

**Владимирский государственный университет**

**В. М. ГАВРИЛОВ    Н. Н. КОРНЕЕВА**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
РАДИОВОЛН**

**Учебное пособие**

**Владимир 2024**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. М. ГАВРИЛОВ Н. Н. КОРНЕЕВА

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

*Электронное издание*



ISBN 978-5-9984-1964-5

© ВлГУ, 2024

УДК 537.8  
ББК 32.840

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент  
зав. кафедрой электроники, приборостроения и биотехнических систем  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*К. В. Татмышевский*

Кандидат технических наук  
руководитель проектов АО «КОБРА»  
(Конструкторское опытное бюро радиоаппаратуры)  
*С. И. Кучин*

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Гаврилов, В. М.** Электродинамика и распространение радиоволн [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. М. Гаврилов, Н. Н. Корнеева ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 137 с. – ISBN 978-5-9984-1964-5. – Электрон. дан. (7,48 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Рассматривается применение основных положений и аналитических методов теории электромагнитного поля для решения и анализа базовых задач электродинамики в радиотехническом и радиофизическом приложении. Тематика и объем материала дисциплины соответствуют учебной программе курса и требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 11.03.01 «Радиотехника». Основное внимание уделено электродинамическому анализу направляющих структур различных типов, исследованию колебательных систем, рассмотрению физических процессов, связанных с распространением радиоволн в анизотропных средах и естественных условиях.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.01 – Радиотехника.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 101. Библиогр.: 12 назв.

ISBN 978-5-9984-1964-5

© ВлГУ, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН .....	6
1.1. Направляющие структуры и направляемые электромагнитные волны .....	6
1.2. Связь между продольными и поперечными составляющими полей в линии передачи .....	7
1.3. Общие свойства электромагнитных волн в линиях передачи .....	10
1.4. Поперечные электромагнитные волны .....	12
1.5. Электрические волны .....	14
1.6. Магнитные волны .....	16
1.7. Групповая скорость .....	18
1.8. Мощность, переносимая электромагнитной волной по линии передачи .....	23
Темы для закрепления материала .....	24
2. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ .....	25
2.1. Прямоугольный волновод .....	25
2.2. Круглый волновод .....	33
2.3. Токи на стенках прямоугольного и круглого волноводов .....	41
2.4. Волны в коаксиальной линии .....	43
2.5. Концепция парциальных волн .....	47
2.6. Линии поверхностной волны .....	49
2.7. Полосковые линии .....	56
Темы для закрепления материала .....	64
3. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ПО ЛИНИЯМ ПЕРЕДАЧИ .....	65
3.1. Предельная и допустимая мощности .....	65
3.2. Коэффициент затухания. Общее соотношение .....	65
3.3. Затухание, вызванное потерями в среде, заполняющей линию передачи .....	67
3.4. Затухание, вызванное потерями в металлических элементах линии передачи .....	67
3.5. Передача энергии по коаксиальной линии .....	69
3.6. Передача энергии по прямоугольному волноводу .....	73
3.7. Передача энергии по круглому волноводу .....	75
Темы для закрепления материала .....	77

4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СВЧ.	
ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ.....	78
4.1. Общие свойства объемных резонаторов.....	78
4.2. Объемный резонатор из отрезка прямоугольного волновода с волной $H_{10}$ .....	80
4.3. Общая задача о колебаниях в прямоугольном резонаторе. Классификация типов колебаний .....	83
4.4. Цилиндрический объемный резонатор .....	86
4.5. Способы возбуждения и включения объемных резонаторов .....	88
4.6. Добротность объемных резонаторов.....	90
4.7. Другие типы объемных резонаторов.....	93
Темы для закрепления материала .....	95
5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....	96
В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ .....	96
5.1. Магнитные свойства вещества. Ферриты .....	96
5.2. Линейно поляризованные волны в намагниченной ферритовой среде .....	98
5.3. Волны с круговой поляризацией в гироманнитных средах .....	101
5.4. Эффект Фарадея.....	103
5.5. Эффект смещения поля в прямоугольном волноводе с поперечно подмагниченным ферритом .....	105
Темы для закрепления материала .....	108
6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН.....	109
6.1. Общие характеристики диапазонов радиоволн .....	109
6.2. Распространение радиоволн в свободном пространстве .....	110
6.3. Область пространства, существенно участвующая в формировании поля на заданной линии .....	112
6.4. Электродинамические свойства земной поверхности и атмосферы Земли .....	116
6.5. Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн.....	121
6.6. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов.....	127
Темы для закрепления материала .....	134
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	135
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	136

## ВВЕДЕНИЕ

Курс «Электродинамика и распространение радиоволн» относится к базовым дисциплинам, закладывающим основы профессиональной подготовки радиоинженера. На его основе формируются последующие инженерные дисциплины. Этот курс базируется на таких общенаучных дисциплинах, как высшая математика, физика, теория цепей, теория электромагнитного поля.

За последнее десятилетие в радиотехнике сверхвысоких частот, антенной технике, в задачах распространения радиоволн в естественных условиях произошли существенные изменения, связанные с освоением новых частотных диапазонов, совершенствованием элементной базы радиоустройств, с внедрением компьютерных методов проектирования. Совершенствуется и фундамент этих технологических направлений – курс «Электродинамика и распространение радиоволн», в котором неизменной остается методика изложения материала: теоретический материал излагается по мере необходимости, а для лучшего освоения дисциплины математический анализ материала приводится полностью.

В учебном пособии рассматриваются вопросы прикладной электродинамики, включая принципы анализа явлений в направляющих и колебательных структурах диапазона сверхвысоких частот, основы теории поверхностных волн и замедляющих структур, методы анализа распространения электромагнитных волн в анизотропных диодах. Кратко рассматриваются компьютерные методы решения электромагнитных задач, изучаются особенности распространения радиоволн в земных условиях, дается оценка влияния электродинамических параметров земной поверхности и атмосферы Земли на условие распространения радиоволн различных диапазонов.

Изложение и степень подробности математических преобразований позволяют студентам самостоятельно изучить представленные материалы.

В перечень рекомендуемой литературы включены книги по прикладной электродинамике, распространению радиоволн, математике и смежным вопросам. Эти источники позволяют студентам углубить знания по изучаемой дисциплине.

# 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

## 1.1. Направляющие структуры и направляемые электромагнитные волны

*Направляемые волны* в отличие от свободно распространяющихся могут существовать только при наличии направляющих элементов. Их комбинация образует *направляющую структуру*. Направляющие структуры служат для передачи энергии электромагнитной волны от источника в нагрузку, поэтому обычно их называют *линиями передачи энергии*. Линии передачи, у которых форма и размеры поперечного сечения не меняются в продольном направлении, называются *регулярными*. Линии передачи, у которых электродинамические параметры заполняющей среды и граничные условия на направляющих элементах не меняются в продольном направлении, называются *однородными*. На рис. 1.1 изображены поперечные сечения используемых на практике регулярных однородных линий передачи: двухпроводной (а), коаксиальной (б), экранированной двухпроводной (в), симметричной (г) и несимметричной (д) полосковых линий, диэлектрического волновода (е), диэлектрического волновода с металлическим стержнем (ж) и полых металлических волнопроводов: прямоугольного (з), круглого (и) и эллиптического (к).

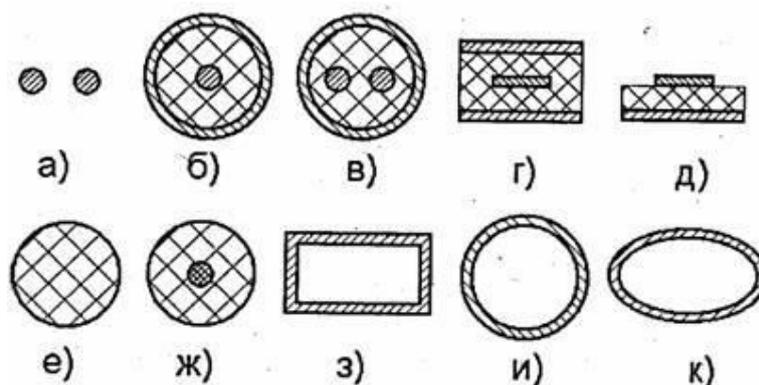


Рис. 1.1

Линии передачи делятся на два класса: линии открытого типа (рис.1.1, а, г, д, е, ж) и линии закрытого типа (рис.1.1, б, в, з, и, к). В линиях передачи закрытого типа направляемая волна распространяется в структуре, экранированной от внешней среды замкнутой металлической поверхностью. В линиях открытого типа замкнутая металлическая поверхность отсутствует и их конструируют таким образом,

чтобы направляемая волна была сосредоточена вблизи направляющих элементов. В линиях открытого типа возможно излучение в окружающее пространство, и они подвержены влиянию внешних источников электромагнитного поля.

По структуре поля направляемые волны делятся на поперечные, электрические, магнитные и гибридные.

*Поперечными волнами, или Т-волнами,* называют волны, у которых векторы  $E$  и  $H$  перпендикулярны направлению распространения волны и не имеют продольных составляющих.

*Электрическими волнами, или Е-волнами,* называют волны, у которых вектор  $E$  имеет как поперечные, так и продольную составляющие, а продольная составляющая вектора  $H$  равна нулю.

*Магнитными волнами, или Н-волнами,* называют волны, у которых вектор  $H$  имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора  $E$  равна нулю.

*Гибридными, или смешанными, волнами* называют волны, у которых и вектор  $E$ , и вектор  $H$  наряду с поперечными составляющими имеют и продольные составляющие.

## 1.2. Связь между продольными и поперечными составляющими полей в линии передачи

В произвольной бесконечной по длине регулярной и однородной линии передачи без потерь составляющие поля направляемых волн удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{E} = 0; \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \dot{H} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{H} = 0. \quad (1.2)$$

Пусть линия передач ориентирована вдоль оси  $z$ , тогда для составляющих поля направляемых волн справедливы соотношения

$$\dot{E} = \dot{E}_s e^{\pm jhz}; \quad (1.3)$$

$$\dot{H} = \dot{H}_s e^{\pm jhz}, \quad (1.4)$$

где  $h$  – постоянная распространения, которая в линии передачи без потерь совпадает с фазовой постоянной;  $\dot{E}_s$  и  $\dot{H}_s$  – описывают распределение поля в поперечном сечении линии передачи.

Для линии с произвольным по форме поперечным сечением оператор  $\nabla^2$  в (1.1), (1.2) удобно представить в виде

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.5)$$

Подставляя формулы (1.3) и (1.4) в (1.1) и (1.2) с учетом (1.5), получим

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E} + (\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2) \dot{E} = 0; \quad (1.6)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H} + (\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2) \dot{H} = 0. \quad (1.7)$$

Обозначим разность в скобках

$$g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2. \quad (1.8)$$

Величину  $g$  называют *поперечным волновым числом*.

С учетом (1.8) соотношения (1.6), (1.7) можно записать в виде

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E} + g^2 \dot{E} = 0; \quad (1.9)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H} + g^2 \dot{H} = 0. \quad (1.10)$$

Векторы  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  направляемых волн взаимосвязаны, поэтому нахождение поля может быть сведено к определению составляющих  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$ , выразив поперечные составляющие через продольные. Поперечные составляющие можно выразить через продольные с помощью первого и второго уравнения Максвелла

$$\text{rot} \dot{H} = j\omega \varepsilon_a \dot{E}; \quad (1.11)$$

$$\text{rot} \dot{E} = -j\omega \mu_a \dot{H}. \quad (1.12)$$

Полагая направляемые волны распространяющимися в положительном направлении оси  $z$  и учитывая, что в этом случае дифференцирование по  $z$  эквивалентно умножению на  $(-jh)$ , получим следующие выражения для поперечных проекций уравнений (1.11), (1.12) на оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + jh \dot{H}_y = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x; \quad -jh \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega \mu_a \dot{H}_y; \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + jh \dot{E}_y = -j\omega \mu_a \dot{H}_x; \quad -jh \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_y. \quad (1.14)$$

Выражая  $\dot{H}_y$  из второго уравнения системы (1.13) и подставляя полученное соотношение в первое уравнение системы, получим

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \frac{jh}{j\omega \mu_a} \left( jh \dot{E}_x + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right) = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x. \quad (1.15)$$

Умножая левую и правую части формулы (1.15) на  $j\omega\mu_a$  и раскрывая скобки, получим

$$j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - h^2 \dot{E}_x + jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -\omega^2 \varepsilon_a \dot{E}_x. \quad (1.16)$$

Перенесем из левой части уравнения (1.16)  $h^2 \dot{E}_x$  в правую часть. С учетом формулы (1.8) имеем

$$-g^2 \dot{E}_x = jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \quad (1.17)$$

Выражая  $\dot{E}_x$  из первого уравнения системы (1.13) и подставляя полученное соотношение во второе уравнение, будем иметь

$$-\frac{jh}{j\omega\varepsilon_a} \left( jh \dot{H}_y + \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y. \quad (1.18)$$

Умножая левую и правую части уравнения (1.18) на  $j\omega\varepsilon_a$  и раскрывая скобки, составим следующее выражение:

$$-jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + h^2 \dot{H}_y - j\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{H}_y. \quad (1.19)$$

Перенесем из левой части уравнения (1.19)  $h^2 \dot{H}_y$  в правую часть. С учетом формулы (1.8) получим

$$-g^2 \dot{H}_y = jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Аналогичным образом решая систему уравнений (1.14) относительно  $\dot{E}_y$  и  $\dot{H}_x$  будем иметь такие уравнения:

$$-g^2 \dot{E}_y = jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; \quad (1.21)$$

$$-g^2 \dot{H}_x = jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}. \quad (1.22)$$

Система уравнений (1.17), (1.20) – (1.22) связывает поперечные и продольные составляющие поля в декартовой системе координат. Для выражения этой связи в произвольной системе координат перейдем к векторной форме уравнений. Введем вектор  $\dot{\vec{E}}_{\perp} = \bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y$ . Подставляя в это выражение вместо  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  их значения из формул (1.17) и (1.21), получим

$$-g^2 (\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y) = (jh \partial \dot{E}_z / \partial x + j\omega\mu_a \partial \dot{H}_z / \partial y) \bar{1}_x + (jh \partial \dot{E}_z / \partial y - j\omega\mu_a \partial \dot{H}_z / \partial x) \bar{1}_y. \quad (1.23)$$

Преобразуем правую часть уравнения (1.23) следующим образом:

$$-g^2 (\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y) = jh (\bar{1}_x \partial \dot{H}_z / \partial x + \bar{1}_y \partial \dot{E}_z / \partial y) - j\omega\mu_a (-\bar{1}_x \partial \dot{H}_z / \partial y + \bar{1}_y \partial \dot{H}_z / \partial x). \quad (1.24)$$

Вводя обозначение  $grad_{\perp} = \bar{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial}{\partial y}$  и учитывая, что

$[\bar{1}_z grad_{\perp}] = \bar{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial}{\partial y}$ , окончательно имеем

$$-g^2 \dot{\bar{E}}_{\perp} = jh grad_{\perp} \dot{E}_z - j\omega \mu_a [\bar{1}_z grad_{\perp} \dot{H}_z]. \quad (1.25)$$

Вводя вектор  $\dot{\bar{H}}_{\perp} = \bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y$ , с помощью формул (1.20), (1.22) получим аналогичное соотношение

$$-g^2 \dot{\bar{H}}_{\perp} = jh grad_{\perp} \dot{H}_z + j\omega \varepsilon_a [\bar{1}_z grad_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (1.26)$$

Таким образом, для нахождения структуры поля волн  $E$ ,  $H$  и гибридных необходимо решить с учетом граничных условий два однородных уравнения Гельмгольца относительно продольных составляющих  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + g^2 \dot{E}_z = 0; \quad (1.27)$$

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + g^2 \dot{H}_z = 0, \quad (1.28)$$

а для вычисления поперечных составляющих следует использовать формулы (1.25), (1.26).

### 1.3. Общие свойства электромагнитных волн в линиях передачи

Выразим постоянную распространения  $h$  из равенства  $g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2$

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}. \quad (1.29)$$

Величина  $h$  в соотношении (1.29) является вещественной величиной, если  $g \leq \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ , и мнимой величиной, если  $g > \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ . В первом случае фаза составляющих векторов поля линейно зависит от координаты  $z$ , что является признаком распространения волны вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью  $v_{\phi} = \omega/h$ . Во втором случае фаза составляющих векторов поля не зависит от координат. Поле имеет характер стоячей волны и экспоненциально убывает вдоль оси  $z$ . Экспоненциальное убывание поля вдоль линии передачи не связано с потерями энергии, так как рассматривается линия передачи без потерь.

Частота, определяемая из условия

$$g = 2\pi f_{\text{кр}} \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}, \quad (1.30)$$

называется критической

$$f_{\text{кр}} = g/2\pi \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}. \quad (1.31)$$

Соответствующая этой частоте критическая длина волны равна

$$\lambda_{\text{кр}} = V_0 / f_{\text{кр}} = 2\pi / g. \quad (1.32)$$

Подставляя волновое число  $\kappa = \omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = 2\pi/\lambda$  и  $g$  из равенства (1.32) в (1.29), получим

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - (2\pi/\lambda_{\text{гп}})^2} = \kappa \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{гп}})^2}. \quad (1.33)$$

Из уравнения (1.33) следует, что  $h$  является действительной величиной, т. е. поле представляет собой свободно распространяющуюся волну в линии передачи лишь на частотах и длинах волн, удовлетворяющих неравенствам

$$f \geq f_{\text{кр}}, \quad \lambda \leq \lambda_{\text{кр}}. \quad (1.34)$$

Неравенства (1.34) называют *условиями распространения волны в линии передачи*. Под длиной волны  $\lambda_{\text{в}}$  в линии передачи понимается минимальное расстояние между поперечными сечениями, в которых волны отличаются по фазе на  $2\pi$ . Так как зависимость составляющих поля от координаты  $z$  описывается выражением  $e^{-jhz}$ , то  $\lambda_{\text{в}}h = 2\pi$ ,  $\lambda_{\text{в}} = 2\pi/h$

$$\lambda_{\text{в}} = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}, \quad (1.35)$$

а фазовая скорость определяется соотношением

$$V_{\phi} = \omega / h = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (1.36)$$

Из выражений (1.35) и (1.36) следует, что при  $f \geq f_{\text{кр}}$ ,  $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$   $\lambda_{\text{в}}$  и  $V_{\phi}$  для волн  $E$  и  $H$  больше  $\lambda$  и  $V_{\phi}$  волны, свободно распространяющейся в безграничной однородной среде без потерь с параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$ . У волн  $E$  и  $H$  фазовая скорость зависит от частоты. Это явление называют *дисперсией волн*. При  $f = f_{\text{кр}}$  фазовая скорость равна бесконечности, при увеличении частоты  $V_{\phi}$  приближается к скорости света в среде с параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$  (рис.1.2).

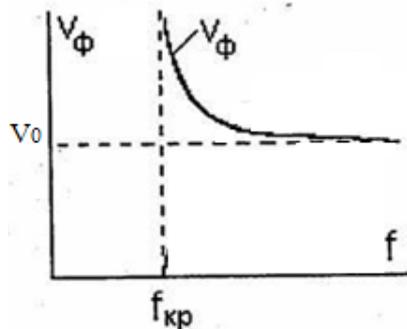


Рис. 1.2

## 1.4. Поперечные электромагнитные волны

Поперечными волнами, или *T*-волнами, называют волны, у которых векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны направлению распространения волны, т. е. не имеют продольных составляющих. Полагая в соотношениях (1.37), (1.38)  $\dot{E}_z = 0$  и  $\dot{H}_z = 0$

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z - j\omega \mu_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z]; \quad (1.37)$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z + j\omega \varepsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z], \quad (1.38)$$

$$\text{получим равенства } g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = 0, \quad g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = 0. \quad (1.39)$$

Так как  $\dot{\vec{E}}_{\perp} \neq 0$ ,  $\dot{\vec{H}}_{\perp} \neq 0$ , то равенства (1.39) выполняются, если

$$g = 0. \quad (1.40)$$

Нулевому значению поперечного волнового числа в соответствии с формулами  $f_{\text{кр}} = g/2\pi \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$  и  $\lambda_{\text{кр}} = V_0 / f_{\text{кр}} = 2\pi / g$  будут соответствовать

$$\lambda_{\text{кр}}^T = \infty, \quad f_{\text{кр}}^T = 0. \quad (1.41)$$

Следовательно, в направляющих структурах, где возможно распространение *T*-волн, эти волны существуют на любых частотах.

Подставляя  $g^2 = 0$  в  $g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2$ , получим

$$h^T = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = k; \quad (1.42)$$

$$V_{\phi}^T = \omega / h^T = 1 / \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = V_0; \quad (1.43)$$

$$\lambda_{\text{в}}^T = 2\pi / h^T = V_0 / f = \lambda. \quad (1.44)$$

Из формул (1.42), (1.43) и (1.44) следует, что постоянная распространения (фазовая постоянная), фазовая скорость и длина волны в линии передачи совпадают с аналогичными параметрами волны, свободно распространяющейся в безграничной однородной изотропной среде.

Полагая в уравнениях  $\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}} + g^2 \dot{\vec{E}} = 0$ ,  $\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}} + g^2 \dot{\vec{H}} = 0$ ,  $g^2 = 0$ ,  $E_z = H_z = 0$ , имеем

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = 0; \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = 0. \quad (1.45)$$

Уравнения (1.45) представляют собой двумерные уравнения Лапласа. Поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, будет потенциальным. Это означает, что решение уравнений (1.45) может быть выражено через градиент некоторых функций. Например,

$$\dot{\vec{E}}_{\perp} = -\text{grad}_{\perp} \dot{U}, \quad (1.46)$$

где  $\dot{U}$  – скалярный потенциал, также удовлетворяющий уравнению Лапласа  $\nabla_{\perp}^2 \dot{U} = 0$ .

Установим связь между векторами  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$  волны типа  $T$  в линии передачи. Поперечные проекции первого и второго уравнений Максвелла  $rot \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}$ ,  $rot \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}$ .

На оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат для волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $z$ , получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + jh\dot{H}_y = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x; \quad (1.47)$$

$$-jh\dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y; \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + jh\dot{E}_y = -j\omega\mu_a \dot{H}_x; \quad (1.49)$$

$$-jh\dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y. \quad (1.50)$$

Полагая в формулах (1.47) – (1.50)  $E_z = H_z = 0$ , имеем следующие соотношения:

$$\dot{H}_y = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} \dot{E}_x, \quad \dot{E}_y = -\frac{\omega\mu_a}{h} \dot{H}_x, \quad \dot{E}_x = \frac{\omega\mu_a}{h} \dot{H}_y, \quad \dot{H}_x = -\frac{\omega\varepsilon_a}{h} \dot{E}_y, \quad (1.51)$$

которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$(\bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y) = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} (-\bar{1}_x \dot{E}_y + \bar{1}_y \dot{E}_x) = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} [\bar{1}_z (\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y)] \quad (1.52)$$

или в краткой записи

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]. \quad (1.53)$$

Из выражения (1.53) следует, что векторы  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$  волны  $T$  взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны. Подставляя  $h^T = \omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$  в (1.53), будем иметь

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}] = (1/Z_c^T) [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}], \quad (1.54)$$

где  $Z_c^T = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$  – характеристическое сопротивление волны  $T$ .

В уравнения (1.45) не входит частота, т. е. структура поля в поперечных сечениях линии не зависит от частоты. При этом для определения вектора  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  достаточно решить двумерную электростатическую задачу для такой же линии. Вектор  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$  может быть найден непосредственно по заданному распределению постоянного тока в рассматриваемой линии, либо по формуле, аналогичной (1.48), после определения вектора  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$ . Аналогия с электростатическим полем и полем постоянных токов относится лишь к распределению поля в плоскости поперечного

сечения (рис.1.3). Распределение поля  $T$ -волны вдоль оси  $z$  имеет волновой характер. В поперечной плоскости распределение поля  $T$ -волны не остается неизменным во времени, изменяясь по гармоническому закону.

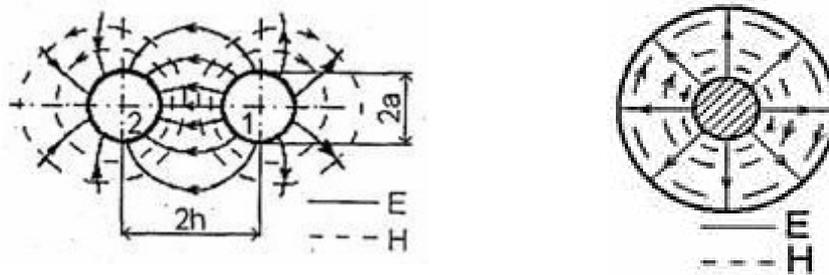


Рис. 1.3

При конечной проводимости металлических проводников линии передачи появляется отличная от нуля касательная составляющая напряженности электрического поля, параллельная оси  $z$  и нарушающая признаки  $T$ -волны. Но при достаточно высокой проводимости металла структура поля мало отличается от структуры поля  $T$ -волны в идеально проводящей системе и ими обычно пренебрегают.

