические и теоретические ряды, их графики - линии регрессии, а также корреляционные уравнения (уравнения регрессии) и коэффициент линейной регрессии.

Показатели регрессии выражают корреляционную связь двусторонне, учитывая изменение средней величины $\bar{y}_x$ признака Y при изменении значений x_i признака X, и, наоборот, показывают изменение средней величины $\bar{x}_y$ признака X по измененным значениям y_i признака Y. Исключение составляют временные ряды, или ряды динамики, показывающие изменение признаков во времени. Регрессия таких рядов является односторонней.

Основная задача регрессионного анализа- установление формы связи между переменными.

Ряды регрессии, особенно их графики, дают наглядное представление о форме и тесноте корреляционной связи между признаками, в чем и заключается их ценность. Форма связи между показателями может быть разнообразной. И поэтому задача состоит в том, чтобы любую форму корреляционной связи выразить уравнением определенной функции (линейной, параболической и т.д.), что позволяет получать нужную информацию о корреляции между переменными величинами Y и X, предвидеть возможные изменения признака Y на основе известных изменений X, связанного с Y корреляционно.

Парная регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными – *y*и *x,* т. е. модель вида:

Y=$\overline{f}$(x),

где *y*– зависимая переменная (результативный признак); *x*– независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор). Знак «^» означает, что между переменными *x*и *y*нет строгой функциональной зависимости, поэтому практически в каждом отдельном случае величина *y*складывается из двух слагаемых:

Y=$\widehat{y_x} + \varepsilon$,

где *y*– фактическое значение результативного признака;$\widehat{y_x}$ – теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из уравнения регрессии; ε – случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется также возмущением. Она включает влияние не учтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

От правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: они тем меньше, чем в большей мере теоретические значения результативного признака $\widehat{y_x}$, подходят к фактическим данным y.

К ошибкам спецификации относятся неправильный выбор той или иной математической функции для $\widehat{y_x}$и недоучет в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т. е. использование парной регрессии вместо множественной.

Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, которые имеют место в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении экономических процессов. Если совокупность неоднородна, то уравнение регрессии не имеет практического смысла. Для получения хорошего результата обычно исключают из совокупности единицы с аномальными значениями исследуемых признаков. И в этом случае результаты регрессии представляют собой выборочные характеристики.

Использование временной информации также представляет собой выборку из всего множества хронологических дат. Изменив временной интервал, можно получить другие результаты регрессии.

Наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии представляют ошибки измерения. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки – увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически сводят на нет все усилия по количественной оценке связи между признаками.

Особенно велика роль ошибок измерения при исследовании на макроуровне. Так, в исследованиях спроса и потребления в качестве объясняющей переменной широко используется «доход на душу населения». Вместе с тем, статистическое измерение величины дохода сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например, в результате наличия скрытых доходов.

Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в эконометрических исследованиях уделяется ошибкам спецификации модели.

В парной регрессии $\widehat{y_x} = f(x)$выбор вида математической функции может быть осуществлен тремя методами:

1) графическим;

2) аналитическим, т.е. исходя из теории изучаемой взаимосвязи;

3) экспериментальным.

При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден. Он основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рис. 4.9:

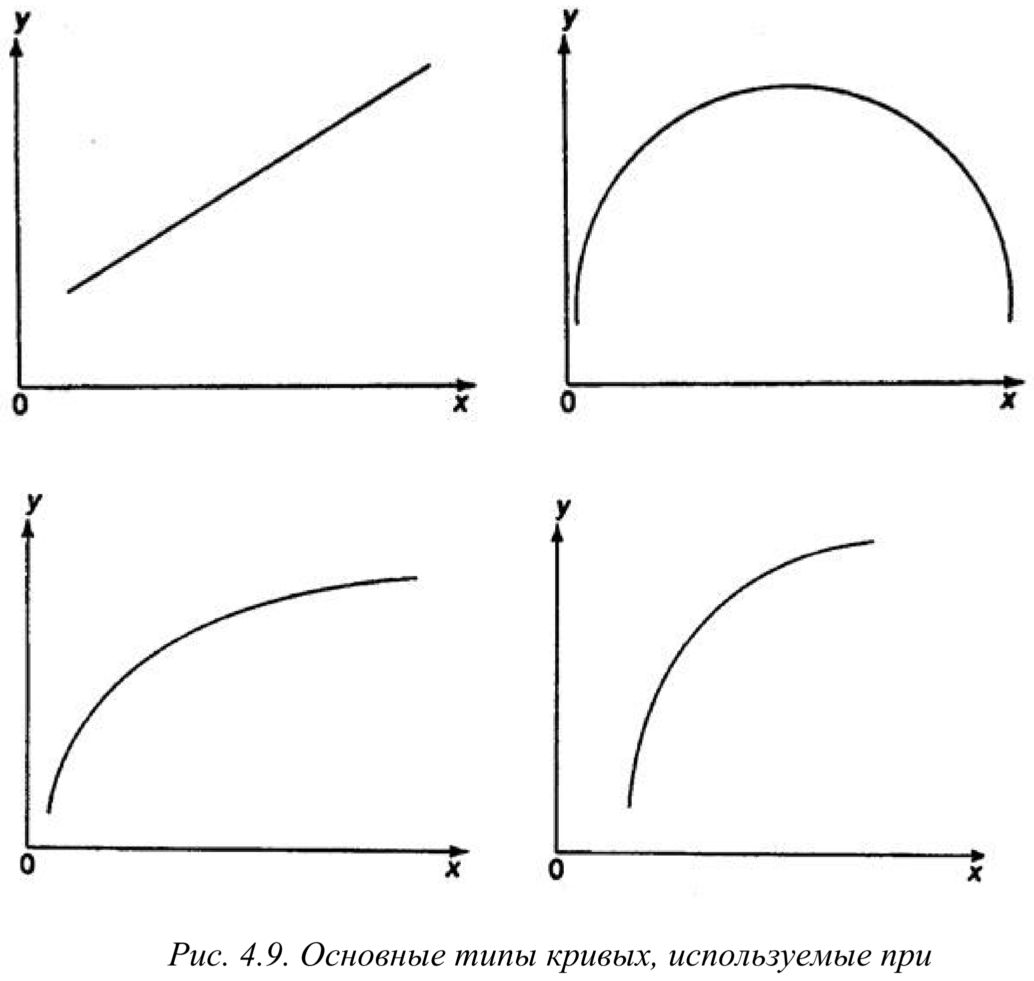


Рис. 4.9. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными

Значительный интерес представляет аналитический метод выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т. е. путем сравнения величины остаточной дисперсии , $\sigma^2_{\text{ост}}$рассчитанной при разных моделях.

Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессии $\widehat{y_x} = f(x)$, то фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими y=$\widehat{y_x}$т.е. они полностью обусловлены влиянием фактора x. В этом случае остаточная дисперсия $\sigma^2_{\text{ост}} = 0$.

В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих, не учитываемых в уравнении регрессии, факторов. Иными словами, имеют место отклонения фактических данных от теоретических $(y$-$\widehat{y_x})$. Величина этих отклонений и лежит в основе расчета остаточной дисперсии:

$$\sigma^2_{\text{ост}} = \frac{1}{n}\sum(y - \widehat{y_x})^2$$

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем меньше влияние не учитываемых в уравнении регрессии факторов и тем лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным.

Считается, что число наблюдений должно в 7-8 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при xдолжен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени$\widehat{y_x} = a + b * x + c *$x^2,то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений.

Уравнение линейной регрессии

Обычно признак Y рассматривается как функция многих аргументов - x_1, x_2, x_3, -и может быть записана в виде:

$y = a + bx_1 + cx_2 + dx_3 + \ldots$,

где: *a, b, c* и *d* - параметры уравнения, определяющие соотношение между аргументами и функцией. В практике учитываются не все, а лишь некоторые аргументы, в простейшем случае, как при описании линейной регрессии, - всего один:

$y = a + bx$

В этом уравнении параметр *a* - свободный член; графически он представляет отрезок ординаты (у) в системе прямоугольных координат. Параметр *b* называется коэффициентом регрессии. С точки зрения аналитической геометрии *b* - угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям, координат. В области регрессионного анализа этот параметр показывает, насколько в среднем величина одного признака (*Y*) изменяется при изменении на единицу меры другого корреляционно связанного с *Y* признака *X*. Наглядное представление об этом параметре и о положении линий регрессии *Y* по *X* и *X* по *Y* в системе прямоугольных координат дает рисунок 4.10.

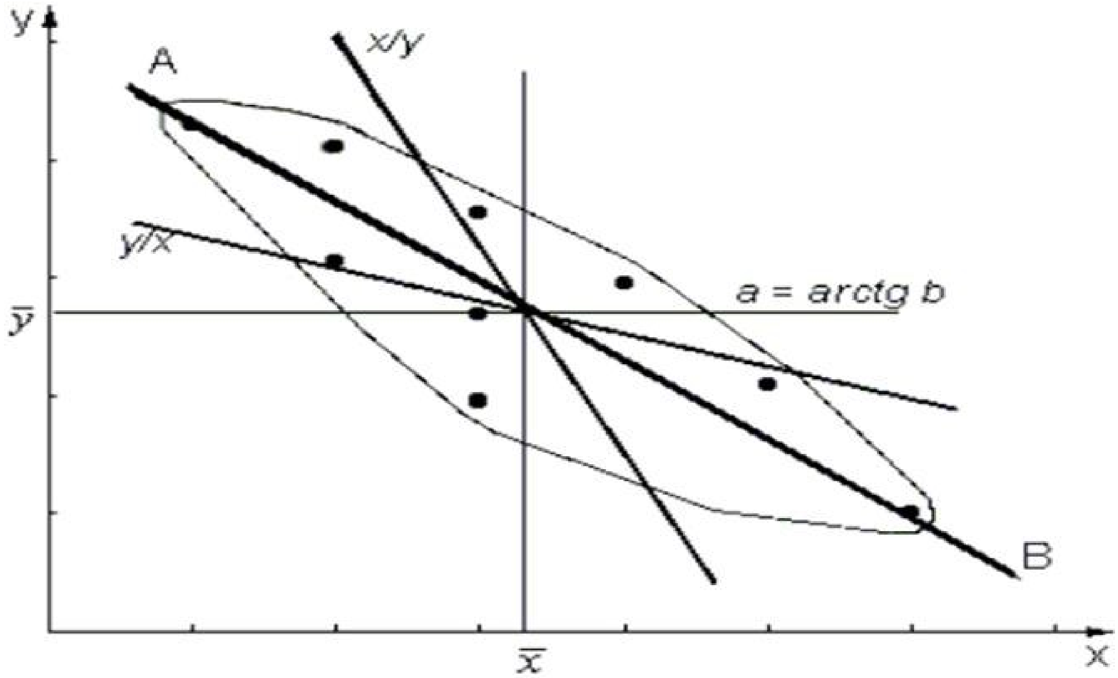


Рис. 4.10 Схема линий регрессии Y по X и X по Y в системе прямоугольных координат

Линии регрессии, как показано, пересекаются в точке 0 (*x,y*), соответствующей средним арифметическим значениям корреляционно связанных друг с другом признаков *Y* и *X*. Линия АВ, проходящая через эту точку, изображает полную (функциональную) зависимость между переменными величинами *Y* и *X*, когда коэффициент корреляции $r = 1$. Чем сильнее связь между *Y* и *X*, тем ближе линии регрессии к АВ, и, наоборот, чем слабее связь между варьирующими признаками, тем более удаленными оказываются линии регрессии от АВ. При отсутствии связи между признаками, когда $r = 0$, линии регрессии оказываются под прямым углом (90°) по отношению друг к другу.

Уравнение регрессии тем лучше описывает зависимость, чем меньше рассеяние диаграммы, чем больше теснота взаимосвязи. Уравнение прямой линии пригодно для описания только линейных зависимостей. В случае нелинейных зависимостей математическая запись может отображаться уравнениями параболы, гиперболы и др.

Необходимо также сделать одно важное замечание о значении показателей, характеризующих взаимосвязь признаков (коэффициентов корреляции, регрессии и т. п.).

Все они дают лишь количественную меру связи, но ничего не говорят о причинах зависимости. Определить эти причины - дело самого исследователя.

Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида

$\hat{y}_x = a + b \cdot x$ или $\hat{y}_x = a + b \cdot x + \varepsilon$

Уравнение вида $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ позволяет по заданным значениям параметра *x* иметь теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора *x*.

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров — *а* и *в*. Оценки параметров линейной регрессии могут быть найдены разными методами.

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на **методе наименьших квадратов** (МНК).

МНК позволяет получить такие оценки параметров *а* и *в*, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака *(y)* от расчетных (теоретических) $\hat{y}_x$ минимальна:

$$\sum_i (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 \to \min$$

Чтобы найти минимум функции, надо вычислить частные производные по каждому из параметров *a* и *b* и приравнять их к нулю.

Обозначим $\sum_i \varepsilon_i^{\ 2}$ через S, тогда: $S = \sum (y_i - \hat{y}_x)^2 = \sum (y - a - bx)^2$;

$$\frac{dS}{da} = -\sum y + 2 \cdot n \cdot a + 2 \cdot b \sum x = 0;$$

$$\frac{dS}{db} = -2\sum y \cdot x + 2 \cdot a \sum x + 2 \cdot b \sum x^2 = 0.$$

Преобразуя формулу, получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров *а* и *в*:

$$\begin{cases} n \cdot a + b\sum x = \sum y \\ a \cdot \sum x + b\sum x^2 = \sum y \cdot x \end{cases}$$

Решая систему нормальных уравнений либо методом последовательного исключения переменных, либо методом определителей, найдем искомые оценки параметров *а* и *в*.

Параметр *в* называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy} . Существуют разные модификации формулы линейного коэффициента корреляции. Некоторые из них приведены ниже:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Как известно, линейный коэффициент корреляции находится в границах: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Таким образом, если на некоторой выборке измерены две переменные, которые коррелируют друг с другом, то, вычислив коэффициенты регрессии, мы получаем возможность предсказания неизвестных значений одной переменной (*y*– «зависимая переменная») по известным значениям другой переменной (*x* – «независимая переменная»).

Понятно, что наиболее точным предсказание будет, если $|r_{xy}|$ = 1. Тогда каждому значению x будет соответствовать только одно значение y, а все ошибки оценки будут равны 0 (все точки на графике рассеивания будут лежать на прямой регрессии).

Если же $r_{xy} = 0$, то $a_1 = 0$ и y_i=a_0(=$y_{ср}$), т. е. при любом x оценка переменной y будет равна ее среднему значению и предсказательная ценность регрессии ничтожна.

Следует отметить, что на коэффициент линейной корреляции влияют выбросы (экстремально большие или малые значения признака) так как величина этого коэффициента прямо пропорциональна отклонению значения переменной от среднего.

Способы борьбы с выбросами:

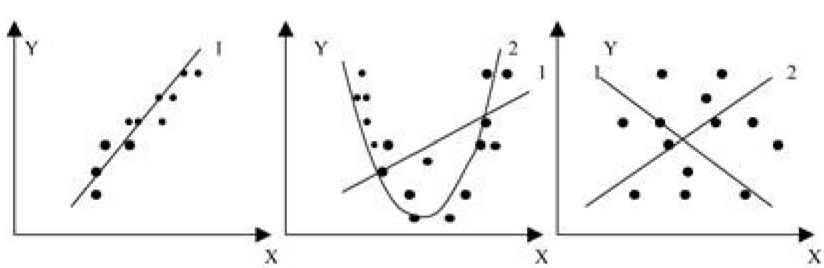
1) «чистка» данных. Можно для каждой переменной установить определенное ограничение на диапазон ее изменчивости. Например, исключаете наблюдения, которые выходят за пределы диапазона $x_{ср}\pm2\sigma$ или $x_{ср}\pm3\sigma$.

2) применение ранговых коэффициентов корреляции.

Основные причины обязательного присутствия в регрессионных моделях случайного отклонения следующие.

Неполнота учета объясняющих переменных. Любая эконометрическая модель упрощает реальную ситуацию. Например, спрос на товар определяется его ценой, а также ценой на товары-заменители, ценой на дополняющие товары, доходом потребителей, их количеством, традициями, национальными особенностями, погодой и т.д. При этом заранее неизвестно, какими факторами можно пренебречь, а по некоторым невозможно получить данные.

Неправильный выбор формулы уравнения регрессии. Для парной регрессии выбор формулы обычно осуществляется по графическому изображению статистических данных в виде точек в декартовой системе координат, которое называется диаграммой рассеивания.

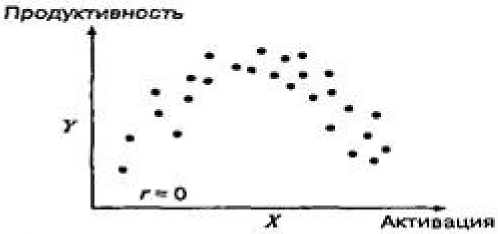


Агрегирование переменных. Отдельные факторы могут оказаться сложной комбинацией более простых переменных.

Ошибки измерений.

Непредсказуемость человеческого фактора.

Довольно часто в исследованиях встречаются немонотонные связи — когда связь меняет свое направление (с прямого на обратное, или наоборот) при увеличении или уменьшении значений одной из переменной. Типичный пример —это связь уровня активации (*X*) и продуктивности деятельности (*Y*). Любой из рассмотренных коэффициентов корреляции будет в этом случае иметь значение, близкое к нулю.



Если наблюдается немонотонная нелинейность связи, то можно сначала найти точку перегиба по графику рассеивания и разделить выборку на две группы, различающиеся направлением связи между переменными. После этого можно вычислять корреляции отдельно для каждой группы.

1. Анализ статистической значимости коэффициентов линейной регрессии

Рассчитанные значения коэффициентов уравнения регрессии это случайные величины, дисперсии которых определяются следующими выражениями:

$$D(m)=\frac{D(g)}{\sum(x_i-\overline{x})^2}$$

$$D(\alpha) = \frac{D(g)\sum_i x_i^2}{n\sum(x_i-\overline{x})^2}, \text{где } D(g) = \frac{\sum_i e_i^2}{n-2}$$

Здесь $D(g)$ – *необъясненная дисперсия* зависимой переменной вокруг линии регрессии. Естественно, что вместе с ней растут и дисперсии коэффициентов уравнения регрессии. Из рисунка 4.11 ясно, что при $D(g) > 0$ уменьшение диапазона изменения независимой переменной (сближение точек 1 и 3) приведет к возрастанию погрешности. Чем больше абсолютные значения x, тем сильнее изменится дисперсия свободного члена a при изменении наклона регрессионной прямой.

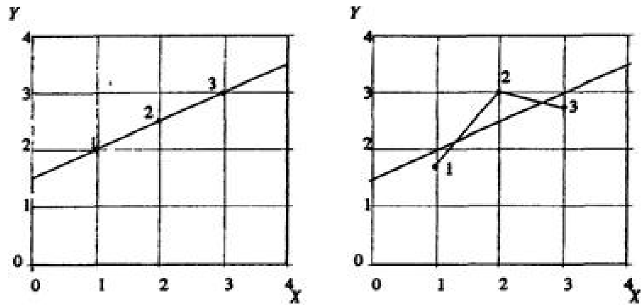


Рис. 4.11 поведение D(g)

Формально значимость оцененного коэффициента регрессии a_1 *может быть проверена с помощью анализа его отношения к своему стандартному отклонению. Эта величина имеет* t-*распределение Стьюдента с* (п-2) *степенями свободы* и *называется* t-статистикой.

Можно использовать следующее грубое правило. Если стандартная ошибка коэффициента больше его модуля ($t < 1$), то он не может быть признан хорошим (значимым), поскольку доверительная вероятность здесь при двусторонней альтернативной гипотезе составляет лишь менее чем приблизительно 0,7.

Если стандартная ошибка меньше модуля коэффициента, но больше его половины ($1 < t < 2$), то сделанная оценка может рассматриваться как более или менее значимая. Доверительная вероятность будет примерно от 0,7 до 0,95. Значение t от 2 до 3 свидетельствует о весьма значимой связи. Конечно, с ростом числа наблюдений прочих равных условиях выводы о наличии связи становятся надежнее. Но уже для n порядка 10 и более сформулированные правила приблизительно верны.

Коэффициент детерминации

Оказывается, что *отношение дисперсии оценок зависимой переменной к ее истинной дисперсии равно квадрату коэффициента корреляции.* Поэтому квадрат коэффициента корреляции, который представляет долю дисперсии зависимой переменной, обусловленной влиянием независимой переменной, называется *коэффициентом детерминации.*

Коэффициент детерминации обладает важным преимуществом по сравнению с коэффициентом корреляции. *Корреляция не является линейной функцией связи между двумя переменными.* Поэтому, в частности, среднее арифметическое коэффициентов корреляции для нескольких выборок не совпадает с корреляцией, вычисленной сразу для всех испытуемых из этих выборок. Напротив, *коэффициент детерминации отражает связь линейно и поэтому является аддитивным: допускается его усреднение для нескольких выборок.*

В отличие от коэффициента корреляции коэффициент детерминации линейно возрастает с увеличением силы связи. На этом основании можно ввести три градации величин корреляции по силе связи:

$r \leq 0{,}3$ — слабая связь (менее 10% от общей доли дисперсии);

$0{,}3 < r \leq 0{,}7$ — умеренная связь (от 10 до 50% от общей доли дисперсии);

$r > 0{,}7$ — сильная связь (50% и более от общей доли дисперсии);

Условия применения МНК:

- модель регрессии должна быть линейной по параметрам
- x – не стохастическая переменная (заданная величина)
- значения ошибки – случайные. Их изменение не образует определенной модели
- число наблюдений должно быть больше числа оцениваемых параметров (5-6 раз)
- значения переменной x не должны быть одинаковыми
- изучаемая совокупность должна быть достаточно однородной
- отсутствие взаимосвязи между фактором x и остатком
- модель регрессии должна быть корректно специфицирована
- в модели не должно наблюдаться тесной взаимосвязи между факторами

Рассмотрим теперь задачу оценки коэффициентов парной линейной регрессии более формально. Предположим, что связь между x и .y линейна: y = +x. Здесь имеется в виду связь между всеми возможными значениями величин x и y, то есть для генеральной совокупности. Наличие случайных отклонений, вызванных воздействием на переменную y множества других, неучтенных в нашем уравнении факторов и ошибок измерения, приведет к тому, что связь наблюдаемых величин x_i и y_i приобретет вид y_i=+x_i+ϵ_i,. Здесь ϵ_i. - случайные ошибки (отклонения, возмущения). Задача состоит в следующем: по имеющимся данным наблюдений $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ оценить значения параметров a и b, обеспечивающие минимум величины Q. Если бы были известны точные значения отклонений ϵ_i, то можно было бы (в случае правильности предполагаемой линейной формулы) рассчитать значения параметров. Однако значения случайных отклонений в выборке неизвестны, и по наблюдениям x_i и y_i можно получить оценки параметров с и р, которые сами являются случайными величинами, поскольку соответствуют случайной выборке. Пусть а - оценка параметра, b - оценка параметра. Тогда оцененное уравнение регрессии будет иметь вид

$y_i=a+bx_i+e_i$,

где e_i - наблюдаемые значения ошибок ϵ_i.

Для оценки параметров и воспользуемся МНК, который минимизирует сумму квадратов отклонений фактических значений y_i от расчетных. Минимум ищется по переменным а и b.

Для того, чтобы полученные МНК оценки а и b обладали желательными свойствами, сделаем следующие предпосылки об отклонениях ϵ_i:

1) величина ϵ_i является случайной переменной;

2) математическое ожидание ϵ_i равно нулю: М $(\epsilon_i) = 0$;

3) дисперсия ϵ постоянна: $D(\epsilon_i) = D(\epsilon_i) = 2$ для всех i, j;

4) значения ϵ_i независимы между собой.

Известно, что, если условия 1)-4) выполняются, то оценки, сделанные с помощью МНК, обладают следующими свойствами:

1) Оценки являются несмещенными, т.е. математическое ожидание оценки каждого параметра равно его истинному значению: М(a) =; М(b)=. Это вытекает из того, что $M(\epsilon_i) = 0$, и говорит об отсутствии систематической ошибки в определении положения линии регрессии.

2) Оценки состоятельны, так как дисперсия оценок параметров при возрастании числа наблюдений стремится к нулю:; .

Иначе говоря, если п достаточно велико, то практически наверняка а близко к, а b близко к : надежность оценки при увеличении выборки растет.

3) Оценки эффективны, они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками данного параметра, линейными относительно величин y_i. В англоязычной литературе такие оценки называются BLUE (Best Linear Unbiased Estimators - наилучшие линейные несмещенные оценки).

Перечисленные свойства не зависят от конкретного вида распределения величин єі, тем не менее, обычно предполагается, что они распределены нормально N(0;y_2). Эта предпосылка необходима для проверки статистической значимости сделанных оценок и определения для них доверительных интервалов. При ее выполнении оценки МНК имеют наименьшую дисперсию не только среди линейных, но среди всех несмещенных оценок.

Вопросы для самоконтроля

1.Опишите процесс усреднения как способ подавления влияния случайных факторов и формирования функциональных зависимостей (регрессий).

2.Напишите уравнение регрессии.

3.В чем заключается метод наименьших квадратов?

4.Как применяется метод наименьших квадратов при оценке неизвестных параметров уравнения регрессии.

5.Опишите коэффициент регрессии и его экономическое содержание в соответствующих задачах.

6.В чем состоит значимость уравнения регрессии и его коэффициентов?

7. В чем состоит значимость коэффициента корреляции?

Тема 4. Автоматизация процесса обработки статистических данных средствами MSExcel

Пакет Анализ данных в программе Excel. Обработка статистических данных с пакетом Анализ данных

В программе Excel имеется средство **Анализ данных,** которое в значительной степени ускоряет и облегчает расчеты по статистической обработке результатов исследований, что дает возможность ввести исходные данные и в автоматическом режиме сразу получить результаты, а также провести сложные статистические методы, такие как проверка гипотез по двум выборкам, дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы. Данный пакет приближает программу Excel к серьезным пакетам прикладных статистических программ.

Далее все расчеты проведем с использованием **Пакета анализа.** Для выполнения различных статистических задач в **Пакете анализа** имеются 17 инструментов, например:

- Описательная статистика
- Гистограмма
- Корреляция
- Регрессия
- Дисперсионный анализ
-Двухвыборочный t-тест
- т.д.

Прежде всего, необходимо проверить настроена ли Ваша программа Excel на использование **Пакета анализа**. Если при запускеExcel при открытии в меню **Сервис** нет вкладки **Анализ данных**, то следует подключить надстройку **Пакет анализа** MS Excel.

Подключение надстройки **Пакет анализа** в MS Excel:

В строке меню **Сервис** выбрать **Надстройки рис.** (4.12)

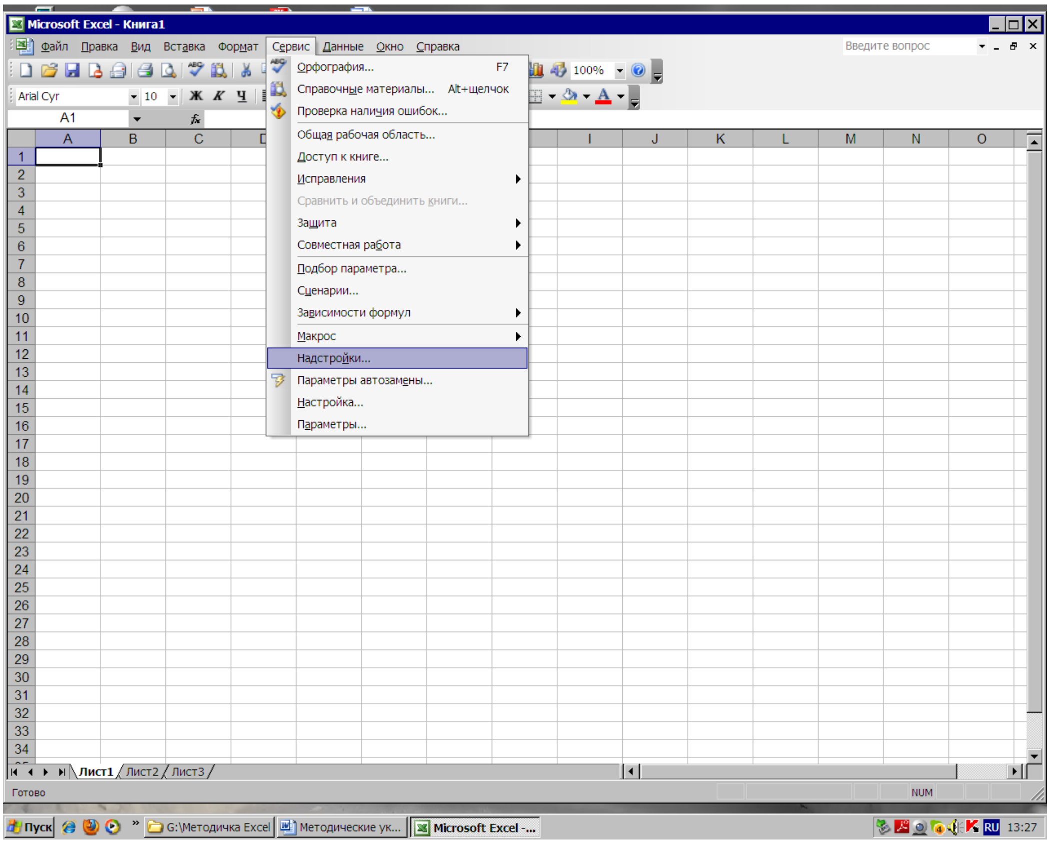


Рис. 4.12. Выбор в меню Надстройка

В появившемся окне **Надстройки** установите флажок **Пакет анализа (**стр.4.15**)** нажать **ОК**.

Группировка данных, расчет статических показателей, построение гистограммы и полигона

1. В активный лист программы Excel ввести в столбце **В** ячейки В1 наименование статистического приема «**Группировка**» , в ячейкеВ**2**- Масса клубня, г , а в диапазоне с**В3**по**В52**значения массы 50 клубней картофеля:

2. В меню **Сервис** подменю **Анализ данных**(MS Excel– 2003) или меню **Данные** подменю **Анализ данных**(MS Excel– 2007) выбрать инструмент анализа **Гистограмма**(рис.4.13.)

