

Владимирский государственный университет

В. И. ДАНЧЕНКО Д. Я. ДАНЧЕНКО
Е. Н. КОНДАКОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. И. ДАНЧЕНКО Д. Я. ДАНЧЕНКО
Е. Н. КОНДАКОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание



Владимир 2025

ISBN 978-5-9984-1753-5

© ВлГУ, 2025

© Данченко В. И., Данченко Д. Я.,
Кондакова Е. Н., 2025

УДК 519.6
ББК 22.19

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
профессор кафедры информационных технологий
Владимирского филиала Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте Российской Федерации
А. А. Малафеева

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Данченко, В. И. Численные методы [Электронный ресурс] : учеб.-
практ. пособие / В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, Е. Н. Кондакова ; Владим.
гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2025. –
173 с. – ISBN 978-5-9984-1753-5. – Электрон. дан. (4,88 Мб). – 1 электрон.
опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows
XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Приведены теоретические сведения и задачи по дисциплине «Численные
методы».

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям
подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и
компьютерные науки».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в
соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 10 назв.

ISBN 978-5-9984-1753-5

© ВлГУ, 2025

© Данченко В. И., Данченко Д. Я.,
Кондакова Е. Н., 2025

Оглавление

Предисловие	7
1. Общие свойства многочленов	7
1.1. Алгоритм Евклида. Наибольший общий делитель двух многочленов.....	10
1.2. Алгоритм Евклида. Устранение кратности корней.....	12
1.3. Схема Горнера вычисления значений многочлена. Применение к оценке границы вещественных корней.....	13
1.4. Метод Лобачевского квадрирования корней. Применение к оценке границы корней.....	16
1.5. Граница корней для многочлена с комплексными коэффициентами.....	19
2. Интерполяция и аппроксимация алгебраическими многочленами.....	19
2.1. Алгебраические интерполяционные многочлены	21
2.2. Погрешность интерполяции	23
2.3. Выбор узлов интерполяции. Многочлены Чебышева	25
2.4. Метод наименьших квадратов	30
2.5. Аппроксимация Паде	33
2.6. Наилучшие приближения. Теорема о чебышевском альтернансе.....	36
2.7. Одно дополнение к теореме о чебышевском альтернансе. Примеры	40
2.8. Наилучшее приближение на конечном множестве	43
2.9. Теорема Валле-Пуссена	49
3. Сплайны.....	50
3.1. Сплайны 2-го порядка	52
3.2. Сплайны 3-го порядка	54

4. Интерполяция и аппроксимация	
тригонометрическими многочленами.....	58
4.1. Разложение на множители тригонометрических многочленов	58
4.2. Интерполяционная формула Лагранжа	61
4.3. Интерполяционная формула Лагранжа	
с равноотстоящими узлами	62
4.4. Вторая теорема Вейерштрасса	63
5. Аппроксимация ортогональными системами	65
5.1. Ортогональные системы в евклидовом пространстве	65
5.2. Ряды Фурье по ортонормированной системе	67
5.3. Метод ортогонализации Грама-Шмидта	69
5.4. Ортонормированная система многочленов	71
5.5. Задача о наилучшем приближении	
ортонормированными многочленами	72
5.6. Метод наименьших квадратов в L_2	74
6. Аппроксимация посредством цепных дробей.....	77
6.1. Цепные числовые дроби	77
6.2. Разложение рациональных функций в цепные дроби	82
6.3. Задача интерполяции рациональными функциями	83
7. Численный анализ функциональных уравнений и неравенств.....	85
7.1. Локализация корней	85
7.2. Метод половинного деления	86
7.3. Метод итераций	86
7.4. Метод Ньютона (метод касательных)	90
7.5. Комбинированный метод хорд и касательных	92
7.6. Нахождение корней аналитических функций	94
7.7. Решение систем нелинейных уравнений	96
7.8. Нахождение точек минимума функции одной переменной.	
Метод золотого сечения	100

7.9. Нахождение точек минимума функции двух переменных.	
Метод антиградиента	102
8. Численное дифференцирование.....	104
8.1. Вычисление производной первого порядка	104
8.2. Вычисление производной второго порядка	107
9. Численное интегрирование.....	108
9.1. Постановка задачи квадратуры.....	108
9.2. Формула Симпсона с тремя узлами квадратуры	110
9.3. Комбинированная формула Симпсона со многими узлами квадратуры	111
9.4. Метод Чебышева	112
9.5. Метод Гаусса	113
10. Дифференциальные уравнения.....	116
10.1. Метод Эйлера	117
10.2. Уточненный метод Эйлера	117
10.3. Метод Рунге-Кутты	118
10.4. Система дифференциальных уравнений	120
11. Элементы матричного исчисления.....	122
11.1. Связь координат векторов и операторов в разных базисах n -мерного линейного пространства L	122
11.2. Примеры операторов в R^3	124
11.3. Нормы операторов в R^2 и R^3	125
11.4. Вычисление собственных значений и векторов операторов (матриц)	130
11.4.1. Метод Крылова построения характеристического многочлена	130
11.4.2. Метод неопределенных коэффициентов построения характеристического многочлена	133
11.4.3. Метод Крылова нахождения собственных векторов.....	133

11.4.4. Метод итераций нахождения собственных значений и векторов	136
12. Дополнительные методы аппроксимаций.....	137
12.1. Аппроксимация h -суммами	137
12.2. Аппроксимация амплитудно-частотными суммами	140
12.3. Регуляризация	144
12.4. Численное дифференцирование с помощью АЧС	145
13. Задачи.....	149
13.1. Общие свойства многочленов	149
13.2. Интерполяция и аппроксимация алгебраическими многочленами	152
13.3. Интерполяция и аппроксимация тригонометрическими многочленами	158
13.4. Аппроксимация ортогональными системами	160
13.5. Цепные дроби	161
13.6. Численный анализ функциональных уравнений и неравенств.....	162
13.7. Численное интегрирование	165
13.8. Специальные методы аппроксимации	167
13.8.1. h -суммы	167
13.8.2. Амплитудно-частотные суммы	169
Заключение.....	171
Библиографический список.....	171

Предисловие

Издание содержит краткий теоретический материал по основным разделам численного анализа. Пособие включает сборник задач по всем наиболее важным темам учебного курса. Для индивидуализации работы студентов приведены варианты задач. Разбираются примеры решений наиболее трудных задач.

В последнем разделе рассматриваются новые нетрадиционные методы аппроксимации, которые могут служить основой для самостоятельных научных исследований студентов.

Издание будет полезно для студентов специальностей "Математика и компьютерные науки" , "Прикладная математика и информатика" и других технических и физико-математических специальностей вузов.

1 Общие свойства многочленов

Алгебраическим многочленом степени не выше n называется функция вида

$$P_n(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_0. \quad (1)$$

Если $p_n \neq 0$, то многочлен имеет степень (порядок) n , кратко, $\deg P_n = n$ (если $p_n = 0$, то $\deg P_n < n$). В частности, числа (константы) являются многочленами нулевой степени. Алгебраическим уравнением порядка n называется уравнение вида $P_n(z) = 0$, где $\deg P_n = n$. Число z_0 называется корнем кратности $k \geq 1$ уравнения $P_n(z) = 0$ (или, что то же самое, многочлена (1)), если

$$P_n(z_0) = 0, \quad P'_n(z_0) = 0, \quad \dots, \quad P^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad P^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

В случае $k = 1$ корень z_0 называется простым.

Алгебраические многочлены и уравнения исследовались с древних

времен. Значительное расширение методов исследований стало возможным благодаря основополагающему открытию в этой области — следующей теореме, окончательный вариант которой доказан великим немецким математиком К. Гауссом (в 1799 году).

Основная теорема алгебры. *Уравнение $P_n(z) = 0$ порядка n имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности (то есть каждый корень учитывается столько раз, какова его кратность). Другими словами, сумма кратностей корней уравнения $P_n(z) = 0$ равна n .*

Отметим, что эта теорема в свое время не явилась неожиданностью, в той или иной степени строгости ее доказательство знали великие математики 18 века — Маклорен, Эйлер, Д’Аламбер, Лагранж, Лаплас. Более того, как гипотеза она была известна еще в 17 веке (Декарт, Жерар).

Эта теорема имеет многочисленные следствия. Сформулируем некоторые из них.

Разложение многочлена на множители. *Каждый многочлен вида (1) можно представить в виде произведения простейших множителей*

$$P_n(z) = p_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n), \quad p_n \neq 0. \quad (2)$$

В этом произведении некоторые множители, соответствующие кратным корням, могут повторяться. Поэтому разложение на множители (2) можно переписать в виде

$$P_n(z) = p_n(z - a_1)^{k_1} \cdot (z - a_2)^{k_2} \cdots (z - a_m)^{k_m}, \quad (3)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_m$ — различные корни уравнения $P_n(z) = 0$, а $k_1, k_2, \dots, k_m$ — кратности этих корней, сумма которых равна n .

Теорема Виета. *Коэффициенты многочлена (1) удовлетворяют следующим равенствам*

$$\frac{p_{n-k}}{p_n} = (-1)^k \sigma_k, \quad p_n \neq 0,$$

где σ_k — элементарные симметрические многочлены порядка k от корней

многочлена (1), которые определяются по формуле

$$\sigma_k = \sigma_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Свойства корней вещественных многочленов. Если все коэффициенты многочлена $P_n(z)$ вещественны, то его корни лежат на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси. Точнее, если $z_0 = x_0 + iy_0$ — корень многочлена (1), то либо $y_0 = 0$ (то есть корень вещественный), либо $y_0 \neq 0$ и тогда корнем является и сопряженное с этим корнем число $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$.

Это сразу следует из равенства

$$0 = \overline{p_n z_0^n + p_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + p_0} = p_n \overline{z_0}^n + p_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \dots + p_0$$

Свойства корней вещественных многочленов нечетной степени. Если n нечетно, то многочлен (1) с вещественными коэффициентами всегда имеет хотя бы один вещественный корень.

Действительно, при достаточно больших a знаки величин $P_n(a)$, $P_n(-a)$ определяются старшим слагаемым $p_n a^n$ и, следовательно, противоположны. Но непрерывная функция, принимающая на концах отрезка $[-a, a]$ значения с противоположными знаками, имеет на этом отрезке хотя бы один нуль.

Это утверждение можно получить и из предыдущего свойства. Действительно, если бы множество корней такого многочлена P_n не содержало вещественных корней, то оно разбивалось бы на пары комплексно сопряженных корней, а тогда число всех корней было бы четным и, значит, не равным n . Это противоречит основной теореме алгебры.

Остановимся на некоторых классических методах работы с многочленами.

1.1 Алгоритм Евклида. Наибольший общий делитель двух многочленов

Алгоритм Евклида состоит в следующей процедуре делений с остатком:

$$P(x) = Q(x) \cdot C_1(x) + r_1(x), \quad (5)$$

$$Q(x) = r_1(x) \cdot C_2(x) + r_2(x), \quad (6)$$

$$r_1(x) = r_2(x) \cdot C_3(x) + r_3(x), \quad (7)$$

и так далее. Здесь C_j — целые части, r_j — остатки при делении. Если для единообразия положить $P(x) = r_{-1}(x)$, $Q(x) = r_0(x)$, то предыдущие формулы можно переписать в виде

$$r_{m-2}(x) = r_{m-1}(x) \cdot C_m(x) + r_m(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

При делении с остатком степень остатка меньше степени соответствующего делителя:

$$\deg Q > \deg r_1 > \deg r_2 > \dots,$$

поэтому процесс прервется на каком-то конечном шаге $k+1$, т.е. мы придем к делению без остатка:

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot C_k(x) + r_k(x), \quad (9)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot C_{k+1}(x) + 0. \quad (10)$$

Справедливо следующее

Утверждение. *Многочлен $r_k(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов P и Q , кратко, $r_k = \text{NOD}(P, Q)$.*

Для доказательства покажем сначала, что r_k является общим делителем. Из (10) следует, что $r_{k-1}(x)$ делится на r_k без остатка. Отсюда и из (9) следует, что $r_{k-2}(x)$ также делится на r_k без остатка. И так далее. В результате получим, что $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на r_k без остатка.

Покажем теперь, что r_k является *наибольшим* из делителей, т.е. делит

любой другой делитель. Действительно, если некоторый многочлен $S(x)$ делит одновременно $P(x)$ и $Q(x)$, то он делит и $r_1(x)$ (см. (5)). Значит, он делит одновременно $Q(x)$ и $r_1(x)$ и, следовательно, делит $r_2(x)$ (см. (6)). Отсюда, аналогично, получается, что он делит $r_3(x)$ (см. (7)). И так далее. В результате получаем, что он делит $r_{k-2}(x)$, $r_{k-1}(x)$, $r_k(x)$ (см. (9)).

В частности, если r_k является *числом*, т.е. многочленом нулевой степени, то многочлены P и Q взаимно просты.

Примечание. Заметим, что $\text{NOD}(P, Q)$ определен с точностью до постоянного множителя. Поэтому при делении r_{m-2} на r_{m-1} можно предварительно домножить эти многочлены на некоторые числовые множители M и N и делить $Mr_{m-2}(x)$ на $Nr_{m-1}(x)$. Действительно,

$$r_{m-2}(x) = r_{m-1}(x) \cdot C_m(x) + r_m(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$Nr_{m-2}(x) = Nr_{m-1}(x) \cdot C_m(x) + Nr_m(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$Nr_{m-2}(x) = Mr_{m-1}(x) \cdot \frac{N}{M} C_m(x) + Nr_m(x),$$

где числа $N \neq 0$ и $M \neq 0$ могут быть любыми. Таким образом, вместо остатка $r_m(x)$ мы получим остаток $Nr_m(x)$, отличающийся лишь постоянным множителем, а это в силу сказанного не повлияет на окончательный результат $\text{NOD}(P, Q)$. Такие домножения можно применять для упрощения счета, например, чтобы возникающие в процессе алгоритма многочлены имели целые коэффициенты.

Пример. Проведем алгоритм для $P = x^4 + x^2 + x - 3$, $Q = x^3 + x^2 + x - 3$.

$$x^4 + x^2 + x - 3 = (x^3 + x^2 + x - 3) \cdot (x - 1) + (x^2 + 5x - 6);$$

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x^2 + 5x - 6) \cdot (x - 4) + (27x - 27);$$

$$x^2 + 5x - 6 = (x - 1) \cdot (x + 6) + 0.$$

Ответ: $\text{NOD}(P, Q) = x - 1$ (см. также следующий пример с домножениями).

1.2 Алгоритм Евклида. Устранение кратности корней

Многочлен (1) может иметь кратные корни, что при численном решении уравнения $P_n(z) = 0$ может приводить к большим погрешностям (см. раздел 7). Существует простой метод получения уравнения

$$Q(z) := q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \dots + q_0 = 0, \quad (11)$$

которое имеет те же корни, что и многочлен (1), но все они простые. Запишем многочлен $P = P_n$ в виде

$$P(z) = p_n(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_m)^{k_m},$$

где k_s – кратности соответствующих корней a_s . Поскольку

$$P'(z) = A(z - a_1)^{k_1-1}(z - a_2)^{k_2-1} \dots (z - a_m)^{k_m-1} R(z),$$

где $R(z)$ – многочлен, среди корней которого нет корней многочлена $P(z)$, то наибольшим общим делителем $S(z) = \text{NOD}(P(z), P'(z))$ является многочлен вида (с точностью до постоянного множителя)

$$S(z) = (z - a_1)^{k_1-1}(z - a_2)^{k_2-1} \dots (z - a_m)^{k_m-1}.$$

Значит, многочлен $Q(z) = \frac{P(z)}{S(z)}$ будет иметь те же корни, что и P , причем все эти корни простые. Для нахождения $S(z) = \text{NOD}(P(z), P'(z))$ применяется алгоритм Евклида.

Пример. $P(z) = z(z - 1)^2(z + 1)^2 = z^5 - 2z^3 + z$. Тогда $P'(z) = 5z^4 - 6z^2 + 1$. Алгоритм Евклида: первый шаг

$$P(z) = \frac{1}{5}z \cdot P'(z) - \frac{4}{5}z^3 + \frac{4}{5}z.$$

Домножим $r_1(z) = -\frac{4}{5}z^3 + \frac{4}{5}z$ на $(-\frac{5}{4})$, получим новый остаток, для которого сохраним то же обозначение: $r_1 = z^3 - z$.

Второй шаг: $P'(z) = 5z \cdot r_1 + 1 - z^2$. Получен остаток $r_2 = 1 - z^2$. Домножим его на -1, получим новый остаток, для которого сохраним то же обозначение: $r_2 = z^2 - 1$.

Третий шаг $r_1(z) = z \cdot r_2 + 0$. Получен остаток: $r_3 = 0$. Значит

$\text{NOD}(P, P') = r_2 = z^2 - 1$. Наконец,

$$\frac{P(z)}{z^2 - 1} = (z^2 - 1)z$$

есть искомый многочлен без кратных корней.

1.3 Схема Горнера вычисления значений многочлена. Применение к оценке границы вещественных корней

Если вычислять значения многочлена (1), вычисляя и складывая последовательно мономы $p_k z^k$, то могут возникать большие погрешности из-за многократных умножений (при возведении в большие степени). Поэтому при вычислениях обычно используется метод Горнера, при котором сложения и умножения в определенном смысле сбалансированы. Остановимся на этом методе подробнее. Пусть требуется найти значение многочлена $P_n(z)$ при $z = c$. Тогда

$$\begin{aligned} P_n(c) &= p_n c^n + p_{n-1} c^{n-1} + p_{n-2} c^{n-2} + \dots + p_1 c + p_0 = \\ &= (p_n c + p_{n-1}) c^{n-1} + p_{n-2} c^{n-2} + \dots + p_1 c + p_0 = \\ &= [(p_n c + p_{n-1}) c + p_{n-2}] c^{n-2} + \dots + p_1 c + p_0 = \\ &= (\dots \{[(p_n c + p_{n-1}) c + p_{n-2}] c + p_{n-3}\} + \dots +) c + p_0. \end{aligned}$$

Этот процесс можно записать в виде последовательности операций

$$\begin{aligned} g_n &= p_n; \\ g_{n-1} &= g_n c + p_{n-1}; \\ g_{n-2} &= g_{n-1} c + p_{n-2}; \\ &\dots \dots \dots \\ g_1 &= g_2 c + p_1; \\ g_0 &= g_1 c + p_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Числа g_k будем называть коэффициентами Горнера. Последний коэффициент Горнера g_0 в этой цепочке равенств и равен нужному значению $P_n(c)$.

Пример. Вычислить значение многочлена $P_4(z) = 2z^4 + z^3 - 2z + 3$ по схеме Горнера при $z = -2$.

$$\begin{aligned} g_4 &= 2; \\ g_3 &= g_4 c + 1 = -3; \\ g_2 &= g_3 c + 0 = 6; \\ g_1 &= g_2 c - 2 = -14; \\ g_0 &= g_1 c + 3 = 31. \end{aligned}$$

Указанная схема имеет и другие применения для многочленов с вещественными коэффициентами. Справедлива

Теорема. Если при некотором положительном c все коэффициенты Горнера g_k , $k = 0, \dots, n$, вещественны и неотрицательны, $p_n = g_n > 0$, то действительные корни многочлена P_n (с вещественными коэффициентами) не превосходят этого числа c .

Доказательство основано на том, что при делении многочлена $P_n(x)$ (здесь и ниже мы пишем x вместо z , где значения многочлена рассматриваются на $\mathbb{R}$) на $x - c$ получается равенство

$$P_n(x) = (g_n x^{n-1} + g_{n-1} x^{n-2} + \dots + g_2 x + g_1) \cdot (x - c) + g_0. \quad (13)$$

Действительно, перемножив выражения справа и собрав коэффициенты при степенях x , получим

$$(g_n x^{n-1} + g_{n-1} x^{n-2} + \dots + g_2 x + g_1) \cdot (x - c) + g_0 =$$

$$(g_0 - c g_1) + (g_1 - c g_2)x + (g_2 - c g_3)x^2 + \dots + (g_{n-1} - c g_n)x^{n-1} + g_n x^n.$$

Для того, чтобы полученное выражение равнялось P_n необходимо и достаточно равенство соответствующих коэффициентов:

$$g_n = p_n, \quad g_{n-1} - c g_n = p_{n-1}, \dots, g_1 - c g_2 = p_1, \quad g_0 - c g_1 = p_0,$$

а это совпадает с формулами (12).

Пусть все $g_k \geq 0$ при $x > c$. Тогда все слагаемые $g_k x^k$ в представлении (13) неотрицательны, причем $g_n = p_n > 0$, и, значит, $P(x) > 0$ (т.е. не может равняться нулю). Это и доказывает теорему.

Теорему можно применять для оценки границы действительных корней многочлена $P_n(x)$. Действительно, пусть для определенности $p_n > 0$. Сначала подберем $c > 0$ при котором все коэффициенты Горнера $g_k \geq 0$. По теореме все корни $x_k \leq c$. Далее, рассмотрим многочлен $Q(x) = (-1)^n P(-x)$. Этот многочлен по-прежнему имеет положительный старший коэффициент p_n . Снова подберем $\tilde{c} > 0$, при котором все соответствующие коэффициенты Горнера $\tilde{g}_k \geq 0$. По теореме все вещественные корни $\tilde{x}_k$ многочлена Q будут удовлетворять неравенству $\tilde{x}_k \leq \tilde{c}$. Но эти корни отличаются от корней многочлена P только знаком: $\tilde{x}_k = -x_k$. Поэтому $-x_k \leq \tilde{c}$, то есть $x_k \geq -\tilde{c}$. В результате получаем оценку границы корней: $-\tilde{c} \leq x_k \leq c$.

Пример. Оценить границу корней x_k многочлена $P(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 3x + 1$ с помощью метода Горнера.

Проведем вычисления по формулам (12) при $c = 1$. Уже на втором шаге получим $g_3 = -2$. Дальше вычислять не имеет смысла. Несколько раз увеличивая число c на единицу, действуем по тому же алгоритму (12). Например, при $c = 4$ получим $g_2 = -5$, значит, и это значение числа c не достаточно велико. Наконец, при $c = 5$ получаем $g_4 = 1$, $g_3 = 2$, $g_2 = 1$, $g_1 = 2$, $g_0 = 11$. Следовательно, все корни меньше 5 (строго, поскольку $P(175) = g_0 = 11 \neq 0$).

Для оценки снизу берем многочлен

$$Q(x) = (-1)^4 P(-x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x + 1.$$

При $c = 1$ на третьем шаге получаем отрицательный коэффициент Горнера $\tilde{g}_3 = -5$. Увеличим c , возьмем $c = 2$, получим $\tilde{g}_4 = 1$, $\tilde{g}_3 = 5$, $\tilde{g}_2 = 1$, $\tilde{g}_1 = 5$, $\tilde{g}_0 = 11$. Следовательно, все корни многочлена Q меньше 2 (строго, поскольку $Q(2) = \tilde{g}_0 = 11 \neq 0$), а корни многочлена P больше -2 .

Ответ. Вещественные корни многочлена P удовлетворяют неравенствам $-2 < x_k < 5$.

1.4 Метод Лобачевского квадрирования корней. Применение к оценке границы корней

Этим методом можно приближенно вычислить наибольший по модулю корень многочлена (1). Метод состоит в следующем. Пусть для простоты $p_n = 1$,

$$P(z) = P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Тогда

$$P(-z) = (-z - z_1)(-z - z_2) \cdots (-z - z_n) = (-1)^n (z + z_1)(z + z_2) \cdots (z + z_n),$$

$$P^{(1)}(z^2) := P(z)P(-z) = (-1)^n (z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2) \cdots (z^2 - z_n^2).$$

Заменим формально выражение z^2 на z и получим

$$P^{(1)}(z) = (-1)^n (z - z_1^2)(z - z_2^2) \cdots (z - z_n^2).$$

Эта процедура называется квадрированием. Повторив квадрирование, получим

$$P^{(2)}(z) = (-1)^n (z - z_1^4)(z - z_2^4) \cdots (z - z_n^4),$$

$$P^{(3)}(z) = (-1)^n (z - z_1^8)(z - z_2^8) \cdots (z - z_n^8),$$

и, вообще, после k квадрирований получим

$$P^{(k)}(z) = (-1)^n (z - z_1^{2^k})(z - z_2^{2^k}) \cdots (z - z_n^{2^k}).$$

Предположим теперь, что модуль первого корня z_1 исходного многочлена $P(z)$ по модулю строго больше модулей других корней, то есть $|z_s| < \varepsilon |z_1|$ с некоторым малым $\varepsilon \in (0, 1)$, $s = 2, \dots, n$. Тогда модуль соответствующего корня $t_1 = z_1^{2^k}$ многочлена $P^{(k)}(z)$ будет уже *намного* больше:

$$|t_s| = |z_s^{2^k}| < \varepsilon^{2^k} |z_1^{2^k}| = \varepsilon^{2^k} |t_1|.$$

Теперь используем теорему Виета:

$$(-1)^n P^{(k)}(z) = z^n - a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

где

$$a_{n-1} = t_1 + t_2 + \dots + t_n = z_1^{2^k} + z_2^{2^k} + \dots + z_n^{2^k} \approx z_1^{2^k}.$$

Отсюда видно, что для приближенного значения модуля наибольшего по модулю корня z_1 можно применить формулу (подробности — ниже)

$$|z_1| \approx \sqrt[2^k]{|a_{n-1}|}. \quad (14)$$

Формулу (14)) можно применять и при оценке границы корней. Отметим, что если все корни вещественны, то всегда $a_{n-1} > 0$ и

$$|z_1| \leq \sqrt[2^k]{|a_{n-1}|}.$$

Следующие выкладки до примеров можно пропустить. Оценим погрешность. Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[2^k]{a_{n-1}} &= \sqrt[2^k]{t_1 - E} = \sqrt[2^k]{t_1} \left(1 - \frac{E}{t_1}\right)^{2^{-k}} = \\ &= \sqrt[2^k]{t_1} + \sqrt[2^k]{t_1} \left(\left(1 - \frac{E}{t_1}\right)^{2^{-k}} - 1 \right) = z_1 + z_1 \left(\left(1 - \frac{E}{t_1}\right)^{2^{-k}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим модуль последнего слагаемого. Положим $\varepsilon_1 = E/t_1$, $\delta = 2^{-k}$ и оценим модуль величины

$$V := 1 - (1 - \varepsilon_1)^\delta.$$

Напишем ряд Тейлора функции V по степеням ε_1 в окрестности нуля

$$V = \delta \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \delta (\delta - 1) \varepsilon_1^2 + \frac{1}{3!} \delta (\delta - 1) (\delta - 2) \varepsilon_1^3 - \frac{1}{4!} \delta (\delta - 1) (\delta - 2) (\delta - 3) \varepsilon_1^4 + \dots$$

Будем считать, что номер k удовлетворяет условию $\varepsilon^{2^k}(n-1) < 1$. Тогда из предыдущего с учетом того, что $|\varepsilon_1| \leq \varepsilon^{2^k}(n-1) < 1$, $\delta < 1$ получаем

$$|V| \leq \delta |\varepsilon_1| (1 + |\varepsilon_1| + |\varepsilon_1|^2 + \dots) = \delta \frac{|\varepsilon_1|}{1 - |\varepsilon_1|} \leq 2^{-k} \frac{\varepsilon^{2^k}(n-1)}{1 - \varepsilon^{2^k}(n-1)}.$$

Отсюда и из (15) получаем при достаточно больших k приближенную формулу для нахождения корня z_1 :

$$\sqrt[2^k]{-a_{n-1}} = z_1 \cdot (1 + R), \quad |R| \leq 2^{-k} \frac{\varepsilon^{2^k}(n-1)}{1 - \varepsilon^{2^k}(n-1)}. \quad (16)$$

Правда, отсюда нельзя однозначно определить корень z_1 из-за неоднозначности операции извлечения корней. Но можно однозначно определить модуль числа z_1 , вычислив арифметический корень $\sqrt[2^k]{|a_{n-1}|}$. Тогда с указанной в (16) относительной погрешностью R имеем (14)

Пример. Рассмотрим многочлен с корнями 1, 3:

$$P(z) = z^2 - 4z + 3.$$

В процессе квадрирования получим

$$P^{(1)}(z) = z^2 - 10z + 9, \quad P^{(2)}(z) = z^2 - 82z + 81, \quad P^{(3)}(z) = z^2 - 6562z + 6561.$$

Извлекая корень порядка $2^3 = 8$ из 6562, получим приближенное значение наибольшего корня 3.0000571.

Пример. Рассмотрим многочлен

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6.$$

Теперь трижды повторим квадрирование

$$P^{(1)} = -z^3 + 14z^2 - 49z + 36;$$

$$P^{(2)} = -z^3 + 98z^2 - 1393z + 1296, \quad P^{(3)} = -z^3 + 6818z^2 + \dots$$

Заметим, что слагаемые на месте многоточия не вычислены, они не нужны. Извлекая корень порядка $2^3 = 8$ из 6818, получим приближенное значение наибольшего корня 3.01444333.

1.5 Граница корней для многочлена с комплексными коэффициентами

Для того, чтобы искать приближенное значение корня многочлена (1) каким-либо методом последовательных приближений (см. раздел 7), надо как можно точнее знать в какой области он находится.

Теорема. *Все корни многочлена (1) лежат в круге*

$$|z| \leq 1 + M, \text{ где } M = \max \left\{ \frac{|p_{n-1}|}{|p_n|}, \frac{|p_{n-2}|}{|p_n|}, \dots, \frac{|p_0|}{|p_n|} \right\}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |p_n z^n| - |p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_0| \geq |p_n| |z|^n - |p_{n-1}| |z|^{n-1} - \dots - |p_0| = \\ &= |p_n| |z|^n \left(1 - \frac{|p_{n-1}|}{|p_n|} \frac{1}{|z|} - \dots - \frac{|p_0|}{|p_n|} \frac{1}{|z|^n} \right) \geq \\ &= |p_n| |z|^n \left(1 - M \left(\frac{1}{|z|} - \dots - \frac{1}{|z|^n} \right) \right) = \\ &= |p_n| |z|^n \left(1 - \frac{M}{|z|} \frac{1 - \frac{1}{|z|^n}}{1 - \frac{1}{|z|}} \right) \geq |p_n| |z|^n \left(1 - \frac{M}{|z|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} \right) = \\ &= |p_n| |z|^n \left(1 - \frac{M}{|z| - 1} \right) = |p_n| |z|^n \left(\frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} \right) > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется, если $|z| > M + 1$. То есть при таких z не может быть равенства $|P(z)| = 0$. Что и требовалось.

2 Интерполяция и аппроксимация алгебраическими многочленами

Задача о приближении (аппроксимации) заданной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (кратко, $f \in C[a, b]$) посредством многочленов (1) формулируется следующим образом. Требуется найти многочлен P_n задан-

ной степени n такой, чтобы величина $|P_n(x) - f(x)|$ была как можно меньше во всех точках отрезка $[a, b]$. Другими словами, требуется найти многочлен, для которого мала норма

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |P_n(x) - f(x)|, \quad (17)$$

которую естественно назвать *погрешностью аппроксимации*. Погрешность аппроксимации в теории приближений называют также величиной уклонения на отрезке $[a, b]$ многочлена $P_n(x)$ от функции $f(x)$. Построение аппроксимирующего многочлена — классическая задача *конструктивной теории функций* или *теории аппроксимаций*. Она часто возникает в численном анализе, например, если требуется изучить поведение некоторой трудновычислимой функции, то ее заменяют на более простой объект — аппроксимирующий многочлен и его значения используют при анализе функции.

Многочлены наилучшего приближения. Одна из основополагающих теорем теории аппроксимаций — теорема Э. Бореля, которая утверждает, что при каждом натуральном n существует многочлен $P_n^*(x)$ степени не выше n *наилучшего приближения*, для которого погрешность аппроксимации минимальна. Это означает, что

$$\|f - P_n^*\|_{C[a,b]} \leq \|f - P_n\|_{C[a,b]},$$

для любого многочлена P_n степени не выше чем n . При этом равенство достигается лишь в случае, когда $P_n = P_n^*$, то есть многочлен наилучшего приближения единственен. В теории приближений принято обозначение:

$$E_n(f) = E_n(f, [a, b]) = \|f - P_n^*\|_{C[a,b]},$$

причем $E_n(f)$ называется величиной наилучшего приближения функции f .

Теорема о существовании многочлена наилучшего приближения не утверждает, что произвольная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована такими многочленами, то есть что $E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Задача о возможности сколь угодно точной аппроксимации решена К. Вейерштрассом. Ему принадлежит сле-

дующая

Теорема. Пусть $f \in C[a, b]$ и ε – любое сколь угодно малое положительное число. Тогда существует многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$\|f - P_n\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

Другими словами, $E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Существуют алгоритмы построения многочлена наилучшего приближения $P_n^*(x)$, однако они весьма трудоемки. Иногда предпочтительнее строить приближающие многочлены из условий *интерполяции*. Они могут и не быть многочленами наилучшего приближения, но зато получаются по очень простым алгоритмам.

2.1 Алгебраические интерполяционные многочлены

Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$. Пусть задан набор попарно различных точек $x_1, \dots, x_{n+1}$, $x_k \in [a, b]$, которые называют узлами интерполяции. Требуется найти многочлен P_n , совпадающий с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции, т.е. многочлен, для которого $P_n(x_k) = f(x_k) = y_k$ при $k = 1, \dots, n+1$. Такой многочлен называется интерполяционным. При построении интерполяционного многочлена, как видно из постановки задачи, не учитываются какие-либо общие свойства функции $f(x)$, а учитываются лишь ее значения в узлах интерполяции. Фактически для построения многочлена надо знать лишь множество пар (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n+1$. Это множество называют таблицей интерполяции и записывают в виде

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n+1}
Y	y_1	y_2	$\dots$	y_{n+1}

Указанная интерполяция называется простой, поскольку узлы $\{x_k\}$ различны. Оказывается, интерполяционный многочлен с заданной таблицей интерполяции всегда существует и притом единственен. Существует

множество способов построения интерполяционных многочленов. Мы остановимся на двух.

Метод Ньютона. Положим

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_1) + \alpha_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \alpha_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) + \alpha_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (18)$$

где числа α_k подлежат определению. Ясно, что P_n является многочленом степени не выше n . Для определения числа α_1 рассмотрим первое интерполяционное равенство $P_n(x_1) = y_1$. Поскольку $P_n(x_1) = \alpha_0$ (все другие слагаемые в (18) равны нулю), то отсюда находим $\alpha_0 = y_1$. Для определения числа α_2 рассмотрим второе интерполяционное равенство $P_n(x_2) = y_2$. Поскольку $P_n(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_1)$ (все другие слагаемые в (18) равны нулю) и α_0 уже определено, то отсюда находим

$$\alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_1) = y_2, \quad \alpha_1 = \frac{y_2 - \alpha_0}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Так вычисляются последовательно все числа α_k . Например, последнее число α_n определяется из последнего интерполяционного равенства

$$P_n(x_{n+1}) = y_{n+1},$$

т.е.

$$P_n(x_{n+1}) = \alpha_0 + \alpha_1(x_{n+1} - x_1) + \dots + \alpha_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n) = y_{n+1},$$

где все α_k с номерами $k = 0, \dots, n - 1$ уже определены. Остается раскрыть все скобки в (18) и сгруппировать многочлен по степеням x . Отметим, что в результате может получиться многочлен степени $< n$.

Пример. Построим многочлен, интерполирующий таблицу

X	1	2	3
Y	y_1	y_2	y_3

Проделав указанное для многочлена

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_1) + \alpha_2(x - x_1)(x - x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x - 1) + \alpha_2(x - 1)(x - 3),$$

получаем последовательно:

$$\alpha_0 = y_1, \quad \alpha_1 = y_2 - y_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3,$$

$$P_2(x) = y_1 + (y_2 - y_1)(x - 1) + \frac{1}{2}(y_1 - 2y_2 + y_3)(x - 1)(x - 2).$$

Раскрыв скобки, найдем

$$P_2(x) = \left(\frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)x^2 + \left(-\frac{5}{2}y_1 + 4y_2 - \frac{3}{2}y_3\right)x + 3y_1 - 3y_2 + y_3.$$

Метод Лагранжа. Построим сначала многочлены $l_k(x)$ степени n , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} l_k(x_k) = 1, \\ l_k(x_j) = 0, \quad j \neq k. \end{cases}$$

Такие многочлены имеют вид

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})}.$$

Теперь легко написать интерполяционный многочлен степени не выше n :

$$P_n(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_{n+1} l_{n+1}(x).$$

2.2 Погрешность интерполяции

Интерполяционные многочлены и погрешность приближения такими многочленами сильно зависят от выбора узлов интерполяции и, к сожалению, при неудачном выборе узлов интерполяции приближение может оказаться неудовлетворительным. Для оценки погрешности установим следующее равенство для достаточно гладких функций f :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x), \quad (19)$$

где $c = c(x)$ — некоторая зависящая от x точка на отрезке $[a, b]$,

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n+1}).$$

Действительно, выберем на отрезке $[a, b]$ произвольную точку x_0 , отличную от всех узлов интерполяции. Рассмотрим выражение

$$r(x) = f(x) - P_n(x) - \lambda \Pi_{n+1}(x),$$

где коэффициент λ удовлетворяет условию $r(x_0) = 0$. Поскольку в этой точке $\Pi_{n+1}(x_0) \neq 0$, то такой коэффициент однозначно определяется:

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \lambda \Pi_{n+1}(x_0), \quad \lambda = \frac{f(x_0) - P_n(x_0)}{\Pi_{n+1}(x_0)}. \quad (20)$$

Подсчитаем теперь λ иным способом. Для этого заметим, что при указанном выборе λ функция $r(x)$ (многочлен степени $n+1$) обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$. По теореме Ролля между каждой парой нулей функции $r(x)$ находится по меньшей мере один нуль ее производной, потому $r'(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ не меньше чем $n+1 = (n+2) - 1$ нулей. Аналогично, $r''(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ не меньше чем $n = (n+2) - 2$ нулей. И так далее. Мы приходим к тому, что производная $r^{(n+1)}(x)$ имеет не менее $1 = (n+2) - (n+1)$ нулей на $[a, b]$. Итак, существует нуль производной $r^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$. Обозначим его через c . Учитывая, что степень многочлена P_n не выше n и, следовательно, $P_n^{(n+1)}(c) = 0$, получаем

$$r^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \lambda \Pi_{n+1}^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \lambda(n+1)!.$$

Отсюда

$$f^{(n+1)}(c) - \lambda(n+1)! = 0, \quad \lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Сравнивая это с (20), получаем

$$\frac{f(x_0) - P_n(x_0)}{\Pi_{n+1}(x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x_0),$$

что ввиду произвольности выбранной точки $x_0 \neq x_k, k = 1, \dots, n+1$ и доказывает формулу (19) (в узлах интерполяции равенство очевидно).