### 1.5. Электрические волны

Электрическими волнами, или  $E$ -волнами, называют волны, у которых вектор  $\vec{E}$  имеет как поперечные, так и продольную составляющие, а продольная составляющая вектора  $H$  равна нулю:  $E_{\perp} \neq 0, H_{\perp} \neq 0, \dot{E}_z \neq 0$  и  $\dot{H}_z = 0$ . Полагая в соотношениях

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z - j\omega \mu_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z];$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z + j\omega \epsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]$$

$\dot{H}_z = 0$ , получим

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z, \quad (1.55)$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = j\omega \epsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (1.56)$$

Подставляя  $\text{grad}_{\perp} \dot{E}_z$  из выражения (1.55) в (1.56), после преобразования получим

$$\dot{H}_{\perp} = \frac{\omega \epsilon_a}{h} [\vec{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]. \quad (1.57)$$

Из формулы (1.57) следует, что векторы  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$  волны  $E$  взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны. Соотношение (1.57) можно переписать следующим образом:

$$\dot{H}_{\perp} = 1/Z_c^E [\bar{1}_z \dot{E}_{\perp}], \quad (1.58)$$

где  $Z_c^E$  – характеристическое сопротивление волны  $E$ , которое, как следует из (1.58), определяется выражением

$$Z_c^E = \frac{h}{\omega \varepsilon_a}. \quad (1.59)$$

Подставляя в формулу (1.59) формулу для  $h$

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - (2\pi/\lambda_{кр})^2} = k \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}, \quad (1.60)$$

получим развернутое выражение характеристического сопротивления волн  $E$  типа

$$Z_c^E = \frac{h}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2} = Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (1.61)$$

Из выражения (1.61) следует, что характеристическое сопротивление  $E$ -волн зависит от длины волны. При  $\lambda < \lambda_{кр}$  ( $f > f_{кр}$ )  $Z_c^E$  меньше  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ . При  $\lambda = \lambda_{кр}$  ( $f = f_{кр}$ )  $Z_c^E = 0$ . При уменьшении  $\lambda$  (с увеличением  $f$ )  $Z_c^E$  возрастает от нуля до  $Z_c$  (рис. 1.4).

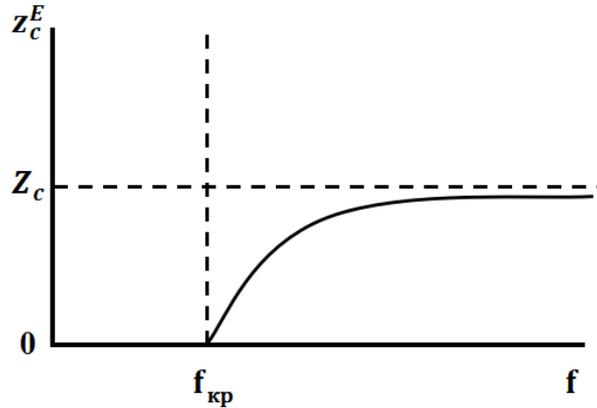


Рис.1.4

При  $\lambda > \lambda_{кр}$  ( $f < f_{кр}$ )  $Z_c^E$ , вектор Пойтинга и фазовая скорость принимают мнимое значение. Реактивный характер электромагнитного поля приводит к экспоненциальному убыванию амплитуды поля и отсутствию переноса энергии в линии. Фазовая скорость волны  $E$  определяется выражением

$$V_{\phi} = \omega / h = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (1.62)$$

При  $\lambda < \lambda_{кр}$  ( $f > f_{кр}$ )  $V_{\phi} > V_0$ . При  $\lambda = \lambda_{кр}$  ( $f = f_{кр}$ )  $V_{\phi} = \infty$ . При  $f \rightarrow \infty$   $V_{\phi} \rightarrow V_0$  (рис. 1.2). Из выражения (1.62) следует, что у  $E$ -волн фазовая скорость зависит от частоты, т. е.  $E$ -волны относятся к диспергирующим.

## 1.6. Магнитные волны

Магнитными волнами, или  $H$ -волнами, называют волны, у которых вектор  $\vec{H}$  имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора  $\vec{E}$  равна нулю:  $E_{\perp} \neq 0$ ,  $H_{\perp} \neq 0$ ,  $\dot{E}_z = 0$  и  $\dot{H}_z \neq 0$ . Полагая в соотношениях

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z - j\omega\mu_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z];$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z + j\omega\varepsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]$$

$\dot{E}_z = 0$ , получаем

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = -j\omega\mu_a [\vec{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z]; \quad (1.63)$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z. \quad (1.64)$$

Подставляя  $\text{grad}_{\perp} \dot{H}_z$  из формулы (1.64) в (1.63), после преобразования будем иметь

$$\dot{\vec{E}}_{\perp} = -\frac{\omega\mu_a}{h} [\vec{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}]. \quad (1.65)$$

Приведем соотношение (1.65) к виду  $\dot{\vec{H}}_{\perp} = 1/Z_C^H [\vec{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]$ , для чего левую и правую части выражения (1.65) умножим векторно на  $\vec{1}_z$

$$-\left[\vec{1}_z [\vec{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}]\right] = \frac{h}{\omega\mu_a} [\vec{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]. \quad (1.66)$$

Двойное векторное произведение в левой части уравнения (1.66) преобразуем с помощью соотношения  $[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$

$$[\vec{1}_z [\vec{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}]] = \vec{1}_z (\vec{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}) - \dot{\vec{H}}_{\perp} (\vec{1}_z \vec{1}_z) = -\dot{\vec{H}}_{\perp}. \quad (1.67)$$

Подставляя результат (1.67) в (1.66), получим

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{h}{\omega\mu_a} [\vec{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]. \quad (1.68)$$

Из соотношения (1.68) следует, что векторы  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$  волн  $H$ -типа взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны.

Раскрывая выражение (1.64) относительно проекций в декартовой системе координат, получим

$$-g^2 \dot{H}_x = jh \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad -g^2 H_y = jh \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (1.69)$$

Используя известное граничное условие для нормальной составляющей напряженности магнитного поля на идеально проводящей поверхности  $\dot{H}_n = 0$ , для первого равенства из системы (1.69) получим на идеально проводящей поверхности, совмещенной с плоскостью YOZ,  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$  при  $x = 0$ . Аналогично для второго равенства из системы (1.69) получим на идеально проводящей поверхности, совмещенной с плоскостью XOZ,  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$  при  $y = 0$ . В общем виде полученные равенства можно записать в виде обобщенного граничного условия для идеально проводящей поверхности  $S$

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial n} = 0. \quad (1.70)$$

Соотношение (1.68) можно переписать следующим образом:

$$\dot{H}_\perp = 1/Z_c^H [\vec{1}_z \dot{E}_\perp], \quad (1.71)$$

где  $Z_c^H$  – характеристическое сопротивление волны  $H$ , которое, как следует из (1.68), определяется соотношением

$$Z_c^H = \frac{\omega \mu_a}{h}. \quad (1.72)$$

Подставляя в (1.72) выражение для  $h$

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - (2\pi/\lambda_{кр})^2} = g \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2},$$

получим развернутое выражение характеристического сопротивления волны  $H$ -типа

$$Z_c^H = \frac{\omega \mu_a}{h} = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2} = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (1.73)$$

Из выражения (1.73) следует, что характеристическое сопротивление  $H$ -волн зависит от длины волны. При  $\lambda < \lambda_{кр}$  ( $f > f_{кр}$ )  $Z_c^H$  больше  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ . При  $\lambda = \lambda_{кр}$  ( $f = f_{кр}$ )  $Z_c^H = \infty$ . При уменьшении  $\lambda$  (с увеличением  $f$ )  $Z_c^H$  убывает от  $\infty$  до  $Z_c$  (рис. 1.5). При  $\lambda > \lambda_{кр}$  ( $f < f_{кр}$ )  $Z_c^H$  становится мнимой величиной; поперечные составляющие векторов электрического и магнитного полей отличаются по фазе на 90 градусов, и вектор Пойтинга принимает мнимое значение. В этом случае в линии не происходит перенос энергии, а экспоненциальное убывание амплитуды полей обусловлено реактивным характером электромагнитного поля.

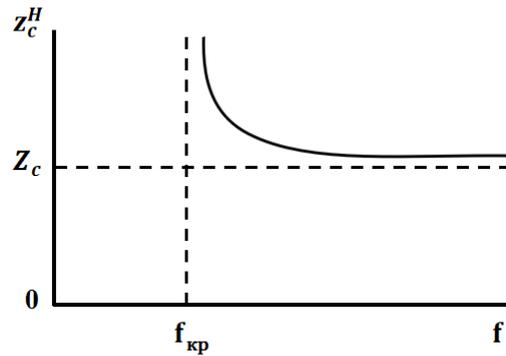


Рис. 1.5

Фазовая скорость волны  $H$  определяется выражением

$$V_\phi = \omega / h = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}.$$

При  $\lambda < \lambda_{кр}$  ( $f > f_{кр}$ )  $V_\phi > V_0$ . При  $\lambda = \lambda_{кр}$  ( $f = f_{кр}$ )  $V_\phi = \infty$ . При  $f \rightarrow \infty$   $V_\phi \rightarrow V_0$  (см. рис. 1.2). Таким образом, у  $H$ -волн, так же как и у  $E$ -волн, фазовая скорость зависит от частоты, т. е.  $H$ -волны относятся к *диспергирующим*.

### 1.7. Групповая скорость

Реальные электромагнитные сигналы являются негармоническими: они состоят из конечного либо бесконечного числа гармонических волн с различными частотами. В линиях передачи с дисперсией фазовая скорость гармонических волн зависит от частоты. На одном и том же участке линии гармонические волны разной частоты получают разные фазовые набеги. При этом изменяется сдвиг по фазе между гармоническими составляющими, образующими сигнал, и он искажается. Чем уже спектр сигнала, тем меньше искажения.

Для оценки перемещения негармонических сигналов вводят понятие *групповой скорости*. Под групповой понимают скорость перемещения максимума огибающей группы гармонических волн, близких по частоте.

Пусть в диспергирующей направляющей структуре распространяется эквивалентная некоторому сигналу в общем случае бесконечная сумма монохроматических волн. Мгновенное значение любой составляющей напряженности электрического поля  $\dot{E}(z, t)$ , соответствующего этому сигналу, можно записать в виде интеграла

$$\dot{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_m(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega)Z]} d\omega, \quad (1.74)$$

где  $\dot{A}_m(\omega)$  – амплитуда каждой из монохроматических волн;  $\beta(\omega)$  – постоянная распространения каждой из этих волн.

Если спектр сигнала достаточно узкий (рис. 1.6, а) и заключен в интервале частот  $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ , то  $\dot{A}_m(\omega) = 0$  вне этого интервала и формула (1.74) принимает вид

$$\dot{E}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega. \quad (1.75)$$

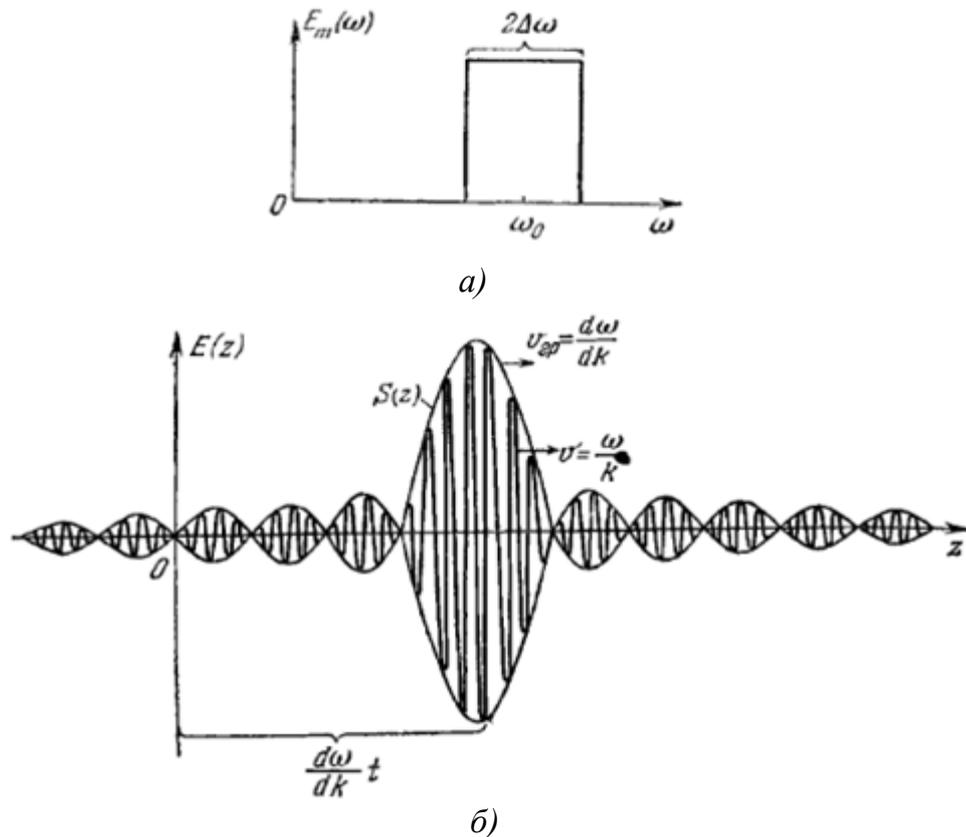


Рис 1.6

В этом случае  $\beta(\omega)$  в интервале  $2\Delta\omega$  медленно и слабо меняющуюся функцию можно разложить в окрестности средней частоты  $\omega_0$  в ряд Тейлора

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \left. \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!} \left. \left( \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (1.76)$$

где  $\beta_0$  – постоянная распространения на частоте  $\omega_0$ . Так как спектр узок, то в выражении (1.76) можно ограничиться двумя членами ряда

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \left. \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0). \quad (1.77)$$

Используя выражение (1.77), функцию  $\omega t - \beta(\omega)Z$  в соотношении (1.75) можно представить приближенным равенством

$$\omega t - \beta(\omega)Z \approx \omega t - \beta_0 Z - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z. \quad (1.78)$$

К правой части формулы (1.78) добавим, а затем вычтем соотношение  $(\omega - \omega_0)t$

$$\omega t - \beta(\omega)Z \approx \omega t - \beta_0 Z - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z + (\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0)t. \quad (1.79)$$

Раскрывая скобки в последнем слагаемом в правой части выражения (1.79), получим

$$\omega t - \beta(\omega)Z \approx \omega t - \omega t + \omega_0 t - \beta_0 Z + (\omega - \omega_0)t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z. \quad (1.80)$$

После преобразований правой части выражение (1.80) можно записать

$$\omega t - \beta(\omega)Z \approx (\omega - \omega_0)t + (\omega_0 t - \beta_0 Z) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z. \quad (1.81)$$

Подставляя (1.81) в (1.75), приходим к соотношению

$$\dot{E}(z, t) \approx \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) \exp\left\{j\left[(\omega_0 t - \beta_0 Z) + (\omega - \omega_0)t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z\right]\right\} d\omega. \quad (1.82)$$

В показателе экспоненты соотношения (1.82) выражение  $(\omega_0 t - \beta_0 Z)$  не зависит от частоты, поэтому (1.82) можно преобразовать следующим образом:

$$\dot{E}(z, t) \approx e^{j(\omega_0 t - \beta_0 Z)} \left\{ \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)\left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} Z\right]} d\omega \right\}, \quad (1.83)$$

где выражение в фигурных скобках следует рассматривать как амплитуду сигнала, а вынесенное за экспоненту – как фазовый множитель.

Для простоты будем полагать, что спектр сигнала служит четной функцией частоты:  $\dot{A}_m(\omega_0 + \Delta\omega) = \dot{A}_m(\omega_0 - \Delta\omega)$ . В этом случае выражение (1.83) можно представить в виде

$$\dot{E}(z, t) \approx e^{j(\omega_0 t - \beta_0 Z)} \left\{ 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(a) \cos\left[(\omega - \omega_0)\left(t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} Z\right)\right] da \right\}. \quad (1.84)$$

Анализ выражения в фигурных скобках показывает, что амплитуда результирующего поля группы гармонических волн, близких по частоте, имеет характер модулированной гармонической волны с огибающей  $\sin(x)/x$  (рис. 1.6, б). При этом скорость распространения высокочастотного заполнения равна фазовой скорости гармонической волны с центральной частотой  $\omega_0$ :  $V_\Phi = \omega_0 / \beta$ .

Амплитуда огибающей достигает максимума, если

$$\cos \left[ (\omega - \omega_0) \left( t - \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_0 Z} \right) \right] = 1,$$

т. е. когда

$$t - \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_0 Z} = 0. \quad (1.85)$$

Так как условие (1.85) при разных координатах  $Z$  выполняется в разные моменты времени, то максимум огибающей движется со скоростью

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}}. \quad (1.86)$$

По определению эта величина и является групповой скоростью

$$V_{gp} = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega}. \quad (1.87)$$

Индекс  $\omega - \omega_0$  в формуле (1.86) опущен, поскольку центральная частота  $\omega_0$  выбрана произвольно. Так как при выводе формулы (1.87) в разложении (1.76) были сохранены только два первых члена, то условием применимости формулы (1.87) являются медленное изменение фазовой постоянной  $\beta(\omega)$  вблизи частоты  $\omega_0$  и узость спектра сигнала. При невыполнении этих условий дисперсия настолько сильно меняет форму сигнала, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

Получим выражение  $V_{gp}$  в линиях передачи

$$V_{gp} = \frac{1}{\partial h / \partial \omega}. \quad (1.88)$$

Подставляя  $h = k \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - (\omega_{кр} / \omega)^2}$  в выражение (1.88), находим

$$V_{gp} = 1 / \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - (\omega_{кр} / \omega)^2}) \right] = 1 / \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} (\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}) \right] = 1 / \left[ \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_{кр}^2)^{-1/2} \cdot 2\omega \right],$$

$$V_{gp} = \frac{(\omega^2 - \omega_{кр}^2)^{1/2}}{\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = \frac{\omega \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}}{\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = V_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}. \quad (1.89)$$

Частотная зависимость для  $V_{gp}$  приведена на рис. 1.7.

Из формулы (1.89) следует, что  $V_{gp} < V_0$  для распространяющихся волн  $E$ ,  $H$  и  $V_{gp} = V_0$  для волн  $T$ . Сравнивая (1.89) и  $V_\phi = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$ ,

получаем  $V_{gp} \cdot V_{\phi} = V_0^2 = [1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}]^2$ , т. е.  $V_{gp}$  можно определить следующим образом:

$$V_{gp} = \frac{V_0^2}{V_{\phi}}. \quad (1.90)$$

В окрестности максимума огибающей группы гармонических волн (см. рис. 1.6, б) сосредоточена основная часть энергии. Поэтому

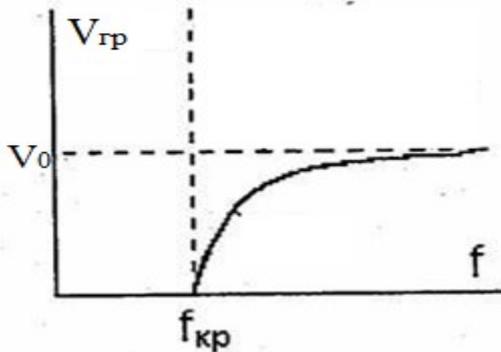


Рис. 1.7

групповая скорость характеризует также скорость перемещения энергии электромагнитной волны в линии передачи. Так как сигнал предполагался узкополосным, то эта скорость должна мало отличаться от скорости распространения энергии  $V_{\mathcal{E}}$  гармонической волны, т. е.  $V_{\mathcal{E}} \approx V_{gp}$ . Как показывают

расчеты по формуле  $V_{\mathcal{E}} = \frac{\text{Re} \int_{\Delta S} \dot{\Pi} d\bar{S}}{\int_{\Delta S} w_{cp} d\bar{S}}$ ,

в линиях передачи закрытого типа и некоторых других направляющих структурах без потерь  $V_{\mathcal{E}} = V_{gp}$ . Поэтому скорость распространения энергии  $V_{\mathcal{E}}$  в идеальных линиях передачи можно определять по формуле (1.90), которая с учетом соотношения  $V_{\phi} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kp})^2}$

будет иметь вид

$$V_{\mathcal{E}} = V_0^2 / V_{\phi} = V_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kp})^2}. \quad (1.91)$$

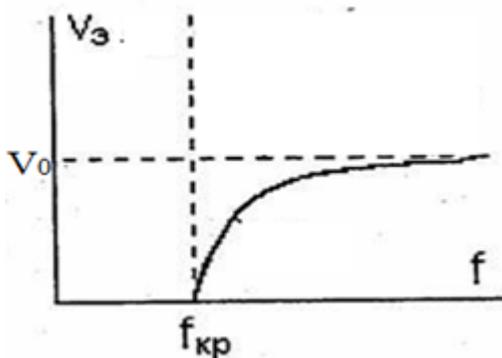


Рис. 1.8

Из формулы (1.90) следует, что  $V_{\mathcal{E}} < V_0$  для волн  $E$ ,  $H$  и  $V_{\mathcal{E}} = V_0$  для волн  $T$ .

Зависимость  $V_{\mathcal{E}}$  от частоты для  $E$ - и  $H$ -волн показана на рис. 1.8.

При  $f = f_{kp}$  скорость распространения энергии равна нулю и по мере повышения частоты приближается к скорости света в данной среде.

## 1.8. Мощность, переносимая электромагнитной волной по линии передачи

Средняя мощность, проходящая за период через элементарную площадку  $ds$  поперечного сечения линии передачи, определяется соотношением

$$dP_{cp} = \operatorname{Re} \dot{\Pi}_z ds, \quad (1.92)$$

где  $\dot{\Pi}_z$  – продольная составляющая комплексного вектора Пойнтинга

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2} \left( \bar{1}_z \left[ \dot{\vec{E}}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{\perp}^* \right] \right). \quad (1.93)$$

Смешанное произведение в выражении (1.93) можно раскрыть следующим образом  $(\bar{1}_z [\dot{\vec{E}}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{\perp}^*]) = ([\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}] \dot{\vec{H}}_{\perp}^*) = (\dot{\vec{E}}_{\perp} [\dot{\vec{H}}_{\perp}^* \bar{1}_z]) = -(\dot{\vec{E}}_{\perp} [\bar{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}^*])$ .

Подставляя последний вариант в (1.93), получим

$$\dot{\Pi}_z = -\frac{1}{2} \left( \dot{\vec{E}}_{\perp} \left[ \bar{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}^* \right] \right). \quad (1.94)$$

Из равенств  $\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z_c} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]$ ,  $\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z^E_c} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]$ ,  $\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z^H_c} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]$  следует, что для волн  $E$ ,  $H$  и  $T$  можно записать обобщенную формулу связи

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z_n} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}], \quad (1.95)$$

где  $Z_n = Z_c$  для волн  $T$ ;  $Z_n = Z^E_c$  для волн  $E$  и  $Z_n = Z^H_c$  для волн  $H$ .

Подставляя формулу (1.95) в (1.94), составим следующее выражение:

$$\dot{\Pi}_z = -\frac{1}{2} \left( \dot{\vec{E}}_{\perp} \left[ \bar{1}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}^* \right] \right) = -\frac{1}{2} \left( \dot{\vec{E}}_{\perp} \left[ \bar{1}_z [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*] \right] \right) \frac{1}{Z_n}. \quad (1.96)$$

Раскрывая двойное векторное произведение и подставляя результат в (1.96), имеем  $[\bar{1}_z [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*]] = \bar{1}_z (\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*) - \dot{\vec{E}}_{\perp}^* (\bar{1}_z \bar{1}_z) = -\dot{\vec{E}}_{\perp}^*$ ,

$$\dot{\Pi}_z = -\frac{1}{2Z_n} \left( -\dot{\vec{E}}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{\perp}^* \right) = \left| \dot{\vec{E}}_{\perp} \right|^2 / 2Z_n = \operatorname{Re} \dot{\Pi}_z. \quad (1.97)$$

Подставляя полученное выражение (1.97) в (1.92), получим

$$dP_{cp} = \left| \dot{\vec{E}}_{\perp} \right|^2 / 2Z_n.$$

Таким образом, средняя мощность, проходящая за период через поперечные сечения линии передачи, составляет

$$P_{cp} = \frac{1}{2Z_n} \int_{S_{\perp}} \left| \dot{\vec{E}}_{\perp} \right|^2 ds. \quad (1.98)$$

Если в соотношении (1.96)  $\dot{\vec{E}}_{\perp}$  заменить на соответствующее выражение для  $\dot{\vec{H}}_{\perp}$ , то формула для средней мощности будет иметь вид

$$P_{cp} = \frac{Z_{л}}{2} \int_{S_{\perp}} \left| \dot{\vec{H}}_{\perp} \right|^2 ds. \quad (1.99)$$

### Темы для закрепления материала

1. В чем целесообразность определения и каким образом устанавливается связь между продольными и поперечными составляющими полей в регулярной направляющей структуре?
2. Что подразумевается под критической частотой и критической длиной волны?
3. Укажите основные свойства поперечной электромагнитной волны ( $T$ ) в регулярной направляющей структуре.
4. Укажите основные свойства электрической волны ( $E$ ) в регулярной направляющей структуре.
5. Укажите основные свойства магнитной волны ( $H$ ) в регулярной направляющей структуре.
6. В чем суть концепции парциальных волн?
7. Что подразумевается под групповой скоростью? Какая связь между групповой скоростью и скоростью распространения энергии?
8. Каким образом определяется мощность, переносимая электромагнитной волной по линии передачи?

## 2. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ

### 2.1. Прямоугольный волновод

Электрические волны «E» ( $E_{\perp} \neq 0$ ,  $H_{\perp} \neq 0$ ,  $\dot{E}_z \neq 0$ ,  $\dot{H}_z = 0$ ). Прямоугольный волновод представляет собой полую металлическую трубу прямоугольного сечения (рис. 2.1). Предположим, что стенки волновода обладают бесконечной проводимостью, а заполняющая его среда – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . В такой направляющей структуре могут существовать волны E и H и не могут существовать T-волны.

На рис. 2.1 показаны используемая декартова система координат и размеры  $a$  и  $b$  поперечного сечения волновода. Будем считать, что источники, создающие поле, расположены в отрицательном направлении оси  $z$  за пределами рассматриваемой части линии передачи, а созданные ими волны E-типа распространяются в положительном направлении

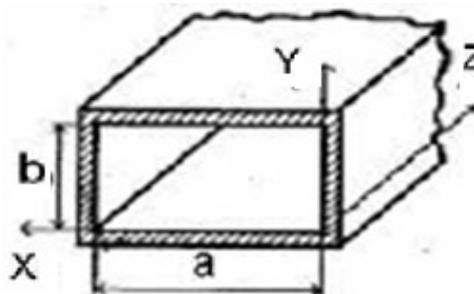


Рис. 2.1

оси  $z$ . При  $a > b$  стенки с поперечными размерами  $a$  и  $b$  будем называть соответственно широкой и узкой стенками прямоугольного волновода.

