Владимирский государственный университет

Д. Ю. Фраймович   М. Л. Быкова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Владимир 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Д. Ю. Фраймович М. Л. Быкова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-1998-0

УДК 311:33
ББК 65.051

Рецензенты:
Доктор экономических наук, профессор
профессор кафедры бизнес-информатики и экономики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. М. Губернаторов

Кандидат экономических наук
доцент кафедры менеджмента
Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте Российской Федерации
(Владимирский филиал)
А. И. Абдряшитова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Фраймович Д. Ю. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. Ю. Фраймович, М. Л. Быкова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. – 173 с. – ISBN 978-5-9984-1998-0. – Электрон. дан. (8,09 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Включает полный курс дисциплины «Экономико-математические методы и модели». Рассмотрены теоретические и практические основы дисциплины, проанализированы основы применения экономико-математических методов и моделей для широкого круга прикладных экономических задач.

Предназначено для студентов бакалавриата и специалитета, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» и специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 5. Ил. 35. Библиогр.: 36 назв.

ISBN 978-5-9984-1998-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире развитие экономики зачастую связано с наличием нелинейных тенденций, что существенно усложняет процесс планирования и прогнозирования экономических процессов и явлений.

Лицам, ответственным за управление экономикой на микро-, мезо- и макроуровнях, приходится принимать решения в условиях высокой неопределенности, влияющей на производство, распределение, обмен и потребление. Невозможно оценить эффективность таких проектов и процессов без соответствующих расчетов.

Экономико-математические методы и модели позволяют грамотно описать сложные социально-экономические процессы и явления. Применение пакетов общего назначения и специализированных программных продуктов позволило упростить задачу их использования в различных сферах народнохозяйственной деятельности.

Рассмотренные в учебном пособии способы и приемы экономико-математического моделирования могут быть использованы при анализе экономических процессов и явлений на основе применения математических методов и моделей.

Цель изучения дисциплины состоит в формировании у студентов теоретических знаний в области экономико-математического моделирования, а также развитии практических навыков решения конкретных экономических задач на основе применения математических методов и моделей.

Книга содержит пять глав, в которых рассматриваются теоретические и практические основы курса. Отдельное внимание уделено конкретным примерам, позволяющим рассмотреть особенности применения различных методов и моделей при решении профессиональных задач. Дидактический материал пособия включает контрольные вопросы, примеры решения задач, тематику рефератов по дисциплине.

В случае успешного изучения курса предполагается формирование результатов, благодаря которым обучающийся:

– **знает** методы работы с данными, необходимыми для построения экономико-математических моделей;

– **умеет** строить экономико-математические модели на основе оценки, анализа и обобщения данных в области экономической безопасности;

– **владеет** навыками применения экономико-математических методов в практической деятельности на основе количественно-качественного анализа экономико-статистических данных.

Глава 1. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Сущность задачи линейного программирования

Задачи линейного программирования связаны с поиском оптимума определенной целевой функции при системе ограничений, заданных в виде линейных уравнений или линейных неравенств.

Линейное программирование – один из наиболее разработанных и широко применяемых разделов математического программирования, что обусловлено целым рядом причин.

Во-первых, большинство математических моделей для конкретных экономических задач линейны относительно искомых переменных.

Во-вторых, линейные модели в настоящее время наиболее изучены и для них разработы специальные методы, с помощью которых прикладные задачи могут быть решены с использованием программных продуктов в кратчайшее время.

В-третьих, применение линейных методов возможно и по отношению к нелинейным задачам, которые после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными либо быть приведенными к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы [1].

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи.

Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи [2].

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (ЗЛП) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального) [3].

Математическая модель любой задачи линейного программирования обязательно включает в себя три основные составляющие (рис. 1.1).

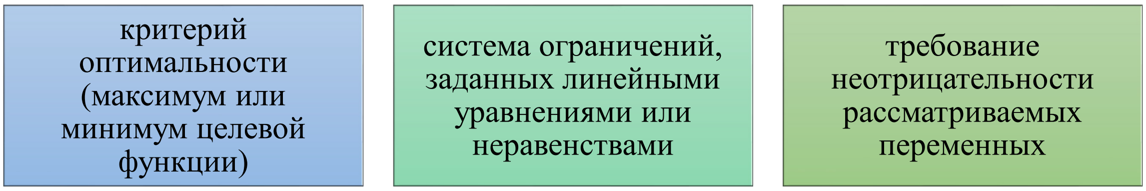


Рис. 1.1. Основные элементы математической модели задачи линейного программирования

Задача линейного программирования может быть представлена и сформулирована в различных эквивалентных формах: канонической и стандартной [4].

В канонической форме ЗЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи считаются неотрицательными (1.1 – 1.3):

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_{11} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2[} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2[} + \dots + a_{mn}x_n = bm. \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \tag{1.2}$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to \max(\min). \tag{1.3}$$

Для того чтобы привести задачу ЗЛП к каноническому виду, необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение было неравенством, то оно преобразуется в равенство путем ввода в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем для неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства « ≥ » – со знаком «–».

В каждое из неравенств вводится своя переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений. Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в основной форме, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

2. Если исходная задача предполагает наличие отрицательной переменной, ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных.

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует домножить данное ограничение на (-1).

4. Если задачу на минимум требуется свести к задаче на максимум, вводится новая целевая функция $F' = F$.

В стандартной форме ЗЛП является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ее ограничений состоит из одних линейных неравенств типа «≤» или «≥». Все переменные задачи неотрицательны.

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме. Приведение к стандартной форме необходимо, так как большинство методов решения задач линейного программирования разработано именно для данной формы [5].

Для приведения к стандартной форме задачи линейного программирования необходимо выполнить целый ряд действий (рис. 1.2).

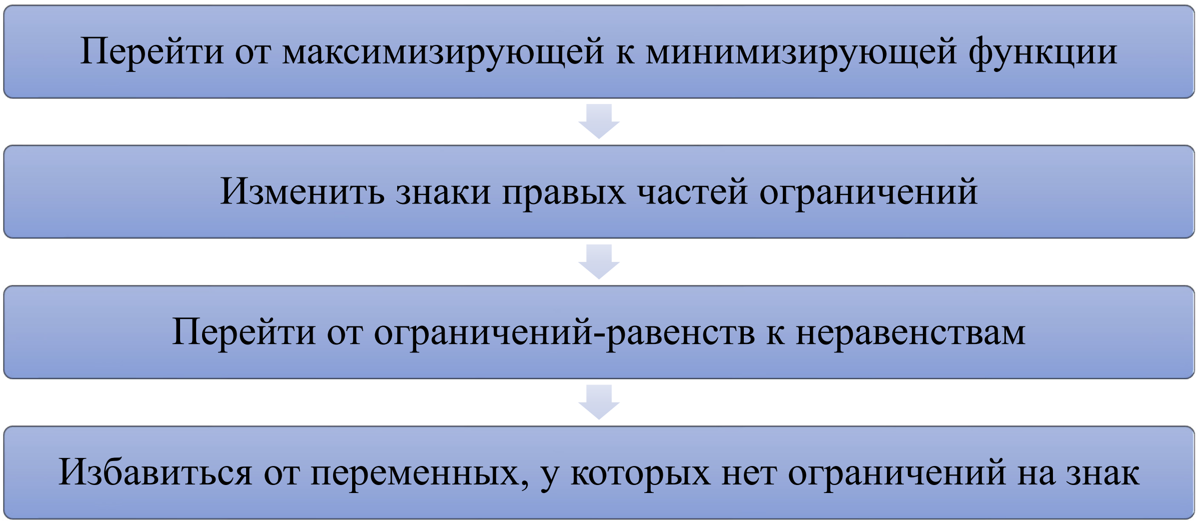


Рис. 1.2. Этапы приведения ЗЛП к стандартной форме

Таким образом, общая задача линейного программирования состоит в определении минимального (максимального) значения функции. Одним из способов решения ЗЛП следует назвать графический метод, который основан на геометрической интерпретации решений. Как правило, он применяется при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трёхмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств.

1.2. Транспортная задача

Транспортная задача (ТЗ) является частным случаем ЗЛП. Общий вид ТЗ состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления A_1 , A_2 , ..., A_m в n пункты назначения B_1 , B_2 , ..., B_n. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим задачу с первым критерием, обозначив через c_n тарифы перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i – запасы груза в пункте A_i, через b_j – потребности в грузе пункта B_j, x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта в j-й пункт. Математическая модель задачи будет сведена к следующему: от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза (табл. 1.1).

Транспортная задача

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов была равна сумме потребностей всех пунктов, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Транспортная задача, в которой выполнено это условие, называется закрытой. Если данное условие не выполняется, ТЗ считается открытой и для ее решения требуется введение фиктивных переменнных.

После определения типа ТЗ (открытая или закрытая) требуется найти опорное решение. Для этого могут быть использованы методы вычеркивания (двойного предпочтения), северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля.

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы. Проверка условия независимости осуществляется с использованием циклов [6].

Цикл представляет собой последовательность клеток таблицы транспортной задачи, в которой две и только соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя также находятся в одной строке или столбце. Система векторов условий транспортной задачи линейно независима тогда и только тогда, когда из соответствующих им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла. Следовательно, допустимое решение транспортной задачи является опорным только в том случае, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Метод вычеркивания (метод двойного предпочтения). Если в строке или столбце таблицы одна занятая клетка, то она не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждом столбце. Следовательно, можно вычеркнуть все строки таблицы, содержащие по одной занятой клетке, затем вычеркнуть все столбцы, содержащие по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов. Если в результате вычеркивания все строки и столбцы будут вычеркнуты, значит из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и система соответствующих векторов условий будет линейно независимой, а решение опорным. Если же после вычеркиваний останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, система соответствующих векторов условий линейно зависима, а решение не является опорным.

Метод северо-западного угла состоит в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя. На цены доставки в этом методе не обращают внимание, поскольку предполагается дальнейшая оптимизация отгрузок.

Метод минимального элемента состоит в том, что в транспортной таблице сначала заполняются ячейки с наименьшими тарифами, а потом уже ячейки с бóльшими тарифами.

При **методе аппроксимации Фогеля** на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации [7].

Метод потенциалов – это один из методов решения транспортной задачи, позволяющий найти оптимальный план перевозок и определить минимальные затраты на транспортировку грузов или максимальную прибыль.

Основная идея метода потенциалов заключается в том, что каждой ячейке таблицы транспортной задачи присваивается определенное значение, называемое потенциалом.

Основой вычислительного процесса при улучшении опорного плана следует считать определение критерия оптимальности d_{ij} (1.4):

$$d_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}, \tag{1.4}$$

где c_{ij} – затраты (истинные тарифы), связанные с доставкой одной единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения; c_{ij}^* – расчётные затраты (косвенные тарифы), связанные с доставкой одной единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, определяемые для тех клеток опорного плана, ресурсы в которые не распределены (для незаполненных клеток).

1.3. Двойственная задача

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. В таком случае первоначальная задача называется исходной (прямой). Правила построения двойственной задачи представлены на рис. 1.3.

Рис. 1.3. Основные правила построения двойственной задачи

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные.

В симметричной паре двойственных задач ограничения прямой задачи и соотношения двойственной задачи являются неравенствами вида «≤». Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Несимметричные пары задач отличаются от симметричных двумя основными особенностями. Во-первых, в таких задачах ограничения выражаются уравнениями, а не неравенствами. Во-вторых, в задаче отсутствуют условия неотрицательности y_i [8].

Каждая из пары двойственных задач может быть решена самостоятельно, однако из решения одной можно получить решение другой.

1.4. Симплекс-метод

Симплекс-метод был разработан Г. Данцигом в 1947 году. Его сущность состоит в том, что происходит последовательный перебор угловых точек области допустимых решений, а алгоритмы позволяют установить, является ли данная ЗЛП разрешимой.

Для того чтобы построить опорный план задачи линейного программирования при помощи симплексного метода, необходимо привести ЗЛП к предпочтительному виду (задача должна иметь канонический вид и в каждом ограничении системы должна быть переменная, входящая в него с коэффициентом 1 и с коэффициентом 0 во все остальные ограничения, именно эти переменные выбирают в качестве базиса).

Приведение ЗЛП к предпочтительному виду возможно за счет использования нескольких методов. В том случае, если ЗЛП задана в каноническом виде, можно выразить часть переменных через остальные, например с использованием метода Гаусса. Также возможно добавление балансовых переменных, которые бы удовлетворяли описанному выше условию и входили в целевую функцию с нулевым коэффициентом. При этом важно соблюдение критерия неотрицательности.

Данное правило применяется для задач, содержащих в системе ограничений неравенства типа «≤». При этом вводимые в систему ограничений переменные принимаются в качестве базисных [9]. Построение оптимального плана с использованием симплекс-метода возможно в три этапа (рис. 1.4).

Рис. 1.4. Этапы построения плана с использованием симплекс-метода

Таким образом, сущность метода сводится к построению базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

1.5. Методы целочисленного программирования

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) ориентировано на решение задач линейного программирования, в которых на все или часть переменных наложены условия целочисленности.

Различают полностью и частично целочисленные задачи. Характерными источниками целочисленности (дискретности) являются:

1) неделимость объектов, представляемых переменными;
2) вариантность типа “да – нет”;
3) заданность возможных значений нормативными документами;
4) комбинаторность;
5) логические условия.

Любой ряд дискретных значений может быть представлен линейной комбинацией целочисленных переменных, поэтому дискретная задача легко сводится к целочисленной за счет значительного увеличения числа переменных.

Несмотря на линейность модели, допустимое множество целочисленной задачи не является выпуклым. Так, в полностью целочисленной задаче оно представляет собой множество отдельных точек, имеющих целочисленные координаты.

При особых свойствах целочисленной задачи решение ее как непрерывной всегда дает целочисленный результат. Такой исход имеет место, если все вершины допустимого множества целочисленные. Многогранное множество, обладающее этим свойством, называется целочисленным. Определим условия, при которых множество оказывается целочисленным [10].

В настоящее время одним из наиболее популярных методов целочисленного программирования следует назвать метод отсекающих плоскостей. Необходимым условием применения данного метода выступает целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений исходной задачи.

Нахождение решения задачи начинают с определения оптимального решения задачи без учёта требования целочисленности переменных.

После того как это решение найдено, анализируются компоненты. Если среди них нет дробных чисел, то найденное решение будет оптимальным решением задачи целочисленного программирования.

Если же некоторая переменная x_j принимает дробное значение, то к системе уравнений необходимо добавить дополнительное ограничение. Если дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство составляют для переменной, имеющей максимальную дробную часть (дополнительное ограничение может составляться и для целевой функции).

Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, полученной в результате присоединения дополнительного ограничения. Если в найденном решении задачи переменные опять принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют.

В случае если на некотором шаге обнаруживается отсутствие допустимого решения, то рассматриваемая задача не имеет допустимого целочисленного решения [11].

1.6. Динамическое программирование

Динамическое программирование (ДП) применяется при решении оптимизационных задач, в которых процесс принятия решений может быть разбит на этапы (шаги).

Общая постановка задачи ДП состоит в следующем. Рассматривается некоторый управляемый процесс, в результате которого система (объект управления) S переводится из начального состояния S_0 в состояние $\hat{S}$. Предполагается, что управление можно разбить на n шагов, т. е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему из S_0 в $\hat{S}$, можно представить в виде последовательности n пошаговых управлений [12].

Обозначим через x_k управление на k-м шаге ($k = 1, 2,\ldots, n$). Переменные x_k удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются допустимыми.

Пусть $X(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ – управление, переводящее систему S из состояния S_0 в состояние $\hat{S}$, а S_k – состояние системы после k-го шага управления (рис. 1.5).

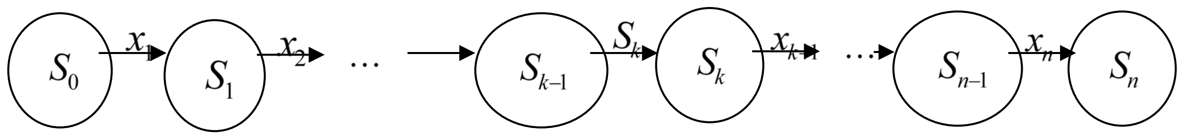


Рис. 1.5. Последовательность состояний системы при реализации задачи динамического программирования

Показатель эффективности F управляемой операции (целевая функция) зависит от начального состояния и управления.

Особенности модели динамического программирования состоят в следующем.

1. Задача оптимизации интерпретируется как n-шаговый процесс управления.

2. Целевая функция представляет собой сумму целевых функций на каждом шаге.

3. Выбор управления на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4. Состояние системы после каждого шага управления зависит от предшествующего состояния и управления.

5. На каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние S_k – от конечного числа параметров [13].

1.7. Нелинейное программирование

Нелинейное программирование применяют для решения оптимальных задач с нелинейными функциями цели. На независимые переменные также могут быть наложены ограничения в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств.

Общих способов решения задач нелинейного программирования не существует, способ решения выбирается в каждом конкретном случае в зависимости от вида целевой функции и накладываемых на элементы решения ограничений.

Задачи нелинейного программирования принадлежат к трудным вычислительным задачам. Они включают в себя широкую группу численных методов, многие из которых приспособлены для решения оптимальных задач соответствующего класса.

Выбор конкретного метода обусловлен сложностью вычисления критерия оптимальности и сложностью ограничивающих условий, необходимой точностью решения, мощностью имеющейся вычислительной техники и т. д. [14]

Все известные численные методы отыскания экстремума нелинейных функций в зависимости от используемой информации для получения следующей точки можно разделить на три основные группы (рис. 1.6).

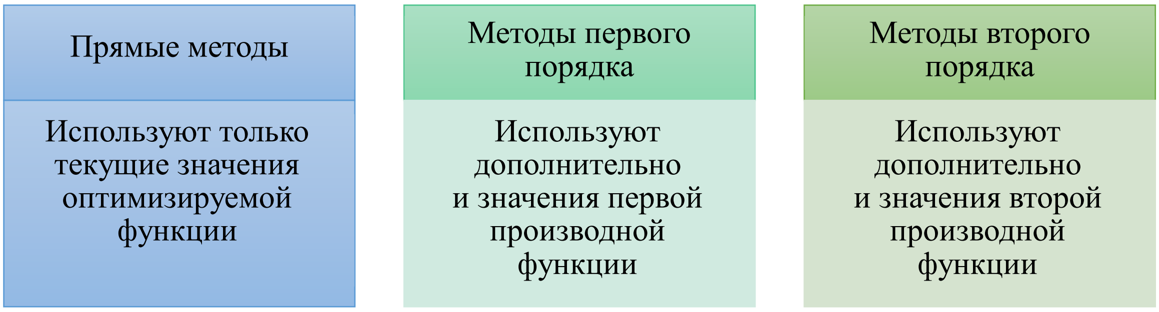


Рис. 1.6. Группы численных методов

Задачи нелинейного программирования можно разделить на две группы в зависимости от способа их решения (рис. 1.7).

Рис. 1.7. Способы решения задач в зависимости от наличия дополнительных ограничений

В области нелинейного программирования с ограничениями (условная оптимизация) методы решения задач менее разработаны по сравнению с областью нелинейного программирования без ограничений (безусловная оптимизация).

Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают свед́ение ее к последовательности задач безусловной оптимизации.

Другой класс методов основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль данного направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

В свою очередь, методы безусловной оптимизации делятся на методы одномерной и многомерной оптимизации. Несмотря на то что безусловная оптимизация функции одной переменной является наиболее простым типом задач, она занимает центральное место как с теоретической, так и с практической точки зрения. Это связано с тем, что задачи однопараметрической оптимизации достаточно часто встречаются на практике и, кроме того, находят свое применение при реализации более сложных итеративных процедур многопараметрической оптимизации [3].

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность задачи линейного программирования?
2. Чем обусловлено широкое распространение методов линейного программирования?
3. Назовите необходимые условия постановки задачи линейного программирования.
4. Что называется задачей линейного программирования?
5. Перечислите основные элементы математической модели задачи линейного программирования.
6. Назовите основные формы формулировки задачи линейного программирования.
7. Охарактеризуйте каноническую форму задачи линейного программирования.
8. Какие основные правила приведения задачи линейного программирования к каноническому виду вам известны?
9. Для чего требуется приведение задачи линейного программирования к стандартной форме?
10. Перечислите основные этапы приведения ЗЛП к стандартной форме.
11. В чем состоит сущность решения задачи линейного программирования графическим методом?

Примеры решения задач

Задача 1.1

В городе имеется три основных склада, на которых хранится продукция в объеме 330, 290 и 260 т соответственно. Продукцию требуется доставить в пять магазинов в количестве 150, 160, 120, 230, 220 т. Стоимость перевозки тонны продукции со складов задана матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 22 & 18 & 16 & 24 \\ 28 & 16 & 15 & 20 & 29 \\ 07 & 12 & 09 & 08 & 08 \end{pmatrix}.$$

Решить транспортную задачу методом наименьшей стоимости. Проверить оптимальность плана с применением метода потенциалов.

Решение

На предварительном этапе необходимо определить принадлежность задачи к открытому или закрытому типу. Для этого проверим равенство запасов и потребностей. Запасы составляют 330 + 290 + 260 = = 880 т, потребности в продукции составляют 150 + 160 + 120 + 230 + + 220 = 880 т.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что представленная транспортная задача является закрытой, введение фиктивных переменных не требуется. Для упрощения процедуры решения задачи составим распределительную таблицу.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20	22	18	16	24	330
A2	28	16	15	20	29	290
A3	7	12	9	8	8	260
Потреб-ности	150	160	120	230	220	

Поскольку метод наименьшей стоимости предполагает заполнение таблицы с клетки, в которой указана наименьшая стоимость, искомый элемент $c_{31} = 7$.

Для этого элемента запасы равны 260, потребности 150. Вычитаем наименьшее число (150).

$x_{31} = \min(260, 150) = 150$.

Таким образом,

20	22	18	16	24	330
28	16	15	20	29	290
7 [150]	12	9	8	8	**260 – 150 = 110**
150 – 150 = 0	160	120	230	220	

На следующем этапе искомый элемент c_{34} = 8. Для этого элемента запасы равны 110, потребности 230. Вычитаем наименьшее число (110).

x_{34} = min(110, 230) = 110.

Таким образом,

X	22	18	16	24	330
X	16	15	20	29	290
7 [150]	X	X	**8 [110]**	X	**110 – 110 = 0**
0	160	120	**230 – 110 = 120**	220	

На следующем этапе искомый элемент c_{23} = 15. Для этого элемента запасы равны 290, потребности 120. Вычитаем наименьшее число (120).

x_{23} = min(290, 120) = 120.

Таким образом,

X	22	X	16	24	330
X	16	**15 [120]**	20	29	**290 – 120 = 170**
7 [150]	X	X	8 [110]	X	0
0	160	**120 – 120 = 0**	120	220	

На следующем этапе искомый элемент c_{14} = 16. Для этого элемента запасы равны 330, потребности 120. Вычитаем наименьшее число (120).

x_{14} = min(330, 120) = 120.

Таким образом,

X	22	X	**16 [120]**	24	**330 – 120 = 210**
X	16	15 [120]	X	29	170
7 [150]	X	X	8 [110]	X	0
0	160	0	**120 – 120 = 0**	220	

На следующем этапе искомый элемент c_{22} = 16. Для этого элемента запасы равны 170, потребности 160. Вычитаем наименьшее число (160).

$x_{22} = \min(170, 160) = 160$.

Таким образом,

X	X	X	16 [120]	24	210
X	**16 [160]**	15 [120]	X	29	**170 – 160 = 10**
7 [150]	X	X	8 [110]	X	0
0	**160 – 160 = 0**	0	0	220	

На следующем этапе искомый элемент $c_{15} = 24$. Для этого элемента запасы равны 210, потребности 220. Вычитаем наименьшее число (210).

$x_{15} = \min(210, 220) = 210$.

Таким образом,

X	X	X	16 [120]	**24 [210]**	210 – 210 = 0
X	16 [160]	15 [120]	X	29	10
7 [150]	X	X	8 [110]	X	0
0	0	0	0	220 – 210 = 10	

На следующем этапе искомый элемент $c_{25} = 29$. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 10. Вычитаем 10.

$x_{25} = \min(10, 10) = 10$.

Таким образом,

X	X	X	16 [120]	24 [210]	0
X	16 [160]	15 [120]	X	**29 [10]**	10 – 10 = 0
7 [150]	X	X	8 [110]	X	0
0	0	0	0	10 – 10 = 0	

Первый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20	22	18	16 [120]	24 [210]	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]	290
A3	7 [150]	12	9	8 [110]	8	260
Потребности	150	160	120	230	220	

При реализации такого плана все товары со складов будут вывезены, а потребности магазинов B1, B2, B3, B4 и B5 в продукции удовлетворены. Таким образом, полученный план является допустимым, поскольку удовлетворяет исходным ограничениям задачи.

Для данного опорного плана значение целевой функции составит $7 \cdot 150 + 16 \cdot 160 + 15 \cdot 120 + 16 \cdot 120 + 8 \cdot 110 + 24 \cdot 210 + 29 \cdot 10 =$ $= 13540$ ден. ед.

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_4 = 16; 0 + v_4 = 16; v_4 = 16$

$u_3 + v_4 = 8; 16 + u_3 = 8; u_3 = -8$

$u_3 + v_1 = 7; -8 + v_1 = 7; v_1 = 15$

$u_1 + v_5 = 24; 0 + v_5 = 24; v_5 = 24$

$u_2 + v_5 = 29; 24 + u_2 = 29; u_2 = 5$

$u_2 + v_2 = 16; 5 + v_2 = 16; v_2 = 11$

$u_2 + v_3 = 15; 5 + v_3 = 15; v_3 = 10$

То есть:

	$v_1 = 15$	$v_2 = 11$	$v_3 = 10$	$v_4 = 16$	$v_5 = 24$
$u_1 = 0$	20	22	18	16 [120]	24 [210]
$u_2 = 5$	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]
$u_3 = -8$	7 [150]	12	9	8 [110]	8

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 15$	$v_2 = 11$	$v_3 = 10$	$v_4 = 16$	$v_5 = 24$
$u_1 = 0$	20	22	18	16 [120]	24 [210]
$u_2 = 5$	28	16 [160]	15 [120]	**20**	29 [10]
$u_3 = -8$	7 [150]	12	9	8 [110]	**8**

Оценки данных клеток:

(2;4): $5 + 16 > 20$; $\Delta_{24} = 5 + 16 - 20 = 1 > 0$;

(3;5): $-8 + 24 > 8$; $\Delta_{35} = -8 + 24 - 8 = 8 > 0$.

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 8).

В перспективную клетку (3;5) ставится знак «+», а в остальных вершинах прямоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20	22	18	16 [120] [+]	24 [210] [–]	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]	290
A3	7 [150]	12	9	8 [110] [–]	8 [+]	260
Потребности	150	160	120	230	220	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 110), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20	22	18	16 [230]	24 [100]	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]	290
A3	7 [150]	12	9	8	8 [110]	260
Потребности	150	160	120	230	220	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_4 = 16; 0 + v_4 = 16; v_4 = 16$

$u_1 + v_5 = 24; 0 + v_5 = 24; v_5 = 24$

$u_2 + v_5 = 29; 24 + u_2 = 29; u_2 = 5$

$u_2 + v_2 = 16; 5 + v_2 = 16; v_2 = 11$

$u_2 + v_3 = 15; 5 + v_3 = 15; v_3 = 10$

$u_3 + v_5 = 8; 24 + u_3 = 8; u_3 = –16$

$u_3 + v_1 = 7; -16 + v_1 = 7; v_1 = 23$

То есть:

	$v_1 = 23$	$v_2 = 11$	$v_3 = 10$	$v_4 = 16$	$v_5 = 24$
$u_1 = 0$	20	22	18	16 [230]	24 [100]
$u_2 = 5$	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]
$u_3 = 16$	7 [150]	12	9	8	8 [110]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 23$	$v_2 = 11$	$v_3 = 10$	$v_4 = 16$	$v_5 = 24$
$u_1 = 0$	20	22	18	16 [230]	24 [100]
$u_2 = 5$	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]
$u_3 = 16$	7 [150]	12	9	8	8 [110]

Оценки данных клеток:

(1; 1): $0 + 23 > 20$; $\Delta_{11} = 0 + 23 - 20 = 3 > 0$;

(2; 4): $5 + 16 > 20$; $\Delta_{24} = 5 + 16 - 20 = 1 > 0$.

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 3). В перспективную клетку (1;1) ставится знак « + », а в остальных вершинах прямоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – »:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20 [+]	22	18	16 [230]	24 [100] [–]	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]	290
A3	7 [150][–]	12	9	8	8 [110] [+]	260
Потреб-ности	150	160	120	230	220	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 100), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20 [100]	22	18	16 [230]	24	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]	290
A3	7 [50]	12	9	8	8 [210]	260
Потреб-ности	150	160	120	230	220	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 20$; $0 + v_1 = 20$; $v_1 = 20$

$u_3 + v_1 = 7$; $20 + u_3 = 7$; $u_3 = -13$

$u_3 + v_5 = 8$; $-13 + v_5 = 8$; $v_5 = 21$

$u_2 + v_5 = 29$; $21 + u_2 = 29$; $u_2 = 8$

$u_2 + v_2 = 16$; $8 + v_2 = 16$; $v_2 = 8$

$u_2 + v_3 = 15$; $8 + v_3 = 15$; $v_3 = 7$

$u_1 + v_4 = 16$; $0 + v_4 = 16$; $v_4 = 16$

То есть:

	$v_1 = 20$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 16$	$v_5 = 21$
$u_1 = 0$	20 [100]	22	18	16 [230]	24
$u_2 = 8$	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]
$u_3 = -13$	7 [50]	12	9	8	8 [210]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 20$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 16$	$v_5 = 21$
$u_1 = 0$	20 [100]	22	18	16 [230]	24
$u_2 = 8$	28	16 [160]	15 [120]	20	29 [10]
$u_3 = –13$	7 [50]	12	9	8	8 [210]

Оценка данной клетки:

(2; 4): $8 + 16 > 20$; $\Delta_{24} = 8 + 16 – 20 = 4 > 0$.

В перспективную клетку (2; 4) ставится знак « + », а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	$v_1 = 20$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 16$	$v_5 = 21$
$u_1 = 0$	20 [100] [+]	22	18	16 [230] [–]	24
$u_2 = 8$	28	16 [160]	15 [120]	20 [+]	29 [10] [–]
$u_3 = –13$	7 [50] [–]	12	9	8	8 [210] [+]

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 10), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток.

То есть новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	20 [110]	22	18	16 [220]	24	330
A2	28	16 [160]	15 [120]	20 [10]	29	290
A3	7 [40]	12	9	8	8 [220]	260
Потреб-ности	20 [100] [+]	22	18	16 [230] [–]	24	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 20$; $0 + v_1 = 20$; $v_1 = 20$

$u_3 + v_1 = 7$; $20 + u_3 = 7$; $u_3 = –13$

$u_3 + v_5 = 8$; $-13 + v_5 = 8$; $v_5 = 21$

$u_1 + v_4 = 16$; $0 + v_4 = 16$; $v_4 = 16$

$u_2 + v_4 = 20$; $16 + u_2 = 20$; $u_2 = 4$

$u_2 + v_2 = 16$; $4 + v_2 = 16$; $v_2 = 12$

$u_2 + v_3 = 15$; $4 + v_3 = 15$; $v_3 = 11$

То есть:

	$v_1 = 20$	$v_2 = 12$	$v_3 = 11$	$v_4 = 16$	$v_5 = 21$
$u_1 = 0$	20 [110]	22	18	16 [220]	24
$u_2 = 4$	28	16 [160]	15 [120]	20 [10]	29
$u_3 = -13$	7 [40]	12	9	8	8 [220]

Найденный план оптимален, поскольку отсутствуют такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

Таким образом, минимальные затраты на перевозку товаров со складов в магазины составят

$110 \cdot 20 + 7 \cdot 40 + 16 \cdot 160 + 15 \cdot 12 + 16 \cdot 220 + 20 \cdot 10 + 8 \cdot 220 =$
$= 12320$ ден. ед.

Реализация оптимального плана предполагает поставку с первого склада А1 110 т товара в магазин В1 и 220 т товара в магазин В4; со второго склада А2 160 т в магазин В2, 120 т в магазин В3 и 10 т в магазин В4; из третьего склада А3 40 т в магазин В1 и 220 т в магазин В5.

Сравнивая полученные результаты вычислений, можно отметить, что перевозка грузов по оптимальному плану выгоднее на 13540 – 12320 = 1220 ден. ед.

Задача 1.2

Из четырех складов, на которых хранится продукция в объеме 80, 70, 40 и 60 упаковок соответственно, требуется доставить продукцию в шесть магазинов в количестве 10, 20, 30, 40, 50, 60 упаковок. Стоимость перевозки одной упаковки продукции со складов задана матрицей С.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 15 & 22 & 4 & 3 \\ 6 & 12 & 11 & 12 & 3 & 2 \\ 9 & 11 & 6 & 17 & 6 & 6 \\ 5 & 17 & 8 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решить транспортную задачу методом северо-западного угла. Проверить оптимальность плана с применением метода потенциалов.

Решение

На предварительном этапе необходимо определить принадлежность задачи к открытому или закрытому типу. Для этого проверим равенство запасов и потребностей. Запасы составляют 80 + 70 + 40 + 60 = 250 упаковок, потребности в продукции составляют 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + + 60 = 210 упаковок.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что представленная транспортная задача является открытой, требуется введение фиктивных переменных. Введем магазин В7 с фиктивной потребностью в 250 – 210 = 40 упаковок. Тарифы перевозки единицы груза к нему предполагаются нулевыми.

Таким образом, распределительная таблица примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3	20	15	22	4	3	0	80
A2	6	12	11	12	3	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6	0	40
A4	5	17	8	4	1	7	0	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Согласно условиям построение опорного плана должно осуществляться методом северо-западного угла, т. е. заполнение должно начинаться с левого верхнего угла (ячейка c_{11}).

Для этого элемента запасы равны 80, потребности 10. Вычитаем наименьшее число (10).

$x_{11} = \min(80, 10) = 10$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	**3 [10]**	20	15	22	4	3	0	**80 – 10 = 70**
A2	6	12	11	12	3	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6	0	40
A4	5	17	8	4	1	7	0	60
Потребности	**10 – 10 = 0**	20	30	40	50	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{12} = 20$. Для этого элемента запасы равны 70, потребности 20. Вычитаем наименьшее число (20).

$X_{12} = \min(20, 70) = 20$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	**20 [20]**	15	22	4	3	0	**70 – 20 = 50**
A2	X	12	11	12	3	2	0	70
A3	X	11	6	17	6	6	0	40
A4	X	17	8	4	1	7	0	60
Потребности	0	**20 – 20 = 0**	30	40	50	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{13} = 15$. Для этого элемента запасы равны 50, потребности 30. Вычитаем наименьшее число (30).

$X_{13} = \min(50, 30) = 30$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	**15 [30]**	22	4	3	0	**50 – 30 = 20**
A2	X	X	11	12	3	2	0	70
A3	X	X	6	17	6	6	0	40
A4	X	X	8	4	1	7	0	60
Потребности	0	0	**30 – 30 = 0**	40	50	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{14} = 22$. Для этого элемента запасы равны 20, потребности 40. Вычитаем наименьшее число (20).

$X_{14} = \min(40, 20) = 20$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	**22 [20]**	4	3	0	**20 – 20 = 0**
A2	X	X	X	12	3	2	0	70
A3	X	X	X	17	6	6	0	40
A4	X	X	X	4	1	7	0	60
Потребности	0	0	0	**40 – 20 = 20**	50	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{24} = 12$. Для этого элемента запасы равны 70, потребности 20. Вычитаем наименьшее число (20).

$X_{24} = \min(70, 20) = 20$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	X	X	X	**0**
A2	X	X	X	**12 [20]**	3	2	0	**70 – 20 = 50**
A3	X	X	X	17	6	6	0	40
A4	X	X	X	4	1	7	0	60
Потребности	0	0	0	**20 – 20 = 0**	50	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{25} = 3$. Для этого элемента запасы равны 50, потребности 50.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	X	X	X	**0**
A2	X	X	X	12 [20]	**3 [50]**	2	0	**50 – 50 = 0**
A3	X	X	X	X	6	6	0	40
A4	X	X	X	X	1	7	0	60
Потребности	0	0	0	0	**50 – 50 = 0**	60	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{36} = 6$. Для этого элемента запасы равны 40, потребности 60. Вычитаем наименьшее число (40).