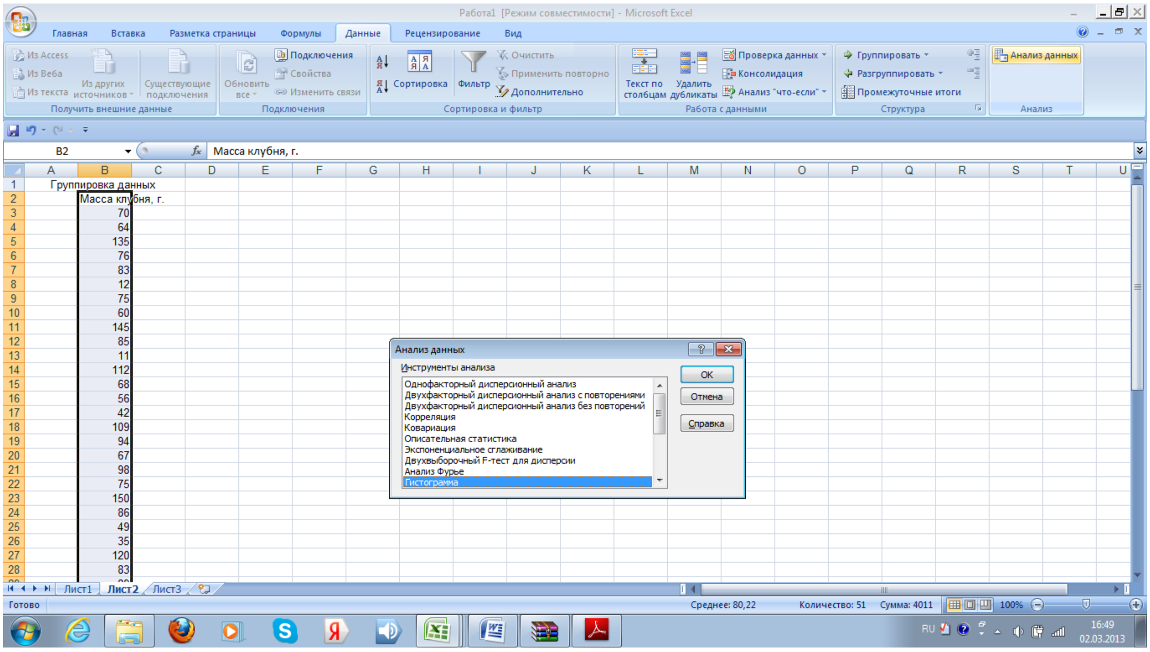


Рис. 4.13. Рабочая книга с исходными данными и выбор инструмента **«Гистограмма»** (MS Excel– 2007)

В окне **Гистограмма** в поле **Входной интервал:** ввести с помощью мышки диапазон ячеек**B2:B52**и нажать **Ввод**, в поле **Интервал карманов**, что представляет собой классовый интервал можно указать известный интервал или как в нашем случае, оставить его пустым. Поставить галочку в поле **Метки** (В этом случае в заголовке результатов будет автоматически прописано «Масса клубня, г»), в поле **Выходной интервал** можно выбрать размещение на рабочем листе с исходными данными, **Новый рабочий лист** (этом случае получается крупный рисунок диаграммы) или **Новая рабочая книга**.

В нашем примере гистограмма будет размещаться в первом рабочем листе с исходными данными, поэтому в поле **Выходной интервал** указываем диапазон ячеек**D16:E43.**

Далее выбираем **Интегральный процент** и **Вывод графика**. После заполнения всех поле нажимаем **ОК** (рис. 4.14)

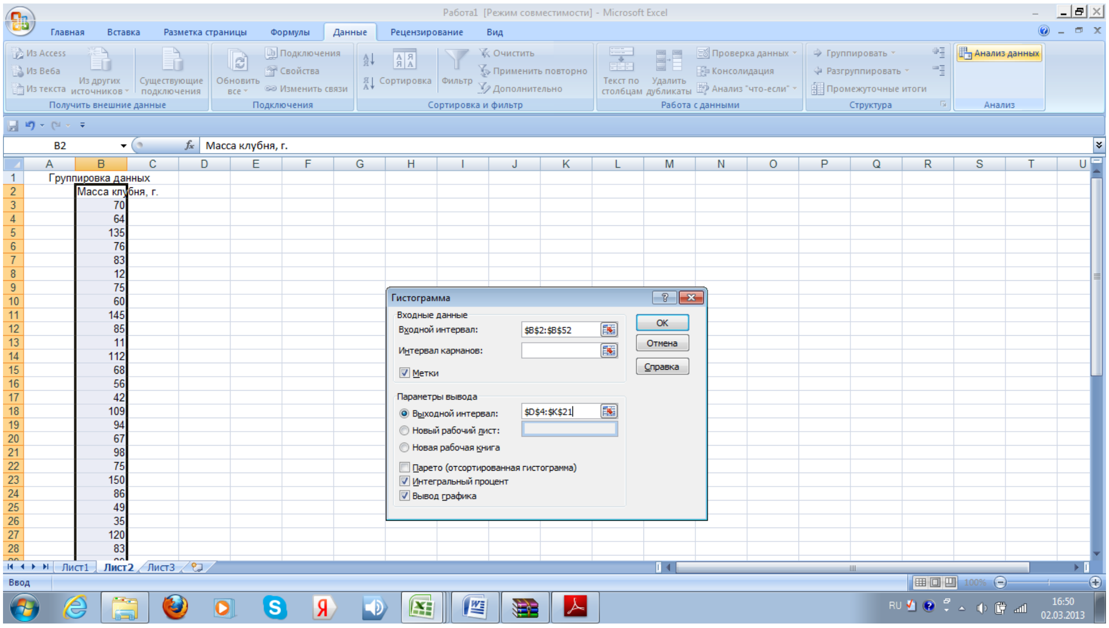


Рис. 4.14 Окно диалогового окна **Гистограмма**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем рядом с исходными данными таблицу вариационного ряда и гистограмму распределения 50 клубней картофеля по массе (рис. 4.15)

Здесь под термином «карман» подразумевается общепринятый в статистике термин «группы» или «классы». В таблице помимо абсолютной численности частот представлены относительные частоты, причем накопленные или так называемые интегральные.

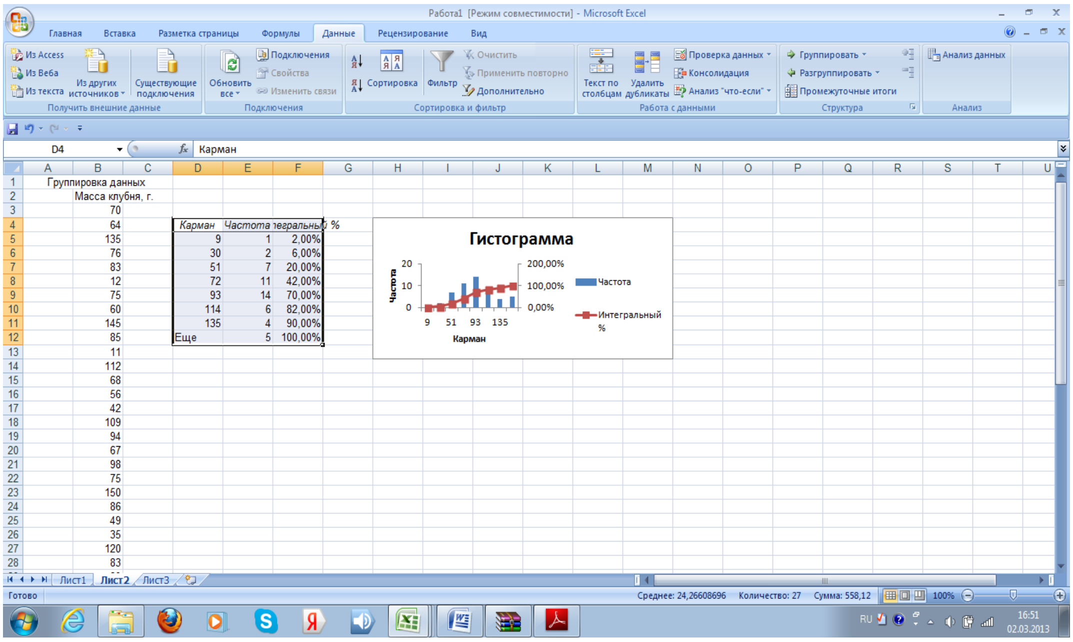


Рис.4.15 Вариационный ряд и гистограмма 50 клубней картофеля по массе.

Так как гистограмма выглядит в нашем окне нечитаемой и непрезентабельной, следует ее растянуть по вертикали и горизонтали на этом Листе или же скопировать ее и перенести на Лист 2.

Для лучшей наглядности наведем мышкой курсор на гистограмму, как только рисунок станет активным, на что указывает подсказка ***Область построения,*** можно будет растянуть гистограмму так, чтобы на рисунке были видны все частоты и значения по классам или группам (карман) (рис. 4.16)

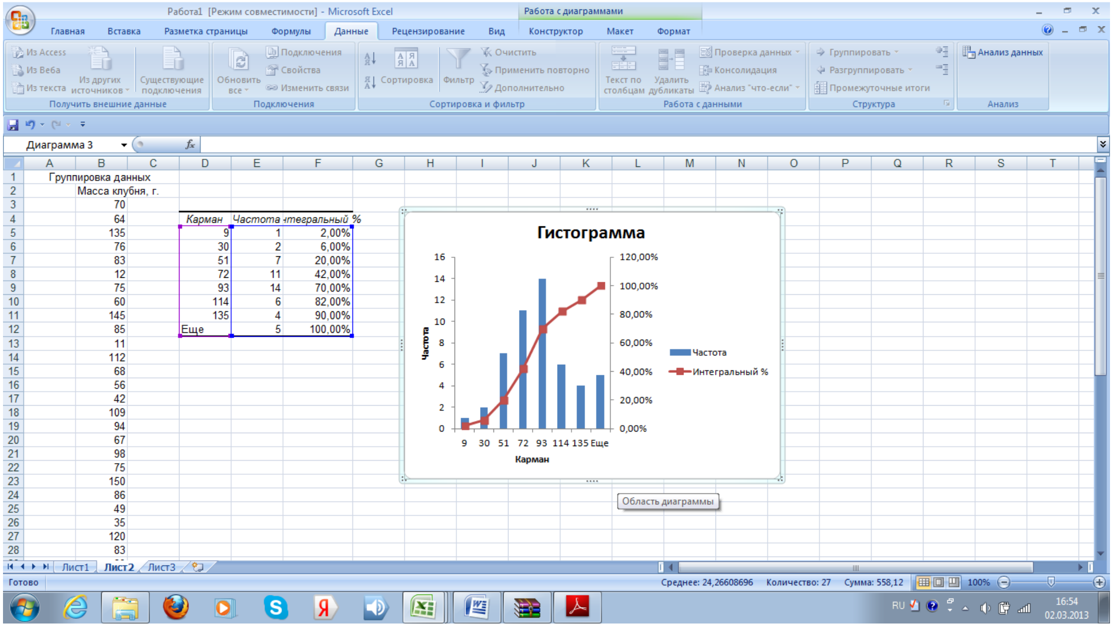


Рис.4.16 Масштабирование гистограммы

С введенными на Листе исходными данными можно провести и другие статистические операции: рассчитать статистические показатели, проверить на нормальность данных и др.

Проведем расчеты основных статистических показателей с использованием в **Пакете анализа Описательной статистики.**

В меню **Сервис** (MS Excel– 2003) или меню **Данные**(MS Excel–2007) выбрать инструмент анализа **Описательная статистика.**

В окне **Описательная статистика** в поле **Входной интервал:** ввести с помощью мышки диапазон ячеек**B3:B52** и нажать **Ввод**, выбрать **Группирование** по столбцам, поставить галочку в поле **Метки в первой строке**(В этом случае в заголовке результатов будет автоматически прописано «Глубина вспашки»), в поле **Выходной интервал** можно выбрать размещение на рабочем листе с исходными данными, Новый рабочий лист или Новая рабочая книга.

В случае размещения на листе 1 рядом с исходными данными в поле **Выходной интервал** необходимо указать интервал ячеек для размещения итоговых результатов описательной статистики, в нашем примере интервал**D16:E43.** Далее выбираем **Итоговую статистику,** в поле **Уровень надежности**указываем**95**, в полях К-тый наименьший и К-тый наибольший ставим**1** и нажимаем **ОК** (рис. 4.17)

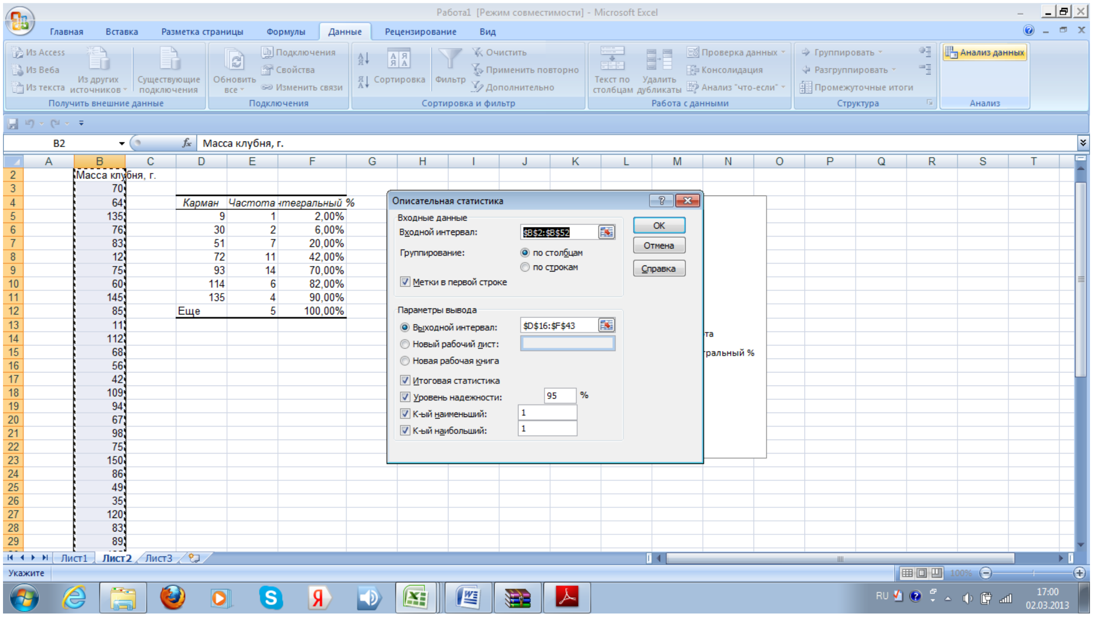


Рис. 4.17. Выбор параметров в окне **Описательная статистика**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем результаты описательной статистики по массе 50 клубней картофеля (рис. 4.18)

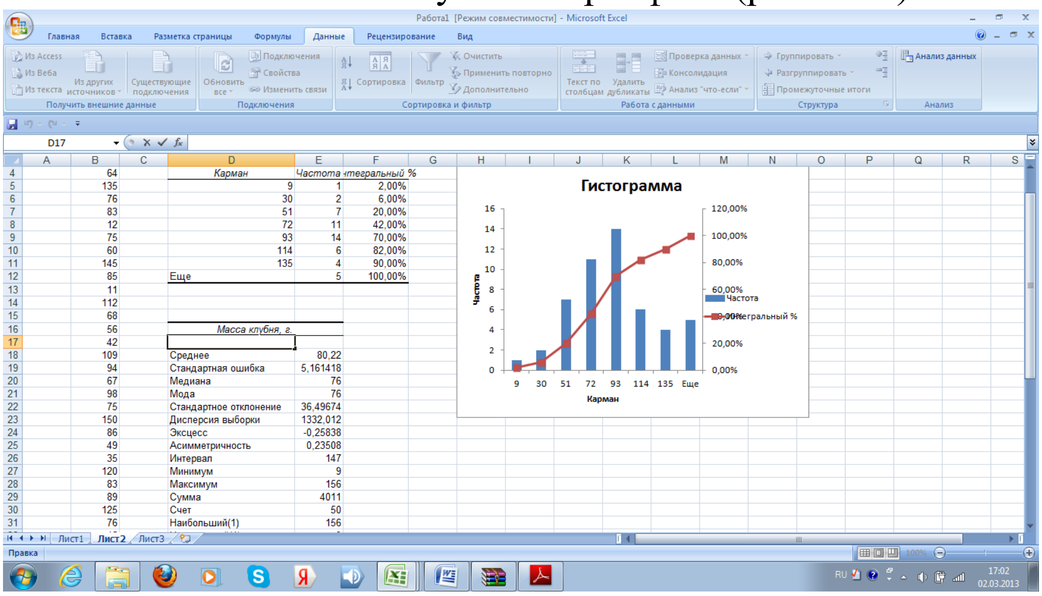


Рис.4.18. Исходные данные, таблица вариационного ряда, гистограмма и основные итоговые статистические показатели

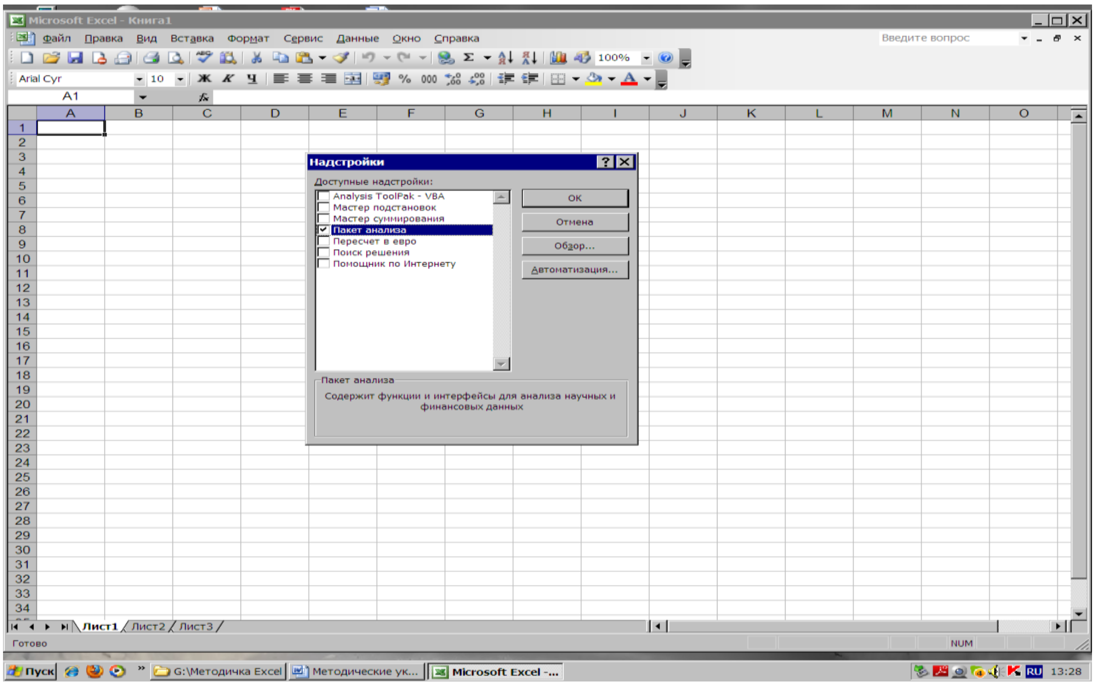


Рис. 4.19. Выбор в надстройках Пакета анализа

Если Пакет анализа установлен правильно, при открытии в меню **Сервис** внизу появится вкладка **Анализ данных**(рис.4.20)

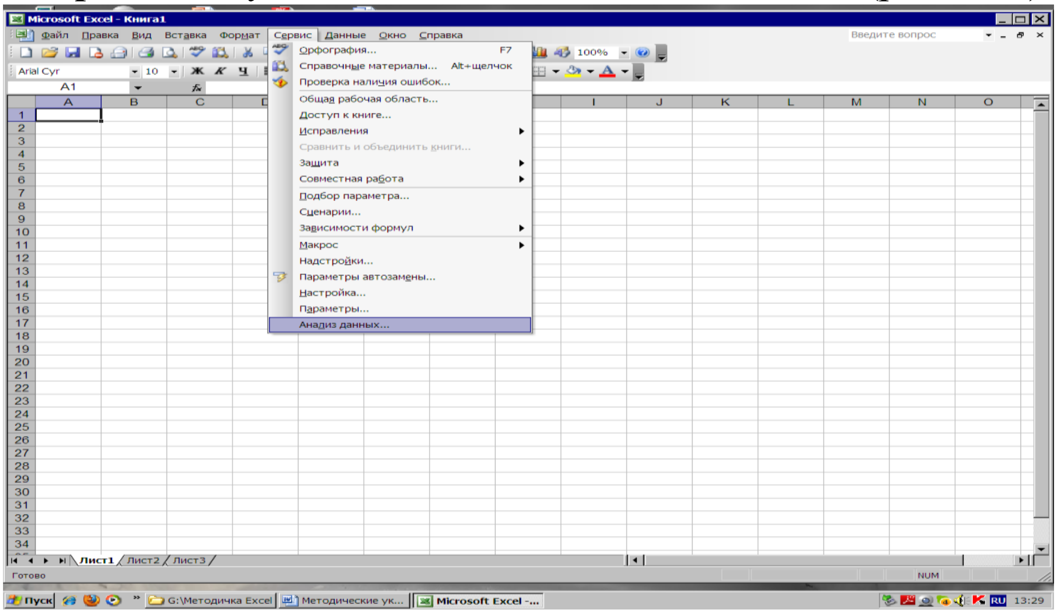


Рис.4.20. **Пакет анализа** настроен

Подключение надстройки **Пакет анализа** в MS Excel версии 2007 и выше:

Подвести курсор к значку «Настройка панели быстрого доступа, расположенного в верхней части окна Excel (рис. 4.21) и нажать Ввод.**Excel**

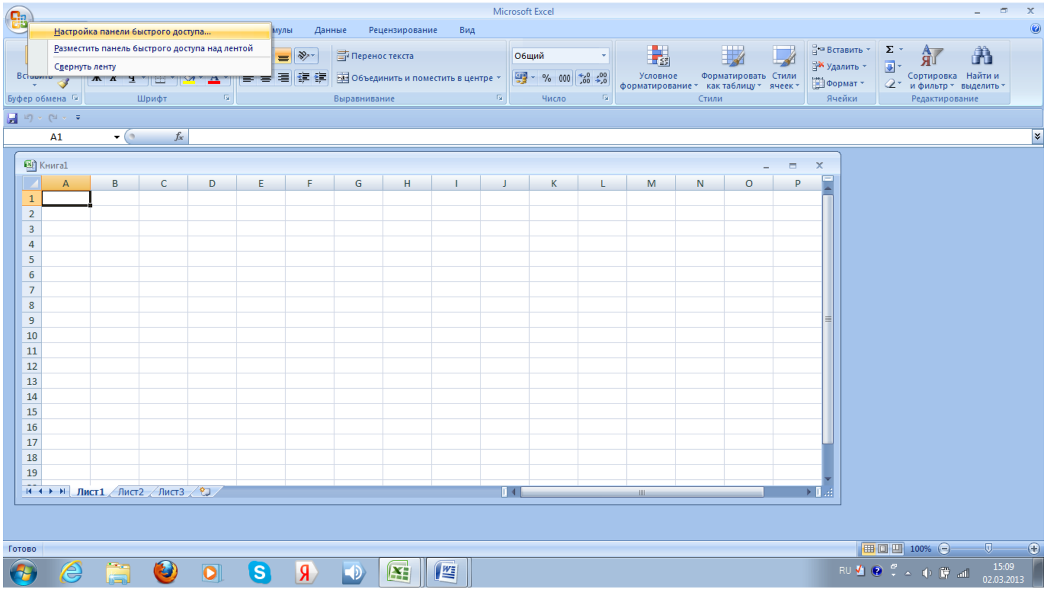


Рис. 4.21. Окно программы Excel

После ввода открывается окно **Параметры,** выбрать **Надстройки**, и в правой части активировать **Пакет анализа**(рис.4.22)

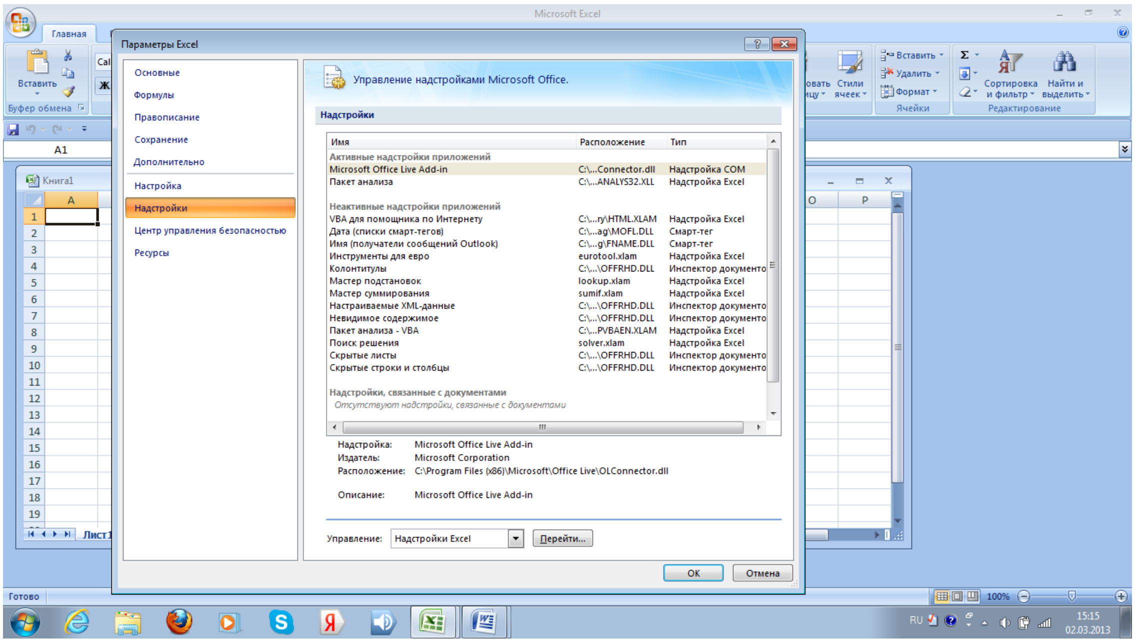


Рис. 4.22. Активирование надстройки **Пакет анализа** в MSExcel-2007

3. Расчет основных статистических показателей выборки с использованием Описательной статистики Пакета анализа

В активный лист программы Excel ввести в столбце **В** наименование признака «Глубина вспашки» и результаты измерения по 8 точкам:

В меню **Сервис** подменю **Анализ данных**(MSExcel– 2003) или меню **Данные** подменю **Анализ данных**(MSExcel– 2007) выбрать инструмент анализа **Описательная статистика**(рис.4.23)

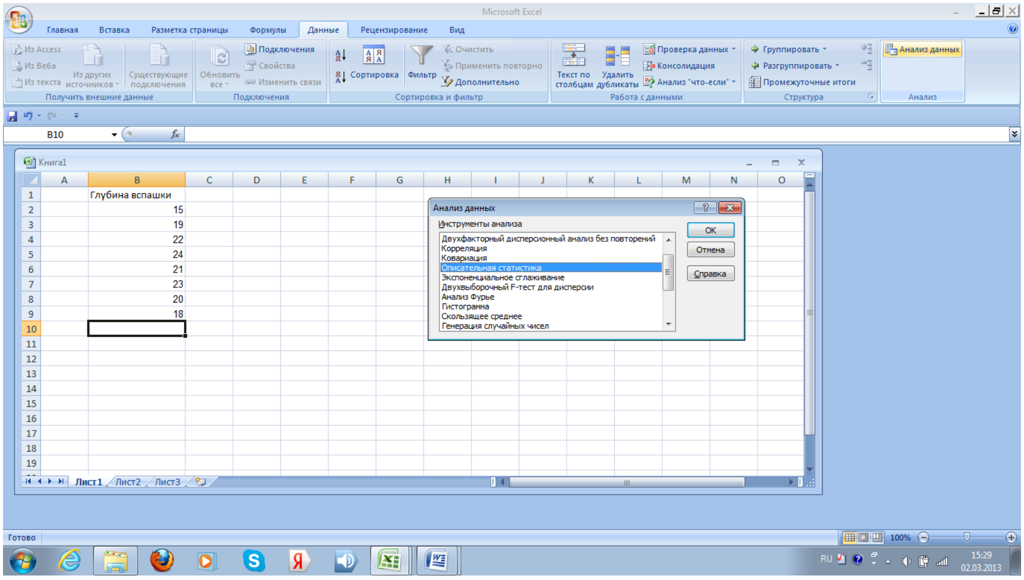


Рис.4.23. Исходные данные и выбор инструмента **«Описательная статистика»** (MSExcel– 2007)

В окне **Описательная статистика** в поле **Входной интервал:** ввести с помощью мышки диапазон ячеек**В1:В9**и нажать **Ввод**, выбрать **Группирование** по столбцам, поставить галочку в поле **Метки в первой строке**(В этом случае в заголовке результатов будет автоматически прописано «Глубина вспашки»), в поле **Выходной интервал** можно выбрать размещение на рабочем листе с исходными данными, Новый рабочий лист или Новая рабочая книга.

В случае размещения на листе 1 рядом с исходными данными в поле **Выходной интервал** необходимо указать интервал ячеек для размещения итоговых результатов описательной статистики, в нашем примере интервал**D3:E15.** Далее выбираем **Итоговую статистику,** в поле **Уровень надежности**указываем**95**, в полях К-тый наименьший и К-тый наибольший ставим**1** и нажимаем **ОК** (рис. 4.24.)