Поперечные составляющие векторов поля для волны E-типа выражаются через продольную с помощью соотношений

$$-g^2 \dot{E}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z, \quad (2.1)$$

$$-g^2 \dot{H}_{\perp} = j\omega \epsilon_a [\bar{1}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (2.2)$$

Таким образом, для вычисления поля волн E-типа достаточно определить составляющую  $E_z$ , удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + g^2 \dot{E}_z = 0, \quad (2.3)$$

которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0. \quad (2.4)$$

Для решения уравнения (2.4) воспользуемся методом разделения переменных. Запишем функцию  $\dot{E}_z$  в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\dot{E}_z = X(x) Y(y) e^{-jhz} \quad (2.5)$$

где  $X(x)$  – функция только  $x$ ,  $Y(y)$  – функция только  $y$ ; фазовый множитель является функцией только  $z$ .

Подставляя выражение (2.5) в (2.4), выполнив дифференцирование и разделив результат на (2.5), получим

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -g^2. \quad (2.6)$$

Так как  $x, y$  – независимые переменные и в левой части формулы (2.6) стоит сумма их функционалов, приравненная к некоторой константе в правой части, то равенство (2.6) возможно, если каждый из этих функционалов будет равен постоянной

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -g_x^2; \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -g_y^2, \quad (2.7)$$

$$\text{где } g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (2.8)$$

Умножая равенства (2.7) соответственно на  $X(x)$  и  $Y(y)$ , получим

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + g_x^2 X(x) = 0; \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + g_y^2 Y(y) = 0. \quad (2.9)$$

Решения уравнений (2.9) имеют вид

$$X(x) = A \cos g_x x + B \sin g_x x; \quad Y(y) = C \cos g_y y + D \sin g_y y. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.5), находим общее решение уравнения (2.4)

$$\dot{E}_z = (A \cos g_x x + B \sin g_x x)(C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz}. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.11) получим частное решение уравнения (2.4) для прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения  $a$  и  $b$ , для чего решим граничную задачу  $\dot{E}_\tau|_s = 0$ , условия которой в данном случае имеют вид  $E_z = 0$ , при  $x = 0, x = a$ ;  $E_z = 0$ , при  $y = 0, y = b$ .

Первая часть граничных условий приводит к равенствам

$$A(C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz} = 0;$$

$$(A \cos g_x a + B \sin g_x a)(C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz} = 0,$$

которые выполняются при произвольных координатах  $y$  и  $z$ , если  $A = 0, B \sin g_x a = 0$ . В последнем соотношении  $B \neq 0$ , и оно выполняется, если  $\sin g_x a = 0$ , т. е. если  $g_x a = m\pi, m = 1, 2, 3, \dots$ , откуда  $g_x = m\pi/a$ .

Вторая часть граничных условий приводит к равенствам

$$(A \cos g_x x + B \sin g_x x) C e^{-jhz} = 0;$$

$$(A \cos g_x x + B \sin g_x x)(C \cos g_y b + D \sin g_y b) e^{-jhz} = 0,$$

которые выполняются при произвольных координатах  $x$  и  $z$ , если  $C = 0, D \sin g_y b = 0$ . В последнем соотношении  $D \neq 0$ , и оно выполняется, если  $\sin g_y b = 0$ , т. е. если  $g_y b = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$ , откуда  $g_y = n\pi/b$ .

С учетом приведенных преобразований соотношение (2.11) можно представить в виде

$$E_Z = \dot{E}_{0Z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \quad (2.12)$$

где  $\dot{E}_{0Z} = B \cdot D$  – величина, связанная непосредственно с интенсивностью сторонних источников, значение которой не может быть определено в результате решения граничной задачи.

Подставляя  $g_x = m\pi/a$ ,  $g_y = n\pi/b$  в равенство (2.8), получим частное выражение  $g$  для прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения  $a$  и  $b$

$$g = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (2.13)$$

Распишем (2.1) и (2.2) через проекции в декартовой системе координат:

$$(\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y) = \frac{-jh}{g^2} \left( \bar{1}_x \frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial y} \right);$$

$$(\bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y) = \frac{-j\omega\varepsilon_a}{g^2} \left( -\bar{1}_x \frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial y} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial x} \right).$$

Подставляя в правую часть полученных равенств (2.12) и приравнявая соответствующие проекции, запишем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_X &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial E_Z}{\partial x} = -\frac{jh}{g^2} g_x \dot{E}_{0Z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_Y &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial E_Z}{\partial y} = -\frac{jh}{g^2} g_y \dot{E}_{0Z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_X &= \frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial E_Z}{\partial y} = -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} g_y \dot{E}_{0Z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_Y &= -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial E_Z}{\partial x} = -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} g_x \dot{E}_{0Z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из равенств (2.12), (2.14) следует, что структура поля волн типа  $E$  в плоскости поперечного сечения имеет характер стоячей волны, при этом индексы  $m$  и  $n$ , входящие в (2.13), имеют простой физический смысл. Индекс  $m$  соответствует числу стоячих полуволн, укладываемых вдоль стенки длиной  $a$ , и  $n$  – числу стоячих полуволн, укладываемых вдоль стенки длиной  $b$ . Таким образом, индексы  $m$  и  $n$  полностью определяют поперечную структуру волн типа  $E$  в прямоугольном волноводе и каждой паре чисел  $m$  и  $n$  соответствует определенная волна электрического типа, распространяющаяся в волноводе. Волны

электрического типа в прямоугольном волноводе обозначаются следующим образом:  $E_{mn}$ . На рис. 2.2 для некоторого фиксированного момента времени приведены структуры полей в трех ортогональных плоскостях волн  $E_{11}$  (рис. 2.2, а) и  $E_{21}$  (рис. 2.2, б) в прямоугольном волноводе.

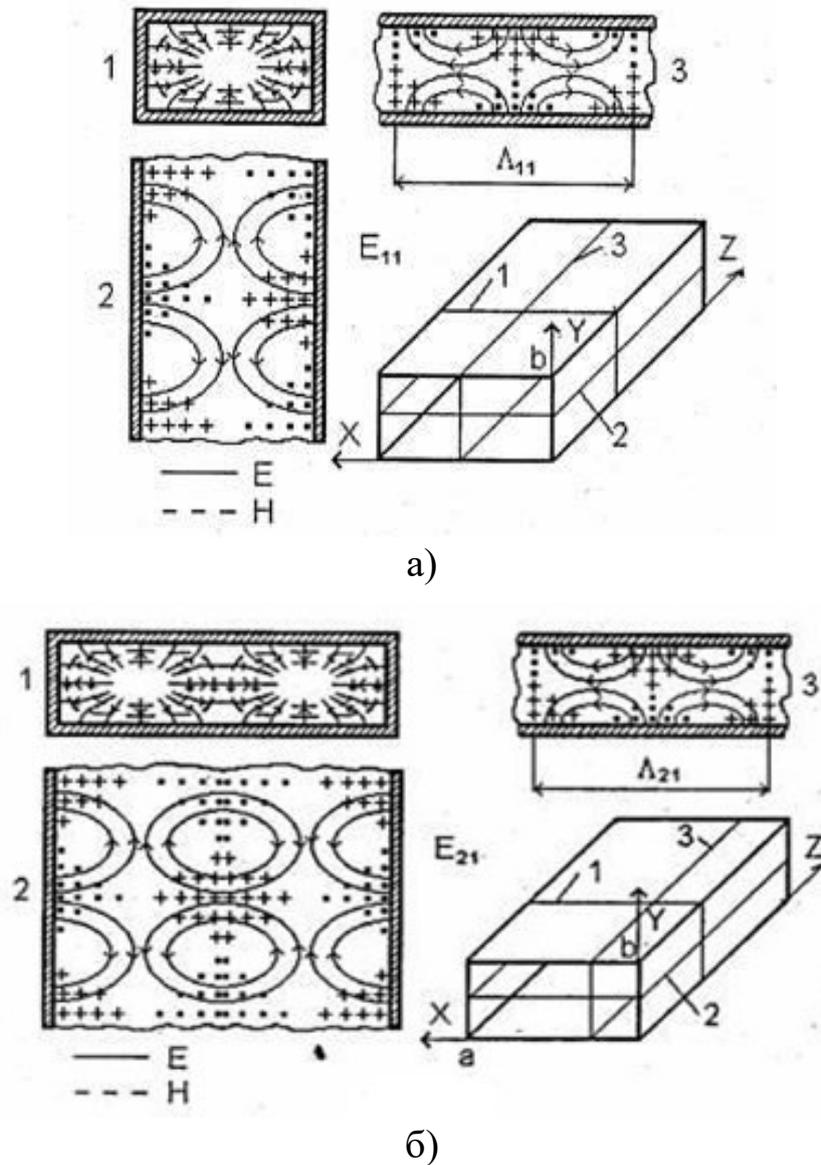


Рис. 2.2

Следует отметить, что, зная структуру поля волны  $E_{11}$ , структуру поля волны  $E_{21}$  можно построить объединением структур двух волн  $E_{11}$  по соответствующей координате. Основные параметры волн типа  $E$  в прямоугольном волноводе определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2};$$

$$h = \beta \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$\lambda_с = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_\phi = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_з = V^2_0 / V_\phi = V_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$Z_c^E = Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}.$$

*Низшей* волной электрического типа в прямоугольном волноводе, т. е. волной, обладающей наибольшей  $\lambda_{кр}$ , является волна  $E_{11}$ . Волны  $E_{mn}$  с различной структурой поля, которым соответствуют одинаковые значения  $g$ , называются *вырожденными*.

*Магнитные волны «Н»* ( $E_\perp \neq 0$ ,  $H_\perp \neq 0$ ,  $\dot{E}_z = 0$ ,  $\dot{H}_z \neq 0$ ). Поперечные составляющие векторов поля для волны  $H$ -типа выражаются через продольную с помощью выражений

$$-g^2 \dot{E}_\perp = -j\omega\mu_a [\bar{1}_z \text{grad } \dot{H}_z]; \quad (2.15)$$

$$-g^2 \dot{H}_\perp = jh \text{grad } \dot{H}_z. \quad (2.16)$$

Таким образом, для вычисления поля волн  $H$ -типа достаточно определить составляющую  $H_z$ , удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{H}_z + g^2 \dot{H}_z = 0, \quad (2.17)$$

которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (2.18)$$

Решая уравнение (2.18) *методом разделения переменных*, получим общее решение, аналогичное (2.11):

$$\dot{H}_z = (A \cos g_x x + B \sin g_x x)(C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz}. \quad (2.19)$$

Из (2.19) получим частное решение уравнения (2.18) для прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения  $a$  и  $b$ , для чего решим граничную задачу  $\partial \dot{H}_z / \partial n = 0$ , которая в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 0, x = a; \quad \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0, \text{ при } y = 0, y = b.$$

Первая часть граничных условий приводит к равенствам

$$g_x B (C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz} = 0;$$

$$g_x (-A \sin g_x a + B \cos g_x a);$$

$$(C \cos g_y y + D \sin g_y y) e^{-jhz} = 0,$$

которые выполняются при произвольных координатах  $y$  и  $z$ , если  $B = 0$ ,  $A \sin g_x a = 0$ . В последнем соотношении  $A \neq 0$ , и оно выполняется, если  $\sin g_x a = 0$ , т. е. если  $g_x a = m\pi$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , откуда  $g_x = m\pi/a$ .

Вторая часть граничных условий приводит к равенствам

$$(A \cos g_x x + B \sin g_x x;) D e^{-jhz} = 0;$$

$$g_y (A \cos g_x x + B \sin g_x x;) (-C \sin g_y b + D \cos g_y b) e^{-jhz},$$

которые выполняются при произвольных координатах  $x$  и  $z$ , если  $D = 0$ ,  $C \sin g_y b = 0$ . В последнем соотношении  $C \neq 0$ , и оно выполняется, если  $\sin g_y b = 0$ , т. е. если  $g_y b = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , откуда  $g_y = n\pi/b$ .

С учетом приведенных преобразований соотношение (2.19) можно представить в виде

$$\dot{H}_Z = \dot{H}_{0Z} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (2.20)$$

где  $\dot{H}_{0Z} = A \cdot C$  – величина, связанная непосредственно с интенсивностью сторонних источников, значение которой не может быть определено в результате решения граничной задачи. Подставляя  $g_x = m\pi/a$ ,  $g_y = n\pi/b$  в равенство (2.8), получим частное выражение  $g$  для прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения  $a$  и  $b$

$$g = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (2.21)$$

Из выражений (2.13) и (2.21) следует, что волны  $H$  и  $E$  в прямоугольном волноводе с соответствующими одинаковыми индексами  $m$  и  $n$  являются вырожденными.

Распишем формулы (2.15) и (2.16) через проекции в декартовой системе координат:

$$(\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y) = \frac{j\omega\mu a}{g^2} \left( -\bar{1}_x \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} \right);$$

$$(\bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y) = \frac{-jh}{g^2} \left( \bar{1}_x \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} \right).$$

Подставляя в правую часть полученных равенств (2.20) и приравнивая соответствующие проекции, получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_X &= -\frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} = \frac{j\omega\mu_a}{g^2} g_y \dot{H}_{0Z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_Y &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} = -\frac{j\omega\mu_a}{g^2} g_x \dot{H}_{0Z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_X &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} = \frac{jh}{g^2} g_x \dot{H}_{0Z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_Y &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} = \frac{jh}{g^2} g_y \dot{H}_{0Z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из уравнений (2.20), (2.22) следует, что структура поля волн типа  $H$ , как и у волн типа  $E$ , в плоскости поперечного сечения имеет характер стоячей волны, при этом индексы  $m$  и  $n$ , входящие в выражение (2.21), имеют тот же физический смысл. Индекс  $m$  соответствует числу стоячих полуволн, укладываемых вдоль стенки длиной  $a$ , и  $n$  – числу стоячих полуволн, укладываемых вдоль стенки длиной  $b$ . Таким образом, индексы  $m$  и  $n$  полностью определяют поперечную структуру волн типа  $H$  в прямоугольном волноводе, и каждой паре чисел  $m$  и  $n$  соответствует определенная волна магнитного типа, распространяющаяся в волноводе. Волны магнитного типа в прямоугольном волноводе обозначаются следующим образом:  $H_{mn}$ . Из равенств (2.20), (2.22) также следует, что у волн  $H$ , в отличие от волн  $E$ , обращение в ноль одного из индексов ( $m$  или  $n$ ) не влечет за собой обращения в ноль всех составляющих поля. Поэтому у волн  $H$  индексы  $m$  и  $n$  могут принимать нулевые значения неодновременно. На рис. 2.3 для некоторого фиксированного момента времени приведена структура поля в трех ортогональных плоскостях волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе. На рис. 2.4 изображена поперечная структура поля волны  $H_{20}$ , которую можно построить объединением поперечных структур двух волн  $H_{10}$  по соответствующей координате.

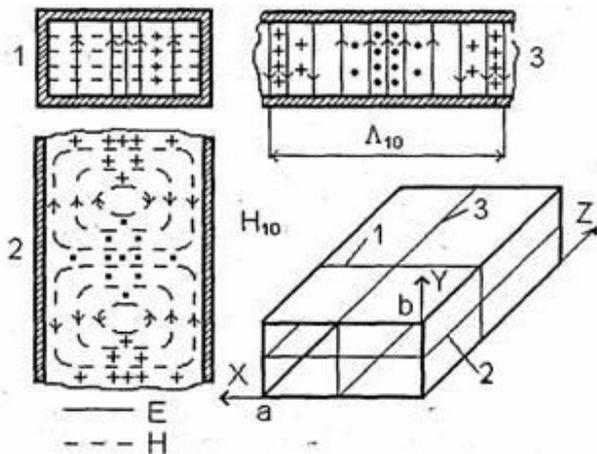


Рис. 2.3

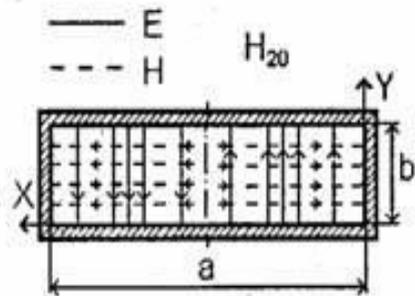


Рис. 2.4

Основные параметры волн типа  $H$  в прямоугольном волноводе определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2};$$

$$h = \beta \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$\lambda_e = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_\phi = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_z = V^2_0 / V_\phi = V_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$Z_c^H = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}.$$

*Низшей* волной магнитного типа в прямоугольном волноводе будет волна  $H_{10}$ . Из сравнения  $\lambda_{кр}$  для низших волн электрического и магнитного типов следует  $\lambda_{кр}^{H_{10}} > \lambda_{кр}^{E_{11}}$ , т. е. при  $a > b$  волна  $H_{10}$  является *низшей* среди всех волн в прямоугольном волноводе.

Частотный анализ свойств волн в прямоугольном волноводе позволяет отметить следующее: при  $\lambda_{кр}^{H_{20}} \leq \lambda \leq \lambda_{кр}^{H_{10}}$  в прямоугольном волноводе с  $a > b$  существует только волна  $H_{10}$ , которую в этом случае принято называть *основным типом волны*; при  $\lambda < \lambda_{кр}^{H_{20}}$  наряду с основным типом в волноводе могут существовать волны *высших типов* ( $H_{20}$ ,  $H_{01}$ ,  $E_{11}$ , ...); при  $\lambda > \lambda_{кр}^{H_{10}}$  волны в волноводе не распространяются.

*Волна  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе.* При  $a > b$  волна  $H_{10}$  будет *низшей* среди всех волн в прямоугольном волноводе. Поэтому на заданной частоте размеры поперечного сечения волновода с волной  $H_{10}$  будут наименьшими. Запишем выражения для составляющих поля волны  $H_{10}$ :

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (2.23)$$

$$\dot{E}_y = -j\omega\mu_a \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (2.24)$$

$$\dot{H}_x = jh \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \quad (2.25)$$

Структура поля волны  $H_{10}$ , построенная в соответствии с формулами (2.23) – (2.25), показана на рис. 2.5. Согласно уравнениям Максвелла замкнутые линии магнитного поля должны охватывать токи проводимости, или токи смещения. В волноводе замкнутые линии

магнитного поля пронизываются токами смещения. В случае волны  $H_{10}$  (рис. 2.5) линии магнитного поля охватывают токи смещения, текущие между широкими стенками параллельно оси  $y$ . В распространяющейся волне максимальная плотность тока смещения получается в центре замкнутых магнитных силовых линий, где напряженность электрического поля равна нулю. Это следует из выражения  $\vec{j}^{см} = \epsilon_a \partial \vec{E} / \partial t = j\omega \epsilon_a \vec{E}$ , в котором вектор плотности тока смещения сдвинут по фазе относительно вектора напряженности электрического поля на угол  $\pi/2$ , т. е. расстояние между максимумом плотности тока смещения и максимумом напряженности электрического поля вдоль оси  $z$  в фиксированный момент времени равно  $\lambda_B/4$ .

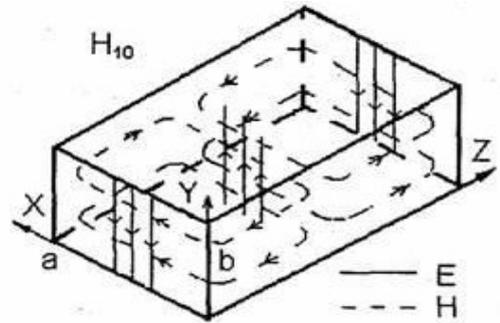


Рис. 2.5

Основные параметры волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{кр} = 2a;$$

$$h = \beta \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2};$$

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2};$$

$$V_g = V^2_0 / V_\phi = V_0 \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2};$$

$$Z_c^H = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}.$$

## 2.2. Круглый волновод

Электрические волны «E» ( $E_\perp \neq 0$ ,  $H_\perp \neq 0$ ,  $\dot{E}_z \neq 0$ ,  $\dot{H}_z = 0$ ). Круглый волновод представляет собой полую металлическую трубу круглого сечения (рис. 2.6). Предположим, что стенки волновода обладают бесконечной проводимостью, а заполняющая его среда – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . В такой направляющей структуре могут существовать волны  $E$  и  $H$  и не могут существовать  $T$ -волны. На рис. 2.6 показана используемая

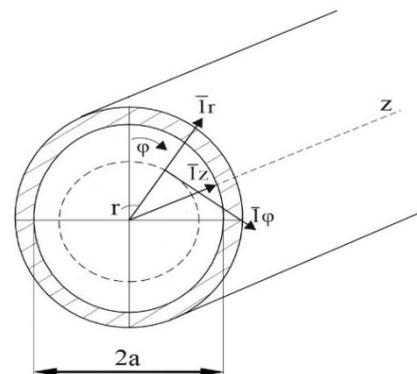


Рис. 2.6

цилиндрическая система координат и диаметр  $2a$  поперечного сечения волновода. Будем считать, что источники, создающие поле, расположены в отрицательном направлении оси  $z$  за пределами рассматриваемой части линии передачи, а созданные ими волны  $E$ -типа распространяются в положительном направлении оси  $z$ . Поперечные составляющие векторов поля для волны  $E$ -типа выражаются через продольную с помощью соотношений

$$-g^2 \ddot{\mathbf{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z; \quad (2.26)$$

$$-g^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = j\omega \varepsilon_a [\bar{\mathbf{I}}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (2.27)$$

Таким образом, для вычисления поля волн  $E$ -типа достаточно определить составляющую  $E_z$ , удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + g^2 \dot{E}_z = 0, \quad (2.28)$$

которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_z = 0. \quad (2.29)$$

Для решения уравнения (2.29) воспользуемся *методом разделения переменных*. Запишем функцию  $\dot{E}_z$  в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной,

$$E_z(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)e^{-jhz} = E_z(r, \phi)e^{-jhz}. \quad (2.30)$$

Умножим члены уравнения (2.29) на  $r^2$ , подставим (2.30) в (2.29) и, выполнив дифференцирование, разделим члены полученного уравнения на  $R(r)\Phi(\phi)e^{-jhz}$ . В результате имеем:

$$\frac{r \frac{d}{dr} (r \frac{dR(r)}{dr})}{R(r)} + g^2 r^2 = - \frac{d^2 \Phi(\phi) / d\phi^2}{\Phi(\phi)}. \quad (2.31)$$

Левая часть уравнения (2.31) зависит от  $r$ , правая – от  $\phi$ . Переменные  $r$  и  $\phi$  – независимые. Равенство двух независимых функций возможно, если каждая из них равна постоянной. Обозначая постоянную  $m^2$  и приравнявая левую и правую части формулы (2.31) к постоянной, приходим к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0; \quad (2.32)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.33)$$

В рассматриваемой задаче составляющая  $E_z(r, \varphi, z)$  является периодической по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$

$$E_z(r, \varphi + 2\pi, z) = E_z(r, \varphi, z). \quad (2.34)$$

Этим же свойством обладает функция  $\Phi(\varphi)$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (2.35)$$

Решение уравнения (2.32) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \sin m \varphi + B \cos m \varphi, \quad (2.36)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые постоянные – постоянные интегрирования. Равенство (2.35) выполняется, если коэффициенты  $m$  в (2.36) – целые положительные числа:  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Используя свойства тригонометрических функций, выражение (2.36) можно привести к виду

$$\Phi(\varphi) = A \sin m \varphi + B \cos m \varphi = A_1 \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad (2.37)$$

где  $A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\varphi_0 = \arctg(A/B)$ .

Уравнение (2.33) является дифференциальным уравнением Бесселя. Его решение можно представить в виде

$$R(r) = C' J_m(gr) + D' N_m(gr), \quad (2.38)$$

где  $J_m(gr)$  и  $N_m(gr)$  – соответственно функции Бесселя и Неймана порядка  $m$  от аргумента  $gr$ ;  $C'$ ,  $D'$  – некоторые постоянные. При  $r \rightarrow 0$  функция Неймана  $N_m(gr) \rightarrow \infty$ . Напряженность поля в любой точке внутри волновода считается ограниченной величиной, поэтому в общем решении (2.38) следует положить  $D' = 0$ . При этом частное решение будет иметь вид

$$R(r) = C' J_m(gr). \quad (2.39)$$

Подставляя уравнения (2.37), (2.39) в (2.30), получим

$$\dot{E}_z = E_{0z} J_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}, \quad (2.40)$$

где  $E_{0z} = A$ ,  $C'$  – величина, непосредственно связанная с интенсивностью сторонних источников.

Запишем уравнения связи (2.26), (2.27) через проекции в цилиндрической системе координат

$$-g^2 (\bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\varphi \dot{E}_\varphi) = jh \left( \bar{1}_r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right); \quad (2.41)$$

$$-g^2 (\bar{1}_r \dot{H}_r + \bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi) = j\omega \varepsilon_a \left( -\bar{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \bar{1}_\varphi \frac{\partial E_z}{\partial r} \right). \quad (2.42)$$

Приравнивая соответствующие проекции, получим:

$$E_r = -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad E_\varphi = -\frac{jh}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi},$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Подставляя в полученные равенства (2.40), придем к выражениям для поперечных составляющих волн типа  $E$  в круглом волноводе

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{jh}{g} E_{0z} J'_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{jh}{g^2} \frac{m}{r} E_{0z} J_m(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_r &= -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{m}{r} E_{0z} J_m(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{j\omega\varepsilon_a}{g} E_{0z} J'_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

где штрих означает дифференцирование функции Бесселя по полному аргументу.