Оценка погрешности интерполяции получается из (19) и имеет вид

$$\|r_n\|_{C[a,b]} = \|f - P_n\|_{C[a,b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]} \cdot \|\Pi_{n+1}\|_{C[a,b]}. \quad (21)$$

Таким образом, погрешность интерполяции зависит от качества (гладкости) функции f и от выбора узлов интерполяции. Поскольку изменять свойства функции мы не можем, то для уменьшения погрешности интерполяции нам следует выбирать узлы интерполяции наилучшим образом, так, чтобы норма

$$\|\Pi_{n+1}\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\Pi_{n+1}(x)|$$

была наименьшей. Задача о наилучшем выборе узлов решена П.Л.Чебышевым. Такие узлы распределены на отрезке специальным образом, не равномерно, а сгущаются у его концевых точек (см. раздел 2.3).

Пример 1. Постоить многочлен второй степени, интерполирующий функцию $\sin x$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = \pi$ и оценить погрешность на отрезке $[0, \pi]$.

$$P_2(x) = Ax(x - \pi), \quad P_2(\pi/2) = 1.$$

Отсюда

$$A = -\frac{4}{\pi^2}, \quad P_2(x) = -\frac{4}{\pi^2}x(x - \pi), \quad \Pi_3(x) = x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi).$$

Максимум $|\Pi_3(x)|$ на отрезке $[0, \pi]$ легко вычисляется из условия $\Pi_3'(x) = 0$, он равен $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{36} < 3/2$. Поэтому

$$|P_2(x) - \sin x| \leq \frac{1}{3!} \cdot \max |(\sin x)'''| \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}, \quad x \in [0, \pi].$$

2.3 Выбор узлов интерполяции.

Многочлены Чебышева

Мы получили оценку погрешности интерполяции в виде (21). Отсюда следует, что для уменьшения погрешности целесообразно выбирать узлы ин-

терполяции так, чтобы была наименьшей норма $\|\Pi_{n+1}\|_{C[a,b]}$. Задача о таком выборе узлов решена П.Л. Чебышевым. Оказывается, что узлы лучше всего брать в нулях *многочлена Чебышева*. Выпишем формулу для вычисления таких узлов

$$x_{k+1} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{1+2k}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, \dots, n. \quad (22)$$

Узлы (22) распределены не равномерно на отрезке, а сгущаются у его концевых точек, и при этом имеет место равенство

$$\|\Pi_{n+1}\|_{C[a,b]} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}. \quad (23)$$

Тем самым оценка погрешности (21) принимает вид

$$\|R_n\|_{C[a,b]} \leq \frac{2}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]}. \quad (24)$$

Чтобы доказать сказанное остановимся подробнее на функциях вида

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad (25)$$

которые играют важную роль в теории аппроксимаций и которые называют многочленами Чебышева первого рода степени n . Возникает вопрос, почему функция T_n действительно является многочленом.

Докажем это. Три первых многочлена вычисляются непосредственно:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x, \quad T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1. \quad (26)$$

Далее, воспользуемся тождеством

$$\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2 \cos(n\varphi) \cos(\varphi),$$

откуда, подставив $\varphi = \arccos x$, получим

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x)T_1(x) = 2xT_n(x).$$

Мы получили рекуррентную формулу

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (27)$$

позволяющую вычислять $T_n(x)$ последовательно, опираясь на (26), напри-

мер,

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x.$$

Из (26) и (27) следует, что все функции $T_n(x)$ действительно являются многочленами, причем их старшие коэффициенты равны 2^{n-1} . Следовательно,

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n + \dots$$

являются *унитарными* многочленами, т.е. их старшие коэффициенты равны единице.

Нули и точки экстремума многочленов Чебышева. Многочлен $T_n(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ имеет n нулей (т.е. максимально возможное число). Вычислим их

$$\cos(n \arccos x) = 0, \quad n \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Отсюда

$$\arccos x = \frac{1+2k}{n} \frac{\pi}{2}, \quad x_k = \cos \left(\frac{1+2k}{n} \frac{\pi}{2} \right), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (28)$$

Нули x_k многочлена Чебышева можно изобразить следующим образом. Разобьем полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, на $2n$ равных дуг точками $z_1, \dots, z_{2n-1}$. Тогда нули есть проекции на ось OX точек $z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}$.

Отметим еще одно важное свойство многочлена $T_n(x)$. Он имеет $n+1$ точек α_k экстремума (максимума и минимума), в которых принимает свои наибольшее и наименьшее значения ± 1 попеременно, начиная с правого конца отрезка $[-1, 1]$. Легко вычислить эти точки экстремума: $\alpha_k = \cos \left(\frac{\pi k}{n} \right)$, $k = 0, \dots, n$. Для этих точек имеем

$$T_n(\alpha_k) = \cos(n \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi k}{n} \right) \right)) = \cos(\pi k) = (-1)^k.$$

Экстремальное свойство многочленов Чебышева. Унитарные многочлены Чебышева являются многочленами, наименее уклоняющимся от нуля в следующем смысле.

Теорема. Среди всех многочленов $P_n(x)$ со старшим коэффициентом 1 унитарный многочлен $\tilde{T}_n(x)$ имеет наименьшую норму на отрезке

$[-1, 1]$, т.е. величина

$$\|\tilde{T}_n\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (29)$$

является наименьшей из возможных. При этом многочлен $\tilde{T}_n(x)$ является единственным многочленом указанного вида, удовлетворяющим равенству (29).

Доказательство. Предположим противное: существует многочлен $P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$, для которого

$$\|P_n\|_{C[-1,1]} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

в частности, этот многочлен должен быть отличным от многочлена $\tilde{T}_n(x)$. Далее, многочлен $Q(x) = \tilde{T}_n(x) - P_n(x) = (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots$ имеет степень меньше чем n . С другой стороны, эта разность в точках экстремума α_k имеет тот же знак, что и многочлен $\tilde{T}_n$. Поэтому на каждом отрезке между двумя соседними точками экстремума многочлен $Q(x)$ изменяет знак и, следовательно, имеет по меньшей мере один корень. Таких отрезков всего n , а значит и корней у многочлена $Q(x)$ не менее n . Этого возможно только если $Q(x) \equiv 0$, то есть $P_n(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$. Противоречие. Утверждение доказано.

Докажем единственность. Пусть имеется еще один многочлен $Q_n(x) = x^n + \dots + b_0$, удовлетворяющий равенству (29). Рассмотрим разность $S(x) = \tilde{T}_n(x) - Q_n(x)$, которая представляет собой многочлен степени $\leq n - 1$.

Обозначим через δ_k , $k = 1, \dots, n$, отрезки, заключенные между всеми парами соседних точек экстремумов многочлена $\tilde{T}_n$ — т.е. между соседними точками его максимумов и минимумов $\alpha_s = \cos\left(\frac{\pi}{n}s\right)$, $s = 0, \dots, n$. В каждой такой точке, отличной от ± 1 , многочлен $S(x)$ либо имеет знак функции $\tilde{T}_n(x)$, либо имеет нуль не ниже второго порядка (в такой точке многочлены $\tilde{T}_n$ и Q_n имеют экстремум одного знака одновременно). Теперь объединим все отрезки δ_k , в пересечении которых находятся нули функции S . Получим новый набор отрезков Δ_k , удовлетворяющий следующим свойствам.

Если Δ_k состоит из единственного не крайнего отрезка δ_l , $l \neq 1$, $l \neq n$, то на концах его знаки $S(x)$ противоположны и, следовательно, $S(x)$ имеет внутри Δ_k хотя бы один нуль. Если Δ_k состоит из единственного крайнего отрезка, скажем, δ_1 , то нуль Q находится либо в точке -1 , либо, в противном случае (из-за перемены знаков на концах), внутри δ_1 .

Если же Δ_k состоит из нескольких отрезков, скажем из $m \geq 2$, то внутри его расположено $2(m-1) \geq m$ нулей (с учетом кратности).

Таким образом мы насчитали нулей многочлена S не меньше чем число отрезков δ_k , т.е. $\geq n$. Это противоречит тому, что степень многочлена S не превосходит $n-1$.

Многочлен Чебышева на произвольном отрезке $[a, b]$. Такой многочлен получается заменой переменной:

$$x = \frac{2\tilde{x}}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}. \quad (30)$$

Когда переменная $\tilde{x}$ пробегает отрезок $[a, b]$ переменная x пробегает отрезок $[-1, 1]$. Положим

$$\tau_n(\tilde{x}) = T_n\left(\frac{2\tilde{x}}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right) = T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Функция $\tau_n(\tilde{x})$ является многочленом степени n . Его старший коэффициент, как легко видеть, равен $\frac{2^{2n-1}}{(b-a)^n}$. Поделив на это число многочлен $\tau_n(\tilde{x})$, получим унитарный многочлен (с единичным старшим коэффициентом)

$$\tilde{\tau}_n(\tilde{x}) = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n(x).$$

Как и в случае отрезка $[-1, 1]$, можно показать, что этот многочлен наименее уклоняется от нуля на отрезке $[a, b]$. Причем, поскольку $\|T_n\|_{C[-1,1]} = 1$, имеем

$$\|\tilde{\tau}_n\|_{C[a,b]} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \|T_n\|_{C[-1,1]} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Найдем корни уравнения $\tilde{\tau}_n(\tilde{x}) = 0$, т.е. $T_n(x) = 0$ при связи (30). Прирав-

няв аргумент x к выражениям (28), получим

$$x_k = \frac{2\tilde{x}_k}{b-a} - \frac{b+a}{b-a} = \cos\left(\frac{1+2k\pi}{n}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\tilde{x}_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{1+2k\pi}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Отсюда, заменив n на $n+1$, получим формулу (22) для узлов $\tilde{x}_k$ Чебышева на отрезке $[a, b]$. Итак, если $\Pi_{n+1} = \tilde{\tau}_{n+1}$, то получается указанные в (23) и (24) оценки для погрешности интерполяции.

2.4 Метод наименьших квадратов

Постановка задачи. Пусть в попарно различных узлах $x_1, \dots, x_N$ заданы значения некоторой функции $y_k = f(x_k)$. Требуется найти многочлен

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$$

степени n такой, что сумма $F_N = F_N(p_0, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^N (P(x_k) - y_k)^2$ минимальна. Другими словами, при фиксированных узлах x_k и значениях y_k функции f требуется минимизировать функцию $F_N(p_0, \dots, p_n)$ по переменным $p_0, \dots, p_n$. Если $N \leq n+1$, то этот минимум равен нулю, достаточно построить интерполяционный многочлен, совпадающий с функцией во всех узлах. При $N \geq n+2$ этот минимум уже не обязательно равен нулю.

Пусть $N \geq n+2$. Применим необходимый признак экстремума: в точке локального экстремума все частные производные функции $F_N(p_0, \dots, p_n)$ должны обращаться в нуль. Запишем сумму в развернутом виде

$$F_N(p_0, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^N (p_0 + p_1 x_k + \dots + p_{n-1} x_k^{n-1} + p_n x_k^n - y_k)^2, \quad (31)$$

и вычислим частные производные

$$\frac{\partial F_N}{\partial p_r} = 2 \sum_{k=1}^N x_k^r (p_0 + p_1 x_k + \dots + p_{n-1} x_k^{n-1} + p_n x_k^n - y_k) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=0}^n (p_m x_k^{m+r}) - y_k x_k^r \right) = 2 \left(\sum_{m=0}^n p_m S_{m+r} - \sum_{k=1}^N y_k x_k^r \right),$$

$r = 0, \dots, n$, где

$$S_l = x_1^l + x_2^l + \dots + x_N^l = \sum_{k=1}^N x_k^l, \quad S_0 = N,$$

суть степенные суммы порядка $r = 0, 1, \dots$ узлов. Получена следующая система уравнений, линейная относительно неизвестных p_k

$$\sum_{m=0}^n p_m S_{m+r} = S_r^{(y)}, \quad S_r^{(y)} := \sum_{k=1}^N y_k x_k^r, \quad r = 0, \dots, n.$$

В развернутом виде она имеет вид

$$\begin{cases} S_0 p_0 + S_1 p_1 + S_2 p_2 + \dots + S_n p_n = S_0^{(y)} \\ S_1 p_0 + S_2 p_1 + S_3 p_2 + \dots + S_{n+1} p_n = S_1^{(y)} \\ S_2 p_0 + S_3 p_1 + S_4 p_2 + \dots + S_{n+2} p_n = S_2^{(y)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ S_n p_0 + S_{n+1} p_1 + S_{n+2} p_2 + \dots + S_{2n} p_n = S_n^{(y)} \end{cases} \quad (32)$$

Если определитель матрицы этой системы отличен от нуля (а это всегда так, см. примечание 2 ниже), т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $(p_0^*, \dots, p_n^*)$. В точке $(p_0^*, \dots, p_n^*)$ сумма $F_N(p_0, \dots, p_n)$ принимает свое наименьшее значение. Интуитивно это ясно: функция $F_N(p_0, \dots, p_n)$ должна расти к бесконечности при

$$\sqrt{p_0^2 + \dots + p_n^2} \rightarrow \infty$$

и, следовательно, в конечной точке экстремума может иметь только минимум. Итак, задача о нахождении коэффициентов экстремального много-

члена $P_n(x)$ решена.

Примечание 1. Покажем, что

$$F_N(p_0, \dots, p_n) \rightarrow \infty$$

при $\sqrt{p_0^2 + \dots + p_n^2} \rightarrow \infty$. Отсюда будет следовать, в частности, что система (32) всегда имеет решения, а если решение $(p_0^*, \dots, p_n^*)$ единственно, то оно является точкой минимума функции F_N . Напомним, что $N \geq n+1$ и точки $x_1, \dots, x_N$ попарно различны. Поскольку при различных узлах $x_1, \dots, x_{n+1}$ однородная система линейных уравнений

$$V_k(p_0, \dots, p_n) := p_0 + p_1 x_k + \dots + p_{n-1} x_k^{n-1} + p_n x_k^n = 0, \quad k = 1, \dots, n+1,$$

имеет только нулевое решение $p_k = 0$ (определитель Вандермонда отличен от нуля!), то в каждой точке сферы

$$G(1) : p_0^2 + \dots + p_n^2 = 1$$

хотя бы одна из величин $V_k(p_0, \dots, p_n)$, $k = 1, \dots, n+1$, отлична от нуля. Непрерывная функция $V(p_0, \dots, p_n) = \min_{k=1, \dots, n+1} |V_k(p_0, \dots, p_n)|$ достигает в некоторой точке сферы $G(1)$ своего минимума μ , и из предыдущего следует, что этот минимум положителен: $\mu > 0$. Это означает (в силу равенства $V_k(\lambda p_0, \dots, \lambda p_n) = \lambda V_k(p_0, \dots, p_n)$), что на сфере

$$G(r) : p_0^2 + \dots + p_n^2 = r^2$$

имеем $V(p_0, \dots, p_n) \geq \mu r > 0$. Положим $Y := \max\{|y_1|, \dots, |y_{n+1}|\}$. Выберем сколь угодно большое $C > 1$. При достаточно больших $r = r(C, Y)$ имеем $\mu r > C + Y$. Следовательно, хотя бы для одного слагаемого с некоторым номером k , $1 \leq k \leq n+1$, в сумме (31) имеем

$$(V_k(p_0, \dots, p_n) - y_k)^2 \geq (\mu r - Y)^2 > C^2, \quad (p_0, \dots, p_n) \in G(r).$$

Последнее выражение можно сделать сколь угодно большим. Поэтому сумма (31) неограниченно растет с ростом r . Что и требовалось.

Примечание 2. Из примечания 1, в частности, следует, что определитель Δ всегда отличен от нуля. Действительно, допустим противное: $\Delta =$

0. Тогда один из столбцов матрицы системы (32), есть линейная комбинация n других столбцов. Отсюда в силу совместности системы (32) (по примечанию 1) столбец свободных членов (при любом наборе y_k , $k = 1, \dots, N$) также есть линейная комбинация тех же столбцов. Другими словами пространство всевозможных столбцов свободных членов имеет размерность $\leq n$. Но, с другой стороны, столбец справа из элементов $S_r^{(y)} = \sum_{k=1}^N y_k x_k^r$ заполняет все $n + 1$ -мерное пространство $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, поскольку система уравнений $\sum_{k=1}^N y_k x_k^r = \alpha_r$, $r = 0, \dots, N - 1$, для любого столбца $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)^*$ (из N элементов), всегда имеет (и притом единственное) решение $y_1, \dots, y_N$, т.к. ее матрица имеет определитель Вандермонда. Получили противоречие.

Пример. Построить многочлен второй степени по таблице

$$X = [x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2];$$

$$Y = [y_1 = 7, y_2 = 0, y_3 = 5, y_4 = 2].$$

Здесь $N = 4$, $n = 2$. Получаем систему уравнений (32):

$$4p_0 + 2p_1 + 6p_2 = 14;$$

$$2p_0 + 6p_1 + 8p_2 = 2;$$

$$6p_0 + 8p_1 + 18p_2 = 20.$$

Отсюда находим $p_2 = 1$, $p_1 = -2$, $p_0 = 3$; $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$.

2.5 Аппроксимация Паде

Постановка задачи. Пусть задана аналитическая в окрестности начала координат функция

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_nx^n + \dots$$

Требуется найти рациональную функцию

$$R_{M,N}(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Mx^M}{1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_N \cdot x^N}$$

со свойством

$$f(x) - R_{M,N}(x) = O(x^{M+N+1}), \quad (33)$$

то есть в окрестности начала координат имеет место разложение вида

$$f(x) - R_{M,N}(x) = A_{M+N+1}x^{M+N+1} + A_{M+N+2}x^{M+N+2} + \dots$$

Другими словами, требуется обнулить коэффициенты разложения разности при степенях $x^0, \dots, x^{M+N}$.

Рациональная функция $R_{M,N}(x)$, а также и сам процесс ее построения, называются $(\frac{M}{N})$ -аппроксимацией Паде.

Решение. Легко видеть, что разложение произведения fQ_N имеет вид

$$f(x)Q_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \quad A_k = \sum_{j=0}^{\min\{N,k\}} q_j f_{k-j}, \quad q_0 = 1,$$

то есть коэффициенты A_k линейно зависят от параметров $q_1, \dots, q_N$. Тогда

$$\begin{aligned} & f(x)Q_N(x) - P_M(x) = \\ &= A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M - (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Mx^M) + \\ &+ A_{M+1}x^{M+1} + \dots + A_{M+N}x^{M+N} + O(x^{M+N+1}). \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, подберем коэффициенты $q_1, \dots, q_N$ многочлена $Q(N)$ так, чтобы

$$A_{M+1}x^{M+1} + \dots + A_{M+N}x^{M+N} \equiv 0.$$

Для этого следует решить относительно коэффициентов $q_1, \dots, q_N$ систему линейных уравнений

$$A_{M+1} = 0, \quad \dots, \quad A_{M+N} = 0.$$

Предположим, что эта система имеет решение $q_1^*, \dots, q_N^*$. Подставим это ре-

шение в (34) и для многочлена $Q_N^*(x)$ с такими коэффициентами получим

$$\begin{aligned} & f(x)Q_N^*(x) - P_M(x) = \\ & = A_0^* + A_1^*x + \dots + A_M^*x^M - (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Mx^M) + \\ & + 0 + \dots + 0 + O(x^{M+N+1}). \end{aligned}$$

Остается положить

$$p_0^* = A_0^*, \quad p_1^* = A_1^*, \quad \dots \quad p_M^* = A_M^*,$$

и тогда для многочлена $P_M^*(x)$ с такими коэффициентами будем иметь

$$f(x)Q_N^*(x) - P_M^*(x) = O(x^{M+N+1}). \quad (35)$$

Это равенство равносильно равенству (33), то есть при делении обеих частей (35) на $Q_N^*(x)$ получается (33).

Пример. Построить $(\frac{2}{2})$ -аппроксимацию Паде. В данном случае (34) принимает вид

$$\begin{aligned} & f(x)Q_2(x) - P_2(x) = \\ & = (f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots) \cdot (1 + q_1x + q_2x^2) - (p_0 + p_1x + p_2x^2) \\ & = f_0 + (f_1 + f_0q_1)x + (f_2 + f_1q_1 + f_0q_2)x^2 - (p_0 + p_1x + p_2x^2) + \\ & + (f_3 + f_2q_1 + f_1q_2)x^3 + (f_4 + f_3q_1 + f_2q_2)x^4 + O(x^5). \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} f_2q_1 + f_1q_2 = -f_3 \\ f_3q_1 + f_2q_2 = -f_4 \end{cases}$$

Находим решение

$$q_2 = \frac{f_3^2 - f_2f_4}{f_2^2 - f_1f_3}; \quad q_1 = \frac{f_2f_3 - f_1f_4}{f_2^2 - f_1f_3}.$$

Отсюда получаем

$$p_0 = f_0;$$

$$p_1 = f_1 + f_0 q_1 = \frac{f_1 f_2^2 - f_3 f_1^2 + f_0 f_1 f_4 - f_0 f_3 f_2}{f_2^2 - f_1 f_3};$$

$$p_2 = f_2 + f_1 q_1 + f_0 q_2 = \frac{-f_0 f_2 f_4 + f_0 f_3^2 + f_1^2 f_4 - 2f_1 f_3 f_2 + f_2^3}{f_2^2 - f_1 f_3}.$$

Примечание. Видим, что задача построения указанным методом не всегда разрешима, именно, при $f_2^2 - f_1 f_3 = 0$ система для определения q_1, q_2 может не иметь решений.

Для конкретных функций находим

$$\sin x \approx \frac{x}{1 + x^2/6}, \quad \cos x \approx \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2}, \quad e^x \approx \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}.$$

Погрешности этих формул на отрезке $[-1, 1]$ не превосходят соответственно 0.0157, 0.0019, 0.004.

2.6 Наилучшие приближения.

Теорема о чебышевском альтернансе

Теорема П.Л.Чебышева об альтернансе является одной из основополагающих в теории полиномиальных аппроксимаций и имеет многочисленные теоретические и практические приложения. Из нее, в частности, легко получить, что многочлен наилучшего приближения P_n^* единственен. Кроме того, в некоторых случаях эта теорема позволяет найти многочлен наилучшего приближения. Для формулировки и доказательства теоремы об альтернансе введем

Определения. Пусть функция $f(x) \in C([a, b])$, $P_n(x) = p_n x^n + \dots + p_0$ — многочлен степени $\leq n$. Рассмотрим разность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и положим $A = \|R_n\|_{C[a,b]}$. Точки $a_1, \dots, a_m$ отрезка $[a, b]$ называют *точками альтернанса*, если они удовлетворяют условию $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq b$ и, кроме того, для разности $R_n(x)$, выполнены равенства:

$$R_n(a_k) = \mp(-1)^k A, \quad k = 1, \dots, m. \quad (36)$$

Пусть $\{a_\alpha\}$ — множество (конечное или бесконечное) точек максимума функции $|R_n(x)|$, так что $|R_n(a_\alpha)| = A$. Предпишем для удобства этим точкам "знаки". Именно, $(+)$ -точками будем называть те точки a_α , в которых $R(a_\alpha) = +A$, а $(-)$ -точками — точки a_α , в которых $R(a_\alpha) = -A$. Тогда точки a_k альтернанса в (36) представляют собой возрастающую последовательность чередующихся $(+)$ -точек и $(-)$ -точек. Альтернанс может начинаться или с $(+)$ -точки, или с $(-)$ -точки, поэтому в (36) мы пишем $\mp$.

Теорема 1 (о чебышёвском альтернансе). *Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ был многочленом наилучшего приближения функции f , т.е. $P_n(x) = P_n^*(x)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлась совокупность из $n + 2$ точек $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leq b$, образующая чебышевский альтернанс для разности $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.*

Примечания. Конечно, число точек альтернанса может быть и больше $n + 2$. Множество всех $(+)$ -точек разобьем на непересекающиеся множества E_s^+ , $s = 1, 2, \dots$, которые будем называть $(+)$ -сериями. Именно, скажем что две $(+)$ -точки a_k и a_m принадлежат одной и той же $(+)$ -серии E_s^+ в том и только том случае, когда отрезок $[a_k, a_m]$ не содержит $(-)$ -точек. Аналогично множество $(-)$ -точек разбивается на $(-)$ -серии E_s^- , $s = 1, 2, \dots$.

Очевидно, $(\pm)$ -серии $E_s^\pm$ при каждом s замкнуты и в каждой из них есть свой наибольший и наименьший элементы (очевидное следствие непрерывности функции $R_n(x)$). Расстояния между соседними сериями разных "знаков" положительны и не меньше некоторой положительной константы, зависящей только от функции f (следствие равномерной непрерывности функции $R_n(x)$), откуда следует, в частности, что число $(\pm)$ -серий конечно.

Таким образом, при определенной нумерации серий $E_s^\pm$ множество всех $(\pm)$ -точек имеет следующую структуру (для определенности считаем, что самой левой точкой максимума функции $|R_n(x)|$ является $(-)$ -точка):

$$E_1^- \prec E_2^+ \prec E_3^- \prec E_4^+ \prec \dots \prec E_N^{(-1)^N}, \quad (37)$$

где знак $\prec$ указывает на порядок расположения множеств на отрезке $[a, b]$, например, все точки множества E_1^- лежат левее каждой точки множества E_2^+ .

Доказательство теоремы Чебышева.

Достаточность условия альтернанса ($\Leftarrow$).

Пусть для разности $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ существует чебышевский альтернанс $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leq b$. Покажем, что $P_n(x) = P_n^*(x)$.

Предположим противное: $P_n(x)$ не является многочленом наилучшего приближения, а существует многочлен $Q_n(x)$, который аппроксимирует функцию $f(x)$ точнее, чем $P_n(x)$. Это означает, что разность $r_n(x) = f(x) - Q_n(x)$ имеет норму $B = \|r_n\|_{C[a,b]}$, которая строго меньше A . Отсюда, в частности, следует, что во всех точках a_k альтернанса имеем

$$|r_n(a_k)| \leq B < A. \quad (38)$$

Рассмотрим разность $S_n(x) = R_n(x) - r_n(x) = Q_n(x) - P_n(x)$, которая является многочленом степени $\leq n$. Из неравенств (38) следует, что в точках a_k эта разность

$$\begin{aligned} S_n(a_k) &= R_n(a_k) - r_n(a_k) = \mp(-1)^k A - r_n(a_k) = \\ &= \mp(-1)^k A \left(1 \pm (-1)^k \frac{r_n(a_k)}{A} \right) \end{aligned}$$

имеет тот же знак, что и $R_n(a_k)$, т.е. $\mp(-1)^k$ (поскольку выражение в последней скобке положительно при всех k). Значит, между любыми двумя соседними точками альтернанса a_k, a_{k+1} многочлен S_n изменяет знак и, следовательно имеет хотя бы один корень на интервале (a_k, a_{k+1}) , $k = 1, \dots, n+1$. Следовательно, многочлен S_n должен иметь не менее $n+1$ корней. Но это невозможно, поскольку многочлен S_n не является тождественным нулем и имеет степень не выше n . Противоречие.

Необходимость условия альтернанса ($\Rightarrow$).

Пусть $P_n^*(x)$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(x)$. Покажем, что для разности $R_n^*(x) = f(x) - P_n^*(x)$ существует чебышевский

альтернанс, состоящий из $n + 2$ точек: $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leq b$.

Сначала отметим, что для $R_n^*(x)$ обязательно найдутся и $(+)$, и $(-)$ -точки. Действительно, предположим, что это не так и, для определенности, на отрезке $[a, b]$ нет ни одной $(-)$ -точки. Тогда при всех $x \in [a, b]$ имеем $R_n^*(x) > -A$, откуда $\min_{x \in [a, b]} R_n^*(x) \geq A - \varepsilon$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Геометрически это означает, что график функции $y = R_n^*(x)$ лежит в полосе $-A + \varepsilon \leq y \leq A$. Но тогда график разности $R_n^*(x) - \varepsilon/2 = f(x) - (P_n^*(x) + \varepsilon/2)$ лежит в полосе $|y| \leq A - \varepsilon/2$ и, значит, разность $R_n^*(x) - \varepsilon/2$ имеет норму, не превосходящую $A - \varepsilon/2$. Значит, многочлен $P_n^*(x) + \varepsilon/2$ приближает функцию лучше многочлена $P_n^*(x)$. Это противоречит экстремальности многочлена $P_n^*(x)$.

Теперь разобьем все множество $(\pm)$ -точек на конечное число N серий $E_s^\pm$, $s = 1, \dots, N$, как это записано в (37). Найдя в каждой серии наибольший и наименьший элемент, обозначим их соответственно через α_s и β_s . При этом возможно, что $\alpha_s = \beta_s$. Таким образом каждый отрезок $[\alpha_s, \beta_s]$ содержит единственную серию $E_s^\pm$ знакопостоянства, причем его концы являются элементами этой же серии. Предпишем каждому такому отрезку $[\alpha_s, \beta_s]$ "знак"серии, содержащейся в нем, и далее будем рассматривать отрезки со "знаком". Еще раз отметим, что отрезки $[\alpha_s, \beta_s]$ с разными номерами не имеют общих точек и, следовательно, лежат на положительном расстоянии друг от друга.

Предположим, что число отрезков $N < n + 2$. Тогда выберем между каждыми двумя соседними отрезками по точке $t_k \in (\beta_k, \alpha_{k+1})$ и положим $T(x) = \delta(x - t_1) \dots (x - t_m)$, $m \leq n$. Многочлен $T(x)$ сохраняет определенный знак на каждом отрезке $[\alpha_s, \beta_s]$, причем эти знаки на соседних отрезках противоположны. Выберем теперь множитель δ такого знака, чтобы на $(+)$ -отрезках многочлен $T(x)$ был положителен, а на $(-)$ -отрезках — отрицателен. Тогда многочлен $T(x)$ и разность $R_n^*(x)$ имеют значения одинаковых знаков на множестве $(\pm)$ -точек, а значит, по непрерывности, и в некоторой

достаточно малой открытой окрестности U_ε этого множества. Следовательно, всюду на U_ε имеем строгое неравенство $|R_n^*(x) - T(x)| < |R_n^*(x)| = A$ при достаточно малых $|\delta|$. На оставшемся компакте $[a, b] \setminus U_\varepsilon$ (который не содержит $(\pm)$ -точек) при некотором положительном $\gamma(\varepsilon) < A$ выполняется неравенство $|R_n^*(x)| < A - \gamma(\varepsilon)$ и, кроме того, при достаточно малых $|\delta|$ имеем $|T(x)| < \gamma(\varepsilon)$. Так что $|R_n^*(x) - T(x)| < A$ при всех $x \in [a, b] \setminus U_\varepsilon$.

Итак, показано, что $|R_n^*(x) - T(x)| < A$ всюду на отрезке $[a, b]$. Это означает, что многочлен $P_n^*(x) + T(x)$ при достаточно малых $|\delta|$ (при указанном выше знаке) приближает функцию $f(x)$ лучше многочлена $P_n^*(x)$. Пояснение на рис.

2.7 Одно дополнение к теореме о чебышевском альтернансе. Примеры

На практике может полезной оказаться следующая

Теорема 2. Пусть $f(x)$ имеет $n + 1$ производную и $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда число точек альтернанса равно в точности $n + 2$ (то есть не может быть больше, и равенство (36) не может выполняться на большем числе точек), причем крайние точки a_1 и a_{n+2} альтернанса совпадают с концами отрезка a и b .

Доказательство. Если бы точек альтернанса было больше $n + 2$, или если бы не обе крайние точки альтернанса лежали на концах отрезка, то по меньшей мере в $n + 1$ различных точках (лежащих внутри отрезка) производная $(R_n^*(x))'$ равнялась бы нулю. Тогда, по теореме Ролля, по меньшей мере в n различных точках производная $(R_n^*(x))''$ равнялась бы нулю. И.т.д. Повторив эти рассуждения, получим, что равнялась бы нулю по меньшей мере в 1 точке производная $(R_n^*(x))^{(n+1)} = (f(x))^{(n+1)}$. Но по предположению теоремы $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ на $[a, b]$. Противоречие.

Пример 1. Функцию $f(x) = e^x$ приблизим наилучшим образом константой $P_0(x) = A$ на отрезке $[-1, 1]$. Пусть $P_0(x) = A$ является многочленом наилучшего приближения. По теореме 2 для разности $R_0(x) = f(x) - P_0(x) = e^x - A$ должен существовать альтернанс ровно из 2-х точек, причем крайние его точки должны совпадать с концами отрезка $a_{1,2} = \mp 1$. Поэтому имеем равенство

$$R_0(-1) = -R_0(1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-1} - A = -e + A,$$

откуда находим

$$P_0^*(x) = A = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) \approx 1.543.$$

Наменьшее уклонение (налучшее приближение) $E_0(e^x, [-1, 1]) = R_0(1) \approx 1.1752$.

Пример 2. Функцию $f(x) = e^x$ приблизим наилучшим образом линейной функцией $P_1(x) = Ax + B$ на отрезке $[-1, 1]$. Пусть $P_1(x) = Ax + B$ является многочленом наилучшего приближения. По теореме 2 для разности $R_1(x) = f(x) - P_1(x) = e^x - Ax - B$ должен существовать альтернанс ровно из 3-х точек, причем крайние его точки должны совпадать с концами отрезка $a_{1,3} = \mp 1$. Поэтому имеем равенство

$$R_1(-1) = R_1(1) \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \approx 1.175. \quad (39)$$

Подставим это значение A в выражение для $R_1(x)$; затем вычислим производную $R_1'(x)$ и решим уравнение $R_1'(x) = 0$. В результате получим значение второй точки альтернанса $a_2 = \ln A \approx 0.16$. Запишем условие альтернанса:

$$R_1(a_2) = -R_1(a_1) \quad \Leftrightarrow \quad R_1(\ln A) = -R_1(1) \quad \Leftrightarrow \quad A - A \ln A - B = -e + A + B,$$

откуда, учитывая найденное значение A , получаем

$$B = \frac{1}{2} (e - A \ln A) \approx 1.264.$$

Окончательно, по формуле (39) находим

$$P_1^*(x) = Ax + \frac{1}{2} (e - A \ln A) \approx 1.175x + 1.264.$$

Наименьшее уклонение $E_1(e^x, [-1, 1]) = R_1(1) \approx 0.2788$.

Пример 3. Функцию $f(x) = |x - 1/2|$ приблизим наилучшим образом линейной функцией $P_1(x) = Ax + B$ на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку разность $R_1(x) = f(x) - P_1(x) = |x - 1/2| - Ax - B$ является кусочно-линейной функцией, то точки альтернанса могут быть лишь на концах интервалов ее линейности, то есть в точках $a_1 = -1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1$. Отсюда составив систему уравнений $R_1(a_1) = -R_1(a_2) = R_1(a_3)$ и решив ее, найдем $A = -1/2$, $B = 5/8$. Итак, $P_1^*(x) = -x/2 + 5/8$. Наменьшее уклонение $E_1(|x - 1/2|, [-1, 1]) = R_1(1) = 3/8$.

Пример 4. Приблизим функцию $f(x) = \sin 3x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ наилучшим образом многочленами $P_0(x), \dots, P_4(x)$. Сразу получаем ответ: $P_0^*(x) = \dots = P_4^*(x) \equiv 0$ поскольку разность $f(x) - 0$ имеет ровно 6 точек альтернанса на указанном отрезке (достаточно решить уравнения $\sin 3x = \pm 1$). Но многочлен $P_5^*(x)$ уже отличен от нуля.