$X_{36} = \min(40, 60) = 40$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	X	X	X	0
A2	X	X	X	12 [20]	3 [50]	X	X	0
A3	X	X	X	X	X	**6 [40]**	0	**40 – 40 = 0**
A4	X	X	X	X	X	7	0	60
Потребности	0	0	0	0	0	**60 – 40 = 20**	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{46} = 7$. Для этого элемента запасы равны 60, потребности 20. Вычитаем наименьшее число (20).

$X_{46} = \min(60, 20) = 20$.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	X	X	X	0
A2	X	X	X	12 [20]	3 [50]	X	X	0
A3	X	X	X	X	X	6 [40]	X	0
A4	X	X	X	X	X	**7 [20]**	0	**60 – 20 = 40**
Потреб-ности	0	0	0	0	0	**20 – 20 = 0**	40	

На следующем этапе искомый элемент $c_{47} = 0$. Для этого элемента запасы равны 40, потребности 40.

Таким образом,

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	X	X	X	0
A2	X	X	X	12 [20]	3 [50]	X	X	0
A3	X	X	X	X	X	6 [40]	X	0
A4	X	X	X	X	X	7 [20]	**0 [40]**	**40 – 40 = 0**
Потребности	0	0	0	0	0	0	**40 – 40 = 0**	

Полученный план является допустимым, поскольку удовлетворяет исходным ограничениям задачи.

Для данного опорного плана значение целевой функции составит: $3 \cdot 10 + 20 \cdot 20 + 15 \cdot 30 + 22 \cdot 20 + 12 \cdot 20 + 3 \cdot 50 + 6 \cdot 40 + 7 \cdot 20 + 0 \cdot 40 = 2090$ ден. ед.

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$

$u_1 + v_2 = 20$; $0 + v_2 = 20$; $v_2 = 20$

$u_1 + v_3 = 15$; $0 + v_3 = 15$; $v_3 = 15$

$u_1 + v_4 = 22$; $0 + v_4 = 22$; $v_4 = 22$

$u_2 + v_4 = 12$; $22 + u_2 = 12$; $u_2 = -10$

$u_2 + v_5 = 3$; $-10 + v_5 = 3$; $v_5 = 13$

Получаем ситуацию, при которой для оставшихся занятых клеток неизвестно ни одного из потенциалов. Для решения проблемы вырожденности внесем нулевую поставку для того, чтобы клетка считалась условно занятой.

Для потенциала u_3 нулевую поставку можно разместить в следующих клетках:

(3; 1), $v_1 = 3$

(3; 2), $v_2 = 20$

(3; 3), $v_3 = 15$

(3; 4), $v_4 = 22$

(3; 5), $v_5 = 13$

Для потенциала u_4 нулевую поставку можно разместить в следующих клетках:

(4; 1), $v_1 = 3$

(4; 2), $v_2 = 20$

(4; 3), $v_3 = 15$

(4; 4), $v_4 = 22$

(4; 5), $v_5 = 13$

Для потенциала v_6 нулевую поставку можно разместить в следующих клетках:

(1; 6), $u_1 = 0$

(2; 6), $u_2 = -10$

Для потенциала v_7 нулевую поставку можно разместить в следующих клетках:

(1; 7), $u_1 = 0$

(2; 7), $u_2 = -10$

Наименьший тариф среди занятых клеток c_{27} . Таким образом, нулевая поставка размещается в данной клетке, и она считается условно занятой.

$u_2 + v_7 = 0; -10 + v_7 = 0; v_7 = 10.$

Ранее поставленный псевдоноль из ячейки (1; 5) убираем.

$u_4 + v_7 = 0; 10 + u_4 = 0; u_4 = -10$

$u_4 + v_6 = 7; -10 + v_6 = 7; v_6 = 17$

$u_3 + v_6 = 6; 17 + u_3 = 6; u_3 = -11$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 17$	$v_7 = 10$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	4	3	0
$u_2 = -10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0 [0]
$u_3 = -11$	9	11	6	17	6	6 [40]	0
$u_4 = -10$	5	17	8	4	1	7 [20]	0 [40]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 17$	$v_7 = 10$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	4	3	0
$u_2 = -10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0 [0]
$u_3 = -11$	9	11	6	17	6	6[40]	0
$u_4 = -10$	5	17	8	4	1	7 [20]	0 [40]

Оценки данных клеток:
(1; 5): $0 + 13 > 4$; $\Delta_{15} = 0 + 13 - 4 = 9 > 0$
(1; 6): $0 + 17 > 3$; $\Delta_{16} = 0 + 17 - 3 = 14 > 0$
(1; 7): $0 + 10 > 0$; $\Delta_{17} = 0 + 10 - 0 = 10 > 0$
(2; 6): $-10 + 17 > 2$; $\Delta_{26} = -10 + 17 - 2 = 5 > 0$
(4; 4): $-10 + 22 > 4$; $\Delta_{44} = -10 + 22 - 4 = 8 > 0$
(4; 5): $-10 + 13 > 1$; $\Delta_{45} = -10 + 13 - 1 = 2 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 14). В перспективную клетку (1; 6) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20] [–]	4	3 [+]	0	80
A2	6	12	11	12 [20] [+]	3 [50]	2	0 [0] [–]	70
A3	9	11	6	17	6	6[40]	0	40
A4	5	17	8	4	1	7 [20] [–]	0 [40] [+]	60
Потреб-ности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 0), таким образом, опорный план не меняется:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	4	3	0	80
A2	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0 [0]	70
A3	9	11	6	17	6	6[40]	0	40
A4	5	17	8	4	1	7 [20]	0 [40]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$

$u_1 + v_2 = 20; 0 + v_2 = 20; v_2 = 20$

$u_1 + v_3 = 15; 0 + v_3 = 15; v_3 = 15$

$u_1 + v_4 = 22; 0 + v_4 = 22; v_4 = 22$

$u_2 + v_4 = 12; 22 + u_2 = 12; u_2 = –10$

$u_2 + v_5 = 3; –10 + v_5 = 3; v_5 = 13$

$u_1 + v_6 = 3; 0 + v_6 = 3; v_6 = 3$

$u_3 + v_6 = 6; 3 + u_3 = 6; u_3 = 3$

$u_4 + v_6 = 7; 3 + u_4 = 7; u_4 = 4$

$u_4 + v_7 = 0; 4 + v_7 = 0; v_7 = –4$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 3$	$v_7 = –4$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	4	3	0
$u_2 = –10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0 [0]
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6 [40]	0
$u_4 = 4$	5	17	8	4	1	7 [20]	0 [40]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 3$	$v_7 = –4$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20]	4	3	0
$u_2 = –10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0 [0]
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6[40]	0
$u_4 = 4$	5	17	8	4	1	7 [20]	0 [40]

Оценки данных клеток:

(1; 5): $0 + 13 > 4$; $\Delta_{15} = 0 + 13 – 4 = 9 > 0$

(3; 2): $3 + 20 > 11$; $\Delta_{32} = 3 + 20 – 11 = 12 > 0$

(3; 3): $3 + 15 > 6$; $\Delta_{33} = 3 + 15 – 6 = 12 > 0$

(3; 4): $3 + 22 > 17$; $\Delta_{34} = 3 + 22 – 17 = 8 > 0$

(3; 5): $3 + 13 > 6$; $\Delta_{35} = 3 + 13 – 6 = 10 > 0$

(4; 1): $4 + 3 > 5$; $\Delta_{41} = 4 + 3 – 5 = 2 > 0$

(4; 2): $4 + 20 > 17$; $\Delta_{42} = 4 + 20 – 17 = 7 > 0$

(4; 3): $4 + 15 > 8$; $\Delta_{43} = 4 + 15 - 8 = 11 > 0$
(4; 4): $4 + 22 > 4$; $\Delta_{44} = 4 + 22 - 4 = 22 > 0$
(4; 5): $4 + 13 > 1$; $\Delta_{45} = 4 + 13 - 1 = 16 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 22).

В перспективную клетку (4; 4) ставится знак « + », а в остальных вершинах прямоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [20] [–]	4	3 [0] [+]	0	80
A2	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6 [40]	0	40
A4	5	17	8	4 [+]	1	7 [20] [–]	0 [40]	60
Потребно-сти	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 20), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток.

То есть новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22	4	3 [20]	0	80
A2	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6 [40]	0	40
A4	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$

$u_1 + v_2 = 20$; $0 + v_2 = 20$; $v_2 = 20$

$u_1 + v_3 = 15$; $0 + v_3 = 15$; $v_3 = 15$

$u_1 + v_4 = 22$; $0 + v_4 = 22$; $v_4 = 22$

$u_2 + v_4 = 12$; $22 + u_2 = 12$; $u_2 = -10$

$u_2 + v_5 = 3$; $-10 + v_5 = 3$; $v_5 = 13$

$u_4 + v_4 = 4$; $22 + u_4 = 4$; $u_4 = -18$

$u_4 + v_7 = 0$; $-18 + v_7 = 0$; $v_7 = 18$

$u_1 + v_6 = 3$; $0 + v_6 = 3$; $v_6 = 3$

$u_3 + v_6 = 6$; $3 + u_3 = 6$; $u_3 = 3$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 3$	$v_7 = 18$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [0]	4	3 [20]	0
$u_2 = -10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6 [40]	0
$u_4 = 18$	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 22$	$v_5 = 13$	$v_6 = 3$	$v_7 = 18$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [0]	4	3 [20]	0
$u_2 = -10$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6[40]	0
$u_4 = 18$	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]

Оценки данных клеток:

(1; 5): $0 + 13 > 4$; $\Delta_{15} = 0 + 13 - 4 = 9 > 0$

(1; 7): $0 + 18 > 0$; $\Delta_{17} = 0 + 18 - 0 = 18 > 0$

(2; 7): $-10 + 18 > 0$; $\Delta_{27} = -10 + 18 - 0 = 8 > 0$

(3; 2): $3 + 20 > 11$; $\Delta_{32} = 3 + 20 - 11 = 12 > 0$

(3; 3): $3 + 15 > 6$; $\Delta_{33} = 3 + 15 - 6 = 12 > 0$

(3; 4): $3 + 22 > 17$; $\Delta_{34} = 3 + 22 - 17 = 8 > 0$

(3; 5): $3 + 13 > 6$; $\Delta_{35} = 3 + 13 - 6 = 10 > 0$

(3; 7): $3 + 18 > 0$; $\Delta_{37} = 3 + 18 - 0 = 21 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 21).

В перспективную клетку (3; 7) ставится знак « + », а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22 [0] [–]	4	3 [20] [+]	0	80
A2	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[40] [–]	0 [+]	40
A4	5	17	8	4 [20] [+]	1	7	0 [40] [–]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 0).

Таким образом, новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22	4	3 [20]	0	80
A2	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[40]	0 [0]	40
A4	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$

$u_1 + v_2 = 20; 0 + v_2 = 20; v_2 = 20$

$u_1 + v_3 = 15; 0 + v_3 = 15; v_3 = 15$

$u_1 + v_6 = 3; 0 + v_6 = 3; v_6 = 3$

$u_3 + v_6 = 6; 3 + u_3 = 6; u_3 = 3$

$u_3 + v_7 = 0; 3 + v_7 = 0; v_7 = –3$

$u_4 + v_7 = 0; -3 + u_4 = 0; u_4 = 3$

$u_4 + v_4 = 4; 3 + v_4 = 4; v_4 = 1$

$u_2 + v_4 = 12; 1 + u_2 = 12; u_2 = 11$

$u_2 + v_5 = 3; 11 + v_5 = 3; v_5 = –8$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = -8$	$v_6 = 3$	$v_7 = -3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22	4	3 [20]	0
$u_2 = -11$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6 [40]	0 [0]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = -8$	$v_6 = 3$	$v_7 = -3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [20]	15 [30]	22	4	3 [20]	0
$u_2 = -11$	6	12	11	12 [20]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6 [40]	0 [0]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [20]	1	7	0 [40]

Оценки данных клеток:

(2; 1): $11 + 3 > 6$; $\Delta_{21} = 11 + 3 - 6 = 8 > 0$

(2; 2): $11 + 20 > 12$; $\Delta_{22} = 11 + 20 - 12 = 19 > 0$

(2; 3): $11 + 15 > 11$; $\Delta_{23} = 11 + 15 - 11 = 15 > 0$

(2; 6): $11 + 3 > 2$; $\Delta_{26} = 11 + 3 - 2 = 12 > 0$

(2; 7): $11 - 3 > 0$; $\Delta_{27} = 11 - 3 - 0 = 8 > 0$

(3; 2): $3 + 20 > 11$; $\Delta_{32} = 3 + 20 - 11 = 12 > 0$

(3; 3): $3 + 15 > 6$; $\Delta_{33} = 3 + 15 - 6 = 12 > 0$

(4; 1): $3 + 3 > 5$; $\Delta_{41} = 3 + 3 - 5 = 1 > 0$

(4;2): $3 + 20 > 17$; $\Delta_{42} = 3 + 20 - 17 = 6 > 0$

(4; 3): $3 + 15 > 8$; $\Delta_{43} = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 19). В перспективную клетку (2; 2) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [20] [–]	15 [30]	22	4	3 [20] [+]	0	80
A2	6	12 [+]	11	12 [20] [–]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[40] [–]	0 [0] [+]	40
A4	5	17	8	4 [20] [+]	1	7	0 [40] [–]	60
Потреб-ности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 20), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[20]	0 [20]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$

$u_1 + v_2 = 20; 0 + v_2 = 20; v_2 = 20$

$u_2 + v_2 = 12; 20 + u_2 = 12; u_2 = –8$

$u_2 + v_5 = 3; –8 + v_5 = 3; v_5 = 11$

$u_1 + v_3 = 15; 0 + v_3 = 15; v_3 = 15$

$u_1 + v_6 = 3; 0 + v_6 = 3; v_6 = 3$

$u_3 + v_6 = 6; 3 + u_3 = 6; u_3 = 3$

$u_3 + v_7 = 0; 3 + v_7 = 0; v_7 = –3$

$u_4 + v_7 = 0; –3 + u_4 = 0; u_4 = 3$

$u_4 + v_4 = 4; 3 + v_4 = 4; v_4 = 1$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = –11$	$v_6 = 3$	$v_7 = –3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0
$u_2 = –8$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6 [20]	0 [20]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = –11$	$v_6 = 3$	$v_7 = –3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0
$u_2= –8$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6[20]	0 [20]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Оценки данных клеток:
(1; 5): $0 + 11 > 4$; $\Delta_{15} = 0 + 11 - 4 = 7 > 0$
(3; 2): $3 + 20 > 11$; $\Delta_{32} = 3 + 20 - 11 = 12 > 0$
(3; 3): $3 + 15 > 6$; $\Delta_{33} = 3 + 15 - 6 = 12 > 0$
(3; 5): $3 + 11 > 6$; $\Delta_{35} = 3 + 11 - 6 = 8 > 0$
(4; 1): $3 + 3 > 5$; $\Delta_{41} = 3 + 3 - 5 = 1 > 0$
(4; 2): $3 + 20 > 17$; $\Delta_{42} = 3 + 20 - 17 = 6 > 0$
(4; 3): $3 + 15 > 8$; $\Delta_{43} = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$
(4; 5): $3 + 11 > 1$; $\Delta_{45} = 3 + 11 - 1 = 13 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 13). В перспективную клетку (4; 5) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0] [–]	15 [30]	22	4	3 [40] [+]	0	80
A2	6	12 [20] [+]	11	12 [0]	3 [50] [–]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[20] [–]	0 [20] [+]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1 [+]	7	0 [20] [–]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 0), т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6	17	6	6[20]	0 [20]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:
$u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$
$u_1 + v_3 = 15$; $0 + v_3 = 15$; $v_3 = 15$
$u_1 + v_6 = 3$; $0 + v_6 = 3$; $v_6 = 3$
$u_3 + v_6 = 6$; $3 + u_3 = 6$; $u_3 = 3$
$u_3 + v_7 = 0$; $3 + v_7 = 0$; $v_7 = –3$
$u_4 + v_7 = 0$; $–3 + u_4 = 0$; $u_4 = 3$
$u_4 + v_4 = 4$; $3 + v_4 = 4$; $v_4 = 1$
$u_4 + v_5 = 1$; $3 + v_5 = 1$; $v_5 = –2$
$u_2 + v_5 = 3$; $–2 + u_2 = 3$; $u_2 = 5$
$u_2 + v_2 = 12$; $5 + v_2 = 12$; $v_2 = 7$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 7$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = –2$	$v_6 = 3$	$v_7 = –3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0
$u_2 = 5$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6[20]	0 [20]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 7$	$v_3 = 15$	$v_4 = 1$	$v_5 = –2$	$v_6 = 3$	$v_7 = –3$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [30]	22	4	3 [40]	0
$u_2 = 5$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 3$	9	11	6	17	6	6[20]	0 [20]
$u_4 = 3$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Оценки данных клеток:
(2; 1): $5 + 3 > 6$; $\Delta_{21} = 5 + 3 – 6 = 2 > 0$
(2; 3): $5 + 15 > 11$; $\Delta_{23} = 5 + 15 – 11 = 9 > 0$
(2; 6): $5 + 3 > 2$; $\Delta_{26} = 5 + 3 – 2 = 6 > 0$
(2; 7): $5 – 3 > 0$; $\Delta_{27} = 5 –3 – 0 = 2 > 0$
(3; 3): $3 + 15 > 6$; $\Delta_{33} = 3 + 15 - 6 = 12 > 0$
(4; 1): $3 + 3 > 5$; $\Delta_{41} = 3 + 3 – 5 = 1 > 0$
(4; 3): $3 + 15 > 8$; $\Delta_{43} = 3 + 15 – 8 = 10 > 0$
Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 12).

В перспективную клетку (3; 3) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15 [30] [–]	22	4	3 [40] [+]	0	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6 [+]	17	6	6[20] [–]	0 [20]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 20), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15 [10]	22	4	3 [60]	0	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6 [20]	17	6	6	0 [20]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$

$u_1 + v_3 = 15; 0 + v_3 = 15; v_3 = 15$

$u_3 + v_3 = 6; 15 + u_3 = 6; u_3 = –9$

$u_3 + v_7 = 0; –9 + v_7 = 0; v_7 = 9$

$u_4 + v_7 = 0; 9 + u_4 = 0; u_4 = –9$

$u_4 + v_4 = 4; –9 + v_4 = 4; v_4 = 13$

$u_4 + v_5 = 1; –9 + v_5 = 1; v_5 = 10$

$u_2 + v_5 = 3; 10 + u_2 = 3; u_2 = –7$

$u_2 + v_2 = 12; –7 + v_2 = 12; v_2 = 19$

$u_1 + v_6 = 3; 0 + v_6 = 3; v_6 = 3$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 19$	$v_3 = 15$	$v_4 = 13$	$v_5 = 10$	$v_6 = 3$	$v_7 = 9$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [10]	22	4	3 [60]	0
$u_2 = –7$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = –9$	9	11	6 [20]	17	6	6	0 [20]
$u_4 = –9$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 19$	$v_3 = 15$	$v_4 = 13$	$v_5 = 10$	$v_6 = 3$	$v_7 = 9$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15 [10]	22	4	3 [60]	0
$u_2 = –7$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = –9$	9	11	6 [20]	17	6	6	0 [20]
$u_4 = –9$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Оценки данных клеток:

(1; 5): $0 + 10 > 4$; $\Delta_{15} = 0 + 10 – 4 = 6 > 0$

(1; 7): $0 + 9 > 0$; $\Delta_{17} = 0 + 9 – 0 = 9 > 0$

(2; 7): $–7 + 9 > 0$; $\Delta_{27} = –7 + 9 – 0 = 2 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 9). В перспективную клетку (1; 7) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15 [10] [–]	22	4	3 [60]	0 [+]	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6 [20] [+]	17	6	6	0 [20] [–]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 10), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [60]	0 [10]	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0	70
A3	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$

$u_1 + v_6 = 3; 0 + v_6 = 3; v_6 = 3$

$u_1 + v_7 = 0; 0 + v_7 = 0; v_7 = 0$

$u_3 + v_7 = 0; 0 + u_3 = 0; u_3 = 0$

$u_3 + v_3 = 6; 0 + v_3 = 6; v_3 = 6$

$u_4 + v_7 = 0; 0 + u_4 = 0; u_4 = 0$

$u_4 + v_4 = 4; 0 + v_4 = 4; v_4 = 4$

$u_4 + v_5 = 1; 0 + v_5 = 1; v_5 = 1$

$u_2 + v_5 = 3; 1 + u_2 = 3; u_2 = 2$

$u_2 + v_2 = 12; 2 + v_2 = 12; v_2 = 10$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 10$	$v_3 = 6$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$v_6 = 3$	$v_7 = 0$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [60]	0 [10]
$u_2 = 2$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 0$	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]
$u_4 = 0$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Найденный план неоптимален, поскольку имеют место такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 10$	$v_3 = 6$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$v_6 = 3$	$v_7 = 0$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [60]	0 [10]
$u_2 = 2$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50]	2	0
$u_3 = 0$	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]
$u_4 = 0$	5	17	8	4 [40]	1	7	0 [20]

Оценки данных клеток:

(2;6): $2 + 3 > 2$; $\Delta_{26} = 2 + 3 - 2 = 3 > 0$

(2;7): $2 + 0 > 0$; $\Delta_{27} = 2 + 0 - 0 = 2 > 0$

Выбираем максимальную оценку среди найденных (т. е. 3). В перспективную клетку (2;6) ставится знак «+», а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [60] [–]	0 [10] [+]	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [50] [–]	2 [+]	0	70
A3	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1 [+]	7	0 [20] [–]	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее число (т. е. 20), а затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [30]	80
A2	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [30]	2 [20]	0	70
A3	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$

$u_1 + v_6 = 3$; $0 + v_6 = 3$; $v_6 = 3$

$u_2 + v_6 = 2$; $3 + u_2 = 2$; $u_2 = -1$

$u_2 + v_2 = 12$; $-1 + v_2 = 12$; $v_2 = 13$

$u_2 + v_5 = 3$; $-1 + v_5 = 3$; $v_5 = 4$

$u_4 + v_5 = 1$; $4 + u_4 = 1$; $u_4 = -3$

$u_4 + v_4 = 4; –3 + v_4 = 4; v_4 = 7$
$u_1 + v_7 = 0; 0 + v_7 = 0; v_7 = 0$
$u_3 + v_7 = 0; 0 + u_3 = 0; u_3 = 0$
$u_3 + v_3 = 6; 0 + v_3 = 6; v_3 = 6$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 13$	$v_3 = 6$	$v_4 = 7$	$v_5 = 4$	$v_6 = 3$	$v_7 = 0$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [30]
$u_2 = –1$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [30]	2 [20]	0
$u_3 = 0$	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]
$u_4 = –3$	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0

Найденный план неоптимален, поскольку имеет место такая оценка свободных клеток, для которой $u_i + v_j > c_{ij}$.

	$v_1 = 3$	$v_2 = 13$	$v_3 = 6$	$v_4 = 7$	$v_5 = 4$	$v_6 = 3$	$v_7 = 0$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [30]
$u_2 = –1$	6	12 [20]	11	12 [0]	3 [30]	2 [20]	0
$u_3 = 0$	9	11	6 [30]	17	6	6	0 [10]
$u_4 = –3$	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0

Оценка данной клетки:

(3; 2): $0 + 13 > 11$; $\Delta_{32} = 0 + 13 – 11 = 2 > 0$.

В перспективную клетку (3; 2) ставится знак « + », а в остальных вершинах многоугольника – чередующиеся знаки « – », « + », « – ».

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [30] [+]	80
A2	6	12 [20] [–]	11	12 [0]	3 [30]	2 [20] [+]	0	70
A3	9	11 [+]	6 [30]	17	6	6	0 [10] [–]	40
A4	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбирается наименьшее (т. е. 10), затем данное число прибавляется к значениям в плюсовых клетках и вычитается из минусовых клеток, т. е. новый опорный план примет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	Запасы
A1	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [40]	80
A2	6	12 [10]	11	12 [0]	3 [30]	2 [30]	0	70
A3	9	11 [10]	6 [30]	17	6	6	0	40
A4	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0	60
Потребности	10	20	30	40	50	60	40	

Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов, предполагая, что $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$.

В таком случае:

$u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$

$u_1 + v_6 = 3$; $0 + v_6 = 3$; $v_6 = 3$

$u_2 + v_6 = 2$; $3 + u_2 = 2$; $u_2 = -1$

$u_2 + v_2 = 12$; $-1 + v_2 = 12$; $v_2 = 13$

$u_3 + v_2 = 11$; $13 + u_3 = 11$; $u_3 = -2$

$u_3 + v_3 = 6$; $-2 + v_3 = 6$; $v_3 = 8$

$u_2 + v_5 = 3$; $-1 + v_5 = 3$; $v_5 = 4$

$u_4 + v_5 = 1$; $4 + u_4 = 1$; $u_4 = -3$

$u_4 + v_4 = 4$; $-3 + v_4 = 4$; $v_4 = 7$

$u_1 + v_7 = 0$; $0 + v_7 = 0$; $v_7 = 0$

То есть:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 13$	$v_3 = 8$	$v_4 = 7$	$v_5 = 4$	$v_6 = 3$	$v_7 = 0$
$u_1 = 0$	3 [10]	20 [0]	15	22	4	3 [40]	0 [40]
$u_2 = -1$	6	12 [10]	11	12 [0]	3 [30]	2 [30]	0
$u_3 = -2$	9	11 [10]	6 [30]	17	6	6	0
$u_4 = -3$	5	17	8	4 [40]	1 [20]	7	0

Найденный план оптимален, поскольку отсутствуют такие оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$.

Таким образом, минимальные затраты на перевозку товаров со складов в магазины составят:

$3 \cdot 10 + 3 \cdot 30 + 0 \cdot 40 + 12 \cdot 10 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 30 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 40 +$
$+$ **$1 \cdot 20 = 860$ ден. ед.**

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

2.1. Основные определения теории игр

Предметом теории игр является математический анализ конфликтных ситуаций, формализованное описание которых представлено в виде математической модели, определяющей некоторую игру [15].

Под конфликтной ситуацией в теории игр понимается такое состояние, при котором сталкиваются интересы двух (и более) противодействующих сторон, преследующих различные цели. Следует отметить, что несовпадение в целях может быть как полным, так и частичным.

Конфликтующие стороны стремятся предпринять такие действия, которые бы позволили им достичь наибольшего для себя успеха в данных условиях. Если цели сторон противоположны, выигрыш одной стороны предполагает проигрыш другой. Логично, что конфликтующие стороны стремятся найти наиболее приемлемые для себя решения (причем эта приемлемость должна быть для каждой из сторон). Если каждая из сторон (в результате собственной оценки текущей ситуации) примет какое-то определенное решение, то последующая реализация принятых решений приведет к конкретному результату – распределению выигрышей сторон.

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтных ситуаций (игр) и их формальным решением. Грамотное применение элементов теории игр позволяет смоделировать процесс игры и ее возможные результаты до ее фактического начала. Таким образом, появляется возможность получения математического прогноза в конфликте (с учетом степени адекватности используемой модели конфликта) [16].

Теория игр представляет собой науку об использовании математических моделей в рамках принятия решений в условиях неопределенности, когда субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений (стратегий), которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию.

В теории игр решаются задачи определения принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказывается существование решений, которые бы соответствовали данным принципам, а также рассматриваются алгоритмы нахождения решений и способы их реализации.

Неопределенность в теории игр может иметь различное содержание и происхождение (рис. 2.1).

Неопределенность как следствие сознательной деятельности другого лица, отстаивающего свои интересы	• На принимаемые игроками решения может оказывать существенное влияние доступная им информация о намерениях других игроков (какие они выберут стратегии, одновременно или в какой-то последовательности делают ходы), их возможностях (могут ли они договариваться, действовать сообща против других игроков)
Неопределенность вследствие появления случайности в игровой ситуации	• Предполагает сознательные действия игроков (субъектов игровой ситуации), осуществляющих выбор своих стратегий на основе рандомизации множества допустимых альтернатив (частотного или вероятностного распределения исходных или чистых стратегий). Моделирование механизма такого выбора (симуляция случайного процесса) выполняется в форме физического эксперимента (например, бросание монеты, игрального кубика, использование рулетки и др.) или компьютерным способом (на основе получения псевдослучайных чисел
Случайность в игровой ситуации как следствие действия так называемой «природы», характеризуемой обстоятельствами, не зависящими от субъектов игровой ситуации	• К таким обстоятельствам можно отнести условия внешней среды, в которых принимаются решения: состояние погоды, рыночная конъюнктура, выход из строя техники и др.

Рис. 2.1. Типы неопределенности в теории игр

С помощью моделей в теории игр могут описываться экономические и правовые конфликты, взаимодействие человека с природой и т. д.

В экономической деятельности конфликтные ситуации встречаются часто и имеют многообразный характер (взаимоотношения между поставщиками и потребителями, покупателями и продавцами, конкурентами и т. д.). Конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать решения, которые в наибольшей степепни позволяют добиться реализации поставленных целей. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти игроки будут принимать [16, 17].

Первые математические аспекты и приложения теории игр были изложены в классической книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 году. Нейман и Моргенштерн занимались играми с нулевой суммой, в которых выигрыш одной стороны равен проигрышу другой.

Важным в теории игр является феномен равновесной ситуации. Ее математическое определение было предложено американским математиком и экономистом Джоном Нэшем в 1951 году. Равновесная ситуация предполагает такое положение дел, при котором обе стороны используют соответствующие (оптимальные) стратегии, приводящие к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое отклонение от такой равновесной стратегии одной из сторон приведет к ухудшению ее положения.

Формализация игровых ситуаций и поиск методов выбора приемлемых стратегий приводит к выделению отдельных типов игр, группировке их в классы, определению общих средств исследования.

В современной теории игр существует множество классов игр с внутренним делением на подклассы (отдельные группы), для которых получены теоретические основы, определяющие существование оптимальных стратегий, разработаны алгоритмы поиска этих стратегий [18].

На рис. 2.2 представлены основные признаки классификации игр в зависимости от рассматриваемого признака.

По количеству игроков	• Парные игры (2 игрока) • Игры *n* игроков
По количеству используемых стратегий	• Игры с конечным числом стратегий • Игры с бесконечным числом стратегий
По степени информированности игроков	• Игры с полной информацией • Игры с неполной информацией
По свойствам вида функции выигрыша	• Матричные игры • Биматричные игры • Непрерывные игры • Выпуклые игры и др.
По характеру выигрыша	• Игры с нулевой суммой • Игры с ненулевой суммой
По возможности предварительных переговоров в рамках игры	• Коалиционные игры • Кооперативные игры • Бескоалиционные игры

Рис. 2.2. Критерии классификации игр

Таким образом, элементы теории игр активно применяются в процессе экономико-математического моделирования. Понимание сущности процессов и особенностей действий игроков в определенных условиях позволяет решить широкий круг экономических задач с применением возможностей моделирования и прогнозирования.

2.2. Матричные игры

Наиболее простым, но в то же время распространенным типом игр, использующимся в экономической практике, являются парные игры, предполагающие действия двух игроков [19].

Развитие игры во времени представляется состоящим из ряда последовательных ходов. Под ходом в теории игр принято понимать выбор и осуществление игроком одного из действий, заранее оговоренных правилами.

Ходы бывают личные и случайные. Личным ходом называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. Случайным ходом называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой, которая в теории игр условно называется «природа».

Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов. Задача теории игр – рекомендовать игрокам определенные «стратегии» при выборе их личных ходов.

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон прямо противоположны, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая – в его уменьшении.

Рассмотрим пример игры двух игроков А и В, каждый из которых имеет ограниченное число стратегий. Предположим, что А может осуществить m стратегий (A_1, A_2, A_3,…,A_m), а игрок В – n стратегий (B_1, B_2, B_3,…,B_n). Для каждой пары стратегий (A_i; B_j) отмечается число a_{ij}, которое описывает выигрыш игрока А (в том случае, если $a_{ij} > 0$), либо выигрыш игрока В ($a_{ij} < 0$). Условная ничья при реализации хода предполагает $a_{ij} = 0$ [20].

Данная игра может быть описана матрицей с m строк и n столбцов и может быть названа платежной матрицей, или матрицей игры (2.1):

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \quad (2.1)$$

Реализация такой стратегии описывает игру с нулевой суммой, поскольку игрок А выигрывает ровно столько, сколько проигрывает игрок В. Ценой игры для данного типа задач является выигрыш игрока А (проигрыш игрока В).

Наиболее простым случаем игры считается игра, при которой у каждого из игроков имеются две стратегии, т. е. платежная матрица примет вид (2.2)

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}. \quad (2.2)$$

Если предположить, что у платежной матрицы нет седловой точки, можно сделать вывод о том, что решение такой игры должно реализовываться в смешанных стратегиях. Тогда решение данной задачи сводится к поиску пары оптимальных смешанных стратегий $x^{*T} = (x_1^*; x_2^*)$, $y^{*T} = (y_1^*; y_2^*)$ и цены игры ν^* [21].

Согласно теореме об активных стратегиях, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, независимо от образа действий противника, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В игре 2×2 обе стратегии противника являются активными (в противном случае игра имела бы седловую точку). Значит, если первый игрок придерживается своей оптимальной стратегии, его противник может, не меняя выигрыша, применять любую из своих чистых стратегий.

Цена игры представляет собой математическое ожидание выигрыша при оптимальных стратегиях. Предположим, что игрок В применяет свою стратегию B_1, а игрок А реализует смешанную стратегию $x^{*T} = (x_1^*; x_2^*)$. С вероятностью x_1^* выигрыш первого игрока составит a_{11}, с вероятностью x_2^* – величина выигрыша a_{21} [22]. В таком случае цена игры представляет собой соответствующий решению средний выигрыш.

Она может быть вычислена по формуле (2.3)

$$a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu^*. \tag{2.3}$$

Аналогично составляется уравнение для стратегии B_2. Следовательно, получается система уравнений (2.4)

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu^*, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \nu^*, \end{cases} \tag{2.4}$$

из которой с учетом условия нормировки $x_1^* + x_2^* = 1$ получаются формулы для расчета оптимальной стратегии первого игрока и цены игры (2.5):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ x_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Аналогичным образом определяются формулы для расчета оптимальной стратегии второго игрока и цены игры (2.6)

$$\begin{cases} y_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ y_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии могут быть найдены из соответствующих систем линейных уравнений.

2.3. Основы принятия решений в условиях неопределенности

Теория статистических решений (ТСР) отличается от теории игр тем, что рассматривает неопределенность ситуации без конфликтной сиутации. При решении данного типа задач не предполагается сознательное противодействие сторон.

В задачах ТСР неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего противника, а от объективной незаинтересованной действительности, которую в ТСР принято называть природой, поведение которой неизвестно, но во всяком случае незлонамеренно.

Например, могут быть заранее неизвестны погода в некотором районе, покупательский спрос на определенный вид продукции, объем перевозок, который придется выполнять по железной дороге, экономическая и финансовая политика государства, реформы в системе налогообложения, курс валют, инфляция и т. д.

Действия игрока в таких ситуациях представляют собой игру с природой. Отсутствие сознательного противодействия со стороны природы на первый взгляд упрощает задачу выбора решения: лицу, принимающему решения (ЛПР), в игре с природой легче добиться успеха, ведь ему никто не мешает. Но ему труднее обосновать свой выбор [23].

Частичное устранение элемента неопределенности в игре против сознательного противника происходит за счет того, что противник такой же, как ЛПР, он думает за противника теми же категориями, принимает за него решение на основе одинаковой логики и правил.

В игре с природой такая концепция не подходит: никто не знает, какое сопротивление будет оказано принятому решению и каковы окончательные правила игры. Игры с природой являются вырожденным случаем антагонистической игры двух лиц, когда одна сторона (ЛПР) имеет возможность строить осмысленные стратегии поведения, а вторая сторона (природа) лишена такой возможности.

Предположим, что у стороны А есть *m* возможных стратегий A_1, A_2, …, A_m. О внешней среде можно сделать *n* предположений $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. Данные предположения являются стратегиями природы. Выигрыш a_{ij} при каждой паре стратегий A_i $П_j$ задан матрицей (2.7).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} П_1 & П_2 & \dots & П_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad (2.7)$$

Требуется выбрать чистую или смешанную стратегию игрока А, которая будет более предпочтительной (выгодной) по сравнению с иными.

Наиболее простым случаем выбора решений в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока A оказывается доминирующей над всеми остальными. В таком случае рекомендуется выбрать ее [24].