Поперечное волновое число определим, используя граничное условие на идеально проводящей поверхности  $E_r|_s = 0$ . В данном случае это условие можно записать в следующем виде:

$$E_z|_{r=a} = 0. \quad (2.44)$$

Подставляя выражение (2.40) в (2.44), получим

$$J_m(ga) = 0. \quad (2.45)$$

Имеется бесконечное число значений аргумента, при которых функция Бесселя обращается в ноль. Эти значения аргумента называются корнями функции Бесселя. Обозначая  $n$ -й корень функции Бесселя  $m$ -го порядка  $v_{mn}^E$ , из (2.45) получим  $v_{mn}^E = ga$ , откуда

$$g = v_{mn}^E / a, \quad \lambda_{кр}^E = \frac{2\pi a}{v_{mn}^E}. \quad (2.46)$$

Порядок функции Бесселя  $m$  и номер корня  $n$  имеют также простой физический смысл. Индекс  $m$  соответствует числу стоячих волн, укладываемых по окружности волновода, а индекс  $n$  – числу стоячих полу-волн, укладываемых по радиусу волновода. Таким образом, индексы  $m$  и  $n$  полностью определяют поперечную структуру волн типа  $E$  в круглом волноводе, и каждой паре чисел  $m$  и  $n$  соответствует определенная волна электрического типа, распространяющаяся в волноводе.

Волны электрического типа в круглом волноводе обозначаются  $E_{mn}$ . Несколько первых корней функции Бесселя  $v_{mn}^E$  в порядке их возрастания и соответствующие им критические длины волн  $\lambda_{кр}^{E_{mn}}$ , пронормированные к радиусу волновода  $a$ , представлены в следующей таблице:

Тип волны	$E_{01}$	$E_{11}$	$E_{21}$	$E_{02}$	$E_{01}$	$E_{12}$
$v_{mn}^E$	2,405	3,832	5,135	5,520	6,379	7,016
$\frac{\lambda_{кр}^{E_{mn}}}{a}$	2,613	1,640	1,223	1,138	0,985	0,895

Из таблицы следует, что низшим типом среди волн  $E$  в круглом волноводе является волна  $E_{01}$ .

На рис. 2.7 для некоторого фиксированного момента времени приведена структура поля в двух ортогональных плоскостях волны  $E_{01}$  в круглом волноводе.

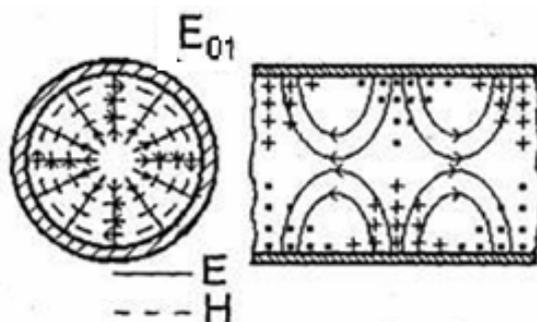


Рис. 2.7

Основные параметры волн типа  $E$  в круглом волноводе определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{кр}^E = \frac{2\pi a}{v_{mn}^E};$$

$$h = \beta \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_\phi = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$V_z = V_0^2 / V_\phi = V_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2};$$

$$Z_c^E = Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}.$$

Магнитные волны « $H$ » ( $E_{\perp} \neq 0$ ,  $H_{\perp} \neq 0$ ,  $\dot{E}_z = 0$ ,  $\dot{H}_z \neq 0$ ). Поперечные составляющие векторов поля для волны  $H$ -типа выражаются через продольную с помощью соотношений

$$-g^2 \dot{E}_{\perp} = -j\omega\mu_a [\bar{1}_z \text{grad}_{\perp} H_z]; \quad (2.47)$$

$$-g^2 \dot{H}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} H_z. \quad (2.48)$$

Для вычисления поля волн  $H$ -типа достаточно определить составляющую  $H_z$ , удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{H}_z + g^2 \dot{H}_z = 0, \quad (2.49)$$

которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \phi^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (2.50)$$

Решая уравнение (2.50) методом разделения переменных

$$H_z(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)e^{-jhz},$$

получим общее решение, аналогичное (2.40):

$$\dot{H}_z = H_{0z} J_m(gr) \cos m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}. \quad (2.51)$$

Запишем уравнения связи (2.47), (2.48) через проекции в цилиндрические системы координат

$$\begin{aligned} -g^2 (\bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_{\phi} \dot{E}_{\phi}) &= -j\omega\mu_a \left( -\bar{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \phi} + \bar{1}_{\phi} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right); \\ -g^2 (\bar{1}_r \dot{H}_r + \bar{1}_{\phi} \dot{H}_{\phi}) &= jh \left( \bar{1}_r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \bar{1}_{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Приравнявая соответствующие проекции, будем иметь:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \phi}, & H_r &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}, \\ E_{\phi} &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}, & H_{\phi} &= -\frac{jh}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Подставляя в полученные равенства (2.51), придем к выражениям для поперечных составляющих волн типа  $H$  в круглом волноводе:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{m}{r} H_{0z} J_m(gr) \sin m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}; \\ E_{\phi} &= \frac{j\omega\mu_a}{g} H_{0z} J'_m(gr) \cos m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}; \\ H_r &= -\frac{jh}{g} H_{0z} J'_m(gr) \cos m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}; \\ H_{\phi} &= \frac{jh}{g^2} \frac{m}{r} H_{0z} J_m(gr) \sin m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где штрих означает дифференцирование функции Бесселя по полному аргументу. Поперечное волновое число определим, используя граничное условие на идеально проводящей поверхности  $\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_0 = 0$ . В данном случае это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (2.54)$$

Подставляя выражение (2.51) в (2.54), получим

$$J'_m(ga) = 0. \quad (2.55)$$

Имеется бесконечное число значений аргумента, при которых производная функция Бесселя обращается в ноль. Эти значения аргумента называются корнями производной функции Бесселя. Обозначая  $n$ -й корень производной функции Бесселя  $m$ -го порядка  $v_{mn}^H$ , из формулы (2.55) получим  $v_{mn}^H = ga$ , откуда

$$g = v_{mn}^H/a, \quad \lambda_{кр}^{Hmn} = 2\pi a/v_{mn}^H. \quad (2.56)$$

Порядок производной функции Бесселя  $m$  и номер корня  $n$  имеют также простой физический смысл. Индекс  $m$  соответствует числу стоячих волн, укладывающихся по окружности волновода, а индекс  $n$  – числу стоячих полуволн, укладывающихся по радиусу волновода. Таким образом, индексы  $m$  и  $n$  полностью определяют поперечную структуру волн типа  $H$  в круглом волноводе, и каждой паре чисел  $m$  и  $n$  соответствует определенная волна магнитного типа, распространяющаяся в волноводе. Волны  $H$ -типа в круглом волноводе обозначаются  $H_{mn}$ . Несколько первых корней производной функции Бесселя  $v_{mn}^H$  в порядке их возрастания и соответствующие им критические длины волн  $\lambda_{кр}^{Hmn}$ , пронормированные к радиусу волновода  $a$ , представлены в следующей таблице:

Тип волны	$H_{01}$	$H_{11}$	$H_{21}$	$H_{02}$	$H_{01}$	$H_{12}$
$v_{mn}^H$	1,84	3,05	3,83	4,20	5,32	5,33
$\frac{\lambda_{кр}^{Hmn}}{a}$	3,41	2,06	1,64	1,50	0,182	1,178

Из таблицы следует, что *низшим* типом среди волн  $H$  в круглом волноводе будет волна  $H_{11}$ . Из сравнения  $\lambda_{кр}$  для низших волн электрического и магнитного типов в круглом волноводе следует:  $\lambda_{кр}^{H11} > \lambda_{кр}^{E01}$ ,

т. е. в круглом волноводе волна  $H_{11}$  является низшей среди всех волн в круглом волноводе.

Используя свойство функций Бесселя, установим важную особенность, присущую волнам в круглом волноводе. Производную функцию Бесселя можно выразить через функции Бесселя следующим образом:

$$J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x). \quad (2.57)$$

Поэтому уравнение  $J'_m(ga) = 0$  эквивалентно равенству

$$J_{m+1}(ga) = \frac{m}{ga} J_m(ga). \quad (2.58)$$

При  $m = 0$  уравнение (2.48) будет иметь вид  $J_{m+1}(ga) = 0$ .

Откуда  $v_{1n}^E = v_{0n}^H$ ,  $\lambda_{кр}^{E_{1n}} = \lambda_{кр}^{H_{0n}}$ , т. е. в круглом волноводе волны  $E_{1n}$  и  $H_{0n}$  являются вырожденными. На рис. 2.8 для некоторого фиксированного момента времени приведена структура поля в двух ортогональных плоскостях волны  $H_{11}$  в круглом волноводе. Основные параметры волн типа  $H$  в круглом волноводе определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_{кр}^{H_{mn}} &= 2\pi a / v_{mn}^H; \\ h &= \beta \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}; \\ \lambda_e &= \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}; \\ V_\phi &= V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}; \\ V_s &= V^2_0 / V_\phi = V_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}; \\ Z_c^H &= Z_c / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}. \end{aligned}$$

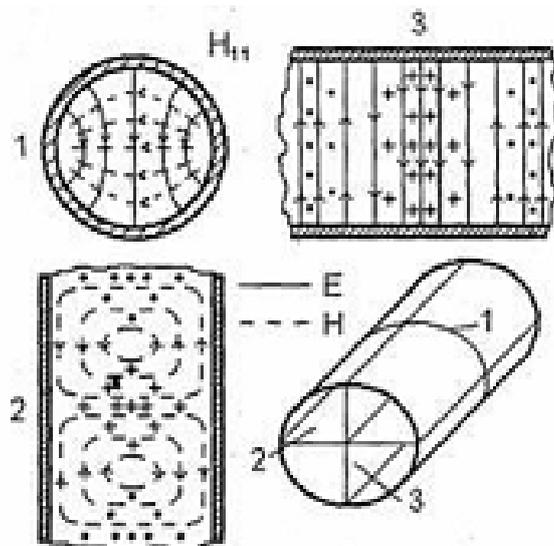


Рис. 2.8

Частотный анализ свойств волн в круглом волноводе позволяет отметить следующее: при  $\lambda_{\text{кр}}^{E_{01}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{кр}}^{H_{11}}$  в круглом волноводе диаметром  $2a$  существует только волна  $H_{11}$ , которую в этом случае принято называть *основным типом волны*; при  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}^{E_{01}}$  наряду с основным типом в волноводе могут существовать волны *высших типов* ( $E_{01}, H_{21}, H_{01}, E_{11}, \dots$ ); при  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}^{H_{11}}$  волны в круглом волноводе не распространяются.

### 2.3. Токи на стенках прямоугольного и круглого волноводов

*Токи в прямоугольном волноводе с волной  $H_{10}$ .* Каждому типу волны, распространяющейся в волноводе, соответствует определенная структура токов проводимости на его стенках. В случае идеально проводящих стенок токи проводимости являются поверхностными, а комплексная амплитуда их плотности  $\dot{\mathbf{J}}^{\text{э}}$  вычисляется по формуле

$$[\bar{\mathbf{1}}_n \bar{\mathbf{H}}_{\perp}] = \dot{\mathbf{J}}^{\text{э}}, \quad (2.59)$$

из которой следует, что вектор плотности поверхностного тока равен тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности проводника и направлен нормально к ней. Магнитные составляющие волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{H}_z &= \dot{H}_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \\ \dot{H}_x &= jh \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (2.59) компонента  $\dot{H}_x$  приводит к возбуждению на широких стенках прямоугольного волновода поверхностных токов, имеющих следующую структуру и направление:

$$\dot{\mathbf{J}}^{\text{э}} = [-\bar{\mathbf{1}}_y, \bar{\mathbf{1}}_x] \dot{H}_x = \bar{\mathbf{1}}_z J_z^{\text{э}} = \bar{\mathbf{1}}_z \dot{H}_x = \bar{\mathbf{1}}_z jh \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \quad (2.60)$$

Соответствующая структура продольных поверхностных токов на широких стенках прямоугольного волновода приведена на рис. 2.9.

В соответствии с формулой (2.59) компонента  $\dot{H}_z$  приводит к возбуждению на широких стенках прямоугольного волновода поперечных поверхностных токов, имеющих следующую структуру и направление:

$$\dot{\mathbf{J}}^{\text{э}} = [-\bar{\mathbf{1}}_y, \bar{\mathbf{1}}_z] \dot{H}_z = -\bar{\mathbf{1}}_x J_x^{\text{э}} = -\bar{\mathbf{1}}_x \dot{H}_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \quad (2.61)$$

Соответствующая структура поперечных поверхностных токов на узких стенках прямоугольного волновода приведена на рис. 2.10.

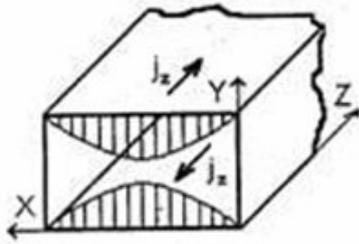


Рис. 2.9

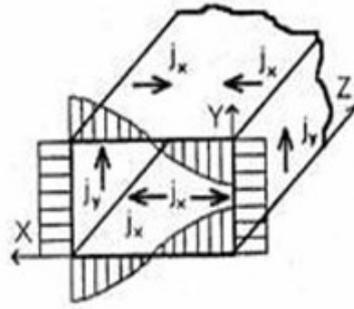


Рис. 2.10

В соответствии с выражением (2.59) компонента  $\dot{H}_z$  при  $x = 0$  и  $x = a$  приводит к возбуждению на узких стенках прямоугольного волновода поверхностных токов, имеющих следующую структуру и направление:

$$\dot{J}^p = [\bar{I}_x, \bar{I}_z] \dot{H}_z / x=0 = -\bar{I}_y J_y^p = -\bar{I}_y \dot{H}_{0z} e^{-jhz}. \quad (2.62)$$

Композиция поверхностных токов  $j_x^p, j_y^p$  образует единую структуру поперечных токов (см. рис. 2.10).

Более информативным считается использование модуля комплексной плотности тока на стенках прямоугольного волновода, которая в любой точке внутренней поверхности определяется соотношением

$$|j^p| = \sqrt{|j_x^p|^2 + |j_y^p|^2 + |j_z^p|^2}. \quad (2.63)$$

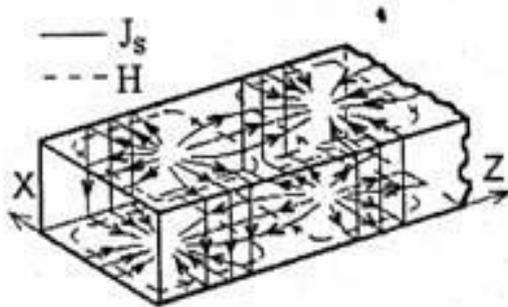


Рис. 2.11

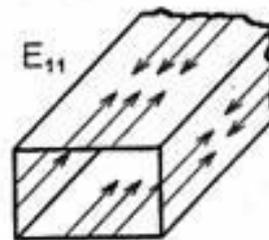


Рис. 2.12

Соответствующая структура  $\dot{J}^p$  для волны  $H_{10}$  приведена на рис. 2.11. Из рис. 2.12 следует, что в структуре комплексной плотности тока на стенках прямоугольного волновода с волной  $E_{11}$  присутствуют только продольные составляющие.

Токи в круглом волноводе с волной  $H_{11}$ . В круглом волноводе с волной  $H_{11}$  присутствуют две тангенциальные к поверхности волновода составляющие вектора напряженности магнитного поля  $H_\varphi, H_z$  и соответствующие проекции поверхностного тока  $\dot{J}_z, \dot{J}_\varphi$ .

Структура комплексной плотности тока на стенках волновода и направление протекания поверхностных токов приведены на рис. 2.13.



Рис. 2.13

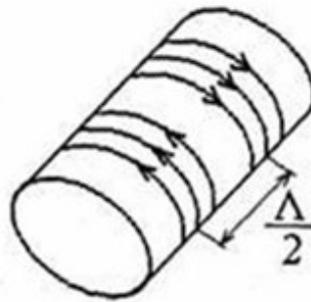


Рис. 2.14

Токи в круглом волноводе с волной  $H_{01}$ . В этом случае тангенциальной к поверхности волновода является лишь продольная составляющая магнитного поля, которая определяется формулой

$$H_z = H_{0z} J_0(\nu_{01}^H) e^{-jhz}. \quad (2.64)$$

Ей соответствует поперечная составляющая поверхностного тока  $j_\varphi^p = H_{0z} J_0(\nu_{01}^H) e^{-jhz}$ , распределенная с одинаковой плотностью по периметру волновода (рис. 2.14).

## 2.4. Волны в коаксиальной линии

Коаксиальная линия представляет собой полую металлическую трубу круглого сечения с соосным цилиндрическим проводником (рис. 2.15). Будем полагать, что стенки экрана и центральный проводник обладают бесконечной проводимостью, а среда между ними – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . В такой линии могут существовать волны  $T$ ,  $E$  и  $H$ . Так как  $\lambda_{кр}^T = \infty$  ( $f_{кр}^T = 0$ ), то в коаксиальной линии волной основного типа станет волна  $T$ .

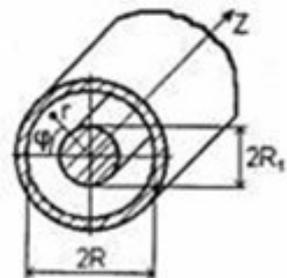


Рис. 2.15

Поперечные электромагнитные волны «Т» ( $E_\perp \neq 0$ ,  $H_\perp \neq 0$ ,  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ ). Введем цилиндрическую систему координат (рис. 2.15), совместив координату  $z$  с осью линии. Так как поле  $T$ -волны имеет потенциальный характер,

$$\nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_\perp = 0; \quad \nabla_\perp^2 \dot{\vec{H}}_\perp = 0, \quad (2.65)$$

то решения уравнений (2.65) выражаются через поперечный градиент скалярных потенциалов. Для первого уравнения системы (2.65)

$$\dot{\vec{E}} = -\text{grad}_{\perp} \psi, \quad (2.66)$$

где  $\psi$  удовлетворяет поперечному уравнению Лапласа

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = 0, \quad (2.67)$$

или в полярной системе координат

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.68)$$

Уравнение (2.68) имеет два решения:

$$\psi_1 = (Ar^m + Br^{-m}) \cos m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}. \quad (2.69)$$

$$\psi_2 = -D \ln r e^{-jhz}, \quad (2.70)$$

где  $m$  – целое число. Верному решению соответствует равная нулю касательная к проводникам линии составляющая электрического поля

$$E_{\phi}(R_1, \phi) = E_{\phi}(R_2, \phi) = 0. \quad (2.71)$$

Из уравнения (2.66) следует

$$\dot{E}_{\phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0. \quad (2.72)$$

Подставляя уравнение (2.69) в (2.72), получим, что при  $A \neq 0$  и  $B \neq 0$  граничные условия (2.71) не выполняются, т. е. решение уравнения (2.69) следует исключить как физически недостоверное. При подстановке (2.70) в (2.72) граничные условия (2.71) удовлетворяются тождественно, так как решение уравнения (2.70) от  $\phi$  не зависит. Таким образом, физически достоверным решением уравнения (2.68) является решение (2.70). Подставляя (2.70) в (2.66), получим

$$\dot{\vec{E}}_{\perp} = \bar{1}_r \dot{E}_r = -\bar{1}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \bar{1}_r \frac{D}{r} e^{-jhz}. \quad (2.73)$$

Подставляя уравнение (2.73) в  $\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z_c} [\bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}]$ , имеем

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \bar{1}_{\phi} \frac{E_r}{Z_c} = \bar{1}_{\phi} \dot{H}_{\phi} = \bar{1}_{\phi} \frac{D}{Z_c r} e^{-jhz}. \quad (2.74)$$

Соотношения (2.73), (2.74) описывают составляющие поля волны  $T$ -типа в коаксиальной линии. Выразим постоянную  $D$  в соотношениях (2.73), (2.74) через модуль напряженности электрического поля у поверхности внутреннего проводника  $E_0$ . Из (2.73) следует  $D = E_0 R_1$ . Тогда

проекции составляющих поля волны  $T$ -типа в коаксиальной линии можно записать

$$\dot{E}_r = \frac{E_0 R_1}{r} e^{-jhz}. \quad (2.75)$$

$$\dot{H}_\phi = \frac{E_0 R_1}{r Z_c} e^{-jhz}. \quad (2.76)$$

Структура поля  $T$ -волны в коаксиальной линии показана на рис. 2.16. Волны типа  $T$  в коаксиальной линии характеризуются следующими параметрами:  $\lambda_{кр}^T = \infty$ ,  $h^T = \beta$ ,  $\lambda_B^T = \lambda$ ,  $V_\phi^T = V_\varepsilon^T = V_0$ ,  $Z_c^T = Z_c$ .

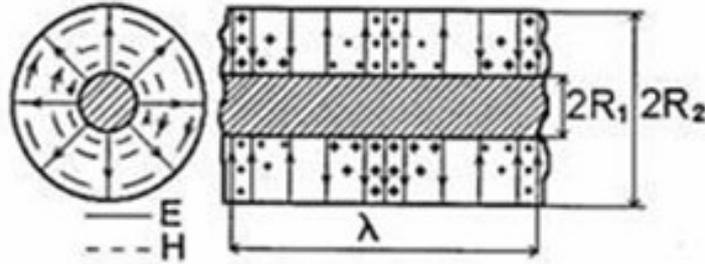


Рис. 2.16

Поле волны  $T$  имеет потенциальный характер, поэтому можно пользоваться понятием полного тока и напряжения в коаксиальной линии. Комплексная амплитуда тока, протекающего по проводникам коаксиальной линии, и разность потенциалов между проводниками определяются соотношениями

$$i^\varepsilon = \varphi_L, \bar{H} d\bar{l} = \int_0^{2\pi} R_1 \dot{H}_\phi(R_1, \varphi) d\varphi = 2\pi R_1 \left( \frac{E_0}{Z_c} \right) e^{-jhz}. \quad (2.77)$$

$$\dot{u} = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} e^{-jhz}. \quad (2.78)$$

Отношение полного напряжения  $u$  к полному току  $I$  в режиме бегущей волны называется *волновым сопротивлением* коаксиальной линии

$$Z_B = \frac{\dot{u}}{i^\varepsilon} = \frac{Z_c}{2\pi} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (2.79)$$

*Электрические и магнитные волны.* Продольная составляющая  $E_z$  волны  $E$  в коаксиальной линии решается уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + g^2 \dot{E}_z = 0$$

и в общем случае имеет вид

$$\dot{E}_z = [CJ_m(gr) + DNm(gr)] \cos m(\phi - \phi_0) e^{-jhz}.$$

Так как в данном случае точка  $r = 0$  находится внутри центрального проводника, то решение включает в себя обе цилиндрические функции:  $J_m(gr)$  и  $N_m(gr)$ . Поперечное число  $g$  определим, решая граничную задачу  $E_z = 0$  при  $r = R_1, r = R_2$ , с помощью которой получим систему двух уравнений:

$$CJ_m(gR_1) + DN_m(gR_1) = 0;$$

$$CJ_m(gR_2) + DN_m(gR_2) = 0.$$

Выражая любой коэффициент из первого уравнения и подставляя полученное соотношение во второе уравнение, получим трансцендентное уравнение для нахождения  $g$ :

$$\frac{J_m(gR_1)}{J_m(gR_2)} = \frac{N_m(gR_1)}{N_m(gR_2)}. \quad (2.80)$$

Выполняя аналогичные преобразования для волн  $H$ -типа в коаксиальной линии, получим трансцендентное уравнение для нахождения  $g$

$$\frac{J'_m(gR_1)}{J'_m(gR_2)} = \frac{N'_m(gR_1)}{N'_m(gR_2)}. \quad (2.81)$$

Анализ уравнений (2.80), (2.81) показывает, что ближайшим к волне  $T$  высшим типом является волна  $H_{11}$ , поперечная структура которой приведена на рис. 2.17. Путем следующих рассуждений можно определить критическую частоту волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии, не решая уравнения (2.80). При  $R_1 \rightarrow 0$  коаксиальная линия превращается в круглый волновод с волной  $H_{11}$ . Соосный металлический стержень малого диаметра в волноводе слабо повлияет на распространение волны  $H_{11}$  из-за отсутствия продольных составляющих электрического поля.

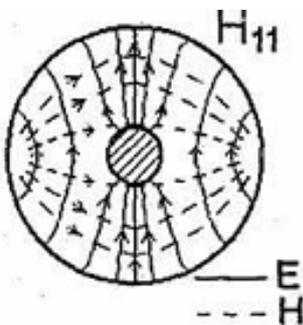


Рис. 2.17

В этом случае критическая длина волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии приближенно равна

$$\lambda_{кр}^{H_{11}} = 3,41R_2. \quad (2.82)$$

При  $R_1 \rightarrow R_2$  поперечная структура поля волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии будет иметь вид, представленный на рис. 2.18, а. На рис. 2.18, б приведена поперечная структура поля волны  $H_{20}$  в прямоугольном волноводе, изогнутом по окружности, радиусом  $R_1 \gg b$ , где  $b = R_2 - R_1$  —

размер узкой стенки прямоугольного волновода. Совпадение структур позволяет считать, что критические длины волн для волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии при  $R_1 \rightarrow R_2$  и волны  $H_{20}$  в прямоугольном волноводе совпадают. Критическая длина волны для прямоугольного волновода с волной  $H_{20}$  равна размеру широкой стенки прямоугольного волновода  $a$ . Полагая в изогнутом волноводе  $a = \pi (R_1 + R_2)$ , получим, что при  $R_1 \rightarrow R_2$  критическая длина волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии приближенно равна

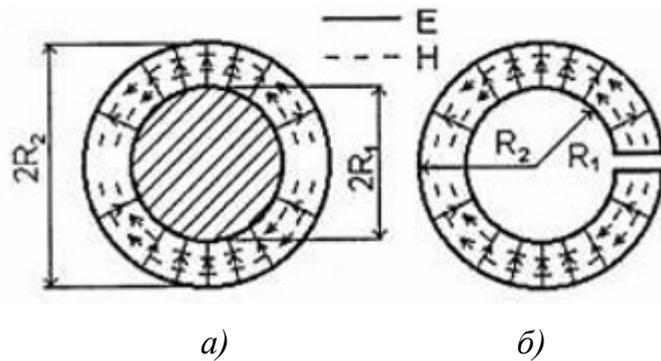


Рис. 2.18

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi (R_1 + R_2) = 3,14R_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (2.83)$$

Соотношение (2.83) для  $R_1 \ll R_2$  приводит к формуле

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = 3,14R_2, \quad (2.84)$$

которая позволяет получить результаты, совпадающие с погрешностью, не превышающей 10 % с аналогичными результатами, вычисленными по формуле (2.82). Таким образом, формулой (2.83) можно пользоваться при произвольных  $R_1$  и  $R_2$ .