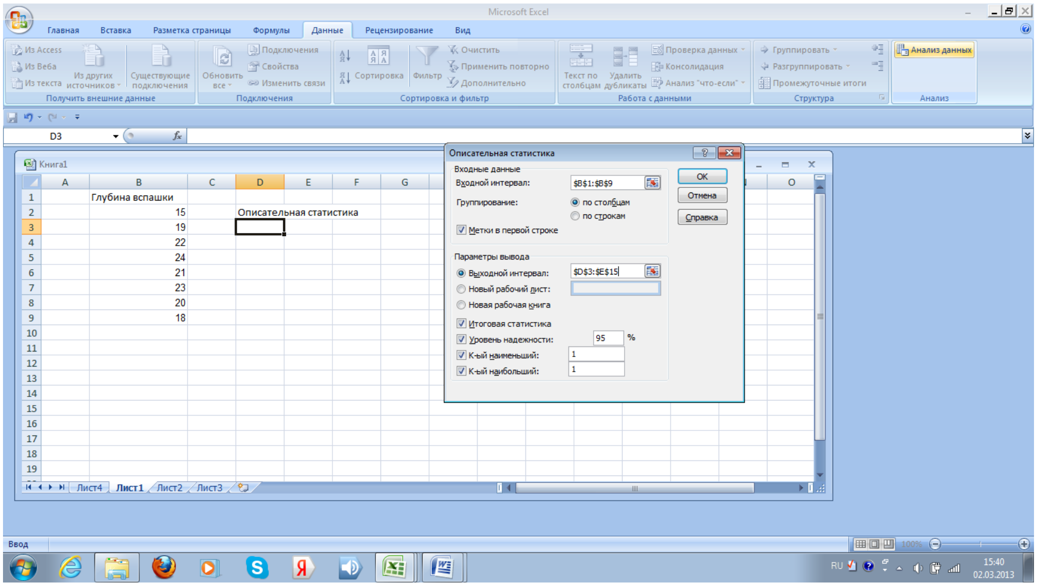


Рис. 4.24. Выбор параметров в окне **Описательная статистика**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем результаты по основным статистическим показателям выборки (рис. 4.25), которые мы до этого рассчитывали с помощью ввода формул или выбора соответствующих функций для каждого показателя выборки, что занимало достаточно много времени и усилий для большого числа операций.

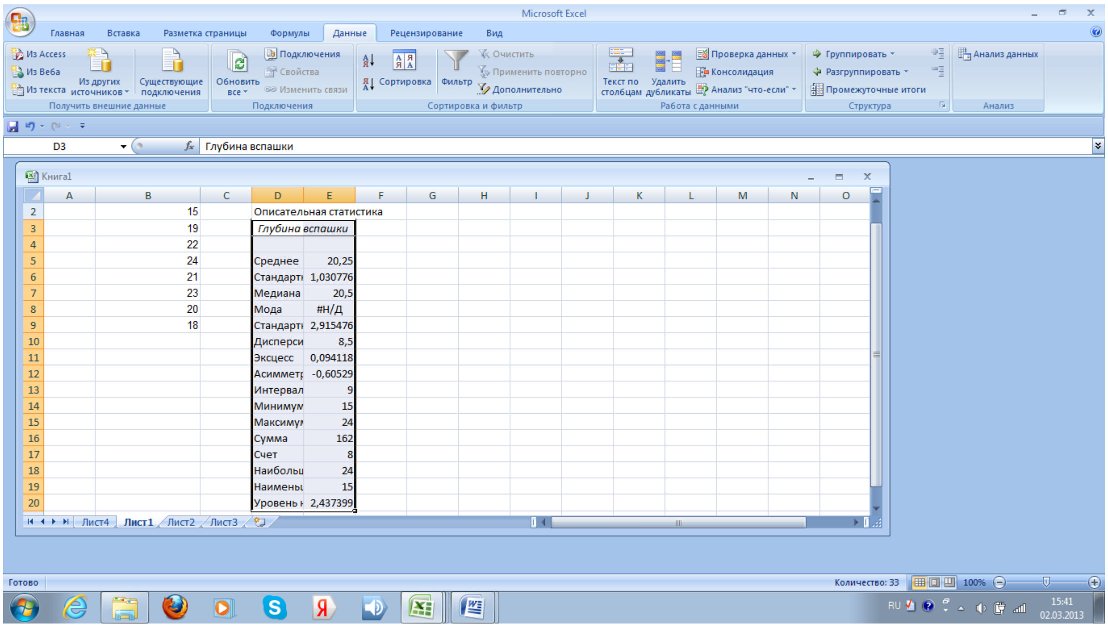


Рис. 4.25. Результаты расчета основных статистических показателей выборки

На рис. 4.26. представлены итоговые данные по работе 1 рассчитанные с помощью статистических функций (слева) и с помощью **Пакета анализа**(справа).

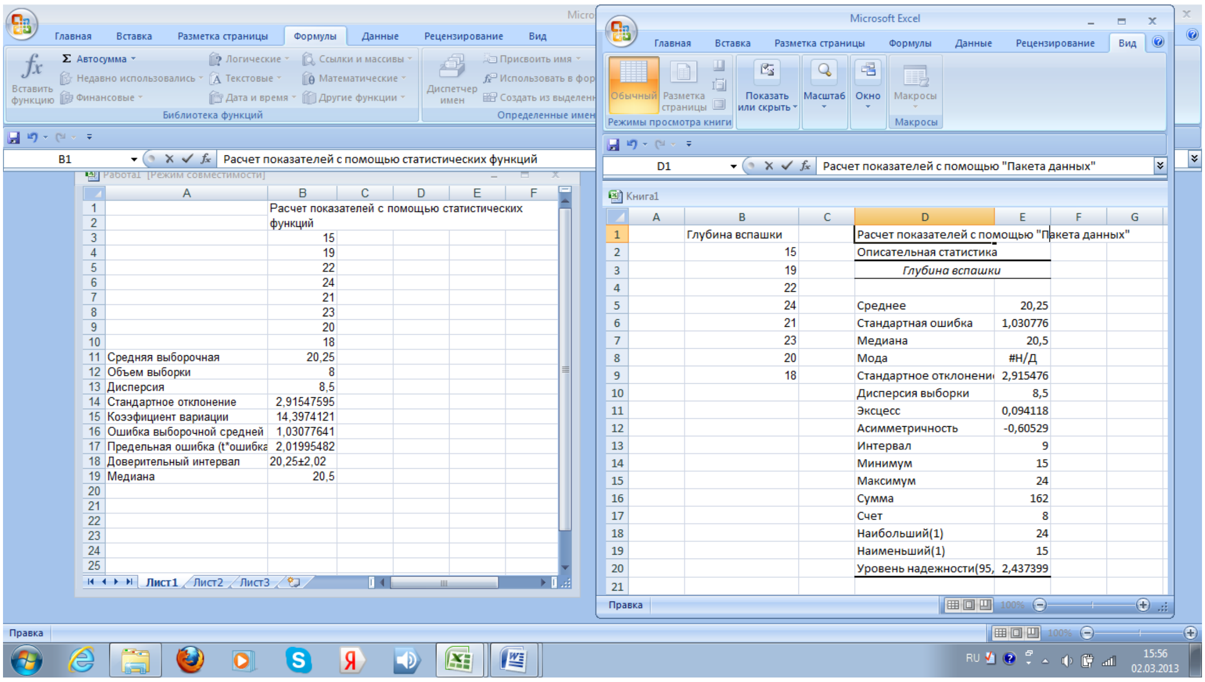


Рис.4.26. Итоговые данные на основе статистических функций (слева) и Пакета данных (справа)

Выбор в пользу **Пакета анализа** при статистических расчетах по сравнению с двумя вышеприведенными способами вполне очевиден, так как после ввода исходных данных двумя-тремя кликами мышки мы получаем готовый результат.

Недостатком **Пакета анализа** является то, в **Описательной статистике** нет таких статистических показателей, как «Ошибка выборочной средней», «Коэффициент выборки», «Доверительный интервал для генеральной средней» и Доверительный интервал для всей совокупности». Однако необходимые показатели можно досчитать или в программе Excel или на калькуляторе.

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями – Оценка двух вариантов при количественной изменчивости признаков для независимых выборок (Работа 4а)

Задача

Содержание белка (%) в зерне при испытании двух сортов озимой пшеницы Заря (А) и Аврора

Заря	*Аврора*
18,6 19,4 16,9 20,0 17,9 18,3 18,4 18,4 21,1 18,0	17,4 18,6 20,3 18,4 19,6 19,5 19,5 19,0 18,8 19,4

1. В активный лист программы Excel ввести в столбце **А** в ячейки текст «Содержание белка», «Заря» и % и цифры , в столбце **В** текст «Аврора» и цифры (рис. 4.28.)

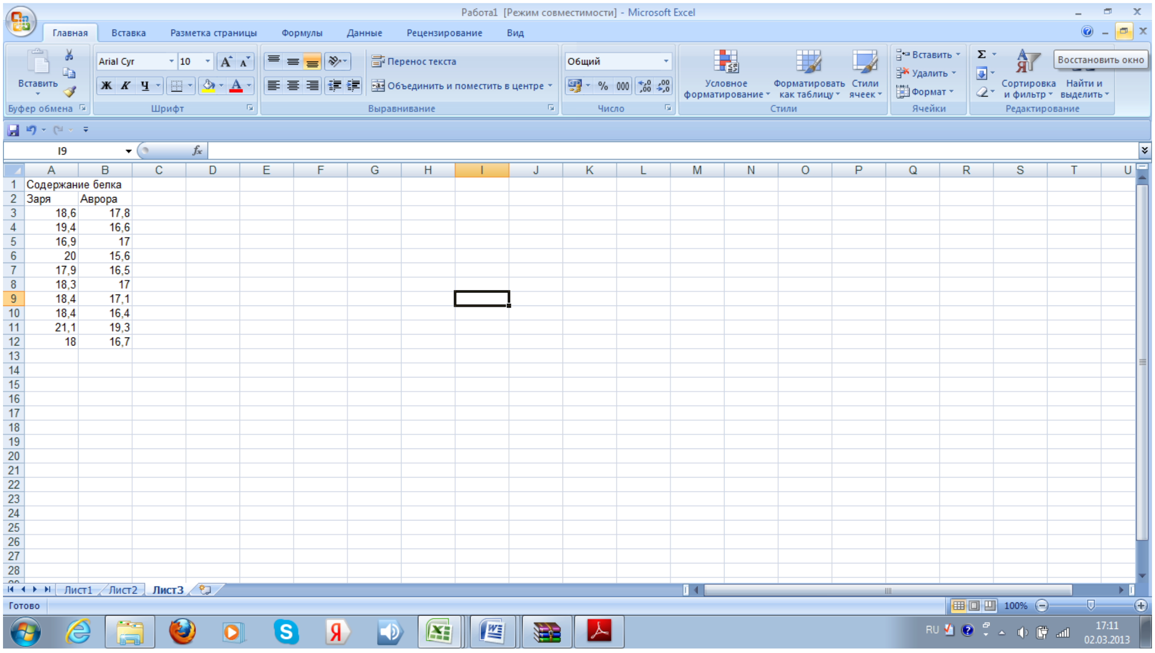


Рис. 4.28. Таблица с исходными данными по содержанию белка.

2. В меню **Сервис,** подменю **Анализ данных** (MSExcel– 2003) или меню **Данные,** подменю **Анализ данных** (MSExcel– 2007) выбрать инструмент анализа **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями** (рис.4.29)

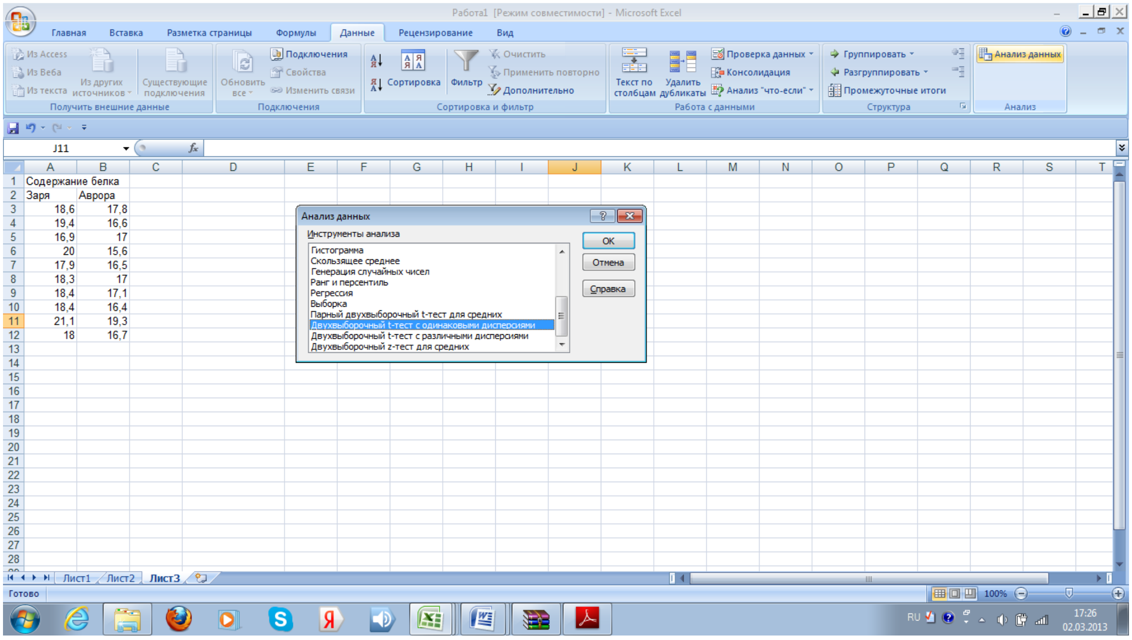


Рис. 4.29. Подменю **Анализ данных**

В окне **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями** в поле **Интервал переменной**

1:ввести с помощью мышки диапазон ячеек**A2:A12**и нажать **Ввод**, в поле **Интервал переменной**

2: ввести с помощью мышки диапазон ячеек**B2:B12**и нажать **Ввод.** В поле **Гипотетическая разность**указать**0,** поставить галочку в поле **Метки.** В поле **Альфа** указать **0.05,** выбрать место размещения в выходном интервале. После заполнения всех полей нажимаем **ОК**(рис. 4.30.)

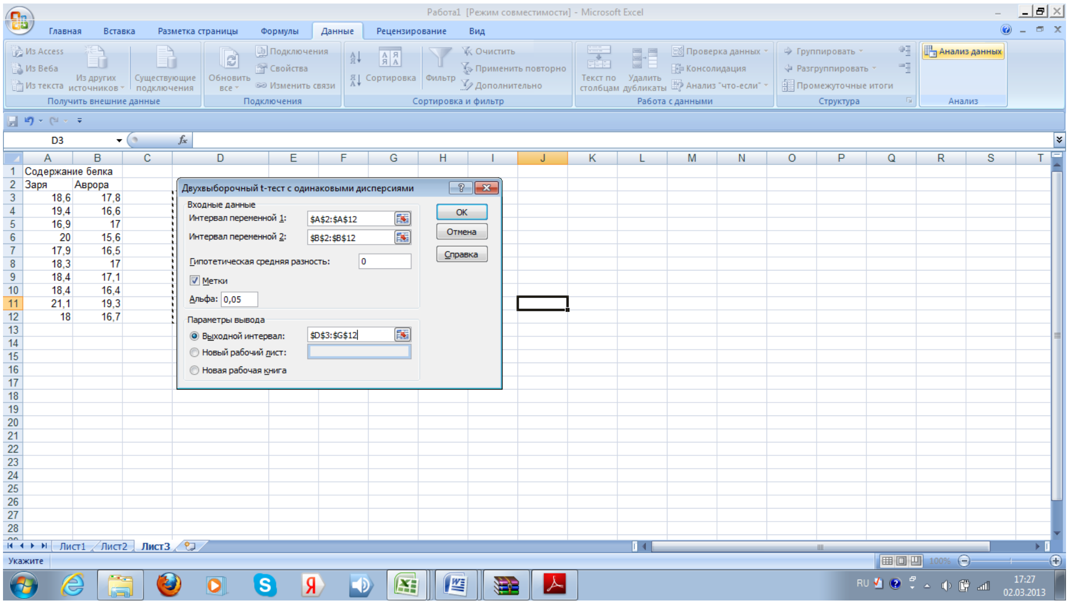


Рис. 4.30. Диалоговое окно **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем итоговую таблицу (рис. 4.31), в которой самыми важными показателями являются фактическое (t-статистика) и табличное (критическое) значения критерия Стьюдента. Так как фактическое значение критерия Стьюдента(t-статистика = 3,48) в нашем примере больше табличного (t-критическое двухстороннее = 2,10 при числе степеней свободы df=10+10-2 =18)00, H_0отвергается. С 95% вероятностью между сортами по содержанию белка имеются существенные различия.

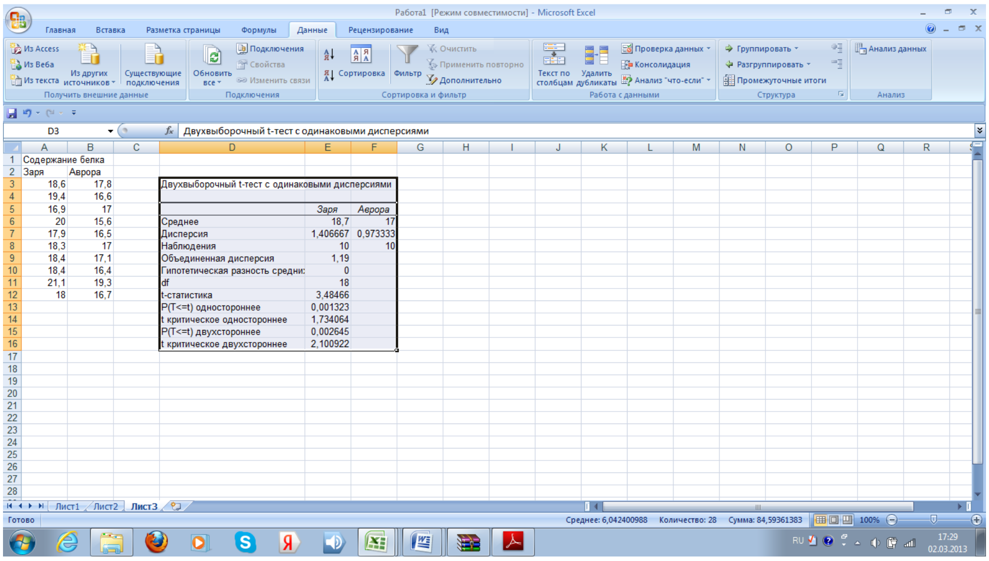


Рис.4.31. Итоговая таблица двухвыборочного t-теста

6. Парный двухвыборочный t-тест для средних – Оценка средней разности при количественной изменчивости признаков для зависимых выборок.

В. Зависимые (сопряженные) выборки

При изучении 2-х способов хранения яблок в полиэтиленовых пакетах в одних и тех же камерах холодильника процент сохранившихся плодов составил (%, n = 10)

Без газовой среды	56	68	74	75	80	56	63	66	75	64
Газовая среда	85	73	75	95	78	85	76	74	83	60

1. В активный лист программы Excel введем исходные данные вышеприведенного примера, расположив таблицу по столбцам (рис. 4.32.).

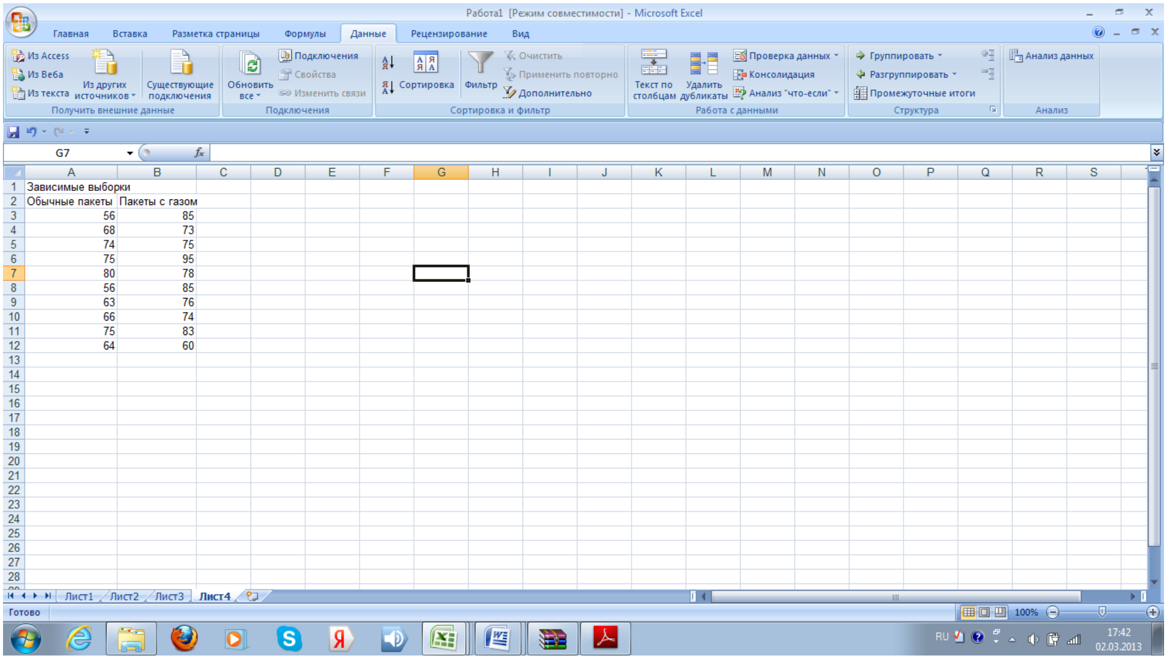


Рис. 4.32. Исходные данные

2. В меню **Сервис,** подменю **Анализ данных** (MSExcel– 2003) или меню **Данные,**подменю **Анализ данных** (MSExcel– 2007) выбрать инструмент анализа **Парный двухвыборочный t-тест для средних** (рис.4.33)

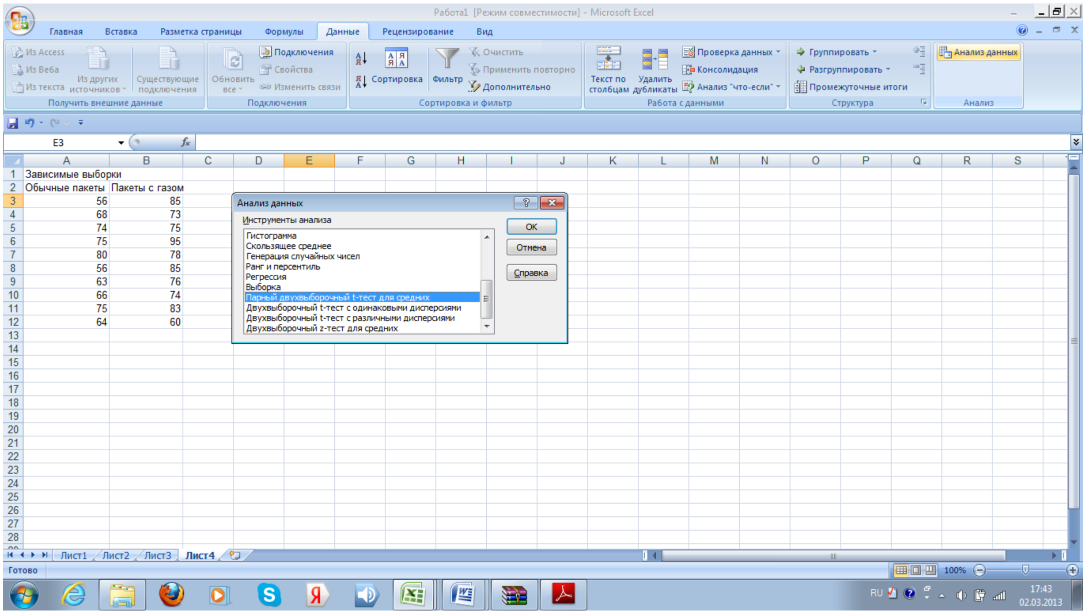


Рис. 4.33. Подменю **Анализ данных**

В появившемся окне **Парный двухвыборочный t-тест для средних** в поле **Интервал переменной 1:** ввести с помощью мышки диапазон ячеек**A2:A12**и нажать **Ввод**, в поле**Интервал переменной 2:** ввести с помощью мышки диапазон ячеек**B2:B12**и нажать **Ввод.** В поле **Гипотетическая разность**указать**0,** поставить галочку в поле **Метки.** В поле **Альфа** указать **0.05,** выбрать место размещения в выходном интервале. После заполнения всех полей нажимаем **ОК**(рис. 4.34.)

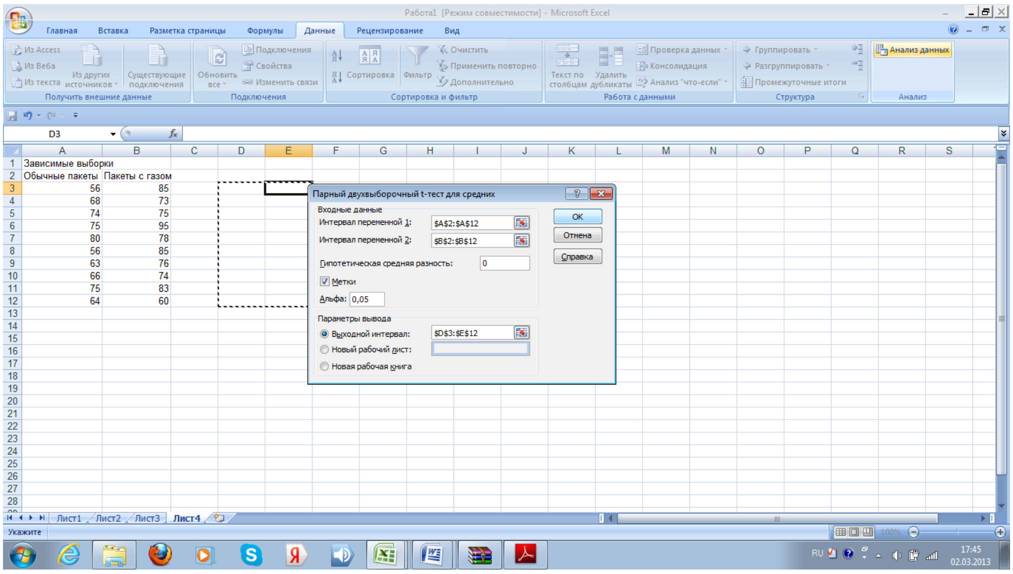


Рис. 4.34. Диалоговое окно **Парный двухвыборочный t-тест для средних**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем итоговую таблицу (рис. 4.35). Так как фактическое значение критерия Стьюдента по модулю (t-статистика = 2,84) в нашем примере больше табличного (t-критическое двухстороннее = 2,26 при числе степеней свободыdf=10-1 =9), H_0отвергается. С 95% вероятностью можно предполагать, сохранность плодов в пакетах с газовой средой существенна выше.

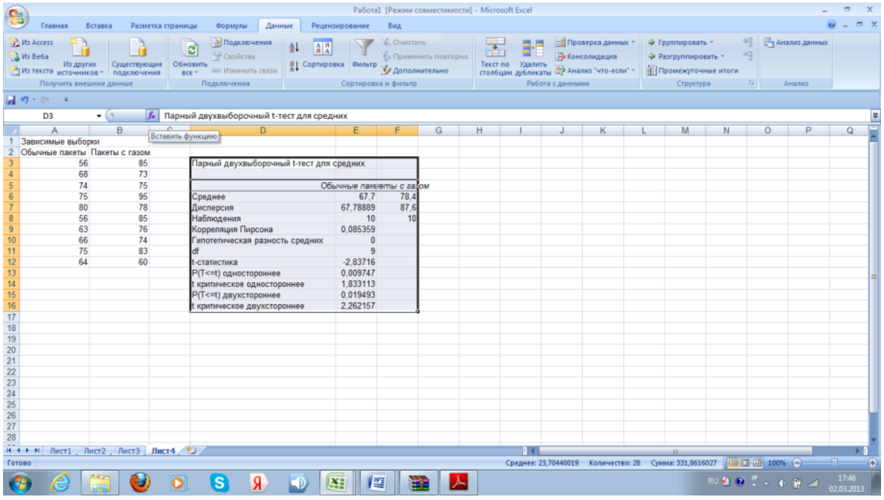


Рис.4.35 Диалоговое окно итоговой таблицы

7. Корреляционно-регрессионный анализ.

Масса зерна ячменя (X, мг) и содержание жира в зерне (Y,%)

1 задание	
Y	*X*
1,2	11,0
5,1	19,9
2,3	15,9
3,1	16,3
0,9	10,2
4,1	21,4
2,1	15,8
4,2	21,6
1,1	12,3
3,4	17,3

Корреляция

1. В активный лист программы Excel введем и сходные данные вышеприведенного примера, расположив таблицу по столбцам (рис. 4.36.)
2. Из **Пакета анализа** выберем инструмент **Корреляция**
3. В появившемся окне укажем входной интервал **A2:B12**
4. **Группирование** по столбцам
5. Укажем метки и выходной интервал и нажмем **ОК** (рис. 4.36.)

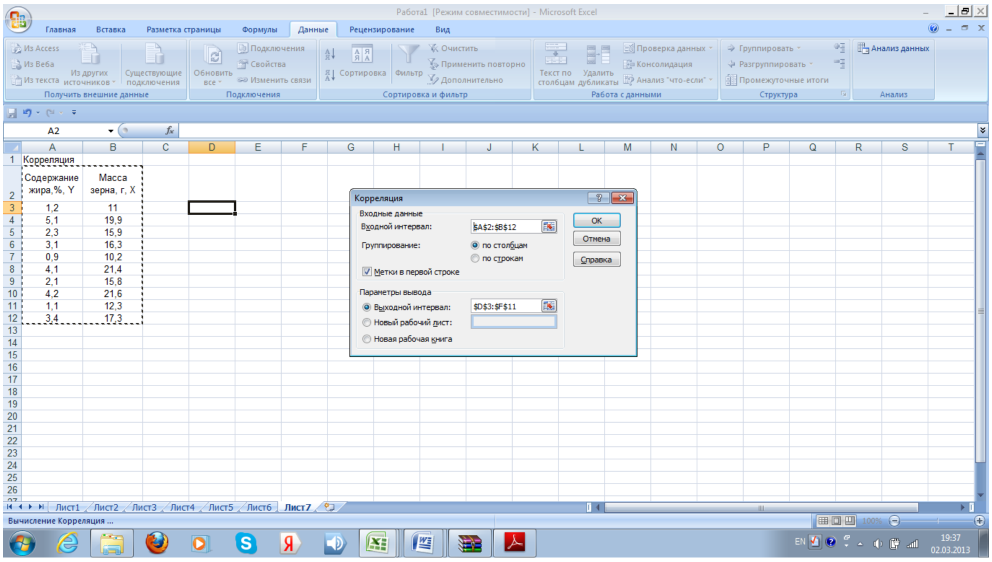


Рис. 4.36. Диалоговое окно **Корреляция**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем коэффициент корреляции между массой зерна и содержанием жира в зерне (r= 0,93), что указывает на сильную (тесную) корреляционную зависимость между изучаемыми признаками (рис. 4.37.).