Пример 5. Приблизим функцию $y = x^n$ на отрезке $[-1, 1]$ наилучшим образом многочленами P_{n-1} степени $\leq n - 1$. Рассмотрим унитарный многочлен Чебышева

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

и многочлен

$$P_{n-1}^*(x) = x^n - \tilde{T}_n(x) = -a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0.$$

Этот многочлен и решает поставленную задачу, т.е. является многочленом наилучшего приближения функции x^n . Действительно, разность

$$x^n - R_{n-1}^*(x) = \tilde{T}_n(x)$$

имеет альтернанс в $n + 1$ чередующихся точках максимума и минимума $a_k = \cos(\frac{\pi}{n}k)$, $k = 0, \dots, n$, многочлена $T_n(x)$. При этом

$$E_n(x^n, [-1, 1]) = 2^{-n+1}.$$

2.8 Наилучшее приближение на конечном множестве

Сформулируем задачу об аппроксимации на конечном множестве. Пусть заданы точки $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $x_1 < \dots < x_N$, а в этих точках заданы значения $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ дискретной функции $f : X \rightarrow Y$. Требуется построить (экстремальный) многочлен $P_n^*(x)$ степени n , наименее уклоняющийся от функции f на множестве X . Формальная запись задачи о наилучшем приближении такова: найти многочлен $P_n^*(x)$, для которого

$$e_n(X, Y) := \max_{k=1, N} \{|y_k - P_n^*(x_k)|\} = \min_{P_n} \max_{k=1, N} \{|y_k - P_n(x_k)|\}. \quad (40)$$

Отметим, что если $N \leq n + 1$, то решение тривиально: в этом случае в качестве экстремального многочлена P_n^* можно взять интерполяционный многочлен, совпадающий с f во всех точках X . Таким образом, в данном случае $e_n(X, Y) = 0$.

В случае $N \geq n + 2$ справедлив следующий аналог теоремы Чебышева об альтернансе.

Теорема (об альтернансе для дискретной функции). Пусть множество X содержит не менее $n + 2$ точек. Тогда для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ был многочленом наилучшего приближения дискретной функции $f : X \rightarrow Y$, т.е. $P_n(x) = P_n^*(x)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась совокупность по меньшей мере из $n + 2$ точек $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2}$, лежащих на X и образующих чебышевский альтернанс для разности $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, т.е.

$$r_n(a_k) = \pm(-1)^k A, \quad A = \max_{k=1, N} \{|y_k - P_n(a_k)|\}.$$

Доказательство не приводим, поскольку оно почти дословно повторяет доказательство теоремы о чебышевском альтернансе в случае непрерывных функций.

Решение задачи (40) при $N = n + 2$. В этом случае из сформулированной теоремы сразу получается решение задачи (40), поскольку

все точки множества X обязаны быть точками альтернанса, т.е. $a_k = x_k$ ($k = 1, \dots, n+2$), а это полностью определяет многочлен наилучшего приближения. Приведем соответствующие выкладки.

Пусть L – произвольное число. Построим интерполяционный многочлен по значениям $y_k + (-1)^k L$, $k = 2, \dots, n+2$, в соответствующих узлах x_k . Он удовлетворяет равенствам:

$$y_k - P_n(x_k) = -(-1)^k L, \quad k = 2, \dots, n+2. \quad (41)$$

Интерполяционный многочлен можно получить, например, по формуле Лагранжа. Для этого рассмотрим многочлены

$$l_k(x) = \prod_{j=2, \dots, n+2; j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 2, \dots, n+2,$$

которые имеют степени n и удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} l_k(x_k) = 1, \\ l_k(x_j) = 0, \quad \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Интерполяционный многочлен имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{k=2}^{n+2} (y_k + (-1)^k L) l_k(x). \quad (42)$$

Теперь подберем L так, чтобы и в точке x_1 выполнялось равенство вида (41), т.е.

$$y_1 - P_n(x_1) = L, \quad P_n(x_1) = y_1 - L. \quad (43)$$

Перепишем это равенство в виде

$$P_n(x_1) = \sum_{k=2}^{n+2} (y_k + (-1)^k L) l_k(x_1) = y_1 - L.$$

Решаем это уравнение и находим L :

$$L + L \sum_{k=2}^{n+2} (-1)^k l_k(x_1) = y_1 - \sum_{k=2}^{n+2} y_k l_k(x_1); \quad L = \frac{y_1 - \sum_{k=2}^{n+2} y_k l_k(x_1)}{1 + \sum_{k=2}^{n+2} (-1)^k l_k(x_1)}. \quad (44)$$

Итак, решение поставленной задачи о наилучшем приближении дают формулы (42) и (44). При этом точками альтернанса являются узлы $a_k = x_k$ ($k = 1, \dots, n+2$), а величина наилучшего приближения дискретной функции f равна $|L| = e_n(X, Y)$.

Примечание 1. Поскольку альтернанс существует, то знаменатель в (44) не может обратиться в нуль. Но при этом следует учитывать, что все точки x_k различны и имеет место порядок $x_1 < \dots < x_{n+2}$.

Примечание 2. Число L можно вычислять также по формуле

$$L = \frac{\sum_{k=1}^{n+2} (-1)^{k+1} D_k y_k}{\sum_{k=1}^{n+2} D_k}, \quad \text{где} \quad D_k = \prod_{1 \leq l < m \leq n+2, \quad m, l \neq k} (x_m - x_l). \quad (45)$$

При равномерном распределении точек $x_k = x_1 + h(k-1)$, $k = 1, \dots, n+2$, $h > 0$, отсюда получаем

$$L = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k y_{k+1}. \quad (46)$$

Пример. В случае $n = 1$ и $N = n + 2 = 3$ непосредственно проверяется, что

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{x_3 - x_1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

При этом линейный многочлен имеет вид

$$P_1(x) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} x + \frac{1}{2} \frac{1}{x_3 - x_1} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

Эти формулы удобно применять в следующем примере.

Решение задачи (40) при $N > n + 2$. В этом случае применяется определенный алгоритм, позволяющий за конечное число шагов построить многочлен наилучшего приближения. Опишем алгоритм.

0-й шаг. Сначала берем произвольный набор X_0 , состоящий из $n + 2$ точек множества X . Для удобства считаем, что эти точки имеют номера $1, \dots, n + 2$, то есть $X_0 = \{x_k\}_{k=1}^{n+2}$, причем $x_1 < \dots < x_{n+2}$. Стало быть, остальные точки множества X имеют номера $n + 3, \dots, N$ (этого всегда

можно добиться соответствующей нумерацией точек множества X). Методом, указанным в предыдущем пункте строим многочлен $P_n^{(0)}$ вида (42), где $L = L^{(0)}$ определяется по формуле (44) или (45). По построению разность $f_1 = f - P_n^{(0)}$ является дискретной функцией, для которой

$$y_k^{(1)} := f_1(x_k) = f(x_k) - P_n^{(0)}(x_k) = (-1)^{k+1} L^{(0)}, \quad k = 1, \dots, n+2. \quad (47)$$

Далее, вычислим значения $|f_1(x_k)|$, $k = n+3, \dots, N$. Пусть $M^{(0)}$ — наибольшее из этих значений. Если $M^{(0)} \leq |L^{(0)}|$, то, в силу (47), множество X_1 является альтернансом для разности f_1 , и по теореме об альтернансе $P_n^{(0)}$ является искомым многочленом наилучшего приближения. В этом случае задача решена.

Рассмотрим случай $M^{(0)} > |L^{(0)}|$. Обозначим через x_m ($m > n+2$) ту точку, в которой достигается равенство $|f_1(x_m)| = M^{(0)}$. Рассмотрим несколько вариантов расположения точки x_m относительно точек множества X_0 . Именно,

(а) точка x_m лежит между некоторыми точками x_s и x_{s+1} множества X_0 : $x_s < x_m < x_{s+1}$;

(б) точка x_m лежит правее всех точек множества X_0 , то есть $x_m > x_{n+2}$;

(с) точка x_m лежит левее всех точек множества X_0 , то есть $x_m < x_1$

В этих трех случаях действуем следующим образом.

(а) Пусть $x_s < x_m < x_{s+1}$. Из двух точек x_s и x_{s+1} выберем ту, в которой знак разности f_1 совпадает со знаком $f_1(x_m)$. Предположим для определенности, что это точка x_s . Тогда заменим эту точку x_s множества X_0 точкой x_m и получим новое множество $X_1 = \{x_1, \dots, x_{s-1}, x_m, x_{s+1}, \dots, x_{n+2}\}$. При этом точка x_s мы отнесем к дополнению $X \setminus X_1$.

(б) Пусть $x_m > x_{n+2}$.

Если знаки $f_1(x_{n+2})$ и $f_1(x_m)$ совпадают, то заменим множество X_0 на новое множество $X_1 = \{x_1, \dots, x_{n+1}, x_m\}$. При этом точка x_{n+2} будет принадлежать дополнению $X \setminus X_1$.

Если же знаки $f_1(x_{n+2})$ и $f_1(x_m)$ противоположны, то заменим множество X_0 на новое множество $X_1 = \{x_2, x_3, \dots, x_{n+2}, x_m\}$. При этом точка x_1 будет принадлежать дополнению $X \setminus X_1$.

(с) Пусть $x_m < x_1$.

Если знаки $f_1(x_1)$ и $f_1(x_m)$ совпадают, то заменим множество X_0 на новое множество $X_1 = \{x_m, x_2, \dots, x_{n+2}\}$. При этом точка x_1 будет принадлежать дополнению $X \setminus X_1$.

Если же знаки $f_1(x_1)$ и $f_1(x_m)$ противоположны, то заменим множество X_0 на новое множество $X_1 = \{x_m, x_1, \dots, x_{n+1}\}$. При этом точка x_{n+2} будет принадлежать дополнению $X \setminus X_1$.

Итак, изменением одного узла в множестве X_0 получено новое множество $X_1 = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}\}$ с некоторым набором номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+2}$. Точки с остальными номерами $i_{n+2+1}, \dots, i_N$ принадлежат дополнению $X \setminus X_1$. Как видим, *точки нового множества X_1 записаны в порядке возрастания и, что очень важно, знаки функции f_1 на соседних точках множества X_1 чередуются.*

1-й шаг. Теперь будем приближать функцию $f_1 = f - P_n^{(0)}$ на множестве X_1 . По построению ее значения на этом множестве суть знакопередающиеся числа $y_k^{(1)} = f_1(x_{i_k})$. Для f_1 вновь построим многочлен $P_n^{(1)}$ вида (42), где $L = L^{(1)}$ определяется по формуле (45) (с заменой x_k на x_{i_k} и y_k на $y_k^{(1)}$). Теперь для разности $f_2 = f_1 - P_n^{(1)} = f - (P_n^{(0)} + P_n^{(1)})$ вместо (47) получим

$$y_{i_k}^{(2)} := f_2(x_{i_k}) = f_1(x_{i_k}) - P_n^{(1)}(x_{i_k}) = (-1)^{k+1} L^{(1)}, \quad k = 1, \dots, n+2.$$

Вновь вычислим значения $|f_2(x_{i_k})|$, $k = n+3, \dots, N$ и обозначим через $M^{(1)}$ наибольшее из этих значений. Если $M^{(1)} \leq |L^{(1)}|$, то множество X_1 является альтернансом для разности $f_2 = f - (P_n^{(0)} + P_n^{(1)})$, и по теореме об альтернансе многочлен $P_n^{(0)} + P_n^{(1)}$ является искомым многочленом наилучшего приближения. Это решает задачу. В противном случае, как и выше, заменим множество X_1 новым множеством $X_2 = \{(x_{j_k})\}_{k=1}^{n+2}$ и перейдем к

следующему шагу. И так далее.

Для доказательства того, что процесс приводит за конечное число шагов к цели заметим следующее. По построению модули всех $y_k^{(1)}$, кроме одного, равны одному и тому же числу $|L^{(0)}|$ (см. (47)), а для одного номера k_0 значение $|y_{k_0}^{(1)}|$ равно $M^{(0)} > |L^{(0)}|$. Поскольку в числителе суммы (45) все слагаемые имеют одинаковый знак (учитываем чередование знаков чисел $y_k^{(1)}$), то $|L^{(1)}| > |L^{(0)}|$. Действительно,

$$|L^{(1)}| - |L^{(0)}| = \frac{\sum_{k=1}^{n+2} D_k (|y_k^{(1)}| - |L^{(0)}|)}{\sum_{k=1}^{n+2} D_k} = \frac{D_{k_0} (M^{(0)} - |L^{(0)}|)}{\sum_{k=1}^{n+2} D_k} > 0.$$

Таким образом, на первом шаге, а значит, и на всех последующих шагах процесса будем получать строго возрастающую последовательность $|L^{(0)}| < |L^{(1)}| < |L^{(2)}| < \dots$. Отсюда следует, что после конечного числа шагов мы получим альтернанс и искомую величину наилучшего приближения $|L^{(s)}|$.

s-й шаг, процесс заканчивается, когда множество X_s является множеством альтернанса для функции

$$f_{s+1} = f_s - P_n^{(s)} = f - P_n^{(0)} - P_n^{(1)} - \dots - P_n^{(s)}.$$

Многочлен $P_n^{(0)} + P_n^{(1)} + \dots + P_n^{(s)}$ является многочленом наилучшего приближения, а $|L^{(s)}|$ — величиной наилучшего приближения.

Пример. Приблизить наилучшим образом линейной функцией функцию f , заданную таблицей.

X	0	1	2	3	4
f	2	1	-1	1	-2

Решение. Процесс алгоритма отразим в виде строк значений функций $f_1 = f - P_1^{(0)}$, $f_2 = f - (P_1^{(0)} + P_1^{(1)})$ и т.д. и многочленов $P_1^{(0)}$, $P_1^{(1)}$ и т.д. При этом звездочкой будем отмечать те значения этих функций, которые аппроксимируются на соответствующих шагах.

f	2^*	1^*	-1^*	1	-2	$P_1^{(0)} = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$
$f_1 = f - P_1^{(0)}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}^*$	$-\frac{1}{4}^*$	$\frac{13}{4}^*$	$\frac{7}{4}$	$P_1^{(1)} = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
$f_2 = f_1 - P_1^{(1)}$	2^*	1	-1^*	1^*	-2	$P_1^{(2)} = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$
$f_3 = f_2 - P_1^{(2)}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}^*$	$\frac{7}{6}^*$	$-\frac{3}{2}^*$	$P_1^{(3)} = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{12}$
$f_4 = f_3 - P_1^{(3)}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}^*$	$\frac{5}{4}^*$	$-\frac{5}{4}^*$	END

Поскольку для функции f_4 получился альтернанс, то число $L_1^* = 5/4$ является величиной наилучшего приближения. Сложив все многочлены, получим многочлен наилучшего приближения.

$$P_1^*(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Заметим, что начальный выбор значений функции f (отмеченных "звездочками") оказался неудачным: на втором шаге вновь пришлось рассматривать функцию $f_2 = f$. Но алгоритм никогда не "зацикливается".

2.9 Теорема Валле-Пуссена

Эта теорема дополняет теорему Чебышева об альтернансе и в некоторых случаях позволяет оценить величину $E_n(f, [a, b])$.

Теорема (Валле-Пуссен). Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется некоторый набор точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$. Пусть существует многочлен $P_n(x)$ со свойством: знаки разностей $r_k = f(x_k) - P_n(x_k)$ чередуются. Тогда величина $E_n(f, [a, b])$ наилучшего приближения многочленами сте-

n не меньше величины $r = \min_{k=1, n+2} |r_k|$.

Доказательство фактически ничем не отличается от доказательства достаточности ($\Leftarrow$) теоремы Чебышева. Действительно, предположим, что существует многочлен $Q_n(x)$, который аппроксимирует функцию $f(x)$ точнее r , т.е. $|f(x) - Q_n(x)| \leq \rho < r$. Положим $\rho_1(x) = f(x) - P_n(x)$ и $\rho_2(x) = f(x) - Q_n(x)$. Тогда разность $S_n(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x) = Q_n(x) - P_n(x)$ является многочленом степени $\leq n$, а в точках x_k

$$S_n(x_k) = \rho_1(x_k) - \rho_2(x_k) = r_k - \rho_2(x_k) = r_k \left(1 - \frac{\rho_2(x_k)}{r_k}\right),$$

где $|\rho_2(x_k)| < |r_k|$. Следовательно, в точках x_k многочлен $S_n(x)$ имеет тот же знак, что и r_k . Итак, между любыми двумя соседними точками x_k, x_{k+1} многочлен S_n изменяет знак и, следовательно, имеет хотя бы один корень между ними. Таким образом (отличный от нуля) многочлен S_n должен иметь не менее $n + 1$ корней. Противоречие.

3 Сплайны

Русская интерпретация слова spline – "сплайн" появилась в русском языке сравнительно недавно, в начале 1970-х годов, благодаря переводу Ю.Н. Субботина книги Альберга Дж., Нильсона Э., Уолша Дж. "Теория сплайнов и ее приложения".

Мы рассматриваем задачу полиномиальной аппроксимации дискретной функции $f(x)$, заданной в точках $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ значениями $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, N$. Аппроксимация многочленами больших степеней сопряжена с большими вычислительными погрешностями. Поэтому применяются сплайны — кусочно полиномиальные функции. Перейдем к определениям.

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками на отрезки $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, N$, и на каждом из этих отрезков задан многочлен $P_k(x) = a_n^{(k)}x^n +$

$a_{n-1}^{(k)}x^{n-1} + \dots + a_0^{(k)}$. Все многочлены имеют степень n , заданную условием задачи. Сплайном порядка n называется функция

$$S_n(x) = \begin{cases} P_1(x) & , & x \in \Delta_1; \\ P_2(x) & , & x \in \Delta_2; \\ \dots & \dots & \dots \\ P_N(x) & , & x \in \Delta_N. \end{cases} \quad (48)$$

Мы будем сплайн записывать также в виде

$$S_n = \{P_1(x), x \in \Delta_1; \quad P_2(x), x \in \Delta_2; \quad \dots \quad P_N(x), x \in \Delta_N\}.$$

На сплайн накладывается условие связки:

$$\begin{cases} P_1(x_0) & = & y_0; \\ P_1(x_1) & = & P_2(x_1) = y_1; \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N-1}(x_{N-1}) & = & P_N(x_{N-1}) = y_{N-1}; \\ P_N(x_N) & = & y_N. \end{cases} \quad (49)$$

Кроме того, накладываются условия "склейки" порядка l в узлах интерполяции: при всех $m = 1, \dots, l$ должны выполняться равенства

$$\begin{cases} P_1^{(m)}(x_1) & = & P_2^{(m)}(x_1); \\ P_2^{(m)}(x_2) & = & P_3^{(m)}(x_2); \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N-1}^{(m)}(x_{N-1}) & = & P_N^{(m)}(x_{N-1}); \end{cases} \quad (50)$$

"Склею" можно производить и в других точках, например, посередине между узлами интерполяции. Общее число уравнений в (49), (50) равно $Q = 2N + l(N - 1)$. При этом общее число всех коэффициентов многочленов равно $M = N(n + 1)$. Для разрешимости задачи необходимо должно выполняться неравенство

$$M \geq Q, \quad l(N-1) \leq N(n+1)-2N, \quad l(N-1) \leq N(n-1), \quad l \leq (n-1)\frac{N}{N-1}.$$

Дефектом сплайна называется величина $d = n - l$. Из предыдущего нера-

венства следует, что при $N > n$ имеем

$$d \geq 1 - \frac{n-1}{N-1} > 0$$

и, следовательно, наименьшее возможное значение дефекта равно единице. Чем меньше дефект, тем более гладким является сплайн. Приведем построение сплайнов второго и третьего порядков с дефектом равным единице.

3.1 Сплайны 2-го порядка

Пусть $x_0, \dots, x_N$ — равноотстоящие узлы интерполяции, $x_k = x_0 + hk$, $y_k = f(x_k)$ — значения в узлах интерполируемой функции, $k = 0, \dots, N$. Через s_k обозначим точки склейки. Они не будут совпадают с узлами интерполяции, а будут расположены посередине между этими узлами:

$$s_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Сплайн удобно искать в виде

$$T_2 = \{P_k(x), \quad x \in [s_{k-1}, s_k]\}, \quad k = 0, \dots, N,$$

где $s_{-1} = x_0$, $s_{N+1} = x_N$ и $P_k(x) = y_k + a_k(x - x_k) + b_k(x - x_k)^2$. У такого сплайна, как несложно проверить, два параметра могут быть произвольными. Для их определения потребуем выполнения еще 2-х граничных условий

$$T'_2(x_0) = P'_0(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad T'_2(x_N) = P'_N(x_N) = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}.$$

Имеем уравнения склейки

$$P_k(s_k) = P_{k+1}(s_k), \quad P'_k(s_k) = P'_{k+1}(s_k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{cases} \frac{h}{2}a_{k+1} - \frac{h^4}{4}b_{k+1} = -\frac{h}{2}a_k - \frac{h^2}{4}b_k + y_{k+1} - y_k \\ a_{k+1} - b_{k+1}h = a_k + b_kh, \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Решив систему, получим

$$\begin{cases} a_{k+1} = -3a_k - 2hb_k + \frac{4}{h}(y_{k+1} - y_k) \\ b_{k+1} = -\frac{4}{h}a_k - 3b_k + \frac{4}{h^2}(y_{k+1} - y_k), \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (51)$$

Граничные условия имеют вид

$$a_0 = P'_0(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad a_N = P'_N(x_N) = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}. \quad (52)$$

Система (51) и условия (52) однозначно определяют все параметры сплайна. Действительно, перепишем для удобства систему (51) в виде рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_{k+1} = Aa_k + Bb_k + F_k \\ b_{k+1} = \tilde{A}a_k + \tilde{B}b_k + \tilde{F}_k, \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где величины $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}, F_k, \tilde{F}_k$ известны. Отсюда видим, что a_{k+1}, b_{k+1} на любом шаге $k+1$ линейно выражаются через a_0, b_0 . То есть

$$\begin{cases} a_{k+1} = \alpha_k a_0 + \beta_k b_0 + \gamma_k \\ b_{k+1} = \tilde{\alpha}_k a_0 + \tilde{\beta}_k b_0 + \tilde{\gamma}_k, \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (53)$$

Величина a_0 здесь известна (см. (52)). Если бы и величина b_0 была известна, то по формулам (53) мы получили бы все параметры a_k, b_k сплайна T_2 . Величину b_0 можно определить из (53) при $k = N-1$, когда мы получим уравнения

$$a_N = \alpha_{N-1}a_0 + \beta_{N-1}b_0 + \gamma_{N-1},$$

причем в этом уравнении величины a_0 и a_N известны (см. (52)). Из этого уравнения и находим b_0 . Возвращаясь повторно к формулам (53), теперь можно получить все a_k и b_k последовательно при $k = 1, \dots, N$.

Пример. Рассмотрим интерполяционную таблицу

$$(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1).$$

Тогда граничные условия имеют вид $a_0 = a_3 = 0$ (см. (52)). Вычисляя по формуле (51):

$$\begin{cases} a_{k+1} = -3a_k - 2b_k + F_k \\ b_{k+1} = -4a_k - 3b_k + \tilde{F}_k, \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2,$$

где $F_0 = 0, \tilde{F}_0 = 0, F_1 = 4, \tilde{F}_1 = 4, F_2 = 0, \tilde{F}_2 = 0$, находим

$$a_1 = -2b_0, \quad b_1 = -3b_0, \quad a_2 = 12b_0 + 4, \quad b_2 = 17b_0 + 4,$$

$$a_3 = -70b_0 - 20, \quad b_3 = -99b_0 - 28.$$

Отсюда получаем $b_0 = -\frac{2}{7}$ и заново пересчитываем параметры:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = -\frac{2}{7}, \quad a_1 = \frac{4}{7}, \quad b_1 = \frac{6}{7}, \quad a_2 = \frac{4}{7}, \quad b_2 = -\frac{6}{7},$$

$$a_3 = 0, \quad b_3 = \frac{2}{7}.$$

Окончательно,

$$T_2(x) = \left\{ -\frac{2}{7}x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \frac{6}{7}x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{2}{7}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; \right.$$

$$\left. -\frac{6}{7}x^2 + 4x - \frac{25}{7}, \quad \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}; \quad \frac{2}{7}x^2 - \frac{12}{7}x + \frac{25}{7}, \quad \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \right\}.$$

3.2 Сплайны 3-го порядка

Перейдем к построению сплайна $S_3(x)$ третьего порядка ($n = 3$) с дефектом $d = 1$, то есть $l = 2$ (склейка в узлах интерполяции до второй производной включительно). В этом случае общее число уравнений в (49), (50): $Q = 2N + l(N - 1) = 4N - 2$, а общее число всех коэффициентов кубических многочленов равно $M = N(n + 1) = 4N$. Остается два свободных параметра. Обычно их выбирают из условия

$$P_1''(x_0) = P_N''(x_N) = 0. \quad (54)$$

Сплайн с таким условием называют естественным. Конечно, достаточное количество коэффициентов еще не гарантирует существования сплайна, удовлетворяющего условиям (49), (50), (54) (это лишь необходимое условие). Его существование будет доказано ниже.

Естественные сплайны обладают интересным экстремальным свойством:

Теорема (Холидей). *Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций f на отрезке $[a, b]$ с данной интерполяционной таблицей (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, N$, естественный кубический сплайн S_3 имеет наимень-*

шую среднюю кривизну:

$$\int_a^b (S_3''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx. \quad (55)$$

Доказательство теоремы Холидея. Будем писать $S(x)$ вместо $S_3(x)$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \delta &= \int_a^b ((f''(x))^2 - (S''(x))^2) dx = \\ &= \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx + 2 \int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx. \end{aligned}$$

Обозначим первое слагаемое в полученном выражении через A , $A \geq 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \delta &= A + 2 \int_a^b S''(x) d(f'(x) - S'(x)) = \\ &= A + 2 [S''(x) (f'(x) - S'(x))] |_a^b - 2 \int_a^b (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством (54) и тем, что $S'''(x) = c_k$ — некоторые константы на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\begin{aligned} \delta &= A - 2 \int_a^b (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx = \\ &= A - 2 \sum_{k=1}^N c_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f'(x) - S'(x)) dx = \\ &= A - 2 \sum_{k=1}^N c_k (f(x) - S(x)) |_a^{x_k} = A - 2 \sum_{k=1}^N c_k \cdot 0 = A \geq 0. \end{aligned}$$

Что и требовалось.

Мы должны построить сплайн $S_3(x)$, удовлетворяющий условию (49) и (50) при $l = 2$. На каждом из участков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ этот сплайн представляется в виде некоторого многочлена третьей степени: $P_k(x) = a_3^{(k)} x^3 + a_2^{(k)} x^2 + a_1^{(k)} x + a_0^{(k)}$.

Воспользуемся тем, что вторая $S_3''(x)$ производная сплайна $S_3(x)$ есть

кусочно линейная функция, непрерывная на отрезке $[a, b] = [x_0, x_N]$. Уравнение прямой проходящей через две точки (x_{k-1}, u_{k-1}) , (x_k, u_k) имеет вид

$$\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y - u_{k-1}}{u_k - u_{k-1}},$$

откуда

$$y = u_k \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - u_{k-1} \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Поэтому на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $P_k(x)$, представляющий сплайн, имеет вторую производную вида

$$P_k''(x) = u_k \frac{x - x_{k-1}}{h_k} - u_{k-1} \frac{x - x_k}{h_k}, \quad (56)$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}$, u_{k-1} , u_k — некоторые числа, которые мы определим ниже. Интегрируя (56), получим

$$P_k'(x) = u_k \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_k} - u_{k-1} \frac{(x - x_k)^2}{2h_k} + v_k, \quad (57)$$

где v_k — некоторые числа, которые мы определим ниже. Интегрируя (57), получим

$$P_k(x) = u_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} - u_{k-1} \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} + v_k x + w_k, \quad (58)$$

где w_k — некоторые числа, которые мы определим ниже. Для многочлена $P_k(x)$ применим условия интерполяции (49). Вычислим значения

$$P_k(x_{k-1}) = -u_{k-1} \frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{6h_k} + v_k x_{k-1} + w_k = u_{k-1} \frac{h_k^2}{6} + v_k x_{k-1} + w_k,$$

и

$$P_k(x_k) = u_k \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6h_k} + v_k x_k + w_k = u_k \frac{h_k^2}{6} + v_k x_k + w_k.$$

Тогда из равенств (49) получим систему уравнений

$$u_{k-1} \frac{h_k^2}{6} + v_k x_{k-1} + w_k = y_{k-1}, \quad u_k \frac{h_k^2}{6} + v_k x_k + w_k = y_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Решая эту систему относительно неизвестных v_k и w_k , находим

$$v_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{h_k}{6}(u_{k-1} - u_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (59)$$

$$w_k = \frac{1}{h_k}(y_{k-1}x_k - y_kx_{k-1}) + \frac{h_k}{6}(u_kx_{k-1} - u_{k-1}x_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (60)$$

Осталось определить величины u_k . Воспользуемся условием (50) при $s = 1$ (равенство первых производных) и (57):

$$P'_k(x_k) = u_k \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2h_k} + v_k = u_k \frac{h_k}{2} + v_k,$$

$$P'_{k+1}(x_k) = -u_k \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{2h_{k+1}} + v_{k+1} = -u_k \frac{h_{k+1}}{2} + v_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Приравниваем эти значения и получаем

$$u_k \frac{h_k}{2} + v_k = -u_k \frac{h_{k+1}}{2} + v_{k+1},$$

Подставим сюда (59)

$$u_k \frac{h_k}{2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{h_k}{6}(u_{k-1} - u_k) = -u_k \frac{h_{k+1}}{2} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{6}(u_k - u_{k+1}),$$

и, перегруппировав, получим

$$u_{k-1} \frac{h_k}{6} + u_k \frac{h_k + h_{k+1}}{3} + u_{k+1} \frac{h_{k+1}}{6} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (61)$$

Отметим, что здесь значения $P''_1(x_0) = u_0$, $P''_N(x_N) = u_N$ известны

$$u_0 = u_N = 0. \quad (62)$$

Система (61) решается методом прогонки.

Итак, для построения сплайна $S_3(x)$ следует решить систему (61), (62) и найти все u_k , $k=0, \dots, N$. Затем из (59) и (60) следует найти значения v_k , w_k , $k=1, \dots, N$. Наконец, многочлены $P_k(x)$ определяются из (58).

Случай равноотстоящих узлов

В этом случае, полагая $h_k = h$, получим расчетные формулы:

$$u_{k-1} + 4u_k + u_{k+1} = \frac{6}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N-1; \quad (63)$$

$$u_0 = u_N = 0. \quad (64)$$

$$v_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + \frac{h}{6}(u_{k-1} - u_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (65)$$

$$w_k = \frac{1}{h}(y_{k-1}x_k - y_kx_{k-1}) + \frac{h}{6}(u_kx_{k-1} - u_{k-1}x_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (66)$$

и формулу для сплайна

$$P_k(x) = u_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h} - u_{k-1} \frac{(x - x_k)^3}{6h} + v_k x + w_k, \quad (67)$$

Пример. Рассмотрим интерполяционную таблицу

$$(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1), \quad h = 1.$$

Система (63) имеет вид

$$\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{6}u_2 = 1, \quad \frac{1}{6}u_1 + \frac{2}{3}u_2 = -1,$$

ее решение $u_1 = 2$, $u_2 = -2$. Далее, из (65) и (66) находим

$$v_1 = -1/3, \quad v_2 = 5/3, \quad v_3 = -1/3, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = -2, \quad w_3 = 2.$$

Окончательно, из (67) получаем

$$P_1 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x, \quad P_2 = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{10}{3}x + 1, \quad P_3 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{26}{3}x - 7.$$

4 Интерполяция и аппроксимация тригонометрическими многочленами

4.1 Разложение на множители тригонометрических многочленов

Тригонометрическими многочленами (полиномами) степени не выше n называют функции вида

$$T_n(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kz + b_k \sin kz), \quad (68)$$

где коэффициенты a_k, b_k — действительные числа. Если $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, то степень многочлена T_n равна n . Изучим некоторые свойства многочлена $T_n(z)$, опираясь на свойства алгебраического многочлена (1). Для этого удобно считать переменную z комплексной величиной $z = x + iy$. Тогда

многочлен $T_n(z)$ является 2π -периодическим относительно действительной части x переменной $z = x + iy$. В частности, на действительной оси $z = x$ и мы получаем 2π -периодический действительный многочлен $T_n(x)$.

Прежде всего рассмотрим вопрос о нулях (корнях) многочлена $T_n(z)$. При действительных x он вообще может не иметь нулей, например, $T_n(x) = 2 + \cos nx$ не имеет действительных нулей. Покажем, однако, что на комплексной плоскости (в полосе $0 \leq x < 2\pi$ или в любой другой полосе вида $x_0 \leq x < x_0 + 2\pi$) этот многочлен имеет ровно $2n$ нулей (с учетом их кратности). Для этого выпишем выражения тригонометрических функций

$$\cos kz = \frac{1}{2}(e^{ikz} + e^{-ikz}), \quad \sin kz = -\frac{i}{2}(e^{ikz} - e^{-ikz}),$$

и подставим их в (68):

$$T_n(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikz} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikz} \right) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikz}, \quad (69)$$

где

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Преобразуем (69) заменой $Z = e^{iz}$:

$$T_n(z) = Z^{-n} \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} Z^k = Z^{-n} P_{2n}(Z), \quad (70)$$

где P_{2n} — алгебраический многочлен, причем $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \neq 0$. По основной теореме алгебры он имеет ровно $2n$ комплексных корней $Z_1, \dots, Z_{2n}$.

При этом

$$P_{2n}(z) = c_n \prod_{k=1}^{2n} (Z - Z_k) = c_n \prod_{k=1}^{2n} (e^{iz} - e^{iz_k}).$$

Здесь мы представили величины Z_k в виде $Z_k = |Z_k|e^{i\varphi_k} = e^{iz_k}$, где $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, а числа z_k определяются так:

$$z_k = -i \operatorname{Ln} Z_k = \varphi_k - i \ln |Z_k|.$$

Таким образом, все точки z_k лежат в полосе $0 \leq x < 2\pi$. Отсюда и из (70)

находим, что

$$\begin{aligned} T_n(z) &= c_n e^{-izn} \prod_{k=1}^{2n} (e^{iz} - e^{iz_k}) = c_n e^{-izn} e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k} \prod_{k=1}^{2n} (e^{iz - i \frac{z_k}{2}} - e^{i \frac{z_k}{2}}) = \\ &= c_n e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k} \prod_{k=1}^{2n} (e^{i \frac{z - z_k}{2}} - e^{i \frac{-z + z_k}{2}}) = c_n e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k} 2^{2n} (-1)^n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{z - z_k}{2}. \end{aligned}$$

Итак, доказана

Теорема. Любой тригонометрический полином (68) степени n имеет ровно $2n$ комплексных корней z_k ($k = 1, \dots, 2n$), удовлетворяющих условию $0 \leq \operatorname{Re} z_k < 2\pi$. При этом имеет место разложение в произведение простейших множителей:

$$T_n(z) = A_n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{z - z_k}{2}. \quad (71)$$

с коэффициентом

$$A_n = c_n e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k} 2^{2n} (-1)^n.$$

Обратно, произведение (71) является тригонометрическим полиномом степени n и имеет вид (68).

Следствие. Если два тригонометрических полинома вида (68) совпадают в $2n + 1$ различных точках z_k , лежащих в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$, то они равны.

Для доказательства достаточно взять разность таких многочленов. Она также является тригонометрическим многочленом степени не выше n , и не может иметь более $2n$ корней в указанной полосе, если только не является тождественно нулем.

Пример. Разложить функцию $\cos z$ на простейшие множители.

1-й способ. Имеем

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2Z}(Z^2 + 1) = \frac{1}{2Z}(Z - i)(Z + i) = \\ &= \frac{1}{2Z}(e^{iz} - e^{i \frac{\pi}{2}})(e^{iz} - e^{-i \frac{\pi}{2}}) = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} \frac{1}{2Z}(e^{i(z - \frac{\pi}{4})} - e^{i \frac{\pi}{4}})(e^{i(z + \frac{\pi}{4})} - e^{-i \frac{\pi}{4}}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(e^{i(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4})} \right) \left(e^{i(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4})} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

2-й способ. В данном случае можно обойтись средствами действительного анализа. Решив уравнение $\cos x = 0$, найдем действительные корни $\pi/2$ и $3\pi/2$, лежащие на промежутке $[0, 2\pi)$. По формуле (71) имеем

$$\cos x = A \sin \frac{x - \pi/2}{2} \sin \frac{x - 3\pi/2}{2}.$$

Подставив в это равенство $x = 0$, найдем постоянную $A = -2$.