Если же такая стратегия отсутствует, нужно перед поиском решения удалить заведомо невыгодные или дублирующие стратегии игрока A. Относительно стратегий природы заведомо невыгодные комбинации удалить нельзя, поскольку выбор стратегий природой не осуществляется.

Игроку A следует определять стратегию поведения исходя их принципа крайнего оптимизма или крайнего пессимизма. В первом случае из его стратегий выбирается та, которая соответствует наибольшему выигрышу, во втором – наименьшему выигрышу.

Очевидно, что такое поведение нерационально. В ТСР желательно ввести такие показатели, которые не просто давали бы выигрыш в каждой ситуации, а описывали бы степень адекватности применения конкретной стратегии в конкретной ситуации с учетом того, насколько данная ситуация благоприятна.

2.4. Критерии принятия решений в играх с природой

Для выбора стратегии, которая бы являлась оптимальной в конкретной ситуации, применяется ряд критериев.

При максиминном критерии Вальда оптимальной считается та стратегия, которая бы обеспечивала максимальную величину минимального выигрыша (2.8):

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}, \tag{2.8}$$

Данный критерий отражает принцип гарантированного результата, т. е. лицо, принимающее решение, выбирает такую стратегию, которая максимизировала бы его выигрыш в самой неблагоприятной ситуации. Применение критерия Вальда обусловлено необходимостью обеспечения успеха при всех рассматриваемых условиях [25].

Критерий минимаксного риска Сэвиджа подразумевает оптимальной такую стратегию, при которой величина риска в наихудшем случае минимальна. Данный критерий также носит название критерия минимального риска. Если ЛПР принимает решение по критерию

Сэвиджа, величина риска при принятии решения предполагается наименьшей в самой неблагоприятной ситуации (2.9)

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} r_{ij}. \tag{2.9}$$

Как и критерий Вальда, критерий Сэвиджа относится к критериям крайнего пессимизма [26].

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица предполагает отсутствие крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при принятии решений об оптимальности [16]. Критерий Гурвица рассчитывается по формуле (2.10)

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left[\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right], \tag{2.10}$$

где $\alpha \in [0; 1]$ – степень пессимизма.

Если степень пессимизма принимает нулевое значение, имеет место максимаксный критерий крайнего оптимизма. При $\alpha = 1$ имеет место пессимистический максиминный критерий Вальда. Выбор конкретного значения параметра определяется субъективными факторами: чем опаснее ситуация, тем ближе к единице будет стремиться значение α. При отсутствии каких-либо явных предпочтений вполне логично выбрать $\alpha = 0{,}5$ [27].

При неизвестных вероятностях состояний природы можно принять, что все они равновероятны. В таком случае можно воспользоваться критерием Лапласа, при котором ЛПР выбирает стратегию A_i (2.11)

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right). \tag{2.11}$$

Таким образом, определение критерия принятия решения является сложным и ответственным этапом. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают, выбор решения из альтернатив является очевидным. Если имеет место противоречие выводов об оптимальности на основе анализа результатов расчетов различных критериев, следует руководствоваться достоинствами и недостатками каждого из решений.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом теории игр?
2. Что принято понимать под конфликтной ситуацией?
3. Каково практическое значение применения теории игр?
4. Что представляет собой теория игр как наука?
5. Какова роль неопределенности при решении задачи с использованием элементов теории игр?
6. В чем состоит сущность неопределенности вследствие проявления случайности в игровой ситуации?
7. Приведите примеры конфликтных ситуаций в экономической деятельности.
8. Кто является основоположником теории игр?
9. В чем состоит сущность равновесной ситуации?
10. Какие виды игр можно выделить по количеству используемых стратегий?
11. Какие виды игр можно выделить по степени инфомированности участников?
12. Что представляют собой игры с нулевой суммой?
13. Что принято понимать под ходом игры?
14. Опишите особенности построения платежной матрицы.
15. В чем принципиальное отличие теории статистических решений от теории игр?
16. Назовите основные особенности игр с природой.
17. Перечислите основные критериии принятия решений в играх с природой.

Примеры решения задач

Задача 2.1

Ниже приведена платежная матрица для двух игроков

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

4	5	5	9
3	4	4	6
7	8	7	10
9	6	4	5

Решить задачу с использованием метода минимакса.

Решение

На первом этапе необходимо проверить наличие седловой точки.

Предположим, что выбор стратегии одним игроком осуществляется исходя из ожидания максимизации своего выигрыша, а второй игрок выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш первого игрока.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a = \min (A_i)$
A_1	4	5	5	9	4
A_2	3	4	4	6	3
A_3	7	8	7	10	7
A_4	9	6	4	5	5
$b = \max (B_j)$	9	8	7	10	

В таком случае гарантированная величина выигрыша определяется нижней ценой игры и составляет 7 (максимальное значение среди чисел 4, 3, 7, 5). Нижняя цена игры показывает на максимальную чистую стратегию A_3.

Верхняя цена игры составляет 7 (минимальное значение среди чисел 9, 8, 7 и 10). Таким образом, седловая точка существует, оптимальными являются стратегии A_3 и B_3, цена игры при этом составляет 7.

Задача 2.2

Ниже приведены данные в виде таблицы эффективностей.

Игроки	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	11	9	4	5
A_2	8	7	4	10
A_3	9	6	8	9
A_4	7	10	6	12

Используя критерий Лапласа, определите наиболее предпочтительную стратегию игрока А.

Решение

Поскольку вероятности состояний природы неизвестны, принимается предположение об их равновероятности.

Таким образом,

$K(A_1) = 0,25\,(11 + 9 + 4 + 5) = 7,25$

$K(A_2) = 0,25\,(8 + 7 + 4 + 10) = 7,25$

$K(A_3) = 0,25\,(9 + 6 + 8 + 9) = 8$

$K(A_4) = 0,25\,(7 + 10 + 6 + 12) = 8,\ 75$

Следовательно, лучшая стратегия по данному критерию A_4.

Глава 3. ОБЩИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Модель межотраслевого баланса Леонтьева

Для того чтобы обеспечить эффективное функционирование многоотраслевого хозяйства, требуется достижение баланса между производством в различных видах экономической деятельности. Каждая отрасль производит продукт для других отраслей и одновременно с этим является потребителем их продукции.

Впервые задача взаимосвязи производства и потребления была сформулирована в 1936 году американским экономистом российского происхождения В. Леонтьевым. Модель межотраслевого баланса основывается на алгебре матриц и предполагает применение инструментов матричного анализа [28].

Предполагается, что производственная сфера состоит из n отраслей, каждая из которых производит собственный продукт. Также имеет место производственное потребление – процесс, обусловленный необходимостью применения в производстве продукции других отраслей.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности предусматривает, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид (3.1)

$$x_j = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \tag{3.1}$$

где x_i – валовый объем продукции (объем продукции, производимый i-й отраслью);

x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, который потребляется j-й отраслью при производстве x_j;

y_i – объем конечного потребления, характеризующий величину реализации в непроизводственной сфере. Включает в себя личное потребление граждан, содержание государственных институтов и т. д.

Поскольку продукция различных отраслей предполагает применение различных мер ее учета, для обеспечения сопоставимости в рамках построения модели межотраслевого баланса рассматривается стоимостной баланс [29].

Основной вывод, полученный В. Леонтьевым в ходе анализа экономики США периода экономической депрессии, состоит в следующем: в течение длительного времени изменение величин $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ происходит крайне медленно, поэтому в рамках расчетов они могут рассматриваться как условно постоянные коэффициенты. Технологии производства меняются относительно медленно, поэтому отношение объема продукции i отрасли, который потребляется j отраслью при производстве x_j, к величине производства x_j представляет собой технологическую константу [30].

С учетом вышесказанного можно сделать следующие допущения: для производства продукции *i*-й отрасли объемом x_i нужно использовать продукцию *j*-й отрасли объемом $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянная величина.

При таком допущении технология производства принимается линейной, а само это допущение называется гипотезой линейности. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат.

В таком случае балансовое соотношение может быть задано системой (3.2)

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

При этом вектор-столбец объемов произведенной продукции может быть определен как (3.3)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Вектор конечного потребления (3.4)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Матрица коэффициентов прямых затрат (3.5)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Таким образом, в матричном виде система уравнений примет вид (3.6)

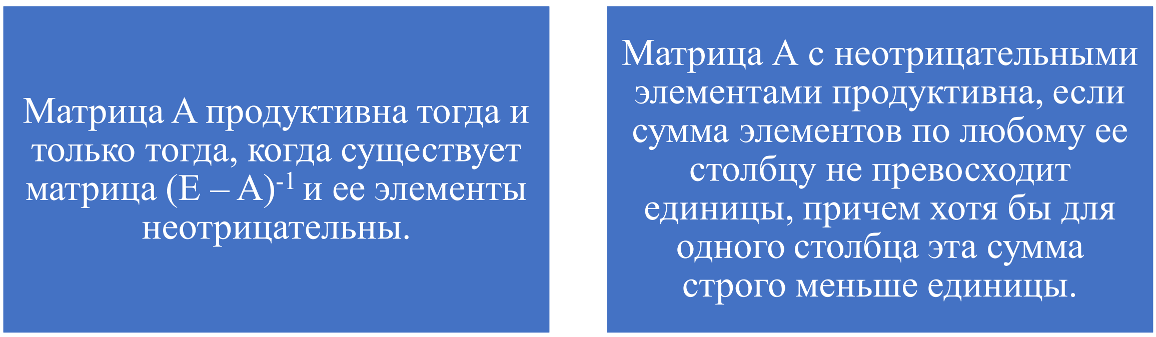
$$X = AX + Y. \qquad (3.6)$$

Данное соотношение является уравнением линейного межотраслевого баланса (моделью Леонтьева). Как правило, оно применяется для решения двух основных задач: нахождения X при заданном векторе конечного выпуска и в целях планирования, когда для некоторого периода времени известен Y и требуется определить X.

С учетом прикладного характера матрицы A важно, чтобы ее элементы были неотрицательны.

Матрица A будет продуктивной в том случае, если для любого вектора Y с неотрицательными компонентами существует решение уравнения X = AX + Y, все элементы которого неотрицательны. В таком случае и сама модель Леонтьева является продуктивной [31].

Основные критерии продуктивности матрицы A приведены на рисунке.



Критерии продуктивности матрицы технологических коэффициентов

Вектор валового выпуска может быть найден по формуле (3.7)

$$X = (E - A)^{-1}Y. \qquad (3.7)$$

Матрица (E – A) – 1 носит название матрицы полных затрат.

Таким образом, каждый элемент матрицы полных затрат есть величина валового выпуска продукции *i*-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-й отрасли.

3.2. Линейная модель международной торговли

Пусть рассматривается n стран $S_1, S_2, \dots, S_n$, национальный доход которых, выраженный в одной и той же валюте, равен $x_1, x_2, \dots, x_n$ денежных единиц соответственно. Предполагается, что весь национальный доход каждой из стран расходуется на закупки товаров как внутри страны, так и у других стран [32].

Известна структурная матрица международной торговли, каждый элемент которой равен доле национального дохода, которую страна S_j расходует на закупку товаров у страны S_i (3.8)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

При этом считается, что для каждой страны выполнено условие бездефицитной торговли, заключающееся в том, что выручка от внешней и внутренней торговли оказывается не меньшей, чем национальный доход страны. Также определен суммарный национальный доход D всех n стран. Решение линейной модели международной торговли сводится к тому, чтобы найти вектор национальных доходов всех стран (3.9)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Линейная модель международной торговли может активно применяться в различных экономико-математических вычислениях. В частности, с ее помощью становится возможным расчет соотношения национальных доходов стран для сбалансированной торговли. Однако следует помнить о том, что существует ряд ограничений для ее реализации на практике: например, в условиях рыночной экономики трудно достичь всех необходимых допущений для решения данной задачи.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность модели межотраслевого баланса Леонтьева?
2. На чем основывается модель межотраслевого баланса?
3. Опишите сущность балансового принципа связи различных отраслей промышленности.
4. Что описывает в модели Леонтьева вектор конечного потребления?
5. Из каких компонентов складывается вектор валового выпуска?
6. Каким образом осуществляется нахождение элементов матрицы прямых технологических коэффициентов?
7. Перечислите основные критерии продуктивности матрицы прямых технологических коэффициентов.
8. Что представляет собой матрица полных затрат?
9. Какие основные типы задач можно решить с применением модели межотраслевого баланса Леонтьева?
10. В чем состоит суть линейной модели международной торговли?
11. Что представляет собой структурная матрица международной торговли?
12. В чем сущность условия бездефицитности при построении линейной модели международной торговли?
13. Каковы основные ограничения применения линейной модели международной торговли на практике?

Примеры решения задач

Задача

Ниже приведены данные баланса трех отраслей промышленности за 2024 год:

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3		
1	Станкостроение	6	34	18	40	98
2	Машиностроение	10	11	21	58	100
3	Энергетика	19	10	10	10	49

Необходимо найти объем валового выпуска каждого вида продукции в случае, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 62, 71 и 34 условных денежных единиц.

Решение

Для данной задачи вектор валового выпуска составит

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 98 \\ 100 \\ 49 \end{pmatrix}$$

Вектор конечного потребления

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 58 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание условное постоянство коэффициентов прямых затрат, найдем матрицу А:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{98} & \frac{34}{100} & \frac{18}{49} \\ \frac{10}{98} & \frac{11}{100} & \frac{21}{49} \\ \frac{19}{98} & \frac{10}{100} & \frac{10}{49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}061 & 0{,}34 & 0.367 \\ 0{,}102 & 0{,}11 & 0{,}429 \\ 0{,}194 & 0{,}1 & 0{,}204 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем матрицу прямых технологических коэффициентов. Поскольку все ее элемены неотрицательны и сумма элементов в любой строке/столбце не превышает единицу, причем есть хотя бы одна строка/столбец, сумма элементов которой строго меньше 1, можно сделать вывод о том, что полученная матрица является продуктивной.

По условиям задачи новый вектор конечного потребления имеет вид

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 62 \\ 71 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Тогда задача сводится к необходимости нахождения нового вектора валового выпуска при допущении, что матрица прямых технологических коэффициентов неизменна.

Вектор валового выпуска может быть найден по формуле:

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\,\overline{y}\,.$$

Для нахождения обратной матрицы на первом этапе необходимо найти разность единичной матрицы и матрицы прямых технологических коэффициентов

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,061 & 0,34 & 0.367 \\ 0,102 & 0,11 & 0,429 \\ 0,194 & 0,1 & 0,204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,939 & -0,34 & -0,367 \\ -0,102 & 0,89 & -0,429 \\ -0,194 & -0,1 & 0,796 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель полученной матрицы

$\Delta = 0,94\ (0,89 \cdot 0,8 - (-0.1\ (-0,43))) - (-0,1\ (-0,34 \cdot 0,8 - (-0,1\ (0,37))) + (-0,19\ (-0,34\ (-0,43) - 0,89\ (-0,37))) \approx 0,5.$

Поскольку найденное значение отлично от нуля, можно сделать вывод о невырожденности матрицы и возможности нахождения для нее обратной матрицы.

Транспонированная матрица для найденной матрицы

$$B^T = (E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,939 & -0,102 & -0,194 \\ -0,34 & 0,89 & -0,1 \\ -0,367 & -0,429 & 0,796 \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы:

$$B^T_{(1;1)} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,89 & -0,1 \\ -0,429 & 0,796 \end{vmatrix} = 0,6655$$

$$B^T_{(1;2)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0,34 & -0,1 \\ -0,367 & 0,796 \end{vmatrix} = 0,3073$$

$$B^T_{(1;3)} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0,34 & 0,89 \\ -0,367 & -0,429 \end{vmatrix} = 0,4725$$

$$B^T_{(2;1)} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -0,102 & -0,194 \\ -0,429 & 0,796 \end{vmatrix} = 0,1644$$

$$B^T_{(2;2)} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0,939 & -0,194 \\ -0,367 & 0,796 \end{vmatrix} = 0,6762$$

$$B^T_{(2;3)} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0,939 & -0,34 \\ -0,194 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,4403$$

$$B^T_{(3;1)} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -0,102 & -0,194 \\ 0,89 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,1829$$

$$B^{T}_{(3;2)} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0,939 & -0,194 \\ -0,34 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,1599$$

$$B^{T}_{(3;3)} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0,939 & -0,102 \\ -0,34 & 0,89 \end{vmatrix} = 0,801$$

Таким образом, обратная матрица

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5}\begin{pmatrix} 0,666 & 0,307 & 0,472 \\ 0,164 & 0,676 & 0,44 \\ 0,183 & 0,16 & 0,801 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,326 & 0,612 & 0,941 \\ 0,328 & 1,347 & 0,877 \\ 0,364 & 0,318 & 1,596 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового выпуска может быть найден по формуле

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 1,326 & 0,612 & 0,941 \\ 0,328 & 1,347 & 0,877 \\ 0,364 & 0,318 & 1,596 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 62 \\ 71 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157,69 \\ 145,79 \\ 99,461 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при заданной величине конечного потребления объем валового выпуска станкостроения составит 157,69 ден. ед., объем валового выпуска машиностроения составит 145,79 ден. ед., объем валового выпуска энергетики – 99,461 ден. ед.

Глава 4. МЕТОДЫ РАБОТЫ С МНОГОМЕРНЫМИ ДАННЫМИ

4.1. Корреляционно-регрессионное моделирование связанных временных рядов

Многомерные временные ряды, показывающие зависимость результативного признака от одного или нескольких факторных признаков, называют связными рядами динамики. Применение методов наименьших квадратов для обработки рядов динамики не требует выдвижения никаких предположений о законах распределения исходных данных.

Однако при использовании метода наименьших квадратов для обработки связных рядов следует учитывать наличие автокорреляции (авторегрессии), которая не учитывалась при обработке одномерных рядов динамики, поскольку ее наличие способствовало более плотному и четкому выявлению тенденции развития рассматриваемого социально-экономического явления во времени.

Выявление автокорреляции в уровнях ряда динамики. В рядах динамики экономических процессов между уровнями, особенно близко расположенными, существует взаимосвязь. Ее удобно представить в виде корреляционной зависимости между рядами y_1, y_2, y_3, …, y_n и этими же рядами, сдвинутыми относительно первоначального положения на k моментов времени y_{1+h}, y_{2+h}, y_{3+h}, …, y_{n+h}. Временное смещение L называется сдвигом, а само явление взаимосвязи – автокорреляцией.

Автокорреляционная зависимость особенно существенна между последующими и предшествующими уровнями ряда динамики. Поскольку классические методы математической статистики применимы лишь в случае независимости отдельных членов ряда между собой, то при анализе нескольких взаимосвязанных рядов динамики важно установить наличие и степень их автокорреляции (рис. 4.1).

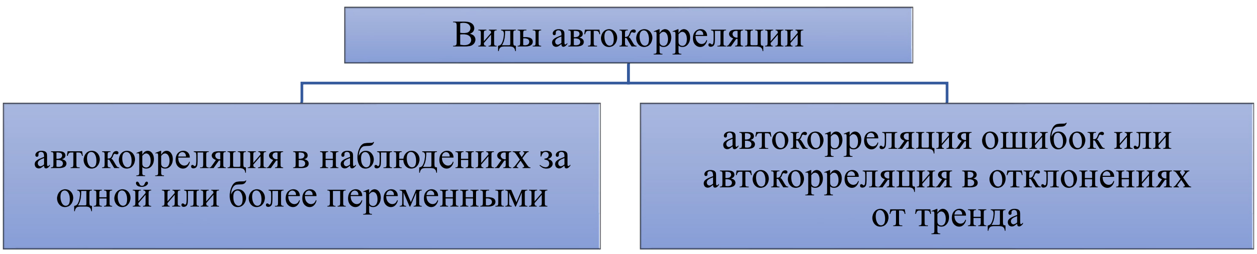


Рис. 4.1. Виды автокорреляции

Наличие автокорреляции приводит к искажению величин средних квадратических ошибок коэффициентов регрессии, что затрудняет построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии, а также проверку их значимости.

Автокорреляцию измеряют при помощи нециклического коэффициента автокорреляции, который может рассчитываться не только между соседними уровнями, т. е. сдвинутыми на один период, но и между сдвинутыми на любое число единиц времени (L). Этот сдвиг, именуемый временным лагом, определяет и порядок коэффициентов автокорреляции: первого порядка при $L = 1$, второго порядка при $L = 2$ и т. д.

Однако наибольший интерес для исследования представляет вычисление нециклического коэффициента (первого порядка), так как наиболее сильные искажения результатов анализа возникают при корреляции между исходными уровнями ряда (y_{t1}) и теми же уровнями, сдвинутыми на одну единицу времени, т. е. y_{t-1} (или y_{t+1}).

Тогда формулу коэффициента автокорреляции можно записать следующим образом (4.1):

$$r_a = \frac{\overline{y_t y_{t+1}} - \bar{y}_t \bar{y}_{t+1}}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+1}}}. \tag{4.1}$$

Если значение последнего уровня (y_n) ряда мало отличается от первого (y_1), то сдвинутый ряд не укорачивается, его можно условно дополнить, приняв $y_n = y_1$. Тогда $y_t = y_{t+1}$ и $\sigma_{y_t} = \sigma_{y_{t+1}}$, поскольку рассчитываются они для одного и того же ряда. При такой замене, т. е. если $\bar{y}_t = \bar{y}_{t+1}$ и $\sigma_{y_t} = \sigma_{y_{t+1}}$, формула коэффициента автокорреляции примет вид (4.2) или (4.3)

$$r_a = \frac{\overline{y_t \cdot y_{t+1}} - (\bar{y}_t)^2}{\sigma_{y_t}^2}; \tag{4.2}$$

$$r_a = \frac{\sum y_t \cdot y_{t+1} - n \cdot (\bar{y}_t)^2}{\sum y_t^2 - n \cdot (\bar{y}_t)^2}. \tag{4.3}$$

Если ряд динамики состоит из уровней, среднее значение которых равно нулю ($\bar{y} = 0$), то выражение (4.3) значительно упрощается (4.4)

$$r_a = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} y_t y_{t+1}}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}. \qquad (4.4)$$

Для суждения о наличии или отсутствии автокорреляции в исследуемом ряду фактическое значение коэффициентов автокорреляции сопоставляется с табличным (критическим) для 5%-го или 1%-го уровня значимости (вероятность допустить ошибку при принятии нулевой гипотезы о независимости уровней ряда).

Одна из специальных таблиц, в которой определена критическая область проверяемой гипотезы (об отсутствии автокорреляции), составленная Р. Андерсеном в 1942 году, приведена в прил. 1.

Если фактическое значение коэффициента автокорреляции меньше табличного, то гипотеза об отсутствии автокорреляции в ряду может быть принята. Когда же фактическое значение больше табличного, можно сделать вывод о наличии автокорреляции в ряду динамики.

Одним из способов выявления автокорреляции в отклонениях от тренда или от регрессионной модели является использование критерия Дарбина – Уотсона, который рассчитывается по формуле (4.5):

$$d = \frac{\sum_{t=1}^{n} (l_{t+1} - l_t)^2}{\sum_{t=1}^{n} l_t^2}. \qquad (4.5)$$

Теоретическое основание применения этого критерия обусловлено тем, что в динамических рядах как сами наблюдения, так и отклонения от них распределяются в хронологическом порядке.

При условии, что отклонения уровней от тенденции (так называемые остатки) случайны, значения D, лежащие в интервале 0 – 4, всегда будут находиться ближе к 2. Если автокорреляция положительная, то $D < 2$; отрицательная – $2 \le D \le 4$. Следовательно, оценки, получаемые по критерию, являются не точечными, а интервальными. Их значения для трех уровней значимости ($\alpha = 0{,}01, \alpha = 0{,}025$ и $\alpha = 0{,}05$) с учетом числа наблюдений даны в специальных таблицах (прил. 2).

Способы исключения или уменьшения автокорреляции (авторегрессии) в рядах динамики приведены на рис. 4.2.

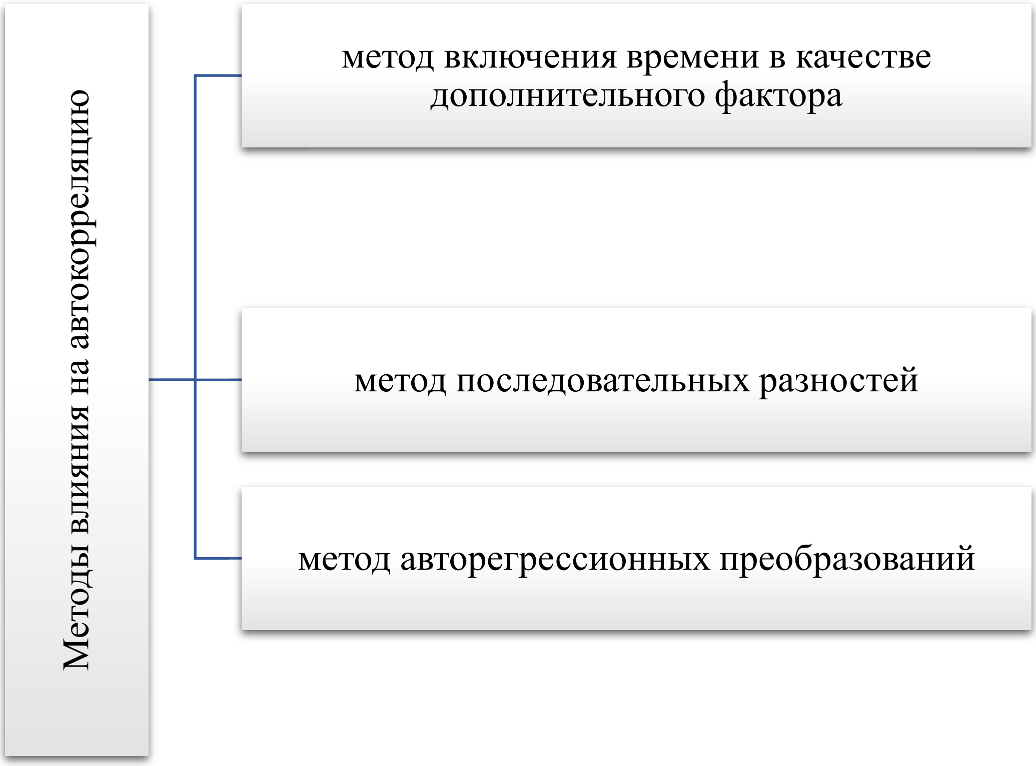


Рис. 4.2. Способы исключения или уменьшения авторегрессии

Рассмотрим суть **метода включения времени в качестве дополнительного фактора**. В соответствии с теоремой, доказанной Фришем и Воу, время вводится в систему связных динамических рядов в явной форме в качестве дополнительного фактора, и эта процедура называется введением фактора времени в уравнение регрессии. Уровни исходных динамических рядов могут быть представлены показателями в любой форме, в том числе логарифмической, а время всегда вводится в линейной форме. Считается, что введение фактора времени исключает основную тенденцию развития всех явлений, представленных исследуемыми рядами динамики. Доказано, что введение времени аналогично использованию отклонения фактических данных от трендов.

Применение метода наименьших квадратов к обработке многомерных временных рядов не отличается от методологии применения его к обычным статистическим рядам. В рассматриваемом случае минимизируется следующее выражение (4.6):

$$S = \sum \left[y_i - f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t\right) \right]^2 \rightarrow \min. \tag{4.6}$$

При исключении автокорреляции **методом последовательных разностей** подвергаются обработке методом наименьших квадратов не сами уровни исходных рядов $y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+n}$ и $x_t, x_{t+1}, ..., x_{t+n}$, а последовательные разности между ними:

$\Delta y_1 = y_t - y_{t-1}$;	$\Delta x_1 = x_t - x_{t-1}$;
$\Delta y_2 = y_{t-1} - y_{t-2}$;	$\Delta x_2 = x_{t-1} - x_{t-2}$;
....	....
....	....
$\Delta y_k = y_{t-k} - y_{t-k-1}$;	$\Delta x_k = x_{t-k} - x_{t-k-1}$.

При использовании этого метода исходят из предположения, что все разности между уровнями динамических рядов, начиная с первой, будут содержать только случайную компоненту. Причем первые разности содержат случайную компоненту в линейной форме, вторые – описываемую параболой 2-го порядка, третьи – показательной функцией.

Метод авторегрессионных преобразований заключается в том, что определяют уравнение связи между отклонениями от тенденций двух связных рядов динамики:

$y_1 - \bar{y}_{t1}$;	$x_1 - \bar{x}_{t1}$;
$y_2 - \bar{y}_{t2}$;	$x_2 - \bar{x}_{t2}$;
....	....
....	....
$y_n - \bar{y}_{tn}$;	$x_n - \bar{x}_{tn}$.

В этом случае также получают уравнения регрессии, не искаженные влиянием автокорреляции.

Введение времени в качестве дополнительной переменной – наиболее действенный способ обработки связных рядов динамики. Во всяком случае при линейной связи между исследуемыми рядами этот способ более точен, чем использование последовательных разностей или отклонений от трендов.

При обработке методом наименьших квадратов последовательных разностей или отклонений от трендов исследователь имеет дело с чисто случайными величинами, взаимосвязь между которыми бывает часто весьма сомнительной, так как исключение в обоих случаях тенденций нарушает существование причинно-следственной связи между явлениями.

При изучении развития явления во времени часто возникает необходимость оценить степень взаимосвязи в изменениях уровней двух или более рядов динамики различного содержания, но связанных между собой.

Эта задача решается методами коррелирования (рис. 4.3).

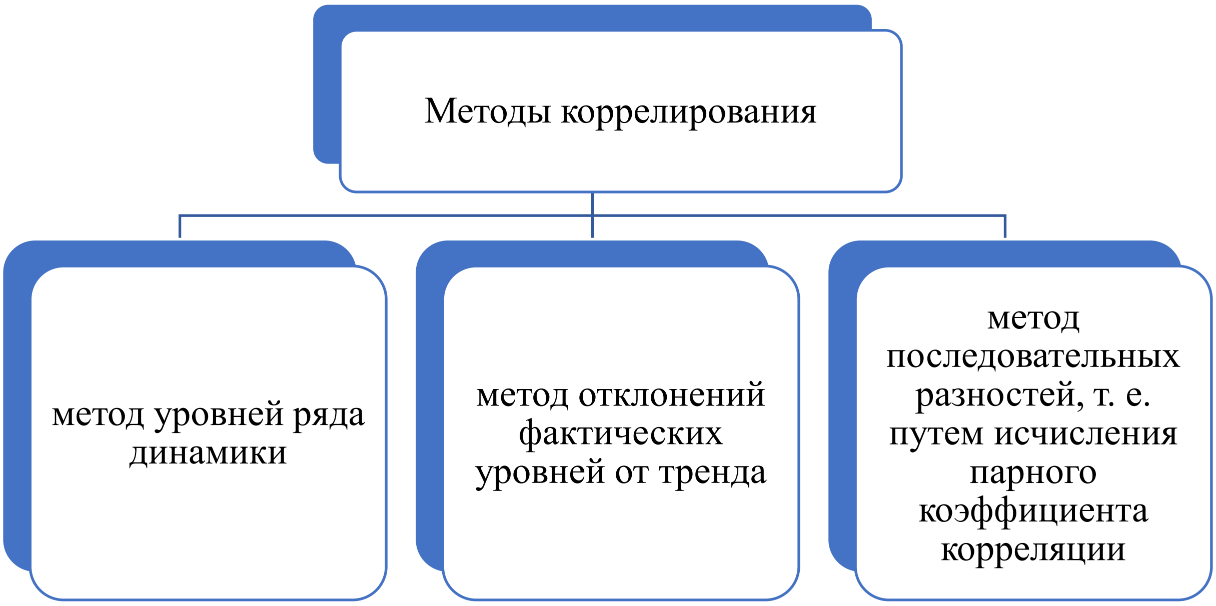


Рис. 4.3. Методы коррелирования

Расчет парного коэффициента корреляции по уровням ряда динамики. Этот расчет правильно показывает тесноту связи между рядами динамики лишь в том случае, если в каждом из них отсутствует автокорреляция. В этом случае величину коэффициента корреляции находят по формуле (4.7)

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (4.7)$$

где x_i – уровни факторного ряда динамики; y_i – уровни результативного ряда динамики.

Следовательно, прежде чем коррелировать ряды динамики (по уровням), необходимо проверить каждый из рядов на наличие или отсутствие в них автокорреляции (при помощи коэффициента автокорреляции). В случае наличия автокорреляции между уровнями ряда последняя должна быть устранена.

Расчет парного коэффициента корреляции по отклонениям фактических уровней от выравненных по уравнению (тренду). Этот способ состоит в том, что коррелируют не сами уровни, а отклонения фактических уровней от выравненных, отражающих тренд, т. е.

коррелируют остаточные величины. Для этого каждый ряд динамики выравнивают по определенной, характерной для него аналитической формуле, затем из эмпирических уровней вычитают выравненные (т. е. находят $d_x = x_t - \bar{x}_t$; $d_y = y_t - \bar{y}_t$) и определяют тесноту связи между рассчитанными отклонениями (d_x и d_y) по формуле (4.8)

$$r_{d_x d_y} = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}}. \tag{4.8}$$

Расчет парного коэффициента корреляции по абсолютным отклонениям уровней ряда динамики. Исключить влияние автокорреляции можно путем вычитания из каждого уровня, предшествующего ему, разности уровней ($y_i - y_{i-1}$). Алгебраически легко показать, что при переходе от уровней к их разностям исключается влияние общей тенденции на колеблемость. При этом при изменении уровней по прямой можно коррелировать первые разности, при изменении по параболе n-го порядка – n-е разности. Формула коэффициента разностей, используемая для измерения тесноты связи между исследуемыми рядами, имеет вид (4.9)

$$r_{\Delta_x \Delta_y} = \frac{\sum \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\sum \Delta_x^2 \sum \Delta_y^2}}. \tag{4.9}$$

Коэффициент корреляции, рассчитанный для измерения тесноты зависимости изменения уровней двух рядов, является своего рода средним обобщающим показателем. Однако для длительного периода эта зависимость не является постоянной, она может меняться во времени. Поэтому чтобы судить о том, в какие периоды зависимость между изменениями уровней двух рядов слабая, а в какие – сильная, рекомендуется рассчитывать серию скользящих коэффициентов корреляции для определенного интервала времени.

4.2. Моделирование с использованием факторного анализа

Деятельность фирмы в современных условиях сопряжена с огромным количеством внутренних и внешних факторов, оказывающих влияние на вектор ее развития. Принятие управленческих решений в условиях неполной и стохастической информации обусловливает необходимость применения инструментов многомерного анализа, в частности кластеризации.

Сущность многомерных статистических методов в деятельности фирмы состоит в том, чтобы выбрать такую вероятностную модель, которая бы наилучшим образом описывала реальное изменение показателей деятельности организации.

По своей сути кластерный анализ представляет собой процесс исследования, с помощью которого набор каких-либо объектов (исследуемых параметров) объединяется или группируется в относительно небольшие группы, именуемые кластерами, которые имеют черты внутригруппового сходства и набор четко выраженных отличий от других кластеров.

Применение для решения задач кластерного анализа пакетов прикладных статистических программ значительно упрощает исследование, поскольку перегруппировка кластеров при изменении, добавлении или исключении какого-либо признака осуществляется без необходимости проводить дополнительные массивные вычисления вручную.

Наиболее распространенными узкоспециализированными пакетами для проведения различных видов статистического анализа являются STADIA, STATGRAPHICS, SPSS, STATISTICA. Все перечисленные программные продукты обладают широким набором статистических функций, которые применяются для решения самого широкого спектра исследовательских задач. Более того, применение вышеназванных пакетов возможно не только в экономических, но и в различных социологических, географических, биологических и других исследованиях. Все это еще раз доказывает высокую значимость статистических методов в различных областях профессиональной деятельности.

При выборе статистического пакета для решения конкретной прикладной задачи следует руководствоваться следующими положениями.

Во-первых, программный продукт должен обладать статистическим разнообразием для эффективной работы с нужным массивом исходных данных. Для работы с информацией в зависимости от целей исследования используются различные статистические инструменты, грамотный выбор которых служит необходимым условием решения конкретной задачи пользователя.

Во-вторых, статистический пакет должен обладать широкими графическими возможностями. В частности, в ряде программ имеют место встроенные графические редакторы, существует опция демонстрации отдельных элементов графика. Также имеется возможность экспорта полученных графических материалов в текстовые документы, презентации и т. д., что создает дополнительные условия представления полученных результатов исследования не только пользователям, осуществляющим работу в узкоспециализированных программах, но и широкому кругу лиц, заинтересованных в доступном и понятном представлении результатов статистических исследований.