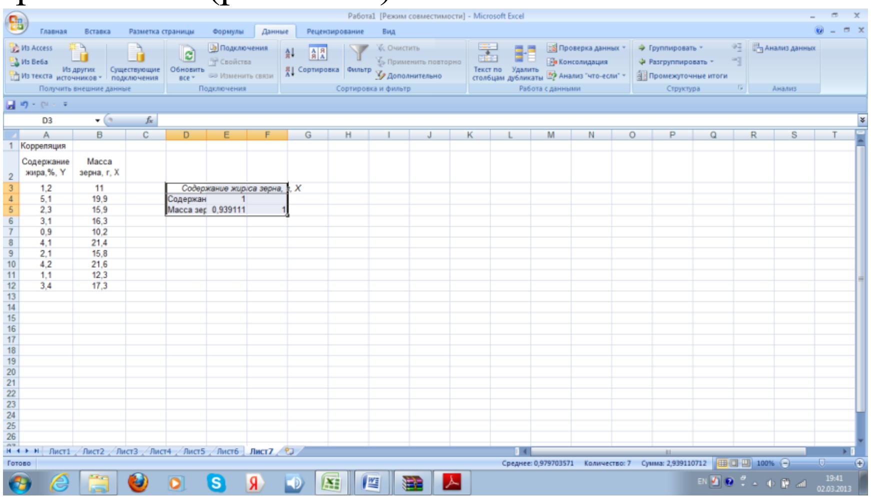


Рис. 4.37. Коэффициент корреляции между содержанием жира и массой зерна

Для расчета коэффициента регрессии, определения уравнения регрессии и построения теоретической линии в подменю **Анализ данных** выберем инструмент анализа **Регрессия** (рис. 4.38.)

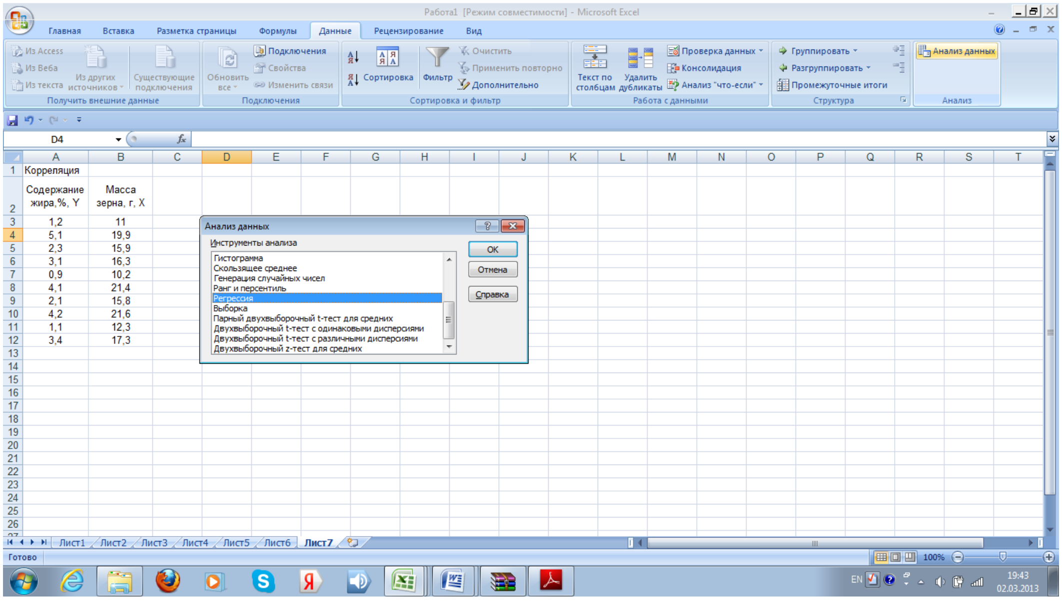


Рис. 4.38. Подменю Анализ данных – выбор регрессии

В появившемся окне **Регрессия** в поле **Входной интервал Y:** вводим с помощью мышки диапазон ячеек**A2:A12,** в поле **Входной интервал X:** вводим с помощью мышки диапазон ячеек**B2:B12.** Галочкой отмечаем **Метки.** В поле **Уровень надежности** указываем доверительную вероятность ***95%***, отмечаем выходной интервал для размещения результатов расчета, выбираем **График подбора** и нажимаем на клавишу **ОК** (рис. 4.39.).

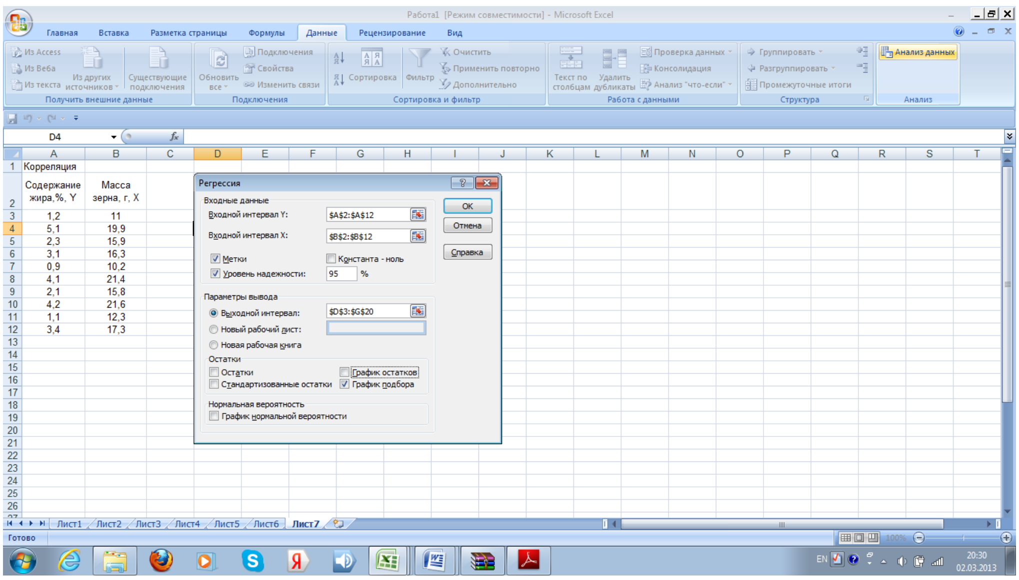


Рис. 4.39. Диалоговое окно **Регрессия**

После нажатия на клавишу **ОК** получаем на рабочем листе: Вывод итогов, Вывод остатков, Дисперсионный анализ регрессии и График зависимости Y от X (рис. 4.40.)

Как коэффициент корреляции (r=0,94), так и коэффициент детерминации ($d_{yx}=r^2=0,88$) свидетельствуют о сильной или тесной зависимости между массой зерна и содержанием жира.

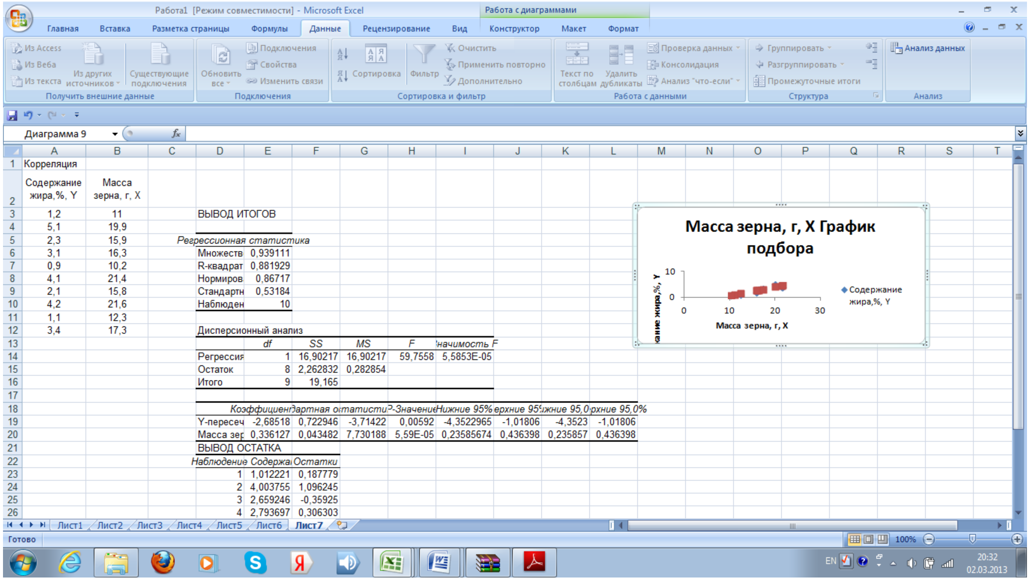


Рис. 4.40. Итоги регрессионного анализа

Так как график на рабочем листе7 выглядит некрасиво, с помощью стандартной операции, используя левую и правую клавишу мышки перенесем график на лист 8 и растянем его вширь и в высоту (рис 4.41.)

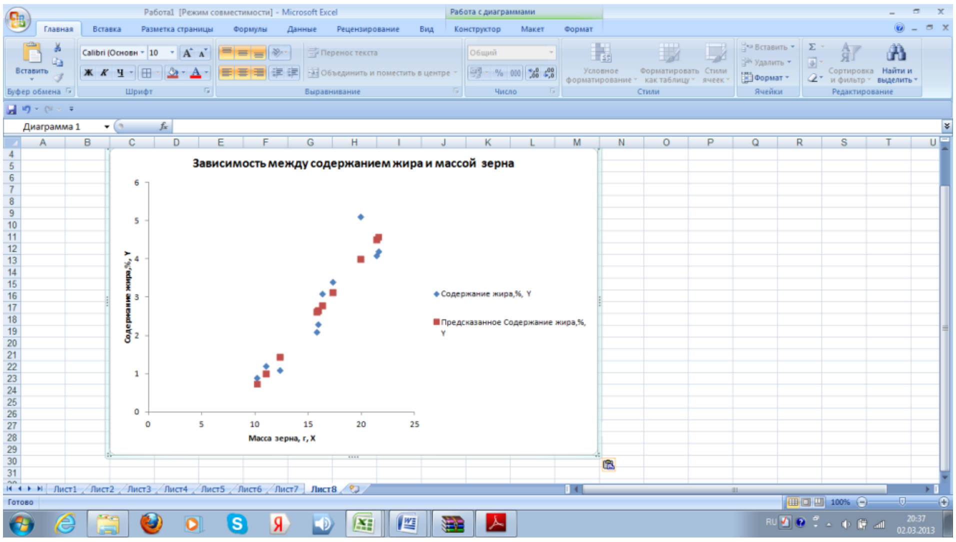


Рис. 4.41. График зависимости между содержанием жира и массой зерна на листе 8

Для построения теоретической линии и уравнения регрессии подведем курсор мышки к данным графика (фактическим точкам жира), при нажатии на правую клавишу появляется контекстное меню, выберем **Добавить линию тренда** (рис. 4.42)

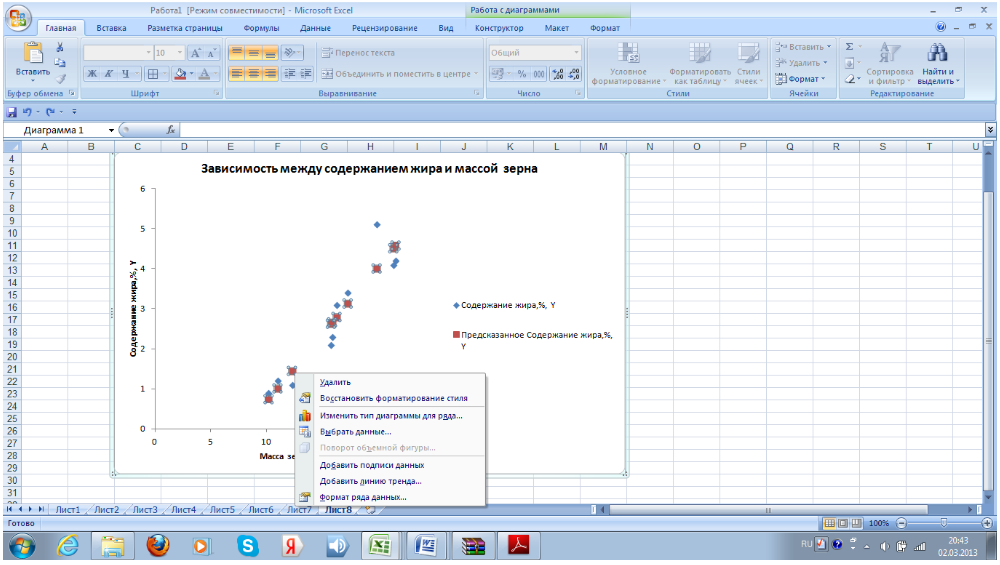


Рис. 4.42. Контекстное меню для работы с данными

После выбора **Добавить линию тренда** появляется всплывающее окно с параметрами линии тренда. Так как мы предполагаем, что наша зависимость носит прямолинейный характер, для аппроксимации и сглаживания эмпирической линии выберем **Линейная.** Выберем **автоматическое сглаживание,** галочкой укажем **показать уравнение на диаграмме и поместитьR^2**(рис.4.43).

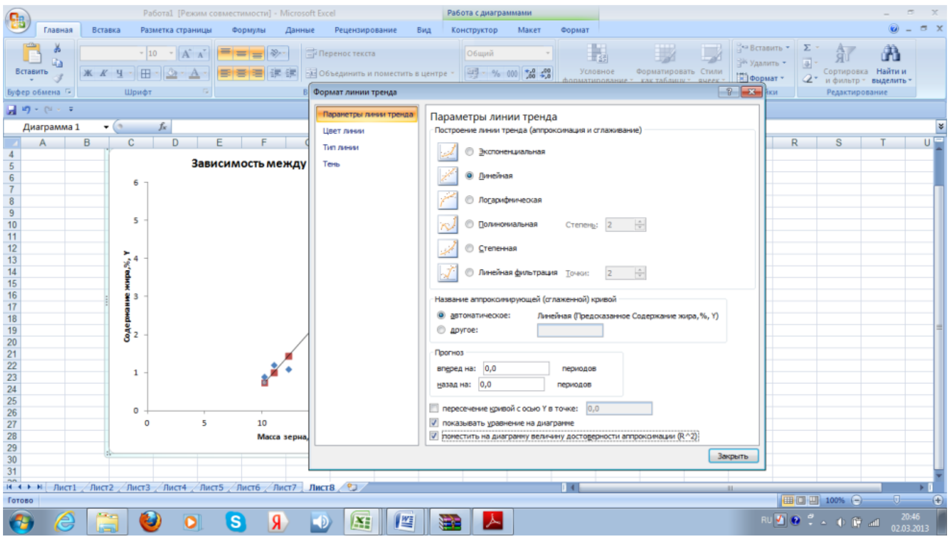


Рис. 4.43. Формат линии тренда

После выбора параметров линии тренда на листе 8 в автоматическом режиме получаем график зависимости между содержанием жира и массой зерна с наименованием осей У. X и расшифровкой легенды графика (рис. 4.44). На графике голубыми кубиками отмечено фактическое содержание жира, красными ромбиками предсказанное или теоретическое содержание жира.

На графике показано уравнение регрессии: Y= 0,34X – 2.68. Как из таблицы на рис.4.5, так и из этого уравнения видно, что коэффициент регрессии составляет 0,34%. Данный коэффициент свидетельствует, что увеличении массы зерна на 1 г, содержание жира увеличивается на 0,34%.

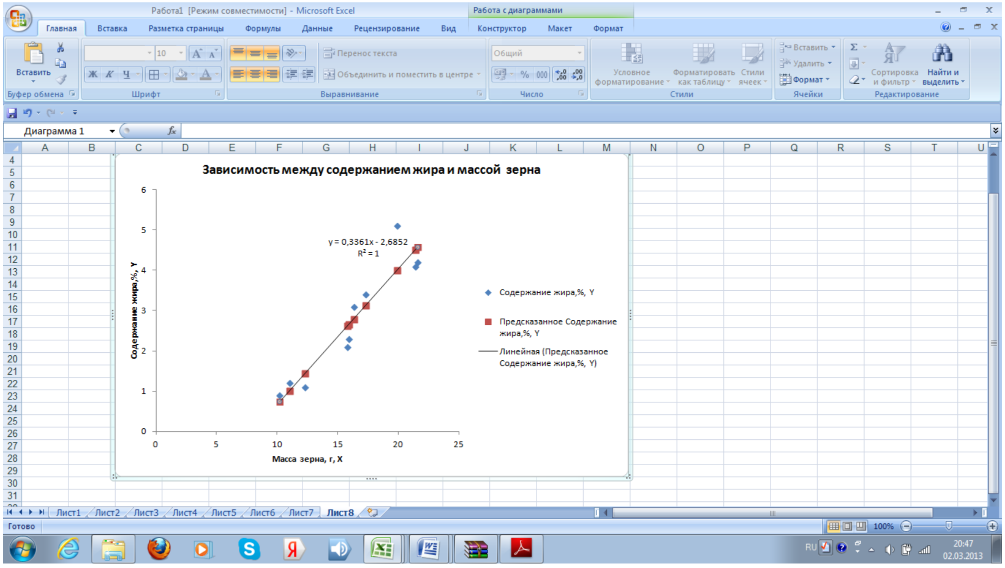


Рис. 4.44. График зависимости между содержанием жира и массой зерна.

Вопросы для самоконтроля

1.Объясните термины стохастическая связь, корреляция, функциональная связь.

2.В чем состоит проблема невозможности установления точной связи и природа ошибок наблюдения?

3.Опишите процесс усреднения как способ подавления влияния случайных факторов и формирования функциональных зависимостей (регрессий).

4. Напишите уравнение регрессии.

5.В чем заключается метод наименьших квадратов?

6.Как применяется метод наименьших квадратов при оценке неизвестных параметров уравнения регрессии.

7.Опишите коэффициент регрессии и его экономическое содержание в соответствующих задачах.

8. В чем состоит значимость уравнения регрессии и его коэффициентов?

9. В чем состоит значимость коэффициента корреляции?

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

V1: Модуль 1 Понятие математического моделирования

V2: **Задания А**
V3: **Однозначный выбор.**
S: **Последовательность действий, которые необходимо выполнить, чтобы от исходных данных перейти к величинам, которые необходимо найти**:
+1) Алгоритм
2) Модель
3) Метод
4) Система
S: **Отображение (представление) объекта, процесса или системы в определенной форме, которая отличается от формы их реального существования:**
+1) Модель
2) Метод
3)Алгоритм
4)Система
S: **В зависимости от того, как учитываются случайные факторы модели разделяют:**
+1) на детерминированные и стохастические
2) Сложные и упрощенные
3) Многомерные и динамические
4) Имитационные и матричные

S: **Модели, в которых рассматриваются временные характеристики и взаимодействия переменных:**
+1) Динамические
2)Стохастические
3)Сложные
4)Упрощенные
S: **Одно из основных математических понятий, с помощью которого моделируются взаимосвязи между различными величинами, количественные и качественные отношения между различными-экономическими характеристиками и показателями**:
1)Уравнение

2)График

3)Метод

+4) Функция

S: **Эластичность показывает**:

1) на сколько единиц изменится фактор x_k при изменении результирующего показателя y на 1 единицу;

2) на сколько единиц изменится результирующий показатель y при изменении фактора x_k на 1 единицу;

3) на сколько % изменится фактор x_k при изменении результирующего показателя y на 1 % ;

+ 4) на сколько % изменится результирующий показатель y при изменении фактора x_k на 1 %;

S: **Функция, независимая переменная которой принимает значения объемов используемого ресурса, а зависимая -значения объемов произведенной продукции**:

1)Экспоненциальная

2)Линейная

3) Показательная

+4) Производственная

1. S: **Модель в целом статистически значима, если**:

1) Fрасч. < Fтабл ;

2)Fрасч. ≤ Fтабл ;

+ 3)Fрасч. > Fтабл ;

4)Fрасч. = Fтабл **;**

S: **Модели, при построении которых используются данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов времени, называются**:

1) пространственными моделями;

2) моделями парной регрессии;

+ 3) моделями временных рядов;

4) множественной регрессией.

S: **Модели, при построении которых используются данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент времени, называются**:

1) моделями временных рядов;

+ 2) пространственными моделями;

3)мультипликативными моделями

4)множественной регрессией.

V3: **Наиболее правильный выбор.**

S: Моделирование — это:

+: [100] метод исследования каких-либо явлений, процессов или систем объектов, который предполагает создание искусственных или естественных систем (моделей), имитирующих существенные свойства оригинала; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов;

+: [60] одна из основных категорий теории познание: на идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования — как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели);

+: [20] исследование объектов познания на их моделях;

+: [5] процесс создания моделей и работа с ними.

S: Математическая формализация-это:

+: [100] фиксирование связей и отношений, обнаруженных и предполагаемых в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений

+: [60] процесс, при котором особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее

+: [20] построение абстрактно-математических моделей, раскрывающих сущность изучаемых процессов действительности……………………

+: [2] описание какого-то фрагмента реальности с помощью математического языка

S: Численные методы - это:

+: [100] раздел математики, изучающий методы, связанные с вычислениями и поиском численных решений математических задач, в том числе с помощью ЭВМ.

+: [60] методы приближенного или точного решения задач теоретической или прикладной математики, основанные на построении конечной последовательности действий над конечным множеством чисел.

+: [20] методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на реализации алгоритмов, соответствующих математическим моделям;

+: [10] методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над числами, выполняемыми на ЭВМ.

S: Математическая схема -это

+:[100] звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая модель».

+:[80] метод мышления, средство формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса ее функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной

+:[20]цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая модель».

+: [30] набор графов, таблиц или логических условий, формализация которых (запись с помощью полиномов, дифференциальных, интегральных уравнений) дает математическую модель.

.

S: Экзогенные переменные -это:

+: [100] переменные, которые воздействуют на исследуемые величины, но не являются объектом изучения

+: [60] переменные, которые задаются извне, их значение формируется вне модели.

+: [30] предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них;

+: [10] факторы, которые определяют эндогенные, однако сами при этом не попадают под их воздействие.

S:

+: [100].

+: [60]

+: [30].

+: [10].

S: Эндогенные переменные -это:

+:[100] переменные, изменение которых происходитвнутримоделируемойсистемывотличииотэкзогенныхпеременных, которые вводятся в модель извне.

+:[60]эконометрические переменные модели, которые в силу принятых теоретических предпосылок зависят от внутренней структуры объекта;

+:[30] зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые обозначаются через у;
+: [10] которые непосредственно входят в модель, являясь объектов изучения;
S: Линейная регрессия -
+: [100] используемая в статистике регрессионная модель зависимости одной (объясняемой, зависимой) переменной от другой или нескольких других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) с линейной функцией зависимости;
+:[60] описывает зависимость между зависимой переменной у (также называемой откликом) как функцией одной или нескольких независимых переменных X*i* (называемых предикторами). ;
+: [30] статистический метод, позволяющий предсказывать значения зависимой переменной *Y* по значениям независимой переменной *X*. ;
+: [10] статистический инструмент, используемый для прогнозирования будущих цен исходя из прошлых данных, и обычно применяется, чтобы определить, когда цены являются перегретыми.
S:Использование методов математики в экономике позволяет:
+: [100] определить и описать с наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов; четко сформулировать исходные данные и вывести из них методом дедукции выводы, адекватные объекту изучения той же степени, что и предположения; методом индукции получить новые сведения и знания об объекте - оценить форму связи и параметры зависимости его переменных, которые в наибольшей степени соответствуют имеющимся наблюдениям; точно, четко и компактно изложить положения экономической теории, сформулировать его понятия и выводы.
+: [60] определить и описать с высокой степенью абстракции наиболее существенные связи экономических переменных и объектов; четко сформулировать исходные данные и вывести из них методом дедукции выводы, адекватные объекту изучения; методом индукции получить новые сведения и знания об объекте; точно, четко и компактно изложить положения экономической теории, сформулировать его понятия и выводы.;
+ :[30] определить и описать с наиболее важные связи экономических переменных и объектов; четко сформулировать исходные данные и вывести из них методом дедукции выводы; методом индукции получить

новые сведения и знания об объекте - оценить форму связи и параметры зависимости его переменных, которые в наибольшей степени соответствуют имеющимся наблюдениям; точно, четко и компактно изложить положения экономической теории, сформулировать его понятия и выводы.;
+: [10] определить и описать с наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов; четко сформулировать исходные данные и вывести из них методом дедукции выводы, адекватные объекту изучения той же степени, что и предположения; точно, четко и компактно изложить положения экономической теории, сформулировать его понятия и выводы.

S: Причины неточного отражения реальности математической моделью заключаются в:

+: [100] ресурсы до некоторой степени взаимозаменяемы; затраты ресурсов не всегда пропорциональны выпуску; объемы ресурсов не всегда фиксированы; внутри каждого ресурса могут находиться функционально или качественно различные составляющие; цены продуктов и ресурсов могут зависеть от объема продаж; фирма может использовать одну из конечного набора технологий, характеризующуюся определенными сочетаниями ресурсов; различные единицы получаемой прибыли могут иметь разную ценность; интересы фирмы не всегда могут ограничиваться максимизацией прибыли; важную роль могут играть динамические взаимосвязи; на ситуацию могут воздействовать случайные факторы;
+: [60] ресурсы до некоторой степени взаимозаменяемы; затраты ресурсов не всегда пропорциональны выпуску; объемы ресурсов не всегда фиксированы; внутри каждого ресурса могут находиться функционально различные составляющие; цены ресурсов могут зависеть от объема продаж; фирма может использовать одну из конечного набора технологий, характеризующуюся определенными сочетаниями ресурсов; различные единицы получаемой прибыли могут иметь разную ценность; интересы фирмы не всегда могут ограничиваться максимизацией прибыли; важную роль могут играть динамические взаимосвязи; на ситуацию могут воздействовать случайные факторы;
+ :[30] ресурсы не всегда взаимозаменяемы; затраты ресурсов не всегда пропорциональны выпуску; объемы ресурсов не всегда фиксированы; внутри каждого ресурса могут находиться функционально различные составляющие; цены ресурсов могут зависеть от объема продаж;

фирма может использовать одну из конечного набора технологий; интересы фирмы не всегда могут ограничиваться максимизацией прибыли; важную роль могут играть динамические взаимосвязи; на ситуацию могут воздействовать случайные факторы;;
+: [10] ресурсы до некоторой степени взаимозаменяемы; затраты ресурсов не всегда пропорциональны выпуску; объемы ресурсов не всегда фиксированы; внутри каждого ресурса могут находиться функционально различные составляющие; цены ресурсов могут зависеть от объема продаж; фирма может использовать одну из конечного набора технологий, характеризующуюся определенными сочетаниями ресурсов; различные единицы получаемой прибыли могут иметь разную ценность; интересы фирмы могут ограничиваться максимизацией прибыли; на ситуацию могут воздействовать случайные факторы.
S: Аналоговыми модель- это:
+: [100] модель, в которой свойство реального объекта представляется некоторым другим свойством аналогичного по поведению объекта;
+:[60] один из трех исходных типов моделей: модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы;
+:[30] модель, параметры и функции которой аналогичны параметрам и функциям моделируемого объекта;
+:[10]модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законамизучаемой системы
V3: **Множественный выбор.**
S: Функцию можно задать в виде:

+:функции;
+:таблицы;
+:графика;
-:соответствия;

S: Функции Excel, которые позволяют вычислять коэффициенты линейной регрессии:

+:НАКЛОН;
+:ОТРЕЗОК;
-:КОЭФФИЦИЕНТЫ;
-:ОТНОШЕНИЯ.

S: В модели регрессии $\boldsymbol{y = f(x) + \varepsilon}$ величина $\boldsymbol{\varepsilon}$называется:

+:остатком;
-:случайной величиной;
+:возмущением;

+:случайной ошибкой;

S:В процессе спецификации модели выбор вида зависимости осуществляется:

+:экспериментально;

+:графически;

+:аналитически;

-: эмпирически.

S:Линейную регрессию можно представить в виде зависимости:

-:$\hat{y} = a + bx + \varepsilon$;;

+: $y = a + bx + \varepsilon$;

-: $y = a + bx$;

+: $\hat{y} = a + bx$.

S: К регрессиям, нелинейным относительно включенных в анализ объясняющих переменных - факторов, но линейным по оцениваемым параметрам относят:

-: степенные функции

+: полиномы разных степеней;

- показательные функции:

+ . равносторонняя гипербола

S: К регрессиям, нелинейным по оцениваемым параметрам относят:

+: степенные функции

-: полиномы разных степеней ;

+ показательные функции:

- . равносторонняя гипербола

S: Основоположниками теории производственных функций являются:

-: Ф. Уикстид

+: П. Дуглас ;

-:В Леонтьев

+ . Д. Кобб

S: Примером диагональной матрицы является:

+:$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

+: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

S: Примером симметричной матрицы является :

-: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

+: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

-: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

+ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

V2: **Задания B**

V3: **Вписать правильный ответ**

J:________________. описывают поведение непрерывной переменной как функции одной или нескольких переменных.

+*: линейные модели…*

J: Любой ______________характеризуется множествами: моментов времени T, входных X и выходных Y сигналов, состояний агрегата Z в каждый момент времени t

+*: агрегат*

J: _________________ используют для формализации причинно – следственных связей в сложных системах с параллельными процессами

+*:сетевые модели*

J:При построении и исследовании __________моделей используется теория стохастических дифференциальных уравнений и теория массового обслуживания.

+*: непрерывно-вероятностных*

V3: **Установить соответствие.**

Q: Установите соответствие между

Q: Установите соответствие между классами математических моделей в экономике и их определениями:

L1:Макроэкономические модели;

L2: Микроэкономические модели;

L3: Теоретические модели;

L4: Прикладные модели;

L5: Статические модели;

R1: описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели, такие как потребление, инвестиции, ВНП, занятость, процентную ставку, количество денег и др.

R2: описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики или функционирование одной структурной составляющей.;

R3: позволяют изучить общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок.;

R4: дают возможность оценивать параметры функционирования конкретного экономического объекта, сформулировать рекомендации для принятия конкретного управленческого решения;

R5: описывают состояние объекта в конкретный момент времени.