Задача. Показать, что

$$4 \sin(x) - \cos(2x) + 3 = 8 \sin^4(x/2 + \pi/4)$$

4.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть заданы условия интерполяции $T_n(x_k) = y_k$, $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} \leq 2\pi$. По следствию из раздела 4.1 любой многочлен вида (68) однозначно определяется своими $2n + 1$ значениями. Следовательно, интерполяционный многочлен $T_n(x)$ определяется однозначно по указанной таблице интерполяции (x_k, y_k) . Получим формулу для его вычисления. Она вполне аналогична формуле в алгебраическом случае. Заметим, что многочлены

$$l^{(k)}(x) = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \dots \sin \frac{x-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x-x_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin \frac{x_k-x_0}{2} \dots \sin \frac{x_k-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x_k-x_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{x_k-x_{2n}}{2}}$$

имеют по теореме 1 степень n и обладают свойствами

$$l^{(k)}(x_m) = 0 \quad \text{при} \quad m \neq k, \quad l^{(k)}(x_k) = 1. \quad (72)$$

Поэтому многочлен

$$\sum_{k=0}^{2n} l^{(k)}(x) y_k$$

совпадает с $T_n(x)$ во всех точках $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ и, следовательно, равен ему всюду:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} l^{(k)}(x) y_k. \quad (73)$$

4.3 Интерполяционная формула Лагранжа с равноотстоящими узлами

Формула Лагранжа (73) имеет более простой вид в случае, когда узлы интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ делят отрезок $[0, 2\pi]$ на $2n + 1$ равных отрезков и вычисляются по формуле

$$x_k = \frac{2\pi}{2n+1} k, \quad k = 0, \dots, 2n.$$

Заметим сначала, что

$$t_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

является полиномом степени n и при этом верно равенство

$$t_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx. \quad (74)$$

Действительно, поскольку

$$2 \cos kx \sin \frac{x}{2} = \sin \left(x \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) - \sin \left(x \left(k - \frac{1}{2} \right) \right),$$

то

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx \right) &= \sin \frac{x}{2} + 2 \cos x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots + 2 \cos nx \cdot \sin \frac{x}{2} = \\ &= \sin \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{3x}{2} \right) - \sin \left(\frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{5x}{2} \right) - \sin \left(\frac{3x}{2} \right) + \\ &+ \dots + \sin \left(x \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) - \sin \left(x \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) = \sin \frac{2n+1}{2} x. \end{aligned}$$

Положим

$$l^{(k)}(x) = \frac{2}{2n+1} \cdot t_n(x - x_k), \quad k = 0, \dots, 2n.$$

При $m = 0, \dots, 2n$ вычислим

$$\begin{aligned} l^{(k)}(x_m) &= \frac{2}{2n+1} \cdot t_n(x_m - x_k) = \\ &= \frac{2}{2n+1} \cdot t_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}(m-k)\right) = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sin \pi(m-k)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}(m-k)\right)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Отсюда и из равенства $t_n(0) = n + \frac{1}{2}$ (см. (74)) имеем $l^{(k)}(x_k) = \frac{2}{2n+1} t_n(0) = 1$. При $m \neq k$ знаменатель последней дроби в (75), очевидно, отличен от нуля, и, значит, $l^{(k)}(x_m) = 0$.

Таким образом, многочлены $l^{(k)}(x)$ удовлетворяет свойству (72) и мы можем переписать формулу (73) в виде

$$T_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} t_n(x - x_k) y_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{(x-x_k)}{2}} y_k. \quad (76)$$

Это и есть интерполяционная формула с равноотстоящими узлами. Для применения лучше выписывать ее в развернутом виде:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \\ &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} y_k \left(\frac{1}{2} + \cos(x - x_k) + \dots + \cos n(x - x_k) \right), \quad x_k = \frac{2\pi}{2n+1} k. \end{aligned}$$

4.4 Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема. Любую непрерывную и 2π -периодическую функцию $f(x)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать тригонометрическими многочленами. Другими словами, для любого ε_0 найдется многочлен вида (68) (зависящий от ε_0) такой, что

$$\|f - T_n\|_{[0, 2\pi]} \leq \varepsilon_0. \quad (77)$$

Доказательство (Н.И. Ахиезер). Пусть фиксировано малое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad \psi(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) \sin x.$$

Эти функции непрерывные, четные, 2π -периодические. Перйдем к другой

переменной $t = \cos x$. Когда x пробегает промежуток от 0 до π переменная t пробегает отрезок $[-1, 1]$. Поэтому функции

$$\varphi(x) = \varphi(\arccos t) = F(t), \quad \psi(x) = \psi(\arccos t) = G(t)$$

определены и непрерывны на отрезке $[-1, 1]$. По первой теореме Вейерштрасса найдутся алгебраические многочлены $P(t)$, $Q(t)$ такие, что

$$|\varphi(\arccos t) - P(t)| \leq \epsilon, \quad |\psi(\arccos t) - Q(t)| \leq \epsilon,$$

$$|\varphi(x) - P(\cos x)| \leq \epsilon, \quad |\psi(x) - Q(\cos x)| \leq \epsilon. \quad (78)$$

Здесь $x \in [0, \pi]$. Но поскольку все функции четные, то эти неравенства верны при $x \in [-\pi, \pi]$. А поскольку все функции еще и 2π -периодические, то эти неравенства верны при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Заметим, что по определению функций φ , ψ имеем

$$f(x) \sin x = \varphi(x) \sin x + \psi(x).$$

Поэтому из (78) находим

$$\begin{aligned} & |f(x) \sin x - P(\cos x) \sin x - Q(\cos x)| = \\ & = |(\varphi(x) - P(\cos x)) \sin x + (\psi(x) - Q(\cos x))| \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, найден тригонометрический многочлен

$$U(x) = P(\cos x) \sin x - Q(\cos x),$$

для которого

$$|f(x) \sin x - U(x)| \leq 2\epsilon \quad (79)$$

при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Рассматривая другую 2π -периодическую функцию $f_1(x) = f(x - \pi/2)$, точно также найдем некоторый тригонометрический многочлен $V(x)$, для которого

$$|f_1(x) \sin x - V(x)| \leq 2\epsilon$$

при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Сделаем замену переменных $\tilde{x} = x - \pi/2$. Тогда из

предыдущего неравенства получим

$$\left| f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x - V(x) \right| \leq 2\varepsilon, \quad \left| f(\tilde{x}) \cos \tilde{x} - V\left(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 2\varepsilon,$$

при всех $\tilde{x} \in [-\infty, \infty]$. Функция $V_1(\tilde{x}) = V\left(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}\right)$ является некоторым тригонометрическим многочленом и при этом, как мы показали,

$$|f(x) \cos x - V_1(x)| \leq 2\varepsilon, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Отсюда и из (79) получаем

$$|f(x) \sin^2 x - U(x) \sin x| \leq 2\varepsilon, \quad |f(x) \cos^2 x - V_1(x) \cos x| \leq 2\varepsilon,$$

откуда

$$\begin{aligned} & |f(x) - U(x) \sin x - V_1(x) \cos x| = \\ & = |[f(x) \sin^2 x - U(x) \sin x] + [f(x) \cos^2 x - V_1(x) \cos x]| \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли тригонометрический многочлен

$$T(x) = U(x) \sin x - V_1(x) \cos x,$$

удовлетворяющий условию (77), если взять $\varepsilon = \varepsilon_0/4$. Теорема доказана.

5 Аппроксимация ортогональными системами

5.1 Ортогональные системы

в эвклидовом пространстве

Общие понятия. Напомним, что вещественным эвклидовым пространством называют линейное пространство E , в котором задано скалярное произведение (f, g) , $f, g \in E$. Скалярное произведение это функционал, удовлетворяющий свойствам

$$\text{I. } (f, g) = (g, f);$$

$$\text{II. } (\lambda f, g) = \lambda(f, g), \quad \lambda \in R;$$

$$\text{III. } (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2);$$

$$\text{IV. } (f, f) \geq 0, \quad (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

В E можно ввести норму (длину вектора) по формуле

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (80)$$

Ниболее простыми примерами евклидовых пространств служат n -мерные пространства со скалярным произведением $(f, g) = \rho_1 x_1 y_1 + \dots + \rho_n x_n y_n$, где $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — векторы с действительными координатами, а $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ — фиксированный вектор (вес) с положительными координатами.

Пространство L_2 . Пространство $L_2 = L_2([a, b], \rho)$ это множество функций на промежутке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx,$$

где $\rho(x)$ заданная кусочно-непрерывная на промежутке $[a, b]$ положительная функция, которая называется весом. Норму в пространстве L_2 согласно (80) можно определить так:

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(x)\rho(x) dx \right)^{1/2}.$$

Промежуток $[a, b]$ может быть ограниченным отрезком или неограниченным промежутком типа $[a, \infty]$, $[\infty, b]$, $[-\infty, +\infty]$.

Ортонормированные системы векторов. Полнота систем

В евклидовых пространствах E важную роль играют ортонормированные конечные или бесконечные системы векторов.

Определение. Система векторов $F = \{f_1, f_2, \dots\}$ называется ортогональной и нормированной (ортонормированной), если

$$(f_m, f_k) = \delta_m^k.$$

где δ_m^k — символ Кронекера. Отметим, что любая конечная подсистема $F_n = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ортонормированной системы F линейно независима.

Действительно, если

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \dots + \alpha_n f_n = 0,$$

то умножив это равенство скалярно на f_k , получим

$$\alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 1 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0,$$

откуда $\alpha_k = 0$ при всех $k = 1, \dots, n$.

Определение. Система векторов $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ называется полной в соответствующем эвклидовом пространстве E , если любой элемент $f \in E$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейными комбинациями векторов из G . То есть для любого ε существует конечный набор чисел α_k , $k = 1, \dots, N = N(f, \varepsilon)$, для которых

$$\|f - \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i\| \leq \varepsilon. \quad (81)$$

5.2 Ряды Фурье по ортонормированной системе

Пусть вектор $f \in E$, E – эвклидово пространство. Рядом Фурье вектора f по конечной или бесконечной ортонормированной системе $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ называется $\sum_k (f, g_k) g_k$. При этом пишут

$$f \sim \sum_k (f, g_k) g_k, \quad (82)$$

где знак $\sim$ означает соответствие ряда (82) элементу f . Возникает вопрос о сходимости: когда знак $\sim$ в (82) можно заменить знаком равенства для любого элемента $f \in E$. Если пространство n -мерно (конечномерно), то для ортонормированной системы $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ этого пространства равенство выполнено всегда:

$$f = \sum_{k=1}^n (f, g_k) g_k,$$

Ниже будет показано, что если бесконечная ортонормированная система $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ является полной, то и в этом случае вместо (82) имеем

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k, \quad \text{то есть} \quad \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, g_k) g_k \right\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (83)$$

для любого элемента $f \in E$.

Экстремальное свойство частичных сумм ряда (82). Оказывается, что частичные суммы ряда (82) аппроксимируют вектор f лучше, чем любая другая линейная комбинация входящих в эту сумму векторов. Другими словами, имеет место

Теорема. Для любого набора чисел α_k , $k = 1, \dots, N$, имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, g_k) g_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k \right\|. \quad (84)$$

Действительно, положим $\alpha_k^* = (f, g_k)$. Тогда, пользуясь свойствами скалярного произведения и ортонормированностью векторов g_k , получим

$$\begin{aligned} A := \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k, f - \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k \right) = \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k^2 - 2\alpha_k \alpha_k^* \right). \end{aligned}$$

В частности, если все $\alpha_k = \alpha_k^*$, то

$$B := \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k^* g_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N \alpha_k^{*2}, \quad \text{где} \quad \alpha_k^* = (f, g_k). \quad (85)$$

В N -мерном пространстве всегда $B = 0$, так что справедлива теорема Пифагора:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^{*2}.$$

Нам нужно доказать, что $B \leq A$. Имеем

$$\begin{aligned} A &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k^2 - 2\alpha_k \alpha_k^* \right) = \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k - \alpha_k^* \right)^2 - \sum_{k=1}^N \alpha_k^{*2} \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N \alpha_k^{*2} = B. \end{aligned}$$

Что и требовалось.

Следствие. Если $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ - ортонормированная полная система векторов, то ряд Фурье сходится к $f \in E$, то есть выполнено (83).

Действительно, из полноты системы G следует, что при заданном сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует конечный набор чисел α_k , $k = 1, \dots, N = N(f, \varepsilon)$, для которых выполнено (81). Отсюда и из (84) получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, g_k) g_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Это и означает, что выполнено равенство (83).

Устремляя ε к нулю (а N к бесконечности), отсюда и из (85) получаем

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k)^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k \right\|^2 = 0$$

и, следовательно, выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k)^2.$$

5.3 Метод ортогонализации Грама-Шмидта

Покажем, что из любой конечной совокупности линейно независимых векторов $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset E$ путем линейных преобразований можно получить ортонормированную (ортогональную и нормированную) систему векторов $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset E$ так, что каждый вектор системы F ли-

нейно выражается через векторы системы G и наоборот. Построение ортонормированной системы G проводится методом Грама-Шмидта. Опишем его.

Элементы g_k строятся последовательно. На первом шаге полагаем $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Поскольку линейно независимая система не может содержать нулевые векторы, то $\|f_1\| \neq 0$ и, следовательно, $\|g_1\| = 1$.

На втором шаге полагаем

$$\tilde{g}_2 = f_2 - (f_2, g_1)g_1, \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|}.$$

Здесь деление на норму законно, поскольку $\tilde{g}_2 \neq 0$ как нетривиальная линейная комбинация независимых векторов f_2 и g_1 . Непосредственно проверяется, что $(g_2, g_1) = 0$, $\|g_2\| = 1$. На третьем шаге полагаем

$$\tilde{g}_3 = f_3 - (f_3, g_1)g_1 - (f_3, g_2)g_2, \quad g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|}.$$

Здесь снова деление на норму законно. Действительно, из построения видно, что векторы g_1, g_2 лежат в линейном подпространстве, образованном векторами f_1, f_2 (то есть каждый из векторов g_1, g_2 линейно выражается через f_1 и f_2). Поэтому $\tilde{g}_3 \neq 0$ как нетривиальная линейная комбинация независимых векторов f_3 и f_1, f_2 . Повторяя указанную процедуру, на шаге k получим формулы

$$\tilde{g}_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} (f_k, g_i)g_i, \quad g_k = \frac{\tilde{g}_k}{\|\tilde{g}_k\|}. \quad (86)$$

Здесь мы снова пользуемся линейной независимостью первоначальной системы F , благодаря которой все $\|\tilde{g}_k\| \neq 0$. Действительно, как легко видеть из построения, векторы $g_1, \dots, g_{k-1}$ лежат в линейном подпространстве, образованном векторами $f_1, \dots, f_{k-1}$. Поэтому вектор $\tilde{g}_k$ отличен от нуля как нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов f_k и $f_1, \dots, f_{k-1}$. Из построения видим, что все свойства новой системы G , отмеченные выше, выполнены.

Примечание (для запоминания). По формуле (86) каждый эле-

мент g_k получается нормировкой разности элемента f_k и его частичной суммы Фурье по уже построенным ортонормированным векторам $g_1, \dots, g_{k-1}$.

5.4 Ортонормированная система многочленов

Рассмотрим пространство $L_2([a, b], \rho)$ и в этом пространстве линейно независимую систему $f_0 = 1, f_k = x^k, k = 1, \dots, n$. Здесь по-прежнему возможны и неограниченные промежутки, например, $a = -\infty, b = \infty$. Если провести в этой системе процесс ортогонализации Грама-Шмидта, то получим ортонормированные с весом ρ многочлены

$$\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}, \quad (87)$$

где индексы указывают степени многочленов. То есть

$$(P_m, P_k) = \int_a^b P_m(x) P_k(x) \rho(x) dx = \delta_m^k, \quad m, k = 0, \dots, n. \quad (88)$$

В данном случае процесс ортогонализации Грама-Шмидта выполняется по формулам

$$P_0(x) = P_0 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \rho(x) dx}}, \quad (89)$$

$$\tilde{P}_k(x) = x^k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_a^b x^k P_i(x) \rho(x) dx \right) P_i(x), \quad P_k(x) = \frac{\tilde{P}_k(x)}{\sqrt{\int_a^b \tilde{P}_k^2(x) \rho(x) dx}}. \quad (90)$$

Отметим, что старшие коэффициенты μ_k ортонормированных многочленов

$$P_k(x) = \mu_k x^k + a_{k-1}^{(k)} x^{k-1} + \dots + a_0^{(k)}$$

отличны от нуля, это сразу видно из формул (90). Отметим еще, что (89), (90) определяют совокупность ортогональных многочленов с точностью до знака, т.е. вместо системы $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ мы можем рассматривать $\{\pm P_0(x), \pm P_1(x), \dots, \pm P_n(x)\}$ с произвольной расстановкой знаков, такие системы также будут ортонормированными. Несложно показать, что

других ортогональных многочленов нет. Если же знаки многочленов выбрать так, чтобы старшие коэффициенты μ_k были положительны, то система ортонормированных многочленов определяется однозначно.

5.5 Задача о наилучшем приближении ортонормированными многочленами

Постановка задачи. Пусть задана функция $f(x)$ и система ортонормированных в $L_2([a, b], \rho)$ многочленов $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$. Требуется найти числа $\overset{*}{\alpha}_0, \dots, \overset{*}{\alpha}_n$ такие, что

$$\begin{aligned} e_n(f) &= \|f - (\overset{*}{\alpha}_0 P_0 + \overset{*}{\alpha}_1 P_1 + \dots + \overset{*}{\alpha}_n P_n)\|_2 = \\ &= \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - (\overset{*}{\alpha}_0 P_0(x) + \overset{*}{\alpha}_1 P_1(x) + \dots + \overset{*}{\alpha}_n P_n(x)) \right)^2 \rho(x) dx} \end{aligned} \quad (91)$$

имеет наименьшее значение. Из экстремального свойства (84) частичных сумм ряда Фурье следует, что задачу решают коэффициенты Фурье:

$$\overset{*}{\alpha}_k = (f, P_k) = \int_a^b f(x) P_k(x) \rho(x) dx.$$

При этом наилучшее приближение вычисляется по формуле (85):

$$e_n(f) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \overset{*}{\alpha}_k^2}. \quad (92)$$

Пример. Ортогонализировать и нормировать в $L_2 = L_2([0, 1], \rho)$ с весом $\rho(x) = 1$ систему функций $F = \{1, x, x^2\}$. Найти наилучшее приближение в L_2 функции $f(x) = x^3$.

Решение. Применим формулы (89), (90).

$$\tilde{g}_0 = f_0 = 1, \quad g_0 = \frac{\tilde{g}_0}{\|\tilde{g}_0\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\tilde{g}_1 = f_1 - (f_1, g_0)g_0 = x - \left(\int_0^1 x \cdot 1 dx \right) \cdot 1 = x - \frac{1}{2},$$

$$g_1 = \frac{\tilde{g}_1}{\|\tilde{g}_1\|_2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2 &= f_2 - (f_2, g_0)g_0 - (f_2, g_1)g_1 = \\ &= x^2 - \left(\int_0^1 x^2 \cdot 1 dx\right) \cdot 1 - 12 \left(\int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) dx\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ g_2 &= 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Для нахождения величины наилучшего приближения воспользуемся экстремальным свойством (84) частичной суммы Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f = x^3$ относительно системы g_k :

$$\alpha_k^* = \int_0^1 x^3 g_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2; \quad \alpha_0^* = \frac{1}{4}, \quad \alpha_1^* = \frac{3}{20}\sqrt{3}, \quad \alpha_2^* = \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Вычисляем величину наилучшего приближение по формуле (92):

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^2 \alpha_k^* g_k \right\|_2 &= \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^2 \alpha_k^{*2}} = \\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^3)^2 dx - \sum_{i=0}^2 \alpha_i^{*2}} = \sqrt{\frac{1}{2800}} = \frac{1}{140}\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Задача. Ортогонализировать и нормировать в $L_2([0, \infty], \rho)$ с весом $\rho(x) = e^{-x}$ систему функций $A = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Ответ:

$$\begin{aligned} g_0 &= 1, \quad g_1 = x - 1, \quad g_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \\ g_3 &= \frac{1}{6}(x^3 + 18x - 9x^2 + 18x - 6). \end{aligned}$$

Задача. Найти многочлен $P_2(x)$ наилучшего приближения для функции $f(x) = |x|$ в $L_2([-1, 1], \rho)$ с весом $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

Ответ:

$$P_2(x) = \frac{2}{3\pi} (1 + 4x^2)$$

5.6 Метод наименьших квадратов в L_2

Этим методом можно найти многочлен наилучшего приближения в L_2 , минуя процесс ортогонализации. Но он также приводит к решению в виде суммы Фурье.

Задача ставится следующим образом. Пусть задана функция $f(x)$ и система произвольных линейно независимых (и не обязательно ортогональных) многочленов $\{P_0, \dots, P_n\}$. Требуется найти числа $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n$ такие, что линейная комбинация

$$\tilde{\alpha}_0 P_0 + \tilde{\alpha}_1 P_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n P_n \quad (93)$$

наилучшим образом приближает функцию f в L_2 функцию f , то есть величина

$$e_n(f) = \|f - (\tilde{\alpha}_0 P_0 + \tilde{\alpha}_1 P_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n P_n)\|_2,$$

имеет наименьшее значение. В этом случае мы так же можем применять методы, связанные с экстремальностью (84) сумм Фурье, но предварительно проведя ортогонализацию многочленов. Однако в некоторых случаях числа $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n$ выгоднее определить, воспользовавшись методом наименьших квадратов, вполне аналогичным разобранным в разделе 2.4. Положим

$$F(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \int_a^b (f(x) - \alpha_0 P_0(x) - \alpha_1 P_1(x) - \dots - \alpha_n P_n(x))^2 \rho(x) dx. \quad (94)$$

Находим частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} &= -2 \int_a^b (f(x) - \alpha_0 P_0(x) - \alpha_1 P_1(x) - \dots - \alpha_n P_n(x)) P_k(x) \rho(x) dx = \\ &= -2(P_k, f) + 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot (P_k, P_i), \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Приравнивая их к нулю, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (P_0, P_0) \alpha_0 + (P_0, P_1) \alpha_1 + \dots + (P_0, P_n) \alpha_n = (P_0, f) \\ (P_1, P_0) \alpha_0 + (P_1, P_1) \alpha_1 + \dots + (P_1, P_n) \alpha_n = (P_1, f) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ (P_n, P_0) \alpha_0 + (P_n, P_1) \alpha_1 + \dots + (P_n, P_n) \alpha_n = (P_n, f) \end{cases} \quad (95)$$

Введем обозначение $p_{k,l} = (P_k, P_l)$. Тогда матрица системы (95) примет вид

$$G = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \dots & p_{0,n} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Эта матрица называется матрицей Грама. Ее определитель Δ всегда ≥ 0 , причем $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда система $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ линейно зависима (см. лемму ниже). В нашем случае, следовательно, $\Delta \neq 0$ и система имеет единственное решение $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n$, которое и дает нужный экстремальный набор коэффициентов и соответствующую линейную комбинацию (93).

Лемма. *Определитель Грама равен нулю $\Leftrightarrow$ система $\{P_k(x)\}$ линейно зависима.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть система $\{P_k(x)\}$ линейно зависима. Тогда найдется набор чисел $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, не равных одновременно нулю такой, что

$$\alpha_0 P_0(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) = 0. \quad (97)$$

Домножив скалярно обе части этого равенства на $P_k(x)$, $k = 0, \dots, n$, получим однородную линейную систему из $n + 1$ уравнений

$$\alpha_0 p_{k,0} + \dots + \alpha_n p_{k,n} = 0, \quad k = 0, \dots, n. \quad (98)$$

Поскольку она имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

$\Rightarrow$ Пусть $\Delta = 0$. Покажем, что система $\{P_k(x)\}$ линейно зависима. Рассмотрим однородную линейную систему (98). Ее определитель $\Delta = 0$ и, следовательно, она имеет ненулевое решение $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Покажем, что с

этим набором чисел выполняется (97). Действительно, домножим скалярно сумму

$$Q(x) = \alpha_0 P_0(x) + \dots + \alpha_n P_n(x)$$

на $P_k(x)$, $k = 0, \dots, n$. Получим $(Q, P_k) = 0$ при всех $k = 0, \dots, n$. Это означает, что и $(Q, Q) = (Q, \alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n) = 0$, то есть $Q(x) \equiv 0$.

Пример. В пространстве $L_2 = L_2([0, 1], \rho)$ с весом $\rho(x) = 1$ имеем систему функций $F = \{1, x, x^2\}$. Составить ее матрицу Грама, найти определитель Грама. Написать многочлен наилучшего приближения для функции $f(x) = x^3$ и найти само наилучшее приближение в L_2 .

Решение. Матрица Грама и столбец свободных членов в системе (95) имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Находим решение системы (95)

$$\alpha_1 = \frac{1}{20}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{5}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}.$$

Поэтому многочлен наилучшего приближения в L_2 имеет вид

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{5} x + \frac{1}{20},$$

непосредственное интегрирование дает и величину наилучшего приближения: $\frac{1}{140} \sqrt{7}$. Это совпадает с результатом примера из предыдущего раздела.

6 Аппроксимация

посредством цепных дробей

6.1 Цепные числовые дроби

Начнем с примеров. Рассмотрим дробь $\frac{34}{15}$. Проведем преобразование

$$\frac{34}{15} = 2 + \frac{4}{15} = 2 + \frac{1}{\frac{15}{4}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}.$$

Полученное справа выражение называется цепной дробью. Полученное равенство можно кратко записать в виде

$$\frac{34}{15} = [2; 3, 1, 3].$$

Еще примеры (проверить)

$$\frac{109}{76} = [1; 2, 3, 3, 2, 1], \quad \frac{131}{24} = [5, 2, 5, 2], \quad \frac{70}{29} = [2, 2, 2, 2, 2].$$

Сравним указанную процедуру с алгоритмом Евклида:

$$\left(\begin{array}{ll} 34 = 2 \cdot 15 + 4; & \frac{34}{15} = 2 + \frac{4}{15}; \\ 15 = 3 \cdot 4 + 3; & \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}; \\ 4 = 1 \cdot 3 + 1; & \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}; \\ 3 = 3 \cdot 1 + 0; & \frac{3}{1} = 3 + 0. \end{array} \right.$$

Видим, что числа $[2; 3, 1, 3]$ это целые части в правых частях делений с остатком. Вообще, для любого рационального числа по аналогичной схеме: "целая часть + остаток, меньший единицы" можно получить представление в виде конечной цепной дроби

$$R = \frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}},$$

или, кратко,

$$\frac{P}{Q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Эту процедуру можно записать в виде цепочки равенств

$$R = a_0 + r_0; \quad \frac{1}{r_0} = a_1 + r_1, \quad \frac{1}{r_1} = a_2 + r_2,$$

и т.д. Аналогично можно находить разложения иррациональных чисел. Ясно, что в этом случае не может получиться конечной цепной дроби. Возьмем, например, число $\sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{3} - 1} &\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \\ \frac{2}{\sqrt{3} - 1} &\equiv (\sqrt{3} + 1) = 2 + (\sqrt{3} - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{3} - 1} &= 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Видим, что началось повторение. Значит, числу $\sqrt{3}$ соответствует бесконечная цепная дробь $[1; 1, 2, 1, \dots] = [1; (1, 2)]$ (сходимость таких дробей мы не исследуем).

Выражения вида

$$R_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

называются k -ми подходящими дробями, $k = 0, 1, \dots$. В некоторых случаях удобно считать, что в цепных дробях a_k — произвольные числа (а не только целые). Пусть имеется некоторая конечная или бесконечная цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. Получим рекуррентную формулу для вычисления подходящих дробей $R_k = P_k/Q_k$.

Теорема 1. *Числители и знаменатели подходящих дробей R_k можно вычислять по следующим рекуррентным формулам*

$$P_k = P_{k-1}a_k + P_{k-2}; \quad Q_k = Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad (99)$$

где считается, что первые две подходящие дроби записаны в виде

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0}, \quad P_0 = a_0; \quad Q_0 = 1;$$

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \quad P_1 = a_0 a_1 + 1; \quad Q_1 = a_1;$$

Доказательство. Формулы (99) получаются по индукции. Действительно, пусть (99) выполнено для всех номеров, которые меньше чем k . Заметим, что R_k является также $(k-1)$ -подходящей дробью $\tilde{R}_{k-1}$, если заменить в R_k выражение $a_{k-1} + \frac{1}{a_k}$ формально на $\tilde{a}_{k-1}$. Тогда будем иметь

$$R_k = \tilde{R}_{k-1}, \quad P_k = \tilde{P}_{k-1}, \quad Q_k = \tilde{Q}_{k-1},$$

и по предположению индукции можно записать

$$\tilde{P}_{k-1} = P_{k-2} \tilde{a}_{k-1} + P_{k-3}; \quad \tilde{Q}_{k-1} = Q_{k-2} \tilde{a}_{k-1} + Q_{k-3}.$$

$$\begin{aligned} R_k = \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{\tilde{P}_{k-1}}{\tilde{Q}_{k-1}} = \frac{P_{k-2} \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_k} \right) + P_{k-3}}{Q_{k-2} \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_k} \right) + Q_{k-3}} = \frac{P_{k-2} a_{k-1} + P_{k-3} + P_{k-2}/a_k}{Q_{k-2} a_{k-1} + Q_{k-3} + Q_{k-2}/a_k} = \\ &= \frac{P_{k-1} + P_{k-2}/a_k}{Q_{k-1} + Q_{k-2}/a_k} = \frac{P_{k-1} a_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}}. \end{aligned}$$

Что и требовалось.

Отметим одно важное соотношение для подходящих дробей, благодаря которому по существу и применяются цепные дроби в теории чисел. Оказывается, что для двух соседних подходящих дробей $R_k = P_k/Q_k$ и $R_{k-1} = P_{k-1}/Q_{k-1}$ имеют место следующие свойства.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\Delta_k := P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad (100)$$

и, следовательно,

$$R_k - R_{k-1} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}. \quad (101)$$

Следствие 1. Все четные подходящие дроби меньше нечетных.

Следствие 2. Числитель и знаменатель подходящей дроби взаимно

просты. Если бы у них существовал общий делитель $d > 1$, то, поделив обе части равенства (100) на d , мы получили бы слева целое, а справа дробное число.

Это следствие можно использовать для сокращения исходной дроби R , достаточно разложить ее в цепную дробь

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{P_n}{Q_n},$$

а затем обратным порядком из разложения восстановить уже сокращенную дробь.

Пример.

$$\frac{3528}{2058} = [1; 1, 2, 2] = \frac{12}{7}.$$

Доказательство теоремы 2. Формула (101) легко получается с помощью (99). Действительно, учитывая (99), получаем

$$\begin{aligned}\Delta_k &= (P_{k-1}a_k - P_{k-2})Q_{k-1} - P_{k-1}(Q_{k-1}a_k - Q_{k-2}) = \\ &= -P_{k-2}Q_{k-1} + Q_{k-2}P_{k-1} = -\Delta_{k-1}.\end{aligned}$$

Так продолжая, находим

$$\Delta_k = -\Delta_{k-1} = \Delta_{k-2} = \dots = (-1)^{k-1}\Delta_1,$$

но $\Delta_1 = P_1Q_0 - Q_1P_0 = (a_0a_1 + 1) \cdot 1 - a_1a_0 = 1$. Отсюда и получается (101):

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{\Delta_k}{Q_kQ_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{1}{Q_kQ_{k-1}}.$$

Примечание. Приведем одно применение формулы (101) для решения диофантовых уравнений, т.е. уравнений в целых числах. Например, рассмотрим уравнение $mx + ny + 1 = 0$ с целыми числами m, n . Для решения разложим дробь $m/n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_s]$ и отбросим последнее звено $1/a_s$. Вернувшись от полученной цепной дроби к дроби M/N , получаем $(m/n) - (M/N) = \pm(1/nN)$. Домножим обе части на $\mp nN$ и получим $mN - nM + 1 = 0$, т.е. искомое (частное) решение есть $(N, -M)$. Для нахождения всех решений нужно найти еще общее решение однородного уравнения $mx + ny = 0$, что делается несложно, и сложить указанное частное и общее решения.

Пример. Решить в целых числах уравнение $53m + 35n + 1 = 0$. Находим цепную дробь $53/35 = [1; 1, 1, 1, 17]$. Отбрасываем последнее звено $1/17$ и получаем $M/N =$

$[1; 1, 1, 1] = 3/2$. Вычисляем

$$\frac{53}{35} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 35}; \quad 53 \cdot 2 - 35 \cdot 3 = 1; \quad 53 \cdot (-2) + 35 \cdot 3 + 1 = 0.$$

Итак, найдено частное решение $(-2, 3)$.

Укажем еще одно важное свойство цепных дробей.

Теорема 3.

$$\delta_k := P_k Q_{k-2} - Q_k P_{k-2} = (-1)^k a_k,$$

и, следовательно,

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{a_k}{Q_k Q_{k-2}}.$$

Следствие 3. Четные дроби монотонно возрастают, а нечетные – убывают. При этом каждая четная дробь меньше каждой нечетной (см. (101)). В частности,

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} \leq \frac{P}{Q} = R \leq \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}},$$

и

$$R - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} \leq \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k} Q_{2k+1}}.$$

Таким образом, подходящие дроби аппроксимируют основную дробь. Эта аппроксимация наилучшая: любая дробь с тем же знаменателем аппроксимирует основную дробь хуже, т.е.

$$\left| \frac{T}{Q_{2k}} - R \right| > \left| \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - R \right|$$

Доказательство теоремы 3. По формулам (99) и (100) получаем

$$\begin{aligned} \delta_k &= P_k Q_{k-2} - Q_k P_{k-2} = \\ &= (P_{k-1} a_k + P_{k-2}) Q_{k-2} - (Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}) P_{k-2} = P_{k-1} a_k Q_{k-2} - Q_{k-1} a_k P_{k-2} = \\ &= \Delta_{k-1} a_k = (-1)^k a_k. \end{aligned}$$

Что и требовалось.

Задача о наилучшем приближении действительных чисел рациональ-

ными дробями состоит в следующем. Для данного действительного числа α при каждом натуральном N требуется найти рациональную дробь m/n , знаменатель которой n не превосходит N , и для которой разность $\alpha - m/n$ имеет наименьшее значение. Оказывается, цепные дроби дают наилучшее приближение.

6.2 Разложение рациональных функций в цепные дроби

Их построение аналогично рассмотренному выше построению числовых цепных дробей. Пусть имеется рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где P и Q — некоторые многочлены. Запишем $R(x)$ в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} = C_0(x) + \frac{1}{\frac{Q(x)}{P_1(x)}}.$$

На следующем шаге запишем дробь $\frac{Q(x)}{P_1(x)}$ в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$R(x) = C_0(x) + \frac{1}{C_1(x) + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}} = C_0(x) + \frac{1}{C_1(x) + \frac{1}{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}}.$$

И так далее. Этот процесс всегда обрывается на некотором шаге n . Сокращенная запись:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = [C_0(x); C_1(x), \dots, C_n(x)].$$

Здесь, как и в случае чисел, при построении цепной дроби фактически применяется алгоритм Евклида:

$$\left(\begin{array}{ll} P(x) = C_0(x) \cdot Q(x) + r_0(x); & \frac{P(x)}{Q(x)} = C_0(x) + \frac{r_0(x)}{Q(x)}; \\ Q(x) = C_1(x) \cdot r_0(x) + r_1(x); & \frac{Q(x)}{r_0(x)} = C_1(x) + \frac{r_1(x)}{r_0(x)}; \\ r_0(x) = C_2(x) \cdot r_1(x) + r_2(x); & \frac{r_0(x)}{r_1(x)} = C_2(x) + \frac{r_2(x)}{r_1(x)}; \\ & \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

Здесь степени остатков $r_k(x)$ убывают и поэтому на некотором шаге n получим деление без остатка, т.е. $r_{n-2}(x) = C_n(x) \cdot r_{n-1}(x) + 0$.

Пример. Проверить формулу

$$R(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 + 2x + 3} = [x; x^2 + 2, x + 1].$$

6.3 Задача интерполяции рациональными функциями

Пусть задана интерполяционная таблица (x_k, y_k) некоторой функции f , $y_k = f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Будем искать интерполяционную рациональную функцию $R_{n-1}(x)$ в виде цепной дроби

$$R_{n-1}(x) = A_0 + \frac{x - x_1}{A_1 + \frac{x - x_2}{A_2 + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{A_{n-1}}}} \quad (102)$$

Подходящие дроби имеют вид

$$R_0 = \frac{A_0}{1}, \quad R_1 = \frac{x + A_0 A_1 - x_1}{A_1}, \quad R_2 = \frac{(A_0 + A_2)x + A_0 A_1 A_2 - A_0 x_2 - A_2 x_1}{x + A_1 A_2 - x_2},$$

и т.д. Параметры $A_0, \dots, A_{n-1}$ определяются из условия интерполяции $y_k = R_{n-1}(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) последовательно. Например, при подстановке $x = x_1$ в (102) получаем $A_0 = y_1$; при подстановке $x = x_2$, а затем $x = x_3$ в (102)

получаем

$$y_2 = R_{n-1}(x_2) = R_1(x_2) = A_0 + \frac{x_2 - x_1}{A_1 + 0},$$

$$y_3 = R_{n-1}(x_3) = R_2(x_3) = A_0 + \frac{x_3 - x_1}{A_1 + \frac{x_3 - x_2}{A_2 + 0}}$$

откуда находим A_1 , а затем A_2 . И так далее.

Можно применять следующие рекуррентные формулы для вычисления подходящих дробей $R_k(x) = \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$:

$$P_0 = A_0, Q_0 = 1; \quad P_1(x) = x + A_0 A_1 - x_1, Q_1(x) = A_1;$$

и далее

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) A_k + P_{k-2}(x)(x - x_k),$$

$$Q_k(x) = Q_{k-1}(x) A_k + Q_{k-2}(x)(x - x_k),$$

где $k = 2, \dots, n-1$. Эти формулы напоминают аналогичные формулы (99) для числовых цепных дробей. Например,

$$P_2(x) = (x + A_0 A_1 - x_1) A_2 + A_0 (x - x_2), \quad Q_2 = x + A_1 A_2 - x_2.$$

Отметим одно важное свойство подходящих дробей:

$$R_k(x) - R_{k-1}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)}{Q_{k-1}(x)Q_k(x)}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (103)$$

Примечание. Пусть все $A_k > \omega + \delta$, где $\omega > 1$, а δ — длина отрезка интерполяции. Тогда многочлены $Q_k(x)$ положительны и возрастают со скоростью геометрической прогрессии во всех точках этого отрезка. Точнее, $Q_k(x) \geq \omega^k$.