В-третьих, важно, чтобы каждому конкретному пользователю было удобно работать в выбранном статистическом пакете, осуществлять экспорт/импорт данных, а также их реструктуризацию. Вопрос эргономичности интерфейса является достаточно субъективным, поэтому человеку, осуществляющему обработку статистической информации, необходимо руководствоваться собственными предпочтениями и взглядами, а не популярностью или распространенностью продукта в широком доступе.

Впервые кластерный анализ как метод исследования нашел свое применение в социологии. Само слово «cluster» происходит от английского определения понятий «скопление» и «гроздь». Родоначальником кластерного исследования можно назвать Роберта Триона, который в 1939 году выпустил труд, систематизирующий представления о предмете, сущности и базовых методах кластеризации. Сущность кластерного анализа вне зависимости от области его применения можно определить следующим образом: имеет место некоторое число объектов, которое требуется разбить на подмножества, отличающиеся максимальным сходством внутри исследуемых групп (кластеров) и существенными различиями между самими кластерами. По сути, кластерный анализ представляет собой метод классификации, предполагающий исследование структуры образованных групп.

Основное преимущество кластеризации как метода состоит в том, что выявление групп происходит не по какому-либо одному признаку, а по их совокупности, что позволяет проводить всестороннее изучение анализируемых объектов.

Также стоит отметить, что данный математико-статистический метод никак не ограничивает область рассматриваемых объектов, поскольку применим для данных практически любой природы. Подобное свойство является наиболее ценным, когда анализируются и исследуются разнообразные признаки. Применение иных эконометрических методов и приемов в таком случае может быть крайне затруднительным.

Применение кластерного анализа позволяет существенно сократить объем данных, сохраняя при этом существенные свойства и признаки выделенных массивов данных. Кроме того, использование данного метода возможно в сочетании с другими качественными методами эконометрики.

Использование кластеризации активно применяется при анализе рядов динамики, позволяя выделять временные интервалы с общими характеристиками.

При проведении кластерного анализа есть возможность применять данный метод циклически, дополняя каждый цикл анализа уточняющей информацией.

Следует отметить, что кластерный анализ имеет также ряд недостатков и ограничений. В частности, качество кластерного анализа во многом обусловлено тщательностью отбора критериев разбиения. Сведение массива исходных данных к объединениям внутри кластерных групп приводит к некоторым искажениям и отсутствию учета индивидуальных признаков. При кластеризации важно, чтобы соблюдался целый ряд условий, основные из которых представлены на рис. 4.4.

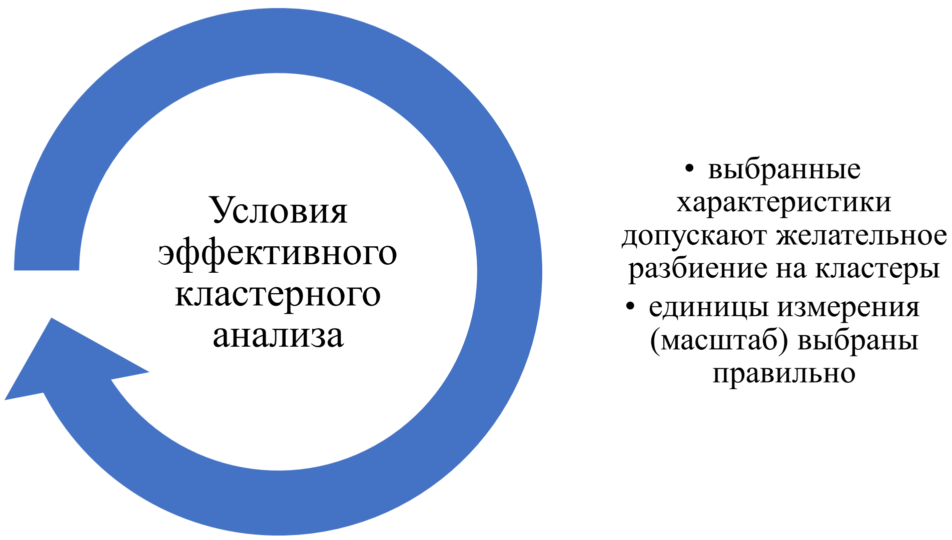


Рис. 4.4. Условия эффективного кластерного анализа

Выбор масштаба считается крайне значимым этапом проведения кластеризации. Как правило, на предварительном этапе исходные данные, характеризующие признак, нормализуются путем вычитания среднего и делением на стандартное отклонение. При такой операции дисперсия равна единице.

Основная задача проведения кластерного анализа состоит в том, чтобы разбить на основании данных, содержащихся в множестве X, множество объектов G на m кластеров таким образом, чтобы каждый из анализируемых объектов G_i принадлежал только одному из определенных подмножеств разбиения. Важны обеспечение сходства между объектами, принадлежащими одному кластеру, и наличие существенных межкластерных различий.

По сути, решение задачи кластерного анализа сводится к разбиению совокупности, которая удовлетворяет условию оптимальности в рамках конкретной исследовательской задачи. Критерий оптимальности может представлять собой некоторый функционал, выражающий уровни желательности различных разбиений и группировок, который называют целевой функцией. В роли целевой функции может быть использована внутригрупповая сумма квадратов отклонений.

Важнейшими характеристиками кластера являются его размер, центр, радиус, среднеквадратическое отклонение (рис. 4.5).

Центр кластера	• среднее геометрическое место точек в пространстве переменных
Радиус кластера	• максимальное расстояние точек от центра кластера. Кластеры могут быть перекрывающимися. Такая ситуация возникает, когда обнаруживается перекрытие кластеров. В этом случае невозможно при помощи математических процедур однозначно отнести объект к одному из двух кластеров. Такие объекты называют спорными (по мере сходства могут быть отнесены к нескольким кластерам)
Размер кластера	• может быть определен либо по радиусу кластера, либо по среднеквадратическому отклонению объектов для этого кластера. Объект относится к кластеру, если расстояние от объекта до центра кластера меньше радиуса кластера. Если это условие выполняется для двух и более кластеров, объект является спорным

Рис. 4.5. Основные характеристики кластера

При возникновении проблемы неопределенности она может быть решена аналитиком или экспертом.

Как уже было отмечено выше, проблема масштаба является значимой при проведении кластерного исследования. Предположим, что набор данных содержит сведения о двух признаках x и y. При этом x принадлежит диапазону от 100 до 700, а y – от 0 до 1. В таком случае корректный расчет расстояний между точками, характеризующими положение объектов, становится невозможным, поскольку переменная, имеющая большие значения, т. е. переменная x, будет практически полностью доминировать над переменной с малыми значениями, т. е. переменной y.

Для устранения данной проблемы используется процедура предварительной стандартизации данных.

Стандартизация (standardization), или нормирование (normalization), приводит значения всех преобразованных переменных к единому диапазону значений путем выражения через отношение этих значений к некой величине, отражающей определенные свойства конкретного признака. В статистике фирмы применяются различные способы проведения данной процедуры, например по формулам (4.10) – (4.13)

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}; \tag{4.10}$$

$$z = \frac{x}{\bar{x}}; \tag{4.11}$$

$$z = \frac{x}{x_{max}}; \tag{4.12}$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{x_{max} - x_{min}}, \tag{4.13}$$

где $\bar{x}$ – среднее значение признака; σ – среднеквадратическое отклонение x; x_{max} – наибольшее значение признака; x_{min} – наименьшее значение признака.

Среднеквадратическое отклонение σ определяется исходя из числа наблюдений и может быть определено по формуле (4.14):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum^{n}(x_i - \overline{x})^2}\ . \qquad (4.14)$$

Основные виды стандартизации в кластерном анализе представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Основные виды стандартизации в кластерном анализе

Стандартизация	Расчет
Z-шкалы (Z-Scores)	Из значений переменных вычитается их среднее, и эти значения делятся на стандартное отклонение
Разброс от –1 до 1	Линейным преобразованием переменных добиваются разброса значений от –1 до 1
Разброс от 0 до 1	Линейным преобразованием переменных добиваются разброса значений от 0 до 1
Максимум 1	Значения переменных делятся на их максимум
Среднее 1	Значения переменных делятся на их среднее
Стандартное отклонение 1	Значения переменных делятся на стандартное отклонение

Помимо процедуры стандартизации на практике применяется также вариант решения существующей проблемы путем корректировки параметров с учетом коэффициента важности, который представляет собой весовую характеристику, отражающую значимость конкретной переменной. При определении данного коэффициента может использоваться метод экспертных оценок, предусматривающий проведение экспертного опроса специалистом конкретной предметной области.

Полученные произведения нормированных переменных на соответствующие веса дают возможность адекватной оценки расстояний между точками в многомерном пространстве с учетом неодинакового веса переменных.

Вне зависимости от используемого метода классификации и подходов к определению кластеров проблема измерения близости объектов является неизбежной. При этом основу данного вопроса составляют два основных положения: неоднозначность выбора способа нормировки и определение расстояния между объектами.

Допустим, имеются данные о размере выручки предприятий и численности персонала, по ним оформляется корреляционное поле. Масштабы по осям выбираются произвольно (рис.4.6).

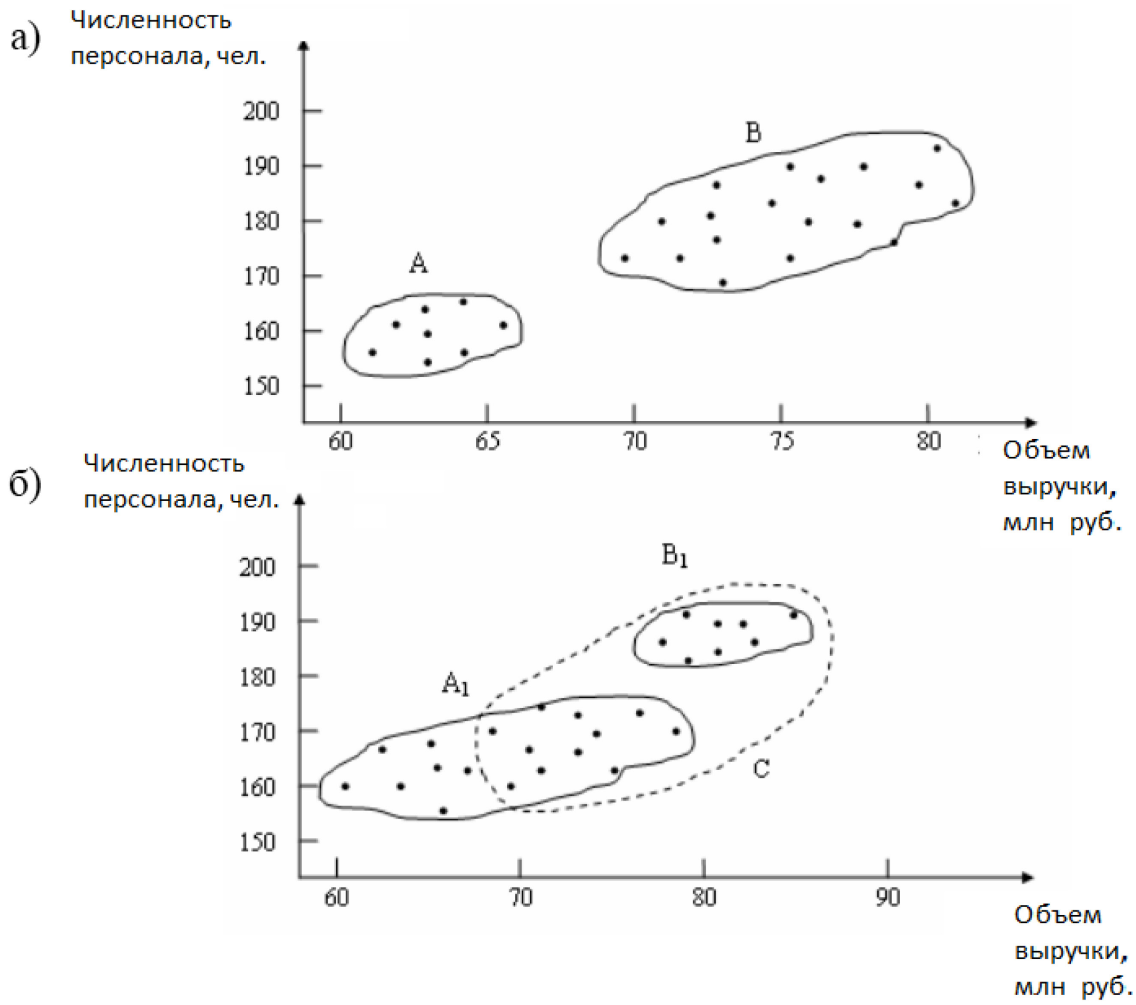


Рис. 4.6. Корреляционное поле

На рис. 4.6, *а* выделяются классы А – более мелкие предприятия, В – более крупные предприятия. На рис. 4.6, *б* выделяются классы $А_1$ (включает А и В) и $В_1$ (часть В). Класс предприятий С (пунктирная линия) на рис. 4.6, *б* не выделен, так как расстояния между ближайшими объектами классов $А_1$ и $В_1$ существенно больше, чем внутренние расстояния в $А_1$, предприятия А почти никакими алгоритмами к группе $В_1$ не присоединяются.

В данном примере определение расстояний между объектами невозможно, поскольку признаки (численность персонала и объем выручки) представлены в различных единицах измерения. Требуется нормировка показателей, переводящая их в безразмерные величины. Только после этого измерение близости объектов становится возможным.

В кластерном анализе для количественной оценки сходства вводится понятие метрики. Сходство или различие между классифицируемыми объектами устанавливается в зависимости от метрического расстояния между ними. Если каждый объект описывается k признаками, то он может быть представлен как точка в k-мерном пространстве, и сходство с другими объектами будет определяться как соответствующее расстояние.

Метрикой между анализируемыми объектами в пространстве принято называть такую величину d_{ab}, которая бы удовлетворяла аксиомам, приведенным на рис. 4.7.

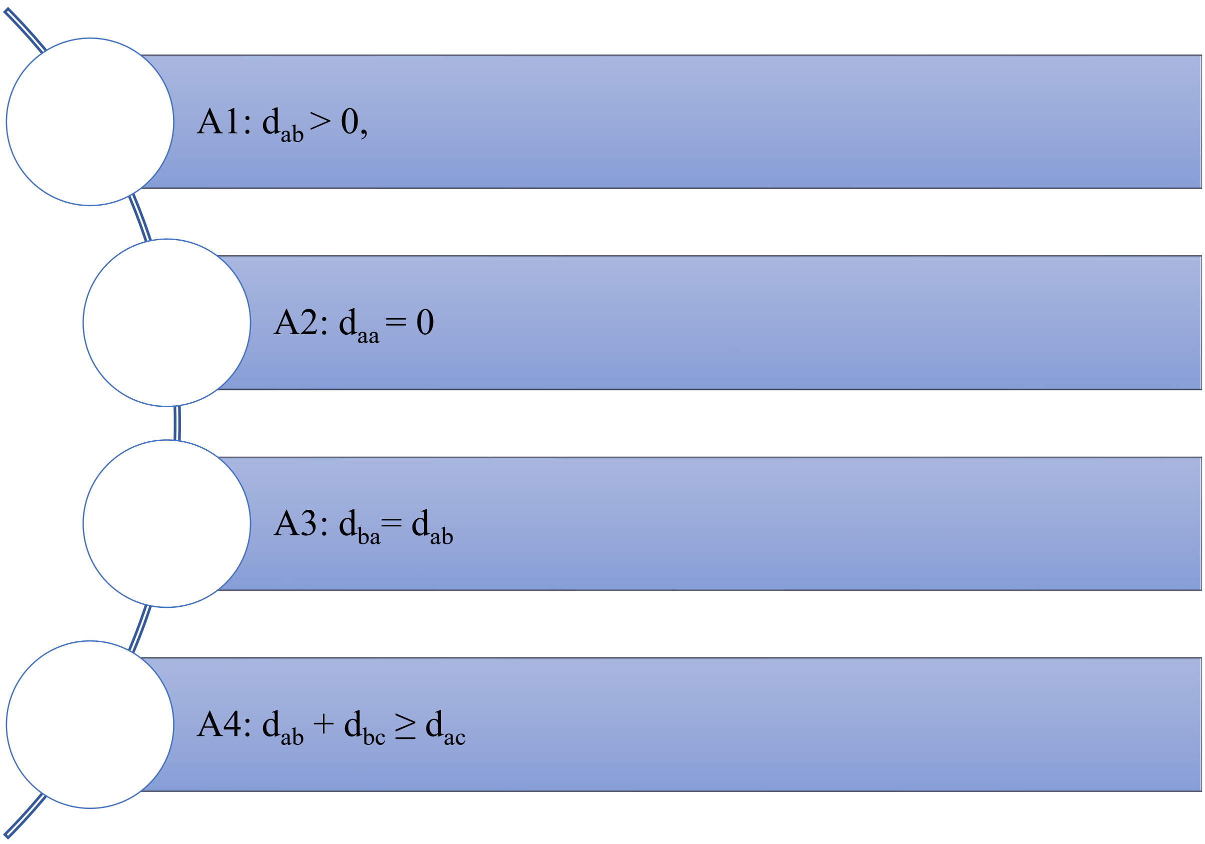


Рис. 4.7. Аксиомы метрики

В качестве меры близости, характеризующей степень сходства, применяется величина μ_{ab}, для которой существует конкретный предел и которая возрастает с усилением степени близости объектов (рис. 4.8).

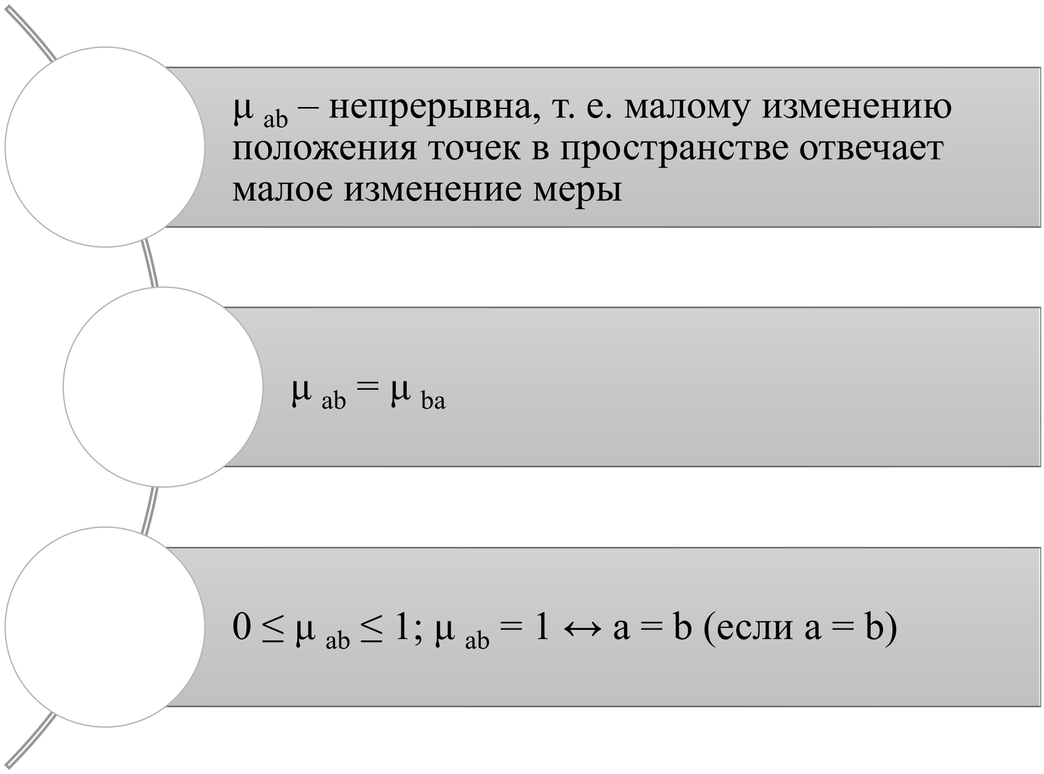


Рис. 4.8. Условия меры близости (сходства) объектов

Для перехода от метрики к расстоянию близости объектов применяют формулу (4.15)

$$\mu = \frac{1}{1+d}. \tag{4.15}$$

Объединение, или метод древовидной кластеризации, используется при формировании кластеров несходства или расстояния между объектами. Эти расстояния могут определяться в одномерном или многомерном пространстве. Например, если требуется кластеризовать организации или фирмы, то можно принять во внимание количество работников предприятия, годовой объем выручки, рентабельность и т. д. Наиболее прямой путь вычисления расстояний между объектами в многомерном пространстве состоит в вычислении евклидовых расстояний. Если имеется двух- или трехмерное пространство, то данная мера представляет собой реальное геометрическое расстояние между объектами в пространстве.

Данный метод считается самым простым с точки зрения вычислений, однако применение такого алгоритма не дает возможности оценки реальности такого расстояния или его производного характера.

В зависимости от задач исследования могут применяться различные характеристики объектов, что требует подбора адекватных методов оценки.

Евклидово расстояние наиболее часто используется в качестве метрики кластерного анализа и представляет собой простое геометрическое расстояние, определяемое в многомерном пространстве. С точки зрения геометрии применение данного метода целесообразно в том случае, если для объектов характерно шарообразное скопление.

Квадрат евклидова расстояния. Возведение в квадрат стандартного евклидова расстояния позволяет придать больший вес более отдаленным друг от друга объектам.

Обобщенное степенное расстояние является универсальной метрикой и значимой характеристикой только с математической точки зрения.

Расстояние Чебышева следует применять, когда необходимо идентифицировать два объекта как различные в том случае, если они отличаются только по определенному критерию.

Манхэттенское расстояние («расстояние городских кварталов», «хэмминговое» расстояние, «сити-блок» расстояние) рассчитывается как среднее разностей по координатам. В большинстве случаев данная мера расстояния приводит к результатам, аналогичным расчетам евклидова расстояния. Однако для этой меры влияние отдельных выбросов меньше, чем при использовании евклидова расстояния, поскольку здесь координаты не возводятся в квадрат.

Процент несогласия рассчитывается в том случае, если анализируются категориальные данные.

Основные способы определения близости между объектами представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Основные способы определения меры близости при проведении кластерного анализа

Метрика кластерного анализа	Формула для расчета метрики
Линейное расстояние	$d_{Lij} = \sum_{l=1}^{m} \left\| x_i^l - x_j^l \right\|$
Евклидово расстояние	$d_{Eij} = (\sum_{l=1}^{m} \left(x_i^l - x_j^l\right)^2)^{\frac{1}{2}}$

Окончание табл. 4.2

Метрика кластерного анализа	Формула для расчета метрики
Квадрат евклидова расстояния	$d^2{}_{Eij} = \sum_{l=1}^{m}\left(x_i^l - x_j^l\right)^2$
Обобщенное степенное расстояние	$d_{Pij} = \left(\sum_{l=1}^{m}\left(x_i^l - x_j^l\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$
Расстояние Чебышева	$d_{ij} = \max\limits_{1 \le i,j \le l}\left\lvert x_i - x_j\right\rvert$
Манхэттенское расстояние	$d_H(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{k}\left\lvert x_i^l - x_j^l\right\rvert$

При осуществлении кластерного анализа важно понимать, что современные методы кластеризации могут основываться на работе как с количественными, так и с неколичественными данными. На формальном уровне единицей анализа является поименованная сущность (объект данных), описываемая произвольным набором элементарных свойств (качеств). Другими словами, сущность определяется как подмножество во множестве свойств/качеств. Свойство, в свою очередь, посредством своей встречаемости определяет группу сущностей и, следовательно, может рассматриваться как подмножество во множестве сущностей.

На практике набор данных существует как последовательность записей, каждая из которых описывает один объект. Качества могут принадлежать к различным группам. Эти группы могут служить аналогами переменных («полей» – в терминах баз данных), а качества, им принадлежащие, – значениям переменных. Но группы, с одной стороны, могут иметь более одного значения для каждой записи, а с другой – их существование в общем случае необязательно. Более того, группы качеств могут существовать динамически и приобретать различный смысл в процессе анализа.

Существуют различные методы кластерного анализа, применяемые на практике (рис. 4.9).

Иерархические и неиерархические методы кластеризации отличаются применяемыми алгоритмами и подходами. Используя различные методы кластерного анализа, исследовател получать различные результаты при одинаковом наборе статистических данных.

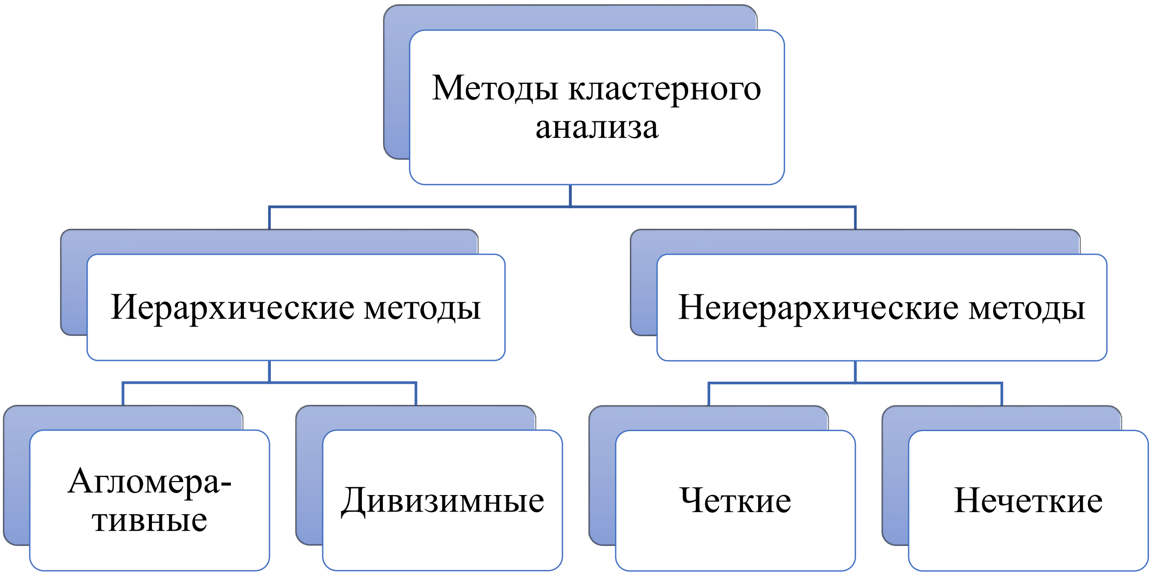


Рис. 4.9. Методы кластерного анализа

Сущность иерархической кластеризации состоит в том, что меньшие кластеры объединяются в группы больших размеров последовательно либо происходит обратный процесс разбиения больших кластеров на меньшие группы.

Для иерархических агломеративных методов (Agglomerative Nesting, AGNES) характерно поэтапное объединение исходных элементов в кластеры. При таком подходе происходит поэтапное сокращение общего числа групп. Алгоритм объединения при использовании данного метода предполагает соединение объектов в кластеры до тех пор, пока все они не будут составлять одну группу (рис. 4.10).

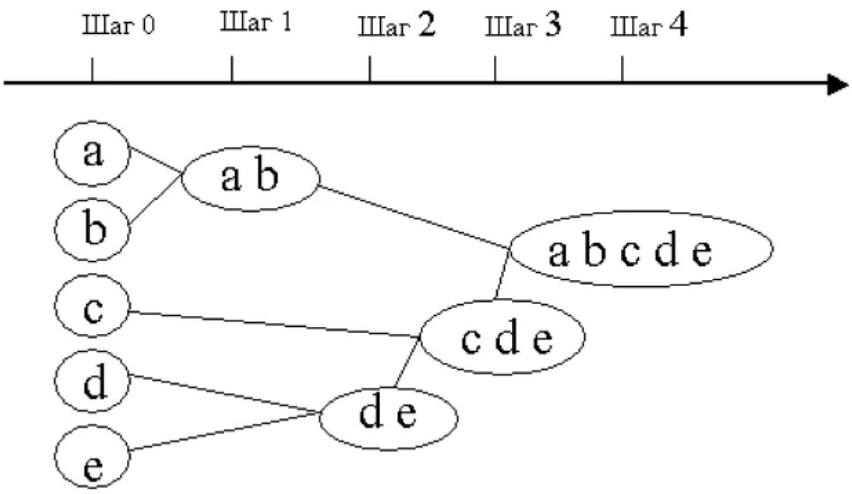


Рис. 4.10. Алгоритм реализации агломеративных методов

Принцип работы иерархических дивизимных методов (DIvisive ANAlysis, DIANA) логически противоположен принципам кластеризации с опорой на агломеративные методы. При использовании дивизимных методов процесс формируется от обратного: предполагается, что изначально объекты принадлежат одному кластеру, затем с каждым последующим шагом производят разбиение на меньшие группы (рис. 4.11).

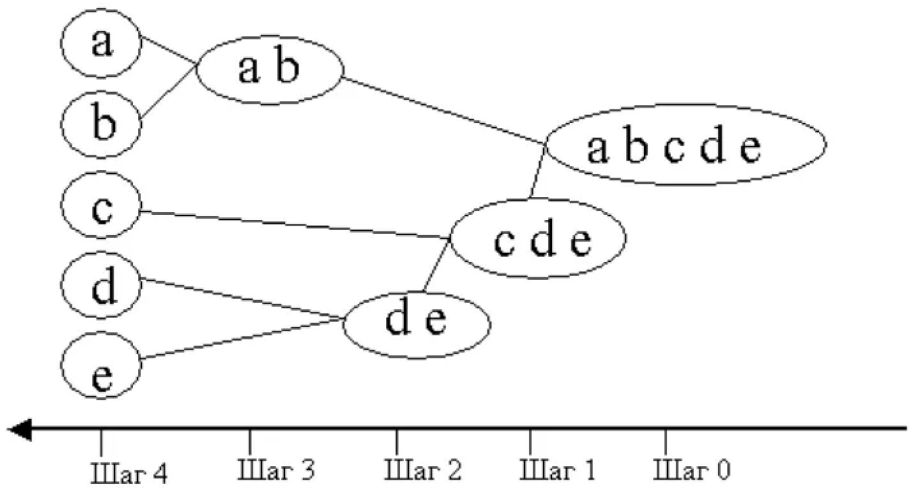


Рис. 4.11. Алгоритм реализации дивизимных методов

Применение иерархических методов кластеризации целесообразно в том случае, если исходный объем характеристик для описания кластеров следует назвать относительно небольшим. Очевидным преимуществом данных методов следует назвать их наглядность, что особенно удобно при необходимости представления результатов исследования в графическом виде.

В результате реализации иерархических алгоритмов становится возможным построение дендрограмм. Само слово в переводе с греческого означает «дерево». С помощью данного инструмента в древовидной форме отражаются результаты кластеризации.

Дендрограммы (древовидные схемы, деревья объединения, деревья иерархической структуры групп) применяются для характеристики отдельных точек и кластеров по отношению друг к другу и демонстрируют в виде особого графика последовательность осуществления объединений в результате кластеризации. Каждый уровень дендрограммы соответствует конкретному шагу поэтапного укрупнения числа кластерных групп.

Дендрограммы могут быть представлены в вертикальном (рис. 4.12) и горизонтальном видах (рис. 4.13).

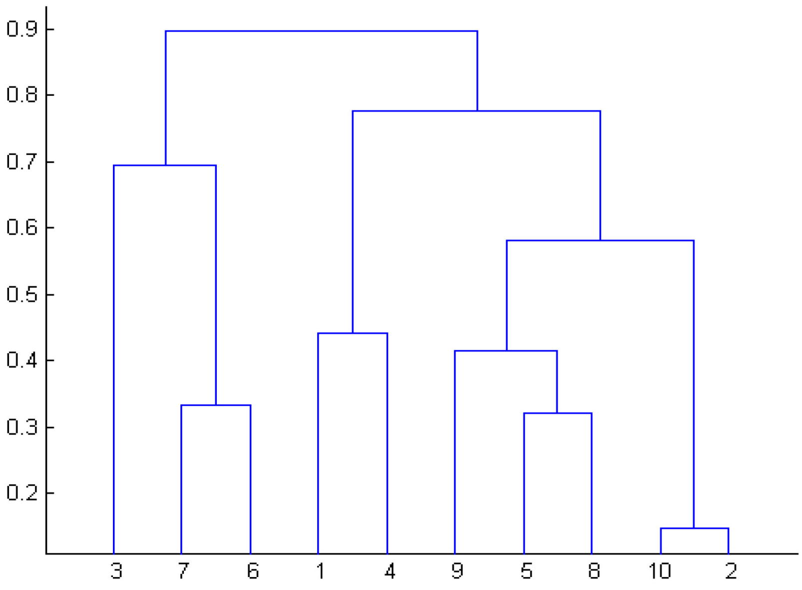


Рис. 4.12. Пример вертикальной дендрограммы

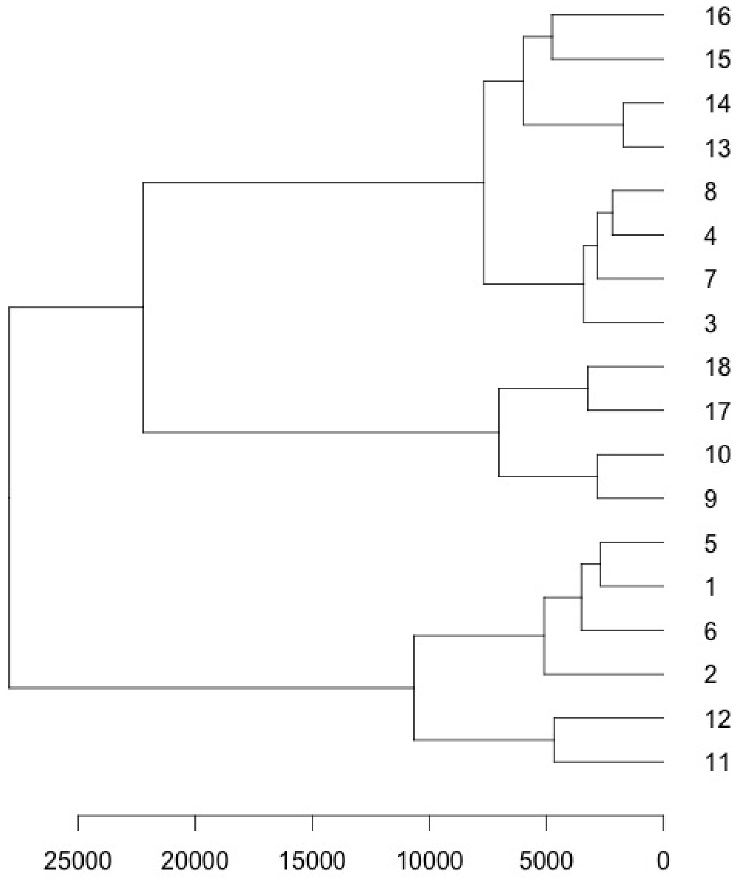


Рис. 4.13. Пример горизонтальной дендрограммы

При осуществлении кластеризации важно понимать, каким способом определяется расстояние между объектами и каким образом происходит объединение элементов в группу.

Метод одиночной связи (ближайшего соседа) предполагает наиболее близкое расположение друг к другу объектов в кластерах по сравнению с соответствующим расстоянием связи (4.16)

$$\rho_{\min}(K_i, K_j) = \min_{x_i \in K_i, x_{ij} \in K_j} \rho(x_i, x_{j)}. \tag{4.16}$$

Метод ближайшего соседа применяется при построении кластеров, которые, как правило, связаны между собой не системными связями, а отдельными элементами, оказавшимися на минимальном расстоянии друг от друга.

Методом, противоположным данному, является **метод полной связи (дальнего соседа)**. Его реализация предполагает оценку межкластерных расстояний по величине, характеризующей наиболее отдаленное положение всех остальных пар объектов друг от друга (4.17)

$$\rho_{maa}(K_i, K_j) = \operatorname*{maa}_{x_i \in K_i, x_{ij} \in K_j} \rho(x_i, x_{j)}. \tag{4.17}$$

Метод Варда был открыт в 1963 году. В качестве расстояния между кластерами берется прирост суммы квадратов расстояний объектов до центров кластеров, получаемый в результате их объединения. В отличие от других методов кластерного анализа для оценки расстояний между кластерами здесь используются методы дисперсионного анализа.

Каждый шаг реализации кластерного алгоритма предполагает объединять такие два кластера, которые приводят к минимальному увеличению целевой функции, т. е. внутригрупповой суммы квадратов. В результате реализации данного метода происходит создание малых групп, а основой реализации способа является объединение близко расположенных кластеров.