V3:Установить соответствие

Q: Установить соответствие между названием графической зависимости и ее видом:

L1: линейная;

L2: параболическая;

L3:гиперболическая;

L4:степенная;

L5:показательная;

R1:.$y = a + b \cdot x + \varepsilon$;

R2: $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$;

R3:$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

R4:. $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$

R5: $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$

V3:Установить соответствие

Q: Установите соответствие между названиями числовых характеристик случайно величины и ее математической формулой:

L1:Дисперсия непрерывной случайной величины;

L2: Среднеквадратическое отклонение

L3: Математическое ожидание дискретной случайной величины;

L4: Математическое ожидание непрерывной случайной величины;

L5: Дисперсия дискретной случайной величины;

R1: $D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$

R2: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

R3: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots$;

R4: $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$;

R5: $D(X) = M(X_0^2) = M[(X - M(X))^2] = M(X^2) - [M(X)]^2$

V3: **Установить последовательность.**

Q:Установите последовательность

Q: Установите последовательность нахождения параметров линейной регрессии (коэффициенты a и b прямой линии $y = a+bx$**)** с помощью средств MSExcel для набора точек (x_i, y_i).

L1: Поместить координаты экспериментальных точек в диапазоне A2:B6,

L2:В ячейках A9 и B9 поместить начальные значения коэффициентов a и b, которые положить равными 0 и подписать ячейки. В C2:C6 вычислить $y_i=a+bx_i$.

L3: В D2:D6 вычислить остатки (например, в D2формула =B2-C2).

L4:В D 9 вычислить сумму квадратов остатков (для этого воспользуйтесь функцией СУММКВ (диапазон).

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

V3:Установить последовательность

Q: Установите последовательность этапов в схеме определения экстремумов функции $y = f(x)$:

L1:Определитьпроизводную $y' = f'(x)$

L2:Найти стационарные точки функции из анализа области определения производной и уравнения $f'(x) = 0$.

L3:Выбрать первое или второе достаточное условие. В последнем случае находим $y'' = f''(x)$.

L4:Исследовать стационарные точки по достаточному условию, определяем наличие и вид экстремума.

L5: Вычислить экстремальные значения функции $y_{экстр.}=f(x_{стац.})$.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

R5: 5

V3:Установить последовательность

Q: Установите последовательность этапов *процесса построения экономической модели*:

L1: Формулирование предмета и цели исследования.

L2: Выделение основных структурных или функциональных элементов, соответствующих имеющейся цели, при этом выявляются наиболее важные качественные характеристики;

L3: Словесное описание выявленной взаимосвязи между элементами модели.

L4:Введение символических обозначений для учитываемых характеристик рассматриваемых экономических объектов, формализация отношений между ними – построение математической модели

L5: Проведение расчетов по математической модели и анализ полученного решения.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

R5: 5

V2: Задания С (расчетные задания)

V3: Задача 1 (1 расчетное задание)

J: В результате произведения двух матриц А и В получается матрица С. Указать номер правильного ответа.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. C= $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & -5 & 12\end{pmatrix}$

2. C= $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -5 & 12\end{pmatrix}$

3.C= $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & -5 & 12\end{pmatrix}$

4. C= $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & -5 & 12\end{pmatrix}$

+:1

V3: Задача 2 (2 расчетное задание)

*S:*Дан определитель 3-го порядка $\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$ Вычислить его величину.

+: 5

-: -5

-: 2

-: -2

V3: Задача 3 (3 расчетное задание)

J: Даны данные об использовании баланса за отчетный период приведены в таблице (в условных денежных единицах):

Таблица

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		Энергетика	Машиностроение		
Производство	Энергетика	7	21	72	100

	Машино-строение	12	15	123	150

Вычислить матрицу прямых затрат, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне. Указать номер правильного ответа

1. $A = \begin{pmatrix} 0.07,0.14 \\ 0.12,0.10 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0.07,0.11 \\ 0.12,0.10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0.07,0.14 \\ 0.13,0.10 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0.07,0.14 \\ 0.12,0.11 \end{pmatrix}$

+: 1

V3: Задача 4 (4 расчетное задание)

J: Даны данные об использовании баланса за отчетный период приведены в таблице (в условных денежных единицах):

Таблица

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		Энергетика	Машиностроение		
Производство	Энергетика	7	21	72	100
	Машиностроение	12	15	123	150

Вычислить матрицу полных затрат, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне. Указать номер правильного ответа

1. $S = \begin{pmatrix} 0.90;0.13 \\ 0.12;0.93 \end{pmatrix}$

2. $S = \begin{pmatrix} 0.90;0.14 \\ 0.11;0.93 \end{pmatrix}$

3. $S = \begin{pmatrix} 0.90;0.14 \\ 0.12;0.91 \end{pmatrix}$

4. $S = \begin{pmatrix} 0.90;0.14 \\ 0.12;0.93 \end{pmatrix}$

+:4

V3: Задача 5 (5 расчетное задание)

S: Даны данные об использовании баланса за отчетный период приведены в таблице (в условных денежных единицах):

Таблица

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		Энергетика	Машиностроение		
Производство	Энергетика	7	21	72	100
	Машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне. Указать номер правильного ответа.

1. $X = \begin{pmatrix} 179 \\ 161 \end{pmatrix}$

2. $X = \begin{pmatrix} 179 \\ 160 \end{pmatrix}$

3. $X = \begin{pmatrix} 170 \\ 160 \end{pmatrix}$

4. $X = \begin{pmatrix} 189 \\ 160 \end{pmatrix}$

+:2

V1: Модуль 2 Методы линейного программирования

V2: **Задания А**

V3: **Однозначный выбор.**

S: Задача линейного программирования называется канонической, если система ограничений включает в себя:

+1) Только равенства

2) Равенства и неравенства

3) Только неравенства

4) Условия неотрицательности

S: Какая из указанных задач является задачей линейного программирования?

+1) Задача о составлении диеты

2) Задача управления запасами

3) Задача формирования календарного плана реализации проекта

4)Задача разработки перечня необходимых ресурсов

S: Геометрический способ решения задачи линейного программирования применим:

+1) Если в задаче содержится только две переменные

2) Для любой задачи линейного программирования

3) Только для задачи линейного программирования в канонической форме

4) Если в задаче содержится несколько переменых

S: Какая из перечисленных задач не является задачей линейного программирования?

$$F = 120 - 3x + 10y \to \min$$

+1) $\begin{cases} 2xy \le 70, \\ 3x - 11y \le 23 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$

$$F = 11x - y \to \max$$

2) $\begin{cases} x + y \le 10, \\ 3x + 12y \le 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$

$$F = x + y \to \min$$

3) $\begin{cases} 2xy \le 68, \\ 3x + 9y \ge 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$

$$F = x + 12y \to \min$$

$$4)\begin{cases} 2xy \le 68, \\ 3x + 9y \ge 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

S: Какая из перечисленных задач является задачей линейного программирования?

$$F = 2xy \to \min$$

$$1)\begin{cases} 2x + 6y \ge 98, \\ 3x + 9y \le 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

$$F = xy \to \min$$

$$2)\begin{cases} 2x + 6y \ge 98, \\ 3x + 9y \le 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 5x + 11y \to \max$$

$$3)\begin{cases} 2x + 7y \le 70, \\ xy \le 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 4x + y \to \max$$

$$+4)\begin{cases} 2x + y \le 69, \\ x + y \le 50 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

S: **Симплекс-метод предназначен для решения задачи линейного программирования в**:

+1) Каноническом виде
2) Стандартном виде
3) Тривиальном виде
4) Общем виде

S: **Неизвестные в каноническом виде системы ограничений задачи линейного программирования, которые выражены через остальные неизвестные, называются…**:

+1) свободными
-2) небазисными
-3) базисными
-4) общими

S: **Специфическая задача линейного программирования, применяемая для определения экономичного плана перевозки однородной продукции от поставщиков к потребителям - это**:

+1) транспортная задача

2) математическая модель

3) общая задача

4) двойственная модель

S: **Если в транспортной задаче общее количество продукции поставщиков равно общему спросу всех потребителей, то такая задача является**:

+1) сбалансированной

2) несбалансированной

3) обшей

4) оптимальной

S: **К задачам дискретного программирования относятся задачи оптимизации, в которых переменные приобретают лишь**:

+1) определенные значения

2) множество значений

3) одно значение

4) два значения

V3: **Наиболее правильный выбор.**

S: К основным вопросам, которые требуют решения оптимизационной задачи относятся:

+: [100]. Задачи проектирования изделия - либо задание стоимости с наилучшими свойствами, либо с заданными свойствами наименьшей стоимости; задачи распределения ресурсов вообще и распределения ресурсов во времени; выбор критерия; задачи стохастической оптимизации; анализ принимаемого решения.

+: [60] Задачи проектирования изделия; задачи распределения ресурсов вообще и распределения ресурсов во времени; выбор критерия; задачи стохастической оптимизации; анализ принимаемого решения.

+ :[10] Задачи проектирования изделия - либо задание стоимости с наилучшими свойствами, либо с заданными свойствами наименьшей стоимости; задачи повременного распределения ресурсов;

+: [30] Задачи проектирования изделия - либо задание стоимости с наилучшими свойствами, либо с заданными свойствами наименьшей стоимости; задачи повременного распределения ресурсов во времени; выбор критерия; задачи стохастической оптимизации; анализ принимаемого решения.

S: Задачи сетевого планирования и управления это:
+: [100] задачи, рассматривающие соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций и моментом начала всех операций комплекса, состоящие в нахождении минимальной продолжительности комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.
+: [60] задачи, рассматривающие соотношения между сроками окончания крупного набора операций и моментом начала всех операций, состоящие в нахождении минимальной продолжительности набора операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.
+: [30]. задачи, рассматривающие соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций и моментом начала всех операций комплекса, состоящие в нахождении минимальной продолжительности комплекса операций.
+: [10] задачи, рассматривающие соотношения между сроками окончания крупного набора операций и моментом начала всех операций, состоящие в нахождении минимальной продолжительности набора операций.
S: Задача управления запасами это:
+: [100] задача отыскания оптимальных значений уровня запасов и размера заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на хранение, но с другой, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.
+: [60] задача отыскания оптимальных значений уровня запасов и размера заказа. Она заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на хранение, но с другой, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.
+ :[10] Рассматривает вариант, когда с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на хранение, но с другой, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

+: [30] задача отыскания оптимальных значений уровня запасов и размера заказа. Рассматривает вариант, когда с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на хранение, но с другой, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

S: Транспортная модель может применяться при:

+: [100] составлении наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов изготовления (например, заводов) в пункты доставки (например склады), при рассмотрении практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением именных графиков, назначением служащих не рабочие места, оборотом наличного капитала.

+: [60]. составлении наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов изготовления, при рассмотрении практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением именных графиков, назначением служащих не рабочие места, оборотом наличного капитала.;

+ :[30]. составлении наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов изготовления (например, заводов) в пункты доставки (например склады и может быть сведена к задаче линейного программирования и решена симплекс-методом;

+: [10] при рассмотрении практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением именных графиков, назначением служащих не рабочие места, оборотом наличного капитала и может быть сведена к задаче линейного программирования и решена симплекс-методом;

.

S: Задачи массового обслуживания позволяют:

+: [100] изучить и анализировать системы обслуживания с очередями заявок и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определение числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

+: [60] изучить системы обслуживания и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определение числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.;

+ :[30] изучить системы обслуживания и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик

+: [10] изучить и анализировать системы обслуживания с очередями заявок и состоят в определении показателей эффективности работы систем.

S: Две задачи линейного программирования называются симметричными взаимно если обладают следующими свойствами:

+: [100] В одной задачи ищется максимум, в другой минимум линейной функции; коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи; каждая задача записана в стандартной форме, причем в задаче на минимум все неравенства вида "≥", а в задаче на максимум - вида "≤"; матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обоих задач являются транспонированными друг к другу: А и $A^т$; Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи; условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

+: [60]. В одной задачи ищется максимум, в другой минимум линейной функции; коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи; каждая задача записана в стандартной форме; матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обоих задач являются транспонированными друг к другу: А и $A^т$; Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи; условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах;

+ :[30] В одной задачи ищется максимум, в другой минимум линейной функции; коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи; каждая задача записана в стандартной форме, причем в задаче на минимум все неравенства вида "≥", а в задаче на максимум - вида "≤"; матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обоих задач являются транспонированными друг к другу; Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи.

+: [10]. В одной задачи ищется максимум, в другой минимум линейной функции; коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи; каждая задача записана в стандартной форме, причем в задаче на минимум все неравенства вида "≥", а в задаче на максимум - вида "≤"; Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи; условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

S:Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в том, что:

+: [100] План производства $X^*=(x^*_1, x_2^*,\ldots x^*_n)$ и набор оценок ресурсов $Y^*=(y^*_1, y_2^*,\ldots y^*_m)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от продукции, найденная по "внешним", заранее известным ценам $c_1, c_2,\ldots c_n$, равна затратам на ресурсы по "внутренним", определенным в процессе решения, ценам $y_1, y_2,\ldots y_m$. Для всех других планов X и Y прибыль всегда меньше (или равна) затратам на ресурсы.

+: [60] План производства $X^*=(x^*_1, x_2^*,\ldots x^*_n)$ и набор оценок ресурсов $Y^*=(y^*_1, y_2^*,\ldots y^*_m)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от продукции, равна затратам на ресурсы. Для всех других планов X и Y прибыль всегда меньше (или равна) затратам на ресурсы. Т.е. предприятию безразлично производить ли продукцию по оптимальному плану X^* или продавать ресурсы по оптимальным ценам Y^*. Прибыль и в том и в другом случае одинакова.;

+ :[30] План производства $X^*=(x^*_1, x_2^*,\ldots x^*_n)$ и набор оценок ресурсов $Y^*=(y^*_1, y_2^*,\ldots y^*_m)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от продукции, найденная по ценам $c_1, c_2,\ldots c_n$, равна затратам на ресурсы ценам $y_1, y_2,\ldots y_m$. Для всех других планов X и Y прибыль всегда меньше (или равна) затратам на ресурсы. Т.е. предприятию безразлично производить ли продукцию по оптимальному плану X^* или продавать ресурсы по оптимальным ценам Y^*. Прибыль и в том и в другом случае одинакова

+: [10] План производства $X^*=(x^*_1, x_2^*,\ldots x^*_n)$ и набор оценок ресурсов $Y^*=(y^*_1, y_2^*,\ldots y^*_m)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от продукции, найденная по ценам $c_1, c_2,\ldots c_n$, равна затратам на ресурсы ценам $y_1, y_2,\ldots y_m$.. Т.е. предприятию безразлично производить ли продукцию по оптимальному плану X^* или продавать ресурсы по оптимальным ценам Y^*. Прибыль и в том и в другом случае одинакова.

S: Геометрический смысл добавления каждого нового линейного ограничения при реализации метода отсечения состоит в том, что:

+: [100] при проведении дополнительной прямой (гиперплоскости), которая отсекает от многоугольника (многогранника) допустимых решений его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами. В отсекаемую часть не должна попасть ни одна точка с целыми координатами. Следовательно, полученное при этом многограннике оптимальное решение будет целочисленным.

+: [60] при проведении дополнительной прямой (гиперплоскости), в отсекаемую часть не должна попасть ни одна точка с целыми координатами. В результате новый многогранник решений содержит все точки с целыми координатами, содержавшиеся в первоначальном многограннике решений. Следовательно, полученное при этом многограннике оптимальное решение будет целочисленным;

+ :[30]. В отсекаемую часть не должна попасть ни одна точка с целыми координатами. В результате новый многогранник решений содержит все точки с целыми координатами, содержавшиеся в первоначальном многограннике решений. Следовательно, полученное при этом многограннике оптимальное решение будет целочисленным.

+: [10] В отсекаемую часть не должна попасть ни одна точка с целыми координатами. В результате новый многогранник решений содержит все точки с целыми координатами, содержавшиеся в первоначальном многограннике решений.

S: Метод ветвей и границ это:

+: [100] один из комбинированных методов решения задач целочисленного линейного программирования. Его суть состоит в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

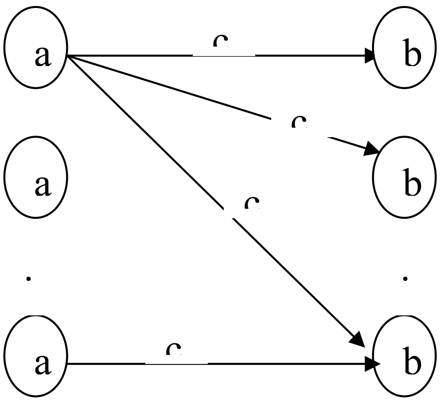
+: [60]. один из комбинированных методов решения задач целочисленного линейного программирования, при котором, множество допустимых решений некоторым образом разбивается на подмножества, каждое из которых этим же способом разбивается еще на подмножества. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план;

+ :[30] один из комбинированных методов решения задач целочисленного линейного программирования. Он состоит в переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

+: [10] один из комбинированных методов решения задач целочисленного линейного программирования, который предполагает путем нескольких итераций нахождение оптимального решения задачи.

.

S: Транспортная модель такого вида называется :



+: [100] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.

+: [60] сетевой. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.;

+ :[30] сетевой. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой. Стоимость перевозки c_{ij}.

+: [10] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j.

V3: **Множественный выбор.**

S: Для нахождения оптимальных планов задач целочисленного программирования применяют следующие основные группы методов:

+: методы отсечения;

+: комбинированные методы;

+: приближенные методы;

-: регрессионные методы;

S: Матрица транспортной задачи, которая удовлетворяет условиям задачи и для которой целевая функция принимает наименьшее значение - это:

+: оптимальный план;

+: оптимальное решение;

-: граничные условия;

-: ограничения.

S: Если в транспортной задаче общее количество продукции поставщиков меньше, чем общий спрос всех потребителей, то такая задача является

+: открытой;

-: сбалансированной;

+: несбалансированной;

-: оптимальной;

S: Отметьте условия применения симплекс-метода при решении задачи линейного программирования

+ правые части функциональных ограничений положительны;

+: целевая функция максимизируется;

+: все функциональные ограничения имеют вид неравенств;

-: все коэффициенты системы функциональных ограничений неотрицательны

S:Для успешного моделирования надо выполнить следующие правила:

+: учитывать главные свойства объекта;

+:пренебрегать второстепенными свойствами;

+: уметь отделить главные свойства от второстепенных.

-:представлять каким образом можно получить решение.

.S: Математическая модель экономического процесса описывает зависимость между:

+:исходными данными;

+:факторами производства;

+:искомыми величинами.

-:результатами производства.

.S: Метод поиска оптимального решения выбирается исходя из:

+: вида функции z;

+:наложенных ограничений;

-: условий моделирования.

-: требований к форме представления решения.

.**S: Многоугольником решений может являться:**

+:точка;

+:прямая;

+: неограниченная многоугольная область.

-: плоскость.

.S: цены, которые появились бы в том случае, если фирма, осуществляющая производственный процесс, вместо производства, решила бы продать имеющиеся ресурсы, причем таким образом, чтобы прибыль от их продажи была бы не меньше, чем прибыль от данного производственного процесса условно называются:

+:учетными;

+:неявными;

+:теневыми.

-:искусственными.

.**S: Модель является канонической моделью линейного программирования:**

+: первое базисное решение недопустимо;

+:m>n;

-:m= n.

-: m<n.

V2: **Задания B**

V3: **Вписать правильный ответ**

J: _____________ это точный набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения результата решения задачи за конечное время

+ *алгоритм*

J: _____________. это матрица коэффициентов ограничений двойственной задач по отношению к исходной

+ *транспонированная матрица*

J: ______________. это существенный, отличительный признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего либо

+*критерий*

J: _____________ это класс задач, использующий случайность в процессе поиска решения

+ *задачи стохастической оптимизации*

V3: **Установить соответствие.**

Q:Установите соответствие между определениями задач линейного программирования и их названиями:

L1: исходя из содержательного смысла задачи, ее решения должны быть целыми числами,

L2: функция z линейно зависит от решения x и все ограничения представляют собой линейные неравенства или уравнения;

L3: критерий оптимальности и (или) ограничения задаются нелинейными функциями;

L4: критерий оптимальности и (или) ограничения задаются нелинейными функциями, и указанные функции обладают свойствами выпуклости;

R1: задача *целочисленного программирования*

R2: классическая задача *линейного программирования*;

R3: задача *нелинейного программирования*

R4: задача *выпуклого программирования*;

V3:Установить соответствие

Q: Установить соответствие между условием задачи и ответом на ее вопрос:

L1:*Дана задача линейного программирования:* "Предприятие производит 2 вида продукции – *X* и *Y*, используя в производстве два вида ресурсов – *A* и *B*. Производство одной единицы продукции *X* требует 2 ед. ресурса *A*, 3 ед. ресурса *B* и приносит прибыль в размере 5 у.е. Производство одной единицы продукции *Y* требует 7 ед. ресурса *A*, 9 ед. ресурса *B* и приносит прибыль в размере 10у.е. Запас ресурса А составляет 70 единиц, ресурса В – 50 ед. Определить, при каком объёме производства прибыль будет максимальна." *Математическая постановка задачи имеет вид*;

L2: *Дана задача линейного программирования:* "Предприятие производит три вида продукции А, В, С. Прибыль от реализации единицы продукции составляет 4, 5 и 3 у.е. соответственно. Известен объём энергозатрат на производство единицы продукции каждого вида. Определить, при каком объёме производства прибыль будет максимальна." *Целевая функция данной задачи имеет вид…* ;

L3*: Дана задача линейного программирования:* "Предприятие производит два вида продукции А и В. Прибыль от реализации единицы продукции составляет 2 и 3 у.е. соответственно. Для производства единицы продукции А требуется 7 кг сырья первого типа и 5 кг сырья второго типа; для производства единицы продукции В требуется 4 кг сырья первого типа и 9 кг сырья второго типа. На складе имеется 120 кг сырья первого типа и 90 кг сырья второго типа. Определить, при каком объёме производства прибыль будет максимальна." *Система ограничений данной задачи имеет вид;*

L4:*Дана задача линейного программирования:* "Предприятие производит два вида продукции А и В. Прибыль от реализации единицы продукции составляет 11 и 6 у.е. соответственно. Для производства единицы продукции А требуется 1 кг сырья первого типа и 3 кг сырья второго типа; для производства единицы продукции В требуется 7 кг сырья первого типа и 2 кг сырья второго типа. На складе имеется 230 кг сырья первого типа и 190 кг сырья второго типа. Определить, при каком объёме производства прибыль будет максимальна." *Система ограничений данной задачи имеет вид;*

L5:*Дана задача линейного программирования:* "Предприятие производит четыре вида продукции А, В, С. Прибыль от реализации единицы продукции составляет 7, 6, 8 и 11 у.е. соответственно. Известен объём энергозатрат на производство единицы продукции каждого вида.

Определить, при каком объёме производства прибыль будет максимальна." *Целевая функция данной задачи имеет вид:*

$F = 5x + 10y \to \max$

R1: $\begin{cases} 2x + 3y \le 70, \\ 7x + 9y \le 50 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

R2: $F = 4x + 5y + 3z$;

R3: $\begin{cases} 7x + 5y \le 120, \\ 4x + 9y \le 90 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$

R4: $\begin{cases} x + 3y \le 230, \\ 7x + 2y \le 190 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$

R5: $F = 7x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 11x_4$

V3:Установить соответствие

Q: Установить соответствие между основными классами задач оптимизации и их содержательной постановкой:

L1: *Задачи массового обслуживания*;

L2: *Задача распределения ресурсов*

L3: *Задача ремонта* и *замены оборудования*;

L4: Задача *планировки* и *размещения*;

L5: *Задача составления расписания*;

R1: посвящены изучению и анализу систем обслуживания с очередями заявок и состоят в определение показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определение числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

R2: возникает при определенном наборе работ (операций), которые необходимо выполнить при ограничении наличных ресурсов, и требуется найти оптимальной распределение ресурсов между операциями или состав операций

R3: сводится к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также замены оборудования модернизированным;

R4: состоит в определении оптимального числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой;

R5: состоит в определении оптимальной очереди выполнения операций на различных видах оборудования

V3: **Установить последовательность.**

Q: Установить последовательность этапов алгоритма решения задачи линейного программирования графическим способом:

L1:Построить многоугольную область допустимых решений на плоскости x_1Ox_2, соответствующую ограничениям

L2: Построить вектор-градиент $\nabla z = (\frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1; \frac{\partial z}{\partial x_2} = c_2)$ целевой функции z в любой точке x_0, принадлежащей области допустимых решений.

L3: Передвигать прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = z_0$ (линии уровня функции z), перпендикулярную вектору-градиенту, параллельно самой себе в направлении вектора-градиента в случае задачи на максимум (в противоположном направлении – в случае задачи на минимум) до тех пор, пока она не покинет область допустимых решений. Предельная точка (или точки) области являются оптимальными точками.

L4:Найти координаты оптимальной точки, решив систему уравнений, которая соответствует прямым, пересечение которых образует эту точку.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

V3:Установить последовательность

Q: Установить последовательность шагов алгоритма симплекс-метода

L1: Исходную расширенную систему занести в первую симплекс таблицу.

L2: Проверить выполнение критерия оптимальности (при решении задачи на максимум критерий оптимальности состоит в отсутствии отрицательных коэффициентов в оценочной строке).

L3: По оценочной строке выбрать переменную вводимую в базис. Находим наибольший по модулю отрицательный коэффициент в оценочной строке.

L4: Найти переменную, выводимую из базиса.

L5: Перейти к следующей таблице по правилам (преобразования Гаусса-Жордана

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4
R5: 5
V3:Установить последовательность
Q: Установите последовательность этапов алгоритма составления двойственных задач
L1: Приводим все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному символу (причем в задаче на минимум к "≤", а в задаче на максимум к "≥").
L2: Составляем расширенную матрицу A_1, в которую включаем матрицу A, столбец свободных членов и строку переменных коэффициентов целевой функции.
L3: Находим $A_1^т$.
L4:Формулируем двойственную задачу на основе полученной матрицы $A_1^т$ и условии неотрицательности переменных.
R1: 1
R2: 2
R3: 3
R4: 4

V2: Задания С (расчетные задания)
V3: Задача 1 (1 расчетное задание)
J: J: Решить задачу симплекс-методом. Указать номер правильного ответа.

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1): Критерий оптимальности выполнен, значит z_{max}=24. Оптимальное решение (6; 4; 0; 0; 1; 3).
2)Критерий оптимальности выполнен, значит z_{max}=23. Оптимальное решение (6; 2; 0; 0; 1; 3).
3)Критерий оптимальности выполнен, значит z_{max}=24. Оптимальное решение (8; 4; 0; 0; 1; 3).
4)Критерий оптимальности выполнен, значит z_{max}=23. Оптимальное решение (6; 4; 0; 1; 1; 3).
+: 1

V3: Задача 2 (2 расчетное задание)

*J:*Решить задачу в целых числах. Указать номер правильного ответа.

$$z = x_1 - 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1)Найденный план целочисленен X(2;7;19;0;0;0).
2)Найденный план целочисленен X(2;8;19;0;1;0).
3)Найденный план целочисленен X(2;7;20;0;1;0).
4)Найденный план целочисленен X(2;7;19;0;1;0).
+:4

V3: Задача

V3: Задача 3 (3 расчетное задание)

J: Хлебозавод выпускает два вида хлеба: Столичный и Городской, которые поступают в оптовую продажу. Для их производства используются два выходных: мука Р и мука П. Максимально возможные суточные запасы составляют 6 т и 8т соответственно (см. таблицу 3)

Таблица 3

Расходуемая продукция -мука	Затраты расходуемой продукции в т на т хлеба		Максимально возможный запас, т
	Столичный	Городской	
Р	1	2	6
П	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на хлеб Городской никогда не превышает спрос на хлеб Столичный более чем на 1т. Спрос на хлеб Городской никогда не превышает 2т в сутки. Оптовые цены на хлеб за 1т: Столичный - 4,5 тыс. руб., Городской - 3тыс. руб.

Построить математическую модель решения задачи: какое количество хлеба каждого вида надо производить для того, чтобы прибыль от реализации была максимальный? Указать номер правильного ответа.

математическая модель задачи имеет вид:
1)$F = Z = 4500x_с + 3000\, x_г \to \max$
$x_с + 2\, x_г \le 6$

$2x_с + x_г \geq 8$
$x_г - x_с \leq 1$
$x_г \leq 2$
$x_с, x_г \geq 0$
2) математическая модель задачи имеет вид:
$F = Z = 4500x_с + 3000\,x_г \rightarrow \max$
$x_с + 2\,x_г \leq 6$
$2x_с + x_г \leq 8$
$x_г - x_с \leq 1$
$x_г \leq 2$
$x_с, x_г \geq 0$
3) математическая модель задачи имеет вид:
$F = Z = 4500x_с + 3000\,x_г \rightarrow \max$
$x_с + 2\,x_г \geq 6$
$2x_с + x_г \leq 8$
$x_г - x_с \leq 1$
$x_г \leq 2$
$x_с, x_г \geq 0$
4)математическая модель задачи имеет вид:
$F = Z = 4500x_с + 3000\,x_г \rightarrow \max$
$x_с + 2\,x_г \leq 6$
$2x_с + x_г \leq 8$
$x_г - x_с \geq 1$
$x_г \leq 2$
$x_с, x_г \geq 0$
+:2
V3: Задача 4 (4 расчетное задание)
Задача 4 (4 расчетное задание)

J: Имеются два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2, S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице 2.

Таблица 3

Питательное вещество(витамин)	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 руб.

Целевая функция экономико-математической модели задачи: составить такой дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не меньше установленного предела, будет иметь вид. Указать номер правильного ответа.

1): $z = 4x_1 + 6x_3 \to \min$

2): Z= $4x_1+7x_2$ min

3): Z= $4x_1+7x_3$ max

4): Z= $4x_2+7x_2$ min

+:1

V3: Задача 5 (5 расчетное задание)

J: Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используется четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	-	1	5
S_4	3	-	21

Прибыль, получаемая от единиц продукции P_1 и P_2, - соответственно 2 и 3 руб.

Целевая функция экономико-математической модели задачи: составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной, будет иметь вид. Указать номер правильного ответа.

1):z= $3x_1+ 2x_3$ max

2):$z= 2x_1+ 3x_2 \to$ max

3):$z= 2x_2+ 3x_3 \to$ max

4): $z = 2x_1 + 3x_3 \to \max$

+: 4

V1: Модуль 3. Распределительные задачи

V2: **Задания А**

V3: **Однозначный выбор.**

S: **Опорным решением транспортной задачи называется**

+: любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы;

-: любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно зависимы;

-:единственно допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы;

-: любое допустимое решение, для которого векторы условий, линейно независимы.