## 2.5. Концепция парциальных волн

Волны  $E$  и  $H$  в различных линиях передачи можно представить композицией парциальных  $T$ -волн, распространяющихся под углом к оси линии  $z$  по ломаной траектории путем переотражений от направляющих элементов структуры (рис. 2.19). Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  волны типа  $T$ , распространяющейся вдоль оси  $z$ , лежат в поперечной плоскости (рис. 2.20). Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  парциальной  $T$ -волны лежат в плоскостях, перпендикулярных отрезкам ломаной траектории (рис. 2.21). При этом оба вектора или один из векторов будет неперпендикулярен оси  $z$ . Во втором случае вектор  $\vec{E}$  (рис. 2.21) или вектор  $\vec{H}$  (рис. 2.22) будут иметь продольную составляющую, что соответствует волнам  $E$  или  $H$ , распространяющимся вдоль оси  $z$ .

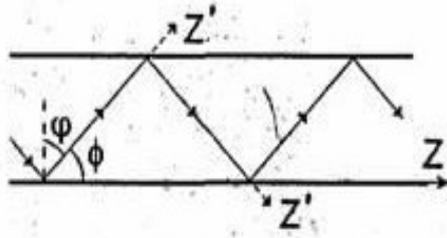


Рис. 2.19

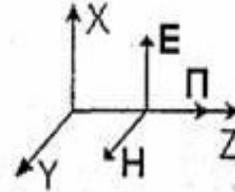


Рис. 2.20

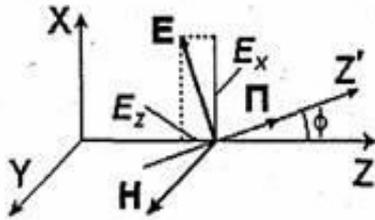


Рис. 2.21

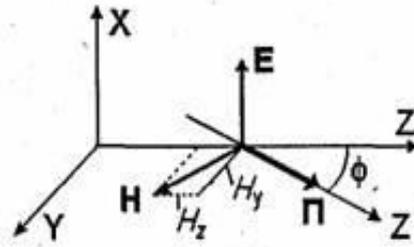


Рис. 2.22

С помощью концепции парциальных волн можно объяснить характерные отличия в свойствах длины волны в линии: фазовой скорости, характеристического сопротивления волн  $E$ ,  $H$  и волн типа  $T$ .

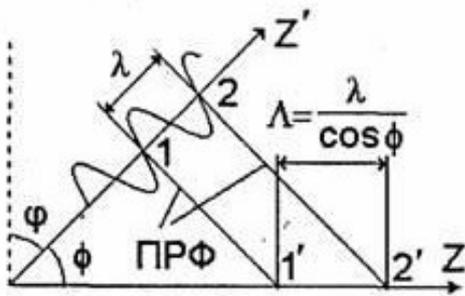


Рис. 2.23

Парциальная волна  $T$  при моделировании волн  $E$  или  $H$  распространяется вдоль отрезка ломаной траектории – оси  $z'$  (рис. 2.23), образующей угол  $\varphi$  с осью  $z$ . Фазовый фронт парциальной волны  $T$  перпендикулярен оси  $z'$  и перемещается вдоль нее с фазовой скоростью  $V_\varphi = V_0 = \frac{\lambda}{T}$ . Фазовый фронт 1-1' (рис. 2.23) за период  $T$  сместится

вдоль оси  $z'$  на расстояние 1 – 2, равное длине волны  $\lambda$ .

Смещение фазового фронта парциальной волны вдоль оси  $z$  будет определяться расстоянием между точками 1' и 2', равным длине волны вдоль оси  $z$   $\lambda_b = \lambda / \cos \varphi$ , которая будет больше  $\lambda$ . Фазовая скорость по оси  $z$   $V_\varphi = \lambda_b / T = \lambda / (T \cos \varphi) = V_0 / \cos \varphi$ . Таким образом, длина волны и фазовые скорости волн  $E$  и  $H$  больше соответствующих параметров волн  $T$ .

Как следует из рис. 2.21, у волны типа  $E$ , распространяющейся вдоль оси  $z$ , отношение поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей меньше, чем у парциальной  $T$ -волны,

распространяющейся вдоль оси  $z'$ . Соответственно  $Z_C^E < Z_C^T$ . Из рис. 2.22 следует, что у  $H$ -волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , отношение поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей больше, чем у парциальной  $T$ -волны, распространяющейся вдоль оси  $z'$ . Следовательно,  $Z_C^H > Z_C^T$ .

## 2.6. Линии поверхностной волны

При рассмотрении волновых явлений на границе раздела сред с разными электродинамическими параметрами было установлено, что при определенных условиях вдоль поверхности раздела распространяется поверхностная волна – направляемая волна, амплитуда которой экспоненциально убывает в направлении нормали к границе раздела.

Рассмотрим некоторые линии передачи, в которых основным типом волны являются поверхностные волны.

*Металлическая плоскость, покрытая слоем диэлектрика.* В соответствии со сказанным, в диэлектрическом слое на металлической плоскости могут существовать поверхностные волны, распространяющиеся, например, вдоль оси  $Z$ . Такие волны возникают в результате скачкообразного распространения волн  $T$ , последовательно отражающихся от поверхности металла и границы раздела диэлектрик – воздух, что согласно концепции парциальных волн соответствует распространению волн  $E$  или  $H$ .

Определим структуру *электрических* волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$  параллельно безграничной, идеально проводящей плоскости, покрытой слоем диэлектрика толщиной  $d$  с электродинамическими параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_0$  (рис. 2.24).

Будем полагать, что плоскость и покрывающий ее диэлектрик однородны вдоль оси  $X$ . В этом случае должна отсутствовать зависимость составляющих поля от координаты  $X$  и в однородном уравнении Гельмгольца относительно  $E_z$ :  $\nabla_{\perp}^2 E_z + g^2 E_z = 0$  следует положить  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0$ .

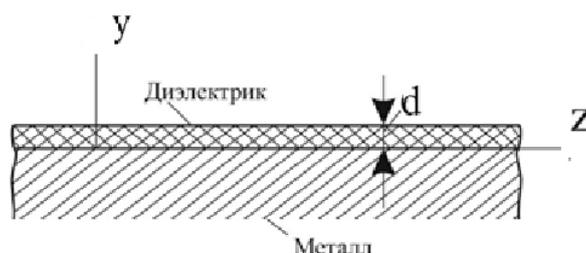


Рис. 2.24

При  $y < d$  составляющая  $E_z$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E_z^{(1)}}{dy^2} + g_D^2 E_z^{(1)} = 0, \quad (2.85)$$

где 
$$g_D^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{a1} h^2. \quad (2.86)$$

При  $y > d$  составляющая  $E_z$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E_z^{(2)}}{dy^2} + g_B^2 E_z^{(2)} = 0, \quad (2.87)$$

где 
$$g_B^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 h^2. \quad (2.88)$$

На поверхности металлической плоскости, т. е. при  $y = 0$ ,  $E_z^{(1)} = 0$ . В диэлектрике вдоль оси  $Y$  должна образовываться стоячая волна. Этим условиям удовлетворяет решение уравнения (2.85), которое имеет вид

$$E_z^{(1)} = A \sin g_D y e^{-jhz}. \quad (2.89)$$

В пространстве над диэлектриком амплитуда поля вдоль оси  $Y$  убывает по экспоненте, и решение уравнения (2.87) принимает вид

$$E_z^{(2)} = B e^{-\alpha_B y} e^{-jhz}, \quad (2.90)$$

где  $\alpha_B$  – действительная положительная величина, определяемая равенством

$$\alpha_B = jg_B = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}. \quad (2.91)$$

Составляющие поля волн типа  $E$  связаны выражениями

$$-g^2 \bar{E}_\perp = jh \cdot \text{grad}_\perp E_z; \quad (2.92)$$

$$-g^2 \bar{H}_\perp = j\omega \varepsilon_a \cdot [\bar{1}_z \text{grad}_\perp E_z]. \quad (2.93)$$

Раскрывая равенства (2.92) и (2.93) в прямоугольной системе координат и подставляя в полученные соотношения выражения (2.89) и (2.90), после преобразования получим выражения для поперечных составляющих:

– при  $y \leq d$

$$E_y^{(1)} = -\frac{jh}{g_D} A \cos g_D y e^{-jhz}; \quad (2.94)$$

$$H_x^{(1)} = \frac{j\omega \varepsilon_{a1}}{g_D} A \cos g_D y e^{-jhz}, \quad (2.95)$$

– при  $y \geq d$

$$E_y^{(2)} = -\frac{jh}{\alpha_B} B e^{-\alpha_B y} e^{-jhz}; \quad (2.96)$$

$$H_x^{(2)} = \frac{j\omega \varepsilon_0}{\alpha_B} B e^{-\alpha_B y} e^{-jhz}. \quad (2.97)$$

Касательные к границе раздела диэлектрик – воздух составляющие электрического и магнитного полей при  $y = d$  должны быть непрерывны

$$E_z^{(1)}|_{y=d} = E_z^{(2)}|_{y=d}, \quad H_x^{(1)}|_{y=d} = H_x^{(2)}|_{y=d}. \quad (2.98)$$

$$A \sin g_d d = B e^{-\alpha_B y}; \quad \frac{\varepsilon_{a1}}{g_d} A \cos g_d d = \frac{\varepsilon_0}{\alpha_B} B e^{-\alpha_B y}. \quad (2.99)$$

Разделив обе части каждого из равенств (2.99) на  $A$  и исключив из полученной системы отношение  $B/A$ , придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\operatorname{tg} g_d d = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_0} \frac{\alpha_B}{g_d}. \quad (2.100)$$

Используя соотношения (2.100), (2.86) и (2.91), можно графически или численно определить  $g_d$ ,  $\alpha_B$  и  $h$ .

Полное внутреннее отражение на границе диэлектрик – воздух прекращается, когда парциальная волна  $T$  падает на границу под углом меньше критического. При этом часть энергии преломляется, и в пространстве над диэлектриком появляется поток активной мощности, нормальный границе раздела. Аналогичное явление имеет место в рассматриваемой направляющей структуре. Действительно, если на некоторой частоте

$$h^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 < 0, \quad (2.101)$$

то согласно (2.91)  $\alpha_B$  становится чисто мнимой величиной и появляется волна, бегущая вдоль оси  $Y$ . Следовательно, поверхностная волна существует на частотах, где выполняется неравенство

$$h^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 > 0. \quad (2.102)$$

Частота, на которой  $\alpha_B = 0$ , называется *критической*

$$\omega_{\text{кр}} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = h. \quad (2.103)$$

Как показывает анализ корней уравнения (2.100), низшим типом среди волн  $E$  выступает волна, у которой  $0 < g_d d < \pi/2$ . Распространение этой волны возможно на всех частотах, превышающих нулевую, и при любой толщине диэлектрика.

На рис. 2.25 и 2.26 изображены построенные в соответствии с формулами (2.89), (2.90), (2.98), (2.99) структуры полей электрического типа: низшей  $E_{10}$  и ближайшей высшей  $E_{20}$ .

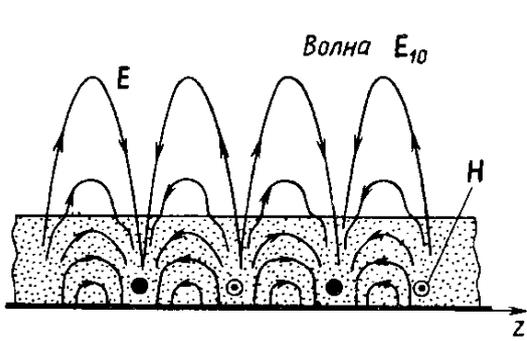


Рис. 2.25

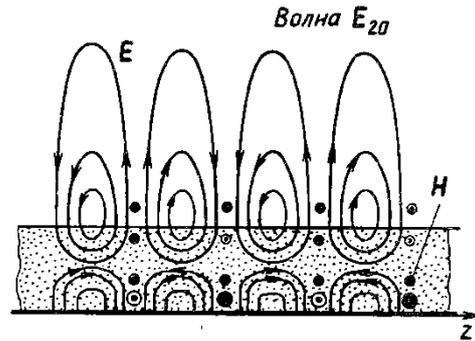


Рис. 2.26

Поверхностная волна характеризуется поверхностным сопротивлением, которое определяется отношением касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела диэлектрик – воздух при  $y = d$

$$Z_S^E = -\frac{E_z^{(2)}}{H_x^{(2)}} = j \frac{\alpha_B}{\omega \epsilon_0}. \quad (2.104)$$

При выполнении неравенства (2.102)  $Z_S^E$  – реактивное и индуктивное по характеру сопротивление. Из уравнения (2.104) следует, что  $E_z^{(2)}$  и  $H_x^{(2)}$  отличаются по фазе на  $\pi/2$ , т. е. в направлении, перпендикулярном границе раздела диэлектрик – воздух, отсутствует поток активной мощности. Это свойство считается характерным признаком существования в направляющей структуре поверхностной волны. Таким образом, поверхностная волна типа  $E$  существует в рассматриваемой линии при условии, что поверхностное сопротивление на границе раздела реактивное и индуктивное.

Возможным вариантом линии передачи с поверхностной волной  $E$ -типа является металлическая гребенчатая структура (рис. 2.27).

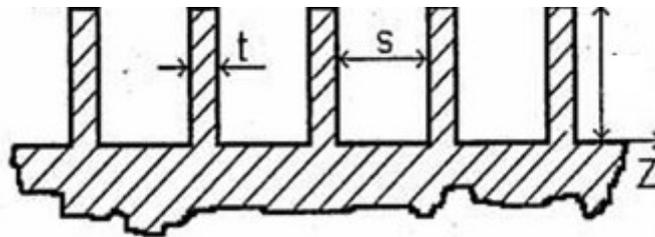


Рис. 2.27

Периодические фрагменты структуры эквивалентны короткозамкнутой двухпроводной линии длиной  $d$ . Входное сопротивление двухпроводной линии определяется соотношением

$$Z_{\text{вх}} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg}(\beta d), \quad (2.105)$$

где  $Z_{\text{в}}$  – волновое сопротивление эквивалентной двухпроводной линии; а  $\beta$  – ее постоянная распространения.

$$\text{При } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}, d < \frac{\lambda}{4}, \beta d < \frac{\pi}{2}, Z_{\text{вх}} = jX_L.$$

Пренебрегая влиянием металлических гребней ( $s+t \ll \lambda$ ), можно полагать, что при  $y = d$  в любой точке границы раздела гребенчатая структура – воздух поверхностное сопротивление реактивное и индуктивное. Следовательно, в этом случае вдоль гребенчатой структуры может распространяться поверхностная электрическая волна. Структура волны близка к структуре волны  $E_{10}$ , изображенной на рис. 2.25.

Из неравенства (2.102) следует, что  $h > \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ , поэтому  $V_{\text{ф}}$  поверхностной волны меньше скорости света в среде, окружающей линию передачи. Волны, обладающие этим свойством, называются *замедленными*.

Для *магнитных волн* постоянная распространения определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} g_d d = -\frac{g_d}{\alpha_{\text{в}}}, \quad (2.106)$$

а поверхностное сопротивление соотношением

$$Z_S^H = -j \frac{\omega \mu_0}{\alpha_{\text{в}}}. \quad (2.107)$$

Согласно уравнению (2.107), при выполнении неравенства  $h^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 > 0$  для волн  $H Z_S^H$  носит емкостной характер, что является условием существования поверхностной волны типа  $H$  в рассматриваемой линии.

Анализ корней уравнения (2.106) показывает, что низшей волной  $H$ -типа в рассматриваемой структуре является волна, для которой  $\pi/2 < g_d d < \pi$ . На критической частоте (2.103)  $\alpha_{\text{в}} = 0$  и согласно (2.106)  $g_d d = \pi/2$ .

Умножая левую и правую части уравнения (2.86) на  $d^2$  и подставляя  $h$  из (2.103), получим равенство

$$g_d^2 d^2 = \omega_{\text{кр}}^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) d^2 = (\pi/2)^2. \quad (2.108)$$

Преобразуя правую часть равенства (2.108), составим следующее выражение:

$$\left(2\pi \frac{f_{\text{кр}}}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - 1) d^2 = (\pi/2)^2. \quad (2.109)$$

После преобразований в (2.109) получим выражение для  $\lambda_{кр}$

$$\lambda_{кр} = 4d\sqrt{\varepsilon_1 - 1}. \quad (2.110)$$

Таким образом, распространение низшего типа магнитных волн возможно, если

$$\lambda < 4d\sqrt{\varepsilon_1 - 1} \quad (2.111)$$

или

$$d > \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}. \quad (2.112)$$

Так как критическая частота волны  $E_{10}$  равна нулю, то она будет низшей среди всех волн  $E$  и  $H$  в рассматриваемой направляющей структуре. Из (2.102) следует, что магнитные волны, как и электрические, являются замедленными.

*Дисперсионные уравнения замедляющей структуры.* Полученные дисперсионные уравнения

$$\operatorname{tg} g_d d = \frac{\varepsilon_{a1} \alpha_B}{\varepsilon_0 g_d}, \quad \operatorname{tg} g_d d = -\frac{g_d}{\alpha_B}$$

позволяют рассчитать зависимость длины волны в рассматриваемой линии от длины волны в свободном пространстве. Для этого дисперсионные уравнения следует преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} g_d d \operatorname{tg} g_d d = \alpha_B d; \quad (2.113)$$

$$\alpha_B d \operatorname{tg} g_d d = -g_d d. \quad (2.114)$$

В приведенные уравнения входят две неизвестные величины  $g_d d$  и  $\alpha_B d$ . Для их однозначного определения дисперсионные уравнения необходимо дополнить соотношением

$$(g_d d)^2 + (\alpha_B d)^2 = (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_1 - h^2 + h^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0) d^2 = (kd)^2 (\varepsilon_1 - 1). \quad (2.115)$$

Используя равенства (2.113), (2.114), (2.115), можно составить две системы из двух уравнений: (2.113), (2.115) – для волн  $E$  и (2.114), (2.115) – для волн  $H$ . В каждой паре одно уравнение трансцендентное: (2.113) или (2.114), а другое – алгебраическое второй степени (2.115). Такие системы уравнений решаются численными или графическими методами.

*Рассмотрим пример.* Требуется определить длину волны  $\lambda_B$  поверхностной волны  $E$ -типа в направляющей структуре (см. рис. 2.24) при следующих исходных данных:  $\varepsilon_1 = 2,56$ ;  $d = 10$  мм;  $\lambda_0 = 48$  мм;  $f = 6,25$  ГГц. На рис. 2.28 построены две первые положительные кривые, соответствующие уравнению (2.113).

Искомое решение определяется точками пересечения построенных кривых с геометрическим местом точек, соответствующих уравнению (2.115), которое описывает семейство концентрических окружностей, радиусы которых определяются соотношением  $R = kd\sqrt{\varepsilon_1 - 1}$ . Подставляя численные данные, получим  $R = 1,63$ . Снося точку пересечения первой кривой с окружностью, получим значение безразмерного параметра  $\alpha_B d = 1,12$ . Откуда  $\alpha_B = 0,112 \text{ мм}^{-1}$ , постоянная распространения поверхностной волны  $h = \sqrt{\alpha_B^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} = 0,172 \text{ мм}^{-1}$ , длина волны в направляющей структуре  $\lambda_B = 2\pi/h = 36,5 \text{ мм}$ , а коэффициент замедления  $K_{\text{зам}} = c/V_\phi = \lambda_0/\lambda_B = 48/36,5 = 1,315$ . Из представленных результатов следует, что при заданных параметрах направляющей структуры и частоте может распространяться волна лишь основного типа  $E_{10}$ . Одноволновой режим сохраняется до значений  $R = \pi$ , т. е. при выполнении неравенства  $\lambda > 2d\sqrt{\varepsilon_1 - 1}$ . Его нарушение приведет к возможному появлению в линии волны высших типов. При  $\lambda = 24,4 \text{ мм}$  и  $f = 12,3 \text{ ГГц}$   $R = 3,22$  (рис. 2.28). Точка пересечения этой окружности со второй ветвью дисперсионной кривой соответствует волне  $E_{20}$  с малым коэффициентом замедления:  $\alpha_B d = 0,1$ ,  $K_{\text{зам}} = 1,0008$ . В этом случае наряду с волной  $E_{20}$  будет существовать сильно замедленная волна  $E_{10}$ :  $\alpha_B d = 2,9$ ,  $K_{\text{зам}} = 1,5$ .

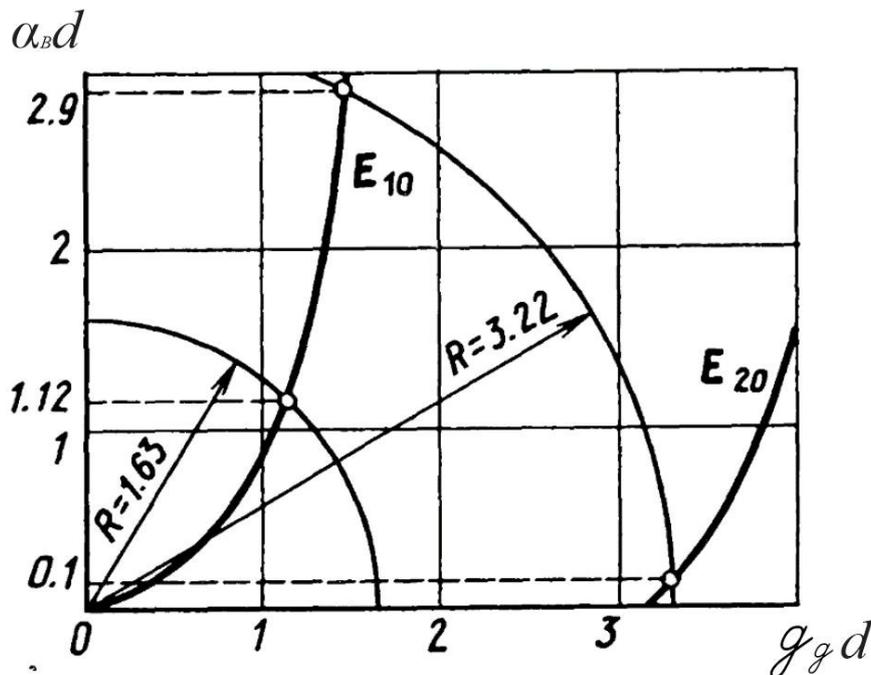


Рис. 2.28

## 2.7. Полосковые линии

Полосковой линией называют планарную направляющую структуру, состоящую из изолированных проводящих полос на тонкой диэлектрической подложке. Строгий анализ полосковых линий возможен на электродинамическом уровне с использованием численных методов. Полосковые линии относятся к линиям открытого типа, поэтому в них существуют потери на излучение, которые минимизируются за счет особенностей конструкции. Основной волной в полосковых линиях является  $T$ -волна или квази- $T$ -волна.

Симметричная полосковая линия (СПЛ) (рис. 2.29) состоит из полоски 1 шириной  $w$  и толщиной  $t$ , симметрично расположенной между экранирующими пластинами шириной  $a$ , расположенными на расстоянии  $b$  друг от друга. Пространство между проводниками заполнено однородным диэлектриком 2 с параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu=1$ ,  $\sigma$ д.

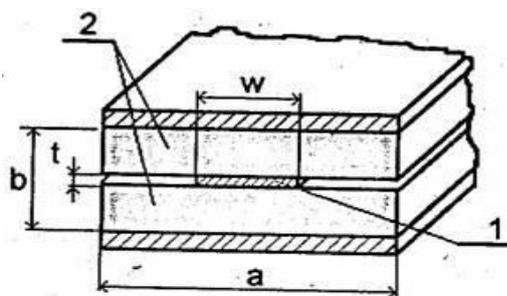


Рис. 2.29

Токонесущие элементы выполнены из металла с удельной проводимостью  $\sigma$ м. При  $\sigma$ д = 0  $\sigma$ м =  $\infty$  и  $a = \infty$  основной волной в СПЛ является  $T$ -волна с  $\lambda_{кр} = \infty$ .

Качественное представление о структуре поля  $T$ -волны в СПЛ можно получить, рассматривая деформацию коаксиальной линии (см. рис. 2.30).

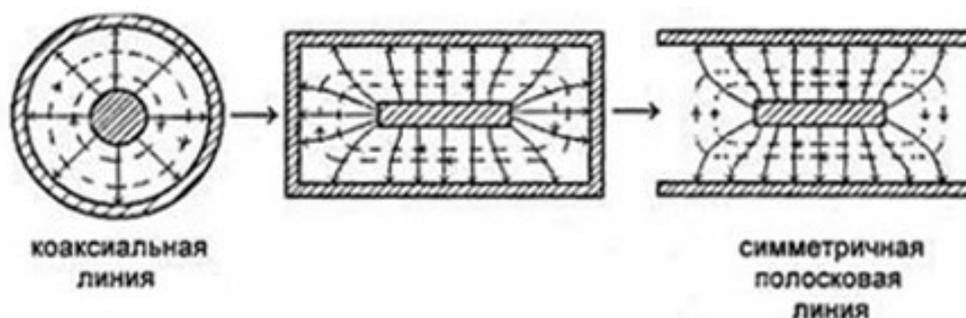


Рис. 2.30

Точные значения параметров  $T$ -волны в СПЛ можно определить электродинамическими методами. Важной характеристикой линии передачи с  $T$ -волной служит ее волновое сопротивление  $Z_B$ . Приближенно волновое сопротивление  $Z_B$  линии с  $T$ -волной можно рассчитать по формуле  $Z_B = U_m/I_m = U_m\sqrt{\mu\epsilon}/Q_m = \sqrt{\mu\epsilon}/C_1$ , где  $C_1$  – погонная

емкость линии,  $Q_m$  – комплексная амплитуда заряда на единицу длины проводника. В случае СПЛ погонную емкость линии  $C_1$  можно представить (рис. 2.31) в виде  $C_1 = 2C_{пл} + 4C_{кр}$ , где  $C_{пл} = \varepsilon 2w/(b-t)$  – емкость плоского конденсатора с пластинами шириной  $w$  и длиной 1 м, расположенными на расстоянии  $(b-t)/2$  без учета краевых эффектов. Емкость  $C_{кр}$ , связанная с краевыми полями на концах полоски, зависит от  $\varepsilon$ ,  $t$  и  $b$  линий и определяется методами конформных отображений.