Метод невзвешенного попарного среднего (метод невзвешенного попарного арифметического среднего) предполагает, что в качестве расстояния между двумя кластерами берется среднее расстояние между всеми парами объектов в них. Этот метод следует использовать, если объекты существенно отличаются друг от друга, в случаях присутствия кластеров «цепочного» типа, а также при предположении неравных размеров кластеров.

Метод взвешенного попарного среднего (метод взвешенного попарного арифметического среднего) отличается от предыдущего метода тем, что численность объектов кластера в нем выступает весовой характеристикой. В остальном алгоритм реализации метода аналогичен. Способ взвешенного попарного арифметического среднего следует использовать в том случае, если выдвинута гипотеза о различном размере предполагаемых кластерных групп.

Невзвешенный центроидный метод (метод невзвешенного попарного центроидного усреднения) предполагает использование в качестве расстояния между двумя кластерами расстояния между центрами тяжести соответствующих групп.

Взвешенный центроидный метод (метод взвешенного попарного центроидного усреднения) похож на предыдущий, разница состоит лишь в том, что для учета разницы между размерами кластеров (число объектов в них) используются веса. Метод следует применять в том случае, если выдвинута гипотеза о существенных различиях в размере предполагаемых кластерных групп.

Помимо иерархических методов на практике часто используются **итерационные приемы кластеризации**.

Наиболее популярным из них является **метод k-средних**. Впервые полный алгоритм быстрой кластеризации был рассмотрен в работе Хартигана и Вонга (Hartigan and Wong) в 1978 году. Отличие метода *k*-средних от иных иерархических методов состоит в необходимости выдвижения гипотезы о числе кластеров до начала проведения анализа. Метод *k*-средних имеет свои преимущества и недостатки (рис. 4.14).

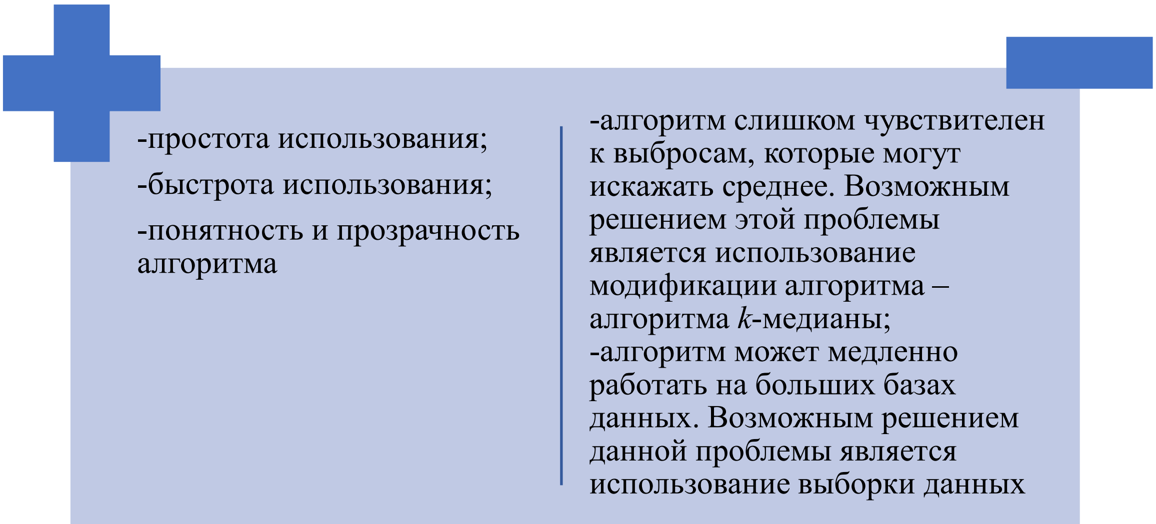


Рис. 4.14. Преимущества и недостатки метода k-средних

Алгоритм реализации метода представлен на рис. 4.15.

Выбирается число кластеров *k*

↓

Из исходного множества данных случайным образом выбираются *k* записей, которые будут служить начальными центрами кластеров

↓

Для каждой записи исходной выборки определяется ближайший к ней центр кластера. При этом записи, «притянутые» определенным центром, образуют начальные кластеры

↓

Вычисляются центроиды – центры тяжести кластеров. Каждый центроид – это вектор, элементы которого представляют собой средние значения признаков, вычисленные по всем записям кластера. Затем центр кластера смещается в его центроид

Рис. 4.15. Алгоритм реализации метода k-средних

Суть принципа реализации алгоритма k-средних состоит в следующем: происходит построение кластеров, расстояние между которыми является наибольшим. Выбор числа кластерных групп k может опираться на предыдущие результаты анализа, теоретические положения в конкретной предметной области и т. д.

Процесс итерации прекращается, когда границы кластеров перестанут изменяться от итерации к итерации, т. е. на каждой итерации в каждом кластере будет оставаться один и тот же набор записей.

После получения результатов кластерного анализа методом *k*-средних необходимо проверить адекватность проведенной процедуры. Суть такой проверки состоит в оценке значимости различий вычисленных кластерных групп. Анализ различий основывается на расчете средних значений групп. Если процедура дала качественные результаты, средние характеристики каждого из выявленных кластеров должны существенно отличаться друг от друга [33].

4.3. Дискриминантный анализ

Задача дискриминантного анализа опирается на следующий набор данных. Допустим, что имеются сведения о n наблюдениях, каждое из которых можно охарактеризовать по k признакам. В таком случае каждое конкретное наблюдение может быть описано с помощью вектора X, характеристики которого являются набором случайных величин (4.18):

$$X = (X_1, X_2, \ldots X_k)^T. \quad (4.18)$$

Суть задачи дискриминации состоит в том, чтобы разбить все множество реализации анализируемой величины на определенное количество областей R_i, затем каждое из новых анализируемых наблюдений отнести к какой-либо области, опираясь на правило, которое признано в рамках решения конкретной исследовательской задачи решающим. Предполагается, что заранее информация о принадлежности объекта к области недоступна либо требует значительных затрат ресурсов на ее получение.

Выбор правила осуществления дискриминантного анализа должен базироваться на принципе оптимальности, который представляет собой минимизацию средних потерь от неправильной классификации, исходя из априорных вероятностей p_i извлечения объекта из группы R_i. Решающее правило считается наилучшим в определенном смысле слова, если никакое другое правило не может дать меньшей величины функции потерь.

Значения априорных вероятностей могут быть известны заранее и определены пользователями заблаговременно (по результатам предварительного анализа) либо заданы в процессе ввода данных в модуль. В качестве средних потерь чаще всего принимают вероятность ложной классификации наблюдения.

Построение решающего правила также можно рассматривать как задачу поиска областей R, которые не пересекаются между собой. Дискриминантные функции в этом случае дают определение этих областей путем задания их границ в многомерном пространстве.

В процессе дискриминантного анализа автоматически вычисляются функции классификации, предназначенные для определения той группы, к которой наиболее вероятно принадлежит новый объект. При этом важно равенство количества функций классификации заданной величине кластерных групп.

Считается, что принадлежность наблюдения в определенной группе будет объясненной в том случае, если функция классификации максимальна либо значение апостериорной функции является наибольшим.

Дискриминантный анализ используется для исследования различий заранее заданных групп объектов исследования (фирм, категорий товаров и т. д.). Переменная считается группирующей в том случае, если она делит совокупность объектов исследования на конкретные классы или категории. Дискриминантный анализ используется для того, чтобы оценить межгрупповые развития по определенным признакам. Если признак применяется для выявления различий между группами, они именуются дискриминационными переменными.

Важно грамотное использование шкалирования при анализе: группирующая переменная должна принадлежать номинальной шкале, а зависимые характеристики быть метрическими. Соблюдение данного условия необходимо для обеспечения высокой точности производимых расчетов. В практической деятельности возможно, чтобы группирующая переменная принадлежала также к порядковой шкале, а дискриминационная – к шкале любого типа, однако надо четко понимать конкретные исследовательские задачи и объекты аналитической практики.

В результате проведения дискриминантного анализа осуществляется построение модели (дискриминантной функции), общий вид которой (4.19)

$$D = b_0 + b_i X_1 + b_2 X_2 + ... + b_k X_k, \qquad (4.19)$$

где D – группирующая (зависимая) переменная;

b_k – коэффициенты дискриминантной функции;

b_o – свободный член (константа);

x_n – дискриминационные (независимые) переменные.

Данная модель позволяет определять принадлежность каждого конкретного объекта к группе, опираясь на базовые характеристики исследования, признанные исследователем как значимые.

Основные цели дискриминантного анализа отражены на рис. 4.16.

Целесообразность дискриминантного анализа определяется на основе исследовательских задач.

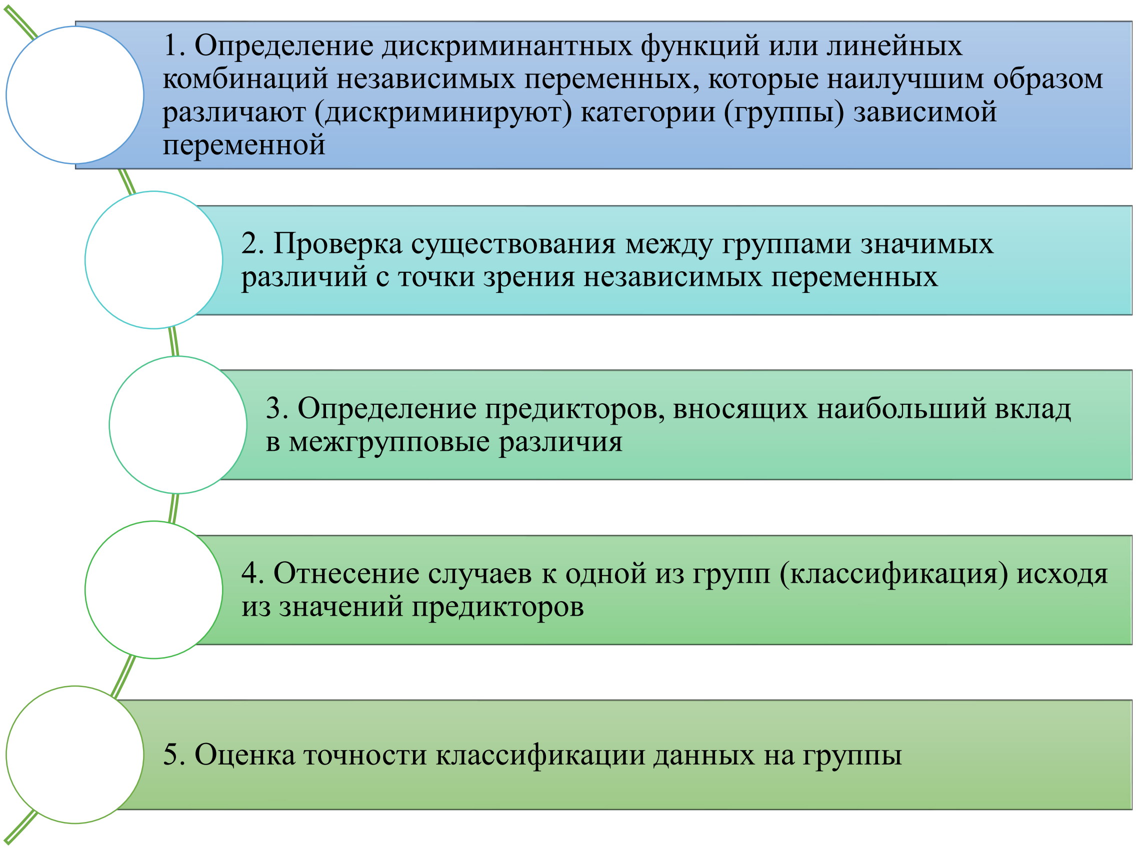


Рис. 4.16. Основные виды дискриминантного анализа

К статистикам, используемым в дискриминантном анализе, относятся следующие коэффициенты и показатели.

Каноническая корреляция используется для измерения степени связи между дискриминантными показателями и группами. Это мера связи между единственной дискриминирующей функцией и набором фиктивных переменных, которые определяют принадлежность к данной группе.

Центроид (средняя точка) – это средние значения для дискриминантных показателей конкретной группы. Центроидов столько, сколько групп, т. е. один центроид для каждой группы. Средние группы для всех функций – это групповые центроиды.

Классификационная матрица. Иногда ее называют смешанной матрицей, или матрицей предсказания. Классификационная матрица содержит ряд правильно классифицированных и ошибочно классифицированных случаев. Верно классифицированные случаи лежат на диагонали матрицы, поскольку предсказанные и фактические группы одни и те же. Элементы, не лежащие по диагонали матрицы, представляют случаи, классифицированные ошибочно. Сумма элементов, лежащих на диагонали, деленная на общее количество случаев, дает коэффициент результативности.

Ненормированные коэффициенты дискриминантной функции – это коэффициенты переменных, когда они измерены в первоначальных единицах.

Дискриминантные показатели. Сумма произведений ненормированных коэффициентов дискриминантной функции на значения переменных, добавленная к постоянному члену.

Собственное (характеристическое) значение. Для каждой дискриминантной функции собственное значение – это отношение межгрупповой суммы квадратов к внутригрупповой сумме квадратов. Большие собственные значения указывают на функции более высокого порядка.

F-статистика и ее значимость. Значения F-статистики вычисляют однофакторный дисперсионный анализ, разбивая на группы независимую переменную. Каждый предиктор, в свою очередь, служит в ANOVA метрической зависимой переменной.

Средние группы и групповые стандартные отклонения. Эти показатели вычисляют для каждого предиктора каждой группы.

Объединенная межгрупповая корреляционная матрица. Ее вычисляют усреднением отдельных ковариационных матриц для всех групп.

Нормированные коэффициенты дискриминантных функций. Коэффициенты дискриминантных функций используют как множители для нормированных переменных, т. е. переменных с нулевым средним и дисперсией, равной единице.

Структурные коэффициенты корреляции известны как дискриминантные нагрузки; представляют собой линейные коэффициенты корреляции между предикторами и дискриминантной функцией.

Общая корреляционная матрица. Если при вычислении корреляций наблюдения обрабатывают так, как будто они взяты из одной выборки, то в результате получают общую корреляционную матрицу.

Коэффициент λ Уилкса. Иногда называемый U-статистикой, коэффициент λ Уилкса для каждого предиктора – это отношение внутригрупповой суммы квадратов к общей сумме квадратов. Его значение варьируется от 0 до 1. Большое значение λ (около 1) указывает на то, что средние группы не должны различаться. Малые значения λ (около 0) указывают на то, что средние группы различаются.

Процедура выполнения дискриминантного анализа состоит из шести основных шагов (рис. 4.17).

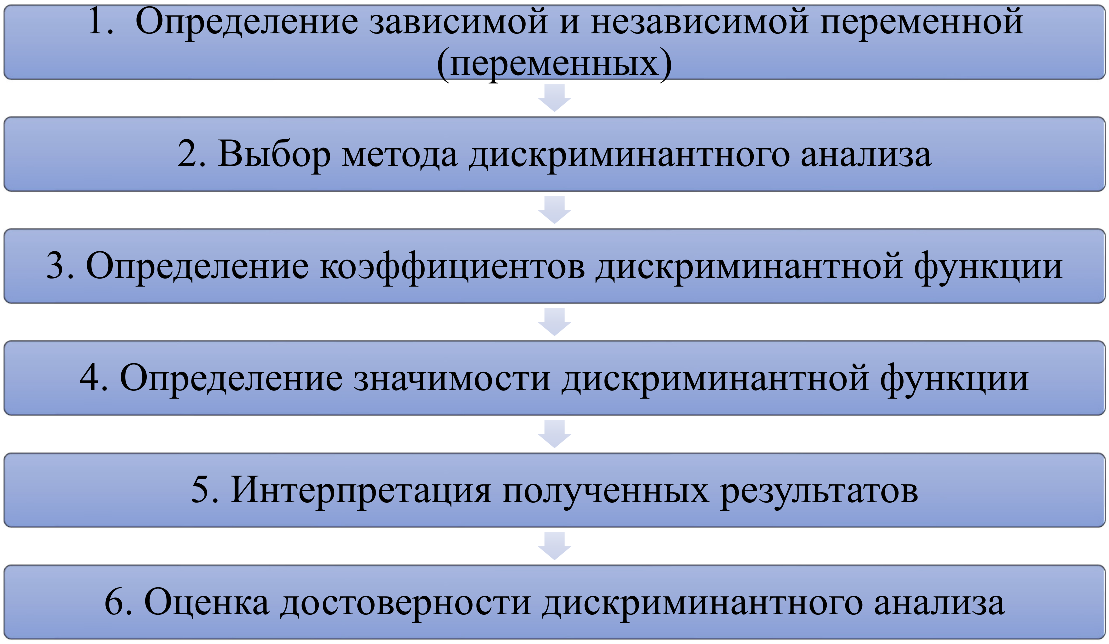


Рис. 4.17. Этапы процедуры дискриминантного анализа

На первом этапе анализа определяется, что является зависимой переменной, а что результирующим фактором. Зависимая переменная должна состоять из двух или больше взаимоисключающих и взаимно исчерпывающих категорий. Если зависимая переменная измерена с помощью интервальной или относительной шкалы, то ее следует в первую очередь перевести к статусу категориальной. Например, отношение к фирме, измеренное по девятибалльной шкале, можно категоризировать как неблагоприятное (1, 2, 3, 4), нейтральное (5) и благоприятное (6, 7, 8, 9). Также возможно формирование одинаковых групп точками отсечек по результатам графического анализа графика распределения значений зависимой переменной. Предикторы следует выбирать исходя из теоретической модели или ранее проверенного исследования, или (в случае поискового исследования) из интуиции и опыта исследователя.

Далее выборку делят на две части. Одна из них – анализируемая выборка – для вычисления дискриминантной функции. Другая часть – проверочная выборка – используется для проверки результатов дискриминантного моделирования.

Если исследователь сталкивается с необходимостью работы с большой по объему выборкой, ее можно разбить на две меньшие равные совокупности, первая из которых будет анализируемой, а вторая проверочной. Затем анализ повторяется, однако выполняемые выборками функции меняются: анализируемая становится проверочной, а проверочная – анализируемой. Таким образом, осуществляется двойная перекрестная проверка результатов моделирования.

Часто распределение количества случаев в анализируемой и проверочной выборках явствует из распределения в общей выборке. Рассмотрим конкретный пример. Предположим, что 50 % фирм выборки развиваются стабильно, а в деятельности другой половины организаций часто возникают проблемы под влиянием внешних факторов. Таким образом, ½ анализируемых фирм более подвержены риску, а другая половина – менее. Или предположим, что четверть организации менее подвержены внешним рискам и угрозам. В таком случае выбор проверочной и анализируемой выборки должен руководствоваться теми же соотношениями (25 : 75 %).

Для выбора предикторов в дискриминантной функции можно использовать два метода (рис. 4.18).

Рис. 4.18. Методы выбора предикторов в дискриминантной функции

На втором этапе осуществляется выбор метода дискриминантного анализа, который описывается числом категорий, имеющихся у зависимой переменной. Выделяют дискриминантный анализ для двух групп и множественный анализ: при осуществлении первого анализируются две категории, второй базируется на анализе трех и более категорий.

Главное отличие между ними заключается в том, что при наличии двух групп возможно вывести только одну дискриминантную функцию. Используя множественный дискриминантный анализ, можно вычислить несколько функций.

Рассмотрим случай для двух дискриминантных переменных. Тогда определение коэффициентов дискриминантной функции будет сведено к следующему.

Функция f(X) называется канонической дискриминантной функцией, а величины x_1 и x_2 – дискриминантными переменными (4.20)

$$f(x) = a_1X_1 + a_2X_2. \tag{4.20}$$

Дискриминантная функция может быть как линейной, так и нелинейной. Выбор вида этой функции зависит от геометрического расположения разделяемых классов в пространстве дискриминантных переменных.

Коэффициенты дискриминантной функции (a_i) определяются таким образом, чтобы $\bar{f}_1(X)$ и $\bar{f}_2(X)$ как можно больше различались между собой.

Вектор коэффициентов дискриминантной функции (A) определяется по формуле (4.21)

$$A = S_*^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\,. \tag{4.21}$$

Полученные значения коэффициентов подставляют в формулу и для каждого объекта в обоих множествах вычисляют дискриминантные функции f(X), затем находят среднее значение для каждой группы ($\bar{f}_k$).

Таким образом, каждому *i*-му наблюдению, которое первоначально описывалось *m*-переменными, будет соответствовать одно значение дискриминантной функции, и размерность признакового пространства снижается.

Перед тем как непосредственно приступить к процедуре классификации, нужно определить границу, разделяющую два множества.

Такой величиной может быть значение функции, равноудаленное от $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ (4.22):

$$c = \frac{1}{2}(\bar{f}_1 + \bar{f}_2). \quad (4.22)$$

Величина c называется константой дискриминации.

Объекты, расположенные над разделяющей поверхностью $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = c$ находятся ближе к центру множества M_1, следовательно, могут быть отнесены к первой группе, а объекты, расположенные ниже этой поверхности, ближе к центру второго множества, относятся ко второй группе.

Если граница между группами будет выбрана как сказано выше, то в этом случае суммарная вероятность ошибочной классификации будет минимальной.

Важнейшим этапом дискриминантного исследования является анализ значимости результатов моделирования.

Бессмысленно интерпретировать результаты анализа, если определенные дискриминантные функции не являются статистически значимыми, поэтому следует выполнить статистическую проверку нулевой гипотезы о равенстве средних всех дискриминантных функций во всех группах генеральной совокупности. В программе SPSS эта проверка базируется на коэффициенте лямбда (λ) Уилкса. Если одновременно проверяют несколько функций, как в случае множественного дискриминантного анализа, то коэффициент λ является суммой одномерных λ для каждой функции. Уровень значимости оценивают исходя из преобразования λ-статистики в статистику *Хи*-квадрата (исходя из распределения *Хи*-квадрата, которому подчиняется λ-статистика). Если нулевую гипотезу отклоняют, что указывает на значимую дискриминацию, то можно продолжать интерпретировать результаты.

Для интерпретации дискриминантных весов используется процедура, аналогичная множественному регрессионному анализу.

Значение коэффициента для конкретного предиктора зависит от других предикторов, включенных в дискриминантную функцию. Знаки коэффициентов условны, но они указывают, какие значения переменной приводят к большим и маленьким значениям функции и связывают их с конкретными группами.

При наличии мультиколлинеарности между независимыми переменными не существует однозначной меры относительной важности предикторов для дискриминации между группами. Помня об этом предостережении, можно получить некоторое представление об относительной важности переменных, изучив абсолютные значения нормированных коэффициентов дискриминантной функции. Как правило, предикторы с относительно большими нормированными коэффициентами вносят больший вклад в дискриминирующую мощность функции по сравнению с предикторами, имеющими меньшие коэффициенты.

Некоторое представление об относительной важности предикторов можно также получить, изучив структурные коэффициенты корреляции, которые также называют каноническими, или дискриминантными, нагрузками. Эти линейные коэффициенты корреляции между каждым из предикторов и дискриминантной функцией представляют дисперсию, которую предиктор делит вместе с функцией. Как и нормированные коэффициенты, эти коэффициенты корреляции следует использовать осторожно.

При интерпретации результатов дискриминантного анализа также может помочь разработка характеристической структуры для каждой группы посредством описания каждой группы через групповые средние для предикторов.

Оценка достоверности дискриминантного анализа является заключительным этапом исследования. Как уже говорилось, данные разбивают случайным образом на две подвыборки. Анализируемую часть выборки используют для вычисления дискриминантной функции, а проверочную – для построения классификационной матрицы.

Дискриминантные веса, определенные анализируемой выборкой, умножают на значения независимых переменных в проверочной выборке, чтобы получить дискриминантные показатели для случаев в этой выборке. Затем случаи распределяют по группам, исходя из дискриминантных показателей и соответствующего правила принятия решения. Например, при дискриминантном анализе двух групп случай может быть отнесен к группе с самым близким по значению центроидом. Затем, сложив элементы, лежащие на диагонали матрицы, и разделив полученную сумму на общее количество случаев, можно определить коэффициент результативности, или процент верно классифицированных случаев. Полезно сравнить процент случаев, верно классифицированных с помощью дискриминантного анализа, с процентом случаев, который можно получить случайным образом. Для равных по размеру групп процент случайной классификации равен частному от деления единицы на количество групп. Превысит ли и насколько количество верно классифицированных случаев их случайное количество? Здесь нет общепринятого подхода, хотя некоторые авторы считают, что точность классификации, достигнутая с помощью дискриминантного анализа, должна быть по крайней мере на 25 % выше, чем точность, которую можно достичь случайным образом.

Большинство программ для выполнения дискриминантного анализа также определяют классификационную матрицу исходя из анализируемой выборки. Поскольку программы учитывают даже случайные вариации в данных, то полученные результаты всегда точнее, чем классификация данных на основе проверочной выборки.

4.4. Сущность дисперсионного анализа в статистике фирмы

Дисперсионный анализ представляет собой статистический метод, с помощью которого осуществляется анализ степени влияния факторов на результаты эксперимента путем исследования значимости различий в средних значениях.

Сущность дисперсионного анализа (analysis of variance, ANOVA) заключается в том, чтобы разбить дисперсию измеряемого признака на отдельные элементы, описывающие влияние каждого отдельного фактора, а также их взаимодействия.

Последующее сравнение данных элементов позволяет выявить долю вариации исходных данных, обусловленную факторным влиянием и влиянием случайных отклонений.

Соответственно, становится возможной оценка значимости каждого из рассматриваемых факторов, а также их вариантов комбинаций.

Фактором при осуществлении дисперсионного анализа называется переменная, которая предположительно может оказывать значимый вклад в формирование конечного результата.

Дисперсионный анализ называется однофакторным, если рассматривается зависимость только от одного фактора, и многофакторным, если анализируется влияние двух или более признаков на результат.

Применительно к статистике фирмы могут быть рассмотрены следующие ситуации: предположим, что требуется построение модели объяснения выручки фирм тем, что они расположены в различных городах страны.

В данном случае переменная «месторасположение фирмы» будет выполнять роль анализируемого фактора. Уровнем фактора является конкретное его значение (например, наименование населенного пункта расположения фирмы).

Откликом в дисперсионном анализе принято называть значение измеряемого признака (в рамках рассматриваемого примера откликом выступают конкретные значения выручки фирм).

Для однофакторного дисперсионного анализа модель выглядит следующим образом (4.23):

$$y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, k}, \tag{4.23}$$

где y_{ij} – i-е наблюдаемое значение отклика в j-ой группе (для j-го уровня фактора);

μ – среднее значение отклика по всем уровням фактора (среднее по всей совокупности);

μ_j – среднее значение отклика для j-го уровня фактора;

$\alpha_j = \mu_j - \mu$ – дифференциальный эффект среднего, который соответствует j-му уровню фактора;

ε_{ij} – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией σ^2.

Очевидно, что при заданных величинах μ_j величины α_j и μ определяются неоднозначно, поэтому необходимо наложить дополнительное условие, устанавливающие связь между этими величинами. Обычно используют одно из следующих условий (4.24 или 4.25):

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0, \tag{4.24}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0, \ \alpha_k = 0. \tag{4.25}$$

Выражение $y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$ можно представить в виде (4.26)

$$y_{ij} = \mu + (\mu_j - \mu) + (y_{ij} - \mu_j) \tag{4.26}$$

или (4.27)

$$y_{ij} - \mu = (\mu_j - \mu) + (y_{ij} - \mu_j). \tag{4.27}$$

Математический смысл данного выражения заключается в следующем: отклонение наблюдаемого значения отклика для j-й группы складывается из суммы двух слагаемых. Одним из них выступает отклонение отклика от среднего значения j-й группы $(y_{ij} - \mu_j)$, а вторым – отклонение среднего значения j-й группы от среднего значения всей совокупности $(\mu_j - \mu)$.

Как правило, разложение общей дисперсии для выборочных данных представляется в виде равенства сумм квадратов соответствующих отклонений (4.28)

$$SS_T = SS_B + SS_R. \qquad (4.28)$$

Общая сумма квадратов отклонений (4.29)

$$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y})^2. \qquad (4.29)$$

Сумма квадратов отклонений групповых средних от общего среднего (4.30)

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{y}_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{y}_i - \overline{y})^2. \qquad (4.30)$$

Выражение (4.30) также называется эффектом фактора (суммой квадратов эффекта).

Внутригрупповая (остаточная) сумма квадратов отклонений определяется по формуле (4.31).

$$SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2. \qquad (4.31)$$

Выражение (4.31) называется также остаточным эффектом (эффектом ошибок).

Таким образом, в разложении дисперсии на составляющие заключена основная идея дисперсионного анализа: общая вариация переменной, обусловленная влиянием фактора и измеренная суммой SS_T, складывается из двух компонент SS_B и SS_R, которые используются для описания изменчивости переменной между уровнями фактора (SS_B) и внутри уровней фактора (SS_R).

При осуществлении дисперсионного анализа анализируются не сами значения суммы квадратов отклонений, а средние квадраты. Они получаются путем деления сумм квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы.

Число степеней свободы для суммы квадратов случайных величин определяется как общее число линейно независимых слагаемых.

Для полной суммы квадратов $SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2$ число степеней свободы $\nu_T = n - 1$, так как при ее расчете используются n наблюдений, которые связаны между собой единственным уравнением для общего выборочного среднего всей совокупности.

Для суммы квадратов эффекта фактора $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$ число степеней свободы $\nu_B = k - 1$, так как при ее расчете используются k групповых средних, связанных между собой также одним уравнением для общего выборочного среднего всей совокупности.

Для суммы квадратов ошибок $SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ число степеней свободы $\nu_R = n - k$, ибо при ее расчете используются n наблюдений, связанных между собой k уравнениями для выборочных средних k групп.

Соответственно выражения для средних квадратов отклонений, которые являются оценками соответствующих дисперсий, имеют вид (4.32) – (4.34).

Оценка общей дисперсии

$$MS_T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 . \tag{4.32}$$

Оценка межгрупповой дисперсии

$$MS_B = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2 . \tag{4.33}$$

Оценка остаточной дисперсии

$$MS_R = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 . \tag{4.34}$$

При условии истинности нулевой гипотезы $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ статистики MS_B и MS_R являются несмещенными оценками одной и той же дисперсии σ^2.

В таких условиях сущность проверки нулевой гипотезы состоит в анализе равенства дисперсий на основе F-отношения (4.35)

$$F = \frac{MS_B}{MS_R} = \frac{n-k}{k-1}\frac{SS_B}{SS_R}. \quad (4.35)$$

Если нулевая гипотеза верна, статистика F в случае нормального распределения величин ε_{ij} обладает распределением Фишера с $v_1 = k-1$ и $v_2 = n-k$ числом степеней свободы.

В случае, если наблюдаемое значение больше или равно критическому значению распределения Фишера с уровнем α и с числом степеней свободы $v_1 = k-1$ и $v_2 = n-k$ (т. е. $F_{набл} \geq F_{кр}$), нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние для различных уровней фактора значимо различаются.

Если применяются порядковые данные, непараметрической альтернативой однофакторного дисперсионного анализа будет ранговый дисперсионный анализ Краскела – Уоллиса.

Его основой является однофакторный дисперсионный анализ, однако вместо исходных значений переменных анализируются их ранговые характеристики.

Если обозначить через R_{ij} ранг элемента x_{ij} в общем вариационном ряду значений отклика, то величины $\overline{R}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}$ будут определять средние ранги для элементов j-й группы, а величина $\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{k} R_{ij} = \frac{n+1}{2}$ – средний ранг всей совокупности. Таким образом, величина $\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{R}_j - \overline{R})^2$ будет использоваться для характеристики межгруппового разброса рангов.

Если нулевая гипотеза о равенстве средних рангов верна, статистика примет вид (4.36)

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{R}_j - \overline{R})^2. \quad (4.36)$$

Приближенно она будет равна распределению *хи*-квадрата с k – 1 степенью свободы.

В случае, если соблюдается неравенство $H_{набл} \geq H_{кр}$, нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние ранги для различных уровней фактора значимо различаются.

Если производится анализ двух и более различных факторов по результатам наблюдений, имеет место ***многофакторный дисперсионный анализ***.

Примером двухфакторной модели в статистике фирмы может служить следующая модель. Например, двухфакторная модель будет применяться при построении объяснения различий в доходах фирм, обусловленных как месторасположением организаций, так и спецификой их вида деятельности.

Рассмотрим подробнее влияние на величину X фактора А, имеющего k-уровней, и фактора В, имеющего m уровней.

Построение двухфакторной модели опирается на выражение (4.37)

$$y_{ijl} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijl}, \quad l = \overline{1, n_{ij}}, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{4.37}$$

где y_{ijl} – l-е наблюдаемое значение отклика для i-го уровня фактора А и j-го уровня фактора В;

μ – среднее значение отклика по всей совокупности (генеральное среднее);

μ_{ij} – среднее значение отклика для *i*-го уровня фактора А и *j*-го уровня фактора В;

$\alpha_i = \mu_{i*} - \mu$ – главный эффект i-го уровня фактора А (μ_{i*} – среднее значение отклика для i-го уровня фактора А);

$\beta_j = \mu_{*j} - \mu$ – главный эффект j-го уровня фактора В (μ_{*j} – среднее значение отклика для j-го уровня фактора В);

$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i*} - \mu_{*j} + \mu$ – эффект взаимодействия i-го уровня фактора А и j-го уровня фактора В;

ε_{ijl} – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией σ^2.

Средние могут определяться через величины μ_{ij}, например, как взвешенные средние:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} M(y_{ijl}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\mu_{ij};$$

$$\mu_{i*} = \frac{1}{n_{i*}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} M(y_{ijl}) = \frac{1}{n_{i*}}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\mu_{ij};$$

$$\mu_{*j} = \frac{1}{n_{*j}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{n_{ij}} M(y_{ijl}) = \frac{1}{n_{*j}} \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \mu_{ij} \; ;$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \; ;$$

$$n_{i*} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \; ;$$

$$n_{*j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \; .$$

Возможны и другие варианты определения средних величин.

Выражение $y_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijl}$ можно представить в виде (4.38)

$$y_{ijl} - \mu = (\mu_{i*} - \mu) + (\mu_{*j} - \mu) + (\mu_{ij} - \mu_{i*} - \mu_{*j} + \mu) + (x_{ijl} - \mu_{ij}) . \qquad (4.38)$$

Данное соотношение говорит о том, что отклонение наблюдаемого значения отклика складывается из суммы четырех слагаемых: отклонения отклика от среднего значения для i, j-го набора уровней факторов A и B $(y_{ijl} - \mu_{ij})$, главных эффектов i-го уровня фактора A и j-го уровня фактора B и эффекта взаимодействия.

Таким образом, дисперсия отклика может быть представлена в виде суммы четырех дисперсий, одна из которых характеризует внутригрупповую изменчивость для i, j-го набора уровней факторов A и B, а остальные – соответствующие эффекты.

Метод наименьших квадратов (МНК) оценки параметров модели двухфакторного дисперсионного анализа достаточно просто получить только в случае пропорциональных частот, т. е. при условии (4.39):

$$\frac{n_y}{n} = \frac{n_{y*}}{n} \frac{n_{*j}}{n} \qquad \forall i = \overline{1,k}, \; j = \overline{1,m}. \qquad (4.39)$$

Данные условия выполняются, например, если количества наблюдений n_{ij} для каждого сочетания уровней факторов совпадают. Если соблюдается данное условие, эксперимент принято считать сбалансированным.

В случае пропорциональных частот исследователь получает понятные МНК-оценки для параметров модели вне зависимости от условий, накладываемых на параметры модели:

$\hat{\mu} = \overline{y}$;

$\hat{\alpha}_i = \overline{y}_{i*} - \overline{y}$;

$\hat{\beta}_j = \overline{y}_{*j} - \overline{y}$;

$\hat{\gamma}_{ij} = \overline{y}_{ij} - (\overline{y}_{i*} + \overline{y}_{*j}) + \overline{y}$;

$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} y_{ijl}$;

$\overline{y}_{i*} = \frac{1}{n_{i*}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} y_{ijl}$;

$\overline{y}_{*j} = \frac{1}{n_{*j}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n_{ij}} y_{ijl}$;

$\overline{y}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}}\sum_{l=1}^{n_{ij}} y_{ijl}$.