S: Для проверки линейной независимости векторов условий, соответствующих координатам допустимого решения используют

-: блоки

-*:* графы

-*:* отсечения

+*:* циклы

S: Метод «северо-западного угла» состоит:

-: в вычеркивании всех строк таблицы, содержащих по одной занятой клетке, затем в вычеркивании всех столбцов, содержащих по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов до тех пор, пока не будет решен вопрос виде получившегося решения;

+:в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя ;

-: в заполнении ячеек с наименьшими тарифами, а потом уже ячеек с большими тарифами. То есть выбираются перевозки с минимальной стоимостью доставки груза.;

-:. в том, что на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф.

S: Метод двойного предпочтения состоит:

+: в вычеркивании всех строк таблицы, содержащих по одной занятой клетке, затем в вычеркивании всех столбцов, содержащих по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов до тех пор, пока не будет решен вопрос виде получившегося решения;

-: в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя;

-: в заполнении ячеек с наименьшими тарифами, а потом уже ячеек с большими тарифами. То есть выбираются перевозки с минимальной стоимостью доставки груза;

-: в том, что на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф.

S: Метод «минимального элемента» состоит?

-: в том, что на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф;

-: в вычеркивании всех строк таблицы, содержащих по одной занятой клетке, затем в вычеркивании всех столбцов, содержащих по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов до тех пор, пока не будет решен вопрос виде получившегося решения

-: в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя

+: в заполнении ячеек с наименьшими тарифами, а потом уже ячеек с большими тарифами. То есть выбираются перевозки с минимальной стоимостью доставки груза;

S: Метод «аппроксимации Фогеля состоит?

+ в том, что на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф;

-: в заполнении ячеек с наименьшими тарифами, а потом уже ячеек с большими тарифами. То есть выбираются перевозки с минимальной стоимостью доставки груза

-: в вычеркивании всех строк таблицы, содержащих по одной занятой клетке, затем в вычеркивании всех столбцов, содержащих по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов до тех пор, пока не будет решен вопрос виде получившегося решения

-:в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя.

S: Может ли транспортная задача иметь несколько оптимальных решений, обеспечивающих одинаковую суммарную стоимость перевозок?

-: может;

-: не может

-: при определенных условиях

-: почти всегда

S: Если в транспортной задаче количество положительных поставок равно n+m-1, где n – количество поставщиков, m – количество потребителей, то такая задача является**?**

+: невырожденной*;*

-*:* вырожденной

-*:*выраженной

-*:* невыраженной

S: Если в транспортной задаче (ТЗ) суммарная мощность поставщиков превосходит суммарную потребность потребителей, то такая ТЗ называется?

-: закрытой; ………………………

+: открытой………………………

-: смешанной

-: сбалансированой

S:Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план транспортной задачи (n – количество поставщиков, m – количество потребителей)):

+: m+n-1

-: m+n+1

-:.m-n

-: n-m

S: Задача о назначении относится к

+: распределительным задачам

-: задачам линейного программирования

-:задачам динамического программирования

-: задачам управления и планирования

V3: **Наиболее правильный выбор.**

S: Распределительная задача -это :

+: [100] специальная задача линейного программирования транспортного типа, имеющая многочисленные приложения к задачам планирования, управления и проектирования.;

+: [60] класс экономико-математических задач, связанных с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить;

+:[20] это специальная линейная задача транспортного типа, имеющая многочисленные приложения к планированию

+: [5] это задача пропорционального распределения ресурсов.

S: Транспортная задача является сбалансированной если:

+:[100] Равенство запасов потребностям есть необходимое и достаточное условие совместности и, следовательно, разрешимости транспортной задачи

+:[60] если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей,

+: [20] запасы груза в пунктах отправления были равны потребности в грузе в пунктах назначения

+: [2] она является закрытой ;

S: Транспортная задача является несбалансированной если:

+: [100] в рассматриваемых пунктах запасы не равны потребностям: или $\sum a_i > \sum b_j$, т. е. запасы превосходят потребности, или же $\sum a_i < \sum b_j$ — запасы не обеспечивают потребностей. .

+:[60] **сумма единиц товара поставщиков не равна сумме единиц товара потребителей**

+: [20] суммарный объем предложений (грузов, имеющихся в пунктах отправления) не равен общему объему спроса на товары (грузы), запрашиваемые пунктами назначения

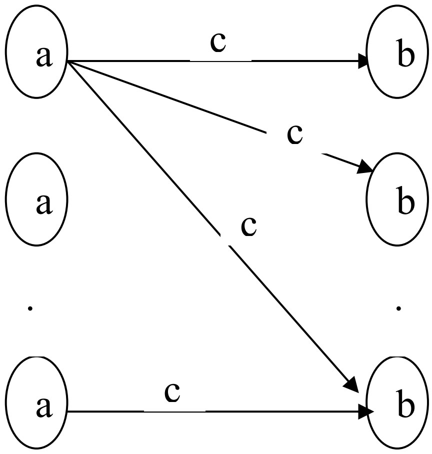
+: [10] она является открытой.

S: Задача о назначениях -это

+: [100] одна из фундаментальных задач комбинаторной оптимизации в области математической оптимизации или исследовании операций;

+:[80] частный случай транспортной задачи, в которой число поставщиков (например, число рабочих, или, иначе, поставщиков рабочей силы) в точности равно числу потребителей («работ», различных технологических операций);
+: [20] это частные задачи линейного программирования..
+:[30]вид задачи *линейного программирования*, с помощью которой решаются вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или *затраты* на заработную плату- наименьшими (поскольку для каждой комбинации «рабочий — станок» характерна своя *производительность труда*), как наилучшим образом распределить экипажи самолетов, как назначить людей на различные должности (отсюда и название задачи) и т.д.
S: При построении транспортной модели используются:
+: [100] величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте $a_1, a_2, ... a_m$; величины, характеризующие объем спроса в каждом пункте потребления $b_1, b_2, ... b_n$;стоимость перевозки единицы продукции из каждого пункта производства в пункт потребления $c_{ij}, i = 1,2,...m; j = 1,2,...n$.
+: [60] величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте; величины, характеризующие объем спроса в каждом пункте потребления; стоимость перевозки единицы продукции из каждого пункта производства в пункт потребления.
+: [30] величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте $a_1, a_2, ... a_m$; величины, характеризующие объем спроса в каждом пункте потребления $b_1, b_2, ... b_n$;
+: [10] величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте; стоимость перевозки единицы продукции из каждого пункта производства в пункт потребления $c_{ij}, i = 1,2,...m; j = 1,2,...n$. ;

S: Транспортная модель такого вида называется



+: [100] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.

.

+: [60] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Маршрут, по которому перевозится продукция, называется дугой, количество продукции, производимая в i-ом исходно пункте обозначается a_i. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.

+: [30] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения. Исходные пункты и пункты назначения называются вершинами сети или соответствующего графа. Количество потребляемой продукции в j-ом пункте - b_j. Стоимость перевозки c_{ij}.

+: [10] сетевой и имеет m исходных пунктов и n пунктов назначения.

S: Задача о назначении формулируется следующим образом:

+:[100] Имеется некоторое число работ и некоторое число исполнителей. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

+:[60] как задача максимизации целевой функции, она достаточно просто может быть преобразована в эквивалентную задачу с минимизацией целевой функции;
+:[30] Имеется *m* работ и *n* кандидатов для их исполнения. Затраты *i*-ого кандидата на выполнение *j*-ой работы равны c_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$. Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работ были минимальными;
+: [10] в виде практических заданий, их решение ищется исходя из специфических условий работы предприятия;
S: Задача коммивояжера
+: [100] задача нахождения замкнутого маршрута минимальной длины, по которому коммивояжер (бродячий торговец) может объехать n населенных пунктов, расстояния между которыми заданы матрицей $C=(c_{ij})$, $c_{ii}=\infty$. ;
+:[60] одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации, заключающаяся в поиске самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город ;
+: [30] задача математического программирования по определению оптимального маршрута движения коммивояжера, цель которого состоит в том, чтобы посетить все объекты, записанные в задании, за кратчайший срок и с наименьшими затратами.
+: [10] важная задача транспортной логистики, отрасли, занимающейся планированием транспортных перевозок.
S: Если модель несбалансированная, то надо ввести в случае перепроизводства:
+: [100] фиктивный пункт распределения, при этом стоимость перевозки в i-й пункт положить равной стоимости складирования, тогда

объем «перевозок» груза в j-ый пункт будет равен объему складирования излишков продукции на фабриках.   .

+: [60] фиктивный пункт распределения, при этом стоимость перевозки в i-ый пункт положить равной стоимости складирования. .

+: [30] фиктивный пункт распределения, тогда объем «перевозок» груза в j-ый пункт будет равен объему складирования излишков продукции на фабриках;

+: [10] фиктивный пункт распределения.

S: Если модель несбалансированная, то надо ввести в случае дефицита

+: [100] фиктивную фабрику, стоимость перевозки единицы продукции с этой фабрики положить равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы «перевозки» будут равны объемам недопоставок продукции в соответствующий пункт распределения. .

+: [60] фиктивную фабрику, объемы «перевозки» будут равны объемам недопоставок продукции в соответствующий пункт распределения.

+: [30] фиктивную фабрику, стоимость перевозки единицы продукции с этой фабрики положить равной стоимости штрафов за недопоставку продукции;

+: [20] фиктивную фабрику . V3: **Множественный выбор.**.

S: Распределительная задача представляет собой специальную задачу линейного программирования транспортного типа, имеющую многочисленные приложения к задачам:

+: проектирования;

+: планирования;

+: управления;

-:функционирования.

S: При построении транспортной модели используются:

+: величины, характеризующие объем производства ;…

-: цена единицы продукции, перевозимой из каждого пункта производства в пункт потребления.…

+: величины, характеризующие объем спроса в каждом пункте потребления

+: стоимость перевозки единицы продукции из каждого пункта производства в пункт потребления

S: В соответствии с терминологией транспортной модели поставщики представлены:……………………

+: обычным производством,

+: сверхурочным производством, ………………………

-: плановым производством,

-: сверхплановым производством.

S: Затраты на «транспортировку» единицы продукции от любого поставщика к любому потребителю представляются суммой соответствующих:

+: производственных затрат

-: затрат на содержание транспорта;

+: затрат на хранение единицы продукции

-: затрат на содержание складских помещений ;

S: Матрица X = $(x_{ij})_{mxn}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из *i*-го пункта отправления в *j*-й пункт назначения называется

+: матрицей перевозок

+: планом транспортной задачи…

-: матрицей тарифов

-: матрицей транспортных расходов

S: Если имеется *m* пунктов отправления с запасами a_i единиц груза в каждом и имеется *n* пунктов назначения с потребностями в грузах b_j. Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij}, то матрица $(c_{ij})_{mxn}$ называется:

+: матрицей тарифов,

+: матрицей перевозок

+: матрицей транспортных расходов…

-: планом транспортной задачи…

S: Если в рассматриваемых пунктах запасы не равны потребностям: или $\sum a_i > \sum b_j$, т. е. запасы превосходят потребности, или

же $\sum a_i < \sum b_j$ — запасы не обеспечивают потребностей , такая модель задачи называется
+: несбалансированной,
-: сбалансированной
-: закрытой
+:.открытой
S: При решении транспортной задачи может применяться метод
+: северо-западного угла,
+: потенциалов
+: распределительный …
-: венгерский…
S: Метод решения транспортной задачи, при котором для вводимой переменной строится замкнутый цикл, который состоит из вертикальных и горизонтальных перемещений по транспортной таблице, причем смена направлений происходит только в ячейках с базисными переменными называется:
+: распределительным;
+: построением замкнутого цикла
-: венгерский…
-: потенциалов.
S: К методам решения транспортной задачи, в которых происходит пошаговое удаление переменных в строках и столбцах относятся:
+: метод северо-западного угла;
-: метод потенциалов;
+: метод минимальной стоимости
-: распределительный метод.

V2: **Задания В**
V3: **Вписать правильный ответ**
J: Если модель несбалансированная, то надо ввести: ___________-фиктивный пункт распределения, при этом стоимость перевозки в i-ый пункт положить равной стоимости складирования, тогда объем «перевозок» груза в j-ый пункт будет равен объему складирования излишков продукции на фабрика.

+:в случае перепроизводства …

J: Если модель несбалансированная, то надо ввести: ___________- фиктивную фабрику, стоимость перевозки единицы продукции с этой фабрики положить равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы «перевозки» будут равны объемам недопоставок продукции в соответствующий пункт распределения.

+:в случае дефицита

J: Цель построения _____________заключается в определении количества продукции, которую следует перевозить из всех исходных пунктов в пункты потребления при минимальных общих транспортных расходах.

+:транспортной модели

J:___________________заключается в отыскании наилучшего распределения ресурсов, при котором либо максимизируется общин доход или результат, выраженный в какой-либо другой форме, либо минимизируются затраты.

+ распределительная задача

V3: **Установить соответствие.**

Q: Установите соответствие между описанием метода решения ТЗ и его названием

L1: Переменной x_1 расположенной в северо-западном углу присваивается $\max\{a_1, b_1\}$. После этого вычеркивается соответствующая строка или столбец, при этом остальные переменные, расположенные в строке или столбце полагаются равными 0. Если $a_1 = b_1$, то вычеркивается и строка и столбец. Оставшаяся таблица сбалансированная. Для оставшейся таблицы процесс повторяется.

Процесс нахождения допустимого решения прекращается, когда остается не вычеркнутой одна строка или столбец

L2: L1: Переменной x_1 расположенной в северо-западном углу присваивается $\max\{a_1, b_1\}$. На каждом шаге выбирается переменная не в верхней левой ячейке, а в ячейке, стоимость которой минимальна. Процесс нахождения допустимого решения прекращается, когда остается не вычеркнутой одна строка или столбец

L3: Столбцу i строке j ставится в соответствие переменные U_i, V_j потенциалы. Для всех базисных переменных x_{ij} выполнено $U_i + V_j = c_{ij}$. Совокупность таких уравнений образует систему m+n-1 уравнений с m+n неизвестными. Значение потенциалов определяется из этой системы, если одному из потенциалов придается произвольное значение.

L4:Для вводимой переменной строится замкнутый цикл (цикл начинается и заканчивается в ячейке вводимой переменной). Он состоит из вертикальных и горизонтальных перемещений по транспортной таблице, причем смена направлений происходит только в ячейках с базисными переменными.

R1: метод северо-западного угла

R2: метод минимальной стоимости

R3: метод потенциалов

R4: распределительный метод

Q: Установить соответствие между отдельными элементами математической модели задачи, приведенной ниже и их конкретным видом.

Хлебозавод выпускает два вида хлеба: Столичный (хс)и Городской (хг), которые поступают в оптовую продажу. Для их производства используются два выходных: мука Р и муку П. Максимально возможные суточные запасы составляют 6т и 8т соответственно.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на хлеб Городской никогда не превышает спрос на хлеб Столичный более чем на 1т. Спрос на хлеб Городской никогда не превышает 2т в сутки. Оптовые цены на хлеб за 1т: Столичный - 4,5 тыс. руб., Городской - 3тыс. руб.

Какое количество хлеба каждого вида надо производить для того, чтобы

прибыль от реализации был максимальный?

L1: Суммарный суточный доход от производства всего хлеба равен

L2: Расходы исходных продуктов для производства обоих видо вхлеба имеют вид

L3: Ограничение на величину спроса имеет вид

L4: Ограничения, которые налагаются на хг и хс

R1: F = Z = 4500хс +3000 хг….

R2: $хс+2хг\leq 6$

$2хс+хг\leq 8$

R3. $хг - хс \leq 1$

$хг \leq 2$

R 4: $хс, хг \geq 0$

Q: Установить соответствие между элементами математической модели задачи о назначениях, приведенной ниже и их названиями.

Мастер должен расставить трех рабочих для выполнения трех операций. Причем, каждый рабочий должен выполнять только одну операцию, и каждая операция должна выполняться только одним рабочим. Известно сколько минут в среднем тратит каждый из рабочих на выполнение каждой операции. Данные представлены в таблице.

Работники	***Работы***		
	1	***2***	***3***
1	*10*	*12*	*14*
2	*11*	*13*	*14*
3	*10*	*9*	*12*

Как распределить рабочих по операциям, чтобы минимизировать суммарные затраты рабочего времени?

L1: $x_{ij} = \begin{cases} 0, i \text{ работник не назначен на } j \text{ операцию}, \\ 1, i \text{ работник назначен на } j \text{ операцию}, \end{cases}$

L2:*V=10*x11+12*x12+14*x13+*

*+11*x21+13*x22+14*x23+*

*+10*x31+9*x32+12*x33 (*мин.*)*……………………

L3: $x11+x12+x13=1$,
$x21+x22+x23=1$,
$x31+x32+x33=1$,
$x11+x21+x31=1$,
$x12+x22+x32=1$,
$x13+x23+x33=1$,
xi –двоичные ……………………

R1: переменные

R2: целевая функция

R3:. ограничения……………………

V3: **Установить последовательность.**

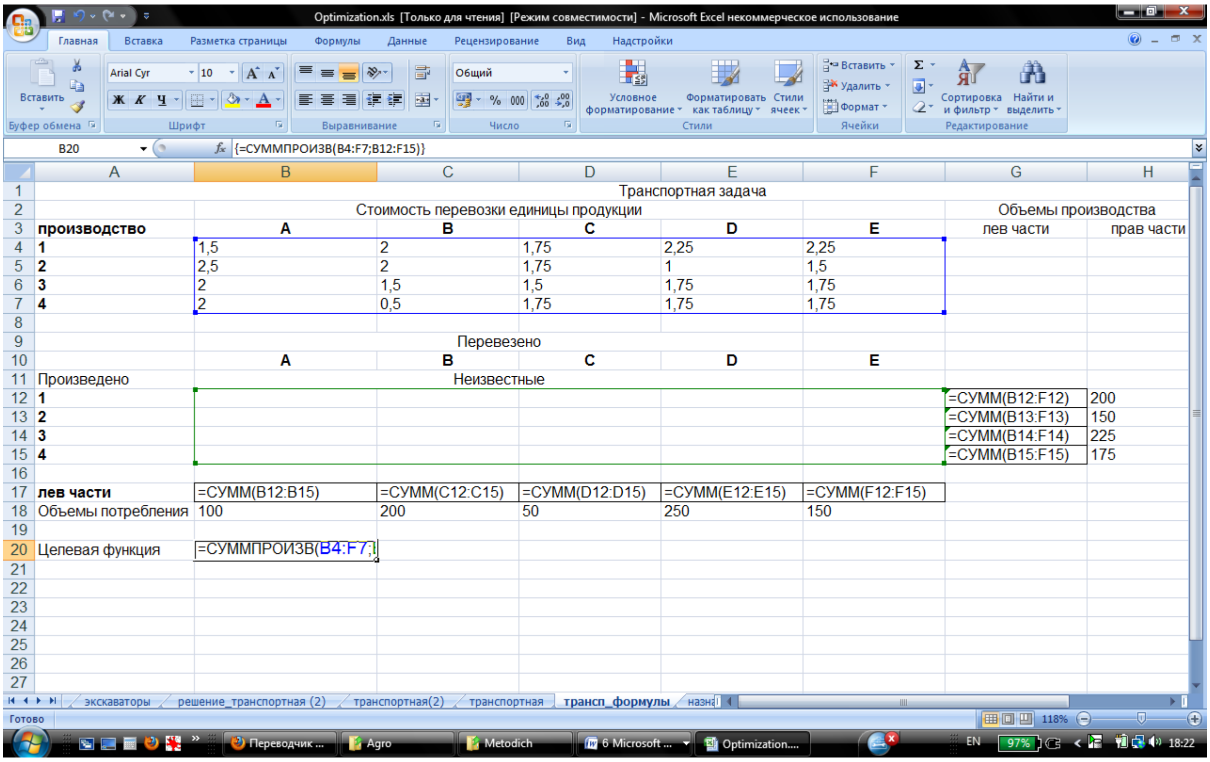
Q: Установите последовательность шагов при решении задачи о назначениях венгерским методом
L1: Получение нулей в каждой строке
L2: Получение нулей в каждом столбце. .
L3Поиск оптимального решения :
L4: Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули.
L5: Перестановка некоторых нулей.
R1: 1
R2: 2
R3: 3
R4: 4
R5: 5
Q: Установите последовательность этапов заполнения данных для решения транспортной задачи средствами MSExcel (см. рисунок)

Допустим, что фирма имеет 4 фабрики, свои товары она поставляет в 5центров распределения. Фабрики располагаются в городах1, 2, 3, 4 с возможностями ежедневно производить 200, 150, 225 и175 единиц продукции. Распределительные центры располагаются в городах A, B, C, D, E и ежедневно испытывают потребность в товарах100,200, 50, 250, 150единиц продукции. Хранение на фабрике продукции обходится в 0,75руб.в день, а штраф за просрочку поставки, которая заказана в центр распределения продукции, но которая там не находится, равна 2,5 руб. в день.

Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в центры распределения такова:

	A	B	C	D	E	Производство
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25	200
2	2,5	2	1,75	1	1,5	150
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75	225
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75	175
Потребление	100	200	50	250	150	

Требуется так запланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что данная модель сбалансирована, то есть суммарный объем произведенной продукции равен суммарному объему потребностей в этой продукции. Так что, в этой модели не надо учитывать расходы, связанные со складированием и с недопоставкой.



L1: Вводим матрицу коэффициентов целевой функции, элементами которой являются стоимости перевозки единицы груза из одного пункта в другой.

L2:Отводим диапазон ячеек под неизвестные нашей задачи, то есть под матрицу объемов перевозки грузов, которая и составит оптимальный план задачи перевозок.

L3:Записываем формулы левых частей ограничений, как показано на листе Excel в ячейках G12:G15.

L4: В ячейки H12:H15 вводим значения объемов производства, то есть правые части соответствующих ограничений.

L5: В ячейки B17:F17 вводим левые части ограничений по потребностям в пунктах распределения продукции.

L6:В ячейки B18:F18 введем правые части соответствующих ограничений.

L7:В ячейку B20 вводим формулу целевой функции.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

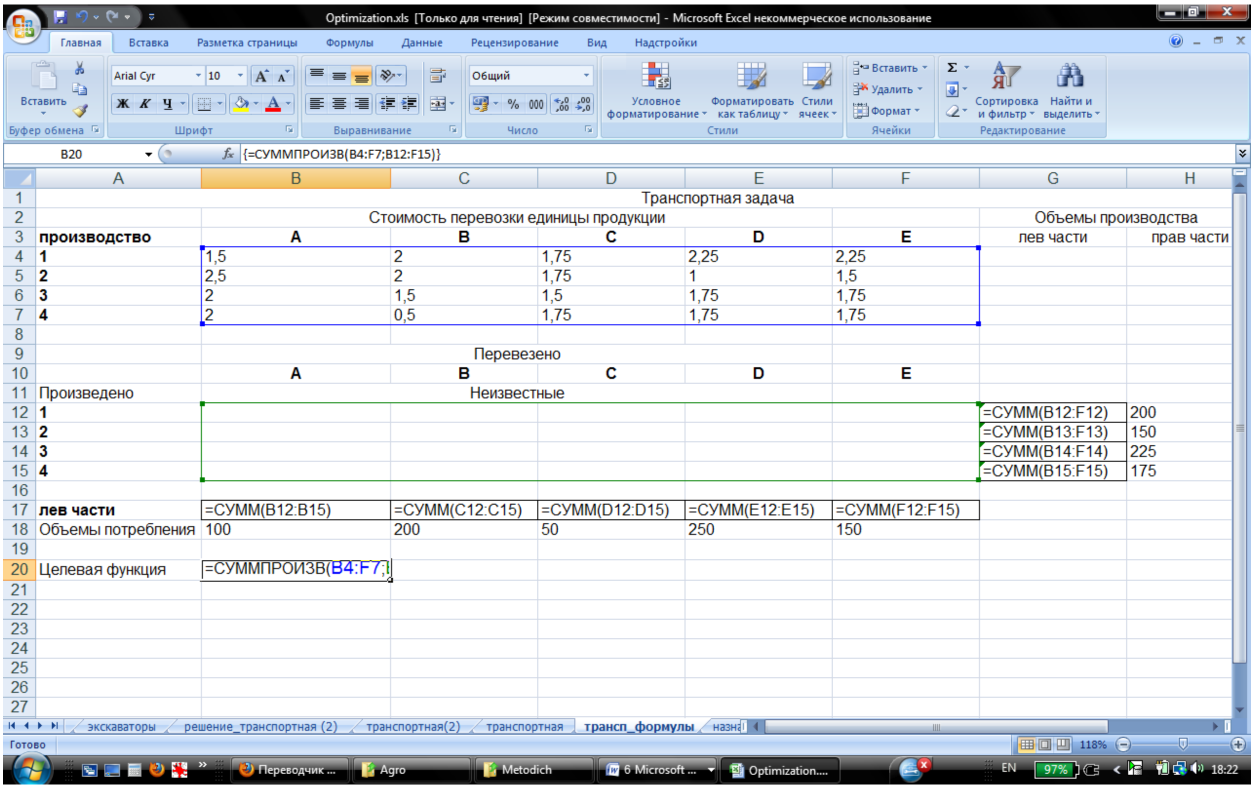
R5:5

R6:6

R7:7

Q: Установите последовательность действий при отыскании оптимального решении транспортной задачи средствами MSExcel (см. рисунок):

…



……………………

L1: Подготовив все данные, вызываем **Поискрешения**.

L2: В поле **Установить целевую ячейку** задаем минимум.

L3: В поле **Изменяя ячейки** задаем ссылку на диапазон B12:F15

L4: Список **Ограничения** заполняем нашими ограничениями. Задаем ссылку на ячейки с левыми частями ограничений и с правыми частями. Соотношение выбираем **равно.**

L5:В окне **Параметры** отмечаем **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**.

L6: Возвращаемся с окно **Поискрешения** и нажимаем кнопку **Выполнить**.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

R5:5

R6:6

V2: Задания С (расчетные задания)

V3: Задача 1 (1 расчетное задание)

J: Задача коммивояжера – задача нахождения замкнутого маршрута минимальной длины, по которому коммивояжер (бродячий торговец) может объехать n населенных пунктов, расстояния между которыми заданы матрицей $C=(c_{ij})$, $c_{ii}=\infty$. Предполагается, что каждый из n пунктов он посещает только один раз. Решить задачу коммивояжера распределительным методом, если

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 3 & 7 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & \infty & 3 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & \infty & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & \infty & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & \infty & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Указать номер правильного ответа

1.1→3→4 →4→6→5→1, z_{min}=19.

2. 1→3→4 →2→6→5→1, z_{min}=19.

3. 1→2→4 →3→5→6→1, z_{min}=19.

4. 1→2→4 →3→6→5→1, z_{min}=19.

+: 4

V3: Задача 2 (2 расчетное задание)

S:Решить задачу венгерским методом с матрицей эффективности А. Найти минимальное значение целевой функции.

$$A=\begin{vmatrix} \mathbf{24133} \\ \mathbf{15412} \\ \mathbf{35224} \\ \mathbf{14314} \\ \mathbf{32535} \end{vmatrix}$$

+:8

-: 7

-: 6

-: 5

V3: Задача 3 (3 расчетное задание)

J: В таблице приведены исходные данные транспортной задачи: заданы удельные транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей. Найдите минимальную стоимость перевозок. Указать номер правильного ответа.

Поставщики	Возможности поставщиков	Потребители и их спрос				
		I	II	III	IY	Y
		150	350	200	100	100
I	500	3	3	5	3	1
II	300	4	3	2	4	5
III	100	3	7	5	4	2

1): 2300

2): 2400

3): 2500

4): 2600

+:1

V3: Задача 4 (4 расчетное задание)

S: Из трех холодильников A_i , i =1,3, вмещающих мороженную рыбу в количествах i a т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_j , j =1,5 в количествах j b т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы (( )) C c = ij , 3x5. Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной. В ответе указать значение минимальной стоимости перевозки, полученной при решении задачи.

a_1=320 $в_1$=150

a_2=280 $в_2$=140

a_3=250 $в_3$=110

$в_4$=230

$в_5 = 220$

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

+: 11770

-: 11760

-: 11765

-: 11775

V3: Задача 5 (5 расчетное задание)

S: Решить задачу о назначениях на максимум венгерским методом. В ответе указать полученное значение.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 & 12 & 4 & 2 \\ 14 & 3 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 15 & 8 & 12 \\ 3 & 14 & 3 & 15 & 11 & 10 \\ 3 & 13 & 1 & 9 & 6 & 6 \\ 15 & 10 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

-: 67

+: 68

-: 69

-: 70

V1: Модуль 4 Статистические методы моделирования

V2: **Задания А**

V3: **Однозначный выбор.**

S: ***Вопрос*** **Как изменяется средняя арифметическая, если все веса уменьшить в А раз?**

+: не изменится

-: уменьшится в А раз

-: увеличится в А раз

-: уменьшится на величину А

S: При каком значении коэффициента корреляции связь можно считать умеренной? ………………………

+: r= 0,43………………………

-: r= 0, 71………………………

-: r= 0, 82………………………

-: r= 0,72………………………

S: **В каких единицах будет выражаться относительный показатель, если база сравнения принимается за единицу?**

+: в коэффициентах

-: в процентах…

-: в натуральных…

-: в рациональных

S: **Среднее квадратическое отклонение исчисляется как** ………………………

+: корень квадратный из дисперсии………………………

-: корень квадратный из коэффициента вариации………………………

-: корень квадратный из медианы………………………

-: корень квадратный из моды………………………

S: **Средняя ошибка выборки:** ………………………

+: прямо пропорциональна размаху данных…

-: никак не зависит от вариации данных………………………

-:обратно пропорциональна разбросу варьирующего признака………………………

-: обратно пропорциональна размаху данных…

S:**:Построение дискретного вариационного ряда осуществляется с помощью метода**

+: группировок…

-: вариаций………………………

-: объединения………………………

-: упорядочивания…

S: Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующее значение признака в ряде наблюдений называется

+: частотой значения признака…

-: вариантой признака………………………

-: значением признака………………………

-: частотой варианты значения признака…

S:: Если в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные (упорядоченные) значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения частот в виде ломаной линии, то это-

+: полигон распределения…

-: гистограмма распределения………………………

-: кумулята ………………………

-: огива…

S::**Если при построении интервального вариационного ряда значения наносят на поле графика в виде перпендикуляров по оси абсцисс варианты ряда, а по оси ординат накопленные частоты, то это-**

-: полигон распределения…

-: гистограмма распределения………………………

+: кумулята ………………………

-: огива…

S**:** Если при построении интервального вариационного ряда на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах, то это -. ………………………

-: полигон распределения…

+: гистограмма распределения………………………

-: кумулята ………………………

-: огива…

V3: **Наиболее правильный выбор.**

S: **Ряд распределения** это:

+: [100] группировки особого вида, при которых по каждому признаку, группе признаков или классу признаков известны численность единиц в группе либо удельный вес этой численности в общем итоге.