Докажем это по индукции. Для $Q_0 = 1$ и $Q_1(x) = A_1$ это очевидно. Допустим утверждение верно при номерах $\leq k-1$. Тогда для номера k имеем

$$\begin{aligned} Q_k(x) &\geq Q_{k-1}(x) A_k - Q_{k-2}(x)|x - x_k| > Q_{k-1}(x) (\omega + \delta) - Q_{k-2}(x)\delta > \\ &> Q_{k-1}(x) (\omega + \delta) - Q_{k-1}(x)\delta = \omega Q_{k-1}(x) \geq \omega^k. \end{aligned}$$

Так что в этом случае равенство (103) можно применять для оценки погрешности.

7 Численный анализ функциональных уравнений и неравенств

7.1 Локализация корней

Задача численного (приближенного) решение функционального уравнения

$$f(x) = 0 \quad (104)$$

состоит в том, чтобы найти приближенно корень x^* этого уравнения с заданной величиной ε допустимой погрешности (короче, с заданной погрешностью ε). Это означает, что требуется найти число $\tilde{x}$ такое, что $|\tilde{x} - x^*| \leq \varepsilon$. Всюду считаем, что функция f достаточное число раз дифференцируема, так что для нее можно применять методы классического анализа (теорему Лагранжа о конечных приращениях, формулу Тейлора и т.п.).

Решение обычно начинают с процесса локализации. Локализация это нахождение малого сегмента $[a, b]$, на котором лежит хотя бы один корень x^* уравнения (104). Для локализации можно использовать, например, схему Горнера (см. 1.3) или следующую теорему.

Теорема Больцано-Коши. *Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ принимает на его концах значения противоположных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.*

По этой теореме в качестве отрезка локализации можно взять отрезок, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

(В случае равенства $f(a) \cdot f(b) = 0$ корень уже определяется.)

7.2 Метод половинного деления

Это еще один метод локализации, но его можно применять также для приближенного нахождения корня x^* уравнения (104), если не требуется высокая точность.

Реализация происходит по следующей схеме. Сначала найдем отрезок $[a, b]$, для которого $f(a) \cdot f(b) < 0$. Затем этот отрезок разделим пополам точкой $c = (a + b)/2$ и вычислим значение $f(c)$. Выполняется одно из двух условий: $f(a) \cdot f(c) = 0$, $f(a) \cdot f(c) < 0$ или $f(a) \cdot f(c) < 0$. Если выполнено первое, то решение найдено: $x^* = c$. Если выполнено второе, то переходим к следующему отрезку $[a_1, b_1] = [a, c]$, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков. Если же выполнено третье, то переходим к следующему отрезку $[a_1, b_1] = [c, b]$. Затем снова делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и процесс повторяется.

Получим последовательность вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$$

длины $|b_n - a_n| = 2^{-n}(b - a)$, каждый из которых содержит хотя бы один корень уравнения (104). Процесс завершается, как только величина $|b_n - a_n|/2$ станет не больше ε . В качестве приближенного решения можно взять

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \text{тогда} \quad |\tilde{x} - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon.$$

7.3 Метод итераций

Этим методом решают уравнения вида

$$x = \varphi(x). \quad (105)$$

Отметим, что уравнение вида (104) можно привести к уравнению вида (105) и наоборот. Действительно, если задано уравнение (104), то, записав его в эквивалентном виде $\alpha f(x) = 0$, $\alpha \neq 0$, а затем в виде $x = \alpha f(x) + x$, получим уравнение типа (105), где $\varphi(x) = \alpha f(x) + x$. Число α выбирают из

определенных дополнительных соображений (см. примечание 2). Наоборот, уравнение (105) сводится к виду (104) с $f(x) = x - \varphi(x)$.

Метод итераций основан на формуле

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (106)$$

где в качестве x_0 берут какое-либо начальное приближение истинного корня, например, любую точку из отрезка локализации. Возникает вопрос о сходимости последовательности x_k к корню x^* . Этот вопрос решает следующая

Теорема. Пусть известно, что корень x^* уравнения $x = \varphi(x)$ лежит в некоторой малой окрестности

$$u = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

точки x_0 (т.е. известен отрезок локализации). При этом в более широкой окрестности

$$U = [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta]$$

функция φ определена и имеет производную, для которой $|\varphi'(x)| \leq \varepsilon < 1$. Тогда итерационный процесс (106) сходится к указанному корню x^* и справедлива следующая оценка погрешности

$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon^n |x_0 - x^*| \leq \varepsilon^n \delta. \quad (107)$$

Доказательство теоремы. При $n = 0$ получаем $x_1 = \varphi(x_0)$. Причем по теореме Лагранжа имеем

$$|x_1 - x^*| = |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_1)| |x_0 - x^*| \leq \varepsilon |x_0 - x^*| \leq \varepsilon \delta,$$

где $\xi_1 \in (x_0, x^*)$. Отсюда, в частности, получаем, что $x_1 \in U$, поскольку по неравенству треугольника

$$|x_1 - x_0| \leq |x_1 - x^*| + |x_0 - x^*| < \varepsilon \delta + \delta = (\varepsilon + 1)\delta < 2\delta.$$

Повторим итерацию и получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Тогда

$$|x_2 - x^*| = |\varphi(x_1) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_2)| |x_1 - x^*| \leq \varepsilon |x_1 - x^*| \leq \varepsilon^2 \delta.$$

Мы учли, что $x_1 \in U$ и, следовательно, $\xi_2 \in (x_1, x^*) \subset U$, так что справедлива оценка $|\varphi'(\xi_2)| \leq \varepsilon < 1$. Отсюда, в частности, снова получаем, что $x_2 \in U$, поскольку по неравенству треугольника

$$|x_2 - x_0| \leq |x_2 - x^*| + |x_0 - x^*| < \varepsilon^2 \delta + \delta = (\varepsilon^2 + 1)\delta < 2\delta$$

Так продолжая, на шаге n получим

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq \varepsilon |x_{n-1} - x^*| \leq \varepsilon^n \delta,$$

и $x_n \in U$, поскольку

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x^*| + |x_0 - x^*| \leq (\varepsilon^n + 1)\delta \leq 2\delta.$$

Таким образом, процесс можно продолжать неограниченно; при всех n выполнена оценка (107). Теорема доказана.

Примечание. Из (107) видно, что скорость сходимости итерации увеличивается при уменьшении значения $\varepsilon < 1$. Поэтому важно при переходе от уравнения $f(x) = 0$ к уравнению $x = \varphi(x)$ получить функцию $\varphi(x)$ с как можно меньшим значением $\max |\varphi'(x)|$ на отрезке $U = [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta]$.

Поэтому при переходе от уравнения $f(x) = 0$ к равносильному уравнению $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x + \alpha f(x)$, величину α можно выбирать из условия $\varphi(x_0) = 1 + \alpha f'(x_0) = 0$, т.е.

$$\alpha = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теперь есть основание ожидать, что абсолютная величина производной будет достаточно малой. Следует провести хотя бы грубую оценку $|\varphi'(x)|$ в U и убедиться, что она мала. В противном случае следует найти более точное первоначальное приближение x_0 к корню x^* , и уменьшить длину первоначального сегмента $u = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Пример 1. Найти решение уравнения $x^2 = 2$. Сначала составляем

уравнение, пригодное для итераций:

$$x = x + \alpha(x^2 - 2), \quad \varphi(x) = x + \alpha(x^2 - 2), \quad \varphi'(x) = 1 + 2x\alpha.$$

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1.5$. Легко проверить, что $\sqrt{2}$ лежит на отрезке $[1.5 - 0.1, 1.5 + 0.1]$, т.е. в данном случае $\delta = 0.1$. Определим α , решая уравнение $\varphi'(x_0) = 0$:

$$\varphi'(x_0) = 1 + 2x_0\alpha = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{2x_0} = -\frac{1}{3}.$$

Оценим производную $\varphi'(x) = 1 + 2x\alpha = 1 - \frac{2}{3}x$ на сегменте $U = [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] = (1.3, 1.7]$. Поскольку она является монотонной функцией, то достаточно найти максимум модуля на концах отрезка U . Он равен $\varepsilon = \frac{2}{15}$. Поскольку $\varepsilon < 1$, то можно начинать процесс итераций. Уравнение для итераций имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{3}(x_n^2 - 2).$$

Отсюда получаем

$$x_1 = \frac{17}{12}, \quad x_2 = \frac{611}{432}, \quad x_3 = \frac{791783}{559872} \approx 1.41422146,$$

причем погрешности $\Delta_n = |x_n - x^*|$ на шаге n оцениваются по формуле $\Delta_n \leq \varepsilon^n \delta$ (см. (107)):

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{75}, \quad \Delta_2 \leq \frac{2}{1125}, \quad \Delta_3 \leq \frac{4}{16875} \approx 0.000237.$$

Точное значение $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488$, так что оценка погрешности получена с завышением.

Пример 2. Найти решение уравнения $xe^x = 2$, то есть $f(x) = 0$, где $f(x) = xe^x - 2$. Сначала составляем уравнение, пригодное для итераций:

$$x = x + \alpha(xe^x - 2), \quad \varphi(x) = x + \alpha(xe^x - 2), \quad \varphi'(x) = 1 + \alpha(1 + x)e^x.$$

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 0.9$. Проверяется, что $f(x_0 - 0.1) < 0$, $f(x_0 + 0.1) > 0$. Значит, в данном случае $\delta = 0.1$ и корень лежит на отрезке $[0.8; 1]$. Определим α , решая уравнение $\varphi'(x_0) = 0$:

$$\varphi'(x_0) = 1 + \alpha(1 + x_0)e^{x_0} = 0, \quad \alpha(1 + 0.9)e^{0.9} = -1.$$

Отсюда находим $\alpha = -0.2139840315\dots$. Чтобы расчетная формула не была громоздкой возьмем $\alpha = -0.2$. Тогда

$$\varphi(x) = x - 0.2(xe^x - 2), \quad \varphi'(x) = 1 - 0.2(1+x)e^x.$$

Оценим производную $\varphi'(x)$ на сегменте $U = [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] = (1.7, 1.1]$. Поскольку

$$\varphi''(x) = -0.2e^x(2+x) < 0,$$

то функция $\varphi'(x)$ монотонно убывает на указанном сегменте. Следовательно, достаточно найти максимум модуля на концах отрезка U . Вычисляем

$$\varphi'(1.7) = 0.315\dots, \quad \varphi'(1.1) = -0.261\dots, \quad \max\{|\varphi'(1.7)|, |\varphi'(1.1)|\} = 0.315\dots$$

Итак, $\varepsilon < 0.4 < 1$ и можно начинать процесс итераций. Уравнение для итераций имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - 0.2(x_n e^{x_n} - 2),$$

погрешность оценивается так: $|x_n - x^*| < 0.1 \cdot (0.4)^n$.

7.4 Метод Ньютона (метод касательных)

Этим методом решают уравнения вида $f(x) = 0$. Он основан на формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (108)$$

Для получения оценки скорости сходимости итерационного процесса метода Ньютона (108) докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть x^* — корень уравнения $f(x) = 0$, и пусть x_0 — некоторая точка. Тогда если $m := \min_{x \in [x^*, x_0]} |f'(x)| > 0$, то

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{|f(x_0)|}{m}, \quad (109)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x_0) = f(x^*) + f'(\xi)(x_0 - x^*) = f'(\xi)(x_0 - x^*), \quad \xi \in (x^*, x_0),$$

где $f(x^*) = 0$, откуда

$$|f(x_0)| = |f'(\xi)||x_0 - x^*| \geq m|x_0 - x^*|,$$

что и доказывает неравенство (109). Лемма доказана.

Теорема. Пусть x^* – корень уравнения $f(x) = 0$, и пусть точка x_{n+1} получена из некоторой точки x_n по формуле Ньютона (108). Тогда

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} |x_{n+1} - x_n|^2, \quad (110)$$

где

$$M := \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |f''(x)|, \quad m := \min_{x \in [x^*, x_{n+1}]} |f'(x)|.$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2, \quad \xi \in (x_n, x_{n+1}).$$

Поскольку из (108) следует, что

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

то

$$f(x_{n+1}) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2, \quad |f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2} M |x_{n+1} - x_n|^2.$$

Отсюда и из (109) получается

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{|f(x_{n+1})|}{m} \leq \frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n|^2,$$

что и требовалось.

Примечание. Предположим, что в некоторой окрестности $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ корня уравнения $f(x) = 0$ сохраняют свои знаки производные $f'(x)$, $f''(x)$ (рис.). В этом случае все точки x_n монотонно приближаются к x^* с одной из сторон.

Примечание. При расчетах по формуле (108) надо следить, чтобы число значащих цифр числа x_{n+1} соответствовало малости погрешности. Грубо говоря, следует придерживаться следующего правила.

Предположим на шаге $n + 1$ вычислено значение x_{n+1} со всеми воз-

можными для калькулятора значащими цифрами. Вычислим $|x_{n+1} - x_n|^2$. Если после запятой в полученном квадрате идут m нулей, то в записи числа x_{n+1} оставляем после запятой только $m+1$ цифр, а остальные отбрасываем. Например, если $x_k = 1.234$, а $x_{k+1} = 1.2345678\dots$, то погрешность оценивается как $C \cdot (0.0005678)^2 = C \cdot 0.0000003$, и второе число следует округлять до 6-го знака.

Пример. Найдем решение уравнения $x^3 = 2$. В данном случае $f(x) = x^3 - 2$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2},$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2}$$

В качестве начального приближения возьмем точку $x_0 = 1.3$. Тогда на первом шаге получим $x_1 = 1.261143984\dots$. Вычислим выражение $|x_0 - x_1|^2 = 0.001509\dots$. Значит, значение x_1 округляем до третьего знака после запятой, т.е. берем $x_1 = 1.261$. Повторим процесс, найдем $x_2 = 1.259921973$. Вычислим $|x_1 - x_2|^2 = 0.00000116\dots$, и округлим x_2 до шестого знака после запятой, т.е. берем $x_2 = 1.259921$. На следующем шаге $x_3 = 1.259921050$, $|x_2 - x_3|^2 = 2.5 \times 10^{-15}$. Вычисления можно прекращать.

В конце еще можно получить оценку погрешности по формуле (110). Мы этого здесь не делаем. Отметим лишь, что полученное значение x_3 отличается от точного $\sqrt[3]{2} = 1.2599210498948\dots$ меньше чем на 10^{-9} .

7.5 Комбинированный метод хорд и касательных

Это метод решения уравнения вида (104). Этим методом строятся вложенные отрезки $[a_k, b_k]$, содержащие корень x^* как и в методе половинного деления, но длины этих отрезков убывают значительно быстрее. При использовании комбинированного метода получаемые приближения, вообще говоря, сходятся к корню медленнее, чем в методе касательных, но зато

здесь не нужно проводить трудоемкие оценки погрешности. Выпишем расчетные формулы, которые получим ниже:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad (111)$$

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n) \frac{a_n - b_{n+1}}{f(a_n) - f(b_{n+1})}. \quad (112)$$

Здесь все точки b_k находятся со стороны выпуклости графика, а a_k — со стороны вогнутости графика.

Пусть $[a_0, b_0]$ начальный отрезок, внутри которого лежит корень уравнения (104). Предположим для определенности, что на этом отрезке $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, то есть график выпуклый вниз. В частности, из монотонного возрастания функции f следует, что $f(a_0) < 0 < f(b_0)$.

1-й шаг. Проведем касательную к графику $y = f(x)$ в точке b_0 . Ее уравнение

$$y - f(b_0) = f'(b_0)(x - b_0),$$

откуда, положив $y = 0$, найдем точку пересечения b_1 касательной и оси OX :

$$-f(b_0) = f'(b_0)(b_1 - b_0), \quad b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}.$$

Из условий $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ следует, что $a_0 < x^* < b_1 < b_0$.

Теперь проведем хорду, соединяющую точки $(a_0, f(a_0))$ и $(b_1, f(b_1))$. Ее уравнение

$$\frac{x - a_0}{b_1 - a_0} = \frac{y - f(a_0)}{f(b_1) - f(a_0)},$$

откуда, положив $y = 0$, найдем точку пересечения a_1 хорды и оси OX :

$$\frac{a_1 - a_0}{b_1 - a_0} = \frac{-f(a_0)}{f(b_1) - f(a_0)}, \quad a_1 = a_0 - f(a_0) \frac{b_1 - a_0}{f(b_1) - f(a_0)}.$$

Из условий $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(a_0) < 0$ следует, что

$$a_0 < a_1 < x^* < b_1 < b_0, \quad f(a_0) < f(a_1) < 0 < f(b_1) < f(b_0).$$

Первый шаг завершен.

2-й шаг. Повторяет первый с заменой $[a_0, b_0]$ на $[a_1, b_1]$. В результате получаем новый отрезок $a_2 < b_2$ со свойством

$$a_1 < a_2 < x^* < b_2 < b_1, \quad f(a_1) < f(a_2) < 0 < f(b_2) < f(b_1).$$

И так далее. В результате получаются указанные формулы (111), (112).

7.6 Нахождение корней аналитических функций

Метод итераций для нахождения комплексных корней. Аналог метода итераций, рассмотренного нами для действительного случая, справедлив и для аналитических функций $\varphi(z)$. В этом случае мы ищем комплексный корень уравнения $z = \varphi(z)$. Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема. Пусть известно, что корень z^* уравнения $z = \varphi(z)$ лежит в некоторой малой окрестности

$$U : |z - z_0| \leq \delta$$

начального приближения z_0 этого корня. При этом в более широкой окрестности

$$U : |z - z_0| \leq 2\delta$$

функция $\varphi(z)$ аналитична и $|\varphi'(z)| \leq \varepsilon < 1$. Тогда итерационный процесс $z_n = \varphi(z_{n-1})$ сходится к указанному корню z^* и справедлива следующая оценка погрешности

$$|z_n - z^*| \leq \varepsilon^n |z_0 - z^*| \leq \varepsilon^n \delta. \quad (113)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству для действительного случая. При $n = 0$ получаем $z_1 = \varphi(z_0)$. Причем

$$|z_1 - z^*| = |\varphi(z_0) - \varphi(z^*)| = \left| \int_{z_0}^{z^*} \varphi'(\xi) d\xi \right| \leq \int_{z_0}^{z^*} |\varphi'(\xi)| |d\xi| \leq$$

$$\leq \max_{\xi \in [z_0, z^*]} |\varphi'(\xi)| \int_{z_0}^{z^*} |d\xi| \leq \max_{\xi \in U} |\varphi'(\xi)| |z_0 - z^*| \leq \varepsilon |z_0 - z^*| \leq \varepsilon \delta, \quad (114)$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку $[z_0, z^*]$ (лежащему в круге U). Отсюда, в частности, получаем, что $z_1 \in U$, ибо по неравенству треугольника

$$|z_1 - z_0| \leq |z_1 - z^*| + |z_0 - z^*| < \varepsilon |z_0 - z^*| + |z_0 - z^*| = (\varepsilon + 1) |z_0 - z^*| < 2\delta.$$

Повторим итерацию и получим $z_2 = \varphi(z_1)$. Как и в (114) находим

$$\begin{aligned} |z_2 - z^*| &= |\varphi(z_1) - \varphi(z^*)| \leq \int_{z_1}^{z^*} |\varphi'(\xi)| |d\xi| \leq \\ &\leq \max_{\xi \in [z_1, z^*]} |\varphi'(\xi)| \int_{z_1}^{z^*} |d\xi| \leq \max_{\xi \in U} |\varphi'(\xi)| |z_1 - z^*| \leq \varepsilon |z_1 - z^*| \leq \varepsilon^2 \delta. \end{aligned}$$

Здесь в третьем неравенстве при оценке $\max_{\xi \in [z_1, z^*]} |\varphi'(\xi)|$ мы учли, что $z_1 \in U$ и, следовательно, прямолинейный отрезок $[z_1, z^*]$ лежит в круге U (так что на этом отрезке модуль производной по условию теоремы не превосходит ε). Отсюда вновь получаем, что $z_2 \in U$, поскольку по неравенству треугольника

$$|z_2 - z_0| \leq |z_2 - z^*| + |z_0 - z^*| < \varepsilon^2 |z_0 - z^*| + |z_0 - z^*| = (\varepsilon^2 + 1) |z_0 - z^*| < 2\delta.$$

Так продолжая, на шаге n получим

$$|z_n - z^*| = |\varphi(z_{n-1}) - \varphi(z^*)| \leq \max_{\xi \in U} |\varphi'(\xi)| |z_{n-1} - z^*| \leq \varepsilon |z_{n-1} - z^*| \leq \varepsilon^n \delta,$$

и при этом $z_n \in U$, поскольку

$$|z_n - z_0| \leq |z_n - z^*| + |z_0 - z^*| \leq (\varepsilon^n + 1) |z_0 - z^*| \leq 2\delta.$$

Таким образом, процесс можно продолжать неограниченно; при всех n выполнена оценка (113). Теорема доказана.

Метод Ньютона. Описанный выше метод касательных Ньютона можно применять и для нахождения комплексных корней аналитических функций. В этом случае применяется аналогичная расчетная формула:

$$z_{n+1} = z_n - \varepsilon \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad \varepsilon > 0, \quad (115)$$

где ε достаточно малое положительное вещественное число.

Действительно, пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из условий Коши-Римана имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f'(z)} &= \frac{u + iv}{u_x + iv_x} = \frac{(uu_x + vv_x) + i(vu_x - uv_x)}{u_x^2 + v_x^2} = \\ &= \frac{(uu_x + vv_x) + i(vv_y + uu_y)}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{1}{2} \frac{(u^2 + v^2)'_x + i(u^2 + v^2)'_y}{u_x^2 + v_x^2}. \end{aligned}$$

Значит, получается следующее равенство векторов

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \left(\operatorname{Re} \frac{f(z)}{f'(z)}, \operatorname{Im} \frac{f(z)}{f'(z)} \right) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{grad} |f(z)|^2}{|f'(z)|^2}. \quad (116)$$

Поэтому формула (115) – это формула известного метода антиградиента для нахождения минимума функции $|f(z)|$. В данном случае этот минимум равен нулю.

Пример. $f(z) = z^2 + 1$. Решаем уравнение $f(z) = 0$. Возьмем в качестве начального приближения $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Тогда по формулам (115) получим

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i, \quad z_2 = \frac{3}{40} + \frac{39}{40}i, \quad z_3 = -\frac{7}{4080} + \frac{4069}{4080}i, \\ z_4 &= \frac{217}{46748640} + \frac{46748741}{46748640}i. \end{aligned}$$

Видно, что $z_k \rightarrow i$. Например, $z_4 = 0.00000464 + 1.00000216i$.

7.7 Решение систем нелинейных уравнений

Мы ограничимся случаем систем вида

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (117)$$

Предположим, что в окрестности искомого решения (x^*, y^*) определитель

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (118)$$

Предположим, что мы знаем "хорошее" начальное приближение (x_0, y_0) . Тогда по формуле Тейлора

$$0 = f(x^*, y^*) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x^* - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y^* - y_0) + \\ + \frac{1}{2} (f''_{xx} \cdot (x^* - x_0)^2 + 2f''_{xy} \cdot (x^* - x_0)(y^* - y_0) + f''_{yy} \cdot (y^* - y_0)^2), \quad (119)$$

где все производные второго порядка вычислены в некоторой точке (c_1, c_2) , $c_1 \in (x^*, x_0)$, $c_2 \in (y^*, y_0)$. Дифференциал второго порядка является бесконечно малой величиной второго порядка. Отбросим его, тогда точку (x^*, y^*) в правой части равенстве (119) придется заменить на некоторую (x_1, y_1) , близкую к этой точке. Есть основание считать, что эта точка ближе к истинному значению решения, чем исходная точка (x_0, y_0) . Получаем равенство

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_0) = -f(x_0, y_0).$$

Запишем аналогичное равенство для g (оно уже не будет точным, но мы пренебрегаем погрешностью второго порядка)

$$g'_x(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) + g'_y(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_0) = -g(x_0, y_0).$$

Получилась система линейных уравнений для определения точки (x_1, y_1) .

Запишем ее в матричном виде

$$A(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

где

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Отсюда найдем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - A^{-1}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

где $A^{-1}(x_0, y_0)$ есть матрица, обратная к $A(x_0, y_0)$. Мы учли, что определитель $D(x_0, y_0) \neq 0$ и, следовательно, обратная матрица

$$A^{-1}(x_0, y_0) = \frac{1}{f'_x g'_y - f'_y g'_x} \begin{pmatrix} g'_y & -f'_y \\ -g'_x & f'_x \end{pmatrix}$$

существует (все частные производные вычислены в точке (x_0, y_0)). Заменяя здесь (x_0, y_0) на (x_n, y_n) и (x_1, y_1) на (x_{n+1}, y_{n+1}) , получим расчетную формулу для итераций:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - A^{-1}(x_n, y_n) \cdot \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Получилась формула, вполне аналогичная формуле Ньютона (108).

Пример. Найдем решение системы

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Вычисляем матрицы

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}(x, y) = \frac{1}{x - y} \begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix};$$

Расчетная формула в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{x_n - y_n} \begin{pmatrix} x_n & -1 \\ -y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n + y_n - 3 \\ x_n y_n - 1 \end{pmatrix}$$

Если выписать это равенство по строкам, то получим

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n y_n - 3 x_n + 1}{y_n - x_n}; \\ y_{n+1} = \frac{x_n y_n - 3 y_n + 1}{x_n - y_n}. \end{cases}$$

Возьмем начальное значение $(x_0, y_0) = (1, 3)$. Тогда

$$(x_1, y_1) = (0.5, 2.5), \quad (x_2, y_2) = (0.375, 2.625), \dots$$

$$(x_5, y_5) = (0.381966011\dots, 2.6180339887\dots)$$

с погрешностью $\leq 10^{-10}$.

Пример. Найдём решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

В этом случае аналогично находим расчетную формулу

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{6} \frac{-3x_n^2 y_n + 4x_n^3 + y_n^3 - 6y_n + 2}{x_n(x_n - y_n)}; \\ y_{n+1} = \frac{1}{6} \frac{4y_n^3 - 3y_n^2 x_n + x_n^3 - 6x_n + 2}{y_n(y_n - x_n)}. \end{cases}$$

При том же начальном значении $(x_0, y_0) = (1, 3)$ на седьмом шаге получаем $x_7 = -0.8155162362\dots$, $y_7 = 1.1553931228\dots$ с погрешностью $\leq 10^{-10}$.

Задачи. Найти решения. Сделать 5 итераций.

$$\begin{cases} xy + x + 2y^3 = 0, & x_0 = \frac{1}{2}, \\ xy + 2x^3 - y^3 = 0, & y_0 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} e^x y + x = 0, & x_0 = \frac{1}{2}, \\ y + 2x^3 = 0, & y_0 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x y + x = 0, & x_0 = -\frac{1}{2}, \\ 1 + yx + 2x^3 = 0, & y_0 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} e^x + x - y = 0, & x_0 = -1, \\ e^y + x^3 = 0, & y_0 = -1. \end{cases}$$

7.8 Нахождение точек минимума функции одной переменной.

Метод золотого сечения

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть известно, что f имеет на этом отрезке ровно одну точку локального (а, следовательно, и глобального) минимума x^* . Ясно, что такая функция не может иметь локальных максимума внутри отрезка, она имеет глобальный максимум на одном из концов (или срвзу на двух концах) отрезка. Такая функция называется *унимодальной*. Требуется найти точку x^* .

Выберем на интервале $(a, b) = (a_0, b_0)$ две точки $\alpha_0 < \beta_0$ и сравним значения $f(\alpha_0)$ и $f(\beta_0)$. Пусть, например, $f(\alpha_0) \leq f(\beta_0)$. Тогда точка минимума x^* не может лежать на отрезке $[\beta_0, b_0]$. Действительно, если бы $x^* \in [\beta_0, b_0]$, то на отрезке $[\alpha_0, x^*]$ было бы $f(x^*) < f(\alpha_0) \leq f(\beta_0)$ и, следовательно, функция $f(x)$ достигала бы в некоторой его внутренней точке с локального максимума $f(c) \geq f(\beta_0)$. Этого быть не может, т.к. функция унимодальна.

Отбросим из отрезка $[a_0, b_0]$ тот из двух промежутков $[a_0, \alpha_0)$ или $(\beta_0, b_0]$, на котором не может находиться точка минимума. Оставший отрезок обозначим $[a_1, b_1]$. Например, при $f(\alpha_0) \leq f(\beta_0)$ надо положить $a_1 = a_0$, $b_1 = \beta_0$. (В случае $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0)$ следует положить $a_1 = \alpha_0$, $b_1 = b_0$.)

Этим завершается первый шаг. На втором шаге снова берем две различные точки $\alpha_1 < \beta_1$ на интервале (a_1, b_1) и из отрезка $[a_1, b_1]$ отбрасываем промежуток $[a_1, \alpha_1)$, если $f(\alpha_1) \geq f(\beta_1)$ или $(\beta_1, b_1]$, если $f(\alpha_1) \leq f(\beta_1)$. Оставшийся отрезок обозначим через $[a_2, b_2]$.

Рекомендуется для уменьшения счета вместо двух точек $\alpha_1 < \beta_1$ на интервале (a_1, b_1) выбрать лишь одну точку, а второй точкой считать уже выбранную на предыдущем шаге. Например, в рассмотренном нами случае был оставлен отрезок $[a_1, b_1] = [a_0, \beta_1]$, на котором лежала точка α_1 . Ее

мы и сохраним для следующего шага, положив $\beta_2 = \alpha_1$. Тогда придется выбрать лишь одну новую точку $\alpha_2 < \beta_2$.

И так далее. После шага k мы получаем отрезок $[a_k, b_k]$, содержащий искомую точку x^* минимума. И мы можем положить $x^* \approx \frac{1}{2}(b_k + a_k)$ с абсолютной погрешностью $\frac{1}{2}(b_k - a_k)$.

Наиболее часто в качестве α_k, β_k используются точки *золотого сечения*.

Определение. Говорят, что точки α_0, β_0 образуют золотое сечение отрезка $[a_0, b_0]$, если

$$a_0 < \alpha_0 < \beta_0 < b_0, \quad \alpha_0 - a_0 = b_0 - \beta_0,$$

и отношение длины всего отрезка $[a_0, b_0]$ к длине большего подотрезка $[a_0, \beta_0]$ равно отношению длины этого подотрезка к длине меньшего подотрезка $[a_0, \alpha_0]$. Положим

$$x = \alpha_0 - a_0, \quad \delta = b_0 - a_0$$

и запишем это определение формально

$$\frac{b_0 - a_0}{\beta_0 - a_0} = \frac{\beta_0 - a_0}{\alpha_0 - a_0}, \quad \frac{\delta}{\delta - x} = \frac{\delta - x}{x}.$$

Отсюда получается квадратное уравнение

$$x^2 - 3\delta x + \delta^2 = 0, \quad x \approx 0.381966 \delta.$$

Таким образом, точки золотого сечения вычисляются по формулам

$$\alpha_0 \approx a_0 + 0.381(b_0 - a_0), \quad \beta_0 \approx b_0 - 0.381(b_0 - a_0). \quad (121)$$

Интересно отметить, что если отбросить из $[a_0, b_0]$ отрезок $[\beta_0, b_0]$, то получим новый отрезок $[a_0, \beta_0]$, в котором оставшаяся точка α_0 по-прежнему является одной из точек золотого сечения. Если теперь добавить новую точку α_1 симметрично точке α_0 относительно центра нового отрезка, то получим снова золотое сечение. Переобозначив, как это мы делали выше точки: $a_1 = a_0, \beta_1 = \alpha_0, b_1 = \beta_0$, получим те же соотношения, что и в (121)

$$\alpha_1 \approx a_1 + 0.381(b_1 - a_1), \quad \beta_1 \approx b_1 - 0.381(b_1 - a_1). \quad (122)$$

Та же ситуация при соответствующих переобозначениях возникает и при отбрасывании из $[a_0, b_0]$ отрезок $[a_0, \alpha_0]$.

Формулы (121) и (122) верны при всех k :

$$\alpha_k \approx a_k + 0.381 (b_k - a_k), \quad \beta_k \approx b_k - 0.381 (b_k - a_k). \quad (123)$$

Согласно указанному алгоритму на каждом новом шаге приходится вычислять только одну из точек золотого сечения, а другая переходит из предыдущего шага. Однако при многократном применении формул (123) ввиду их приближенного характера возникает большая погрешность. Поэтому рекомендуется после нескольких шагов пересчитывать *обе* точки сечения.

Процесс сходится довольно медленно, например после 10 шага имеем

$$b_{10} - a_{10} \approx (0.618033989)^{10} (b_0 - a_0) \approx 0.00813 (b_0 - a_0).$$

7.9 Нахождение точек минимума

функции двух переменных. Метод антиградиента

Мы рассмотрим метод минимизации функции двух переменных $f(x, y)$, но он годится и для функций любого количества переменных. Известно, что производная функции $f(x, y)$ по направлению $\tau = (\alpha, \beta)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{df(x + \alpha t, y + \beta t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Положим

$$\tau_0 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right), \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = (\tau_0, \text{grad } f).$$

Видим, что наскорейшее локальное убывание функции f происходит в том случае, когда единичный вектор τ_0 противоположен по направлению градиенту функции f , т.е.

$$\tau_0 = -\frac{1}{|\text{grad } f|} \text{grad } f,$$

и тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -|\text{grad } f|.$$

На этом и основан метод антиградиента. Выберем начальное приближение $M_0(x_0, y_0)$ точки минимума. При малом смещении из точки M_0 в новую точку $M_1 = M_0 - \varepsilon \text{grad } f(M_0)$ (по направлению антиградиента $\tau = \overline{M_0, M_1}$) имеем

$$f(M_1) - f(M_0) \approx |\tau| \frac{\partial f(M_0)}{\partial \tau} = -|\tau| |\text{grad } f(M_0)| = -\varepsilon |\text{grad } f(M_0)|^2,$$

где ε — малое положительное число. Поэтому при достаточно малом ε

$$f(M_1) \approx f(M_0) - \varepsilon |\text{grad } f(M_0)|^2 < f(M_0).$$

Далее подобный шаг делаем уже из точки M_1 . Отсюда получается формула для итераций. Пусть задано начальное приближение $M_0(x_0, y_0)$ искомой точки минимума. Полагаем

$$M_{k+1} = M_k - \varepsilon_k \text{grad } f(M_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (124)$$

Здесь множитель ε (отвечающий за величину шага) вообще говоря нужно варьировать в процессе счета. При этом на каждом шаге надо брать его настолько малым, чтобы соответствующее значение f уменьшалось: $f(M_{k+1}) < f(M_k)$.

8 Численное дифференцирование

8.1 Вычисление производной первого порядка

1. Получим сначала простейшую формулу. Будем предполагать, что функция $f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Приближенное вычисление производной $f'(x)$ в точке x основано на формуле Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2,$$

где $c \in (x, x+h)$. Отсюда получаем

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2}f''(c)h,$$

то есть

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

с погрешностью

$$\delta = \frac{h}{2}M_2(f), \quad M_2 = \max_{c \in [x, x+h]} |f''(c)|.$$

2. Полученную формулу легко уточнить по порядку величины h . Действительно, поскольку

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(c_1)h^3,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(c_2)h^3,$$

$c_1 \in (x, x+h)$, $c_2 \in (x, x-h)$, то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{6}(f'''(c_1) - f'''(c_2)),$$

откуда

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

с погрешностью

$$\delta = \frac{h^2}{12}M_3(f), \quad M_3 = \max_{c \in [x-h, x+h]} |f'''(c)|.$$

3. Уточнять порядок аппроксимации можно и дальше по следующей схеме. По формуле Тейлора

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)h^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)h^{n+1}, \quad (125)$$

где $c \in (x, x+h)$. Пусть фиксированы некоторые попарно различные малые числа h_p , $p = 1, \dots, n$. Подставим в равенство (125) поочередно $h = h_p$, $p = 1, \dots, n$, и, умножив полученные равенства на некоторые числа A_p , сложим все эти равенства. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n A_p (f(x+h_p) - f(x)) &= f'(x) \left(\sum_{p=1}^n A_p h_p \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n \left(\sum_{p=1}^n A_p h_p^k \right) \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=1}^n A_p f^{(n+1)}(c_p) h_p^{n+1}, \end{aligned} \quad (126)$$

где $c_p \in (x, x+h_p)$. Далее, пусть выполнены равенства

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^n A_p h_p = 1 \\ \sum_{p=1}^n A_p h_p^k = 0, \quad k = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (127)$$

Эта система имеет единственное решение $A_1, \dots, A_n$ при любом наборе попарно различных и отличных от нуля значениях h_k , поскольку ее определитель есть $h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_n \cdot W$, где W – определитель Вандермонда. Подставив в (126) найденное решение, получим

$$f'(x) \approx \sum_{p=1}^n A_p f(x+h_p) - A f(x), \quad A = \sum_{p=1}^n A_p, \quad (128)$$

с погрешностью

$$\delta_n \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} \sum_{p=1}^n |A_p| |h_p^{n+1}| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \sum_{p=1}^n |A_p|, \quad (129)$$

где

$$M_{n+1} = \max_{c \in [x-h, x+h]} |f^{(n+1)}(c)|, \quad h = \max_{p=1, \dots, n} \{|h_p|\}.$$

Примечание. Решение системы (127) можно получить в явном виде, пользуясь формулами Крамера и Вандермонда:

$$A_p = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{q \neq p} h_q}{h_p} \frac{1}{\prod_{q \neq p} (h_p - h_q)} = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{q \neq p} h_q}{h_p} \frac{1}{Q'(h_p)},$$

где

$$Q(x) = \prod_{q=1, \dots, n} (x - h_q).$$

Тогда оценку погрешности (129) можно переписать в виде

$$\delta_n \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \sum_{p=1}^n |A_p| |h_p^{n+1}| \leq \frac{h^{2n-1}}{(n+1)!} M_{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{|Q'(h_p)|}.$$

Примеры. Пусть $n = 3$ и

$$h_1 = h, \quad h_2 = 2h, \quad h_3 = 3h,$$

тогда решая систему (127), находим

$$A_1 = \frac{3}{h}, \quad A_2 = -\frac{3}{2h}, \quad A_3 = \frac{1}{3h}, \quad A = \frac{11}{6h},$$

и $\delta_3 \leq \frac{9}{4} h^3 M_4$. Здесь и далее погрешности оцениваются по формуле (129).