В случае пропорциональных частот также справедливо следующее разложение общей суммы квадратов отклонений на составляющие (4.40):

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_R, \tag{4.40}$$

где $SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} (y_{ijl} - \overline{y})^2$ – общая, или полная, сумма квадратов отклонений;

$SS_A = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} (\overline{y}_{i*} - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_{i*}(\overline{y}_{i*} - \overline{y})^2$ – сумма квадратов отклонений средних по уровням фактора A от общего среднего или сумма квадратов главных эффектов A (можно и так: сумма квадратов, соответствующих эффекту фактора A);

$SS_B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} (\overline{y}_{*j} - \overline{y})^2 = \sum_{j=1}^{m} n_{*j}(\overline{y}_{*j} - \overline{y})^2$ – сумма квадратов отклонений средних по уровням фактора B от общего среднего или сумма квадратов главных эффектов B;

$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}} (\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{*j} - \overline{y}_{i*} + \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{*j} - \overline{y}_{i*} + \overline{y})^2$ – сумма квадратов взаимодействия эффектов A и B;

$$SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_{ij}}(y_{ijl} - \bar{y}_{ij})^2$$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

Число степеней свободы для сумм квадратов SS_A и SS_B равно соответственно $\nu_A = k-1$ и $\nu_B = m-1$. Число степеней свободы для суммы квадратов взаимодействия эффектов SS_{AB} равно $\nu_{AB} = (к-1)(m-1)$. Число степеней свободы суммы квадратов остатков SS_R равно $\nu_R = n-km$. Соответственно, средние суммы квадратов будут равны:

$$MS_A = \frac{SS_A}{k-1};$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{m-1};$$

$$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(k-1)(m-1)};$$

$$MS_R = \frac{SS_R}{n-km}.$$

Так как в рамках построения двухфакторной модели рассматриваются различные эффекты от влияния факторов, необходимо осуществлять проверку гипотез значимости различных выявленных эффектов с помощью инструментов статистического анализа.

При условии истинности H_0:«эффект незначим» средний квадрат эффекта является несмещенной оценкой дисперсии σ^2, так же как и величина MS_R. Поэтому в качестве статистики критериев проверки гипотез о значимости соответствующих эффектов можно использовать отношения средней суммы квадратов эффектов к средней сумме квадратов остатков.

При нормальном распределении остатков данные статистики имеют распределение Фишера с параметрами, определяемыми числами степеней свободы соответствующих сумм, участвующих в отношении.

В том случае, если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы ν_1 и ν_2, то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние для различных уровней фактора значимо различаются.

В случае непропорциональных частот оценки МНК-параметров модели при заданных $k+m-1$ условиях параметры модели могут быть получены численно, однако в этом случае нарушается условие ортогональности сумм квадратов эффектов.

Соответственно, независимая одновременная проверка всех гипотез двухфакторного анализа не представляется возможной. Однако всегда существует возможность проверки значимости любого из выявленных эффектов (либо линейной комбинации эффектов), рассматривая соответствующую однофакторную модель и выделив соответствующую сумму квадратов. Затем можно исключить данную сумму квадратов из общей суммы квадратов и проверить значимость другого эффекта и т. д.

Таким образом, происходит последовательное разложение суммы квадратов на составляющие.

Можно использовать и другой подход, выделив на основе однофакторной модели сумму квадратов всех эффектов за исключением одного, а затем уже исследовать значимость этого эффекта на основе оставшейся суммы квадратов.

В зависимости от того, как формируется разложение суммы квадратов на составляющие, различаются и статистики критериев для проверки гипотез о значимости эффектов в несбалансированной многофакторной модели дисперсионного анализа, при этом общий принцип формирования статистики критерия на основе F-отношения сумм квадратов эффекта и остатков остается прежним.

В многофакторной несбалансированной модели принято рассматривать три основных типа разложения суммы квадратов.

При этом в анализе будут рассматриваться следующие обозначения:

$R(\mu)$ – остаточная сумма квадратов для модели, содержащей только параметр μ – общее среднее;

$R(\mu, A)$ – остаточная сумма квадратов для модели, учитывающей эффект фактора A, т. е. для модели, содержащей параметр μ и параметры $\alpha_i,\, i=\overline{1,k}$;

$R(\mu, B)$ – остаточная сумма квадратов для модели, учитывающей эффект фактора B, т. е. для модели, содержащей параметр μ и параметры $\beta_j,\, j=\overline{1,m}$;

$R(\mu, A, B)$ – остаточная сумма квадратов для модели, учитывающей эффекты факторов А и В, без учета взаимодействия факторов;

$R(\mu, A, B, AB)$ – остаточная сумма квадратов для полной модели, учитывающей как эффекты факторов А и В, так и эффект взаимодействия факторов АВ.

Следует отметить, что записи вида $R(\mu, A)$, $R(\mu, A, B)$, $R(\mu, A, B, AB)$ однозначно характеризуют не только остаточную сумму квадратов, но и саму модель, поэтому в дальнейшем под этой записью будем понимать как остаточную сумму квадратов, так и модель в зависимости от контекста.

Под записью $SS(A \mid B)$ будем понимать сумму квадратов, соответствующих эффекту фактора А, после того как из разложения была удалена сумма квадратов, соответствующая эффекту фактора В.

Тип I называют также последовательной суммой квадратов. Разложение зависит от порядка эффектов в модели. Каждый последующий эффект скорректирован на предыдущие эффекты, эффекты взаимодействия оцениваются после эффектов факторов. Разложение является аддитивным по отношению к общей сумме квадратов.

Формирование сумм квадратов на примере двухфакторной модели (в качестве первого фактора выбирается фактор А) приведено ниже.

Суммы квадратов I типа для эффектов модели, где в качестве первого выбран фактор А, будут иметь вид:

эффект А: $SS(A) = R(\mu) - R(\mu, A)$;

эффект В: $SS(B \mid A) = R(\mu, A) - R(\mu, A, B)$;

эффект АВ: $SS(AB \mid A, B) = R(\mu, A, B) - R(\mu, A, B, AB)$.

Все суммы определяются однозначно независимо от условий, накладываемых на параметры модели. Таким образом, чтобы получить данные суммы, потребуется построить четыре различные модели (хотя можно сократить число моделей, используя для построения сумм соответствующие оценочные функции).

В **типе II** суммы квадратов каждого эффекта в модели корректируются по всем остальным «подходящим» эффектам, т. е. вычисляются после удаления из общей суммы квадратов сумм квадратов «подходящих» эффектов. Под «подходящим» понимается любой эффект, который не содержит исследуемый эффект. Разложение не зависит от порядка эффектов в модели и не является аддитивным по отношению к общей сумме квадратов.

Суммы квадратов II типа для эффектов двухфакторной модели будут иметь вид:

эффект A: $SS(A \mid B) = R(\mu, B) - R(\mu, A, B)$;

эффект B: $SS(B \mid A) = R(\mu, A) - R(\mu, A, B)$;

эффект AB: $SS(AB \mid A, B) = R(\mu, A, B) - R(\mu, A, B, AB)$.

Все суммы определяются однозначно независимо от условий, накладываемых на параметры модели. Так же как и в предыдущем случае, чтобы получить данные суммы, потребуется построить четыре различные модели.

При использовании **III типа** суммы квадратов каждого эффекта в модели корректируются по всем остальным эффектам и являются ортогональными к суммам квадратов, содержащих исследуемый эффект. Разложение не зависит от порядка эффектов в модели и не является аддитивным по отношению к общей сумме квадратов.

Суммы квадратов III типа для эффектов двухфакторной модели будут иметь вид:

эффект A: $SS(A \mid B, AB) = R(\mu, B, AB) - R(\mu, A, B, AB)$;

эффект B: $SS(B \mid A, AB) = R(\mu, A, AB) - R(\mu, A, B, AB)$;

эффект AB: $SS(AB \mid A, B) = R(\mu, A, B) - R(\mu, A, B, AB)$.

Суммы квадратов $R(\mu, A, AB)$ и $R(\mu, B, AB)$ зависят от условий, накладываемых на параметры модели. Для выполнения условий ортогональности параметры модели должны удовлетворять следующим выражениям:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_{ij} = 0,\ j = \overline{1, m-1};$$

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} = 0,\ i = \overline{1, k-1};$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} = 0,\ i = \overline{1, k},\ j = \overline{1, m}.$$

Так же как и в предыдущих случаях, чтобы получить данные суммы, потребуется построить четыре различные модели.

На практике часто исследователи сталкиваются с проблемой соответствия различным уровням фактора одних и тех же объектов.

Метод дисперсионного анализа может быть применен для анализа чистой прибыли фирм за различные периоды времени. Однако сделать вывод о том, что исходные данные не являются взаимокоррелируемыми величинами, однозначно нельзя.

В такой ситуации анализ эффектов фактора опирается на дисперсионный анализ, предполагающий исключение влияния зависимостей выборок, которые связаны с повторным рассмотрением одних и тех же объектов. Это метод дисперсионного анализа зависимых выборок (повторных наблюдений). С его помощью возможно уменьшение общей дисперсии данных за счет исключения составляющей индивидуальных различий из остаточной дисперсии. Таким образом повышается мощность критерия, что оказывает положительное влияние на модель.

Предполагается, что j-е наблюдаемое значение отклика в каждой группе соответствует одному и тому же объекту наблюдения. В простейшей однофакторной модели дисперсионного анализа повторных измерений исходят из следующей модели порождения данных (4.41):

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} = \mu + w_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.41}$$

где y_{ij} – j-е наблюдаемое значение отклика в i-й группе;

μ_{ij} – среднее значение отклика для i-го наблюдения в j-й группе;

ε_{ij} – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией σ^2;

μ – среднее значение отклика;

$w_i = \mu_{i*} - \mu$ – эффект i-го уровня фактора W, $\mu_{i*} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}$ – среднее для i-го уровня фактора;

$\tau_j = \mu_{*j} - \mu$ – эффект индивидуальности j-го наблюдения, $\mu_{*j} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_{ij}$ – среднее для j-го объекта наблюдения;

ε_{ij} – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией σ^2.

Уравнение (4.41) можно рассматривать как соответствующее классической модели двухфакторного дисперсионного анализа без компоненты, учитывающей взаимодействие факторов, и числом наблюдений для каждой ячейки $n_{ij} = 1$ (что соответствует сбалансированному плану).

Таким образом, его можно записать в виде (4.42)

$$y_{ij} - \mu_{*j} = (\mu_{i*} - \mu) + \varepsilon_{ij} = w_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (4.42)$$

Для того чтобы исключить эффект индивидуальности наблюдений и анализировать только влияние фактора W на результаты наблюдений, мы должны перейти к рассмотрению величин $y_{ij} - \mu_{*j}$. МНК-оценкой параметра μ_{*j} является выборочное среднее $\bar{y}_{*j} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_{ij}$. Сумма квадратов наблюдений за вычетом суммы квадратов, соответствующих индивидуальным различиям, будет равна $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{*j})^2$.

Если обозначить $z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{*j}$, то разложение для суммы квадратов $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2$ будет иметь вид (4.43)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} n\bar{z}_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2. \qquad (4.43)$$

Число степеней свободы для суммы $SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2$ равно $nk - n$, для суммы $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n(\bar{z}_i - \bar{z})^2 = \sum_{i=1}^{k} n\bar{z}_i^2$ равно $k-1$, для суммы $SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2$ равно $nk - n - k + 1 = (n-1)(k-1)$. Соответственно, средние суммы квадратов отклонений будут равны (4.44) и (4.45):

$$MS_W = \frac{SS_W}{k-1} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n\bar{z}_i^2; \qquad (4.44)$$

$$MS_R = \frac{SS_R}{(n-1)(k-1)} = \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2. \qquad (4.45)$$

F-статистика для проверки гипотезы $H_0: w_1 = w_2 = \ldots = w_k = 0$ будет иметь вид $F = \dfrac{MS_W}{MS_R}$. Если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = k-1$ и $\nu_2 = (n-1)(k-1)$, то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние для различных уровней фактора W значимо различаются.

Данный критерий можно получить и как критерий для проверки соответствующей гипотезы в модели двухфакторного дисперсионного анализа.

Для модели справедливо следующее разложение для суммы квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n(\bar{y}_{i*}-\bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{n} k(\bar{y}_{*j}-\bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{*j}-\bar{y}_{i*}+\bar{y})^2 .$$

При данном разложении сумма квадратов, которая раньше в двухфакторной модели являлась суммой квадратов взаимодействий, стала остаточной суммой квадратов отклонений, а сумма квадратов, которая была остаточной суммой в двухфакторной модели, обратилась в ноль.

Сумма квадратов $\sum_{i=1}^{k} n(\bar{y}_{i*}-\bar{y})^2$ соответствует эффекту фактора W, а сумма квадратов $\sum_{j=1}^{n} k(\bar{y}_{*j}-\bar{y})^2$ соответствует эффекту индивидуальных различий. Таким образом, имеем (4.46) и (4.47)

$$SS_W = \sum_{i=1}^{k} n(\bar{y}_{i*}-\bar{y})^2 , \ \nu_W = k-1; \tag{4.46}$$

$$SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{*j}-\bar{y}_{i*}+\bar{y})^2 , \ \nu_W = (n-1)(k-1) . \tag{4.47}$$

Следовательно, для расчета статистики можно не осуществлять переход к центрированным по наблюдениям данным, однако необходимо грамотно определить вид рассчитываемой остаточной суммы квадратов.

Если предположить, что дополнительно все n объектов разбиты на m групп по p_j объектов в каждой, $j = \overline{1,m}$ ($\sum_{j=1}^{m} p_j = n$), соответствующих различным уровням фактора A, то на результаты наблюдений могут оказывать влияние фактор *W* повторных наблюдений, фактор *A*, воздействующий на слои объектов, и фактор индивидуальных различий каждого объекта. Соответственно, модель порождения данных принимает вид (4.48)

$$y_{ijl} = \mu_{ijl} + \varepsilon_{ijl} = \mu + w_i + \alpha_j + \tau_{jl} + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijl} \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,p_j}, \tag{4.48}$$

где y_{ijl} – l-е наблюдаемое значение отклика в i-й группе в j-м слое;

$\mu_{ijl} = \mu + w_i + \alpha_j + \tau_{jl} + \beta_{ij}$ – среднее для l-го наблюдаемого значения отклика в i-й группе в j-м слое;

μ – среднее значение отклика;

w_i – эффект i-го уровня фактора *W*;

α_j – эффект j-го уровня фактора *A*;

τ_{jl} – эффект индивидуальности l-го наблюдения в j-м слое;

β_{ij} – эффект взаимодействия i-го уровня фактора *W* и j-го уровня фактора *A*;

ε_{ijl} – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией σ^2.

Для того чтобы существовала возможность однозначно определять параметры модели, необходимо на параметры модели наложить дополнительные условия. В качестве этих условий примем:

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} = 0, \ j = \overline{1, m-1};$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} = 0, i = \overline{1, k-1}, \ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} = 0.$$

Обозначим $\mu_{*jl} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu_{ijl} = \mu + \alpha_j + \tau_{jl}$ – среднее для l-го объекта наблюдения в j-м слое. Таким образом, уравнение примет вид (4.49)

$$y_{ijl} - \mu_{*jl} = w_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijl} \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,p_j}. \tag{4.49}$$

Следовательно, на величину $y_{ijl} - \mu_{*jl}$ могут оказывать влияние только главный эффект фактора W и эффект взаимодействия факторов W и A. Соответствующее разложение суммы квадратов в случае равного числа наблюдений p_j для каждого слоя имеет вид (4.50)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p_j}(y_{ijl} - \overline{y}_{*jl})^2 = \sum_{i=1}^{k} n(\overline{y}_{i**} - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_j(\overline{y}_{ij*} - \overline{y}_{*j*} - \overline{y}_{i**} + \overline{y})^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p_j}(y_{ijl} - \overline{y}_{*jl} - (\overline{y}_{ij*} - \overline{y}_{*j*}))^2. \tag{4.50}$$

Сумма квадратов $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n(\overline{y}_{i**} - \overline{y})^2$ соответствует эффекту фактора W, сумма квадратов $SS_{WA} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_j(\overline{y}_{ij*} - \overline{y}_{*j*} - \overline{y}_{i**} + \overline{y})^2$ соответствует эффекту взаимодействия факторов W и A, а сумма квадратов $SS_R = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p_j}(y_{ijl} - \overline{y}_{*jl} - (\overline{y}_{ij*} - \overline{y}_{*j*}))^2$ является остаточной суммой квадратов. Числа степеней свободы соответствующих сумм квадратов равны:

$\nu_W = k - 1;$

$\nu_{WA} = (k-1)(m-1);$

$\nu_R = kn - (n-m) - (km-m) - m = (k-1)(n-m)$

(если заданы средние $\overline{y}_{*j*}$, $j = \overline{1,m}$, то независимо можно определить только $km - m$ величин $\overline{y}_{ij*}$ и $n - m$ величин $\overline{y}_{*jl}$), $\nu_W = k - 1$, $\nu_{WA} = (k-1)(m-1)$.

Соответственно, средние суммы квадратов отклонений будут равны (4.51)

$$MS_W = \frac{SS_W}{k-1},\ MS_{WA} = \frac{SS_{WA}}{(k-1)(m-1)},\ MS_R = \frac{SS_R}{(k-1)(n-m)}. \tag{4.51}$$

F-статистика для проверки гипотезы $H_0: w_1 = w_2 = \ldots = w_k = 0$ будет иметь вид $F = \dfrac{MS_W}{MS_R}$. Если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня

α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = k-1$ и $\nu_2 = m(k-1)(p-1)$, то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что эффект фактора W значим.

F-статистика для проверки гипотезы $H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{km} = 0$ соответственно будет иметь вид $F = \dfrac{MS_{WA}}{MS_R}$. Если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = (k-1)(m-1)$ и $\nu_2 = (k-1)(n-m)$, то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что эффект взаимодействия факторов W и A значим.

На основе разложения невозможно построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Для этого необходимо использовать разложение суммы квадратов отклонений, которая может быть получена из исходной, т. е., для проверки гипотезы $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ используем разложение, которое соответствует уравнению (4.52):

$$\mu_{*jl} - \mu = \alpha_j + \tau_{jl}, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,p_j}. \tag{4.52}$$

Для модели разложение суммы квадратов имеет вид (4.53)

$$k\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p_j}(\bar{y}_{*jl} - \bar{y})^2 = k\sum_{j=1}^{m} p_j(\bar{y}_{*j*} - \bar{y})^2 + k\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p_j}(\bar{y}_{*jl} - \bar{y}_{*j*})^2, \tag{4.53}$$

где $SS_A = k\sum_{j=1}^{m} p_j(\bar{y}_{*j*} - \bar{y})^2$ – сумма квадратов, соответствующая эффекту фактора A;

$SS_{R_1} = k\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(\bar{y}_{*jl} - \bar{y}_{*j*})^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений, которая есть не что иное, как сумма квадратов эффекта индивидуальных различий. Число степеней свободы для суммы SS_A: $\nu_A = m-1$, для остаточной суммы: $\nu_{R_1} = n-m$. Таким образом, F-отношение для проверки гипотезы $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ будет иметь вид $F = \dfrac{MS_A}{MS_{R_1}} = \dfrac{n-m}{m-1}\dfrac{SS_A}{SS_{R_1}}$. Если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня

α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = m-1$ и $\nu_2 = n-m$, то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что эффект фактора *A* значим.

Таким образом, в дисперсионном анализе повторных измерений, по сути, используются две модели.

Первая модель в качестве источника данных использует центрированные по объектам наблюдений данные и исследует различия в повторных наблюдениях и соответствующие эффекты взаимодействия.

Вторая модель в качестве источника данных использует средние по объектам наблюдения данные и исследует прочие эффекты. Если число наблюдений в слоях различное, то так же как и в многофакторной модели дисперсионного анализа, следует использовать разложения сумм квадратов различных типов. Используемый тип разложения определяется исследователем исходя из конкретной ситуации. Для большинства приложений дисперсионного анализа рекомендуется использовать III тип разложения.

Непараметрическим аналогом дисперсионного анализа повторных измерений является тест Фридмана. В нем предварительно ранжируются наблюдения для каждого из объектов наблюдения. Пусть r_{ij}, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$ – ранг *j*-го наблюдения в *i*-й группе. Обозначим $\overline{R}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ – средний ранг для *i*-й группы, $\overline{R} = \frac{k+1}{2}$ – средний ранг всех наблюдений. Тогда выборочная дисперсия для средних рангов групп будет равна (4.54)

$$D = \frac{1}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k} (\overline{R}_i - \overline{R})^2 . \qquad (4.54)$$

Максимальное значение дисперсии достигается, когда все наблюдения проранжированы согласованно, в этом случае средние ранги принимают целые значения от 1 до *k*. Соответствующее наибольшее значение дисперсии при этом равно (4.55)

$$D_{\max} = \frac{k(k+1)}{12} . \qquad (4.55)$$

Отношение $W = \dfrac{D}{D_{\max}} = \dfrac{12}{k^3 - k}\sum_{i=1}^{k}(\overline{R}_i - \overline{R})^2$ называется коэффициентом конкордации Кендалла, оно является характеристикой согласованности рангов наблюдений. Значения коэффициента конкордации меняются от 0 до 1, при значении 1 все наблюдения проранжированы одинаково, т. е. ранги для всех групп максимально различаются. Значение коэффициента конкордации, равное нулю, соответствует ситуации, когда средние ранги всех групп совпадают. С коэффициентом конкордации связана статистика Фридмана, определяемая по формуле (4.56)

$$S = n(k-1)W = \frac{12n}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}(\overline{R}_i - \overline{R})^2 . \tag{4.56}$$

При условии истинности нулевой гипотезы (средние ранги по группам не различаются) статистика S имеет распределение Фридмана. При больших k, n статистика Фридмана приближенно имеет распределение *Хи*-квадрат с $k-1$ степенью свободы. Если наблюдаемое значение статистики $S_{набл} \geq S_{кр}$, где $S_{кр}$ – критическая точка распределения *Хи*-квадрат с числом степеней свободы $k-1$ уровня α(или квантиль уровня $1-\alpha$), то нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние ранги для различных уровней повторных измерений значимо различаются.

Для двух зависимых групп вместо теста Фридмана следует использовать тест Уилкоксона для зависимых выборок (аналог теста Манна – Уитни для независимых выборок).

Если в результате дисперсионного анализа получается, что средние значения отклика для разных уровней фактора различаются, данный результат не является окончательным.

В дальнейшем подразумевается анализ того, для каких уровней фактора средние больше, для каких меньше, а для каких одинаковы. Основная процедура дисперсионного анализа не дает возможности ответить на эти вопросы.

Наиболее простым способом решения данной проблемы является проведение серии попарных сравнений с использованием *t*-критерия, используя в качестве оценки дисперсии величину MS_R – оценку внутригрупповой дисперсии, полученную в ходе дисперсионного анализа.

Такой подход реализуется в так называемом ***методе наименьшей значимой разности*** (LSD). Статистика критерия LSD для проверки гипотезы равенства средних μ_i и μ_j имеет вид (4.57)

$$t = \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j}{\sqrt{MS_R(1/n_i + 1/n_j)}}. \qquad (4.57)$$

Если наблюдаемое значение статистики $|t_{набл}| \geq t_{кр}$, где $t_{кр}$ – критическая точка распределения Стьюдента уровня $\alpha/2$ (или квантиль уровня $1-\alpha/2$) с числом степеней свободы $\nu = n-k$, то нулевая гипотеза отклоняется и принимается гипотеза $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

Существуют разные подходы к решению данной проблемы. Один из них – уменьшить уровень значимости при попарном сравнении так, чтобы вероятность хотя бы одного отклонения нулевой гипотезы равнялась заданному уровню значимости.

Такой подход реализуется в принципе Бонферрони множественных сравнений, в котором при каждом попарном сравнении задается уровень значимости α / C_k^2, где C_k^2 – число сравнений.

Данная величина гарантирует, что вероятность отклонения нулевой гипотезы (при ее истинности) хотя бы в одном из C_k^2 сравнений не превзойдет α. Однако принцип Бонферрони считается чересчур консервативным, он приводит к существенному снижению мощности критерия.

LSD-критерий и критерий Бонферрони занимают полярные позиции в ряду критериев множественных сравнений. Среди остальных критериев множественного сравнения средних можно выделить критерии множественных сравнений Шеффе, Ньюмена – Келса, Тьюки и др.

В методе множественных сравнений Шеффе для проверки гипотезы равенства средних μ_i и μ_j используется статистика (4.58)

$$F = \frac{(\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j)^2}{(k-1)MS_R(1/n_i + 1/n_j)}, \qquad (4.58)$$

где MS_R – оценка внутригрупповой (остаточной) дисперсии, полученная в ходе дисперсионного анализа. Если наблюдаемое значение статистики $F_{набл} \geq F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка распределения Фишера уровня α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = k-1$ и $\nu_2 = n-k$, то нулевая гипотеза отклоняется и принимается гипотеза $H_1: \mu_i \neq \mu_j$.

Критерий Шеффе также относится к достаточно консервативным критериям, т. е. обладает малой мощностью. Более мощными и соответственно, более чувствительными являются критерии Тьюки, Ньюмена – Келса, Дункана.

В методе множественных сравнений Тьюки (или достоверно значимой разности HSD) для проверки гипотезы $H_0 : \mu_i = \mu_j$ против альтернативы $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ используется статистика (4.59)

$$t_R = \frac{\left|\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j\right|}{\sqrt{MS_R(1/n_i + 1/n_j)/2}}. \tag{4.59}$$

Ее значения сравниваются с критическими точками уровня α распределения стьюдентизированного размаха с $\nu_1 = k$ и $\nu_2 = n - k$ степенями свободы.

Если наблюдаемое значение статистики $t_{R\,набл} \geq t_{R\,кр}$, где $t_{R\,кр}$ – критическая точка распределения стьюдентизированного размаха уровня α (или квантиль уровня $1-\alpha$) с числом степеней свободы $\nu_1 = k$ и $\nu_2 = n - k$, то нулевая гипотеза отклоняется и принимается гипотеза $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$.

Если объемы выборок различаются сильно, то рекомендуется использовать HSD-критерий Тьюки для неравных выборок (критерий Spjovoll–Stoline). Статистика критерия в этом случае имеет вид (4.60)

$$t_R = \frac{\left|\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j\right|}{\sqrt{MS_R / \min(n_i, n_j)}}. \tag{4.60}$$

Критические точки определяются так же, как и для критерия HSD Тьюки.

В критерии Ньюмана – Келса используется та же статистика, что и в критерии Тьюки, однако по-другому определяются критические точки. В качестве критических точек критерия Ньюмана – Келса используются критические точки распределения стьюдентизированного размаха с $\nu_1 = r$ и $\nu_2 = n - k$ степенями свободы, где r – число средних, расположенных между $\overline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_j$ в вариационном ряду, выборочных средних, включая $\overline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_j$. Например, если сравниваются значения $\overline{\mu}_{(i)}$ и $\overline{\mu}_{(i+1)}$ вариационного (упорядоченного) ряда средних, то $r = 2$, если сравниваются значения $\overline{\mu}_{(i)}$ и $\overline{\mu}_{(i+2)}$, то $r = 3$ и т. д.

В пакете STATISTICA используется модифицированный вариант критерия Ньюмана – Келса, в котором в качестве статистики критерия используется величина (4.61)

$$t_R = \frac{\left|\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j\right|}{\sqrt{MS_R \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{n_l}}}. \qquad (4.61)$$

Аналогичная статистика используется и в критерии Дункана, но в качестве критических точек берутся точки D-распределения Дункана с $\nu_1 = r$ и $\nu_2 = n - k$ степенями свободы, где r – число средних, расположенных между $\overline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_j$ в вариационном ряду, выборочных средних, включая $\overline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_j$.

Методы множественного сравнения средних можно использовать не только для проверки гипотез о попарном различии средних, но и для проверки гипотез о различии средних для любых выбранных наборов групп. В силу этого основная гипотеза в данных методах в общем случае имеет вид $H_0 : \sum_{i=1}^{k} c_i\mu_i = 0$, где $c_i, i = \overline{1,k}$ – некоторые заданные константы, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$. Например, при $c_3 = c_4 = \ldots = c_k = 0, c_1 = 1, c_2 = -1$ мы будем проверять гипотезу $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ или $\mu_1 = \mu_2$. При $c_1 = 1, c_2 = -1/2, c_3 = -1/2$, $c_4 = c_5 = \ldots = c_k = 0$ будем проверять гипотезу $H_0 : \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$, т. е. гипотезу однородности первой и совокупности второй и третьей групп и т. д. Линейные комбинации вида: $\alpha(\mu_1 - \mu_2)$, $\alpha(\mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3))$, т. е. величины, пропорциональные разности между средними от средних, называются контрастами.

Критерии LSD, Шеффе, HSD Тьюки легко модифицировать под проверку гипотезы $H_0 : \sum_{i=1}^{k} c_i\mu_i = 0$. Например, статистика LSD критерия для проверки гипотезы $H_0 : \sum_{i=1}^{k} c_i\mu_i = 0$ будет иметь вид (4.62)

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i \overline{\mu}_i}{\sqrt{MS_R \sum_{i=1}^{k} (c_i^2 / n_i)}}. \quad (4.62)$$

Критическими точками статистики по-прежнему будут являться квантили распределения Стьюдента уровня $1-\alpha/2$ с числом степеней свободы $\nu = n-k$.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит суть регрессии?
2. Что означает автокорреляционная зависимость?
3. Какие существуют виды автокорреляции?
4. В чем сущность статистики Дарбина – Уотсона?
5. Каким образом можно влиять на автокорреляцию?
6. Что представляет собой метод авторегрессионных преобразований?
7. Какие существуют методы коррелирования?
8. Каким образом производится расчет парного коэффициента корреляции по отклонениям фактических уровней от выравненных по уравнению?
9. В чем состоит задача дискриминантного анализа?
10. Какие данные необходимы для проведения дискриминантного анализа?
11. В чем состоит суть принципа оптимальности?
12. Что такое априорная вероятность и как она определяется?
13. В каком случае принадлежность наблюдения к определенной группе является объясненной?
14. В каком случае переменная является группирующей?
15. Какой шкале должна принадлежать группирующая переменная?
16. Какой шкале должны принадлежать зависимые переменные?
17. Опишите общий вид модели дискриминантной функции.
18. Каковы основные цели осуществления дискриминантного анализа?
19. Для чего используется каноническая корреляция при осуществлении процедуры дискриминантного анализа?
20. Что представляет собой центроид?

21. Что представляет собой классификационная матрица и каковы цели ее построения?
22. В каких единицах измерения представлены ненормированные коэффициенты дискриминантной функции?
23. Какие этапы процедуры дискриминантного анализа вам известны?
24. Что представляет собой собственное (характеристическое) значение и каким способом оно рассчитывается?
25. Что представляет собой F-статистика?
26. На какие группы принято разбивать совокупность при проверке результатов дисперсионного анализа с использованием F-статистики?
27. Какой вид корреляционной матрицы вычисляют усреднением отдельных ковариационных матриц для всех групп?
28. Что представляют собой нормированные коэффициенты дискриминантных функций?
29. Объясните значение структурных коэффициентов корреляции при осуществлении процедуры дискриминантного анализа.
30. Какая матрица получается в том случае, если при вычислении корреляций наблюдения обрабатывают так, как будто они взяты из одной выборки?
31. В каких пределах может меняться коэффициент Уилкса?
32. Каковы варианты интерпретации коэффициента Уилкса?
33. С помощью каких шагов реализуется процедура дискриминантного анализа?
34. Для каких целей нужна анализируемая выборка?
35. Что можно оценить с помощью проверочной выборки?
36. Какова процедура реализации прямого метода выбора предикторов?
37. Как вводятся предикторы при пошаговом дискриминантном анализе?
38. В каких случаях целесообразно применять пошаговый метод дискриминантного анализа?
39. Когда следует применять прямой метод при осуществлении процедуры дискриминантного анализа?
40. Какая процедура используется для интерпретации дискриминантных весов?

41. В чем сущность дисперсионного анализа?
42. Что называется фактором в рамках осуществления дисперсионного анализа?
43. В каком случае дисперсионный анализ является однофакторным?
44. Приведите пример дисперсионного анализа в статистике фирмы.
45. Опишите модель однофакторного дисперсионного анализа.
46. По какой формуле вычисляется сумма квадратов отклонений групповых средних от общего среднего?
47. В чем состоит общая идея дисперсионного анализа?
48. Что называется остаточным эффектом (эффектом ошибок) дисперсионного анализа?
49. Верно ли утверждение о том, что при осуществлении дисперсионного анализа анализируются не сами значения суммы квадратов отклонений, а средние квадраты? Объясните, почему.
50. Каким образом рассчитывается число степеней свободы для суммы квадратов случайных величин?
51. В чем заключается сущность проверки нулевой гипотезы?
52. С помощью какого сравнения нулевая гипотеза отклоняется и считается, что средние для различных уровней фактора значимо различаются?
53. Что является непараметрической альтернативой однофакторного дисперсионного анализа?
54. Что является основой дисперсионного анализа Краскела – Уоллиса?
55. Для каких данных применяется анализ Краскела – Уоллиса?
56. Чему приближенно равна статистика при принятии нулевой гипотезы о равенстве средних рангов?
57. При соблюдении какого неравенства считается, что средние ранги для различных уровней фактора значимо различаются?
58. В каком случае имеет место многофакторный дисперсионный анализ данных?
59. Приведите пример двухфакторной дисперсионной модели в статистике фирмы.
60. В каком виде может быть представлена дисперсия отклика?
61. Когда эксперимент принято считать сбалансированным?

62. Какие МНК-оценки получает исследователь в случае пропорциональных частот?
63. Зачем необходимо осуществлять проверку гипотез значимости различных выявленных эффектов с помощью инструментов статистического анализа?
64. Что можно использовать в качестве статистик критериев проверки гипотез о значимости соответствующих эффектов?
65. Какое распределение имеют данные статистики при нормальном распределении остатков?
66. Что означает нарушение условия ортогональности сумм квадратов эффектов?
67. Возможна ли независимая одновременная проверка всех гипотез двухфакторного анализа? Почему?
68. Объясните процедуру последовательного разложения суммы квадратов на составляющие.
69. В зависимости от какого условия различаются статистики критериев для проверки гипотез о значимости эффектов в несбалансированной многофакторной модели дисперсионного анализа?
70. Какие основные типы разложения суммы квадратов в рамках осуществления дисперсионного анализа вам известны?
71. В чем состоит проблема соответствия различным уровням фактора одних и тех же объектов? Приведите примеры.
72. С какой целью используется дисперсионный анализ зависимых выборок (повторных наблюдений)?
73. К какой процедуре прибегает исследователь, для того чтобы исключить эффект индивидуальности наблюдений и анализировать только влияние фактора на результаты наблюдений?
74. Обязательно ли в рамках дисперсионного анализа осуществлять переход к центрированным по наблюдениям данным?
75. Какие две основные модели используются в дисперсионном анализе повторных измерений?
76. Что является непараметрическим аналогом дисперсионного анализа повторных измерений?
77. Перечислите основные этапы проведения теста Фридмана.
78. В каком случае достигается максимальное значение дисперсии?
79. Для чего в рамках дисперсионного анализа используются апостериорные множественные сравнения средних?

Примеры решения задач

Задача

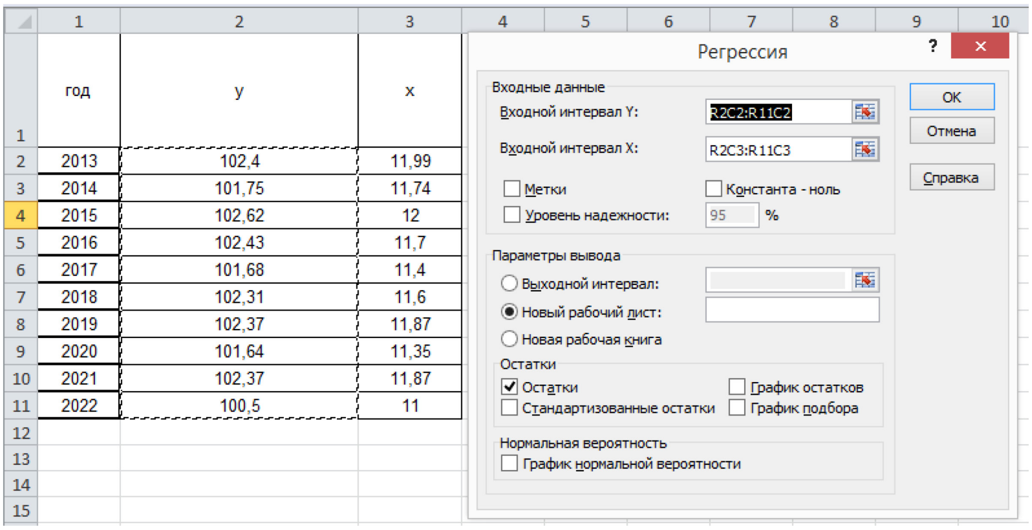
Имеются данные о некоторых независимых переменных и результирующем факторе.