+:[60] упорядоченная совокупность значений признака, расположенных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами.

+: [20] группировки особого вида, при которых по каждому признаку элементы расположены в соответствии с их весами.

+: [5] совокупность значений признака, определямого, по удельному весу, либо численности в общем итоге.

S: **Массив ранжированных данных** (МРД) это:……………………

+:[100] перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака. …

+:[60] ряд, состоящий из упорядоченных элементов, называемых вариантами признака

+:[20] перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания)

+:[2] совокупность вариант, называемых индивидуальными значениями признака…

S: **Частоты**(f_j) это:……………………

+: [100] численности каждой группы вариант (x_j) вариационного ряда, т.е. это числа, показывающие, как часто встречаются (или как часто повторяются) те или иные группы вариант в дискретном или интервальном ряду распределения.

+: [60] элементы каждой группы вариант (x_j) вариационного ряда, т.е. это числа, показывающие, как часто встречаются (или как часто повторяются) те или иные группы вариант.

+: [20] численности каждой группы вариант (x_j) вариационного ряда, показывающие, как часто встречаются те или иные группы

+: [10] элементы каждой группы вариант (x_j) вариационного ряда.

S: **Дискретным вариационным рядом распределения называется**

+: [100] ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями.

+: [80] таблица, в которой указаны встречающиеся значения изучаемого признака как отдельные значения по возрастанию и их частоты.

+: [20] упорядоченное распределение единиц совокупности по дискретному признаку

+: [30] ранжированная совокупность вариантов, т.е. дискретно прерывно изменяющих значения признаков

S: **Интервальный вариационный ряд – это**

+: [100] способ группировки данных в виде таблицы, которая имеет две графы (значения признака в виде интервала значений и частота каждого интервала).

+: [60] способ группировки при непрерывной вариации признака, а также, если дискретная вариация проявляется в широких пределах.

+: [30] способ группировки, при котором значения признака ряда представлены не отдельными значениями, а интервалом значений («от - до»).

+: [10] способ группировки, при котором значения признака ряда представлены интервалом значений («от - до»)………………………

S: **Отчетные показатели (статистические) это**

+:[100] показатели, характеризующие реально сложившиеся условия экономического и социального развития, фактически достигнутый уровень за определенный период;
+:[60] это объективная количественная характеристика (мера) общественного явления или процесса в его качественной определенности в конкретных условиях места и времени.
+: [20] показатели, характеризующие реально сложившиеся условия экономического и социального развития.

+: [10] это объективная количественная характеристика (мера) общественного явления или процесса.

S: **Первичные статистические показатели характеризуют:**

+: [100] общее число единиц совокупности, либо сумму значений какого-либо их признака. Взятые в динамике, в изменении во времени, они характеризуют экстенсивный путь развития экономики в целом или конкретного предприятия в частном случае.

+: [60] общее число единиц совокупности, либо сумму значений какого-либо их признака взятые в динамике, они характеризуют экстенсивный путь развития экономики в целом или конкретного предприятия в частном случае.
+: [20] общее число единиц совокупности, либо сумму значений какого-либо их признака взятые в динамике и являются суммарными статистическими величинами.

+: [10] величины, взятые в динамике, в изменении во времени, они характеризуют экстенсивный путь развития экономики в целом или конкретного предприятия в частном случае.

S: **Статистические показатели позволяют:**

+: [100] *формализовать содержание изучаемых сторон социально-экономических явлений и представляет собой модель их количественной характеристики* и определить, что, где, когда и каким образом следует численно измерить..

+: [60] *формализовать содержание изучаемых сторон социально-экономических явлений и представляет собой модель их количественной характеристики* и позволяет определить, что, где, когда и каким образом следует численно измерить.
+: [20] *формализовать содержание изучаемых сторон социально-экономических явлений и* определить сущности того явления, которое должно быть измерено с его помощью.
+: [10]. *формализовать содержание изучаемых сторон социально-экономических* явлений и разработать модель их количественной характеристики.

S: Кривая распределения это-

+: [100] графическое изображение в виде непрерывной линии изменения частот в вариационном ряду, функционально связанного с изменением вариант, выражающее общую закономерность данного типа распределения в чистом виде, исключающего влияние случайных для него факторов.

+: [60] кривая, выражающая общую закономерность данного типа распределения в чистом виде, исключающего влияние случайных для него факторов.
+: [20] кривая, графически отображающая процесс увеличения объема совокупности и уменьшение интервала в группах.

+: [10] кривая, графически отображающая выражающее общую закономерность данного типа распределения в чистом виде, исключающего влияние случайных для него факторов.

S: **Относительная величина динамики:**

+: [100] характеризует изменение уровня развития какого-либо явления во времени и рассчитывается как результат деления уровня признака в определенный период или момент времени на уровень этого же показателя в предшествующий период или момент.
+: [60] это изменение уровня развития какого-либо явления во времени, определяемое как отношение уровня признака в определенный период или момент времени к уровню этого же показателя в предшествующий период или момент.
+: [20] это изменение уровня развития какого-либо явления во времени, определяемое как отношение уровня признака в определенный временной период времени к уровню этого же показателя в предшествующий временной период.

+: [10] характеризует изменение уровня развития какого-либо явления во времени.

V3: **Множественный выбор.**

S: **Термин корреляция в статистике понимают как:**

+: связь

+: зависимость

-: отношение

-: соотношение.

S: **Укажите показатели вариации** ……………………

+: сигма………………………

-: мода………………………

+: дисперсия………………………

-: медиана………………………

S: **Выборочный метод в статистических исследованиях используется для:**

+: экономии времени на проведение статистического исследования…

+: снижения затрат при проведении статистического исследования

-: повышения точности прогноза………………………

-: анализа факторов взаимосвязи………………………

S**: Различают следующие разновидности одновершинных кривых распределения:**

+: симметричные;

-: умеренно симметричные………………………

+: умеренно асимметричные ………………………

+: крайне асимметричные ………………………

S: **В зависимости от степени отклонения от некоторой средней принятой величины А моменты распределения бывают*:***

+: начальные ………………………

+: центральные ………………………

+: условные………………………

-: конечные………………………

S: Статистические показатели (числовые характеристики), которые в обобщенном виде отражают особенности распределения изучаемых признаков, можно разделить на группы*:*

+: характеристики центра распределения

+: характеристики степени вариации

+: характеристики формы распределения

-: характеристики вида распределения

S: По охвату единиц совокупности все показатели делят на:*:*

+:индивидуальные

+:сводные

-объемные:

-:расчетные

S: По форме выражения статистические показатели подразделяются на*:*

+: абсолютные

+: относительные

+: средние

-: индивидуальные

S: По способу регистрации абсолютных показателей во времени (в динамике) различают*:*

+: моментальные

+: интервальные

-: дискретные

-: точечные

S: Средние величины делятся на*:*

+: степенные

+:структурные

-: функциональные

-: вычисляемые

V2: **Задания В**

V3: **Вписать правильный ответ**

J: ________________**это любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известного распределения.**

+: *статистическая гипотеза*

J: _____________________**это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияние фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик.**

+: *нулевая гипотеза*……………………

J: _____________________**это другое проверяемое предположение (не всегда строго противоположное или обратное первому).**

+: *альтернативная гипотеза*

+:*конкурирующая гипотеза*……………………

J: _____________________ **это случайная величина *K*, которая служит для проверки нулевой гипотезы**

+: *статистический критерий*……………………

V3: **Установить соответствие.**

Q: **В процессе анализа статистических данных, представленных рядами распределения, могут вычисляться различные статистические показатели (числовые характеристики), которые в обобщенном виде отражают особенности распределения изучаемых признаков. Эти характеристики (показатели) подразделяют на группы по характеру изучаемых признаков.**

Установите соответствие между выделяемыми группами и статистическими показателями:

L1: характеристики центра распределения

L2: характеристики степени вариации

L3: характеристики формы (типа) распределения

R1: средняя, мода, медиана

R2: среднее линейное отклонение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение,

R3: показатели эксцесса и асимметрии, ранговые характеристики,

Q: Коэффициент корреляции отражает линейную зависимость одной величины от другой. Установите соответствие между степенью взаимосвязей и значений коэффициента корреляции:

L1: функциональная зависимость

L2: сильная статистическая взаимосвязь

L3: средняя статистическая взаимосвязь ……

L4: слабая статистическая взаимосвязь …

L5: очень слабая статистическая взаимосвязь

L6:корреляции нет (линейной)…

R1: $|r| = 1$………

R2: $0,7 \leq |r| \leq 0,99$……

R3: $0,5 \leq |r| \leq 0,69$………………………

R4: $0,2 \leq |r| \leq 0,49$………………………

R5: $0,09 \leq |r| \leq 0,19$………………………

R6: $|r| = 0$

Q: Математическая статистика использует различные средние, которые зависят от показателя степени средней m. Установите соответствие между видами средних и их показателем степени m.

L1: средняя гармоническая $\bar{x}_{гар}$;………………………

L2: средняя геометрическая $\bar{x}_{г}$;………………………

L3: средняя арифметическая $\bar{x}_{ар}$;………………………

L4: средняя квадратическая $\bar{x}_{кв}$;………………………

L5: средняя кубическая $\bar{x}_{куб}$………………………

R1: m = -1 ………………………

R2: m = 0 ………………………

R3: m = 1 ………………………

R4: m = 2 ………………………

R5: m = 3 ………………………

V3: **Установить последовательность.**

Q: Построение дискретного вариационного ряда осуществляется с помощью метода группировок. Установите последовательность осуществления этапов данного метода:

L1: упорядочить единицы наблюдения по возрастанию изучаемого значения признака,

L2: определить все возможные значения признака x_i, упорядочить их по возрастанию, L3: подсчитать сколько раз встречается каждое значение признака в изучаемой совокупности, т.е. определить частоту каждого значения признака f_i

L4: записать полученные данные в таблицу из двух строк (столбцов) - x_i и f_i .

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

Q: Установите последовательность этапов алгоритма построения интервального вариационного ряда с равными интервалами

L1: Определить число интервалов (групп) вариационного ряда

L2: Определить ширину интервала

L3: Определяем границы интервалов

L4: Определяем частоты интервалов.

L5: Построить интервальный ряд в виде таблицы.

L6: Определить середины интервалов.

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

R5: 5

R6: 6

Q: Дан список оценок полученных студентами на экзаменах:

3; 4; 3; 5; 4; 2; 2; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 2; 5; 5; 4; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 4; 5; 2; 5; 5; 4; 3; 3; 4; 2; 4; 4; 5; 4; 3; 5; 3; 5; 4; 4; 5; 4; 4; 5; 4; 5; 5; 5.

Пусть число X_i – оценка -является дискретной случайной величиной. Определить все возможные значения признака x_i,.Определить частоту каждого значения признака f_i. Определить в порядке возрастания последовательность значений признака:

L1: оценка «2»………………………

L2: оценка «3»………………………

L3: оценка «5»………………………

L4: оценка «4»………………………

R1: 1

R2: 2

R3: 3

R4: 4

V2: Задания С (расчетные задания)

V3: Задача 1 (1 расчетное задание)

S: Имеются следующие данные о возрастном составе студентов группы заочного отделения ВУЗа (лет): 19; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 23; 23; 24; 25; 25; 25; 26; 27; 29. Для анализа распределения студентов по возрасту требуется:

рассчитать модальный возраст студентов:

+: 20

-: 21

-: 19

-: 22

V3: Задача 2 (2 расчетное задание)

S: **Имеются следующие данные о возрастном составе студентов группы заочного отделения ВУЗа (лет): 19; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 23; 23; 24; 25; 25; 25; 26; 27; 29. Для анализа распределения студентов по возрасту требуется:**

Рассчитать медианный возраст студентов:

+: 20,878

-: 20,879

-: 20,876

-: 20,877

V3: Задача 3 (3 расчетное задание)

S: **Имеются следующие данные о возрастном составе студентов группы заочного отделения ВУЗа (лет): 19; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 23; 23; 24; 25; 25; 25; 26; 27; 29. Для анализа распределения студентов по возрасту требуется:**

Рассчитать средний возраст студентов:

+:21,967

-:21,966

-:21,965

-:21,968

V3: Задача 4 (4 расчетное задание)

S: **Имеются следующие данные о возрастном составе студентов группы заочного отделения ВУЗа (лет): 19; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 23; 23; 24; 25; 25; 25; 26; 27; 29. Для анализа распределения студентов по возрасту требуется:**

Рассчитать линейный коэффициент вариации для анализа типичности среднего возраста

+:0,100

-: 0,110

-: 0,111

-:0,101

V3: Задача 5 (5 расчетное задание)

S: **Имеются следующие данные о возрастном составе студентов группы заочного отделения ВУЗа (лет): 19; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 23; 23; 24; 25; 25; 25; 26; 27; 29. Для анализа распределения студентов по возрасту требуется:**

Рассчитать коэффициента асимметрии Пирсона для проверки распределения на нормальность:

+:0,768.

-:0,769.

-:0,767.

-:0,766.

Задания и методические рекомендации для выполнения рейтинговой (итоговой) работы

1. Общие положения

Рейтинговая работа по дисциплине выполняется обучающимся в ходе самостоятельной работы и является обязательным элементом балльно-рейтинговой системы (БРС) Университета.

По учебной дисциплине «Основы математического моделирования социально-экономических процессов» предусмотрено выполнение рейтинговой работы в форме **расчетно-аналитического задания**. После получения задания и в процессе его подготовки обучающийся должен в меру имеющихся знаний, умений, навыков, сформированности компетенции дать развернутое решение задания и объяснение решения.

Расчетно-аналитическая работа - вид самостоятельной практической работы обучающихся, занимающее промежуточное положение между теоретическим обучением и практическим применением в профессиональной деятельности, способствующее выработке знаний и навыков самостоятельного изучения данной дисциплины, позволяет приобрести опыт самостоятельного получения и накопления знаний, что необходимо будущему специалисту в его дальнейшей научной или трудовой деятельности.

В ходе выполнения расчетно-аналитического задания обучающийся должен выполнить все задачи, используя условия, отраженные в пункте 3 данной программы, в соответствии с первой буквой своей фамилии.

Перечень **компетенций**, формируемых в ходе выполнения рейтинговой работы представлен в рабочей программе дисциплины (РПД) по каждому отдельному направлению подготовки.

2. Задания для выполнения рейтинговой работы

Задание 1

Проверить заданную матрицу на продуктивность. Если матрица продуктивна, по заданной матрице прямых затрат А и вектору конечного продукта У определить валовой продукт Х, обеспечивающий заданный конечный продукт.

Задание 2

1) Построить математическую модель задачи оптимизации производства.

2) Найти решение любым методом.

3) Построить двойственную задачу, проанализировать результат.

Задание 3

Дан статистический ряд наблюдений зависимости переменной Y от X. Построить уравнение регрессии $Y= a + b*x$. Найти коэффициенты эластичности, линейной корреляции, детерминации. Сделать вывод о достоверности полученной модели.

3. Данные для выполнения заданий

Задание 1

Исходные данные

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}124 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 30 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,122 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,5 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,28 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,128 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,125 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,26 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,125 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 24

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}5 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Вариант 25

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}125 & 0{,}5 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Исходные данные

Вариант 1

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 20 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 2

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 50 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 3

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 55 изделий, второй линии - 60 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 700 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 20 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 4

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 70 изделий, второй линии - 55 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 9 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 50 $ и 60 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 5

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 40 изделий, второй линии - 55 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 15 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 1000 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 6

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 70 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 7

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 80 изделий, второй линии - 95 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 12 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 40 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 8

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 9

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 40 изделий, второй линии - 55 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 1000 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 10

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 50 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 11

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 40 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 12

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 45 изделий, второй линии - 60 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 13

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 55 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 14

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 55 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 25 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 45 $ и 35 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 15

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 45 изделий, второй линии - 55 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 12 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 700 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 45 $ и 35 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 16

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 35 изделий, второй линии - 45 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 17

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 65 изделий, второй линии - 70 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 25 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 35 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 18

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 35 изделий, второй линии - 45 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 25 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 15 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 600 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 19

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 65 изделий, второй линии - 70 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 15 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 1000 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 42 $ и 32 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 20

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 55 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 6 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 40 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 21

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 45 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 1000 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 22

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии -35 изделий, второй линии - 45 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 15 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 40 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 23

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 20 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 20 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 24

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 50 изделий, второй линии - 65 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 20 $ и 30 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Вариант 25

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии - 55 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуются 20 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели - 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 900 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 $ и 35 $ соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства первой и второй моделей.

Задание 3

Исходные данные

Вариант 1

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	7,95	8,27	8,53	8,87	9,64	10,07

Вариант 2

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	7,95	8,28	8,55	8,89	9,68	10,08

Вариант 3

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	7,96	8,27	8,56	8,88	9,67	10,09

Вариант 4

X =	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Y =	7,85	8,12	8,54	8,79	9,58	10,02

Вариант 5

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,85	7,12	7,54	8,79	9,58	10,02

Вариант 6

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,87	7,12	7,64	8,91	9,38	9,72

Вариант 7

X =	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Y =	6,87	7,24	7,64	8,71	9,32	9,82

Вариант 8

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,67	7,14	7,54	8,61	9,35	9,83

Вариант 9

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,65	7,15	7,54	8,61	9,35	9,83

Вариант 10

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,65	7,15	7,54	8,61	9,35	9,83

Вариант 11

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,67	7,14	7,54	8,61	9,35	9,83

Вариант 12

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,65	7,15	7,54	8,61	9,35	9,83

Вариант 13

X =	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Y =	6,88	7,25	7,64	8,61	9,45	9,83

Вариант 14

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,89	7,35	7,64	8,51	9,55	9,84

Вариант 15

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,79	7,55	7,63	8,54	9,56	9,85

Вариант 16

X =	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Y =	6,90	7,78	7,93	8,54	9,66	9,85

Вариант 17

X =	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Y =	6,80	7,77	7,93	8,55	9,66	9,86

Вариант 18

X =	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Y =	6,85	7,78	8,23	8,56	9,66	9,96

Вариант 19

X =	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Y =	6,35	7,28	8,13	8,66	9,67	9,98

Вариант 20

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,35	7,28	8,13	8,66	9,67	9,98

Вариант 21

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,75	7,38	8,15	8,69	9,57	9,97

Вариант 22

X =	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Y =	6,55	7,48	8,25	8,79	9,67	9,87

Вариант 23

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,55	7,48	8,25	8,79	9,67	9,87

Вариант 24

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,56	7,28	8,35	8,89	9,62	9,85

Вариант 25

X =	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Y =	6,55	7,29	8,37	8,79	9,63	9,86

4. Методические рекомендации по выполнению заданий

Методика решения задания 1

Исследуем на продуктивность матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}$$

Решение. Сначала найдем матрицу $E-A$:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}95 & -0{,}45 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}5\\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9\end{pmatrix}$$

Затем найдем $(E-A)^{-1}$. С этой целью по известным из линейной алгебры правилам вычислим определитель

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}45 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}5\\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}45 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}5\\ 0 & -1{,}9 & 1{,}9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}85 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}5\\ 0 & 0 & 1{,}9\end{vmatrix}=$$

$$=1{,}9\cdot\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}85\\ -0{,}1 & 0{,}3\end{vmatrix}=1{,}9\cdot(0{,}285-0{,}085)=0{,}38;$$

алгебраические дополнения для элементов матрицы $E-A$

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0{,}8 & -0{,}5\\ -0{,}3 & 0{,}9\end{vmatrix}=0{,}57;\quad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-0{,}1 & -0{,}5\\ -0{,}2 & 0{,}9\end{vmatrix}=0{,}1;$$

$$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-0{,}1 & 0{,}8\\ -0{,}2 & -0{,}3\end{vmatrix}=0{,}19;\quad (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-0{,}45 & -0{,}4\\ -0{,}3 & 0{,}9\end{vmatrix}=0{,}525;$$

$$(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}4\\ -0{,}2 & 0{,}9\end{vmatrix}=0{,}775;\quad (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}45\\ -0{,}2 & -0{,}3\end{vmatrix}=0{,}375;$$

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -0,45 & -0,4 \\ 0,8 & -0,5 \end{vmatrix} = 0,545 \quad ; \quad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0,95 & -0,4 \\ -0,1 & -0,5 \end{vmatrix} = 0,515 \quad ;$$

$$(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0,95 & -0,45 \\ -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,805 \quad .$$

Тогда

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,38}\begin{pmatrix} 0,57 & 0,525 & 0,545 \\ 0,1 & 0,775 & 0,515 \\ 0,19 & 0,375 & 0,805 \end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 57 & 52,5 & 54,5 \\ 10 & 77,5 & 51,5 \\ 19 & 37,5 & 80,5 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица неотрицательна и по Критерию I исходная матрица A продуктивная.

Для матрицы А коэффициентов прямых затрат из примера 1 и вектора конечного потребления

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 152 \\ 114 \\ 190 \end{pmatrix}$$

найти: а) вектор валового выпуска; б) матрицу косвенных затрат; в) изменение вектора валового выпуска при увеличении вектора конечного потребления на величину

$$\Delta\bar{y} = \begin{pmatrix} 76 \\ 38 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Решение.

а) Вектор валового выпуска $\bar{x}$ вычислим по формуле

$$\bar{x} = (E-A)^{-1}\bar{y} \quad .$$

Имеем

$$\bar{x} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 57 & 52{,}5 & 54{,}5 \\ 10 & 77{,}5 & 51{,}5 \\ 19 & 37{,}5 & 80{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 152 \\ 114 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & 52{,}5 & 54{,}5 \\ 10 & 77{,}5 & 51{,}5 \\ 19 & 37{,}5 & 80{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 658 \\ 530 \\ 591 \end{pmatrix}$$

б) Матрицу косвенных затрат *B* найдем

$$B = (E-A)^{-1} - E - A = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 57 & 52{,}5 & 54{,}5 \\ 10 & 77{,}5 & 51{,}5 \\ 19 & 37{,}5 & 80{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 17{,}1 & 35{,}4 & 39{,}3 \\ 6{,}2 & 31{,}9 & 32{,}5 \\ 11{,}4 & 26{,}1 & 38{,}7 \end{pmatrix}$$

в)

$$\Delta\bar{x} = (E-A)^{-1}\Delta\bar{y} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 57 & 52{,}5 & 54{,}5 \\ 10 & 77{,}5 & 51{,}5 \\ 19 & 37{,}5 & 80{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 76 \\ 38 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 221 \\ 149 \\ 156 \end{pmatrix}$$

Таким образом, при увеличении вектора конечного потребления на $\Delta\bar{y} = \begin{pmatrix} 76 \\ 38 \\ 38 \end{pmatrix}$ вектор валового выпуска увеличится на $\Delta\bar{x} = \begin{pmatrix} 221 \\ 149 \\ 156 \end{pmatrix}$.

Методика решения задания 2

Малое предприятие намерено организовать в следующем квартале выпуск новой продукции А и В, пользующейся высоким спросом на рынке. Предприятие располагает необходимым сырьем и оборудованием и может привлечь квалифицированных рабочих на условиях почасовой оплаты, но не имеет средств на оплату труда рабочих. Для этого оно может получить в банке кредит сроком на три месяца под

40% годовых с погашением кредита и процентов по нему в конце квартала.

Информация о нормах затрат сырья, оборудования и трудовых ресурсов, объемах сырья и парка оборудования, имеющихся в распоряжении предприятия, размер выручки от реализации продукции А и В приведены в таблице.

Наименование ресурсов	**Норма затрат на**		**Объем ресурса**
	Продукт А	**Продукт В**	
Сырье (кг)	1	1	430
Оборудование (ст. час.)	7	9	3150
Трудоресурсы (чел. час.)	0	1	
Цена реализации (руб.)	376	420	

Целью организации выпуска новой продукции является получение максимальной суммарной прибыли, которая определяется как разность между суммарной выручкой, полученной от реализации за квартал продукции А и В, к затратам, связанным с обеспечением кредита.

Требуется:

1. Построить математическую модель оптимизации выпуска продукции с использованием кредита для выплаты зарплаты рабочим с произвольной почасовой ставкой t (руб./чел.час.) оплаты труда.
2. Определить оптимальную программу выпуска продукции, максимальную прибыль, необходимый размер кредита, сумму уплаченных процентов и потребность в трудовых ресурсах, если почасовая ставка t оплаты труда равна 10 руб./ чел.час.
3. Найти функцию спроса на трудовые ресурсы, как функцию почасовой ставки оплаты труда t, построить график этой функции. Ис-

следовать зависимость размеров max прибыли и кредита, обеспечивающего ее получение, от почасовой ставки t оплаты труда в диапазоне от 10 до 50 руб. за чел.час. Найти функции, выражающие эти зависимости и построить их график.

Решение

1. Введем следующие обозначения:
x_1 – объем выпуска продукции А
x_2 – объем выпуска продукции В

S – потребность в трудоресурсах при производственной программе X = (x_1; x_2)
K – сумма кредита
t – почасовая оплата труда
z – выручка от продажи производственных продуктов
К – сумма погасительного платежа
Р – прибыль предприятия.
Тогда деятельность предприятия можно формализовать в виде следующих условий:
$K = S*t$
$1x_1 + 1x_2 \leq 430$
$7x_1 + 9x_2 \leq 3150$
$0x_1 + 1x_2 = S$
$К = (1 + 0,4*3/12)*k = 1,1*k$
Целью деятельности предприятия является получение наибольшей прибыли:

$P = z – К \rightarrow \max$
Вместе с условием не отрицательности всех введенных переменных данные условия определяют математическую модель заданной ситуации.

2. Проведем анализ условий графическим методом. Выразим прибыль через неизвестные x_1 и x_2.
$P(t) = 376x_1 + 420x_2 – 1,1*(0x_1 + 1x_2)*t = 376 *x_1 + x_2*(420 – 1.1t)$.
Рассмотрим задачу с двумя неизвестными, зависящими от параметра t:

$1x_1 + 1x_2 \leq 430$

$7x_1 + 9x_2 \leq 3150$

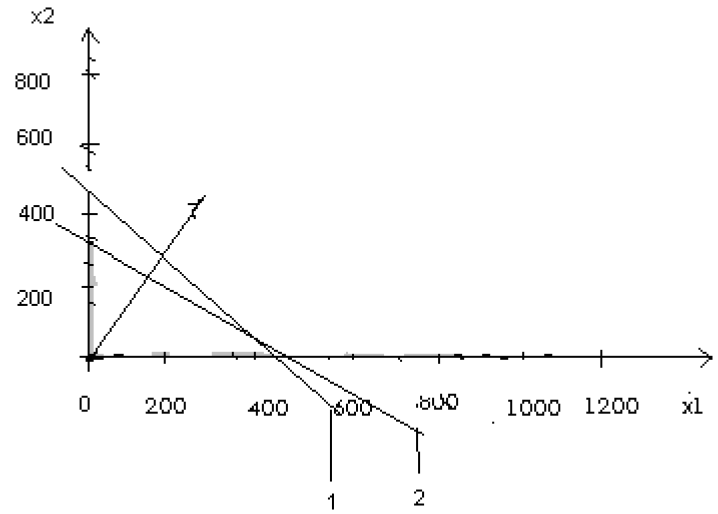
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

$P(t) = 376*x_1 + x_2*(420 - 1.1t) \rightarrow \max$

Построим ОДР, которая не зависит от параметра t.

$1x_1 + 1x_2 = 430$ $7x_1 + 9x_2 = 3150$

x_1	0	430		x_1	0	450
x_2	430	0		x_2	350	0



Пусть t = 10 руб/чел.час, тогда $P(10) = 376x_1 + 409x_2$

grad $P(10) = (376; 409)$

Точкой максимума функции будет точка A = (0; 350)

Определим для этой производственной программы все остальные неизвестные величины:

Спрос на трудоресурс	S*(10) = 0*0+1*350 = 350 чел.час
Сумма кредита	k*(10) = 350*10 = 3500 руб.
Выручка	z*(10) = 376*0+420*350 = 147000 руб.
Сумма погашения кредита	K*(10) = 1,1*3500 = 3850 руб.

Прибыль	P*(10) = 147000 – 3850 = 143150 руб.
или	P*(10) = 376*0+409*350 = 143150 руб.

3. Так как grad p(t) = (376; 420 – 1.1*t), то при росте t нормаль к линиям уровня будет поворачиваться вправо, т.к. вторая компонента вектора становится нулевой раньше при росте t. Точка А остается точкой максимума, пока линии уровня функции p(t) не станут параллельными прямой (1), т.е. пока коэффициенты этих прямых не станут пропорциональными:

$376 / 1 = (420 – 1.1t) / 1$

$t = 40$ руб/чел.час.

Итак, если $t \in [0; 40]$, то точкой максимума остается вершина А = (360; 70).

При t = 40 оптимальной будет любая точка отрезка АВ, в том числе и точка В.

При дальнейшем росте параметра t единственной точкой максимума будет точка В = (430; 0). Она будет оптимальной пока линии уровня функции p(t) не станут параллельными прямой (2):

$t = 376$ руб/чел.час.