То есть получается формула

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(3f(x+h) - \frac{3}{2}f(x+2h) + \frac{1}{3}f(x+3h) \right) - \frac{11}{6h}f(x)$$

с указанной погрешностью δ_3 .

При $n = 4$ имеем

$$f'(x) \approx$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{24}f\left(x - \frac{3}{2}h\right) - \frac{9}{8}f\left(x - \frac{1}{2}h\right) + \frac{9}{8}f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{24}f\left(x + \frac{3}{2}h\right) \right)$$

с погрешностью $\delta_4 \leq \frac{3}{512} h^4 M_5$.

8.2 Вычисление производной второго порядка

Пользуясь тем же методом, можно получить формулу численной производной второго порядка. Именно, снова напишем равенство (126)

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^n A_p (f(x + h_p) - f(x)) = \\ & = f'(x) \left(\sum_{p=1}^n A_p h_p \right) + \frac{f''(x)}{2} \left(\sum_{p=1}^n A_p h_p^2 \right) + \\ & + \sum_{k=3}^n \left(\sum_{p=1}^n A_p h_p^k \right) \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=1}^n A_p f^{(n+1)}(c_p) h_p^{n+1}. \end{aligned} \quad (130)$$

Теперь вместо (127) составим систему

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^n A_p h_p = 0 \\ \sum_{p=1}^n A_p h_p^2 = 2 \\ \sum_{p=1}^n A_p h_p^k = 0, \quad k = 3, \dots, n. \end{cases} \quad (131)$$

Эта система, как отмечено выше, имеет единственное решение при любом наборе попарно различных и отличных от нуля значениях h_k . Решив эту систему и подставив решение в (130), получим

$$f''(x) \approx \sum_{p=1}^n A_p f(x + h_p) - A f(x), \quad A = \sum_{p=1}^n A_p, \quad (132)$$

с погрешностью (см. (129))

$$\delta_n \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} \sum_{p=1}^n |A_p| |h_p^{n+1}| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \sum_{p=1}^n |A_p|.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков.

Пример. При $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} & f''(x) \approx \\ & \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{18} f\left(x - \frac{3}{2}h\right) + \frac{9}{2} f\left(x + \frac{1}{2}h\right) + \frac{9}{2} f\left(x - \frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{18} f\left(x + \frac{3}{2}h\right) \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{80}{9h^2}f(0)$$

с погрешностью $\delta_4 \leq \frac{3}{320}h^3M_5$.

Пример. Пусть $n = 4$. Составим аппроксимативную формулу для $\alpha f'(x) + \beta f''(x)$. Узлы выберем в точках $x + kh$, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$\begin{aligned} h^2 (\alpha f'(x) + \beta f''(x)) = \\ \left(-\frac{25}{12}h\alpha + \frac{35}{12}\beta\right) f(x) + \left(4h\alpha - \frac{26}{3}\beta\right) f(x+h) + \left(-3h\alpha + \frac{19}{2}\beta\right) f(x+2h) + \\ + \left(\frac{4}{3}h\alpha - \frac{14}{3}\beta\right) f(x+3h) + \left(-\frac{1}{4}h\alpha + \frac{11}{12}\beta\right) f(x+4h) \end{aligned}$$

9 Численное интегрирование

9.1 Постановка задачи квадратуры

Пусть $f \in C([a, b])$ и пусть на $[a, b]$ заданы n попарно различных точек $x_1, \dots, x_n$ (будем называть их квадратурными узлами). Основная задача численного интегрирования состоит в том, чтобы вычислить приближенно значение интеграла с помощью квадратурных сумм:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (133)$$

Самый простой метод отыскания таких сумм состоит в том, чтобы при заданных узлах x_k подобрать числа A_k так, чтобы формула (133) выполнялось для степеней $h_m(x) = x^m$, $m = 0, \dots, n-1$. Это равносильно тому, что формула (133) дает точные значения интегралов от многочленов $P_{n-1}(x) = p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0$ степени $\leq n-1$. В этом случае говорят, что формула (133) точна на многочленах степени $\leq n-1$. Такой выбор A_k дает основание считать, что по формуле (133) получится хорошее приближенное значение интеграла и от других достаточно гладких функций.

Примечание. Вместо степеней можно рассматривать и другие пробные функции. Например, $h_m = e^{mx}$.

Рассмотрим сначала случай $[a, b] = [-1, 1]$. В данном случае основное условие

$$\int_{-1}^1 x^m dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^m, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (134)$$

в развернутом виде дает n линейных уравнений для определения коэффициентов A_k :

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & m = 2s+1 \\ \frac{2}{m+1} & m = 2s \end{cases}, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (135)$$

Определитель этой системы

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & x_2 & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

есть определитель Вандермонда и, как хорошо известно, вычисляется по формуле

$$W = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Таким образом, в случае различных узлов получаем $\Delta \neq 0$ и, следовательно, система (135) имеет единственное решение A_k , $k = 1, \dots, n$.

Допустим мы решили задачу квадратуры для отрезка $[-1, 1]$: при заданных квадратурных узлах $x_k \in [-1, 1]$ нашли числа A_k , при которых выполнено (134). Перейдем теперь к случаю произвольного отрезка $[a, b]$. В этом случае задача численного интегрирования сводится к уже рассмотренному заменой переменной. Действительно, пусть

$$\tilde{x} = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \quad d\tilde{x} = \frac{b-a}{2}dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \\ & = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}\right), \end{aligned}$$

то есть

$$\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}. \quad (136)$$

Эта формула также дает точные значения интегралов от произвольных многочленов $P_{n-1}(x) = p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0$ степени $\leq n-1$.

9.2 Формула Симпсона с тремя узлами квадратуры

Найдем формулу численного интегрирования по трем равноотстоящим узлам $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -A_1 + 0 + A_3 = 0 \\ A_1 + 0 + A_3 = 2/3 \end{cases}$$

Отсюда находим $A_1 = A_3 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{4}{3}$. Итак,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1)) \quad (137)$$

Для произвольного отрезка $[a, b]$ отсюда и по формуле (136) получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (138)$$

Это равенство называется формулой Симпсона (с тремя узлами).

Погрешность формулы Симпсона. По формуле (138) имеем

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0-h) + 4f(x_0) + f(x_0+h)). \quad (139)$$

Рассмотрим погрешность

$$\delta(h) := \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx - \frac{h}{3}(f(x_0-h) + 4f(x_0) + f(x_0+h))$$

как функцию от h . Найдем производные (проверить):

$$\delta' = \frac{2}{3}f(x_0+h) + \frac{2}{3}f(x_0-h) - \frac{4}{3}f(x_0) - \frac{h}{3}(f'(x_0+h) - f'(x_0-h)),$$

$$\delta'' = \frac{1}{3}f'(x_0+h) - \frac{1}{3}f'(x_0-h) - \frac{h}{3}(f''(x_0+h) + f''(x_0-h)),$$

$$\delta''' = -\frac{h}{3}(f'''(x_0+h) - f'''(x_0-h)) = -\frac{2h^2}{3}f'''(c), \quad c \in (x_0-h, x_0+h).$$

Отсюда с учетом того, что $\delta(0) = \delta'(0) = \delta''(0) = 0$ получим

$$|\delta''(h)| \leq \left| \delta''(0) + \int_0^h \frac{2t^2}{3} f'''(c) dt \right| \leq M_4 \frac{2h^3}{9},$$

$$|\delta'(h)| \leq \left| \delta'(0) + \int_0^h M_4 \frac{2t^3}{9} dt \right| \leq M_4 \frac{h^4}{18},$$

$$|\delta(h)| \leq \left| \delta(0) + \int_0^h M_4 \frac{t^4}{18} dt \right| \leq M_4 \frac{h^5}{90}.$$

9.3 Комбинированная формула Симпсона со многими узлами квадратуры

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ равных сегментов длины h точками x_k :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{2n} = b,$$

$$\text{где} \quad x_k = a + h k, \quad h = \frac{b-a}{2n}, \quad k = 0, \dots, 2n$$

Введем обозначение $y_k = f(x_k)$. На каждой паре отрезков $[x_{2m-2}, x_{2m-1}] \cup [x_{2m-1}, x_{2m}]$, $m = 1, 2, \dots, n$, применим формулу (139)

$$\int_{x_{2m-1}-h}^{x_{2m-1}+h} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \quad (140)$$

а затем просуммируем равенства (140). Получим формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) \right). \quad (141)$$

Ее погрешность оценивается величиной

$$r = n \cdot M_4 \frac{h^5}{90} = nh \cdot M_4 \frac{h^4}{90} = \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

9.4 Метод Чебышева

Этот метод численного интегрирования (квадратуры) в отличие от предыдущего метода состоит в том, чтобы при заданных числах $A = A_k = 2/n$ подобрать узлы x_k так, чтобы формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (142)$$

была точной на многочленах степени n . В этой задаче имеется n параметров $x_1, \dots, x_n$, подлежащих определению. Вновь, подставляя в (142) пробные степени получим систему из $n+1$ уравнений (в которой первое уравнение выполняется автоматически, при любых x_k):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A + A + \dots + A & = & 2, \quad A = 2/n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n & = & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 & = & \frac{n}{3} \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 & = & 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 & = & \frac{n}{5} \\ \dots + \dots + \dots + \dots & = & \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n & = & \frac{n(1+(-1)^n)}{2(n+1)} \end{array} \right.$$

Основная трудность при решении системы — в ее нелинейности. Но существует способ сведения данной системы к некоторому алгебраическому уравнению порядка n . Еще один недостаток состоит в том, что при $n \geq 10$ и $n = 8$ эта система имеет комплексные решения. Здесь мы не останавлива-

емя на подробностях, приведем лишь несколько приближенных решений $\{x_1, \dots, x_n\}$ при разных n :

$$\{-0.7946545, 0.7946545, 0.1875925, -0.1875925\}$$

$$\{0.8324975, -0.8324975, 0.3745414, -0.3745414, 0\}$$

$$\{0.8662468, -0.8662468, 0.4225187, -0.4225187, 0.2666354, -0.2666354\}$$

9.5 Метод Гаусса

Этот метод численного интегрирования состоит в том, чтобы подобрать и числа A_k , и узлы x_k так, чтобы формула (133) была точной на многочленах степени $2n - 1$. Он в определенном смысле объединяет указанные выше методы. Теперь имеется $2n$ параметров $A_1, \dots, A_n, x_1, \dots, x_n$, подлежащих определению.

Решение. Сначала рассмотрим случай отрезка $[-1, 1]$ и запишем систему уравнений

$$\int_{-1}^1 x^m dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^m, \quad m = 0, \dots, 2n - 1. \quad (143)$$

Имеем $2n - 1$ нелинейных уравнений для определения указанных параметров. Непосредственное решение этой нелинейной системы весьма затруднительно. Гаусс предложил следующий метод ее решения. Рассмотрим многочлены *Лежандра*

$$L_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

Например,

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 2x, \quad L_2 = 4(3x^2 - 1), \quad L_3 = 4x(5x^2 - 3).$$

Эти многочлены обладают следующими важными свойствами.

1. Многочлен L_n ортогонален на отрезке $[-1, 1]$ многочленам степени

$k < n$, то есть

$$\int_{-1}^1 x^k L_n(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (144)$$

Это легко проверяется интегрированием по частям.

2. Многочлен L_n имеет ровно n попарно различных действительных корней x_k , $k = 1, \dots, n$, на интервале $(-1, 1)$. Возьмем их в качестве квадратурных узлов. Рассмотрим в системе (143) только первые n уравнений, то есть при $m = 0, \dots, n-1$. Решим эту подсистему относительно неизвестных параметров $A_1, \dots, A_n$ (как это делалось в системе (135)). Покажем, что тогда будут выполнены и оставшиеся равенства в (143) при $m = n, \dots, 2n-1$.

Действительно, пусть $m \geq n$ (и $m \leq 2n-1$). Представим x^m в виде

$$x^m = C_p(x)L_n(x) + R_q(x),$$

где $C_p(x)$ — целая часть, а $R_q(x)$ — остаток при делении $x^m/L_n(x)$. Эти многочлены удовлетворяют следующему свойству. И степень p многочлена $C_p(x)$ и степень q многочлена $R_q(x)$ меньше степени многочлена L_n , то есть обе степени $< n$. Первое следует из того, что $p+n = m \leq 2n-1$, $p \leq n-1$, а второе — из того, что степень остатка всегда меньше степени делителя. Отсюда, учитывая (144) и свойство чисел A_k , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^m dx &= \int_{-1}^1 C_p(x)L_n(x) dx + \int_{-1}^1 R_q(x) dx = \\ &= 0 + \sum_{k=1}^n A_k R_q(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k C_p(x_k)L_n(x_k) + \sum_{k=1}^n A_k R_q(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k (C_p(x_k)L_n(x_k) + R_q(x_k)) = \sum_{k=1}^n A_k x_k^m \end{aligned}$$

при $m = n, \dots, 2n-1$. Мы воспользовались также тем, что $L_n(x_k) = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n A_k C_p(x_k)L_n(x_k) = 0.$$

Что и требовалось. Подведем итог.

Алгоритм построения формулы Гаусса с n узлами:

1) находим многочлен Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)};$$

2) находим его (попарно различные действительные, лежащие на интервале $(-1, 1)$) корни x_k , $k = 1, \dots, n$;

3) составляем систему уравнений (134):

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^m = \int_{-1}^1 x^m dx = \frac{1 + (-1)^m}{m+1}, \quad m = 0, \dots, n-1,$$

откуда находим коэффициенты A_k , $k = 1, \dots, n$;

4) получаем квадратурную формулу для отрезка $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

точную на многочленах степени $2n-1$.

5) Переходим к общему случаю отрезка $[a, b]$ по формуле (136).

Без доказательства приведем оценку погрешности.

$$\Delta_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{((2n)!)^3 (2n+1)} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

Приведем значения при $n = 1, 2, 3, 4$ выражения

$$\left\{ \frac{(n!)^4}{((2n)!)^3 (2n+1)} \right\} = \left\{ \frac{1}{24}; \frac{1}{4320}; \frac{1}{2016000}; \frac{1}{1778112000} \right\}.$$

Пример. Получим квадратурную формулу Гаусса численного интегрирования с тремя узлами.

Решаем уравнение $L_3(x) = 0$, то есть $x(5x^2 - 3) = 0$. Находим квадратурные узлы $x_1 = -\sqrt{3/5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3/5}$. Решая систему (134), находим корни $A_1 = A_3 = 5/9$, $A_2 = 8/9$. В результате имеем

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} \left(5f \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + 8f(0) + 5f \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right).$$

Для произвольного отрезка $[a, b]$ по формуле (136) имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} &\approx \\ &\approx \frac{b-a}{18} \left(5f \left(-\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{b+a}{2} \right) + 8f \left(\frac{b+a}{2} \right) + 5f \left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{b+a}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (145)$$

Приведем еще формулу Гаусса при $n = 4$ для отрезка $[-1, 1]$ (переход к произвольному отрезку $[a, b]$ совершается по формуле (136)).

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx 0.3478548451 f(-0.8611363116) + 0.6521451549 f(-0.3399810436) + \\ &+ 0.6521451549 f(0.3399810436) + 0.3478548451 f(0.8611363116). \end{aligned}$$

10 Дифференциальные уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием (задача Коши)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (146)$$

Заметим, что из (146) можно получить все производные решения $y = y(x)$.

То есть, исходя из равенства

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (147)$$

получаем

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))f(x, y(x)), \quad (148)$$

$$y''' = f''_{xx} + f''_{xy}f + (f'_{xy} + f'_{yy}f)f + f'_y(f'_x + f'_y f), \quad (149)$$

и так далее.

Рассмотрим некоторые методы приближенного решения задачи (146).

10.1 Метод Эйлера

Метод основан на формуле Тейлора и на равенстве (147):

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + r_1(x) = y(x) + f(x, y(x))h + r_1(x),$$

где

$$r_1(x) = \frac{1}{2}y''(c)h^2, \quad c \in (x, x+h).$$

Полагая $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots$, $y(x_k) = y_k$ и отбрасывая остаточный член r_1 , получаем расчетную формулу для нахождения приближенного решения:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h, \quad h = x_{k+1} - x_k, \quad y_0 = y(x_0). \quad (150)$$

Локальная точность формулы (150) имеет порядок h^2 . Это означает, что при точном значении y_k следующее значение y_{k+1} решения вычисляется приближенно с абсолютной погрешностью, имеющей порядок h^2 при малых h .

10.2 Уточненный метод Эйлера

Если функция $f(x, y)$ задана в виде аналитического выражения и мы можем вычислить значение ее частных производных первого порядка, то формулу (150) можно уточнить, с помощью равенства (148). Именно, применив формулу Тейлора, получим

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + r_2(x), \quad r_2(x) = \frac{1}{6}y'''(c)h^3, \quad c \in (x, x+h).$$

Отсюда и из (147), (148) находим

$$y(x+h) = y(x) + f(x, y(x))h + \frac{1}{2} (f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))f(x, y(x))) h^2 + r_2(x). \quad (151)$$

Отсюда получаем расчетную формулу для приближенного решения

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h + \frac{1}{2} (f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k)) h^2. \quad (152)$$

Локальная точность формулы (152) имеет порядок h^3 . По такой схеме можно уточнять формулу Эйлера и далее, добавляя новые слагаемые в формуле

Тейлора и используя формулы для производных функции y более высоких порядков (типа (149)).

10.3 Метод Рунге-Кутты

Формула (152) имеет тот недостаток, что не всегда имеется возможность вычислить частные производные от функции $f(x, y)$, например, если она задана табличными значениями (или же эти производные имеют очень громоздкий вид). Поэтому аппроксимируем входящее в (151) выражение

$$F(h) = f(x, y)h + \frac{1}{2} (f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y)) h^2 \quad (153)$$

линейной комбинацией

$$G(h) = h(\alpha f(x, y) + \beta f(x + \gamma h, y + \sigma h)),$$

не содержащей частных производных. Для этого Величины $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ подберем так, чтобы $|F(h) - G(h)| = O(h^3)$. Тогда локальная точность полученной формулы будет по-прежнему иметь порядок h^3 .

В дальнейших выкладках будем считать, что x и y — независимые переменные (не имеющие отношения к решению $y = y(x)$). По формуле Тейлора имеем (с точностью до величин порядка h^3):

$$\begin{aligned} G(h) &\approx h(\alpha f(x, y) + \beta (f(x, y) + f'_x(x, y)\gamma h + f'_y(x, y)\sigma h)) = \\ &= (\alpha + \beta)f(x, y)h + \beta(\gamma f'_x(x, y) + \sigma f'_y(x, y))h^2. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (153), получаем равенство:

$$\begin{aligned} f(x, y)h + \frac{1}{2} (f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y))h^2 = \\ = (\alpha + \beta)f(x, y)h + \beta(\gamma f'_x(x, y) + \sigma f'_y(x, y))h^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\alpha + \beta = 1, \quad \beta\gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta\sigma = \frac{f(x, y)}{2},$$

$$\alpha = 1 - \beta, \quad \gamma = \frac{1}{2\beta}, \quad \sigma = \frac{f(x, y)}{2\beta}.$$

В результате вместо (152) получаем следующую расчетную формулу:

$$y_{k+1} = y_k + h \left((1 - \beta)f(x_k, y_k) + \beta f \left(x_k + \frac{h}{2\beta}, y_k + f(x_k, y_k) \frac{h}{2\beta} \right) \right). \quad (154)$$

Обычно полагают $\beta = \frac{1}{2}$. Тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + f(x_k, y_k)h)]. \quad (155)$$

При расчетах можно применять следующую последовательность вычислений:

$$v_1 = f(x_k, y_k), \quad v_2 = f(x_k + h, y_k + v_1 h), \quad v_3 = v_1 + v_2, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} v_3. \quad (156)$$

Как отмечалось, локальная точность формулы (155) имеет порядок h^3 . Существуют более точные схемы того же типа. Они приводятся в справочниках. Приведем пример схемы, локальная точность которой имеет 4-й порядок.

$$v_1 = f(x_k, y_k);$$

$$v_2 = f(x_k + h/2, y_k + v_1 h/2);$$

$$v_3 = f(x_k + h/2, y_k + v_2 h/2);$$

$$v_4 = f(x_k + h, y_k + v_3 h);$$

$$y_{k+1} = y_k + (h/6)(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4).$$

Все эти схемы называется одношаговыми, поскольку при вычислении y_{k+1} использует значение y_k только в одной предыдущей точке.

10.4 Система дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u' = F(x, u, v) \\ v' = G(x, u, v) \end{cases}, \quad u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0, \quad (157)$$

относительно неизвестных $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Если исходить из приближенных формул

$$u(x+h) \approx u(x) + u'(x)h, \quad v(x+h) \approx v(x) + v'(x)h,$$

то, по аналогии с предыдущим, получим расчетную формулу Эйлера для задачи (157):

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + F^{(k)} \cdot h \\ v_{k+1} = v_k + G^{(k)} \cdot h \end{cases}, \quad F^{(k)} = F(x_k, u_k, v_k), \quad G^{(k)} = G(x_k, u_k, v_k), \quad (158)$$

где $x_k = x_0 + k h$, $u_k = u(x_k)$, $v_k = v(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$. Если исходить из более точных формул

$$u(x+h) \approx u(x) + u'(x)h + \frac{1}{2}u''(x)h^2 = u(x) + F h + \frac{1}{2}(F_x + F_u F + F_v G) h^2,$$

$$v(x+h) \approx v(x) + v'(x)h + \frac{1}{2}v''(x)h^2 = v(x) + G h + \frac{1}{2}(G_x + G_u F + G_v G) h^2,$$

то получим уточненную формулу Эйлера для задачи (157):

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + F^{(k)} \cdot h + \frac{1}{2} \left(F_x^{(k)} + F_u^{(k)} F^{(k)} + F_v^{(k)} G^{(k)} \right) h^2 \\ v_{k+1} = v_k + G^{(k)} \cdot h + \frac{1}{2} \left(G_x^{(k)} + G_u^{(k)} F^{(k)} + G_v^{(k)} G^{(k)} \right) h^2 \end{cases}, \quad (159)$$

Здесь верхний индекс (k) означает, что соответствующая функция вычислена в точке (x_k, u_k, v_k) , где $x_k = x_0 + k h$, $u_k = u(x_k)$, $v_k = v(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$

К системе вида (157) сводится уравнение второго порядка вида

$$y'' = G(x, y, y'), \quad y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Достаточно ввести обозначения $y = u$, $y' = v$, тогда это уравнение можно

переписать в виде системы

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = G(x, u, v) \end{cases}, \quad u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0.$$

Согласно (159) приближенное решение такой системы ищется по формулам

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + v_k \cdot h + \frac{1}{2} G^{(k)} h^2 \\ v_{k+1} = v_k + G^{(k)} \cdot h + \frac{1}{2} \left(G_x^{(k)} + G_u^{(k)} v_k + G_v^{(k)} G^{(k)} \right) h^2 \end{cases} \quad (160)$$

Пример. Решить приближенно задачу Коши

$$y y'' - y'^2 = y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

В этом случае при $y = u$, $y' = v$ уравнение записывается в виде системы

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u + \frac{v^2}{u} \end{cases}, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Имеем $G(x, u, v) = u + \frac{v^2}{u}$ и (160) принимает вид

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + v_k \cdot h + \frac{1}{2} \left(u_k + \frac{v_k^2}{u_k} \right) h^2 \\ v_{k+1} = v_k + \left(u_k + \frac{v_k^2}{u_k} \right) \cdot h + \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{v_k^2}{u_k^2} \right) v_k + 2v_k \right) h^2 \end{cases}$$

Вычисления с шагом $h = 0.01$ дают приближенное решение на отрезке $[0, 1]$ с погрешностью $\leq 10^{-4}$ (точное решение $y(x) = e^{x^2/2}$).

Еще более частным случаем является часто возникающее на практике линейное уравнение 2-го порядка, то есть задача

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \quad y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = v_0, \quad (161)$$

где $A(x) \neq 0$. Оно записывается в виде

$$\begin{cases} u' = Mu + Nv \\ v' = Ku + Lv \end{cases}, \quad u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0.$$

где $M = 0$, $N = 1$, $K = -C/A$, $L = -B/A$ — заданные функции. Для этой системы можно применять формулы (158), (159).

Задачи.

$$\begin{aligned}
y'' y' + \frac{27}{16} y x e^{3/2 x} &= \frac{3}{4} e^{3x}, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 1 & (y &= \\
&& && && & (-1/2 x + 1) e^{3/2 x}); \\
y'' y' + 27 y x e^{3x} &= 6 e^{6x}, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 2 & (y &= \\
&& && && & (-x + 1) e^{3x}); \\
y'' y' + 27 y x e^{-3x} &= y(0) = 1, & y'(0) &= -2 & (y &= \\
-6 e^{-6x}, && && && & (x + 1) e^{-3x});
\end{aligned}$$

11 Элементы матричного исчисления

11.1 Связь координат векторов и операторов в разных базисах n -мерного линейного пространства L

Пусть в линейном пространстве L имеется два базиса — условно, старый и новый:

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n), \quad \tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$$

Матрица T перехода от старого к новому базису определяется соотношением

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T, \tag{162}$$

или, в развернутом виде,

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{163}$$

Каждый вектор $\mathbf{x}$ из L может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \tag{164}$$

Это равенство можно записать в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathcal{E}X = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (165)$$

В базисе $\tilde{\mathcal{E}}$ аналогичная запись имеет вид

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathcal{E}}\tilde{X} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad (166)$$

Из (165) и (166) с учетом (162) получаем

$$\mathcal{E}X = \tilde{\mathcal{E}}\tilde{X} = \mathcal{E}T\tilde{X},$$

откуда получается связь между координатами вектора $\mathbf{x}$ в различных базисах:

$$X = T \cdot \tilde{X}, \quad \tilde{X} = T^{-1} \cdot X.$$

Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ — линейный оператор из L в L . В заданном базисе он задается квадратной матрицей, которую мы также будем обозначать буквой A . Тогда

$$Y = AX, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (167)$$

С учетом предыдущего равенства в новом базисе имеем

$$Y = AX \Leftrightarrow T\tilde{Y} = AT\tilde{X} \Leftrightarrow \tilde{Y} = T^{-1}AT\tilde{X}.$$

Но в новом базисе также имеем $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$. Сравнивая это с предыдущим, находим

$$\tilde{A}\tilde{X} = T^{-1}AT\tilde{X} \Leftrightarrow \tilde{A} = T^{-1}AT. \quad (168)$$

11.2 Примеры операторов в $\mathbb{R}^3$

Оператор проектирования на плоскость. Положим $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Пусть задано уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$:

$$\sigma : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Оператор $\Pi_\sigma \mathbf{x}$ проектирования вектора $\mathbf{x} = (x, y, z)$ на плоскость σ определяется следующим образом

$$\Pi_\sigma \mathbf{x} = \mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{n}} \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} \cdot \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — какой-либо вектор, перпендикулярный к плоскости σ . При вычислениях мы воспользовались следующим свойством скалярного произведения $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = |\mathbf{x}||\mathbf{n}| \cos \varphi = |\mathbf{n}| \Pi_{\mathbf{n}} \mathbf{x}$. Выберем $\mathbf{n} = (A, B, C)$, тогда в матричной форме предыдущее перепишется так:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \frac{Ax + By + Cz}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (169)$$

Отсюда можно найти матрицу оператора Π_σ в заданном базисе:

$$\Pi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 - \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{AB}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{AC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{AB}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{BC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{AC}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{CB}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2} \end{pmatrix} \quad (170)$$

Например, матрица оператора Π_σ проектирования на плоскость $x = y$ имеет вид

$$\Pi_{x=y} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оператор проектирования на прямую. Пусть задано уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$:

$$L : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

Здесь (α, β, γ) – направляющий вектор прямой, имеющий единичную длину, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Плоскость σ , перпендикулярная к прямой L , имеет уравнение

$$\sigma : \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + D = 0.$$

Оператор π_L проектирования векторов $\mathbf{x} = (x, y, z)$ на прямую L определяется следующим образом

$$\pi_L \mathbf{x} = \mathbf{x} - \Pi_\sigma \mathbf{x}.$$

Отсюда с учетом (170) получаем матрицу оператора π_L .

$$\pi_L = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \gamma\beta & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (171)$$

Например, матрица оператора π_L проектирования на прямую $x = -y = z$ имеет вид

$$\pi_{x=-y=z} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (172)$$

11.3 Нормы операторов в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

Будем рассматривать евклидово конечномерное пространство $L = L_n$ с фиксированным ортонормированным базисом $\mathcal{E}$. Норма вектора $\mathbf{x}$ определяется как

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Норма оператора A определяется как

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \in L} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|},$$

или, что то же самое,

$$\|A\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|.$$

В данном базисе $\mathcal{E}$, используя (167), можно записать

$$\|A\|^2 = \max_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2$$

Случай $n = 2$. Положим $x = x_1$, $y = x_2$. Тогда

$$\|A\|^2 = \max_{x^2 + y^2 = 1} ((a_{11}x + a_{12}y)^2 + (a_{21}x + a_{22}y)^2).$$

Найдем этот условный максимум. Для этого докажем лемму.

Лемма 1. *Необходимое условие для точки условного экстремума*

$$f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

состоит в том, что

$$f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x = 0. \quad (173)$$

Действительно, пусть условие $\varphi(x, y) = 0$ записано в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$. Рассмотрим функцию $F(t) = f(x(t), y(t))$. В точке экстремума $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ имеем $F'(t_0) = 0$, то есть

$$F'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0)y'(t_0) = 0, \quad (\text{grad } F(x_0, y_0), \tau_0) = 0, \quad (174)$$

где τ_0 — вектор касательной к кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$. Но вектор τ_0 перпендикулярен также и вектору $\text{grad } \varphi(x_0, y_0) = (\varphi'_x(x_0, y_0), \varphi'_y(x_0, y_0))$ и, значит, параллелен вектору $\sigma_0 = (\varphi'_y(x_0, y_0), -\varphi'_x(x_0, y_0))$. Следовательно, (174) выполнено при замене τ_0 на σ_0 .

В рассматриваемом случае (173) имеет вид

$$\begin{aligned} & (a_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{21}(a_{21}x + a_{22}y))y - \\ & - (a_{12}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{22}(a_{21}x + a_{22}y))x = 0, \end{aligned}$$

что равносильно уравнению

$$-(a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21}) + (a_{11}^2 - a_{12}^2 + a_{21}^2 - a_{22}^2)t + (a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21})t^2 = 0, \quad t = y/x.$$

Это уравнение всегда имеет действительные решения t , поскольку его дискриминант положителен, откуда с учетом равенства $x^2 + y^2 = 1$ находятся точки минимума и максимума $\|A\|$.

Случай $n = 3$. Рассмотрим предварительно следующую трехмерную задачу на условный экстремум:

$$f(x, y, z) \rightarrow \text{extr}, \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad (175)$$

где функции f , φ считаются гладкими. Будем предполагать также, что всюду

$$\text{grad } f \neq 0, \quad \text{grad } \varphi \neq 0.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \gamma, \lambda) = f(x, y, \gamma) + \lambda \varphi(x, y, z), \quad (176)$$

где λ – вспомогательная переменная.

Лемма 1. (Лагранж). *Необходимое условие того, что точка $M = (x_0, y_0, z_0)$ является точкой экстремума (максимума или минимума) в задаче (175)*

$$f(x, y, z) \rightarrow \text{extr}, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

состоит в том, что существует число λ , для которого выполнены условия

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (177)$$

где все производные вычислены в точке M .

Отметим, что (177) можно понимать так: в точке M векторы

$$\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}, \quad \text{grad } \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \quad (178)$$

параллельны, т.е. при некотором λ имеем

$$\text{grad } f + \lambda \text{ grad } \varphi = 0. \quad (179)$$

Доказательство. Приведем наглядное геометрическое доказательство. Введем в рассмотрение поверхности уровня

$$S_f : f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0), \quad S_\varphi : \varphi(x, y, z) = 0.$$

Пусть M является точкой экстремума задачи (175), для определенности бу-

дем считать, что M — точка максимума. Достаточно малую ε -окрестность

$$V_\varepsilon := \{(x, y, z) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\}$$

точки M поверхность S_f разбивает на две области D^+ и D^- , в первой из которых $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) > 0$, а во второй $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) < 0$.

Если бы векторы градиентов (178) не были параллельными в точке M , то поверхности уровня S_f и S_φ , рассматриваемые в малой ε -окрестности точки M , пересекались бы под некоторым отличным от нуля углом (как и их две касательные плоскости). Но тогда в пересечение $d^+ = V_\varepsilon \cap D^+$ указанной ε -окрестности и области D^+ попадет часть поверхности S_φ , т.е.

$$S_\varphi^+ = d^+ \cap S_\varphi \neq \emptyset.$$

Но при $(x, y, z) \in S_\varphi^+$ имеем $f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)$ и $\varphi(x, y, z) = 0$, так что в точке M нет максимума. Лемма 1 доказана.

Примечание. Аналогично можно найти необходимое условие условного экстремума в задаче:

$$f(x, y, z) \rightarrow \text{extr}, \quad \varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad (180)$$

причем функции f , φ_1 , φ_2 считаются гладкими, а векторы $\text{grad } \varphi_1$, $\text{grad } \varphi_2$ — линейно независимыми. Положим

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z).$$

Лемма 2 (Лагранж). *Необходимое условие того, что точка $M = (x_0, y_0, z_0)$ является точкой экстремума (максимума или минимума) в задаче (180) состоит в том, что существуют числа λ_1 и λ_2 , для которых выполнены условия*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \varphi_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \varphi_2(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

где все производные вычислены в точке M .

Геометрический смысл леммы 2 состоит в том, что в точке M вектор $\text{grad } f$ линейно выражается через векторы $\text{grad } \varphi_1$ и $\text{grad } \varphi_2$, т.е. при

некоторых λ_1 и λ_2 имеем

$$\text{grad } f + \lambda_1 \text{ grad } \varphi_1 + \lambda_2 \text{ grad } \varphi_2 = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 и мы его не приводим.

Вычисление нормы в $\mathbb{R}^3$. Метод Лагранжа (лемму 1) применим для определения нормы оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае требуется найти условный максимум для выражения

$$\begin{aligned} \|A\|^2 = f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + \\ + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2, \end{aligned} \quad (181)$$

то есть найти максимум функции

$$f(x, y, z) \text{ при условии } \varphi := x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (182)$$

При решении такой задачи можно придерживаться следующего плана. Составить функцию Лагранжа (176) и линейную относительно переменных (x, y, z) систему

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Затем найти все $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, 3$), при которых ее определитель равен нулю. Матрица указанной системы симметрична поэтому все корни действительны. Для каждого такого λ найти ненулевые решения (их бесконечно много). Подставить эти решения в уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и выделить единственное решение $X_k = (x(\lambda_k), y(\lambda_k), z(\lambda_k))$ (для каждого λ_k , $k = 1, 2, 3$). Наконец, подставить эти решения X_k в выражение (181) и выбрать наибольшее значение среди $V(X_k)$. Например, для матрицы (172) таким способом можно показать, что ее норма равна 1. Это соответствует геометрической интерпретации — норма равна максимальной длине проек-

ции единичного вектора на прямую.

Задачи. Найти нормы операторов, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ (приближенный): 2.8058, 3.4142, 1.8477, 2.414.

11.4 Вычисление собственных значений и векторов операторов (матриц)

Для матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ большого размера поиск собственных значений и векторов представляет значительную трудность. Непосредственное составление характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0, \quad \Leftrightarrow \quad P(\lambda) := \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0, \quad (183)$$

путем раскрытия определителя $|A - \lambda E|$ требует порядка 2^n вычислений определителей различных порядков от 2 до n . Поэтому разработано немало методов, позволяющих обходить эту трудоемкую процедуру.