Год	y	x
2013	102,4	11,99
2014	101,75	11,74
2015	102,62	12
2016	102,43	11,7
2017	101,68	11,4
2018	102,31	11,6
2019	102,37	11,87
2020	101,64	11,35
2021	102,37	11,87
2022	100,5	11

На основании представленных данных с помощью Ms Excel проверить наличие автокорреляции в линейной модели, описывающей изменение результирующего признака под влиянием независимой переменной.

Решение

Для построения модели воспользуемся инструментом «Регрессия» в пакете «Анализ данных» (вкладка «Данные»). Отметим также поле «Остатки» для их автоматизированного расчета.



В результате вывода остатков получим:

22	ВЫВОД ОСТАТКА		
23			
24	*Наблюдение*	*Предсказанное Y*	*Остатки*
25	1	102,6157047	-0,215704689
26	2	102,1654793	-0,415479327
27	3	102,6337137	-0,013713704
28	4	102,0934433	0,336556731
29	5	101,5531728	0,126827165
30	6	101,9133531	0,396646875
31	7	102,3995965	-0,029596516
32	8	101,4631278	0,176872237
33	9	102,3995965	-0,029596516
34	10	100,8328123	-0,332812256

Для расчета статистики Дарбина – Уотсона воспользуемся вспомогательной таблицей

t	l_{t-1}	l_t	l_t^2	$(l_t-l_{t-1})^2$
1		–0,2157	0,0465	0,0465
2	–0,2157	–0,4155	0,1726	0,0399
3	–0,4155	–0,0137	0,0002	0,1614
4	–0,0137	0,3366	0,1133	0,1227
5	0,3366	0,1268	0,0161	0,0440
6	0,1268	0,3966	0,1573	0,0728
7	0,3966	–0,0296	0,0009	0,1817
8	–0,0296	0,1769	0,0313	0,0426
9	0,1769	–0,0296	0,0009	0,0426
10	–0,0296	–0,3328	0,1108	0,0919
$\sum$			0,6498	0,8462

Таким образом, $d = \dfrac{0,8462}{0,6498} = 1,302$.

Не обращаясь к таблице критических точек Дарбина – Уотсона, можно пользоваться «грубым» правилом и считать, что автокорреляция остатков отсутствует, если $1,5 < d < 2,5$. Таким образом, данное условие соблюдается, автокорреляция остатков отсутствует.

Глава 5. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

5.1. Прогнозирование на основе экстраполяции

Исследование динамики социально-экономических явлений, выявление и характеристика основной тенденции развития и моделей взаимосвязи дают основание для прогнозирования – определения будущих размеров уровня экономического явления.

Важное место в системе методов прогнозирования занимают статистические методы. Применение прогнозирования предполагает, что закономерность развития, действующая в прошлом (внутри ряда динамики), сохранится и в прогнозируемом будущем, т. е. прогноз основан на экстраполяции. Экстраполяция, проводимая в будущее, называется перспективной, а в прошлое – ретроспективной. Обычно, говоря об экстраполяции рядов динамики, чаще всего подразумевают перспективную экстраполяцию.

Теоретической основой распространения тенденции на будущее является известное свойство социально-экономических явлений, называемое инерционностью. Именно инерционность позволяет выявить сложившиеся взаимосвязи как между уровнями динамического ряда, так и между группой связных рядов динамики. На основе рядов динамики получаются весьма надежные прогнозы, если уровни ряда динамики сопоставимы и получены на основе единой методологии.

Применение экстраполяции в прогнозировании базируется на следующих предпосылках:

- развитие исследуемого явления в целом описывается плавной кривой;
- общая тенденция развития явления в прошлом и настоящем не претерпит серьезных изменений в будущем.

Поэтому надежность и точность прогноза зависят от того, насколько близкими к действительности окажутся эти предположения, а также как точно удастся охарактеризовать выявленную в прошлом закономерность. Экстраполяцию следует рассматривать как начальную стадию построения окончательных прогнозов. Механическое использование экстраполяции может стать причиной погрешности и неправильных выводов. Всегда следует учитывать все необходимые условия, предпосылки и гипотезы, связывая их с содержательным экономико-теоретическим анализом.

Разумеется, чем шире раздвигаются временные рамки прогнозирования, тем очевиднее становится недостаточность простого экстраполяционного метода (изменение тенденций, неизвестны точки поворота кривых, влияние новых факторов и т. д.). В этом случае динамичность экономических явлений и процессов вступает в противоречие с инерционностью их развития. Так как анализируемые экономические ряды динамики нередко относительно короткие, то и временной горизонт экстраполяции не может быть бесконечным. Поэтому чем короче срок экстраполяции (период упреждения), тем более надежные и точные результаты (при прочих равных условиях) дает прогноз. За короткий период не успевают сильно измениться условия развития явления и характер его динамики.

Экстраполяцию в общем виде можно представить формулой (5.1)

$$\hat{y}_{i+T} = f(y_i, T, a_j), \tag{5.1}$$

где $\hat{y}_{i+T}$ – прогнозируемый уровень;

y_i – текущий уровень прогнозируемого ряда;

T – период упреждения;

a_j – параметр уравнения тренда.

В зависимости от того, какие принципы и исходные данные положены в основу прогноза, выделяют следующие элементарные методы экстраполяции:

- средний абсолютный прирост;
- средний темп роста;
- экстраполяцию на основе выравнивания рядов по какой-либо аналитической формуле.

Прогнозирование по среднему абсолютному приросту может быть выполнено в том случае, если есть уверенность считать общую тенденцию линейной, т. е. метод основан на предположении о равномерном изменении уровня (под равномерностью понимается стабильность абсолютных приростов).

Для нахождения интересующего нас аналитического выражения тенденции на любую дату t необходимо определить средний абсолютный прирост и последовательно прибавлять его к последнему уровню ряда столько раз, на сколько периодов экстраполируется ряд, т. е. экстраполяцию можно сделать по следующей формуле (5.2):

$$\hat{y}_{i+t} = y_i + \overline{\Delta} \cdot t, \tag{5.2}$$

где $\hat{y}_{i+t}$ – экстраполируемый уровень, $(i+1)$ – номер этого уровня (года);

i – номер последнего уровня (года) исследуемого периода, за который рассчитан $\overline{\Delta}$;

t – срок прогноза (период упреждения);

$\overline{\Delta}$ – средний абсолютный прирост.

Однако следует иметь в виду, что использование среднего абсолютного прироста для прогноза возможно только при следующем условии (5.3):

$$\sigma^2_{\text{ост.}} \le \rho^2; \tag{5.3}$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum \Delta_i^2}{n};$$

$$\sigma^2_{\text{ост.}} = \frac{\sum \left(y_i - \overline{y}_{\overline{\Delta}}\right)^2}{n}.$$

Прогнозирование по среднему темпу роста осуществляется в случае, когда есть основание считать, что общая тенденция ряда характеризуется показательной (экспоненциальной) кривой. Для нахождения тенденции необходимо определить средний коэффициент роста, возведенный в степень, соответствующую периоду экстраполяции, т. е. по формуле (5.4)

$$\hat{y}_{i+t} = y_i \cdot \overline{k}_p^{\,t}, \tag{5.4}$$

где y_i – последний уровень ряда динамики;

t – срок прогноза;

$\overline{k}_p$ – средний коэффициент роста.

Если же ряду динамики свойственна иная закономерность, то данные, полученные при экстраполяции на основе среднего темпа роста, будут отличаться от данных, рассчитанных другими способами экстраполяции.

Рассмотренные способы экстраполяции тренда, будучи простейшими, в то же время являются и самыми приближенными.

Экстраполяция дает возможность получить точечное значение прогноза. Точное совпадение фактических данных и прогностических точечных оценок, полученных путем экстраполяции кривых, характеризующих тенденцию, имеет малую вероятность. Возникновение отклонений фактических уровней ряда динамики от выравненных по уравнению тренда объясняется следующими причинами:

- выбранная для прогнозирования кривая не является единственно возможной для описания тенденции. Можно подобрать такую кривую, которая дает более точные результаты;
- построение прогноза осуществляется на основе ограниченного числа исходных данных. Кроме того, каждый исходный уровень обладает еще случайной компонентой, поэтому и кривая, по которой осуществляется экстраполяция, будет содержать случайную компоненту;
- тенденция характеризует лишь движение среднего уровня ряда динамики, поэтому отдельные наблюдения от него отклоняются. Если такие отклонения наблюдались в прошлом, то они будут наблюдаться и в будущем. Любой статистический прогноз носит приближенный характер, поэтому целесообразно определение доверительных интервалов прогноза.

Величина доверительного интервала определяется следующим образом (5.5):

$$\hat{y}_t \pm t_\alpha \cdot \sigma_{\bar{y}_t}, \tag{5.5}$$

где $\sigma_{\bar{y}_t}$ – средняя квадратическая ошибка тренда;

$\hat{y}_t$ – расчетное значение уровня;

t_α – доверительная величина.

При анализе рядов динамики иногда приходится прибегать к определению некоторых неизвестных уровней внутри данного ряда динамики, т. е. к интерполяции.

Интерполяция может производиться на основе среднего абсолютного прироста, среднего темпа роста и с помощью аналитического выравнивания. Она также основана на том или ином предположении о тенденции изменения уровней, но характер этого прогноза несколько иной: здесь уже не приходится предполагать, что тенденция, характерная для прошлого, сохранится и в будущем [34].

При интерполяции считается, что ни выявленная тенденция, ни ее характер не претерпели существенных изменений в том промежутке времени, уровень (уровни) которого нам не известен. Такое предположение обычно является более обоснованным, чем предположение о будущей тенденции.

5.2. Прогнозирование на основе аналитического выравнивания тренда

Наиболее распространенным методом прогнозирования считают аналитическое выражение тренда. При этом для выхода за границы исследуемого периода достаточно продолжить значения независимой переменной времени (t).

При таком подходе к прогнозированию предполагается, что размер уровня, характеризующего явление, формируется под воздействием множества факторов, причем не представляется возможным выделить отдельно их влияние. В связи с этим ход развития связывается не с какими-либо конкретными факторами, а с течением времени, т. е. $y = f(t)$.

Процедура разработки прогноза с использованием кривых роста включает в себя следующие этапы, отраженные на рисунке:

1) на основе качественного анализа выбор одной или нескольких кривых, форма которых соответствует характеру изменения временного ряда

↓

2) оценка параметров выбранных кривых

↓

3) оценка точности, проверка адекватности выбранных кривых прогнозируемому процессу и окончательный выбор кривой роста

↓

4) расчет точечного и интервального прогнозов

Схема прогнозирования с использованием кривых роста

Независимо от метода построения моделей их качество оценивается на основе исследования свойств остаточной компоненты E(t), t = 1, 2,..., N, т. е. величины расхождений на участке аппроксимации (построения модели) между фактическими уровнями и их расчетными значениями.

Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу и точностью. Адекватность характеризуется наличием определенных статистических свойств, а точность – степенью близости к фактическим данным.

Модель считается адекватной, если ряд остатков обладает свойствами независимости уровней, их случайности, соответствия нормальному закону распределения и равенства нулю средней ошибки.

При проверке независимости (отсутствии автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей.

Точечный прогноз заключается в получении прогнозного значения результирующего признака, которое определяется путем подстановки в уравнение регрессии соответствующего значения независимой переменной.

Интервальный прогноз заключается в построении доверительного интервала прогноза, т. е. нижней и верхней границ интервала, содержащего точную величину для прогнозного значения с заданной вероятностью.

При построении доверительного интервала прогноза используется стандартная ошибка прогноза (5.6)

$$M_{y_p} = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{n-m-1}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_p-\bar{x})^2}{\sum(x-\bar{x})^2}}. \tag{5.6}$$

Строится доверительный интервал прогноза (5.7)

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm t_{табл} \cdot M_{\hat{y}_p}\ . \tag{5.7}$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях возможно прогнозирование на основе экстраполяции?
2. Что такое интерполяция?
3. Какие методы экстраполяции вам известны?
4. Каким образом осуществляется прогнозирование на основе аналитического выравнивания тренда?
5. Опишите схему прогнозирования с использованием кривых роста.
6. Что такое адекватность как один из признаков качественной модели?

7. Как осуществляется точечное прогнозирование?
8. Что составляет основу интервального прогнозирования?
9. Как вычисляется стандартная ошибка прогноза?
10. Что представляет собой доверительный интервал прогнозирования?

Примеры решения задач

Задача 5.1

В таблице представлены данные об изменении некоторого параметра:

Год	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Значение	5,2	6,1	6,4	6,5	7,1	7,3	7,4	7,8

Рассчитайте прогнозное значение параметра на основе экстраполяции по сложившемуся среднегодовому темпу роста в 2023 году.

Решение

Найдем цепные коэффициенты роста для заданного временного ряда:

y	$k_ц$
5,2	1
6,1	1,173
6,4	1,049
6,5	1,016
7,1	1,092
7,3	1,028
7,4	1,014
7,8	1,054

Для нахождения среднегодового темпа роста воспользуемся формулой

$$T_{\text{ср.г.}} = \sqrt[n-1]{k_{ц1} k_{ц2} k_{ц3} \dots\ k_{цn}} 100\ \% = \sqrt[8-1]{1{,}5} \cdot 100\ \% = 100{,}96\ \%.$$

Аналогичные результаты вычисления будут получены при использовании в расчетах базисного темпа роста:

$$T_{\text{ср.г.}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} 100\ \% = \sqrt[8-1]{\frac{7,8}{5,2}} 100\ \% = 105,96\ \%.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что за исследуемый промежуток времени наблюдается рост показателя в среднем на 5,96 %. Положительное значение темпа прироста свидетельствует о том, что при сохранении существующей тенденции в будущем ожидается рост анализируемого параметра. Тогда ожидаемое значение в 2023 году составит

$$y_{n+1} = y_n k_{\text{ср.г.}} = 7,8 \cdot 1,0596 = 8,27.$$

Задача 5.2

В таблице представлены данные о численности рабочих некоторого предприятия и его выручке.

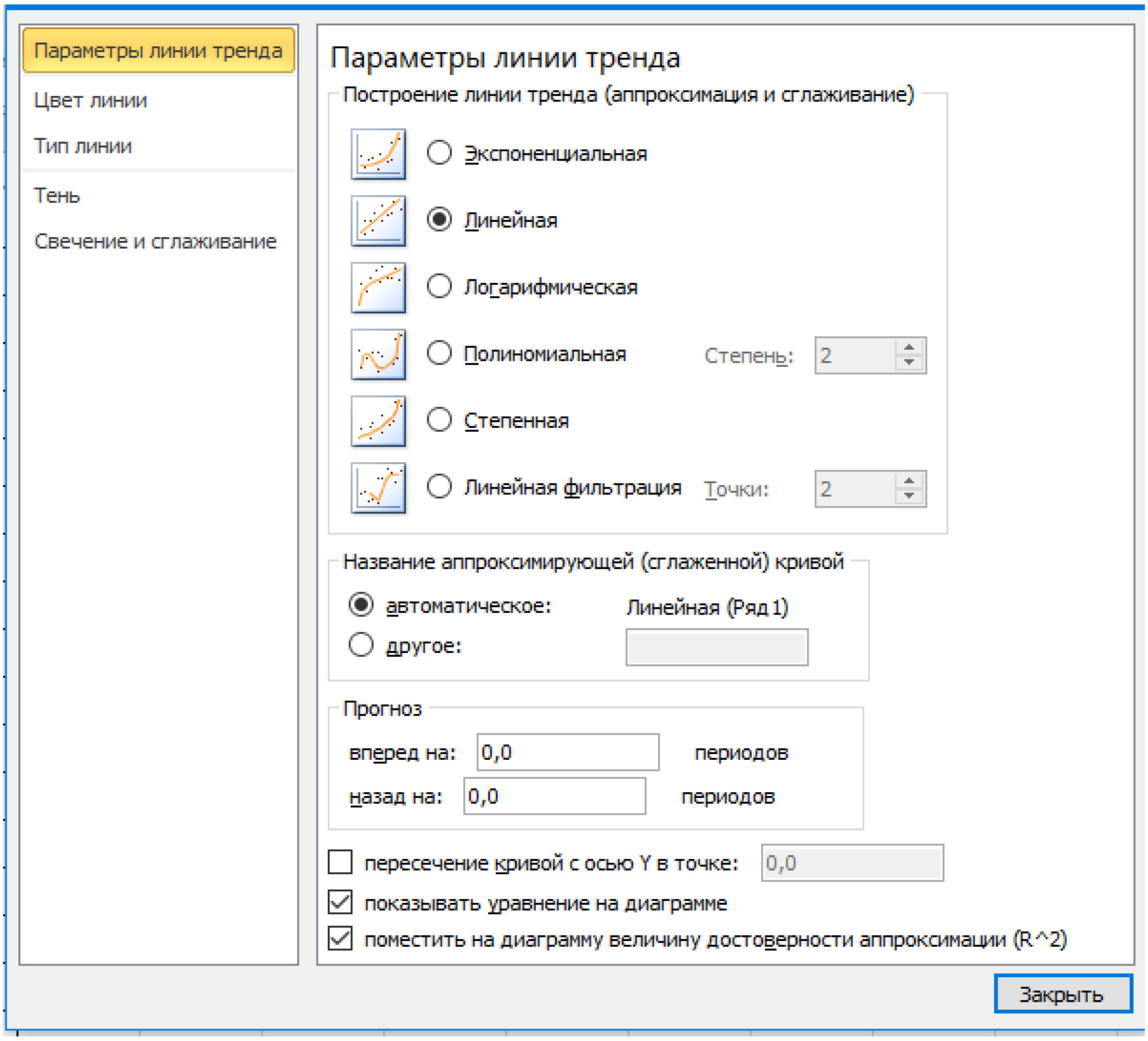
Год	Численность рабочих, чел.	Выручка, тыс. руб.
2005	137 151	76 933
2006	145 777	87 306
2007	153 765	105 369
2008	160 722	111 705
2009	164 065	126 816
2010	176 773	159 299
2011	160 101	162 175
2012	180 071	169 152
2013	188 362	197 073
2014	189 236	186 445
2015	193 251	204 354
2016	212 412	223 439
2017	202 765	234 112
2018	202 307	235 553
2019	222 830	239 092
2020	230 918	246 917
2021	239 191	257 214
2022	238 699	285 091

На основании приведенных данных постройте модель влияния численности рабочих на величину выручки предприятия, оцените значимость модели и коэффициентов полученного уравнения, описывающего влияние независимой переменной на результирующий признак. Рассчитайте ожидаемое значение выручки при расширении масштабов производства с использованием труда 245 000 рабочих.

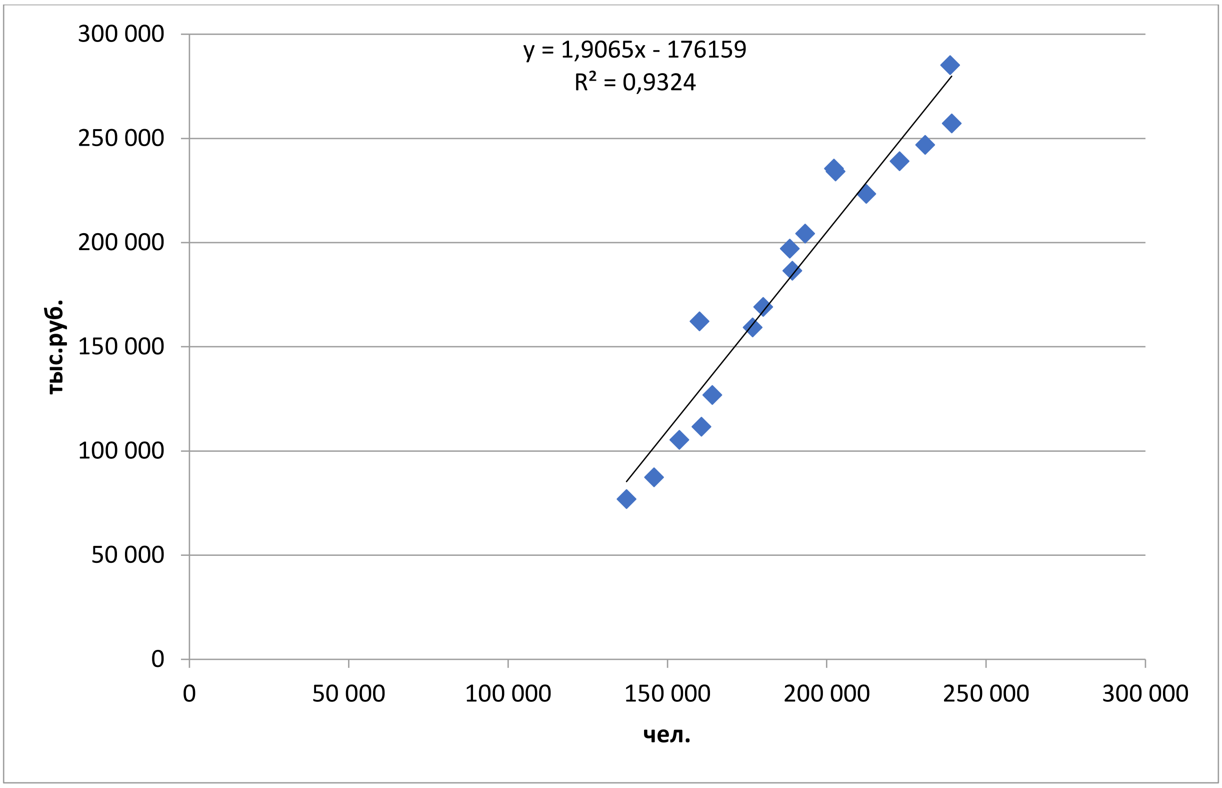
Решение

Для решения задачи предварительно определим характер влияния независимой переменной на результирующий признак.

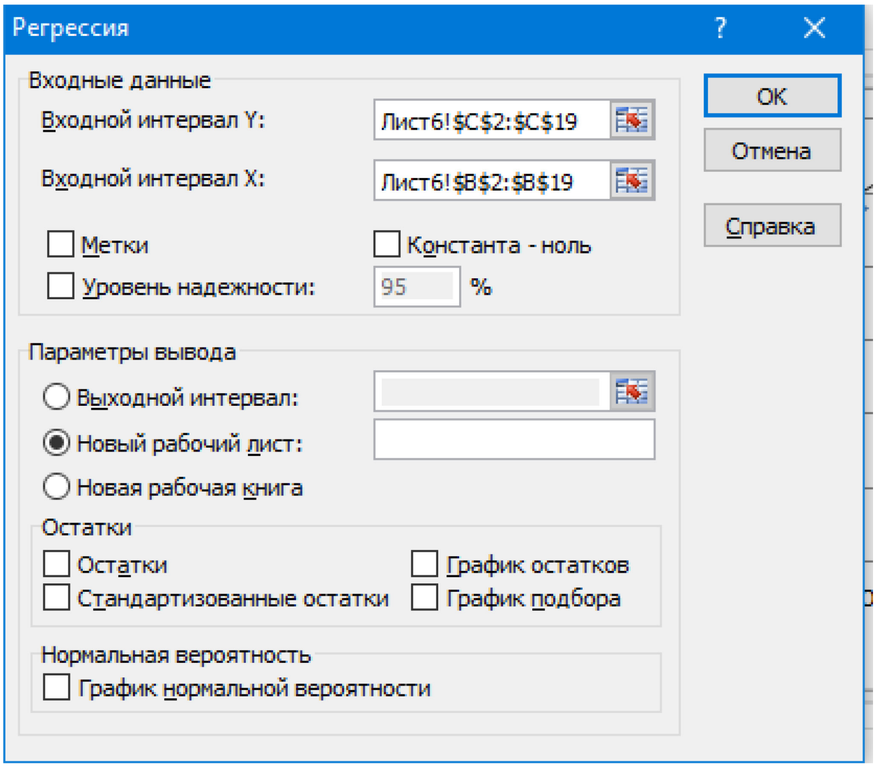
Для этого построим точечную диаграмму. По графику можно предположить, что имеет место линейная зависимость, поэтому добавим линейный тренд:



В результате получим следующий график.



Для оценки характеристик линейного уравнения воспользуемся пакетом «Анализ данных» (пункт «Регрессия»).



В результате были получены следующие результаты регрессионного моделирования:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	*Регрессионная статистика*								
4	Множеств	0,965591263							
5	R-квадрат	0,932366486							
6	Нормиров	0,928139392							
7	Стандартн	16789,70528							
8	Наблюден	18							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
12	Регрессия	1	62177153037	62177153037	220,5691081	8,86882E-11			
13	Остаток	16	4510307256	281894203,5					
14	Итого	17	66687460293						
15									
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
17	Y-пересеч	-176159,3721	24556,76734	-7,173557076	2,21435E-06	-228217,3933	-124101,3509	-228217,3933	-124101,3509
18	Перемен	1,906462519	0,12836775	14,85156921	8,86882E-11	1,634335046	2,178589992	1,634335046	2,178589992

Коэффициент детерминации составил 93,24 %, это свидетельствует о том, что изменение результирующей переменной на 93,24 % объясняется изменением независимой переменной.

Модель в целом адекватна, так как значимость F-критерия Фишера меньше пятипроцентной величины. Коэффициенты линейного уравнения также значимы, так как p-значение меньше 5 %.

Таким образом, уравнение, описывающее изменение выручки под влиянием изменения численности рабочих: $y = 1{,}91x - 176159$.

Для нахождения прогнозного значения выручки подставим в уравнение ожидаемое значение независимой переменной

$$y = 1{,}91 \cdot 245000 - 176159 = 291791 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, при расширении масштабов производства с увеличением численности рабочих до 245 000 человек можно ожидать величину выручки 291791 тыс. руб.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ РАБОТ (ПРОЕКТОВ)

1. Общие положения

Курсовая работа (проект) представляет собой вид учебной и научно-исследовательской работы студента, является индивидуальным завершенным трудом, отражающим знания, навыки и умения студента, полученные в ходе освоения дисциплины.

Тема курсовой работы (проекта) не может носить описательный характер, в ее формулировку должна быть заложена исследовательская проблема. Курсовая работа (проект) подготавливает студента к выполнению более сложной задачи – написанию выпускной квалификационной или дипломной работы.

Темы курсовых работ (проектов), выполняемых студентами за весь период обучения, следует подбирать таким образом, чтобы они вместе с выпускной работой составляли единую систему последовательно усложняемых и взаимосвязанных работ. При защите работы студент учится не только правильно излагать свои мысли, но и аргументированно отстаивать, защищать выдвигаемые выводы и решения. Формулировка темы должна быть по возможности краткой и соответствовать содержанию работы.

2. Цели и задачи выполнения курсовых работ (проектов)

Основной целью выполнения курсовой работы (проекта) является развитие мышления, творческих способностей студента, привитие навыков самостоятельной работы, связанной с поиском, систематизацией и обобщением научной и учебной литературы, углубленным изучением определенного вопроса, темы, раздела учебной дисциплины; формирование умений анализировать и критически оценивать исследуемый научный и практический материал; овладение методами современных научных исследований.

Курсовая работа (проект) представляет собой:

– изложение результатов исследования с учетом вопросов теории и практики в пределах выбранной темы;

– авторский труд, самостоятельное творчество студента, формирование его личной позиции и практического подхода к выбранной теме;

– отражение умения студентом логично, аргументированно, ясно, последовательно и кратко излагать свои мысли.

Основные отличия курсовой работы (проекта) от контрольной работы:

– курсовая работа требует более глубокого анализа проблемы, поэтому ее минимальный требуемый объем значительно больше;

– обязательно включает практический раздел, направленный на отработку фактологического материала, в курсовой работе должна найти отражение взаимосвязь теоретических положений с практикой;

– контроль за ходом написания курсовой работы осуществляется кафедрой.

Научно-консультационную и методическую помощь студенту оказывает научный руководитель. Работа над избранной темой требует от студента знаний основ методологии исследования, творческого мышления, прилежания и профессионализма.

Задачами выполнения курсовых работ (проектов) являются:

– систематизация, закрепление, углубление и расширение приобретенных студентом знаний, умений, навыков по учебным дисциплинам профессиональной подготовки;

– овладение методами научных исследований;

– формирование навыков решения творческих задач в ходе научного исследования, художественного творчества или проектирования по определенной теме;

– овладение современными методами поиска, обработки и использования информации;

– подготовка к написанию дипломной работы (материалы курсовых работ могут входить в дипломную работу).

При выполнении курсовых работ (проектов) студент должен продемонстрировать способности:

– выдвинуть научную (рабочую) гипотезу;
– собрать и обработать информацию по теме;
– изучить и критически проанализировать полученные материалы;
– систематизировать и обобщить имеющуюся информацию;
– самостоятельно решить поставленные творческие задачи;
– логически обосновать и сформулировать выводы, предложения и рекомендации.

Особенности курсовых работ (проектов) в зависимости от курса обучения проявляются в постепенном усложнении объектов и методов исследования (проектирования).

Количество курсовых работ (проектов), наименование дисциплин, по которым они предусматриваются, определяются учебным планом. Общее число курсовых работ (проектов) по дисциплинам учебного плана не может превышать 5 – 6 на весь период обучения, если иное не предусматривается государственным образовательным стандартом и примерным учебным планом по соответствующей специальности (направлению). Курсовая работа (проект) рассматривается как вид учебной работы по дисциплине и выполняется в пределах часов, отводимых на ее изучение. Курсовые работы (проекты) рассматриваются как форма отчетности.

Полные названия курсовых работ (проектов) вносятся в экзаменационные ведомости, зачетные книжки студентов и в приложения к дипломам.

Согласно номенклатуре дел курсовые работы (проекты) учитываются и хранятся на кафедре в течение пяти лет. По истечении указанного срока все курсовые работы (проекты), не представляющие учебно-методической ценности, списываются по акту и уничтожаются.

3. Структура и этапы выполнения курсовых работ (проектов)

Тематику курсовых работ (проектов) разрабатывает кафедра в учебном году, предшествующем выполнению курсовой работы (проекта).

Выбор и утверждение темы курсовой работы (проекта) происходит в следующем порядке:

– тематика курсовых работ (проектов) сообщается студентам;

– студент может выбрать тему курсовой работы (проекта) из числа тем, предложенных кафедрой;

– студент может также самостоятельно предложить тему курсовой работы (проекта) с обоснованием ее целесообразности;

– тематика курсовых работ (проектов) на предстоящий учебный год утверждается на заседании кафедры, о чем в протоколе заседания делается соответствующая запись.

Студент выполняет курсовую работу (проект) по утвержденной теме под руководством преподавателя, являющегося его научным руководителем.

Темы курсовых работ (проектов) утверждаются на заседании кафедры и подтверждаются соответствующими заявлениями студентов о выборе темы.

Руководителем курсовой работы (проекта) по дисциплине учебного плана является, как правило, лектор, ведущий данную дисциплину, преподаватель, ведущий практические занятия. Руководителем курсовой работы (проекта) по специальным дисциплинам, дисциплинам специализации может быть назначен приглашенный специалист, выполняющий учебную нагрузку на условиях почасовой оплаты.

Научный руководитель составляет задание на курсовую работу (проект), осуществляет ее текущее руководство. Текущее руководство курсовой работой (проектом) включает в себя систематические консультации с целью оказания организационной и научно-методической помощи студенту, контроль за осуществлением выполнения работы в соответствии с планом-графиком, проверку содержания и оформления завершенной работы.

Завершенная курсовая работа (проект) передается студентом на кафедру за неделю до защиты для ее анализа.

Написание работы – процесс, включающий в себя ряд взаимосвязанных этапов.

1. Выбор темы. Рекомендованная тематика курсовых работ содержится в рабочих программах дисциплин, по которым формой промежуточной аттестации является курсовая работа (проект). При выборе темы курсовой работы (проекта) можно рекомендовать студенту четко определить круг своих интересов и выполнять весь комплекс курсовых работ (в рамках соответствующих учебных дисциплин) по одной проблематике. Это позволит существенно повысить качество выполняемых курсовых работ (проектов) и даст возможность студенту лучше подготовиться к написанию выпускной квалификационной работы.

2. Разработка структуры и оформление содержания. Структура работы должна быть согласована с научным руководителем.

3. Сбор, анализ и обобщение материалов исследования, написание текста работы:

- сбор материалов, необходимых для выполнения курсовой работы (проекта), посредством использования литературных источников, нормативных актов, директивных документов и документации предприятия (организации) по рассматриваемой в работе проблематике;

– систематизация и обработка собранного материала по каждому из разрабатываемых в курсовой работе (проекте) вопросу или проблеме. На базе систематизированного материала формируются основные направления анализа. Одновременно выясняется необходимость сбора дополнительной информации по отдельному вопросу или вопросам;
– сбор дополнительной информации и разработка аналитической части курсовой работы (проекта). На этом этапе выявляются негативные моменты и недостатки функционирования объекта исследования;
– разработка и обоснование предложений по основным направлениям деятельности объекта исследования. На основе разработанных предложений и рекомендаций формулируются соответствующие выводы.

4. Оформление работы и ее представление для проверки.

5. Защита курсовой работы. Работа предоставляется на кафедру (руководителю) заранее, не позднее, чем за 10 дней до защиты.

Методологической основой курсовой работы (проекта) являются законодательные акты Российской Федерации по экономике в целом и по изучаемой дисциплине в частности; программные документы и решения правительства по хозяйственным вопросам.

По выбранной теме курсовой работы (проекта) рекомендуется использовать данные Росстата, материалы Института исследования товародвижения и конъюнктуры оптового рынка (ИТКОР), учебную специальную литературу, монографии, брошюры, статьи. Целесообразно изучить зарубежный опыт применительно к рассматриваемой теме. Важным условием успешного раскрытия избранной темы является ознакомление с материалами, опубликованными в периодических изданиях и др.

Желательно, чтобы курсовой проект выполнялся на материалах предприятия или организации по месту работы студентов заочной формы обучения или по месту прохождения производственной практики студентов очной формы обучения. В качестве основы написания курсовой работы (проекта) могут быть использованы материалы, собранные для курсовых работ по смежным дисциплинам, изученным ранее, а также материалы, собранные в ходе учебной и производственной практик.

4. Формы и порядок аттестации курсовых работ (проектов)

Формами аттестации студента по результатам выполнения курсовой работы являются зачет (зачтено/не зачтено), а по результатам курсового проекта – дифференцированный зачет (отлично – хорошо – удовлетворительно – неудовлетворительно). Форма аттестации по курсовым работам (проектам) по дисциплинам учебного плана вносится в рабочий учебный план специальности (направления) и утверждается ученым советом института.

Аттестация всех курсовых работ (проектов) должна быть проведена до начала экзаменационной сессии в сроки, указанные рабочим учебным планом специальности (направления).

Аттестация по курсовым работам (проектам) проводится в виде ее защиты перед группой и научным руководителем работы (проекта).

Решение об оценке курсовой работы (проекта) принимается преподавателем по результатам трех рейтингов, проводимых в течение семестра, для которых деканатом выдается отдельная ведомость, аналогичная ведомости текущего рейтинг-контроля, а также по итогам анализа предъявленной курсовой работы (проекта), доклада студента и его ответов на вопросы. Оценка по курсовой работе (проекту) вносится в экзаменационную ведомость, зачетную книжку студента научным руководителем.

Студент, по неуважительной причине не предоставивший в установленный срок или не защитивший курсовую работу (проект), считается имеющим академическую задолженность. Научный руководитель курсовой работы (проекта) проставляет в экзаменационную ведомость неудовлетворительную оценку. В случае наличия уважительных причин, подтвержденных документально, распоряжением по институту (факультету) студенту устанавливаются индивидуальный порядок и сроки выполнения и защиты курсовой работы (проекта). Курсовая работа, оцененная неудовлетворительно, перерабатывается студентом и возвращается на проверку тому же преподавателю.

Критериями оценки курсовой работы являются:

- актуальность и степень разработанности темы;
- творческий подход и самостоятельность в анализе, обобщениях и выводах;
- полнота охвата первоисточников и исследовательской литературы;

– уровень овладения методикой исследования;
– научная обоснованность и аргументированность обобщений, выводов и рекомендаций;
– научный стиль изложения;
– соблюдение всех требований к оформлению курсовой работы и сроков ее исполнения.