Следовательно, при $t \in [40; 376]$ оптимальное решение определяется точкой В. При $t > 376$ оптимальной станет С = (0; 350). Она будет точкой оптимума, пока вторая компонента вектора градиента не станет нулевой. Тогда вектор перейдет в третий квадрант и точкой максимума функции p(t) станет начало координат:

$420 – 1.1t = 0$

$t = 381.81$ руб/чел.час

Найдем зависимость спроса на трудовые ресурсы от почасовой ставки оплаты труда:

При $t \in [0; 40)$, $S^*(t) = S_A = 350$ чел.час

При $t \in (40; 376)$, $S^*(t) = S_B = 0*360 + 1*70 = 70$ чел.час

При $t \in (376; 381.81)$, $S^*(t) = S_C = 430*0 + 1*0 = 0$ чел.час

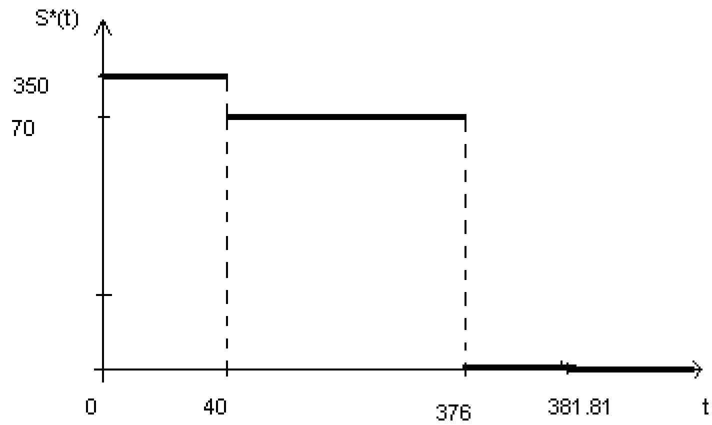
При $t \in (381.81; \propto)$, $S^*(t) = S_0 = 0$ чел.час

При t = 40 спрос на трудоресурс определяется неоднозначно, т.к. его величина зависит от неоднозначной производственной программы. Максимальное значение показателя S в точке А, минимальное в точке В.

Аналогично и при t = 376 и t = 381.81.
Представим функцию спроса на трудовые ресурсы в виде таблицы:

t(руб/чел.час)	[0;40)	40	(40;376)	376	(376;381.81)	381.81	(381.81;∝)
S*t (чел.час)	350	[70;350]	70	[0;70]	0	[0; 0]	0

График функции S*(t)



Исследуем зависимость размеров максимальной прибыли и кредита от почасовой ставки оплаты труда в диапазоне от 10 до 50 рублей за чел.час.
При $t \in [10; 40)$, $k^*(t) = k_A = 350^*t$ руб.
$P^*(t) = z_A - k_A = 147000 - 1{,}1^*350t = 147000 - 385t$ руб.
При $t \in (40; 50]$, $k^*(t) = k_B = 70^*t$ руб.
$P^*(t) = z_B - k_B = 535920 - 77$ руб.
При t = 40 сумма кредита определяется неоднозначно, т.к. ее величина зависит от неоднозначно заданного спроса на трудоресурс. Максимальное значение показателя k – в точке A, минимальное – в точке B.

Величина прибыли:
$P^*(40) = P_A = 147000 - 385^*40 = 131600$ руб.
$P^*(40) = P_B = 134680 - 77^*40 = 131600$ руб.
Представим зависимость размеров максимальной прибыли и кредита от почасовой ставки оплаты труда в следующей таблице:

t (руб/чел.час)	[10; 40)	40	(40; 50]
K*(t) (руб)	350*t	[2800,14000]	70*t
P*(t) (руб)	147000-385*t	131600	134680-77*t

В следующей таблице представим значения суммы кредита и прибыли предприятия при t = 10, 20, 30, 40, 50

t (руб/чел.час)	10	20	30	40	50
K*(t) (руб)	3500	7000	10500	14000	3500
P*(t) (руб)	143150	139300	135450	131600	130830

График функции k*(t):

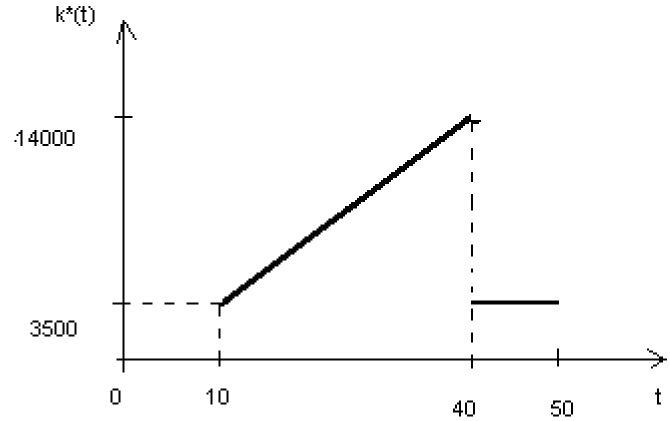
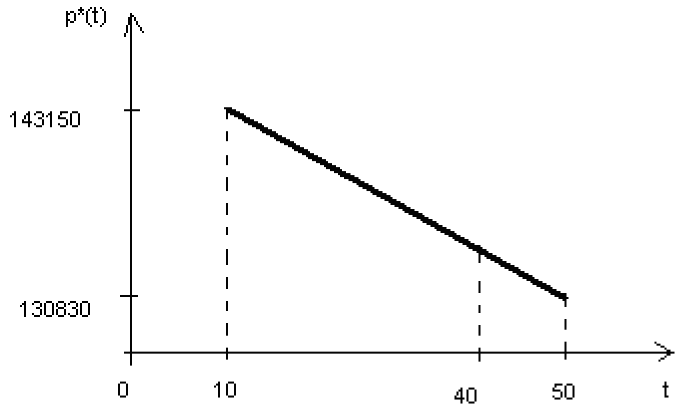


График функции p*(t).



Методика решения задания 3

Методика корреляционного анализа и этапы его проведения

Напомним, что детерминированный факторный анализ представляет собой методику исследования влияния факторов, связь которых с результативным показателем носит функциональный (полный) характер. То есть величине факторного показателя соответствует единственная величина результативного показателя.

В экономических исследованиях чаще присутствуют стохастические зависимости, которые отличаются приблизительностью, неопределённостью. Стохастический факторный анализ исследует влияние факторов, связь которых с результативным показателем, в отличие от функциональной, является неполной, вероятностной (корреляционной).

И если, при функциональной зависимости с изменением аргумента (факторного показателя) всегда происходит соответствующее изменение функции (результативного показателя), то при стохастической связи изменение аргумента может дать несколько значений прироста функции. То есть каждой величине факторного показателя может соответствовать несколько значений результативного показателя в зависимости от сочетания других факторов, определяющих данный показатель.

Например, увеличение фондовооружённости труда рабочих даёт разный прирост производительности труда на разных предприятиях даже при выравненных прочих условиях. Это объясняется тем, что все факторы, воздействующие на производительность труда, действуют в комплексе. В зависимости от того, насколько оптимально сочетаются разные факторы, степень воздействия каждого из них на величину результативного показателя будет неодинаковой.

Взаимосвязь между исследуемыми факторами и результативным показателем проявится, если взять для исследования большое количество наблюдений и сравнить их значения. Тогда в соответствии с законом больших чисел влияние других факторов на результативный показатель сглаживается, нейтрализуется, что даёт установить связь между изучаемыми явлениями.

Таким образом, корреляционная (стохастическая) связь – это неполная, вероятностная зависимость между показателями, которая проявляется только в массе наблюдений.

Различают:

а) парную корреляцию, возникающую между двумя показателями, один из которых является факторным, другой – результативным;

б) множественную корреляцию, возникающую от взаимодействия нескольких факторов с результативным показателем.

Для исследования стохастических зависимостей используются способы сравнения параллельных и динамических рядов, аналитические группировки, графики. Однако с их помощью можно выявит только общий характер и направление связи. Факторный же анализ позволяет определить влияние каждого фактора на величину результативного показателя. Для этого применяются способы *корреляционного, дисперсионного, компонентного, дискриминантного, современного многомерного факторного анализа.*

Наиболее широкое применение в экономическом анализе нашли приёмы корреляционного анализа.

Необходимыми условиями применения корреляционного анализа являются:

1. Наличие достаточно большого количества наблюдений о величине исследуемых показателей (факторных и результативных).
2. Исследуемые факторы должны иметь количественное измерение и отражение в источниках информации.

Этапы проведения корреляционного анализа.

На первом этапе отбираются наиболее существенные факторы, которые оказывают воздействие на исследуемый показатель, при этом необходимо придерживаться некоторых правил:

- необходимо учитывать причинно-следственные связи между показателями;
- нужно отбирать только самые значимые факторы, которые оказывают наиболее существенное воздействие на результативный показатель;
- не рекомендуется включать в корреляционную модель взаимосвязанные факторы;
- нельзя включать в корреляционную модель факторы, связь которых с результативным показателем носит функциональный характер.

На втором этапе собирается исходная информация по каждому факторному и результативному показателю, которая должна быть проверена на достоверность и соответствие объективной действительности. Исходная информация должна быть однородной относительно распределения её около среднего уровня. Критерием однородности являются среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации. Данные показатели рассчитываются по каждому факторному и результативному показателю.

Среднеквадратическое отклонение показывает абсолютное отклонение индивидуальных значений от среднеарифметической и рассчитывается по формуле:

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma(X_{i\,-}\ \bar{X})2}{n}}$$

где δ – среднеквадратическое отклонение;

X_i – ожидаемое значение для каждого случая наблюдения;

$\bar{X}$ – среднее ожидаемое значение;

n - число случаев наблюдения.

Коэффициент вариации показывает относительную меру отклонения отдельных значений от среднеарифметической и определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{\delta}{\bar{X}} *100$$

где φ – коэффициент вариации.

Чем выше коэффициент вариации, тем относительно больший разброс и меньшая выравненность изучаемых объектов. Если вариация не больше 10%, то изменчивость вариационного ряда незначительна. Если вариация составляет 10-12% изменчивость вариационного ряда считается средней. Изменчивость вариационного ряда является значительной, если вариация больше 20%, но не превышает 33%. Превышение вариации 33% указывает на неоднородность информации и необходимость исключения нетипичных наблюдений.

На третьем этапе подбирается математическое уравнение, наиболее точно выражающее сущность исследуемой зависимости между факторными и результативными показателями, которую можно выразить уравнением парной и множественной регрессии. Если связь между факторным и результативным показателями носит прямолинейный характер, то уравнения парной регрессии имеют вид:

Y_x= a + bx

где a – свободный член уравнения при член уравнения при x = 0

x – фактор, определяющие уровень изучаемого результативного показателя;

b – коэффициент регрессии при факторном показателе; он характеризуют уровень влияния фактора на результативный показатель в абсолютном выражении.

Показатели a и b следует отыскать.

Данное уравнение описывает такую связь между двумя признаками, при которой с изменением факторного показателя на определённую величину происходит равномерное возрастание или убывание значений результативного показателя. Примером прямолинейной зависимости между факторным и результативным показателем может служить информация об изменении урожайности зерновых культур (Y) в зависимости от качества пахотной земли (x).

Если связь между результативным и факторными показателями носит прямолинейный характер, то уравнения множественной регрессии имеет вид:

$Y_x = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$

где a – свободный член уравнения при член уравнения при x = 0

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – факторы, определяющие уровень изучаемого результативного показателя;

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ – коэффициенты регрессии при факторных показателях; они характеризуют уровень влияния каждого фактора на результативный показатель.

На четвёртом этапе проводится расчёт основных показателей корреляционного анализа: уравнения связи, коэффициентов корреляции, детерминации, эластичности и др.

Значение коэффициентов a и b находят из системы уравнений, полученных по способу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} na + b\Sigma x = \Sigma y; \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy \end{cases}$$

В качестве примера прямолинейной зависимости между факторным и результативным показателем используем данные об изменении уровня выработки рабочих (Y) в зависимости от уровня фондовооружённости труда (x), представленные в таблице 1.

Таблица 1 -

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	6,2	6,8	7,2	7,6	7,8	8,2	8,4	8,8	9,2	9,8
Y	9	9,2	9,6	10	11	11,4	11,6	12	12,2	13

В таблице 1 приведены ранжированные данные о выработке рабочих и фондовооружённости труда по 10 предприятиям одной и той же отрасли. По приведённым в таблице данным видно, что связь между исследуемыми показателями носит прямолинейный характер, так как показатели изменяются в одном направлении: при повышении уровня фондовооруженности труда, производительность труда рабочих также возрастает.

Подставим показатели из нашего примера в приведённую выше систему уравнения:

$$\begin{cases} na + b\Sigma x = \Sigma y; \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy \end{cases}$$

где n – число наблюдения (в нашем примере – это 10 предприятий отрасли); x – фондовооруженность труда, тыс. руб.

y – среднегодовая выработка продукции одним работником, тыс. руб.

Значения Σx, Σy, Σx^2, Σxy рассчитываются на основании фактических исходных данных; результаты расчётов представлены в таблице 2.

Таблица 2-

n	x	y	xy	x2	y2	Yx
1	6,2	9	55,8	38,44	81	8,8
2	6,8	9,2	62,56	46,24	84,64	9,5
3	7,2	9,6	69,12	51,84	92,16	10,0
4	7,6	10	76	57,76	100	10,4
5	7,8	11	85,8	60,84	121	10,7
6	8	11,4	91,2	64	129,96	10,9
7	8,4	11,6	97,44	70,56	134,56	11,4
8	8,8	12	105,6	77,44	144	11,8
9	9,2	12,2	112,24	84,64	148,84	12,3
10	10	13	130	100	169	13,2
Итого	80	109	885,76	651,76	1205,16	109

Подставив полученные значения в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 10a + 80b = 109; \\ 80a + 651{,}76b = 885{,}76 \end{cases}$$

Умножим все члены первого уравнения на 8:

$$\begin{cases} 80a + 640b = 872; \\ 80a + 651{,}76b = 885{,}76 \end{cases}$$

Затем из второго уравнения вычтем первое и определим показатели a и b:

11,76b = 13,76. Отсюда b = 13,76 / 11,76 = 1,17

$$a = \frac{109-(80*1{,}17)}{10} = 1{,}54$$

Уравнение связи, описывающее зависимость производительности труда от его фондовооружённости, имеет выражение:

$$Y_x = 1{,}54 + 1{,}17x.$$

Коэффициент a (в нашем случае этот коэффициент равен 1,54) является постоянной величиной, не связанной с изменением факторного показателя. Коэффициент b показывает, как изменяется результативный показатель с изменением данного фактора на единицу его измерения. В приведённом примере это означает, что если фондовооруженность труда рабочих основными средствами возрастает на 1 тыс. руб., то их выработка увеличивается в среднем на 1,17 тыс. руб.

Если в уравнение регрессии $Y_x = 1{,}54 + 1{,}17x$ соответствующее значение x, то можно рассчитать выравненное значение производительности труда (Y_x) для каждого предприятия и оценить работу каждого из них.

Например, выработка рабочих на первом предприятии будет составлять:

$$Y_x = 1{,}54 + 1{,}17 * 6{,}2 = 8{,}8$$

Полученная величина 8,8 показывает выработку рабочих при фондовооруженности 6,2 при условии использования данным предприятием своих производственных мощностей как в среднем все анализируемые предприятия данной отрасли. Как видно из данных таблицы, фактическая выработка на первом предприятии составляет 9 тыс. руб., что выше расчётного значения. Это означает, что на данном предприятии производственные мощности используются лучше, чем в среднем по отрасли. Аналогичные расчёты сделаны для каждого предприятия, и данные по ним приведены в последней колонке таблицы 3.6.

Таким образом, регрессионный анализ даёт возможность определить степень зависимости между факторным и результативным показателем. Однако он не позволяет определить, насколько эта связь тесна.

Для измерения тесноты связи между результативным и факторным показателем используется *коэффициент корреляции,* который при прямолинейной форме связи между исследуемыми показателями рассчитывается по формуле:

$$R = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x * \Sigma y}{n}}{\sqrt{\left(\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right)\left(\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right)}} =$$

Коэффициент корреляции может принимать значения от 0 до 1. Чем ближе его величина к 1, тем более тесная существует связь между факторным и результативным показателем.

Рассчитаем коэффициент корреляции, подставив в данную формулу значения Σx, Σy, Σx^2, Σxy, Σy^2 из таблицы 5.2.

$$R = \frac{885{,}76 - \frac{80*109}{10}}{\sqrt{\left(651{,}76 - \frac{80^2}{10}\right)*\left(1205{,}16 - \frac{109^2}{10}\right)}} = 0{,}97$$

В нашем примере коэффициент корреляции (R) равен 0,97. Он близок к единице, что свидетельствует о достаточно тесной связи между фондовооруженностью и производительностью труда на анализируемых предприятиях. Коэффициент корреляции, равный 0,97 позволяет также сделать вывод, что одним из основных факторов роста производительности труда на данных предприятиях является рост фондовооруженности труда.

Коэффициент корреляции, возведённый в квадрат ($0{,}97^2$) даёт показатель *коэффициента детерминации,* показывающий долю фондовооруженности труда в изменении показателя производительности труда. В нашем примере коэффициент детерминации, составляющий 94% , показывает, что производительность труда на 94% зависит от фондовооруженности труда, в то время как на долю остальных факторов приходится 6% изменения её уровня.

5. Требования к оформлению рейтинговой работы

Расчетно-аналитическое задание выполняется в электронной форме и размещается обучающимся в личном кабинете.

Оформление работы должно быть выполнено машинописным способом в соответствии со следующими требованиями: печатный шрифт – Times New Roman, кегль (размер) 14; поля страницы должны иметь следующие размеры: левое – 30 мм, правое – 15 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм; междустрочный интервал – полуторный; абзац – с отступом первой строки 1,25 см; текст – должен быть выровнен по ширине и структурирован. Расчеты задач необходимо оформлять в виде таблиц, рекомендованных в методических указаниях (пункт 4).

Номера страниц размещаются в нижнем правом углу. Применяется сквозная нумерация листов, начиная с титульного листа и включая приложения (если есть). Номер листа на титульном листе не проставляют. Второй лист реферата – содержание.

Критерии оценки рейтинговой работы

Расчетно-аналитическое задание	**От 85 до 100 баллов** ставится, если выполнены все требования к выполнению расчетно-аналитического задания: верно и аккуратно решены все четыре задания, сформулированы выводы, соблюдены методические рекомендации. **от 66 до 84 баллов** – основные требования к выполнению расчетно-аналитического задания выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в решении заданий; отсутствует логическая последовательность в методике решения; имеются упущения в оформлении. **от 50 до 65 баллов** – имеются существенные отступления от требований к выполнению расчетно-аналитического задания. В частности, одно задание решено не верно или не решено. **49 баллов и менее** – более двух заданий решены не верно или не решено.

6. Рекомендуемая литература

Основная литература

1.Байдаков А.Н. Моделирование бизнес-процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Н. Байдаков, О.С. Звягинцева, А.В. Назаренко - Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_0098.html

2.Введение в математическое моделирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Под ред. П.В. Трусова - М. : Логос,2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987046371.html

3.Гура Эйн-Я. Экскурс в теорию игр: нетипичные математические сюжеты [Электронный ресурс] / Гура Эйн-Я, Машлер Майкл - М.:Дело, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785774911981.html

4.Кубова Р.М. Математические методы в прикладной информатике: учебное пособие. МУ им. С.Ю. Витте. 2015.

https://online.muiv.ru/lib/?query=%D0%9A%D1%83%D0%B1%D0%BE%D0%B2%D0%B0

5.Кубова Р.М. Методы оптимальных решений: учебное пособие МУ им. С.Ю. Витте. 2013. https://lms.muiv.ru/mod/url/view.php?id=5259 Ч.1.

6.Кубова Р.М. Методы оптимальных решений: учебное пособие МУ им. С.Ю. Витте. 2013. https://lms.muiv.ru/mod/url/view.php?id=5419 Ч.2.

7.Литвин Д.Б. Линейное программирование. Транспортная задача [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев - Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_00120.htm

8.Малышев Н.Г. О системах и их моделировании [Электронный ресурс] / Н.Г. Малышев - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922117579.html

Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования [Электронный ресурс] / Плохотников К.Э. - М. : ФЛИНТА, 2017. -http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976515413.html

9.Чикильдин Г.П. Идентификация динамических объектов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Чикильдин Г.П. - Новосибирск : Изд-воНГТУ, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778232754.html

Дополнительная литература

Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 432 с.

2.Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Книга 1. М.: МЦНМО, 2011. https://online.muiv.ru/lib/books/382/

3.Венцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – М.: Наука, 1980.

4.Володько О.В. Экономика организации [Электронный ресурс]: учеб. пособие / О.В. Володько, Р.Н. Грабар, Т.В. Зглюй - Минск : Выш.шк., 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789850628268.html

5.Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2009.

Ковнир В.Н. Экономика в терминах, понятиях и представлениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.Н. Ковнир, И.В. Чурзина -М.

: Логос, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785986991658.html

6.Колобашкина Л. В. Основы теории игр. Учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. https://online.muiv.ru/lib/books/41902/

7.Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008. https://online.muiv.ru/lib/books/37572/

8.Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. 2-е изд., испр. и доп. - М.: Физматлит, 2009. -132 с. https://online.muiv.ru/lib/books/25817/

9.Малышев Н.Г. О системах и их моделировании [Электронный ресурс] / Н.Г. Малышев - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922117579.html

10.Невежин В.П., Кружилов С.И. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование» М. 2005.

11.Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2011.

12.Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования [Электронный ресурс] / Плохотников К.Э. - М. : ФЛИНТА, 2017. -http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976515413.html

13.Струченков В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах. М.: СОЛОН - ПРЕСС, 2009. - Библиотека профессионала. – 315 с. https://online.muiv.ru/lib/books/49166/

14.Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие/ Под ред. С.И.Макарова. – М.:КНОРУС, 2009.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы математического моделирования являются лежат в основе оценки и принятия обоснованных решений в области управления социально-экономическими процессами. Взгляд на вещи сквозь призму статистики и других математических методов обработки информации -это наиболее эффективное и объективное средство диагностики процессов. Знание математических методов и умение применить для анализа данных – это часть нормального инженерного образования. Способность рассматривать и моделировать явления и события с помошью современных автоматизированных средств обработки информации также важно, как и знание самих методов.

Авторы надеются, что учебное пособие будет способствовать применению методов математического моделирования в более широком диапазоне областей деятельности, используя подход, основанный на аналогии. Очень важно осознанное желание и умение использовать математические методы моделирования для обнаружения и решения проблем, а также анализа и прогноза дальнейшего хода развития процесса с целью эффективного управления и улучшения качества его показателей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Байдаков А.Н. Моделирование бизнес-процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Н. Байдаков, О.С. Звягинцева, А.В. Назаренко - Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_0098.html
2. Введение в математическое моделирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Под ред. П.В. Трусова - М. : Логос,2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987046371.html
3. Гура Эйн-Я. Экскурс в теорию игр: нетипичные математические сюжеты [Электронный ресурс] / Гура Эйн-Я, Машлер Майкл. – М. : Дело, 2017. – http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785774911981.html
4. Кубова Р.М. Математические методы в прикладной информатике: учебное пособие. МУ им. С.Ю. Витте. 2015. https://online.muiv.ru/lib/?query=%D0%9A%D1%83%D0%B1%D0%BE%D0%B2%D0%B0
5. Кубова Р.М. Методы оптимальных решений: учебное пособие МУ им. С.Ю. Витте. 2013. https://lms.muiv.ru/mod/url/view.php?id=5259 Ч. 1.
6. Кубова Р.М. Методы оптимальных решений: учебное пособие МУ им. С.Ю. Витте. 2013. https://lms.muiv.ru/mod/url/view.php?id=5419 Ч. 2.
7. Литвин Д.Б. Линейное программирование. Транспортная задача [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев - Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_00120.htm
8. Малышев Н.Г. О системах и их моделировании [Электронный ресурс] / Н.Г. Малышев - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922117579.html
9. Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования [Электронный ресурс] / Плохотников К.Э. - М. : ФЛИНТА, 2017. -http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976515413.html

10. Чикильдин Г. П. Идентификация динамических объектов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г. П. Чикильдин. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. URL: http://www.studentlibrary.ru/book/

Дополнительная литература

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 432 с.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Книга 1. М.: МЦНМО, 2011. https://online.muiv.ru/lib/books/382/
3. Венцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – М.: Наука, 1980.
4. Володько О.В. Экономика организации [Электронный ресурс]: учеб. пособие / О.В. Володько, Р.Н. Грабар, Т.В. Зглюй - Минск : Выш.шк., 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789850628268.html
5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2009.
6. Ковнир В.Н. Экономика в терминах, понятиях и представлениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.Н. Ковнир, И.В. Чурзина. - М. : Логос, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785986991658.html
7. Колобашкина Л. В. Основы теории игр. Учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. https://online.muiv.ru/lib/books/41902/
8. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008. https://online.muiv.ru/lib/books/37572/
9. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. 2-е изд., испр. и доп. - М.: Физматлит, 2009. -132 с. https://online.muiv.ru/lib/books/25817/
10. Малышев Н.Г. О системах и их моделировании [Электронный ресурс] / Н.Г. Малышев - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922117579.html
11. Невежин В.П., Кружилов С.И. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование» М. 2005.
12. 11.Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2011.

13. Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования [Электронный ресурс] / Плохотников К.Э. - М. : ФЛИНТА, 2017. -http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976515413.html

14. Струченков В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах. М.: СОЛОН - ПРЕСС, 2009. - Библиотека профессионала. – 315 с. https://online.muiv.ru/lib/books/49166/

15. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие/ Под ред. С.И.Макарова. – М. : КНОРУС, 2009.

ГЛОССАРИЙ

Алгори́тм, от имени учёного аль-Хорезми (перс.خوارزمی [al-Khwārazmī]) — точный набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения результата решения задачи за конечное время.

Анализ греч. слово analozis – “решение”, “разрешение”. Т. “аналитическая” восходит к Виету, который отвергал слово “алгебра” как варварское, заменяя его словом “анализ”.

Выпуклое множество - множество в которое содержит вместе с любыми двумя точками соединяющий их отрезок.

Выпуклое программирование [convex programming] — раздел *нелинейного программирования*, совокупность методов решения нелинейных *экстремальных задач* с выпуклыми *целевыми функциями* (они минимизируются) и выпуклыми системами *ограничений*.

Градие́нт (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий, растущий) — вектор, показывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины φ, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля).

Детерминированные модели – модели, которые определяют жесткие функциональные связи между объектами.

Динамическое программирование - математический аппарат, позволяющий быстро находить оптимальное решение в случае, когда анализируемая ситуация не содержит факторов неопределенности, но имеется большое количество вариантов поведения, приносящих различные результаты, среди которых необходимо выбрать наилучший. Динамическое программирование подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на небольшие и менее сложные задачи.

Задачей оптимизации в математике, информатике и исследовании операций называется задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Исследование операций (ИО) (англ. *Operations Research (OR)*) — дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности. Иногда используется название **математические методы исследования операций**.

Координаты — величины, определяющие положение точки (тела) в пространстве (на плоскости, на прямой). Совокупность координат всех точек пространства является системой координат.

Линейное программирование [linear programming] — область *математического программирования*, посвященная теории и методам решения *экстремальных задач*, характеризующихся *линейной зависимостью* между *переменными*.

Марковский процесс - случайный процесс, протекающий в системе, и такой, что для любого момента времениt_0характеристикивероятностипроцесса в будущем зависят только от его состояния в данный моментt_0и не зависят оттого, когда и как система пришла в это состояние.

Математическое программирование, математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

Ма́трица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими.

Макроэкономические модели - описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели, такие как потребление, инвестиции, ВНП, занятость, процентную ставку, количество денег и др.

Межотраслевой баланс – таблица, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

Микроэкономические модели - описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики или функционирование одной структурной составляющей.

Моде́ль (фр. *modèle*, от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») — это упрощенное представление реального устройства и/или протекающих в нем процессов, явлений.

Модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева) – модель, представляющая собой систему линейных уравнений межотраслевого баланса. Модель дает ответ на вопрос межотраслевого анализа – каким должно быть валовое производство каждой отрасли для того, чтобы экономическая система в целом произвела заданное количество конечной продукции.

Нелинейное программирование (**NLP**, англ. ***N**on**L**inear* ***P**rogramming*) — случай математического программирования, в котором целевой функцией или ограничением является нелинейная функция.

Неравенство это утверждение об относительной величине или порядке двух объектов, или о том, что они просто не одинаковы.

Обратная матрица - По определению квадратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ называется обратной по отношению к матрице $\boldsymbol{A}$**,** если $\boldsymbol{A^{-1} A = A A^{-1} = E}$**,** где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица**.**

Переме́нная— атрибут физической или абстрактной системы, который может изменять своё значение. Значение может меняться в зависимости от контекста, в котором рассматривается система, или в случае уточнения, о какой конкретно системе идёт речь. Концепция переменной широко используется в таких областях как математика, естественные науки, техника и программирование.

Потенцирование немецк. слово potenzieren – “возводить в степень”. Действие, заключающееся в нахождении числа по данному логарифму.

Поток событий- последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Принципа оптимальности Беллмана - оптимальное поведение обладает тем свойством, что каким бы ни было первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Ранг матрицы ***А*** - максимально возможный порядок отличных от нуля ее миноров.

Сетевая модель - план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети.

Сетевой график - графическое изображение сетевой модели.

Система координат — комплекс определений, реализующий *метод координат*, то есть способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов.

Системы массового обслуживания (СМО) - телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем и т.д.

Случайная величина - величина, которая в результате опыта может принимать различные заранее не известные значения.

Статические модели – модели, которые описывают состояние объекта в конкретный момент времени.

Стохастические модели - модели, в которых существующие связи могут изменяться при наличии случайных воздействий

Теория игр - математическая теория конфликтных ситуаций.

Теория массового обслуживания- один из разделов теории вероятности. Теория рассматривает построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок)с характеристиками, интересующие нас, - показателями эффективности СМО.

Уравне́ние — это равенство вида

$$f(x_1, x_2 \ldots) = g(x_1, x_2 \ldots)$$

или, в приведённой форме

$$f(x_1, x_2 \ldots) = 0,$$

где f и g — функции (в общем случае — векторные) одного или нескольких аргументов.

Целочисленное программирование — разновидность математического программирования, подразумевающая, что искомые значения должны быть целыми числами.

Экстре́мум (лат.*Extremum* — крайний) в математике — *максимальное* или *минимальное* значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*. Соответственно, если достигается минимум — точка экстремума называется *точкой минимума*, а если максимум — *точкой максимума*. В математическом анализе выделяют также понятие *локальный экстремум (соответственно минимум или максимум)*

Учебное электронное издание

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Авторы-составители:
ТРОИЦКАЯ Елена Анатольевна
АРТЮШИНА Лариса Андреевна

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 9 экз.

Издательство Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.