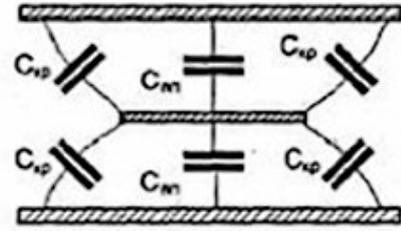


Рис. 2.31

Приближенные формулы для  $Z_B$  с погрешностью расчета не более 1,24 % имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \text{– при } \frac{w}{b} > 0,35 \left(1 - \frac{t}{b}\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad Z_B \sqrt{\varepsilon} = 30\pi / (a_1 w / b + A), \qquad (2.116)
 \end{aligned}$$

где  $a_1 = \frac{1}{1 - \frac{t}{b}}$ ;  $A = [2a_1 \ln(a_1 + 1) - (a_1 - 1) \ln(a_1^2 - 1)] / \pi$ ;

$$\begin{aligned}
 & \text{– при } \frac{w}{b} \leq 0,35 \left(1 - \frac{t}{b}\right) \text{ и } w \geq t \\
 & \qquad \qquad \qquad Z_B \sqrt{\varepsilon} = 60 \ln[4b / (\pi d)], \qquad (2.117)
 \end{aligned}$$

где  $d/w = 0,5 + 0,8t/w - 0,12(t/w)^2$ .

Из формул (2.116), (2.117) следует, что волновое сопротивление СПЛ уменьшается с ростом  $\varepsilon$ ,  $w$  и  $t$  и уменьшением  $b$ , так как при этом увеличивается емкость  $C_{пл}$ .

Вычисления показывают, что в СПЛ при  $a > w + 2b$  поле преимущественно сосредоточено в заполняющем диэлектрике, поэтому характеристики СПЛ в этом случае можно рассчитывать по формулам для  $a = \infty$ .

Ближайшим к  $T$ -волне высшим типом в СПЛ является волна  $H^{(1)}$ . Ее поперечная структура приведена на рис. 2.32. Можно показать, что приближенно  $\lambda_{крH^{(1)}} \approx w$ , а условие одноволновости в СПЛ  $w < \lambda_\varepsilon / 2$ , где  $\lambda_\varepsilon$  – длина  $T$ -волны в СПЛ.

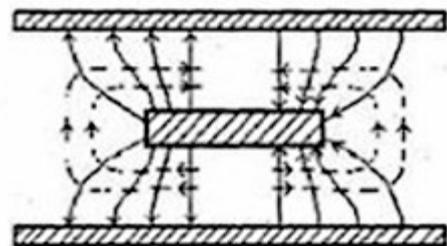


Рис. 2.32

Для  $a > w + 2b$ ,  $b < \lambda_\varepsilon / 2$  затухание за счет излучения при распространении

$T$ -волны по СПЛ пренебрежимо мало. В этом случае при  $\sigma_d \neq 0$  и  $\sigma_m \neq \infty$  основные потери в линии складываются из потерь в заполняющем диэлектрике и потерь в проводниках линии:  $h'' \approx h''_d + h''_m$ . Исследования показывают, что даже при использовании диэлектриков с малым  $\text{tg } \delta$  и металлов с высокой проводимостью постоянная затухания  $h''$  в СПЛ на частотах выше 1 ГГц характеризуется значениями от десятых долей до единиц децибел на метр, что значительно больше постоянной затухания в металлических волноводах и коаксиальной линии на тех же частотах. При этом  $h''$  в СПЛ возрастает с увеличением частоты и  $\epsilon$ . Несмотря на большое затухание, полосковые линии широко применяют в интегральной схемотехнике СВЧ, так как их использование позволяет получить устройства с малыми размерами и весом.

С целью снижения затухания волны в СПЛ применяют высокодобротные полосковые линии (рис. 2.33), в которых центральный проводник выполняют в виде двух эквипотенциальных полосок 1 на тонком опорном листе диэлектрика 2. Положение опорной диэлектрической пластины между экранирующими пластинами 3 обеспечивается диэлектрическими стойками 4. Такая конструкция существенно снижает потери в заполняющем СПЛ диэлектрике.

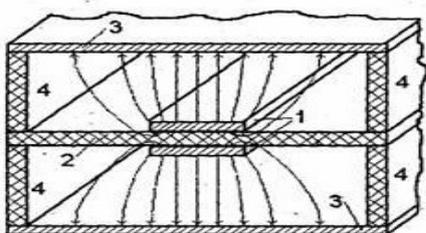


Рис. 2.33

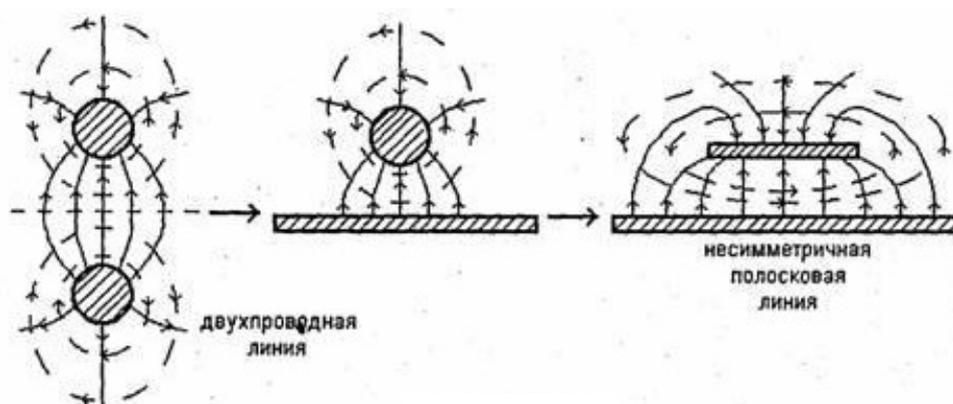


Рис. 2.34

*Несимметричная полосковая (НПЛ) и микрополосковая (МПЛ) линии.* НПЛ (рис.2.34) представляет собой полосковый проводник шириной  $w$  и толщиной  $t$ , расположенный на диэлектрической подложке

толщиной  $h$  над металлическим экраном шириной  $a$ . Подложка характеризуется параметрами  $\varepsilon_1, \mu = 1, \sigma_d$ . Удельная проводимость металлических элементов НПЛ  $\sigma_m$ . При  $\sigma_d = 0$   $\sigma_m = \infty$  и  $a = \infty$  основной волной в НПЛ является  $T$ -волна, для которой  $\lambda_{кр} = \infty$ . Качественное представление о структуре поля  $T$ -волны в НПЛ можно получить, рассматривая деформацию двухпроводной линии (рис. 2.34).

Точные значения параметров  $T$ -волны в НПЛ можно определить только электродинамическими методами. Приближенно волновое сопротивление в НПЛ с  $T$ -волной можно рассчитать, как и в случае СПЛ, по формуле  $Z_B = U_m Z_B = U_m / I_m = U_m \sqrt{\mu \varepsilon} / Q_m = \sqrt{\mu \varepsilon} / C_1$ , где  $C_1 = C_{пл} + 2C_{кр}$ , где  $C_{пл} = \varepsilon \cdot w/h$  – погонная емкость плоского конденсатора, а  $C_{кр}$  – емкость, обусловленная краевыми эффектами. Приближенный расчет  $Z_B$  при  $t = 0$  с погрешностью менее 0,6 % можно проводить по формулам:

– при  $\frac{w}{h} > 2$

$$Z_B \sqrt{\varepsilon} = 120\pi / [w/h + (2/\pi) \ln \{17,08(w/2h + 0,92)\}]; \quad (2.118)$$

– при  $\frac{w}{h} \leq 2$

$$Z_B \sqrt{\varepsilon} = 60 \left[ \ln \left( \frac{8h}{w} \right) + \frac{w^2}{32h^2} \right]. \quad (2.119)$$

При  $t \neq 0$  для  $0 < t/h < 0,1$  сопротивление  $Z_B$  для НПЛ можно определить по формулам (2.118), (2.119) с заменой  $w/h$  на  $w'/h$ , где

$$w'/h = \begin{cases} w/h + t[1 + \ln \left( \frac{2h}{t} \right)] / (\pi h) & \text{при } w/h > 0,16, \\ w/h + t[1 + \ln \left( \frac{4\pi w}{t} \right)] / (\pi h) & \text{при } w/h \leq 0,16. \end{cases} \quad (2.120)$$

Волновое сопротивление НПЛ уменьшается с ростом  $\varepsilon, w, t$  и уменьшением  $h$ . Исследование характеристик НПЛ показывает, что при  $a \gg (8...12)w$  они хорошо совпадают с характеристиками НПЛ при  $a = \infty$ .

Для работы НПЛ с основным типом волны и отсутствием внешнего излучения необходимо выполнение следующих условий:

$$w < \frac{\lambda_\varepsilon}{2}, \quad h < \lambda_\varepsilon / 2, \quad (2.121)$$

где  $\lambda_\varepsilon$  – длина  $T$ -волны в НПЛ.

В интегральной схемотехнике СВЧ используется вариант НПЛ (рис. 2.35), называемый микрополосковой линией (МПЛ). Конструкции

МПЛ и НПЛ совпадают. МПЛ также образована полосковым проводником 1 и металлическим экраном 2 на поверхности диэлектрической подложки 3, параметры которой  $\epsilon_2, \mu_2 = 1, \sigma_{д2}$  отличаются от параметров подложки НПЛ высоким значением диэлектрической проницаемости. При этом удается существенно уменьшить длину волны в линии, а значит, и габариты интегральной схемы.

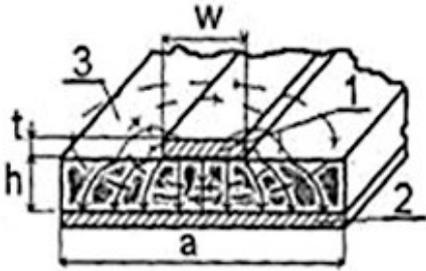


Рис. 2.35

Кроме того, из-за большой диэлектрической проницаемости подложки уровень излучения в МПЛ существенно меньше, чем в НПЛ.

Обычно полагается, что пространство над МПЛ имеет параметры  $\epsilon_1 = 1, \mu_1 = 1, \sigma_{д1} = 0$ . При конечной проводимости металлических элементов МПЛ в соответствии с приближенными граничными условиями Щукина – Леонтовича появляется продольная составляющая электрического поля ( $E_z \neq 0$ ), т. е. энергия в линии переносится гибридной волной. Как показывают исследования, при достаточно высокой проводимости проводников продольная составляющая вектора электрического поля оказывается много меньше величины поперечной составляющей, и ею можно пренебречь. Поэтому можно считать, что структура основной волны в МПЛ (рис. 2.36), называемая квази-*T*, совпадает со структурой *T*-волны.

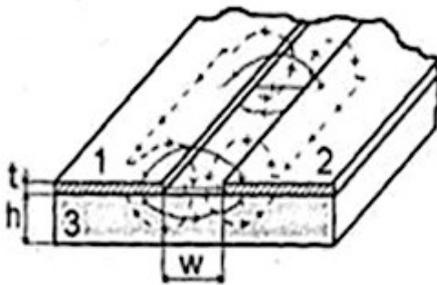


Рис. 2.36

Для волны квази-*T*  $\lambda_{кр} = \infty$ . Так как квази-*T*-волна переносит часть энергии в подложке, а часть в воздухе над подложкой, ее фазовая скорость удовлетворяет неравенству  $1/\sqrt{\epsilon_{a2}\mu_0} < v_{\phi} < 1/\sqrt{\epsilon_{a1}\mu_0}$ . При определении характеристик волн в линиях с поперечно неоднородным диэлектрическим заполнением вводят эффективную диэлектрическую проницаемость линии  $\epsilon_{a\text{эф}} = \epsilon_0 \epsilon_{\text{эф}}$ , где  $\epsilon_2 > \epsilon_{\text{эф}} > \epsilon_1$ , и связанную с ней фазовую скорость волны  $v_{\phi} = 1/\sqrt{\epsilon_{a\text{эф}}\mu_0}$ . При  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = \epsilon$  и  $t = 0$  эффективную проницаемость для волны квази-*T* в МПЛ можно определить по формуле

$$\epsilon_{\text{эф}} = (\epsilon + 1)/2 + (\epsilon + 1)/[2(1 + 10h/w)^{1/2}]. \quad (2.122)$$

Из (2.122) следует, что  $\varepsilon_{\text{эф}}$  зависит от диэлектрической проницаемости подложки и геометрических параметров линии. С увеличением  $w$ ,  $\varepsilon_2$  и уменьшением  $h - v_{\phi}$  волна квази- $T$  уменьшается. Характеристики волны квази- $T$  рассчитываются по формулам для  $T$ -волн путем замены  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_{\text{эф}}$ :

– при  $w/h > 2$

$$Z_B \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}} = 120\pi / [w/h + (2/\pi) \ln \{17,08(w/2h + 0,92)\}];$$

– при  $\frac{w}{h} \leq 2$

$$Z_B \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}} = 60 \left[ \ln \left( \frac{8h}{w} \right) + \frac{w^2}{32h^2} \right].$$

$$\lambda_{\varepsilon} = 1 / (f \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}} \mu_0}), \quad w < \frac{\lambda_{\varepsilon}}{2}, \quad h < \lambda_{\varepsilon} / 2.$$

Волна квази- $T$  гибридная, поэтому в ее свойствах проявляется дисперсия:  $\varepsilon_{\text{эф}}$ ,  $v_{\phi}$ ;  $Z_B$  зависят от частоты. При  $\sigma_d \neq 0$  и  $\sigma_m \neq \infty$  распространение волны квази- $T$  в реальной линии сопровождается затуханием.

*Щелевая полосковая линия (ЩПЛ).* ЩПЛ (рис. 2.36) представляет собой две проводящие полуплоскости 1 и 2 с параллельно разнесенными краевыми кромками, расположенные на диэлектрической подложке 3 с параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_d$ . Электромагнитная волна распространяется вдоль щели, образованной проводящими поверхностями. На рис. 2.36 приведена поперечная структура электромагнитного поля основной волны в ЩПЛ. Основной волной в линии является  $H$ -волна. Точные значения параметров  $H$ -волны в ЩПЛ ( $v_{\phi}$ ,  $Z_B$ ,  $\lambda_{\varepsilon}$ ) можно определить численно электродинамическими методами. Одноволновый режим в ЩПЛ при минимальном излучении в окружающее пространство достигается при  $w < \lambda_{\varepsilon}/2$  и  $h < \lambda_{\varepsilon}/2$ . В ЩПЛ наиболее сильно по сравнению с МПЛ проявляется дисперсия, но существенно меньше потери в проводниках. ЩПЛ широко применяются при разработке интегральных схем с навесными элементами и при конструировании полосковых невзаимных устройств с намагниченными ферритами.

*Связанные полосковые линии (СВПЛ).* СВПЛ (рис. 2.37) представляют собой две одинаковые СПЛ (рис. 2.37, а) или две одинаковые МПЛ (рис. 2.37, б), совмещенные на одной диэлектрической подложке. Полосковые проводники линий расположены параллельно с зазором  $s$  между ними. На рис. 2.37 а, б приведены соответственно связанные СПЛ

и связанные МПЛ с боковой связью. При малом  $s$  электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль одной ПЛ, будет ответвляться в соседнюю ПЛ, т. е. часть энергии будет переноситься волной вдоль другой ПЛ. СВПЛ используется в интегральной схемотехнике СВЧ при конструировании направленных ответвителей, фильтров и других устройств.

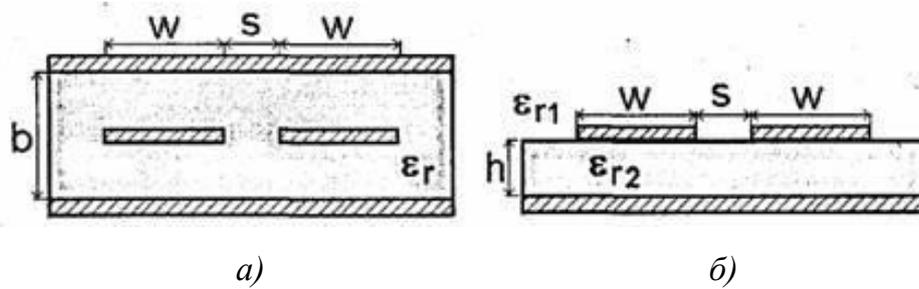


Рис. 2.37

В связанных СПЛ и МПЛ возможно существование двух независимых основных волн: четной (рис. 2.38), у которой потенциалы полосок одинаковы по величине и знаку, а токи на полосках текут в одном направлении, и нечетной (рис. 2.39), у которой потенциалы одинаковы по величине, но противоположны по знаку, а токи текут в противоположных направлениях. Основные параметры четной и нечетной  $T$ -волн в СПЛ вычисляются по общим для поперечных волн формулам. Волновые сопротивления для этих волн можно рассчитать по формуле

$Z_B = U_m / I_m = U_m \sqrt{\mu \epsilon} / Q_m = \sqrt{\mu \epsilon} / C_1$ , где полная погонная емкость

$$C_1 = 2(C_{\text{пл}} + C_{\text{кр}}) + \begin{cases} 2C_{\text{кр}e} & \text{для четной волны,} \\ 2C_{\text{кр}o} & \text{для нечетной волны,} \end{cases}$$

а  $C_{\text{кр}e}$  и  $C_{\text{кр}o}$  – погонные емкости за счет краевых эффектов для четной и нечетной волн. Из их определения следует, что  $C_{\text{кр}e} < C_{\text{кр}o}$ , т. е.  $C_1 = C'_e$  для четной волны меньше  $C_1 = C'_o$  для нечетной волны, соответственно  $Z_B = Z_{Be}$  для четной волны больше  $Z_B = Z_{Bo}$  для нечетной волны.

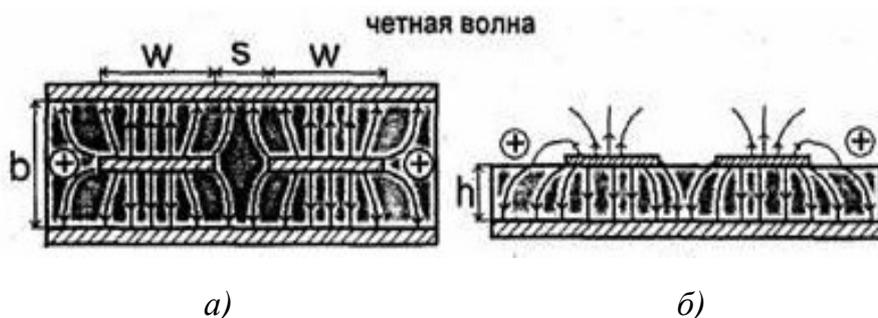


Рис. 2.38



## Темы для закрепления материала

1. Решение граничной задачи для прямоугольных волноводов.
2. Структура и свойства полей прямоугольных волноводов.
3. Типы волн, дисперсия, фазовая скорость и скорость распространения энергии волн в прямоугольном волноводе.
4. Основной тип волны в прямоугольных волноводах.
5. Решение граничной задачи для круглых волноводов.
6. Структура и свойства полей для круглых волноводов.
7. Типы волн, дисперсия, фазовая скорость и скорость распространения энергии волн в круглых волноводах.
8. Основной тип волны в круглых волноводах.
9. Токи на стенках прямоугольного и круглого волноводов.
10. Решение граничной задачи для волн  $T$  в коаксиальной линии.
11. Структура поля и свойства волн  $T$  в коаксиальной линии.
12. Волновое сопротивление коаксиальной линии.
13. Волны высших типов в коаксиальной линии.
14. Траектовка направляемых волн в линиях передачи на основе парциальных  $T$ -волн, распространяющихся по ломаным траекториям.
15. Расчет характеристического сопротивления и фазовой скорости в соответствии с концепцией парциальных волн.
16. Замедляющие структуры. Поверхностные волны над слоем диэлектрика.
17. Структура и свойства волн в микрополосковой, щелевой и копланарной линиях передачи.

### 3. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ПО ЛИНИЯМ ПЕРЕДАЧИ

#### 3.1. Предельная и допустимая мощности

Мощность, переносимая в среднем за период волной в линии передачи  $P_{\text{ср}}$ , пропорциональна квадрату напряженности электрического поля волны  $E^2$ . При определенной напряженности поля в среде, заполняющей линию, может возникнуть *электрический пробой*. Высокая плотность тока проводимости в разряде приводит к интенсивному выделению тепла. Активное сопротивление разрядного промежутка мало, и пробой вызывает короткое замыкание линии передачи. Увеличение средней мощности в линии с потерями приводит к нагреву металлических элементов и заполняющего линию диэлектрического материала. При некоторой предельной температуре диэлектрик разрушается и наступает *тепловой пробой*. Электрический и тепловой пробои ограничивают максимальное значение передаваемой по линии мощности. Максимальную мощность в линии передачи задают, используя понятия предельной и допустимой мощностей. Предельной  $P_{\text{пред}}$  называют мощность, при которой возникает электрический или тепловой пробой в режиме бегущей волны. Допустимая мощность определяется следующим соотношением:  $P_{\text{доп}} = (0,2 \dots 0,3) P_{\text{пред}}$ .

#### 3.2. Коэффициент затухания. Общее соотношение

Распространение волны в реальной линии передачи сопровождается рассеянием части мощности в металлических проводниках, затуханием в диэлектрической среде, а в линиях открытого типа – излучением в окружающее пространство. Зависимость векторов поля от координаты  $z$  в линии с потерями совпадает с фазовым множителем идеальной линии:  $\exp(-ihz)$ , но  $h = h' - ih''$  является комплексной величиной, называемой *комплексной постоянной распространения*. Составляющие поля волны в линии с потерями описываются выражениями

$$\dot{\vec{E}}(z) = \dot{\vec{E}}(0)e^{-h''z}e^{-ih'z}; \quad (3.1)$$

$$\dot{\vec{H}}(z) = \dot{\vec{H}}(0)e^{-h''z}e^{-ih'z}, \quad (3.2)$$

где  $\dot{\vec{E}}(0)$ ,  $\dot{\vec{H}}(0)$  – составляющие поля в сечении  $z = 0$ .

Затухание  $L$  в линии с потерями определяется соотношениями:

$$L = \frac{|\dot{\bar{E}}(z)|}{|\dot{\bar{E}}(z + \Delta z)|} = e^{h''z}; \quad L_{\text{НП}} = \ln\left(\frac{|\dot{\bar{E}}(z)|}{|\dot{\bar{E}}(z + \Delta z)|}\right) = h'' \Delta z, \quad \text{Нп}; \quad (3.3)$$

$$L_{\text{дБ}} = 20 \lg\left(\frac{|\dot{\bar{E}}(z)|}{|\dot{\bar{E}}(z + \Delta z)|}\right) = 8,69 h'' \Delta z, \quad \text{дБ}$$

$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg\left(\frac{P_{\text{cp}}(z)}{P_{\text{cp}}(z + \Delta z)}\right) = 8,69 h'' \Delta z, \quad \text{дБ}$$

Из выражений (3.1), (3.2), (3.3) следует, что действительная часть комплексной постоянной распространения  $h'$  (рад/м) имеет смысл фазовой постоянной, а мнимая часть  $h''$  (Нп/м) является постоянной затухания волны.

Зависимость от  $z$  средней мощности, проходящей за период через поперечные сечения линии передачи, описывается выражением

$$P_{\text{cp}}(z) = P_{\text{cp}}(0) e^{-2h''z}, \quad (3.4)$$

где  $P_{\text{cp}}(0)$  – средняя за период мощность, проходящая через поперечное сечение, при  $z = 0$ . Разность  $\Delta P_{\text{п ср}} = P_{\text{cp}}(z) - P_{\text{cp}}(z + \Delta z)$  равна средней за период мощности джоулевых потерь  $\Delta P_{\text{п ср}}$  на отрезке  $\Delta z$ .

Предел отношения  $\Delta P_{\text{п ср}}$  к  $\Delta z$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  соответствует средней за период мощности джоулевых потерь  $P_{\text{п ср}}$  на единицу длины линии

$$P'_{\text{п ср}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_{\text{cp}}(z) - P_{\text{cp}}(z + \Delta z)}{\Delta z} = -\frac{\partial P_{\text{cp}}}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Подставив (3.4) в (3.1), получим

$$P'_{\text{п ср}} = 2h'' P_{\text{cp}}(0) e^{-2h''z} = 2h'' P_{\text{cp}}(z). \quad (3.6)$$

$$h'' = \frac{P'_{\text{п ср}}}{2P_{\text{cp}}}. \quad (3.7)$$

В общем случае постоянная затухания в линии с потерями определяется выражением  $h'' = h''_{\text{м}} + h''_{\text{д}} + h''_{\Sigma}$ , где  $h''_{\text{м}}$  – постоянная затухания, обусловленная потерями в металлических проводниках линии;  $h''_{\text{д}}$  – потери в заполняющем линию диэлектрике;  $h''_{\Sigma}$  – потери на излучения. Обычно  $h''_{\Sigma} \ll h''_{\text{м}}$ ,  $h''_{\Sigma} \ll h''_{\text{д}}$ , поэтому  $h''_{\Sigma}$  можно пренебречь.