5. Требования к содержанию курсовых работ (проектов)

Курсовая работа (проект) имеет ряд структурных элементов: введение, теоретическая часть, практическая часть, заключение.

Разработка введения. Во-первых, во введении следует обосновать актуальность избранной темы курсовой работы (проекта), раскрыть ее теоретическую и практическую значимость, сформулировать цели и задачи работы.

Во-вторых, во введении, а также в той части работы, где рассматривается теоретический аспект данной проблемы, автор должен дать хотя бы кратко обзор литературы, изданной по этой теме.

Введение должно подготовить читателя к восприятию основного текста работы. Оно состоит из обязательных элементов, которые необходимо правильно сформулировать. В первом предложении называется тема курсовой работы.

Актуальность исследования (почему это следует изучать?). Актуальность исследования рассматривается с позиций социальной и практической значимости. В данном пункте необходимо раскрыть суть исследуемой проблемы и показать степень ее проработанности в различных трудах. Здесь же можно перечислить источники информации, используемые для исследования (информационная база исследования может быть вынесена в первую главу).

Цель исследования (какой результат будет получен?). Цель должна заключаться в решении исследуемой проблемы путем ее анализа и практической реализации. Цель всегда направлена на объект.

Объект исследования (что будет исследоваться?). Объект предполагает работу с понятиями. В данном пункте дается определение экономическому явлению, на которое направлена исследовательская деятельность. Объектом может быть личность, среда, процесс, структура, хозяйственная деятельность предприятия (организации).

Предмет исследования (как, через что будет идти поиск?). Здесь необходимо дать определение планируемым к исследованию конкретным свойствам объекта или способам изучения экономического явления. Предмет исследования направлен на практическую деятельность и отражается через результаты этих действий.

Задачи исследования (как идти к результату?), пути достижения цели. Задачи соотносятся с гипотезой. Определяются они исходя из целей работы. Формулировки задач необходимо делать как можно более тщательно, поскольку описание их решения должно составить содержание глав и параграфов работы. Как правило, формулируются 3 – 4 задачи.

Примерный перечень рекомендуемых задач:

1. «На основе теоретического анализа литературы разработать...» (ключевые понятия, основные концепции).
2. «Определить...» (выделить основные условия, факторы, причины, влияющие на объект исследования).
3. «Раскрыть...» (выделить основные условия, факторы, причины, влияющие на предмет исследования).
4. «Разработать...» (средства, условия, формы, программы).
5. «Апробировать…» (что разработали) и дать рекомендации...

Методы исследования (как исследовали?): дается краткое перечисление методов исследования через запятую без обоснования.

Структура работы – это завершающая часть введения (что в итоге в работе/проекте представлено).

В завершающей части в назывном порядке перечисляются структурные части работы (проекта), например: «Структура работы соответствует логике исследования и включает в себя введение, теоретическую часть, практическую часть, заключение, список литературы, 5 приложений».

Здесь допустимо дать развернутую структуру курсовой работы (проекта) и кратко изложить содержание глав (чаще содержание глав курсовой работы излагается в Заключении).

Таким образом, введение должно подготовить читателя к восприятию основного текста работы.

Краткие комментарии по формулированию элементов введения представлены в табл. 1.

Таблица 1. Комментарии по формулированию элементов введения

Элемент введения	Комментарий к формулировке
Актуальность темы	Почему это следует изучать? Раскрыть суть исследуемой проблемы и показать степень ее проработанности
Цель исследования	Какой результат будет получен? Должна заключаться в решении исследуемой проблемы путем ее анализа и практической реализации
Объект исследования	Что будет исследоваться? Дать определение явлению или проблеме, на которую направлена исследовательская деятельность
Предмет исследования	Как и через что будет идти поиск? Дать определение планируемым к исследованию конкретным свойствам объекта или способам изучения явления или проблемы
Задачи работы	Как идти к результату? Определяются исходя из целей работы и развития поставленных целей. Формулировки задач необходимо делать как можно более тщательно, поскольку описание их решения должно составить содержание глав и параграфов работы. Рекомендуется сформулировать 3 – 4 задачи
Методы исследования	Как изучали? Краткое перечисление методов через запятую без обоснования
Структура работы (завершающая часть введения)	Что в итоге в работе/проекте представлено. Краткое изложение перечня и/или содержания глав работы/проекта

Разработка основной части курсовой работы/проекта. Основная часть обычно состоит из двух-трех разделов: в первом содержатся теоретические основы темы; даются история вопроса, уровень разработанности темы в теории и практике посредством сравнительного анализа литературы.

В теоретической части рекомендуется излагать наиболее общие положения, касающиеся данной темы, а не вторгаться во все проблемы в глобальном масштабе. Теоретическая часть предполагает анализ объекта исследования и должна содержать ключевые понятия, историю вопроса, уровень разработанности проблемы в теории и практике. Излагая содержание публикаций других авторов, необходимо давать ссылки на них с указанием номеров страниц этих информационных источников.

Вторым разделом является практическая часть, которая должна носить сугубо прикладной характер. В ней необходимо описать конкретный объект исследования, привести результаты практических расчетов и направления их использования, а также сформулировать направления совершенствования либо вынести их в отдельный – третий – раздел курсовой работы (проекта).

Важно глубоко изучить наиболее существенные с точки зрения задач курсовой работы (проекта) стороны и особенности излагаемой темы.

Разработка заключения. По окончании исследования подводятся итоги по теме. Заключение носит форму синтеза полученных в работе результатов. Его основное назначение – резюмировать содержание работы, подвести итоги проведенного исследования. В заключении излагаются полученные выводы и их соотношение с целью исследования, конкретными задачами, гипотезой.

Проведенное исследование должно подтвердить или опровергнуть гипотезу исследования. В случае опровержения гипотезы даются рекомендации по возможному совершенствованию деятельности в свете исследуемой проблемы.

Составление списка литературы. В список литературы включаются источники, изученные вами в процессе подготовки работы, в том числе те, на которые вы ссылаетесь в тексте курсовой работы/проекта.

Список используемой литературы должен содержать не менее 20 источников (не менее 10 книг и 10 – 15 материалов периодической печати), с которыми работал автор курсовой работы (проекта).

Список используемой литературы включает в себя:

– нормативные правовые акты;
– научную литературу и материалы периодической печати;
– практические материалы.

6. Требования к оформлению курсовой работы (проекта)

Курсовые работы (проекты) следует оформлять в печатном виде с использованием компьютера и принтера, распечатывать на одной стороне листа белой бумаги формата А4. Рукописное оформление работы не допускается (разрешается вписывать черными чернилами отдельные слова, формулы, условные знаки, а также выполнять отдельные иллюстрации).

Вне зависимости от способа выполнения работы качество напечатанного текста и оформления иллюстраций, таблиц, распечаток с ЭВМ должно удовлетворять требованию их четкого воспроизведения. При выполнении отчета необходимо соблюдать равномерную плотность, контрастность и четкость изображения по всему отчету. В отчете должны быть четкие нерасплывшиеся линии, буквы, цифры и знаки.

Расположение текста должно обеспечивать соблюдение следующих полей:

- левое поле – не менее 30 мм;
- правое поле – не менее 10 мм;
- верхнее поле – не менее 20 мм;
- нижнее поле – не менее 20 мм.

Все страницы курсовой работы (проекта), включая приложения, должны быть пронумерованы арабскими цифрами сквозной нумерацией по всему тексту. Первой страницей является титульный лист, на котором номер страницы не проставляется. Порядковый номер страницы помещается в нижнем правом углу колонтитула.

Структура выпускной квалификационной работы состоит из следующих элементов:

1. *Титульный лист,* образец которого представлен в приложении А
2. *Пояснительная записка*:
   - Содержание включает в себя перечень частей ВКР с указанием страниц, соответствующих началу каждой части работы.
   - Введение раскрывает актуальность выбранной темы исследования, степень разработанности темы, цели, задачи, объект, предмет, гипотезу и методы исследования, структуру работы.
   - Основная часть состоит из нескольких глав, содержащих параграфы.
   - Заключение – подводятся основные итоги работы, обобщаются полученные результаты, освещаются рекомендации по конкретному использованию результатов выпускной квалификационной работы и направления дальнейших исследований.

– Список использованных источников включает литературу, используемую при подготовке текста: цитируемую, упоминаемую, а также имеющую непосредственное отношение к исследуемой теме. Полнота списка зависит от тщательности сбора публикаций. Правильно составленный и грамотно оформленный список свидетельствует о том, насколько автор знаком с литературой по теме исследования. Важным компонентом является работа автора с литературой последних трех-пяти лет как показатель ориентированности автора в современном состоянии научной изученности темы исследования. Библиографический список должен включать не менее 20 источников.
– Приложения (если таковые имеются).

Оформление заголовков и основного текста.

Текст работы следует разделять на разделы, подразделы и пункты. Разделы и подразделы должны иметь заголовки. Наименования структурных элементов отчета («СОДЕРЖАНИЕ», «ВВЕДЕНИЕ», «ЗАКЛЮЧЕНИЕ», «СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ», «ПРИЛОЖЕНИЕ») служат заголовками структурных элементов работы (проекта). Заголовки структурных элементов (введение, заключение, главы и т. п.) следует располагать в середине строки без точки в конце и печатать прописными (заглавными) буквами, не подчеркивая; полужирный шрифт не применяется.

Разделы основной части пояснительной записки работы (проекта) должны иметь порядковые номера в пределах всего документа, обозначенные арабскими цифрами без точки и записанные с абзацного отступа. Подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. В конце номера подраздела точка не ставится.

Каждый раздел следует начинать с нового листа (страницы). Расстояние между заголовками раздела или подраздела приблизительно 1,5 – 2 см. Расстояние между заголовками раздела и текстом должно быть равно 1,5 – 2 см.

Текст должен располагаться в следующих полях:

– левое поле – не менее 30 мм;
– правое поле – не менее 10 мм;
– верхнее поле – не менее 20 мм;
– нижнее поле – не менее 20 мм.

Все страницы курсовой работы (проекта), включая приложения, должны быть пронумерованы арабскими цифрами, шрифт Times New Roman, 12 пт. Порядковый номер страницы помещается в нижнем правом углу колонтитула.

Оформление заголовков раздела (ВВЕДЕНИЕ, ГЛАВА и т. д.):

– междустрочный интервал – 1,5;
– шрифт Times New Roman;
– написание – прописные (заглавные) буквы;
– полужирный шрифт не применяется;
– размер шрифта 14 пт;
– режим выравнивания – по центру;
– отступ в начале абзаца – 15 мм.

Оформление заголовков подраздела и подпункта (1.1, 1.2 и т. д.):

– междустрочный интервал – 1,5;
– шрифт Times New Roman;
– написание – первая заглавная, остальные строчные буквы;
– полужирный шрифт не применяется;
– размер шрифта 14 пт;
– режим выравнивания – слева;
– отступ в начале абзаца – 15 мм.

Оформление основного текста работы (проекта):

– междустрочный интервал – 1,5;
– шрифт Times New Roman;
– полужирный шрифт не применяется;
– размер шрифта 14 пт (для таблиц допускается 12 пт);
– режим выравнивания – по ширине;
– отступ в начале абзаца – 15 мм.

Разрешается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определенных терминах, формулах, теоремах, применяя шрифты разной гарнитуры.

Числовые значения величин в тексте следует указывать с необходимой степенью точности, при этом в ряду величин осуществляется выравнивание числа знаков после запятой. Округление числовых значений величин до первого, второго, третьего и так далее десятичного знака для величин одного наименования должно быть одинаковым. Например: 1,50; 1,75; 2,00.

Оформление списков

Внутри пунктов или подпунктов раздела могут быть приведены перечисления, которые записываются с абзацного отступа. Перед каждой позицией перечисления следует ставить дефис, а при необходимости ссылки в тексте ВКР на один из элементов перечисления вместо дефиса ставятся строчные буквы в порядке русского алфавита, начиная с буквы а (за исключением букв ё, з, й, о, ч, ъ, ы, ь). Для дальнейшей детализации перечислений необходимо использовать арабские цифры, после которых ставится скобка, а запись производится с абзацного отступа.

Примеры приведены на рис. 1 и 2.

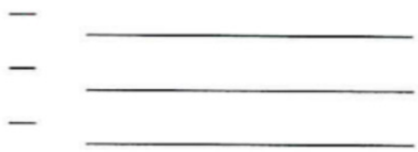


Рис. 1. Пример оформления списка

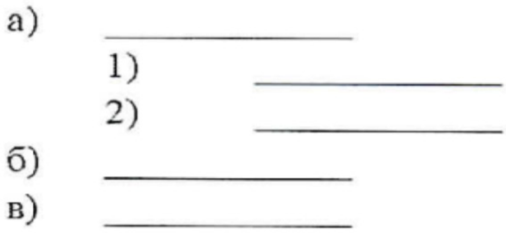


Рис. 2. Пример оформления списка при необходимости дальнейшей ссылки на один из его элементов

Оформление формул

Уравнения и формулы следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы или уравнения должно быть оставлено не менее одной свободной строки. Пояснения символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу, если они не пояснены ранее в тексте, должны быть приведены непосредственно под формулой. Пояснения каждого символа следует давать с новой строки в той последовательности, в которой символы приведены в формуле. Первая строка пояснения должна начинаться со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы должны нумероваться сквозной нумерацией арабскими цифрами, которые записывают на уровне формулы в крайнем положении справа в круглых скобках. Одну формулу обозначают – (1).

Ссылки в тексте на порядковые номера формул дают в скобках, например: «... в формуле (1)».

Пример:

Плотность каждого образца ρ, кг/м^3, вычисляют по формуле

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

где m – масса образца, кг;

V – объем образца, м^3.

Оформление таблиц

Таблицу следует располагать непосредственно после текста, в котором она упоминается впервые. При ссылке следует писать слово «таблица» с указанием ее номера.

Все таблицы должны иметь название и порядковую нумерацию. Таблицы нумеруются арабскими цифрами сквозной нумерацией в пределах всей работы (за исключением таблиц приложений). Номер таблицы следует проставлять в левом верхнем углу над таблицей после слова Таблица без знака №, например: «Таблица 1». В приложениях таблицы обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения, например «Таблица В.1», если она приведена в приложении В.

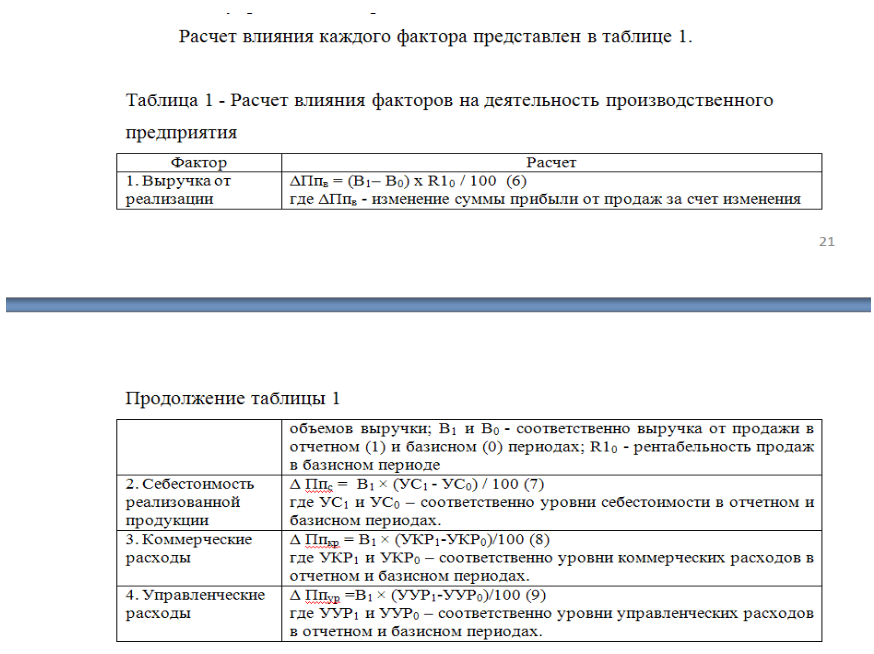
Название таблицы должно отражать ее содержание, быть точным, кратким. **Наименование таблицы следует помещать над таблицей слева без абзацного отступа в одну строку с ее номером через тире**.

Таблицы выравниваются по центру страницы и оформляются в соответствии с рис. 3. Выше и ниже каждой таблицы должно быть оставлено не менее одной свободной строки.

В каждой таблице следует указывать единицы измерения показателей и период времени, к которому относятся данные. Если единица измерения в таблице является общей для всех числовых данных, то ее приводят в заголовке таблицы после ее названия.

Рис. 3. Оформление таблиц

Таблицу с большим числом строк допускается переносить на другой лист (страницу). При переносе части таблицы на другой лист (страницу) слово «Таблица», ее номер и наименование указывают один раз слева над первой частью таблицы и указывают номер таблицы (рис. 4).



Расчет влияния каждого фактора представлен в таблице 1.

Таблица 1 - Расчет влияния факторов на деятельность производственного предприятия

Фактор	Расчет
1. Выручка от реализации	$\Delta Пп_в = (В_1 – В_0)$ x $R1_0$ / 100 (6) где $\Delta Пп_в$ - изменение суммы прибыли от продаж за счет изменения

21

Продолжение таблицы 1

	объемов выручки; $В_1$ и $В_0$ - соответственно выручка от продажи в отчетном (1) и базисном (0) периодах; $R1_0$ - рентабельность продаж в базисном периоде
2. Себестоимость реализованной продукции	$\Delta Пп_с = В_1 \times (УС_1 - УС_0) / 100$ (7) где $УС_1$ и $УС_0$ – соответственно уровни себестоимости в отчетном и базисном периодах.
3. Коммерческие расходы	$\Delta Пп_{кр} = В_1 \times (УКР_1-УКР_0)/100$ (8) где $УКР_1$ и $УКР_0$ – соответственно уровни коммерческих расходов в отчетном и базисном периодах.
4. Управленческие расходы	$\Delta Пп_{ур} =В_1 \times (УУР_1-УУР_0)/100$ (9) где $УУР_1$ и $УУР_0$ – соответственно уровни управленческих расходов в отчетном и базисном периодах.

Рис. 4. Оформление при делении таблиц

Оформление иллюстраций и графической части

Весь графический материал (схемы, диаграммы, фотографии, чертежи и т. п.), расположенный по тексту работы (не включая приложения), следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией. Если рисунок один, то он обозначается «Рисунок 1». Графики, схемы, диаграммы располагаются в работе непосредственно после текста, имеющего на них ссылку, или на следующей странице. Поясняющие данные помещают под иллюстрацией, а **ниже по центру печатают слово «Рисунок», его номер, а через знак «–» и его наименование**. Иллюстрации каждого приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения. Например, «Рисунок А.3 – Детали прибора».

Пример оформления иллюстраций представлен на рис. 5.

Структура продаж товаров основных товарных групп магазина представлена на рисунке 1.

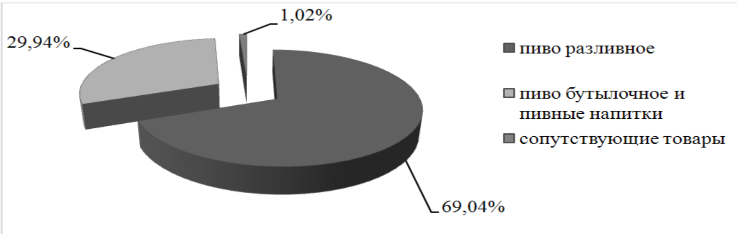


Рисунок 1 – Структура продаж магазина «Золотая кружка» (ИП Медведев К.Д.) по данным на 2015г., %

Рис. 5. Пример оформления иллюстраций и графической части

При ссылках на иллюстрации следует писать «... в соответствии с рисунком 2». Выше и ниже каждого рисунка должно быть оставлено не менее одной свободной строки.

Оформление приложений

Материал, дополняющий текст документа, допускается помещать в приложениях. В приложения можно вносить, например, графический материал, таблицы большого формата, расчеты, описания аппаратуры и приборов, описания алгоритмов и программ задач, решаемых на ЭВМ, и т. д. Приложения располагают в порядке появления ссылок на них в тексте документа, где на все приложения должны быть даны ссылки.

Каждое приложение следует начинать с новой страницы с указанием наверху посередине страницы слова «ПРИЛОЖЕНИЕ» и его обозначения.

Приложения обозначают заглавными буквами русского алфавита, начиная с А. Буквы Ё, З, Й, О, Ч, Ь, Ы, Ъ для обозначения приложений НЕ используются.

Приложение должно иметь заголовок, который записывают симметрично относительно текста (выравнивание по тексту) с прописной (заглавной) буквы с новой строки.

Пример оформления приложения представлен на рис. 6.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные группы показателей экономической эффективности хозяйственной деятельности предприятия

Таблица А.1 - Основные группы показателей экономической эффективности хозяйственной деятельности предприятия

Показатели	Характеристика	Способ расчета
	I. Производительность труда	
1. Выработка	Отражает количество продукции, произведенной в единицу рабочего времени или приходящееся на одного среднесписочного работника в месяц, квартал, год	Отношение количества произведенной продукции к затратам рабочего времени на производство этой продукции
2. Трудоемкость	Величина, обратная выработке, характеризует затраты труда на производство единицы продукции	Отношение затрат труда к объему продукции

Рис. 6. Пример оформления приложения

Оформление библиографического списка используемой литературы

Список используемой литературы содержит перечень источников, используемых обучающимся при работе над темой исследования (проекта). Список используемой литературы нумеруется арабскими цифрами, после которых ставится скобка, запись производится с абзацного отступа. Сведения об источниках следует располагать в порядке появления ссылок на источники в тексте работы (проекта).

При написании работы обучающийся обязан давать ссылку на источник, библиографическое описание которого должно приводиться в списке используемых источников. Порядковый номер ссылки в тексте работы заключают в квадратные скобки.

Для каждого учебника, книги обязательно должен быть указан уникальный номер книжного издания ISBN, для периодических изданий – ISSN, для электронных ресурсов – ссылка (URL) и дата обращения.

7. Процедура защиты курсовой работы (проекта)

Курсовая работа (проект), выполненная с соблюдением рекомендуемых требований, оценивается и допускается к защите. Защита должна проводиться до начала экзамена или зачета по дисциплине.

Процедура защиты курсовой работы/проекта включает в себя:

– выступление студента по теме и результатам работы (5 – 8 мин);

– ответы на вопросы аудитории и научного руководителя работы.

Окончательная оценка за курсовую работу (проект) выставляется преподавателем после защиты.

Результаты защиты курсового проекта оцениваются по четырехбалльной системе: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», а при выполнении курсовой работы по двухбалльной системе: «зачтено» или «не зачтено».

Положительная оценка по той дисциплине, по которой предусматривается курсовая работа (проект), выставляется только при условии успешной сдачи курсовой работы (проекта) на оценку не ниже «удовлетворительно».

К защите курсовой работы (проекта) предъявляются следующие требования:

1. Глубокая теоретическая проработка исследуемых проблем на основе анализа экономической литературы.

2. Умелая систематизация цифровых данных в виде таблиц и графиков с необходимым анализом, обобщением и выявлением тенденций развития исследуемых явлений и процессов.

3. Критический подход к изучаемым фактическим материалам с целью поиска направлений совершенствования деятельности.

4. Аргументированность выводов, обоснованность предложений и рекомендаций.

5. Логически последовательное и самостоятельное изложение материала.

6. Оформление материала в соответствии с установленными требованиями.

Для выступления на защите необходимо заранее подготовить и согласовать с руководителем тезисы доклада и иллюстрационный материал в виде презентации.

Рекомендуемые структура, объем и время доклада приведены в табл. 2.

Таблица 2. Структура, объем и время доклада

№ п/п	Структура доклада	Объем	Время
1	Представление темы работы	До 1,5 страниц	До 2 мин
2	Актуальность темы		
3	Цель работы		
4	Постановка задачи, результаты ее решения и сделанные выводы (по каждой из задач, которые были поставлены для достижения цели курсовой работы/ проекта)	До 6 страниц	До 7 мин
5	Перспективы и направления дальнейшего исследования данной темы	До 0,5 страницы	До 1 мин

При составлении тезисов необходимо учитывать ориентировочное время доклада на защите, которое составляет 8 – 10 минут. Доклад целесообразно строить не путем изложения содержания работы по главам, а по задачам, т. е. раскрывая логику получения значимых результатов. В докладе обязательно должно присутствовать обращение к иллюстративному материалу, который будет использоваться в ходе защиты работы. Объем доклада должен составлять 7 – 8 страниц текста в формате Word, размер шрифта 14, полуторный интервал.

ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Применение задач линейного программирования в машиностроительной отрасли.
2. Применение задач линейного программирования в энергетике.
3. Применение задач линейного программирования в легкой промышленности.
4. Применение задач линейного программирования в сельском хозяйстве.
5. Применение задач линейного программирования в строительстве.
6. Применение задач линейного программирования в торговле.
7. Теория графов в экономической деятельности.
8. Применение задач нелинейного программирования в машиностроительной отрасли.
9. Применение задач нелинейного программирования в энергетике.
10. Применение задач нелинейного программирования в легкой промышленности.
11. Применение задач нелинейного программирования в сельском хозяйстве.
12. Применение задач нелинейного программирования в строительстве.
13. Применение задач нелинейного программирования в торговле.
14. Корреляционно-регрессионный анализ в рамках анализа деятельности машиностроительной отрасли.
15. Корреляционно-регрессионный анализ в энергетике.
16. Корреляционно-регрессионный анализ в легкой промышленности.
17. Корреляционно-регрессионный анализ в сельском хозяйстве.
18. Корреляционно-регрессионный анализ в строительстве.
19. Корреляционно-регрессионный анализ в торговле.
20. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в машиностроительной отрасли.
21. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в энергетике.
22. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в легкой промышленности.

23. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в сельском хозяйстве.

24. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в строительстве.

25. Прогнозирование с применением экономико-математических методов и моделей процессов в торговле.

ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА РЕФЕРАТОВ

1. История развития экономико-математического моделирования в России.
2. Методы линейного программирования в экономических исследованиях.
3. Особенности решения транспортных задач с применением метода наименьшей стоимости.
4. Особенности решения транспортных задач с применением метода северо-западного угла.
5. Специфика решения задач линейного программирования с использованием пакетов прикладных статистических программ.
6. Метод аппроксимации Фогеля: аспекты практического применения.
7. Особенности решения двойственных задач.
8. Симплекс-метод в экономических расчетах.
9. Экономические задачи целочисленного программирования: сущность, алгоритм реализации, способы решения.
10. Экономические задачи динамического программирования: сущность, алгоритм реализации, способы решения.
11. Решение оптимальных задач с нелинейными функциями цели.
12. Решение экономических задач с применением методов условной оптимизации.
13. Решение экономических задач с применением методов безусловной оптимизации.
14. Особенности применения элементов теории игр в экономических исследованиях.
15. Способы разрешения конфликтов в экономической деятельности с применением теории игр.
16. Матричные игры в экономике.
17. Биматричные игры в экономике.
18. Коалиционные игры: сущность, постановка задачи, способы решения.
19. Решение экономических задач в условиях полной или частичной неопределенности.
20. Игры с природой: сущность, постановка задачи, способы решения.

21. Особенности выбора критерия оптимальности при решении различных видов экономических задач.

22. Построение модели межотраслевого баланса Российской Федерации.

23. Построение линейной модели международной торговли Российской Федерации со странами Запада.

24. Построение линейной модели международной торговли Российской Федерации со странами Востока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Качественно новый этап развития рыночной экономики определяется как экономика знаний. Он значительно отличается от предыдущей стадии формированием нелинейных тенденций в экономическом развитии. Кроме того, принимать решения на уровне предприятия, региона или целого государства приходится в условиях высокой неопределенности, обусловленной нестабильностью внешней среды, поэтому эффективное воздействие на процессы невозможно без соответствующих экономико-математических расчетов.

В процессе систематизированного научно обоснованного управления различными процессами важно точно определить способ экономико-математического моделирования ситуации. От грамотного выбора методов и моделей исследования зависит результативность принимаемых решений.

Во всех главах книги рассмотрены теоретические аспекты экономико-математического моделирования и приведены примеры решения задач по основным темам курса.

Рассмотренные в пособии положения могут быть использованы на лекционных и практических занятиях по дисциплине «Экономико-математические методы и модели».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хуснутдинов, Р. Ш. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 224 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-005313-4.

2. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учеб. пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Вуз. учеб. : ИНФРА-М, 2024. – 389 с. – ISBN 978-5-9558-0208-4.

3. Богданова, Е. Л. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование : учеб. пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб. : Университет ИТМО, 2017. – 165 с.

4. Экономико-математические методы в примерах и задачах : учеб. пособие / под ред. А. Н. Гармаша. – М. : Вуз. учеб. : ИНФРА-М, 2024. – 416 с. – ISBN 978-5-9558-0322-7.

5. Плоткин, Б. К. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности и логистике / Б. К. Плоткин, Л. А. Делюкин. – М. : РИОР : ИНФРА-М, 2016. – 346 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-369-01549-0.

6. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. – 2-е изд., перераб. – М. : Дашков и Кº, 2023. – 174 с. – ISBN 978-5-394-05407-5.

7. Татарников, О. В. Линейная алгебра и линейное программирование для экономистов : учебник / О. В. Татарников, В. Г. Шершнев, Е. В. Швед. – М. : КноРус, 2020. – 258 с. – (Бакалавриат). – ISBN 978-5-406-07502-9.

8. Жидкова, Н. В. Методы оптимизации систем : учеб. пособие / Н. В. Жидкова, О. Ю. Мельникова. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 149 с.

9. Новиков, А. И. Экономико-математические методы и модели : учебник / А. И. Новиков. – 5-е изд., стер. – М. : Дашков и Кº, 2022. – 532 с. – ISBN 978-5-394-05088-6.

10. Кундышева, Е. С. Математические методы и модели в экономике : учебник / Е. С. Кундышева, Б. А. Суслаков. – 4-е изд., перераб. – М. : Дашков и К°, 2023. – 286 с. – ISBN 978-5-394-03138-0.

11. Гольдштейн, А. Л. Теория принятия решений. Задачи и методы исследования операций и принятия решений : учеб. пособие /

А. Л. Гольдштейн. – 2-е изд., испр. – Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 361 с. – ISBN 978-5-398-00159-4.

12. Балдин, К. В. Математические методы и модели в экономике : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; под общ. ред. К. В. Балдина. – 3-е изд., стер. – М. : ФЛИНТА, 2024. – 328 с. – ISBN 978-5-9765-0313-7.

13. Мицель, А. А. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов, В. В. Романенко. – Томск : Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2017. – 198 с.

14. Пятецкий, В. Е. Математические методы в экономике : метод. указания к выполнению курсовой работы / В. Е. Пятецкий, И. З. Литвин, В. С. Литвяк. – М. : Дом МИСиС, 2011. – 36 с.

15. Рожков, И. М. Математические методы в экономике : методы и модели финансовой математики : учеб. пособие / И. М. Рожков, В. И. Сычев. – М. : МИСиС, 2002. – 48 с.

16. Кремлев, А. Г. Основные понятия теории игр : учеб. пособие / А. Г. Кремлев. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 144 с. – ISBN 978-5-16-018869-0.

17. Невежин, В. П. Теория игр. Примеры и задачи : учеб. пособие / В. П. Невежин. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2024. – 128 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-00091-563-9.

18. Сигал, А. В. Теория игр и ее экономические приложения : учеб. пособие / А. В. Сигал. – М. : ИНФРА-М, 2024. – 418 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-019035-8.

19. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках : учеб. для вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – 3-е изд. – М. : Высш. шк. экономики, 2020. – 307 с. – (Учебники Высшей школы экономики). – ISBN 978-5-7598-1401-6.

20. Максимова, Н. Н. Теория игр : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Максимова. – Благовещенск : Изд-во АмГУ, 2015. – 94 с.

21. Лемешко, Б. Ю. Теория игр и исследование операций / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : НГТУ, 2013. – 167 с. – ISBN 978-5-7782-2198-7.

22. Алехин, В. В. Эконометрика: теория игр в экономике : учеб. пособие / В. В. Алехин. – Ростов н/Д. : Изд-во Южного федер. ун-та, 2011. – 110 с. – ISBN 978-5-9275-0911-9.

23. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр : учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Вышэйш. шк., 2008. – 368 с. – ISBN 978-985-06-1308-0.

24. Сагитов, Р. В. Линейная алгебра. Ч. 2 : Линейное программирование, динамическое программирование и теория игр : учеб.-метод. пособие / Р. В. Сагитов, В. Г. Шершнев. – М. : Менеджер, 2007. – 192 с.

25. Васильев, Н. С. Двойственность в линейном программировании и теория матричных игр : учеб. пособие / Н. С. Васильев, В. В. Станцо. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2010. – 47 с.

26. Колобашкина, Л. В. Основы теории игр : учеб. пособие / Л. В. Колобашкина. – 5-е изд., стер. – М. : Лаб. знаний, 2021. – 198 с. – ISBN 978-5-906828-81-1.

27. Власов, Д. А. Введение в теорию игр : учеб. пособие / Д. А. Власов. – М. : ИНФРА-М, 2024. – 222 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-018869-0.

28. Матвеева, С. В. Математика для экономических специальностей : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 / С. В. Матвеева. – Омск : СибАДИ, 2022. – 131 с.

29. Кундышева, Е. С. Экономико-математическое моделирование : учебник / Е. С. Кундышева ; под ред. Б. А. Суслакова. – 4-е изд., стер. – М. : Дашков и К°, 2012. – 424 с. – ISBN 978-5-394-01716-2.

30. Бережная, Е. В. Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом : учебник / Е. В. Бережная, В. И. Бережной, О. В. Бережная. – М. : ИНФРА-М, 2024. – 456 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-018607-8.

31. Гусева, Е. Н. Экономико-математическое моделирование : учеб. пособие / Е. Н. Гусева. – 4-е изд., стер. – М. : Флинта, 2021. – 216 с. – ISBN 978-5-89349-976-6.

32. Алексеев, Г. В. Численное экономико-математическое моделирование и оптимизация : учеб. пособие / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин, М. В. Гончаров. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : ГИОРД, 2014. – 272 с.

33. Кугаевских, А. В. Классические методы машинного обучения / А. В. Кугаевских, Д. И. Муромцев, О. В. Кирсанова. – СПб. : ИТМО, 2022. – 53 с.

34. Рыжикова, Т. Н. Маркетинг: экономика, финансы, контроллинг : учеб. пособие / Т. Н. Рыжикова. – М. : ИНФРА-М, 2023. – 225 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-012515-2.

35. Статистическое моделирование и прогнозирование : учеб. пособие / Е. М. Марченко [и др.] ; Владим. гос. ун-т им А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 100 с. – ISBN 978-5-9984-0861-8.

36. Дайитбегов, Д. М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике : монография / Д. М. Дайитбегов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Вуз. учеб. : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 587 с. – (Научная книга). – ISBN 978-5-9558-0275-6.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица 5%-го и 1%-го уровней вероятности коэффициентов корреляции (r_a)

Размер выборки	Положительные значения		Отрицательные значения	
	5%–й уровень	1%–й уровень	5%–й уровень	1%–й уровень
5	0,253	0,297	–0,753	–0,798
6	0,354	0,447	–0,708	–0,863
7	0,370	0,510	–0,674	–0,799
8	0,371	0,531	–0,625	–0,764
9	0,366	0,533	–0,593	–0,737
10	0,360	0,525	–0,564	–0,705
11	0,353	0,515	–0,539	–0,679
12	0,348	0,505	–0,516	–0,655
13	0,341	0,495	–0,497	–0,634
14	0,335	0,485	–0,479	–0,615
15	0,328	0,475	–0,462	–0,597
20	0,299	0,432	–0,399	–0,524
25	0,276	0,398	–0,356	–0,473
30	0,257	0,370	–0,324	–0,433
35	0,242	0,347	–0,300	–0,401
40	0,229	0,329	–0,279	–0,376
45	0,218	0,313	–0,262	–0,256
50	0,208	0,301	–0,248	–0,339

Приложение 2

Распределение критерия Дарбина – Уотсона для положительной автокорреляции (для 5%-го уровня значимости)

n	$V=1$		$V=2$		$V=3$		$V=4$		$V=5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,89
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,63	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,55	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Учебное электронное издание

ФРАЙМОВИЧ Денис Юрьевич
БЫКОВА Маргарита Леонидовна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина
Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов
Компьютерная верстка П. А. Некрасова
Корректор Н. В. Пустовойтова
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM.

Тираж 9 экз.

Издательство Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
600000, Владимир, ул. Горького, 87.