11.4.1 Метод Крылова построения характеристического многочлена

Этот метод опирается на известное тождество Гамильтона-Кели

$$P(A) := A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0E = 0, \quad (184)$$

то есть матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Пусть $X^{(0)}$ — ненулевой пробный вектор $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^*$. Подействуем на него матрицей $P(A)$, тогда по (184) имеем $P(A)X^{(0)} = 0$, или, в развернутом виде,

$$P(A)X^{(0)} = A^nX^{(0)} + p_{n-1}A^{n-1}X^{(0)} + \dots + p_1AX^{(0)} + p_0X^{(0)} = 0. \quad (185)$$

Введем обозначение

$$X^{(k)} = A^k X^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (186)$$

Тогда (185) перепишется так

$$X^{(n)} + p_{n-1}X^{(n-1)} + \dots + p_1X^{(1)} + p_0X^{(0)} = 0,$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_n^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{n-1}x_1^{(n-1)} \\ p_{n-1}x_2^{(n-1)} \\ \dots \\ p_{n-1}x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} p_1x_1^{(1)} \\ p_1x_2^{(1)} \\ \dots \\ p_1x_n^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_0x_1^{(0)} \\ p_0x_2^{(0)} \\ \dots \\ p_0x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получена система линейных уравнений для определения коэффициентов p_k характеристического уравнения (183):

$$\begin{cases} x_1^{(n)} + p_{n-1}x_1^{(n-1)} + \dots + p_1x_1^{(1)} + p_0x_1^{(0)} = 0 \\ x_2^{(n)} + p_{n-1}x_2^{(n-1)} + \dots + p_1x_2^{(1)} + p_0x_2^{(0)} = 0 \\ \vdots \\ x_n^{(n)} + p_{n-1}x_n^{(n-1)} + \dots + p_1x_n^{(1)} + p_0x_n^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (187)$$

Заметим, что координаты векторов $X^{(k)} = A X^{(k-1)}$ получаются по рекуррентным формулам

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (188)$$

Заметим еще, что в качестве пробного вектора нельзя брать собственный вектор, поскольку тогда определитель системы (187) будет равен нулю.

Найдя характеристический многочлен, далее вычисляют собственные значения. Для этого существуют различные численные методы решения алгебраических уравнений.

Пример. Методом Крылова построим характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем степени

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Берем пробный вектор $X^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^*$, тогда

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Составляем систему (187):

$$\begin{cases} 3p_3 + 2p_2 + p_1 + p_0 + 4 = 0 \\ p_3 + p_2 + p_1 = 0 \\ 2p_3 + p_2 + 3 = 0 \\ p_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Ее решение: $\{p_0 = -1, p_1 = 2, p_2 = -1, p_3 = -1\}$ и, значит, характеристический многочлен равен $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 1$.

11.4.2 Метод неопределенных коэффициентов построения характеристического многочлена

Приведем еще один способ определения коэффициентов характеристического многочлена

$$P(\lambda) := \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = (-1)^n |A - \lambda E|. \quad (189)$$

Рассмотрим для определенности случай $n = 3$. Подставим в равенство (189) несколько значений числа λ , например, $\lambda = 0, \pm 1$. Тогда получим 3 линейных уравнения для определения неизвестных p_k :

$$p_2 k^2 + p_1 k + p_0 = -|A - kE| - k^3, \quad k = 0, \pm 1 \quad (190)$$

11.4.3 Метод Крылова нахождения собственных векторов

Пусть известен характеристический многочлен $P(\lambda)$ и его корни. Будем считать, что все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны. Найдем для определенности собственный вектор X_1 , соответствующий первому собственному значению λ_1 . Рассмотрим многочлен

$$Q(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + q_1\lambda + q_0,$$

и соответствующий ему матричный многочлен

$$Q(A) = A^{n-1} + q_{n-2}A^{n-2} + q_1A + q_0E.$$

Отметим, что $Q(\lambda_k) = 0$ при $k = 2, \dots, n$ и $Q(\lambda_1) \neq 0$. Пусть X — какой-нибудь пробный вектор. Напишем его разложение по собственным векторам

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n.$$

Тогда

$$A X = \lambda_1 \alpha_1 X_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n X_n, \quad A^2 X = \lambda_1^2 \alpha_1 X_1 + \dots + \lambda_n^2 \alpha_n X_n,$$

и, вообще,

$$A^k X = \lambda_1^k \alpha_1 X_1 + \dots + \lambda_n^k \alpha_n X_n.$$

Следовательно, в силу равенств $Q(\lambda_k) = 0$ при $k = 2, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} Q(A) \cdot X &= \lambda_1^{n-1} \alpha_1 X_1 + \lambda_2^{n-1} \alpha_2 X_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} \alpha_n X_n + \\ &+ q_{n-2} (\lambda_1^{n-2} \alpha_1 X_1 + \lambda_2^{n-2} \alpha_2 X_2 + \dots + \lambda_n^{n-2} \alpha_n X_n) + \\ &+ \dots + q_1 (\lambda_1 \alpha_1 X_1 + \lambda_2 \alpha_2 X_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n X_n) + \\ &+ q_0 (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n) = \\ &= Q(\lambda_1) \alpha_1 X_1 + Q(\lambda_2) \alpha_2 X_2 + \dots + Q(\lambda_n) \alpha_n X_n = Q(\lambda_1) \alpha_1 X_1. \end{aligned}$$

Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$Q(\lambda_1) \alpha_1 X_1 = Q(A) \cdot X$$

и, следовательно, $Q(A) \cdot X$ является искомым собственным вектором (поскольку отличается от X_1 ненулевым числовым множителем $Q(\lambda_1) \alpha_1$).

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \quad (191)$$

Решение. Сначала находим собственные числа. Имеем характеристическое уравнение $P(\lambda) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 26\lambda - 16 = 0$ и его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$,

$$\lambda_3 = 8.$$

Найдем собственный вектор X_1 , соответствующий первому собственному значению $\lambda_1 = 1$. Вычислим

$$Q_1(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \frac{\lambda^3 - 11\lambda^2 + 26\lambda - 16}{\lambda - 1} = \lambda^2 - 10\lambda + 16.$$

Найдем матрицу $Q_1(A)$:

$$\begin{aligned} Q_1(A) &= A^2 - 10A + 16E = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^2 - 10 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В качестве пробного вектора возьмем $X = (1, 0, 0)^*$ (в результате умножения $Q_1(A) \cdot X$ должен получиться ненулевой вектор). Тогда получим первый собственный вектор

$$X_1 = Q_1(A) \cdot X = (5, -2, -2)^*.$$

Аналогичные найдем собственный вектор X_2 , соответствующий второму собственному значению $\lambda_2 = 2$.

$$Q_2(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \frac{\lambda^3 - 11\lambda^2 + 26\lambda - 16}{\lambda - 2} = \lambda^2 - 9\lambda + 8;$$

$$Q_2(A) = A^2 - 9A + 8E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

В качестве пробного вектора теперь возьмем $X = (0, 0, 1)^*$ (чтобы в результате умножения $Q_2(A) \cdot X$ получился ненулевой вектор). Тогда получим второй собственный вектор

$$X_2 = Q_2(A) \cdot X = (3, 3, -3)^*.$$

Вычисление третьего собственного вектора проводится совершенно аналогично; в результате получим $X_3 = 12 \cdot (1, 1, 1)^*$ (если взять в качестве проб-

ного вектора $X = (1, 0, 0)^*$).

11.4.4 Метод итераций нахождения собственных значений и векторов

Опишем этот метод в случае $n = 3$. Пусть требуется найти собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Собственные вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$ и значение λ удовлетворяют матричному уравнению $(A - \lambda E) \cdot X = 0$. В развернутом виде оно имеет вид системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Поскольку собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, то одну из координат, скажем x_3 , можно считать равной единице (при условии, что эта координата отлична от нуля). При $x_3 = 1$ из системы получаем

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}) \\ x_2 = \frac{1}{\lambda} (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}) \\ \lambda = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}. \end{cases}$$

Это и есть расчетная формула для итераций. То есть при заданных начальных значениях вектора $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \lambda^{(0)})$ шаг за шагом находятся значе-

ния новых векторов $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})$ по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}} (a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}} (a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}) \\ \lambda^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}. \end{cases}$$

Пример. Возьмем матрицу (191) и начальные условия $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (0, 0, 1)$. Тогда $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \lambda^{(1)}) = (3, 3, 5)$, а на 20 шаге получаем приближенно верные значения $(x_1^{(20)}, x_2^{(20)}, \lambda^{(20)}) \approx (1, 1, 8)$.

Однако у этого метода имеются серьезные недостатки. При неудачном выборе начальных значений процесс может расходиться, например, если заменить в матрице (191) главную диагональ на нулевую, то процесс с предыдущими значениями расходится, хотя полученная матрица имеет три различных вещественных собственных значения.

Кроме того, сходимость процесса может быть очень медленной. Например, для матрицы (172) при тех же начальных значениях лишь на 50 шаге получаем приемлемое приближение $(x_1^{(50)}, x_2^{(50)}, \lambda^{(50)}) \approx (1, -1, 1)$.

12 Допонительные методы аппроксимаций

12.1 Аппроксимация h -суммами

Пусть $h(z)$ – некоторая фиксированная аналитическая в окрестности начала функция, тогда h -суммой называется функция

$$H_n(z) = H_n(\{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (192)$$

где $\{\lambda_k\}$ – некоторые комплексные числа. Функцию h будем называть базисной.

Пусть ее разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots,$$

тогда сумму (192) можно записать в виде

$$H_n(z) = h_0 S_1 + h_1 S_2 z + h_2 S_3 z^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} h_m S_{m+1} z^m, \quad (193)$$

где S_m — степенные суммы чисел λ_k :

$$S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (194)$$

Для удобства будем считать, что все $h_k \neq 0$. Пусть в окрестности начала задана своим рядом Маклорена аналитическая функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots \quad (195)$$

Для того, чтобы аппроксимировать эту функцию h -суммой приравняем первые n коэффициентов разложений (193) и (195). Получим систему уравнений

$$h_m S_{m+1} = f_m, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Отсюда с учетом $h_m \neq 0$ получаем условия на степенные суммы

$$S_m = \frac{f_m}{h_m}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (196)$$

Наша цель — из (196) найти неизвестные λ_k . Для этого используем известные рекуррентные формулы Ньютона, выражающие элементарные симметрические многочлены σ_m вида (мы их уже рассматривали в (4))

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \dots, n,$$

через степенные суммы (194). Приведем эти формулы

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_m = (-1)^{m+1} m^{-1} \left(S_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j S_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = 2, \dots, n. \quad (197)$$

Например, по формулам (197) находим

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S_1^2, \quad \sigma_3 = \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{2} S_2 S_1 + \frac{1}{6} S_1^3,$$

$$\sigma_4 = -\frac{1}{4}S_4 + \frac{1}{3}S_3S_1 - \frac{1}{4}S_2S_1^2 + \frac{1}{24}S_1^4 + \frac{1}{8}S_2^2. \quad (198)$$

Теперь, зная многочлены σ_m , по теореме Виета мы можем составить алгебраическое уравнение

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n\sigma_n = 0, \quad (199)$$

корнями которого и являются искомые λ_k . Этот многочлен будем называть производящим многочленом.

Пример. Пусть $S_k = k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Найдем производящий многочлен P_4 . Сначала по формулам (198) находим σ_k , а затем строим многочлен:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{24}$$

Пример. Зная, что при $n = 4$ имеем $S_k = 5^k$, найти числа λ_k . Вычисляем σ_m и составляем производящий многочлен $P_4(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3$, откуда $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Пример. Зная, что при $n = 4$ имеем $\{S_k\} = \{0, 10, 0, 34\}$, найти числа λ_k . Как и в предыдущем примере составляем производящий многочлен $P_4(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$, откуда $\{\lambda_k\} = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Пример. При $n = 3$ приблизить функцию

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{10}x}$$

h -суммой, взяв в качестве базисной функцию $h(x) = e^x$, т.е. получить формулу

$$f(x) \approx \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + \lambda_3 e^{\lambda_3 x}.$$

Решение. Разложим в ряды Тейлора

$$h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad f(x) = x + \frac{1}{20}x^2 + O(x^3).$$

Вычислим S_m по формуле (196) и затем σ_m по формуле (198):

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = \frac{1}{10}; \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{30}.$$

Получим производящий многочлен

$$P_3(x) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{30},$$

его корни находим приближенно, например, по одному из методов численного решения уравнений, разобранных в разделе 7:

$$\{\lambda_k\} = \{-0.6710645, -0.0672756, 0.7383402\}.$$

Ответ.

$$x\sqrt{1+x/10} \approx -0.67106e^{-0.67106x} - 0.067276e^{-0.067276x} + 0.73834e^{0.73834x}$$

Пример. При $n = 3$ приблизить функцию из предыдущего примера h -суммой, взяв в качестве базисной другую функцию $h(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение. В этом случае получаем

$$\{S_k\} = \{0, 1, 1/20\}, \quad \{\sigma_k\} = \{0, -1/2, 1/60\}.$$

$$P_3(x) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{60}, \quad \{\lambda_k\} = \{-0.68981, -0.033408, 0.72321\}.$$

$$x\sqrt{1+x/10} \approx -\frac{0.68981}{1+0.68981x} - \frac{0.033408}{1+0.033408x} + \frac{0.72322}{1-0.72322x}$$

12.2 Аппроксимация

амплитудно-частотными суммами

Амплитудно-частотными суммами (АЧС) являются обобщением h -сумм и имеют вид

$$H_n(z) = H_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \mu_k h(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (200)$$

где $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ – некоторые комплексные параметры. Функция h по-прежнему называется базисной. Сумму (200) можно записать в виде

$$H_n(z) = h_0 S_0 + h_1 S_1 z + h_2 S_2 z^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} h_m S_m z^m, \quad (201)$$

где S_m — обобщенные степенные суммы:

$$S_m = S_m(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}) = \mu_1 \lambda_1^m + \mu_2 \lambda_2^m + \dots + \mu_n \lambda_n^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (202)$$

Пусть в окрестности начала задана своим рядом Маклорена аналитическая функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots \quad (203)$$

Для того, чтобы аппроксимировать эту функцию посредством АЧС приравняем первые $2n$ коэффициентов разложений (201) и (203). Получим систему уравнений

$$h_m \cdot S_m(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}) = f_m, \quad m = 0, \dots, 2n - 1.$$

По-прежнему считая $h_m \neq 0$, отсюда получаем условия на степенные суммы

$$S_m(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}) = s_m, \quad \text{где } s_m = \frac{f_m}{h_m}, \quad m = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (204)$$

Наша цель — из (204) найти неизвестные λ_k, μ_k при известных $S_m(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\})$. Система (204) хорошо известна как *задача дискретных моментов*. Предположим, что система (204) разрешима. Тогда назовем эту систему и ее решение *регулярными*, если все λ_k попарно различны, а все μ_k отличны от нуля. Приведем один из методов решения регулярных систем (204), принадлежащий Прони. Рассмотрим произведение определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ 0 & \mu_1 \lambda_1 & \mu_2 \lambda_2 & \dots & \mu_n \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu_1 \lambda_1^{n-1} & \mu_2 \lambda_2^{n-1} & \dots & \mu_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}.$$

В силу регулярности системы (204) первый определитель отличен от нуля, а второй обращается в нуль только при $\lambda = \lambda_k$ (по свойству определителя Вандермонда). С другой стороны, непосредственное умножение определителей с учетом равенств (204) дает определитель, являющийся многочленом

относительно λ :

$$G_n(\lambda) := \sum_{m=0}^n g_m \lambda^m = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}. \quad (205)$$

Будем G_n называть *производящим многочленом*. Следовательно, искомые числа λ_k являются простыми корнями производящего многочлена G_n . Решив алгебраическое уравнение $G_n(\lambda) = 0$, найдем эти числа и подставим их в систему (204). Наконец, удалив из (204) любые n строк, получим линейную систему уравнений относительно оставшихся неизвестных μ_k . Эта система решается методом Гаусса, но известны и явные формулы для вычисления чисел μ_k . Приведем их. Пусть σ_m и $\sigma_m^{(k)}$ — элементарные симметрические многочлены вида

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_m}, \quad m = \overline{1, n},$$

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_m^{(k)} = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n), \quad k = \overline{1, n}.$$

Числа μ_k можно вычислять как скалярные произведения $\mu_k = (\mathcal{L}_k \cdot \mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = (s_0, \dots, s_{n-1}),$$

$$\mathcal{L}_k = \frac{g_n}{G'_n(\lambda_k)} \left((-1)^{n-1} \sigma_{n-1}^{(k)}, \dots, (-1)^{n-m} \sigma_{n-m}^{(k)}, \dots, -\sigma_1^{(k)}, \quad 1 \right).$$

Пример. Заданы базисная функция и приближаемая функция:

$$h(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1) Построим АЧС $H_2(x)$ при $n = 2$. Разложения имеют вид

$$h(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots,$$

откуда находим $s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1/2, s_3 = 0, s_4 = 1/24, s_5 = 0$.

$$G_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{4};$$

корни: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}/2$. Подставим их в 2 первых уравнения системы (204).

Тогда получим

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 1/2.$$

Окончательно,

$$H_2(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x\sqrt{2}/2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x\sqrt{2}/2} = -\frac{2}{x^2 - 2}.$$

2) Построим АЧС $H_3(x)$ при $n = 3$. Используя разложения из предыдущего случая, находим

$$G_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/24 \\ 1/2 & 0 & 1/24 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{48}\lambda^3 - \frac{5}{576}\lambda;$$

корни: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3}/6$. Подставим их в систему (204) и, взяв только 3 первых уравнения, получим

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \mu_2 - \mu_3 = 0, \quad \mu_2 + \mu_3 = 6 \quad \Rightarrow$$

$$\mu_1 = -5, \mu_2 = 3, \mu_3 = 3.$$

Окончательно,

$$H_3(x) = -5 + \frac{3}{1 - x\sqrt{3}/6} + \frac{3}{1 + x\sqrt{3}/6} = \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}.$$

12.3 Регуляризация

В некоторых случаях система (204) либо не имеет решений, либо имеет, но не является регулярной. Тогда невозможно воспользоваться методом Прони. В таких случаях к аппроксимируемой функции $f(x)$ прибавляют регуляризующую функцию $R(x)$ — чем она проще для вычислений, тем лучше. Если в результате добавления получается регулярная система для функции $f(x) + R(x)$, то решив ее, в результате получим «подправленную» формулу:

$$f(x) \approx -R(x) + H_n(x).$$

Каких-либо общих методов выбора регуляризующих функций не существует, в каждом конкретном случае это самостоятельная задача.

Пример. Пусть $n = 3$, $f(x) = \sin x$, $h(x) = e^x$. Задача нерегулярна. Действительно, в этом случае отношение коэффициентов (204) дает $\{s_k\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1\}$ и, подставив эти значения в (205), получим производящий многочлен тождественно равный нулю, т.е. $G_3(x) \equiv 0$.

Попробуем регуляризовать задачу, взяв $R(x) = 1$. Теперь получаем

$$\{s_k\} = \{1, 1, 0, -1, 0, 1\}, \quad G(\lambda) = \lambda^3 + \lambda.$$

Получилась регулярная задача, корни

$$\{\lambda_k\} = \{0, i, -i\}, \quad \{\mu_k\} = \{1, -i/2, i/2\}.$$

Окончательно,

$$\sin x = \sum_{k=1}^3 \mu_k h(\lambda_k x) - R(x) = -1 + 1 \cdot e^0 + \frac{i}{2} e^{-ix} - \frac{i}{2} e^{ix},$$

т.е. получилась точная формула.

Пример. Полученная АЧС имеет определенный недостаток: ее параметры μ_k , λ_k комплексные, хотя мы аппроксимируем вещественную функцию. Попробуем получить АЧС с вещественными параметрами μ , λ . Возь-

теперь $R(x) = \frac{1}{1+x}$. Находим

$$\{s_k\} = \{1, 0, 2, -7, 24, -119\},$$

подставим в (205), раскроем определитель и приравняем его к нулю:

$$G_3(x) = 3(3\lambda^3 - 14\lambda^2 - 85\lambda + 49) = 0.$$

Найдем приближенно λ_k , а затем μ_k

$$\{\lambda_k\} = \{-3.83414, 0.53476, 7.96604\},$$

$$\{\mu_k\} = \{0.12142, 0.87914, -0.00057\}.$$

Окончательно, получаем регуляризованную формулу с «довеском»:

$$\sin x \approx 0.12142 e^{-3.83414x} + 0.87914 e^{0.53476x} - 0.00057 e^{7.96604x} - \frac{1}{1+x}.$$

12.4 Численное дифференцирование с помощью АЧС

Первый метод. Составим формулу численного интегро-дифференцирования в виде

$$(xf(x))' + \frac{M}{x} \int_0^x f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n \mu_k f(\lambda_k x),$$

то есть в качестве базисной функции берем саму функцию f , а в качестве регуляризирующей — интеграл, где M — вещественный параметр. (В некоторых случаях удобно вместо $(xf(x))'$ аппроксимировать $x(f(x))'$; задачи решаются аналогично.)

В этом случае по общей схеме, описанной в разделе 12.2, находим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k+1} x^k$$

$$(xf(x))' + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1) + \frac{M}{j+1} \right) f_j x^j.$$

Поэтому система (204) принимает вид

$$\mu_1 \lambda_1^k + \mu_2 \lambda_2^k + \dots + \mu_n \lambda_n^k = s_k, \quad k = \overline{0, 2n-1},$$

где

$$s_k = (k+1) + \frac{M}{k+1}. \quad (206)$$

Оказывается, что выбором M можно добиться, чтобы производящий многочлен (205) имел только вещественные корни и получалась регулярная задача, решаемая методом Прони.

Пример. Пусть $n = 2$, $M = 1$. Тогда с учетом формул (206) найдем s_k и производящий многочлен

$$G_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & 5/2 & 10/3 \\ 5/2 & 10/3 & 17/4 \end{vmatrix} = -\frac{35}{72} - \frac{1}{6}\lambda + \frac{5}{12}\lambda^2,$$

его корни вещественны $\{\lambda_k\} \approx \{-0.89848, \quad 1.29848\}$. Далее, решаем линейную систему уравнений (202) относительно μ_k

$$\mu_1 + \mu_2 = s_0 = 2, \quad \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 = s_1 = \frac{5}{2}$$

и находим $\{\mu_k\} \approx \{0.04413, \quad 1.95586\}$. Итак,

$$(xf(x))' + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \approx 0.04413 \cdot f(-0.89848 \cdot x) + 1.95586 \cdot f(1.29848 \cdot x)$$

Для приближенного вычисления интегралов существуют высокоточные формулы, мы можем использовать, например, (145). Тогда

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{18} \left(5f \left(\frac{x}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right) + 8f \left(\frac{x}{2} \right) + 5f \left(\frac{x}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right) \right) + O(x^5);$$

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \approx$$

$$\approx 0.277777 \cdot f(0.112701 \cdot x) + 0.444444 \cdot f(0.5 \cdot x) + 0.277777 \cdot f(0.887298 \cdot x). \quad (207)$$

Окончательно,

$$(xf(x))' \approx 0.04413 \cdot f(-0.89848 \cdot x) + 1.95586 \cdot f(1.29848 \cdot x) - \\ - (0.277777 \cdot f(0.112701 \cdot x) + 0.444444 \cdot f(0.5 \cdot x) + 0.277777 \cdot f(0.887298 \cdot x))$$

Пример. Пусть $n = 3$. В этом случае при $M = 1$ и аналогичном построении получаются комплексные μ_k, λ_k . С целью получить вещественные АЧС возьмем $M = 6$. Далее, по формулам (206) найдем

$$\{s_k\} = \{7, 5, 5, \frac{11}{2}, \frac{31}{5}, 7\}$$

и построим производящий многочлен

$$\begin{aligned} G_3(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 7 & 5 & 5 & 11/2 \\ 5 & 5 & 11/2 & 31/5 \\ 5 & 11/2 & 31/5 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{40} + \frac{11}{100}\lambda + \frac{1}{60}\lambda^2 - \frac{1}{12}\lambda^3; \end{aligned}$$

корни приближенно равны: $\{\lambda_k\} = \{-1.160372, 0.228394, 1.131977\}$. Подставим их в систему (204) и, решив первые 3 уравнения, получим $\{\mu_k\} = \{0.0024827, 3.229533, 3.767984\}$. Итак,

$$(xf(x))' + \frac{6}{x} \int_0^x f(t) dt \approx$$

$$\approx 0.0024827 \cdot f(-1.160372 \cdot x) + 3.229533 \cdot f(0.228394 \cdot x) + 3.767984 \cdot f(1.131977 \cdot x)$$

с локальной погрешностью $O(x^6)$. Для вычисления интеграла можно применить (207).

Второй метод. Составим формулу численного дифференцирования в виде

$$(xf(x))' + pf_{n-1}x^{n-1} + pf_{2n-1}x^{2n-1} \approx \sum_{k=1}^n \mu_k f(\lambda_k x), \quad (208)$$

то есть в качестве базисной функции берем саму функцию $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, а в качестве регуляризирующей — дифференциальный бином с вещественными параметрами p, q .

В этом случае левая часть в (208) имеет разложение

$$(xf(x))' + pf_{n-1}x^{n-1} + pf_{2n-1}x^{2n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)f_jx^j + pf_{n-1}x^{n-1} + pf_{2n-1}x^{2n-1}.$$

Поэтому система (204) принимает вид

$$\mu_1\lambda_1^k + \mu_2\lambda_2^k + \dots + \mu_n\lambda_n^k = s_k, \quad k = \overline{0, 2n-1},$$

где

$$s_k = (k+1) \text{ при } k \neq n-1, k \neq 2n-1; \quad s_{n-1} = n+p, \quad s_{2n-1} = 2n+q.$$

Поэтому, например, при $n=3$ производящий многочлен (205) имеет вид

$$G_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 2 & 3+p & 4 \\ 2 & 3+p & 4 & 5 \\ 3+p & 4 & 5 & 6+q \end{vmatrix}$$

Оказывается, что выбором p, q можно добиться, чтобы производящий многочлен (205) имел только вещественные корни и получалась регулярная задача, решаемая методом Прони.

Пример. Пусть $n=3, p=-2, q=4$. В этом случае по формулам (206) найдем

$$\{s_k\} = \{1, 2, 1, 4, 5, 10\}$$

и построим производящий многочлен

$$G_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 4(4\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 1);$$

корни приближенно равны:

$$\{\lambda_k\} = \{-0.7726301277, -0.1890378793, 1.711668007\}.$$

Из трех первых уравнений (204) получим

$$\{\mu_k\} = \{-1.633882156, 1.983851593, .6500305634\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & (xf(x))' \approx \\ & \approx -1.633882156 f(-0.7726301277 x) + 1.983851593 f(-0.1890378793 x) + \\ & 0.6500305634 f(1.711668007 x) + 2f_{n-1}x^2 - 4f_{2n-1}x^5 \end{aligned}$$

с локальной погрешностью $O(x^6)$.

13 Задачи

13.1 Общие свойства многочленов

Задача 1. Методом Горнера найти границу вещественных корней

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 31/4x^2 - 7/2x - 9/2;$
2. $P(x) = x^4 - 29/4x^2 - 29/2x - 21/2;$
3. $P(x) = x^4 - 3x^3 - 23/4x^2 - 3x - 27/4;$
4. $P(x) = x^4 + 5x^3 + 5/4x^2 - 15/2x - 27/2;$
5. $P(x) = x^4 + x^3 - 47/4x^2 + 33/2x - 27/4;$
6. $P(x) = x^4 - 5/2x^3 - 9/2x^2 + 14x - 15;$
7. $P(x) = x^4 + 5/2x^3 - 5x^2 + 5/2x - 6;$
8. $P(x) = x^4 - 3x^3 - 23/4x^2 - 3x - 27/4;$
9. $P(x) = x^4 + x^3 - 43/4x^2 + 39/2x - 27/2;$
10. $P(x) = x^4 - 5/2x^3 - 9/2x^2 + 14x - 15;$
11. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 31/4x^2 - 7/2x - 9/2;$
12. $P(x) = x^4 - 17/4x^2 - 41/2x - 105/4;$
13. $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11/4x^2 - 12x - 27;$
14. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 5/2x^2 - 3x - 135/16;$
15. $P(x) = x^4 + x^3 - 43/4x^2 + 39/2x - 27/2;$

16. $P(x) = x^4 + 1/2 x^3 - 27/4 x^2 - 65/8 x - 75/8;$
17. $P(x) = x^4 + 1/2 x^3 - 9 x^2 + 17 x - 12;$
18. $P(x) = x^4 - 2 x^3 - 17/2 x^2 - 21/2 x - 135/16;$
19. $P(x) = x^4 + 5 x^3 + 5/4 x^2 - 15/2 x - 27/2;$
20. $P(x) = x^4 - 5/2 x^3 - 9/2 x^2 + 14 x - 15.$

Задача 2. Пользуясь методом квадрирования, найти границу корней многочлена $P(x)$. Сделать три шага.

1. $P(x) = x^3 + x^2 - 21 x - 45;$
2. $P(x) = x^3 - 5 x^2 - 12 x + 36;$
3. $P(x) = x^3 - x^2 - 24 x - 36;$
4. $P(x) = x^3 - 4 x^2 - 11 x - 6;$
5. $P(x) = x^3 - x^2 - 33 x - 63;$
6. $P(x) = x^3 - 3 x^2 - 25 x - 21;$
7. $P(x) = x^3 - 3 x^2 - 9 x - 5;$
8. $P(x) = x^3 - 8 x^2 + x + 42;$
9. $P(x) = x^3 - 2 x^2 - 29 x - 42;$
10. $P(x) = x^3 - 3 x^2 - 9 x - 5;$
11. $P(x) = x^3 - 2 x^2 - 20 x - 24;$
12. $P(x) = x^3 - 7 x^2 + 4 x + 12;$
13. $P(x) = x^3 - 4 x^2 - 19 x - 14;$
14. $P(x) = x^3 - 6 x^2 - x + 6;$
15. $P(x) = x^3 - 2 x^2 - 13 x - 10;$
16. $P(x) = x^3 - 3 x^2 - 25 x - 21;$
17. $P(x) = x^3 - 6 x^2 + 3 x + 10;$
18. $P(x) = x^3 - 3 x^2 - 9 x - 5;$
19. $P(x) = x^3 - 8 x^2 + 13 x - 6;$
20. $P(x) = x^3 - 2 x^2 - 21 x - 18.$

Задача 3. Пользуясь алгоритмом Евклида, устранить кратность корней многочлена $P(x)$

1. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32;$
2. $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1;$
3. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1;$
4. $P(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 14x^2 - 20x + 8;$
5. $P(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4;$
6. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32;$
7. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4;$
8. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4;$
9. $P(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1;$
10. $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 14x^2 - 20x - 8;$
11. $P(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32;$
12. $P(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4;$
13. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1;$
14. $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 14x^2 - 20x - 8;$
15. $P(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8;$
16. $P(x) = x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 12x - 8;$
17. $P(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1;$
18. $P(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8;$
19. $P(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 7x^2 + 4;$
20. $P(x) = x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 48x - 32.$

13.2 Интерполяция и аппроксимация алгебраическими многочленами

Задача 1. Построить интерполяционный многочлен третьей степени по заданной таблице, используя методы Ньютона и Лагранжа. Узлы интерполяции во всех вариантах

$$x_1 = -1/2, x_2 = 0, x_3 = 1/2, x_4 = 1,$$

а значения y_k ($k = 1, \dots, 4$) задаются по вариантам:

1. $y_1 = 25/8, y_2 = 2, y_3 = 15/8, y_4 = 5.$
2. $y_1 = -2, y_2 = -3, y_3 = -7/2, y_4 = -2.$
3. $y_1 = 23/8, y_2 = 3, y_3 = 37/8, y_4 = 10.$
4. $y_1 = 23/8, y_2 = 3, y_3 = 37/8, y_4 = 10.$
5. $y_1 = 3/2, y_2 = 3, y_3 = 3, y_4 = 3.$
6. $y_1 = -15/8, y_2 = -3, y_3 = -37/8, y_4 = -6.$
7. $y_1 = -1/4, y_2 = 1, y_3 = 5/4, y_4 = 2.$
8. $y_1 = -7/2, y_2 = -2, y_3 = -1, y_4 = 1.$
9. $y_1 = -17/8, y_2 = -1, y_3 = 9/8, y_4 = 5.$
10. $y_1 = -9/8, y_2 = -1, y_3 = 5/8, y_4 = 6.$
11. $y_1 = -17/8, y_2 = -3, y_3 = -35/8, y_4 = -4.$
12. $y_1 = -3/8, y_2 = 1, y_3 = 15/8, y_4 = 3.$
13. $y_1 = -11/8, y_2 = -2, y_3 = -17/8, y_4 = -1.$
14. $y_1 = -9/8, y_2 = -1, y_3 = -15/8, y_4 = -3.$
15. $y_1 = -11/8, y_2 = -2, y_3 = -17/8, y_4 = -1.$
16. $y_1 = -2, y_2 = -3, y_3 = -5/2, y_4 = 1.$
17. $y_1 = -27/8, y_2 = -2, y_3 = -13/8, y_4 = 0.$
18. $y_1 = 1/4, y_2 = -1, y_3 = -5/4, y_4 = 1.$
20. $y_1 = -19/8, y_2 = -3, y_3 = -25/8, y_4 = -2.$

Задача 2. Построить интерполяционный многочлен второй степени по заданному набору узлов для функции $f(x) = e^{-x}$. Найти точное значение погрешности интерполяции на отрезке $[0, 1]$.

1. $[x_1 = 1/5, x_2 = 1/2, x_3 = 1];$
2. $[x_1 = 1/5, x_2 = \frac{7}{10}, x_3 = 1];$
3. $[x_1 = 1/13, x_2 = \frac{11}{26}, x_3 = 1];$
4. $[x_1 = 1/13, x_2 = \frac{17}{26}, x_3 = 1];$
5. $[x_1 = 1/8, x_2 = 1/3, x_3 = 1];$
6. $[x_1 = 1/3, x_2 = \frac{7}{12}, x_3 = 1];$
7. $[x_1 = 1/3, x_2 = 3/4, x_3 = 1];$
8. $[x_1 = 1/5, x_2 = 1/2, x_3 = 1];$
9. $[x_1 = 1/7, x_2 = \frac{13}{28}, x_3 = 1];$
10. $[x_1 = 1/5, x_2 = \frac{7}{10}, x_3 = 1];$
11. $[x_1 = 1/7, x_2 = \frac{19}{28}, x_3 = 1];$
12. $[x_1 = 1/4, x_2 = 3/5, x_3 = 1];$
13. $[x_1 = 1/4, x_2 = \frac{13}{20}, x_3 = 1];$
14. $[x_1 = 2/7, x_2 = 2/3, x_3 = 1];$
15. $[x_1 = 1/5, x_2 = 1/2, x_3 = 1];$
16. $[x_1 = 1/5, x_2 = \frac{7}{10}, x_3 = 1];$
17. $[x_1 = \frac{7}{15}, x_2 = 2/3, x_3 = 1];$
18. $[x_1 = 1/4, x_2 = 3/7, x_3 = 1];$
19. $[x_1 = 1/2, x_2 = \frac{11}{16}, x_3 = 1];$
20. $[x_1 = 1/2, x_2 = \frac{13}{16}, x_3 = 1].$

Задача 3. Является ли многочлен $P(x)$ многочленом наилучшего приближения степени 2 для заданной функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$? Решение пояснить графически.

1. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
2. $f(x) = -4|x + 1/2| + 2|x|$ $P(x) = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{26}{9}x - \frac{10}{9}$;
3. $f(x) = 3|x + 1/2| - 2|x|$ $P(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{7}{9}$;
4. $f(x) = -5|x + 1/2| + 3|x|$ $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{4}{3}$;
5. $f(x) = -2|x + 1/2| + |x|$ $P(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{5}{9}$;
6. $f(x) = -3|x + 1/2| + 2|x|$ $P(x) = -2/9x^2 - \frac{20}{9}x - \frac{7}{9}$;
7. $f(x) = 3|x + 1/2| - 2|x|$ $P(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{7}{9}$;
8. $f(x) = -2|x + 1/2| + |x|$ $P(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{5}{9}$;
9. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
10. $f(x) = 3|x + 1/2| - 2|x|$ $P(x) = 2/9x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{7}{9}$;
11. $f(x) = 4|x + 1/2| - 2|x|$ $P(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x + \frac{10}{9}$;
12. $f(x) = 4|x + 1/2| - 2|x|$ $P(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x + \frac{10}{9}$;
13. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = 2/9x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
14. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = 2/9x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
15. $f(x) = -2|x + 1/2| + |x|$ $P(x) = -4/9x^2 - \frac{13}{9}x - 5/9$;
16. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = 2/9x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
17. $f(x) = -5|x + 1/2| + 4|x|$ $P(x) = 2/9x^2 - \frac{34}{9}x - \frac{11}{9}$;
18. $f(x) = -5|x + 1/2| + 3|x|$ $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 11/3x - \frac{4}{3}$;
19. $f(x) = 2|x + 1/2| - |x|$ $P(x) = 4/9x^2 + \frac{13}{9}x + 5/9$;
20. $f(x) = -5|x + 1/2| + 2|x|$ $P(x) = -\frac{14}{9}x^2 - \frac{32}{9}x - \frac{13}{9}$.