### 3.3. Затухание, вызванное потерями в среде, заполняющей линию передачи

При воздушном заполнении диэлектрические потери в линии пренебрежимо малы, т. е.  $h''_д = 0$ . При наличии потерь в среде, заполняющей линию, ее электродинамические параметры могут быть представлены следующим образом:  $\mu_a$ ,  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - \epsilon''_a$ , а комплексная постоянная распространения будет иметь вид

$$h = h' - ih''_д = \sqrt{\omega^2 \mu_a \tilde{\epsilon}_a - g^2}, \quad (3.8)$$

где  $g = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$ . Подставляя  $\tilde{\epsilon}_a$  и  $g$  в (3.8), можно записать

$$h = h' - ih''_д = \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon'_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2 - j\omega^2 \mu_a \epsilon''_a}. \quad (3.9)$$

Возводя левую и правую части уравнения (3.9) в квадрат, приравняем действительные и мнимые части в получившемся равенстве. Решая получившуюся систему двух уравнений относительно  $h'$  и  $h''_д$ , будем иметь

$$h'\sqrt{2} = \sqrt{h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + \omega^4 \mu_a^2 \epsilon_a''^2}}, \quad (3.10)$$

$$h''_д\sqrt{2} = \sqrt{-h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + \omega^4 \mu_a^2 \epsilon_a''^2}}, \quad (3.11)$$

где  $h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon'_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2}$ .

Из соотношения (3.10) следует, что при наличии диэлектрических потерь волны  $E$ - и  $H$ -типов могут распространяться в линии на частотах  $f < f_{кр}$ , не удовлетворяющих условию распространения. Но как следует из (3.11), распространение волн в этом случае происходит со значительными потерями.

### 3.4. Затухание, вызванное потерями в металлических элементах линии передачи

Структуры поля в идеальных и реальных линиях передачи не совпадают. Отличие сводится к появлению в реальных линиях у поверхности металлических частей (имеющих конечное значения проводимости), отличных от нуля касательной составляющих вектора  $E$

и составляющей вектора  $H$ , определяемых граничным условием Леонтовича – Щукина. Для металлов с высокой проводимостью отличия малы и можно полагать, что структура поля в реальной линии совпадает со структурой поля в линии без потерь. Токи проводимости в реальной линии не являются поверхностными и протекают в приграничном слое проводников, проникая на определенную глубину. Не равные нулю тангенциальные составляющие векторов  $E$  и  $H$  у поверхности металлических частей реальной линии определяют перпендикулярную этой поверхности составляющую вектора Пойнтинга. Таким образом, в реальной линии существует поток мощности, направленный внутрь металлических элементов линии передачи и совпадающий с мощностью джоулевых потерь.

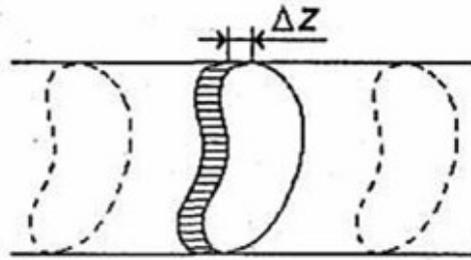


Рис. 3.1

Средняя за период мощность тепловых потерь на отрезке проводника длиной  $\Delta z$  (рис. 3.1) в соответствии с формулой составит

$$P_{n,cp} = \frac{1}{2\sigma d} \oint_S \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dS$$

и будет определяться соотношением

$$\Delta P_{n,cp} = \frac{1}{2\sigma d} \int_0^{\Delta z} dz \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl = \frac{\Delta z}{2\sigma d} \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что погонной мощности потерь в линии соответствует выражение

$$P'_{п\ cp} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{n,cp}}{\Delta z} = \frac{1}{2\sigma d} \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl. \quad (3.13)$$

Подставляя выражение (3.13) в  $h'' = P'_{n,cp.} / 2P_{cp.}$ , получим формулу для постоянной затухания в реальной линии передачи при конечной проводимости проводников

$$h''_M = \frac{1}{4\sigma d P_{cp.}} \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl. \quad (3.14)$$

Значение вектора  $\dot{H}_{0m}$  в реальной линии при высокой проводимости металлических элементов мало отличается от величины вектора  $\dot{H}_{0m}$  в идеальной линии. Поэтому в формуле (3.14) можно пользоваться значением вектора  $\dot{H}_{0m}$ , полученным для идеальной линии.

Из (3.14) следует, что  $h_m''$  пропорциональна активной части поверхностного сопротивления металлических элементов линий передачи  $Rs = 1/\sigma d$ . С целью снижения  $Rs$  металлические элементы линий передачи делают из цветных металлов с высокой проводимостью, у которых  $\mu_a = \mu_0$ , при этом  $Rs = \frac{1}{\sigma d} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}} \approx 1,987 \sqrt{\frac{f}{\sigma}} \cdot 10^{-3}$ , Ом.

Обычно металлические элементы линий передачи изготавливают из меди, алюминия и латуни, содержащей 90 % меди. Окисная пленка, которая образуется на металлических элементах линий передачи в процессе эксплуатации, характеризуется повышенным значением  $Rs$ . Для защиты от окисления металлические элементы покрывают лаком, серебром и другими антикоррозийными материалами. Серебро, наносимое электролитическим способом, обладает большим сопротивлением, чем металлические элементы линий передачи, выполненные из меди, поэтому толщину наносимого на медь серебра делают меньше глубины проникновения  $d$ . Ток в этом случае будет преимущественно протекать в медном слое. В то же время серебро, наносимое электролитическим способом, обладает меньшим сопротивлением, чем латунь, поэтому защитный слой серебра, наносимый на латунь, делают больше глубины проникновения.

В сантиметровом диапазоне глубина проникновения для металлических элементов линий передачи составляет  $d \sim 0,1 - 0,2$  мкм. Существующие технологии обработки поверхности приводят к остаточной шероховатости металлических элементов, превышающих  $d$ , что увеличивает длину линий тока вдоль поверхности и потери в линии передачи.

### 3.5. Передача энергии по коаксиальной линии

Основным типом волны в коаксиальной линии передач (рис. 3.2) является волна типа  $T$  (рис. 3.3). Одноволновой режим в линии сохраняется при условии

$$\lambda > \lambda_{кр}^{H_{11}} = \pi (R_1 + R_2) = \pi R_1 (1 + R_2/R_1). \quad (3.15)$$

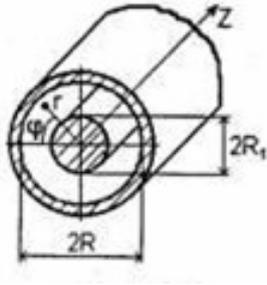


Рис. 3.2

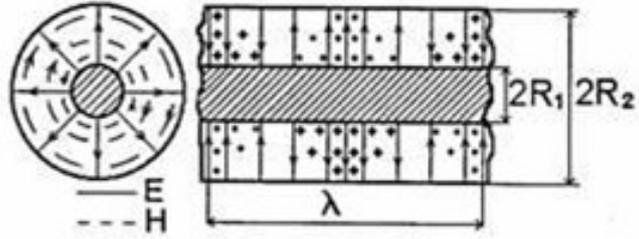


Рис. 3.3

Составляющие поля волны  $T$  в коаксиальной линии описываются формулами

$$\dot{E}_r = \frac{E_0 R_1}{r} e^{-j\beta z}; \quad (3.16)$$

$$H_\varphi = \frac{E_0 R_1}{Z_c r} e^{-j\beta z}. \quad (3.17)$$

Мощность, переносимая  $T$ -волной в линии передачи, определяется выражением

$$P_{cp} = \frac{1}{2Z_c} \int_{S_\perp} |\bar{E}_\perp|^2 ds. \quad (3.18)$$

Подставляя формулу (3.16) в (3.18), имеем

$$P_{cp} = \frac{1}{2Z_c} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} |\dot{E}_r|^2 r dr \cdot d\phi = \frac{\pi}{Z_c} (\dot{E}_0 R_1)^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \quad (3.19)$$

Выражая из (3.19)  $E_0^2$ , имеем

$$E_0^2 = \frac{P_{cp} Z_c}{4R_1^2 \ln(R_2/R_1)}. \quad (3.20)$$

Найдем условие, при котором величина  $E_0^2$  будет минимальной. Полагая  $R_2$  в (3.20) постоянной величиной, найдем  $R_2/R_1$ , соответствующее минимуму  $E_0^2$ . Продифференцируем знаменатель формулы (3.20) по  $R_1$  и приравняем его нулю

$$2R_1 \ln(R_2/R_1) + R_1^2 (-1/R_1) = 0, \quad (3.21)$$

откуда

$$\ln(R_2/R_1) = 1/2. \quad (3.22)$$

Используя выражение (3.22) и формулу  $Z_{л} = 60\sqrt{\mu/\varepsilon} \ln(R_2/R_1)$ , получим волновое сопротивление коаксиальной линии с минимальной величиной  $E_0$

$$Z_{л} = 30\sqrt{\mu/\varepsilon}, \text{ Ом.} \quad (3.23)$$

Найденному значению  $Z_n$  соответствует наибольшая предельная мощность  $P_{\text{пред}}$ . Подставляя (3.22) в (3.19), получим  $P_{cp}$  коаксиальной линии с минимальным  $E_0$

$$P_{cp} = \frac{\pi E_0^2}{2Z_c} R_1^2. \quad (3.24)$$

При нормальных условиях пробивная напряженность электрического поля в воздухе  $E_0 = 30$  кВ/см, а его характеристическое сопротивление  $Z_c = 120$  п. Подставляя приведенные значения в (3.24), получим

$$P_{\text{пред}} < 3,75 \cdot 10^3 R_1, \text{ кВт}, \quad (3.25)$$

где величина  $R_1$  выражена в сантиметрах. Минимальному  $E_0$  соответствует  $\ln(R_2/R_1) = 1/2$  или  $R_2/R_1 = \sqrt{e}$ . Подставляя отношение  $R_2/R_1$  в (3.15), получим  $R_1 < 0,12\lambda$ . Подставляя последнее неравенство в (3.25), приходим к выражению для  $P_{\text{пред}}$  в более общей форме

$$P_{\text{пред}} < 54\lambda^2, \text{ кВт}, \quad (3.26)$$

где величина  $\lambda$  выражена в сантиметрах.

При полном или частичном заполнении коаксиальной линии диэлектриком  $P_{\text{пред}}$ , рассчитанная по формуле (3.26), существенно меньше. Это объясняется наличием в такой линии неизбежных воздушных технологических зазоров между диэлектриком и центральным проводником. Напряженность электрического поля в зазоре в  $\varepsilon$  раз выше напряженности в диэлектрике. Таким образом, для предотвращения пробоя воздушного зазора  $P_{\text{пред}}$  должна быть уменьшена в  $\varepsilon^2$  раз.

Наибольшее значение  $P_{\text{пред}}$  можно получить минимизацией напряжения между проводниками коаксиальной линии. Напряжение между проводниками коаксиальной линии определяется выражением

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = E_0 R_1 \ln(R_2/R_1) e^{-jhz}. \quad (3.27)$$

Полагая  $R_2$  в (3.27) постоянной величиной, найдем отношение  $R_2/R_1$ , соответствующее минимуму  $U$ . Для этого продифференцируем (3.27) по  $R_1$  и приравняем результат к нулю:  $\ln(R_2/R_1) + R_1(-1/R_1) = 0$ . Откуда следует  $\ln(R_2/R_1) = 1$ , что соответствует волновому сопротивлению

$$Z_n = 60\sqrt{\mu/\varepsilon}, \text{ Ом}. \quad (3.28)$$

На основании формул (3.23), (3.28) Международной электротехнической комиссии для передачи большой мощности рекомендуется использовать коаксиальные линии с волновым сопротивлением 50 Ом при  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$ .

При заполнении коаксиальной линии диэлектриком с потерями постоянная затухания определяется соотношением

$$h''\sqrt{2} = \sqrt{-h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + \omega^4 \mu_a^2 \varepsilon_a''^2}}, \text{ где } h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a' - (2\pi/\lambda_{кр})^2}.$$

При частичном диэлектрическом заполнении постоянную затухания можно оценить следующим образом:

$$(h''_\delta)' = h''_\delta \frac{V_\delta}{V_l}, \quad (3.29)$$

где  $V_\delta$  – объем диэлектрического заполнения на единицу длины коаксиальной линии;  $V_l$  – объем пространства между проводниками коаксиальной линии на единицу длины.

Постоянная затухания в линии, обусловленная потерями в проводниках, определяется соотношением

$$h''_m = \frac{1}{4\sigma d P_{cp}} \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl = \frac{R_s}{4P_{cp}} \oint_L |\bar{H}_{0m}|^2 dl. \quad (3.30)$$

Амплитуда касательных составляющих магнитного поля на поверхности проводников коаксиальной линии соответственно равна

$$\dot{H}_\phi|_{r=R_1} = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jhz}; \quad \dot{H}_\phi|_{r=R_2} = \frac{E_0 R_1}{Z_c R_2} e^{-jhz},$$

а интеграл по замкнутому контуру в выражении (3.29) будет иметь вид

$$\oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl = 2\pi \left(\frac{E_0 R_1}{Z_c}\right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (3.31)$$

Подставляя формулы (3.19), (3.31) в (3.30), получим

$$h''_m = \frac{R_s}{2Z_c} \frac{1+R_2/R_1}{R_2 \ln(R_2/R_1)}. \quad (3.32)$$

При равных токах в проводниках коаксиальной линии большая часть энергии теряется в центральном проводнике, так как  $R_1 < R_2$ . Увеличение  $R_1$  сопровождается уменьшением плотности тока проводимости в этом проводнике и соответствующим уменьшением потерь. Увеличение  $R_1$  при постоянном  $R_2$  приводит к уменьшению волнового сопротивления, что при неизменной мощности приводит к увеличению тока в линии и увеличению потерь. Поэтому существует оптимальное

соотношение  $R_1$  и  $R_2$ , при котором затухание, вызываемое потерями в металлических проводниках, минимально. При постоянном  $R_2$ , решая уравнение  $dh_m''/dR_1 = 0$ , получим соотношение  $R_2/R_1 \approx 3,6$ , которому соответствует волновое  $Z_{л} = 77\sqrt{\mu/\varepsilon}$  Ом. Международной электротехнической комиссией для передачи малой мощности рекомендуется выбирать коаксиальные линии с волновым сопротивлением 75 Ом при  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$ . На частотах выше 3 ГГц суммарная постоянная затухания в коаксиальной линии существенно выше, чем в металлических волноводах. Поэтому на более высоких частотах коаксиальные линии используются в виде коротких отрезков.

### 3.6. Передача энергии по прямоугольному волноводу

Обычно прямоугольные волноводы используют в *одноволновом* режиме, при котором энергия в линии переносится одним основным типом волны, имеющим наибольшую  $\lambda_{кр}$ . Объясняется это тем, что при многоволновом режиме разные типы волн, имеющие различные групповые скорости, приходят в точку приема смещенными во времени. При передаче информационного сигнала это приведет к его искажению и увеличению уровня шумов.

Передачу энергии основным типом волны можно обеспечить, если на любой частоте рабочего диапазона длина волны меньше критической длины основного типа волны  $\lambda_{кр(1)}$ , но больше критической длины волны *первого высшего* типа  $\lambda_{кр(2)}$ . Полосу частот в этом случае характеризуют коэффициентом широкополосности

$$\xi = \lambda_{кр(1)} / \lambda_{кр(2)}. \quad (3.33)$$

Основной тип волны в прямоугольном волноводе  $H_{10}$ ,  $\lambda_{кр}^{H_{10}} = 2a$ . Условие распространения основного типа волны  $\lambda < 2a$ . При  $a > b$  ближайшим высшим типом волны является  $H_{20}$ ,  $\lambda_{кр}^{H_{20}} = a$ . Условие нераспространения волны  $H_{20}$ ,  $\lambda > a$ . Таким образом, одноволновой режим в прямоугольном волноводе выполняется при условии

$$A < \lambda < 2a \quad (3.34)$$

или 
$$\lambda/2 < a < \lambda. \quad (3.35)$$

Величину  $b$  в этом случае считают равной  $b < \lambda/2$ . Для волны  $H_{10}$  обычно полагают  $a = 0,75\lambda$  и  $b = 0,5a$ . Коэффициент широкополосности для прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$   $\xi = 2$ .

Мощность бегущей волны в линии передачи вычисляется по формуле

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \operatorname{Re} \left[ \vec{E} \dot{\vec{H}}^* \right] d\vec{S}. \quad (3.36)$$

Составляющие поля волны  $H_{10}$  описываются выражениями

$$H_z = H_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (3.37)$$

$$E_y = -j\omega\mu_a \frac{a}{\pi} H_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (3.38)$$

$$H_x = jh \frac{a}{\pi} H_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \quad (3.39)$$

Подставляя формулы (3.38), (3.39) в (3.36), получим

$$P_{cp} = H_{0z}^2 \frac{Z_c ab}{4} \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}. \quad (3.40)$$

Введем величину  $E_{0y} = E_y|_{x=a/2}$ , выразим через нее  $H_{0z}$  из формулы (3.38) и, подставляя полученное выражение в (3.40), запишем

$$P_{cp} = E_{0y}^2 \frac{ab}{Z_c^4} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}. \quad (3.41)$$

Полагая, что в соотношении (3.41)  $a = 0,75\lambda$  и  $b = 0,5a$ ;  $Z_c = 120\pi$  Ом;  $E_{0y} < 30$  кВ/см, получим  $P_{пред}$  для прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$   $P_{пред} < 125\lambda^2$  кВт, где величина  $\lambda$  выражена в сантиметрах.

Постоянную затухания, обусловленную потерями в металле, определяют формулой

$$h_m'' = \frac{R_s}{4P_{cp}} \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl. \quad (3.42)$$

Полагая, что волновод заполнен воздухом, подставим выражения (3.37), (3.39), (3.41) в (3.42) и для волны  $H_{10}$  будем иметь

$$(h_m'')_{H_{10}} = \frac{R_s}{bZ_c} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}}. \quad (3.43)$$

Так же выводятся формулы для постоянного затухания других типов волн. На рис. 3.4 показаны графики зависимости  $h_m''$  от частоты для волн  $H_{10}$ ,  $H_{20}$  и  $E_{11}$ . Наименьшие потери в прямоугольном волноводе соответствуют волне  $H_{10}$ . Из графиков следует, что потери в волноводе быстро возрастают при стремлении частоты к критической, что

можно объяснить на основе концепции парциальных волн. В соответствии с концепцией, парциальные волны для  $E$ - и  $H$ -волн, распространяясь по ломаным траекториям, многократно переотражаются от металлических стенок. При частоте, стремящейся к критической, угол падения  $\phi$  парциальных волн (рис. 3.5) стремится к нулю. При этом возрастает число переотражений парциальных волн на единицу длины линии. При каждом переотражении часть энергии волны теряется из-за конечной проводимости металлических стенок. Поэтому при распространении  $E$ - и  $H$ -волн в прямоугольном волноводе потери возрастают при стремлении частоты к критической. С увеличением частоты относительно критической (рис. 3.4) потери плавно возрастают, что связано с увеличением поверхностного сопротивления металла  $R_s$ .

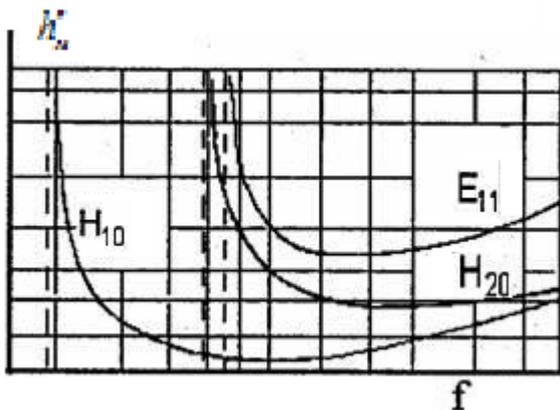


Рис. 3.4

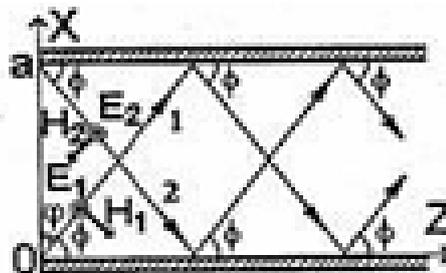


Рис. 3.5

Из анализа потерь в прямоугольном волноводе следует, что их применение целесообразно на частотах, не превышающих 30 ГГц.

### 3.7. Передача энергии по круглому волноводу

Основным типом волны в круглом волноводе является волна  $H_{11}$ , первым высшим типом – волна  $E_{01}$ . Условия одноволновости для основного типа волны в круглом волноводе имеют вид:

$$\lambda_{кр}^{E_{01}} < \lambda < \lambda_{кр}^{H_{11}}; \quad (3.44)$$

$$2,61a < \lambda < 3,41a; \quad (3.45)$$

$$\lambda/3,41 < a < \lambda/2,61. \quad (3.46)$$

Коэффициент широкополосности круглого волновода  $\zeta = 1,3$  меньше, чем у прямоугольного волновода.

Полагая, что волновод заполнен воздухом, приведем выражения для постоянной затухания, обусловленной потерями в металле:

$$h_m'' = \frac{R_s}{4P_{cp}} \oint_L \left| \dot{H}_{0m} \right|^2 dl,$$

— для волн типа  $E$

$$(h_m'')^{E_{mn}} = \frac{R_s}{a Z_c} \frac{\lambda_g}{\lambda}, \quad (3.47)$$

— для волн типа  $H$

$$(h_m'')^{H_{mn}} = \frac{R_s}{Z_c a} \frac{\lambda_g}{\lambda} \left[ \frac{m^2}{v_{mn}^2 - m^2} + \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right]. \quad (3.48)$$

Для волны  $H_{11}$  постоянная затухания определяется формулой

$$(h_m'')^{H_{11}} = \frac{R_s}{Z_c a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{3.41a} \right)^2}} \left[ 0.42 + \left( \frac{\lambda}{3.41a} \right)^2 \right]. \quad (3.49)$$

Зависимости  $h_m''$  от частоты для волн  $H_{11}$ ,  $E_{01}$ ,  $H_{01}$  в круглом волноводе приведены на рис. 3.6. Для волн  $H_{11}$  и  $E_{01}$  они аналогичны зависимостям для волн в прямоугольном волноводе. Зависимость  $h_m''$  от частоты для волны  $H_{01}$  в круглом волноводе имеет характерную особенность: представляет собой постоянную затухания.

Это связано с особенностью структуры поля волны  $H_{01}$ , имеющей у поверхности волновода лишь продольную составляющую магнитного

поля, которая при  $r = a$  равна

$$H_z = H_{0z} J_0(v_{01}^H) e^{-jhz}$$

и не зависит от угла  $\varphi$ . Указанная особенность приводит к возбуждению на стенках волновода только поперечной составляющей поверхностного тока  $j_\varphi^s = H_{0z} J_0(v_{01}^H) e^{-jhz}$  с неизменной плотностью по периметру волновода. Из теории волноводов известно, что с ростом частоты амплитуда продольных составляющих произвольного типа волны в волноводе стремится к нулю. Таким образом, у волны  $H_{01}$  с ростом частоты  $H_z/r = a \rightarrow 0$  и  $j_\varphi^s/r = a \rightarrow 0$ , что сопровождается уменьшением потерь в волноводе. Из выражения (3.48) следует, что постоянная затухания волны  $H_{01}$  определяется формулой

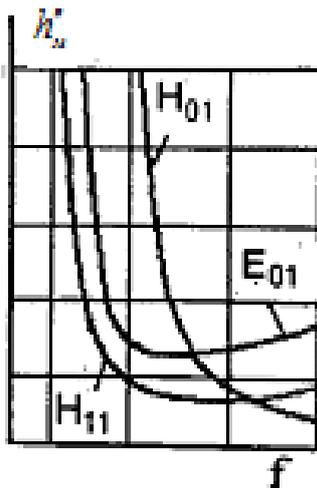


Рис. 3.6

уменьшением потерь в волноводе. Из выражения (3.48) следует, что постоянная затухания волны  $H_{01}$  определяется формулой

$$(h''_m)^{H_{01}} = \frac{R_s}{aZ_c} \frac{(\lambda/\lambda_{кр})^2}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}}. \quad (3.50)$$

Из выражений (3.49), (3.50) следует, что  $(h''_m)^{H_{01}} < (h''_m)^{H_{11}}$ , если  $a/\lambda > 2$ . При  $a/\lambda > 6 \dots 8$  в диапазоне  $\lambda = (1 \dots 3)$  см  $(h''_m)^{H_{01}} = 1 \dots 2$  дБ/км. Но в этом случае в круглом волноводе могут существовать до ста типов волн и необходимо принять меры, обеспечивающие их фильтрацию. В отличие от остальных волн в круглом волноводе, имеющих продольную составляющую поверхностного тока, волны  $H_{0n}$  и, в частности, волна  $H_{01}$  имеют только поперечные токи. Поэтому если волновод набрать из металлических колец, разделенных диэлектрическими шайбами, то возбуждение продольных токов в такой структуре становится невозможным, как и распространение соответствующих типов волн.

### Темы для закрепления материала

1. Одноволновой и многоволновой режимы работы линии передачи. Электрическая прочность. Тепловой пробой. Предельная и допустимая мощность.
2. Коэффициент затухания в линии передачи.
3. Затухание, вызываемое потерями в среде, заполняющей линию передачи.
4. Затухание, вызываемое потерями в металлических проводниках линии передачи.
5. Мощность, переносимая по прямоугольному волноводу. Затухание электрических волн. Затухание магнитных волн.
6. Мощность, переносимая по круглому волноводу. Затухание электрических волн. Затухание магнитных волн. Особенность затухания волн  $H_{01}$ .
7. Мощность, переносимая по коаксиальной линии. Оптимизация линии для передачи максимальной мощности и для минимальных потерь. Линия с частичным диэлектрическим заполнением.