Задача 4. Приблизить наилучшим образом линейной функцией дискретную функцию f , заданную таблицей в точках

$$[x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4].$$

Привести ход вычислений, указать величину и многочлен наилучшего приближения.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1. $f = [1, 1, -1, 1, -2];$ | 11. $f = [-1, -2, -1, 1, 2];$ |
| 2. $f = [-1, 1, -2, 1, 2];$ | 12. $f = [1, 1, -4, 1, 0];$ |
| 3. $f = [-1, 1, -1, -2, 2];$ | 13. $f = [1, 1, -1, 2, 1];$ |
| 4. $f = [0, 1, -1, 2, 1];$ | 14. $f = [0, 1, -1, 3, 1];$ |
| 5. $f = [0, -2, -2, 2, 1];$ | 15. $f = [0, 3, -2, 2, 1];$ |
| 6. $f = [0, -1, -4, 2, 1];$ | 16. $f = [0, -1, -4, 0, 1];$ |
| 7. $f = [0, -1, -4, 0, 0];$ | 17. $f = [0, 1, -4, 0, 0];$ |
| 8. $f = [1, 1, -4, 0, 0];$ | 18. $f = [2, 1, -4, 0, 0];$ |
| 9. $f = [0, 1, -4, 0, 1];$ | 19. $f = [4, 1, -4, 0, 0];$ |
| 10. $f = [4, 1, -4, 1, 0];$ | 20. $f = [2, 1, -4, 1, 0].$ |

Задача 5. Построить многочлены наилучшего равномерного приближения степеней 0 и 1 для функции $f(x) = e^{\alpha x}$ на отрезке $[a, b]$. Найти три точки альтернанса. Решение пояснить графически.

- | | |
|------------------------|------------------|
| 1. $[a, b] = [-3, 1]$ | $\alpha = -1/3;$ |
| 2. $[a, b] = [-2, 2]$ | $\alpha = -2/3;$ |
| 3. $[a, b] = [-1, 2]$ | $\alpha = 2/3;$ |
| 4. $[a, b] = [-2, 1]$ | $\alpha = 1/3;$ |
| 5. $[a, b] = [-3, 2]$ | $\alpha = 1;$ |
| 6. $[a, b] = [-1, 1]$ | $\alpha = -1/3;$ |
| 7. $[a, b] = [-2, 1]$ | $\alpha = 2/3;$ |
| 8. $[a, b] = [-2, 2]$ | $\alpha = -2/3;$ |
| 9. $[a, b] = [-1, 3]$ | $\alpha = 2/3;$ |
| 10. $[a, b] = [-3, 3]$ | $\alpha = 1;$ |
| 11. $[a, b] = [-1, 3]$ | $\alpha = -1/3;$ |
| 12. $[a, b] = [-2, 1]$ | $\alpha = 1/3;$ |
| 13. $[a, b] = [-3, 2]$ | $\alpha = -2/3;$ |
| 14. $[a, b] = [-2, 3]$ | $\alpha = 2/3;$ |
| 15. $[a, b] = [-1, 3]$ | $\alpha = -1/3;$ |

16. $[a, b] = [-1, 1] \quad \alpha = 1/3;$
17. $[a, b] = [-3, 2] \quad \alpha = 1/3;$
18. $[a, b] = [-1, 1] \quad \alpha = -1/3;$
19. $[a, b] = [-3, 3] \quad \alpha = -2/3;$
20. $[a, b] = [-1, 2] \quad \alpha = 1/3.$

Задача 6. Заданы узлы x_k и значения функции $y_k = f(x_k)$ в этих узлах. Методом наименьших квадратов построить многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ первой и второй степеней, аппроксимирующие эти значения. Найти наибольшие отклонения построенных полиномов от заданных значений. Нарисовать графики.

1. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6,$
 $y_1 = -4, y_2 = 5, y_3 = -2, y_4 = -5 ;$
2. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = 5, y_2 = -1, y_3 = 5, y_4 = 2;$
3. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6,$
 $y_1 = -2, y_2 = -1, y_3 = 5, y_4 = 6;$
4. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = 6, y_2 = -2, y_3 = 4, y_4 = -6;$
5. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = -1, y_4 = -6;$
6. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5,$
 $y_1 = 5, y_2 = -5, y_3 = -1, y_4 = -3;$
7. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = 5, y_2 = -1, y_3 = 5, y_4 = 3;$
8. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = 6, y_2 = 5, y_3 = -2, y_4 = 5;$
9. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 3,$
 $y_1 = 1, y_2 = -4, y_3 = 4, y_4 = 4;$

10. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = 2, y_2 = -5, y_3 = 2, y_4 = 3;$
11. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = -4, y_2 = 2, y_3 = 4, y_4 = 2;$
12. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2,$
 $y_1 = -6, y_2 = -2, y_3 = -1, y_4 = -3;$
13. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = -2, y_2 = 6, y_3 = 2, y_4 = 6;$
14. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = -3, y_2 = -2, y_3 = 1, y_4 = 6;$
15. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6,$
 $y_1 = 2, y_2 = -5, y_3 = 6, y_4 = 3;$
16. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4,$
 $y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 6, y_4 = 2;$
17. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = 6, y_2 = 5, y_3 = -3, y_4 = 5;$
18. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6,$
 $y_1 = 3, y_2 = 2, y_3 = -1, y_4 = -6;$
19. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = -5, y_2 = -5, y_3 = 2, y_4 = -1;$
20. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3,$
 $y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = 4, y_4 = -2.$

Задача 7. Для заданной функции $f(x)$ построить дробь Паде порядка $2/2$.
Испытать на точность при $x = 1/2$;

1. $2 + x \cos(x) - 3 \sin(x) - 6 e^x;$
2. $-2 - x \cos(x) + 5 \sin(x) - 4 e^x;$
3. $-2 - x \cos(x) - \sin(x) + 8 e^x;$
4. $1 - 4 x \cos(x) + 7 \sin(x) - 2 e^x;$
5. $1 + x \cos(x) - 3 \sin(x) - 3 e^x;$

6. $-1 + 4x \cos(x) - 7 \sin(x) + 2e^x;$
7. $-1 - x \cos(x) + 3 \sin(x) + 3e^x;$
8. $-1 - 4x \cos(x) + 7 \sin(x) - 2e^x;$
9. $-2 + 4x \cos(x) - 5 \sin(x) + 2e^x;$
10. $1 - x \cos(x) + 3 \sin(x) + 3e^x;$
11. $-2 + x \cos(x) - 5 \sin(x) + 4e^x;$
12. $2 - 4x \cos(x) + 5 \sin(x) - 2e^x;$
13. $2 - 4x \cos(x) + 7 \sin(x) - 2e^x;$
14. $-2 - x \cos(x) + 3 \sin(x) + 6e^x;$
15. $-2 + x \cos(x) - 5 \sin(x) + 4e^x;$
16. $-1 + 4x \cos(x) - 7 \sin(x) + 2e^x;$
17. $1 + 4x \cos(x) - 5 \sin(x) + 2e^x;$
18. $-1 + 4x \cos(x) - 7 \sin(x) + 2e^x;$
19. $1 - x \cos(x) + 5 \sin(x) - 4e^x;$
20. $-2 - x \cos(x) + 2 \sin(x) + 2e^x$

Задача 8. Для аппроксимации функции $(\alpha+1)|x-1| - (\beta+1)|x|$ на отрезке $[-2, 2]$ построить параболические и кубические сплайны. Узлы интерполяции $\{x_k\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ($N = 4$). Параметры α, β — первая и вторая цифра номера варианта, например, варианту 7 соответствует $\alpha = 0, \beta = 7$. Нарисовать графики.

13.3 Интерполяция и аппроксимация тригонометрическими многочленами

Задача 1. Разложить на простейшие множители тригонометрические многочлены

- | | |
|---|---|
| 1. $2 + 2 \cos x - 2 \sin x - \sin 2x;$ | 2. $1 + \cos x - 2 \sin x - \sin 2x;$ |
| 3. $2 - 3 \sin x - \cos 2x;$ | 4. $1 + \cos x - 2 \sin x - \sin 2x;$ |
| 5. $\frac{1}{2} - \cos x - \sin x + \sin 2x;$ | 6. $\frac{1}{2} - \cos x + \sin x - \sin 2x;$ |

- | | |
|---|--|
| 7. $2 - 3 \cos x + \cos 2x$; | 8. $-\frac{1}{2} - \cos x + \sin x + \sin 2x$; |
| 9. $1 + 2 \cos x + 2 \sin x + 2 \sin 2x$; | 10. $2 + 3 \cos x + \cos 2x$; |
| 11. $2 - 2\sqrt{2} \cos x + \cos 2x$; | 12. $\frac{9}{8} - \frac{3}{2} \cos x + \frac{3}{4} \cos 2x$; |
| 13. $5 - 4\sqrt{3} \cos x + 2 \cos 2x$; | 14. $3 - 2\sqrt{2} \cos x - 2\sqrt{2} \sin x + \sin 2x$; |
| 15. $5 - 4\sqrt{3} \cos x + 2 \cos 2x$; | 16. $3 + 4 \cos x + \cos 2x$; |
| 17. $2 \cos x + \cos 2x + 1$; | 18. $2 + 2 \cos x - 2 \sin x - \sin 2x$; |
| 19. $\sqrt{2} - \sqrt{2} \sin x - 2 \cos x + \sin 2x$; | 20. $3 - 2\sqrt{3} \cos x - 2\sqrt{3} \sin x + 2 \sin 2x$. |

Задача 2. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен первой степени $n = 1$

- (а) по указанным ниже таблицам интерполяции;
- (б) считая, что узлы интерполяции распределены равномерно, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi/3$, $4\pi/3$, а значения y_1 , y_2 , y_3 — те же (приведены ниже). В этом случае применить специальную формулу (см. (76)).

- | | | |
|-----|---|---------------------------------|
| 1. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = 1]$ |
| 2. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = -1, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 3. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 4. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 3, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 5. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 3, y_2 = -2, y_3 = -2]$ |
| 6. | $[x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = -1]$ |
| 7. | $[x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = -1]$ |
| 8. | $[x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 1]$ |
| 9. | $[x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 1]$ |
| 10. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = -1]$ |
| 11. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \pi]$ | $[y_1 = 4, y_2 = 4, y_3 = -1]$ |
| 12. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4}]$ | $[y_1 = -4, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 13. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4}]$ | $[y_1 = -1, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 14. | $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4}]$ | $[y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1]$ |

- | | | |
|-----|---|--------------------------------|
| 15. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = 8, y_2 = 2, y_3 = 2]$ |
| 16. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = 1]$ |
| 17. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = -1, y_2 = 2, y_3 = 5]$ |
| 18. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = 1]$ |
| 19. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 1]$ |
| 20. | $[x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{2}]$ | $[y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 1]$ |

13.4 Аппроксимация ортогональными системами

Задача 1. Методом Грама-Шмидта построить ортонормированную систему g_1, g_2, g_3 в L_2 на заданном отрезке $[a, b] = [0, 1]$ по трем заданным линейно независимым элементам f_1, f_2, f_3 .

Опираясь на полученное, найти многочлен $P_2(x)$ наилучшего приближения второй степени для функции $f(x) = x^3$ и норму $\|f - P_2\|_{L_2[a,b]}$.

Вычислить многочлен наилучшего приближения в виде

$$Q_2(x) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

методом наименьших квадратов (см.5.6). Убедиться в совпадении результатов ($Q_2 \equiv P_2$).

1. $[g_1 = 1 - 2x, g_2 = 1 - x, g_3 = x^2]$
2. $[g_1 = 1 - 2x, g_2 = -3 - 2x, g_3 = -3 + x^2]$
3. $[g_1 = 1 - 2x, g_2 = -1 + x, g_3 = -1 + x^2]$
4. $[g_1 = 1 - 2x, g_2 = -2 + x, g_3 = -2 + x^2]$
5. $[g_1 = 1 - 2x, g_2 = 1, g_3 = x^2]$
6. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -x, g_3 = 1 + x^2]$
7. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -1 - 2x, g_3 = -2 + x^2]$
8. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -1, g_3 = x^2]$
9. $[g_1 = 1 - x, g_2 = x, g_3 = -2 + x^2]$
10. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -3 + x, g_3 = -2 + x^2]$

11. $[g_1 = 1 - x, g_2 = 1 - 3x, g_3 = -3 + x^2]$
12. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -3 - 3x, g_3 = -3 + x^2]$
13. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -1 - 3x, g_3 = x^2]$
14. $[g_1 = 1 - x, g_2 = 1, g_3 = x^2]$
15. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -1 - x, g_3 = x^2]$
16. $[g_1 = 1 - x, g_2 = 1 + x, g_3 = -2 + x^2]$
17. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -2x, g_3 = -1 + x^2]$
18. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -3 + x, g_3 = -1 + x^2]$
19. $[g_1 = 1 - x, g_2 = x, g_3 = 1 + x^2]$
20. $[g_1 = 1 - x, g_2 = -2 - 2x, g_3 = 1 + x^2]$

13.5 Цепные дроби

Задача 1. Разложить в цепную дробь порядка 10 и применить для приближенного вычисления корня

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $x = \sqrt{3};$ | 2. $x = \sqrt{14};$ | 3. $x = \sqrt{13};$ |
| 4. $x = \sqrt{47};$ | 5. $x = \sqrt{8};$ | 6. $x = \sqrt{11};$ |
| 7. $x = \sqrt{23};$ | 8. $x = \sqrt{55};$ | 9. $x = \sqrt{33}$ |
| 10. $x = \sqrt{35};$ | 11. $x = \sqrt{6};$ | 12. $x = \sqrt{10};$ |
| 13. $x = \sqrt{12};$ | 14. $x = \sqrt{15};$ | 15. $x = \sqrt{32};$ |
| 16. $x = \sqrt{51};$ | 17. $x = \sqrt{17};$ | 18. $x = \sqrt{45};$ |
| 19. $x = \sqrt{34};$ | 20. $x = \sqrt{7};$ | 21. $x = \sqrt{39};$ |

Задача 2. Разложить рациональную функцию R в цепную дробь. Результат применить к вычислению этой дроби при $x = 1/2$

- | | |
|--|---|
| 1. $R = \frac{x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 6x + 11}{x^3 - 2x^2 - 9x - 6}$ | 2. $R = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 3x - 1}$ |
| 3. $R = \frac{x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 3x + 5}$ | 4. $R = \frac{x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 2}{x^3 - 5x^2 + 6x - 1}$ |
| 5. $R = \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 4}{x^3 - 3x^2 - 3x + 3}$ | 6. $R = \frac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 10x + 1}{x^3 + 6x^2 - 3x - 6}$ |
| 7. $R = \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + x + 1}$ | 8. $R = \frac{x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 10x - 5}{x^3 + 4x^2 - x - 8}$ |
| 9. $R = \frac{x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 7}{x^3 + 4x - 5}$ | 10. $R = \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x + 5}$ |
| 11. $R = \frac{x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 10x - 7}{x^3 - 6x^2 + 10x - 4}$ | 12. $R = \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 3}{x^3 - 4x - 9}$ |

$$13. \quad R = \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 11}{x^3 - 3x^2 - 3x + 7}$$

$$15. \quad R = \frac{x^4 - 5x^3 - 5 + 10x}{x^3 - 4x^2 - 3x + 7}$$

$$17. \quad R = \frac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x + 11}{x^3 + x^2 - 6x - 3}$$

$$19. \quad R = \frac{x^4 + 4x^3 - 8 - 11x}{-5 + x^3 + 3x^2 - 2x}$$

$$14. \quad R = \frac{x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 6x + 11}{x^3 + 5x^2 - 3x - 9}$$

$$16. \quad R = \frac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 11x + 2}{x^3 - 4x^2 - x + 7}$$

$$18. \quad R = \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + 6x + 11}{x^3 + 2x^2 - 3x - 3}$$

$$20. \quad R = \frac{x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 10x - 3}{x^3 + 6x^2 + 9x + 2}$$

13.6 Численный анализ функциональных уравнений и неравенств

Задача 1. Решить уравнение, используя формулы (106), (108), (111), (112)

$$1. \quad x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0;$$

$$2. \quad x^3 + 2x^2 + x - 5 = 0;$$

$$3. \quad x^3 + 2x^2 - x - 7 = 0;$$

$$4. \quad x^3 + 5x^2 - 2x - 7 = 0;$$

$$5. \quad x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0;$$

$$6. \quad x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0;$$

$$7. \quad x^3 + 7x^2 - x - 4 = 0;$$

$$8. \quad x^3 + 5x^2 - x - 7 = 0;$$

$$9. \quad x^3 + 5x^2 + 2x - 5 = 0;$$

$$10. \quad x^3 + 4x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$11. \quad x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0;$$

$$12. \quad x^3 + 2x^2 - x - 5 = 0;$$

$$13. \quad x^3 + 5x^2 - x - 7 = 0;$$

$$14. \quad x^3 + 5x^2 - 3x - 1 = 0;$$

$$15. \quad x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0;$$

$$16. \quad x^3 + 7x^2 - 2x - 4 = 0;$$

$$17. \quad x^3 + 5x^2 - x - 4 = 0;$$

$$18. \quad x^3 + 5x^2 + x - 5 = 0;$$

$$19. \quad x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0;$$

$$20. \quad x^3 + 4x^2 + 2x - 10 = 0.$$

Задача 2. Решить уравнение, используя формулы (106), (108), (111), (112)

$$1. \quad e^x - x = 3/2;$$

$$2. \quad e^x - 3x = 4/5;$$

$$3. \quad \sin(x) + 3x = 2;$$

$$4. \quad \sin(x) + 2x = 1;$$

$$5. \quad \cos(x) + 2x = 2;$$

$$6. \quad 3x \sin(x) = 1;$$

$$7. \quad xe^x = 2;$$

$$8. \quad 5xe^{-x} = 1;$$

$$9. \quad x + e^{2x} = 2;$$

$$10. \quad 3x + \ln(2x) = 2;$$

$$11. \quad e^x - 2x = 4/5;$$

$$12. \quad e^x + 3x = 2;$$

$$13. \quad \sin(x) + 2x = 2;$$

$$14. \quad \sin(x) + x = 1;$$

$$15. \quad 3x \cos(x) = 1;$$

$$16. \quad xe^x = 1;$$

$$17. \quad 4xe^{-x} = 1;$$

$$18. \quad 5xe^x = 1;$$

$$19. \quad 3x + \ln(2x) = 1;$$

$$20. \quad \sin(x) + 3x = 2;$$

Задача 3. Решить систему функциональных уравнений, используя формулу (120)

- | | | | | |
|-----|--------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. | $f = e^{-y} + x$ | $g = x + 2y$ | $x_0 = 0,$ | $y_0 = -1;$ |
| 2. | $f = e^y + x$ | $g = x + 3y$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 1;$ |
| 3. | $f = e^y + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = 0.5,$ | $y_0 = -1;$ |
| 4. | $f = e^{-y} + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 0.5;$ |
| 5. | $f = e^x + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 0.4;$ |
| 6. | $f = e^{-x} + yx$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = \frac{1}{2},$ | $y_0 = -2;$ |
| 7. | $f = e^x y + 1$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = -\frac{1}{2},$ | $y_0 = -1;$ |
| 8. | $f = e^{-x} y + 1$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = 1,$ | $y_0 = -3;$ |
| 9. | $f = e^{2x} y + 1$ | $g = x + 2y + 1$ | $x_0 = \frac{1}{2},$ | $y_0 = -\frac{1}{2};$ |
| 10. | $f = e^{5x} y + 1$ | $g = x + 2y + 1$ | $x_0 = 0,$ | $y_0 = -\frac{1}{2};$ |
| 11. | $f = e^{-y} + x$ | $g = x + 2y$ | $x_0 = 0,$ | $y_0 = -1;$ |
| 12. | $f = e^y + x$ | $g = x + 3y$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 1;$ |
| 13. | $f = e^y + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = \frac{1}{2},$ | $y_0 = -1;$ |
| 14. | $f = e^{-y} + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 0.5;$ |
| 15. | $f = e^x + yx$ | $g = x + y + 1$ | $x_0 = -1,$ | $y_0 = 0.4;$ |
| 16. | $f = e^{-x} + yx$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = \frac{1}{2},$ | $y_0 = -2;$ |
| 17. | $f = e^x y + 1$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = -\frac{1}{2},$ | $y_0 = -1;$ |
| 18. | $f = e^{-x} y + 1$ | $g = x + y + 2$ | $x_0 = 1,$ | $y_0 = -3;$ |
| 19. | $f = e^{2x} y + 1$ | $g = x + 2y + 1$ | $x_0 = 0.5,$ | $y_0 = -\frac{1}{2};$ |
| 20. | $f = e^{5x} y + 1$ | $g = x + 2y + 1$ | $x_0 = 0,$ | $y_0 = -\frac{1}{2}.$ |

Задача 4. Методом золотого сечения найти минимум $f(x)$ функции на отрезке $[0,1]$

- | | | | |
|----|--|-----|--|
| 1. | $f(x) = (3/8 x - 4/9) e^{3x};$ | 11. | $f(x) = (1/2 x - 4/9) e^{3/2 x};$ |
| 2. | $f(x) = (5/4 x - 4/9) e^{3x};$ | 12. | $f(x) = (2/3 x - 2/3) e^{3/2 x};$ |
| 3. | $f(x) = (5/6 x - 1/2) e^{3x};$ | 13. | $f(x) = (1/2 x - 1/3) e^{2x};$ |
| 4. | $f(x) = (1/6 x - \frac{10}{9}) e^{1/6 x};$ | 14. | $f(x) = (1/3 x - \frac{4}{15}) e^{3/2 x};$ |
| 5. | $f(x) = (5/2 x - \frac{10}{9}) e^{3x};$ | 15. | $f(x) = (1/5 x - 2/15) e^{3x};$ |
| 6. | $f(x) = (5/4 x - 5/6) e^{5/3 x};$ | 16. | $f(x) = (1/4 x - 2/3) e^{1/2 x};$ |

- | | | | |
|-----|-----------------------------------|-----|--|
| 7. | $f(x) = (x - 4/3) e^{4/5 x};$ | 17. | $f(x) = (\frac{1}{8} x - \frac{2}{15}) e^{3/2 x};$ |
| 8. | $f(x) = (1/2 x - 4/5) e^x;$ | 18. | $f(x) = (2/3 x - \frac{10}{9}) e^x;$ |
| 9. | $f(x) = (x - 2/9) e^{6 x};$ | 19. | $f(x) = (3/2 x - 1/2) e^{4 x};$ |
| 10. | $f(x) = (1/4 x - 1/3) e^{5/2 x};$ | 20. | $f(x) = (x - 4/5) e^{4/3 x}.$ |

Задача 5. Пользуясь методом антиградиента (см. (124)), найти минимум функции $f(x, y)$. Начальная точка — целая, ближайшая к указанному решению r . Множитель $\varepsilon_k < 0.1$ выбирать в процессе счета.

1. $f(x, y) = 2x^2 - 5/2 x + 2y^2 - 10y$
 $r = \{y = 2.5000, x = 0.62500\};$
2. $f(x, y) = 2x^2 - 16/3 x + 2y^2 - \frac{12}{5} y$
 $r = \{x = 1.3333, y = 0.60000\};$
3. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{13}{10} x + 2y^2 - 14/3 y$
 $r = \{x = 0.32500, y = 1.1667\};$
4. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{68}{15} x + 2y^2 - \frac{19}{5} y$
 $r = \{y = 0.95000, x = 1.1333\};$
5. $f(x, y) = 2x^2 - 6x + 2y^2 - 3y$
 $r = \{y = 0.75000, x = 1.5000\};$
6. $f(x, y) = 2x^2 - 14/3 x + 2y^2 - 8y$
 $r = \{x = 1.1667, y = 2.0\};$
7. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{18}{5} x + 2y^2 - 10y$
 $r = \{y = 2.5000, x = 0.90000\};$
8. $f(x, y) = 2x^2 - 2x + 2y^2 - 9/2 y$
 $r = \{x = 0.50000, y = 1.1250\};$
9. $f(x, y) = 2x^2 - 5x + 2y^2 - 4y$
 $r = \{y = 1.0, x = 1.2500\};$
10. $f(x, y) = 2x^2 - 14/3 x + 2y^2 - 3y$
 $r = \{x = 1.1667, y = 0.75000\};$
11. $f(x, y) = 2x^2 - 5/3 x + 2y^2 - \frac{9}{2} y$
 $r = \{y = 1.1250, x = 0.41667\};$

12. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{22}{3}x + 2y^2 - \frac{16}{5}y$
 $r = \{y = 0.80000, x = 1.8333\};$
13. $f(x, y) = 2x^2 - 13x + 2y^2 - 4y$
 $r = \{x = 3.2500, y = 1.0\};$
14. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{24}{5}x + 2y^2 - 9y$
 $r = \{x = 1.2000, y = 2.2500\};$
15. $f(x, y) = 2x^2 - 7x + 2y^2 - 5y$
 $r = \{x = 1.7500, y = 1.2500\};$
16. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{22}{3}x + 2y^2 - 16/3y$
 $r = \{x = 1.8333, y = 1.3333\};$
17. $f(x, y) = 2x^2 - 11/2x + 2y^2 - \frac{56}{15}y$
 $r = \{y = 0.93333, x = 1.3750\};$
18. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{22}{3}x + 2y^2 - 7/2y$
 $r = \{x = 1.8333, y = 0.87500\};$
19. $f(x, y) = 2x^2 - 10x + 2y^2 - \frac{33}{5}y$
 $r = \{y = 1.6500, x = 2.5000\};$
20. $f(x, y) = 2x^2 - 4x + 2y^2 - \frac{23}{6}y$
 $r = \{x = 1.0, y = 0.95833\}.$

13.7 Численное интегрирование

Задача 1. Для заданного отрезка $[0; b]$ и набора узлов x_k построить квадратурную формулу 3-го порядка (см. (136)). Вычислить с ее помощью приближенно значение интеграла от функции e^{-bx} , сравнить с точным значением

1. $b = 2, X = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$
2. $b = 3, X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
3. $b = 3, X = \{\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}\}$
4. $b = 1, X = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$
5. $b = 1, X = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{9}\}$
6. $b = 1, X = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$

7. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
8. $b = 1, \quad X = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$
9. $b = 2, \quad X = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$
10. $b = 2, \quad X = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$
11. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
12. $b = 1, \quad X = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$
13. $b = 1, \quad X = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$
14. $b = 1, \quad X = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{9}\}$
15. $b = 2, \quad X = \{\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}\}$
16. $b = 2, \quad X = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$
17. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}\}$
18. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
19. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
20. $b = 3, \quad X = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$

Задача 2. Для заданного отрезка $[0; b]$ и набора узлов x_k построить квадратурную формулу 4-го порядка (см. (136)). Вычислить с ее помощью приближенно значение интеграла от функции e^{-bx} , сравнить с точным значением

1. $b = 3, \quad X = \{1/4, 3/4, 3/2, 5/2\}$
2. $b = 2, \quad X = \{1/4, 5/6, 7/6, 7/4\}$
3. $b = 2, \quad X = \{1/3, 5/6, 4/3, 3/2\}$
4. $b = 4, \quad X = \{1/2, 5/3, 7/3, 7/2\}$
5. $b = 4, \quad X = \{1/2, 5/3, 7/3, 7/2\}$
6. $b = 2, \quad X = \{0, 2/3, 7/6, 3/2\}$
7. $b = 3, \quad X = \{1/4, 3/4, 3/2, 5/2\}$
8. $b = 1, \quad X = \{1/6, 1/4, 2/3, 3/4\}$
9. $b = 2, \quad X = \{1/4, 5/6, 7/6, 7/4\}$
10. $b = 4, \quad X = \{1/2, 5/3, 7/3, 7/2\}$
11. $b = 3, \quad X = \{1/2, 1, 2, 5/2\}$
12. $b = 2, \quad X = \{1/6, 2/3, 1, 3/2\}$

13. $b = 2, \quad X = \{1/6, 5/6, 1, 5/3\}$
14. $b = 1, \quad X = \{1/6, 1/4, 2/3, 3/4\}$
15. $b = 1, \quad X = \{1/6, 1/3, 2/3, 5/6\}$
16. $b = 2, \quad X = \{1/6, 2/3, 1, 3/2\}$
17. $b = 2, \quad X = \{1/4, 5/6, 7/6, 7/4\}$
18. $b = 4, \quad X = \{1/2, 5/3, 7/3, 7/2\}$
19. $b = 2, \quad X = \{1/6, 5/6, 1, 5/3\}$
20. $b = 2, \quad X = \{1/3, 5/6, 4/3, 3/2\}$

Задача 3. Для заданного в задаче 2 отрезка $[0; b]$ построить квадратурную формулу Гаусса 3-го порядка (см. (145)). Вычислить с ее помощью приближенно значение интеграла от функции e^{-bx} , сравнить с точным значением.

Задача 4. Для заданного в задаче 2 отрезка $[0; b]$ построить квадратурную формулу Симпсона при $2n = 10$ (см. (141)). Вычислить с ее помощью приближенно значение интеграла от функции e^{-bx} , сравнить с точным значением.

13.8 Специальные методы аппроксимации

13.8.1 h -суммы

Задача 1. Решить систему

$$\lambda_1^m + \lambda_2^m + \lambda_3^m + \lambda_4^m = \alpha_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где $\{\alpha_m\} = \{-1, 13, -19, 97\}$. Другие варианты:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1. $\{-6, 12, -24, 48\};$ | 2. $\{-3, 15, -33, 99\};$ |
| 3. $\{2, 10, 2, 34\};$ | 4. $\{-6, 18, -42, 114\};$ |
| 5. $\{-3, 15, -33, 99\};$ | 6. $\{-2, 12, -26, 84\};$ |
| 7. $\{-4, 8, -16, 32\};$ | 8. $\{0, 2, 0, 2\};$ |
| 9. $\{-1, 3, -1, 3\};$ | 10. $\{-1, 19, -1, 163\};$ |
| 11. $\{-2, 12, -8, 48\};$ | 12. $\{-5, 9, -17, 33\}.$ |

Задача 2. Построить h -сумму пятого порядка для аппроксимации функции

$$f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4,$$

взяв в качестве базисной функцию $h = \frac{1}{1-x}$, где $\{\alpha_m\} = \{1, 15, -17, 99, -209\}$.

Другие варианты:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\{7, 13, 25, 49, 97\};$ | 2. $\{-3, 27, -39, 195, -423\};$ |
| 3. $\{-3, 29, -27, 245, -243\};$ | 4. $\{8, 28, 80, 244, 728\};$ |
| 5. $\{-1, 15, 17, 99, 209\};$ | 6. $\{0, 26, 0, 194, 0\};$ |
| 7. $\{1, 27, 1, 195, 1\};$ | 8. $\{-6, 26, -54, 194, -486\};$ |
| 9. $\{6, 26, 54, 194, 486\};$ | 10. $\{2, 16, 20, 100, 212\};$ |
| 11. $\{0, 20, 0, 164, 0\};$ | 12. $\{0, 32, -18, 260, -210\}.$ |

Задача 3. Построить h -сумму третьего порядка для аппроксимации функции

$$f(x) = \sqrt{1+rx} + px - m.$$

взяв в качестве базисной функцию $h = e^x$, где $[p = 16, r = -10, m = 2]$.

Другие варианты:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $[p = 16, r = -10, m = 2];$ | 2. $[p = 12, r = 19, m = 5];$ |
| 3. $[p = 5, r = -3, m = 1];$ | 4. $[p = 2, r = 3, m = 1];$ |
| 5. $[p = 32, r = -12, m = 1];$ | 6. $[p = 10, r = 16, m = 5];$ |
| 7. $[p = 20, r = 12, m = 1];$ | 8. $[p = \frac{164}{9}, r = -12, m = 3];$ |
| 9. $[p = 31, r = -19, m = 5];$ | 10. $[p = 6, r = 10, m = 2];$ |
| 11. $[p = 26, r = -16, m = 5];$ | 12. $[p = 16, r = -10, m = 2].$ |

Задача 4. Построить h -сумму второго порядка, если базисная функция и аппроксимируемая функция имеют соответственно вид

$$h(x) = \frac{1}{1-nx}; \quad f(x) = e^{5nx},$$

где n — номер варианта.

Задача 5. Построить h -сумму третьего порядка, если базисная функция и аппроксимируемая функция имеют соответственно вид

$$h(x) = \frac{1}{1-nx}; \quad f(x) = e^{\sqrt{2}nx},$$

где n — номер варианта. Испытать качество аппроксимации, взяв $x = 0.1$, $x = 0.01$.

13.8.2 Амплитудно-частотные суммы

Задача 1. Решить систему дискретных моментов вида (204) при $n = 2$

$$\mu_1 \lambda_1^m + \mu_2 \lambda_2^m = \alpha_m, \quad m = \overline{0, 3},$$

где $\{\alpha_m\} = \{1, 11, -41, 359\}$. Другие варианты:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $\{1, 10, -28, 232\}$; | 2. $\{1, 12, 16, 192\}$; |
| 3. $\{1, 1, -7, -71\}$; | 4. $\{1, 9, -17, 141\}$; |
| 5. $\{1, 6, 4, 24\}$; | 6. $\{1, 12, 46, 258\}$; |
| 7. $\{1, 7, 47, 307\}$; | 8. $\{1, 11, 89, 659\}$; |
| 9. $\{1, 2, -4, -88\}$; | 10. $\{1, 11, -7, 179\}$; |
| 11. $\{1, 16, 14, 466\}$; | 12. $\{1, 1, -17, -215\}$; |
| 13. $\{1, 15, 63, 459\}$; | 14. $\{1, 21, 49, 1029\}$; |

Задача 2.

Решить систему дискретных моментов вида (204) при $n = 3$

$$\mu_1 \lambda_1^m + \mu_2 \lambda_2^m + \mu_3 \lambda_3^m = \alpha_m, \quad m = \overline{0, 5},$$

где $\{\alpha_m\} = \{0, -1, 15, -61, 255, -1021\}$. Другие варианты:

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\{0, 5, 3, 11, 15, 35\}$; | 2. $\{0, 1, 3, -5, 15, -29\}$; |
| 3. $\{0, -1, 15, -61, 255, -1021\}$; | 4. $\{0, 1, 9, -47, 225, -959\}$; |
| 5. $\{0, 6, -16, 54, -160, 486\}$; | 6. $\{0, 0, 8, -24, 80, -240\}$; |
| 7. $\{0, 6, -16, 54, -160, 486\}$; | 8. $\{0, 4, -6, 16, -30, 64\}$; |
| 9. $\{0, -9, -1, -117, 95, -1509\}$; | 10. $\{0, -4, -6, -16, -30, -64\}$; |
| 11. $\{0, 7, 15, 67, 255, 1027\}$; | 12. $\{0, 9, 9, 81, 225, 1089\}$. |

Задача 3. При $n = 2$ составить формулу численного дифференцирования в виде

$$(zf(z))' \approx H_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}, f; z) - p f_{n-1} z^{n-1} - q f_{2n-1} z^{2n-1},$$

где $\{p = -1, q = 1\}$. Другие варианты:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1. $\{p = 1, q = 2\};$ | 2. $\{p = 1, q = 11\};$ |
| 3. $\{p = -1, q = -4\};$ | 4. $\{p = -3, q = -9\};$ |
| 5. $\{p = -2, q = -10\};$ | 6. $\{p = 1, q = 2\};$ |
| 7. $\{p = 0, q = -4\};$ | 8. $\{p = -2, q = 2\};$ |
| 9. $\{p = -4, q = -8\};$ | 10. $\{p = -3, q = -13\};$ |
| 11. $\{p = -4, q = -8\};$ | 12. $\{p = 7, q = -3\}.$ |

Задача 4. При $n = 3$ составить формулу численного дифференцирования в виде

$$(zf(z))' \approx H_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}, f; z) - p f_{n-1} z^{n-1} - q f_{2n-1} z^{2n-1},$$

где $\{p = 1, q = -1\}$. Другие варианты:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $\{p = -1, q = 5\};$ | 2. $\{p = -1, q = 5\};$ |
| 3. $\{p = 5, q = -2\};$ | 4. $\{p = 6, q = -3\};$ |
| 5. $\{p = 0, q = -5\};$ | 6. $\{p = -2, q = 5\};$ |
| 7. $\{p = -1, q = -8\};$ | 8. $\{p = 8, q = -4\};$ |
| 9. $\{p = -3, q = 7\};$ | 10. $\{p = -1, q = 10\};$ |
| 11. $\{p = -1, q = -7\};$ | 12. $\{p = -1, q = -8\}.$ |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

Пособие содержит необходимый теоретический материал по курсу «Численные методы». Приведены примеры решений ключевых задач. Кроме этого авторами была поставлена задача рассмотрения новых нетрадиционных методов аппроксимации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 2006. – 631 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : БИНОМ : Лаборатория знаний, 2009. – 632 с.
3. Волков, Е. А. Численные методы : учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. / Е. А. Волков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
4. Воробьев, Г. Н. Практикум по численным методам / Г. Н. Воробьев, А. Н. Данилова. – М. : Высш. шк., 2007. – 184 с.
5. Исаков, В. Н. Элементы численных методов : учеб. пособие / В. Н. Исаков. – М. : Академия, 2008. – 188 с.
6. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1978. – 512 с.
7. Протасов, И. Д. Лекции по вычислительной математике / И. Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2009. – 184 с.
8. Самарский, А. А. Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – 3-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2005. – 288 с.

9. P. V. Chunaev. Least deviation of logarithmic derivatives of algebraic polynomials from zero. J. Approx. Theory, {\bf 185} (2014). 98 – 106.
10. P. V. Chunaev, V. I. Danchenko. Approximation by amplitude and frequency operators // Journal of Approximation Theory 207. (2016). 1 – 31.

Учебное электронное издание

ДАНЧЕНКО Владимир Ильич
ДАНЧЕНКО Дания Яхиевна
КОНДАКОВА Елена Николаевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10;
Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 8 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и электроники
кафедра функционального анализа и его приложений
faip@vlsu.ru