## 4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СВЧ. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

### 4.1. Общие свойства объемных резонаторов

На низких частотах в различных радиотехнических устройствах применяются колебательные контуры, образованные параллельным соединением сосредоточенных элементов индуктивности и емкости. В диапазоне СВЧ из-за больших потерь и малой добротности колебательные системы на сосредоточенных элементах практически не используются. На высоких частотах применяют преимущественно колебательные системы с распределенными параметрами. В изолированной системе с внутренним сторонним источником возникает колебательный процесс, в ходе которого происходит периодический обмен энергией между электрическим и магнитным полями как в параллельном контуре в случае вынужденных колебаний. Подобные резонансные системы получили название *объемных резонаторов*.

Простейшие объемные резонаторы представляют собой короткозамкнутые отрезки линий передачи. По аналогии с направляющими структурами различают резонаторы *закрытого* и *открытого* типов. Общее представление о свойствах подобных объемных резонаторов можно получить при рассмотрении отрезка линии передачи с известной структурой электромагнитного поля. На рис. 4.1 схематично приведен отрезок линии передачи закрытого типа, в котором возбуждена волна

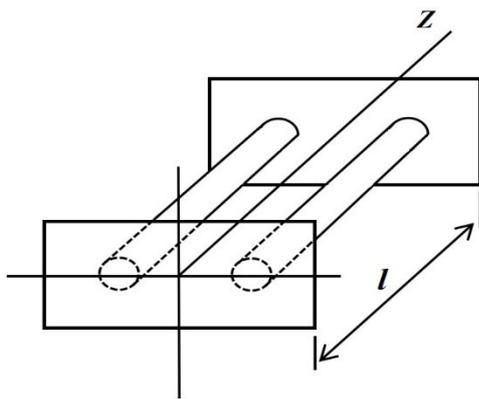


Рис. 4.1

основного типа. Концы линии замкнуты металлическими пластинами, перпендикулярными оси линии, ориентированной вдоль оси  $z$ . Начало координат совмещено с короткозамыкающей пластиной. Результирующее поле в замкнутом отрезке линии передачи представляет собой композицию падающей и отраженной волн.

Так как для поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля коэффициент отражения от короткозамыкающих пластин равен 1, амплитуда результирующей составляющей в произвольном сечении отрезка линии будет определяться выражением

$$\dot{\vec{E}}_{\perp}(z) = \dot{\vec{E}}_{\perp \text{пад}} (\exp(jhz) - \exp(-jhz)) = 2j \dot{\vec{E}}_{\perp \text{пад}} \sin(hz). \quad (4.1)$$

На рис. 4.2 приведена зависимость поперечной составляющей вектора  $E$  от координаты  $z$ . На расстоянии  $l = p\lambda_{\text{в}}/2$  от точки  $z = 0$ , где  $\lambda_{\text{в}}$  – длина волны в линии, а  $p$  – произвольное натуральное число, модуль поперечной составляющей обращается в ноль. Не нарушая структуры поля в отрезке линии, в любое из указанных сечений можно ввести короткозамыкающую металлическую пластину, перпендикулярную оси  $z$ . Отрезок линии между двумя пластинами представляет собой объемный резонатор закрытого типа. Таким образом, резонансная длина объемного резонатора равна целому числу полуволн соответствующего типа волны

$$l = p\lambda_{\text{в}}/2, p = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

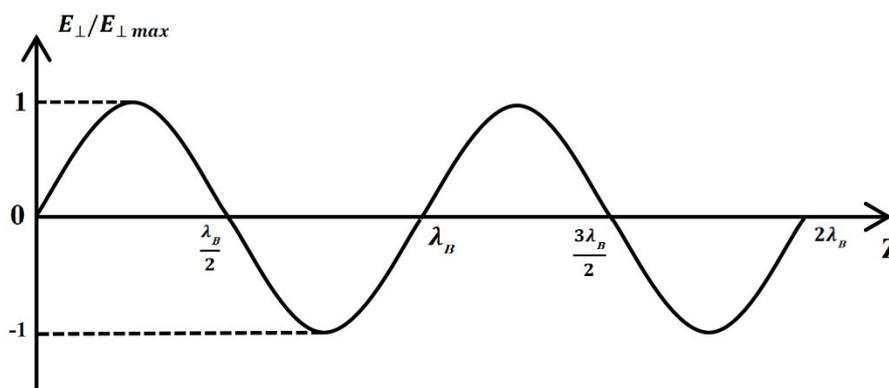


Рис. 4.2

Из выражения (4.2) можно найти резонансную длину волны резонатора

$$\lambda_{\text{вр}} = 2l/p, p = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Для резонаторов на основе линий передачи с волной  $T$  соотношения (4.2), (4.3) остаются справедливыми при замене  $\lambda_{\text{в}}$  на  $\lambda$ ,  $\lambda_{\text{вр}}$  на  $\lambda_{\text{р}}$ , где  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве с электродинамическими параметрами среды в линии передачи, а  $\lambda_{\text{р}}$  – ее резонансное значение. Характерные особенности, присущие резонаторам на основе волноводов, заключаются в следующем:

- стоячая волна может существовать по всем трем координатам внутри резонатора;
- вследствие явления дисперсии резонаторы будут резонировать не на кратных частотах.

## 4.2. Объемный резонатор из отрезка прямоугольного волновода с волной $H_{10}$

Найдем частный вид собственных колебаний в объемном резонаторе, образованном отрезком прямоугольного волновода сечением  $a \times b$ , ограниченном металлическими торцевыми поверхностями, расположенными в сечениях  $z = 0$  и  $z = l$  (рис. 4.3). Пусть по исходному волноводу в положительном направлении оси  $z$  распространяется падающая волна типа  $H_{10}$ , составляющая  $E_y$  которой будет определяться выражением

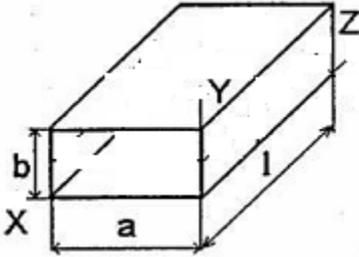


Рис. 4.3

$$\dot{E}_{y\text{пад}} = E_0 \sin(\pi x/a) e^{-jhz}. \quad (4.4)$$

Наличие торцевых короткозамыкающих поверхностей приведет к появлению отраженной волны, составляющую  $E_y$  которой можно записать следующим образом:

$$\dot{E}_{y\text{отр}} = RE_0 \sin(\pi x/a) e^{jhz}, \quad (4.5)$$

где  $R$  – коэффициент отражения от торцевой поверхности. При  $z = 0$  суммарное поле  $\dot{E}_{y\Sigma}$ , тангенциальное торцевой поверхности, будет равно нулю, а коэффициент отражения  $R = -1$ . Таким образом, суммарное поле можно будет записать следующим образом:

$$\dot{E}_{y\Sigma} = \dot{E}_{y\text{пад}} + \dot{E}_{y\text{отр}} = -j2E_0 \sin(\pi x/a) \sin(hz). \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что результирующее поле в резонаторе представляет собой двумерную стоячую волну по осям  $x$  и  $z$ . Длину стоячей волны можно определить, используя условие

$$\dot{E}_{y\Sigma} = 0, \text{ при } z = l. \quad (4.7)$$

Из формулы (4.6) с учетом (4.7) следует, что  $\sin(hl) = 0$ , или

$$hl = p\pi, p = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Значение продольного волнового числа, удовлетворяющего равенству (4.8), называют резонансным

$$h_p = p\pi/l, p = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Подставляя выражение (4.9) в (4.6), получим выражение для  $\dot{E}_{y\Sigma}$  при резонансе

$$\dot{E}_{y\Sigma} = -j2E_0 \sin(\pi x/a) \sin(p\pi z/l). \quad (4.10)$$

Используя (4.9), можно получить резонансное значение длины волны в волноводе:

$$\lambda_{вр} = 2\pi/h_p = 2l/p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Длина волны в волноводе и длина волны в свободном пространстве связаны дисперсионным уравнением

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}, \quad (4.12)$$

где для волны  $H_{10}$   $\lambda_{кр} = 2a$ . Подставляя последнее соотношение и равенство (4.8) в уравнение (4.9), получим выражение для резонансного значения длины волны в свободном пространстве

$$\lambda_p = \lambda_{вр} / \sqrt{1 + (\lambda_{вр}/\lambda_{кр})^2} = 2 / \sqrt{(1/a)^2 + (p/l)^2}. \quad (4.13)$$

Для прямоугольного резонатора решения выражения (4.10) существуют при длине волны, удовлетворяющей условию (4.13). Каждому значению целочисленного индекса  $p$  соответствует свой *тип колебаний* в прямоугольном объемном резонаторе, который характеризуется резонансной длиной волны и структурой электромагнитного поля.

Как и для волн в волноводах, существует способ классификации типов колебаний в объемных резонаторах. Он будет рассмотрен в следующем параграфе. В данной задаче исследуемая совокупность типов колебаний может быть обозначена как  $H_{10p}$ . Далее следует, что исходным типом волны в волноводе будет волна  $H_{10}$ , а вдоль продольной оси  $z$  резонатора укладывается  $p$  стоячих полуволн.

Рассмотрим структуру поля колебания  $H_{10p}$ , полагая, что суммарное электрическое поле описывается выражением

$$\dot{E}_y = E_{0y} \sin(\pi x/a) \sin(p\pi z/l). \quad (4.14)$$

Магнитное поле в резонаторе найдем с помощью второго уравнения Максвелла:  $rot \dot{E} = -i\omega\mu_a \dot{H}$ , из которого следует

$$\dot{H} = \frac{j}{\omega\mu_a} rot \dot{E}. \quad (4.15)$$

Ротор в декартовой системе координат можно раскрыть следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{I}_x & \mathbb{I}_y & \mathbb{I}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbb{I}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbb{I}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbb{I}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Подставляя (4.14) в (4.15) с учетом приведенного разложения, получим следующие формулы для проекций магнитного поля в резонаторе:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{j}{\omega\mu_a} \frac{p\pi}{l} E_{0y} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ H_z &= \frac{j}{\omega\mu_a} \frac{\pi}{a} E_{0y} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Низшим (основным) колебанием, имеющим наибольшую резонансную длину волны, в совокупности  $H_{10p}$  при  $b < a$  и  $b < l$  является колебание  $H_{101}$ . Структура электромагнитного поля этого колебания в некоторый момент времени показана на рис. 4.4.

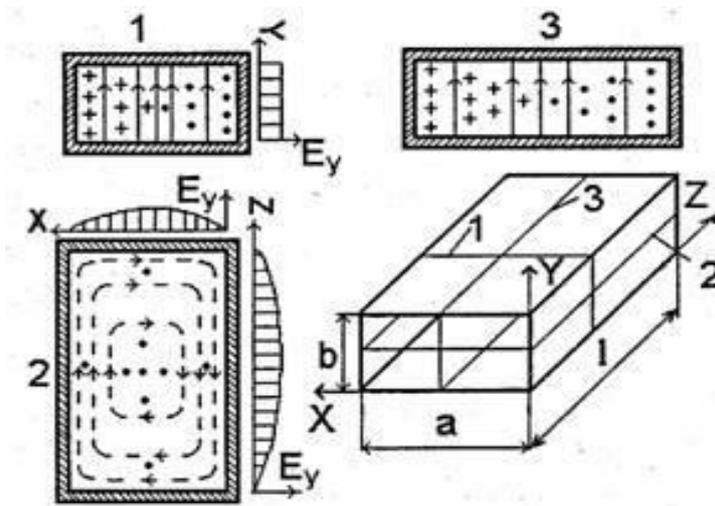


Рис. 4.4

В амплитудных множителях выражений (4.16) имеется мнимая единица. Таким образом, из (4.14), (4.16) следует, что между мгновенными значениями электрического и магнитного полей в резонаторе существует фазовый сдвиг  $\pi/2$ , а средний за период вектор Пойнтинга равен нулю

$$\bar{\Pi}_{\text{ср}} = \text{Re} \dot{\Pi} = \text{Re} \frac{1}{2} [\dot{E} \dot{H}^*] = 0.$$

Это означает, что в резонаторе существует колебательный процесс, в ходе которого происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полями: дважды за период энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и наоборот. Этот процесс иллюстрируют мгновенными картинками распределения электромагнитного поля в объемном резонаторе с колебаниями  $H_{101}$ , построенными для различных моментов времени (рис. 4.5).

Используя формулу для вектора плотности поверхностного тока на идеально проводящей плоскости  $[\bar{1}_n \bar{H}_\perp] = \dot{J}^p$  и соотношения (4.17) при  $p = 1$ , для некоторого фиксированного момента времени построим картину распределения поверхностных токов на стенках резонатора (рис. 4.6) для колебания  $H_{101}$ .

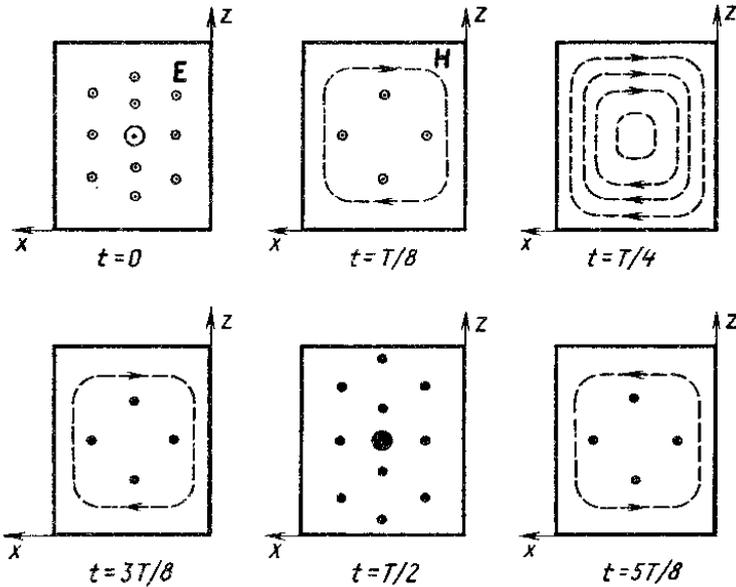


Рис. 4.5

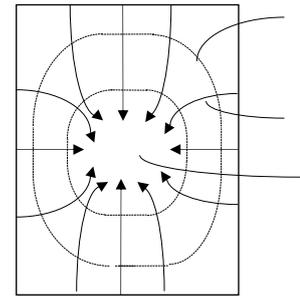


Рис. 4.6

Из рис. 4.6 следует, что токи проводимости, стекающие к центру широкой стенки резонатора, замыкаются внутри него токами смещения, которые охватываются кольцевыми линиями магнитного поля.

### 4.3. Общая задача о колебаниях в прямоугольном резонаторе. Классификация типов колебаний

Определим совокупность резонансных частот, которые соответствуют колебаниям различных типов в замкнутом металлическом объеме прямоугольной формы с размерами  $a, b, l$  (рис. 4.7). Предположим, что ось  $z$  является осью стоячей волны, а в поперечной плоскости  $XOY$  существует распределение поля, соответствующее волне  $E_{mn}$  прямоугольного волновода. Одно из условий резонанса имеет вид

$$\lambda_{вр} = 2l/p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

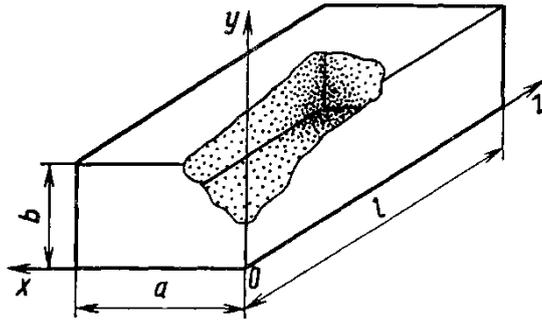


Рис. 4.7

Величина  $\lambda_{вр}$  связана с  $\lambda_p$  дисперсионным соотношением

$$\frac{1}{\lambda_p^2} = \frac{1}{\lambda_{вр}^2} + \frac{1}{\lambda_{кр}^2}. \quad (4.18)$$

Так как критическая длина волны для волны  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе определяется соотношением

$$\lambda_{кр}^{E_{mn}} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}, \quad (4.19)$$

из (4.18) получим

$$\lambda_p^{E_{mnp}} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}. \quad (4.20)$$

Если полагать, что по исходному волноводу распространяется волна типа  $H_{mnp}$ , то формула для резонансной длины волны будет совпадать с (4.20)

$$\lambda_p^{H_{mnp}} = \lambda_p^{E_{mnp}}. \quad (4.21)$$

В формулу (4.20) размеры  $a$ ,  $b$  и  $l$  входят равноправно. Так как для ряда волн  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводу некоторые индексы могут равняться нулю, то возникает вопрос о возможности существования в резонаторе колебаний с индексом  $p = 0$ . При  $p = 0$  поле в резонаторе не меняется по оси  $z$ , вдоль которой расположена стенка длиной  $l$ . На рис. 4.8, а приведена продольная структура электрического поля в прямоугольном волноводу распространяющейся волны  $E_{mn}$  при  $m = 1$ ,  $n = 1$ . При  $\lambda$ , стремящейся к  $\lambda_{кр}$ , длина волны в волноводу стремится к бесконечности и при  $\lambda = \lambda_{кр}$  электрическое поле обладает единственной  $z$ -й составляющей (рис. 4.8, б). Введение поперечных идеально проводящих торцевых стенок не изменит структуру поля между ними, так как граничные условия на стенках будут выполняться автоматически независимо от расстояния между ними.

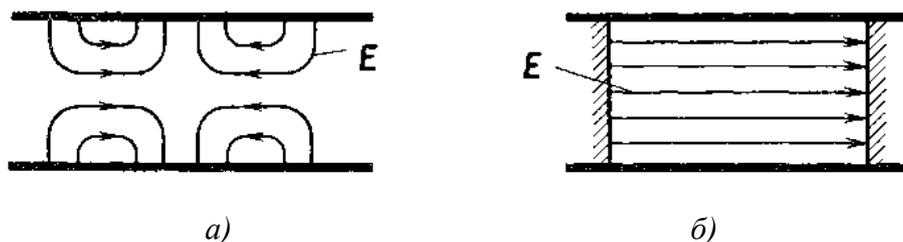


Рис. 4.8

Таким образом, колебания  $E_{mn0}$  в прямоугольном резонаторе могут существовать. Подставляя в (4.20)  $p = 0$ , получим

$$\lambda_p^{E_{mn0}} = 2 / \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (4.22)$$

Формула (4.22) совпадает с выражением критической длины волны  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе. Это означает, что в объемном резонаторе с колебаниями  $E_{mn0}$  существует резонанс в поперечном сечении.

Выясним возможность существования колебаний  $H_{mn0}$  в прямоугольном резонаторе. Исходная волна  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе имеет только поперечную составляющую электрического поля. Если эта составляющая не будет меняться вдоль оси  $z$  прямоугольного резонатора, как это должно быть в случае колебания  $H_{mn0}$ , то поперечное электрическое поле в любом поперечном сечении резонатора должно быть тождественно равно нулю в силу нулевых граничных условий на торцевых стенках. Таким образом, колебания  $H_{mn0}$  в прямоугольном резонаторе существовать не могут.

Сформулируем процедуру классификации типов колебаний в прямоугольном резонаторе. Она осуществляется следующим образом:

1) одна из осей резонатора принимается за продольную ось стоячей волны;

2) определяется, какому волноводному типу волны  $E_{mn}$  или  $H_{mn}$  соответствует структура поля в регулярном волноводе с размерами поперечного сечения, равными соответствующим размерам резонатора вдоль поперечных осей;

3) устанавливается число стоячих полувольт  $p$ , укладываемых вдоль продольной оси резонатора между торцевыми стенками.

В результате приходим к колебаниям типа  $E_{mnp}$  или  $H_{mnp}$ . Следует отметить, что данная классификация в значительной мере

условна, поскольку полностью определяется начальным выбором оси стоячих волн. Для иллюстрации этого на рис. 4.9, а приведена картина поля колебания  $H_{101}$  в прямоугольном резонаторе с размерами  $a \times b \times l$ , где размер  $l$  совпадает с осью  $z$ , принятой в данном случае в качестве продольной оси стоячих волн.

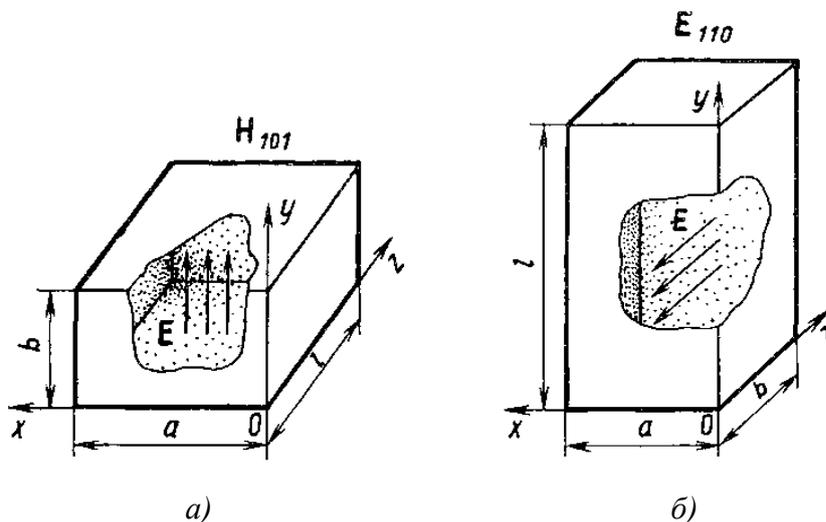


Рис. 4.9

Если осуществить поворот резонатора таким образом, чтобы размер  $b$  совпадал с осью  $z$ , принятой в этом случае в качестве продольной оси стоячих волн (рис. 4.9, б), то в соответствии с процедурой классификации этот же самый электромагнитный процесс должен быть обозначен как колебание  $E_{110}$ . Резонансные длины волн для указанных типов колебаний тождественно равны:  $\lambda_p^{H_{101}} = \lambda_p^{E_{110}}$ .

#### 4.4. Цилиндрический объемный резонатор

Цилиндрический объемный резонатор (рис. 4.10) представляет собой отрезок круглого металлического волновода радиусом  $a$ , ограниченный с двух сторон проводящими торцевыми поверхностями, разнесенными на расстояние  $l$ . Определим совокупность резонансных частот всевозможных типов колебаний цилиндрического резонатора. В круглом волноводе могут распространяться волны  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$ . Длина волны в волноводе  $\lambda_B$  связана с длиной волны в свободном пространстве  $\lambda$  дисперсионным уравнением

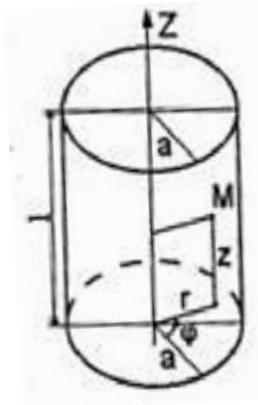


Рис. 4.10

$$1/\lambda_B^2 = 1/\lambda^2 + \lambda_{кр}^2 \quad (4.23)$$

Критические длины волн определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{\text{кр}}^{E_{mn}} = 2\pi a / \nu_{mn}^E; \quad \lambda_{\text{кр}}^{H_{mn}} = 2\pi a / \nu_{mn}^H, \quad (4.24)$$

а резонансная длина волны в волноводе формулой

$$\lambda_{\text{вр}} = 2l / p. \quad (4.25)$$

Подставляя формулы (4.24), (4.25) в уравнение (4.23), получим выражения для резонансных длин волн в свободном пространстве любого типа колебаний в цилиндрическом объемном резонаторе

$$\lambda_p^{E_{mnp}} = 1 / \sqrt{(\nu_{mn}^E / 2\pi a)^2 + (p / 2l)^2}; \quad (4.26)$$

$$\lambda_p^{H_{mnp}} = 1 / \sqrt{(\nu_{mn}^H / 2\pi a)^2 + (p / 2l)^2}. \quad (4.27)$$

Вопрос о возможности существования колебаний с индексом  $p = 0$  решается так же, как и в случае прямоугольного объемного резонатора, т. е., колебания  $E_{mn0}$  в цилиндрическом резонаторе могут существовать, а колебания  $H_{mn0}$  – не могут. Примером может служить колебание  $E_{010}$ , структура поля которого приведена на рис. 4.11. Важным его свойством следует назвать независимость резонансной длины волны от осевого размера  $l$ .

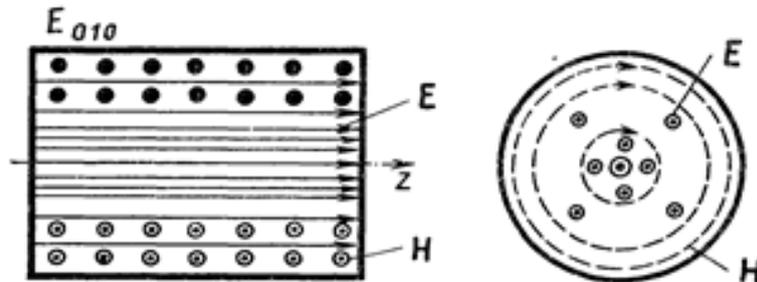


Рис. 4.11

$$\lambda_p^{E_{010}} = 2\pi a / \nu_{01}^E = \lambda_{\text{кр}}^{E_{01}}. \quad (4.28)$$

Из равенства (4.28) следует, что в этом случае резонатор резонирует на длине волны, которая выступает критической для волны  $E_{01}$  в круглом волноводе. Физически это означает, что стоячая волна в рассматриваемом резонаторе устанавливается не по оси  $z$ , а по радиальной координате  $r$ . Примером невозможности существования колебаний  $H_{mn0}$  могут служить картины электромагнитного поля в цилиндрическом объемном резонаторе с колебаниями  $H_{011}$  (рис. 4.12) и  $H_{111}$  (рис. 4.13).

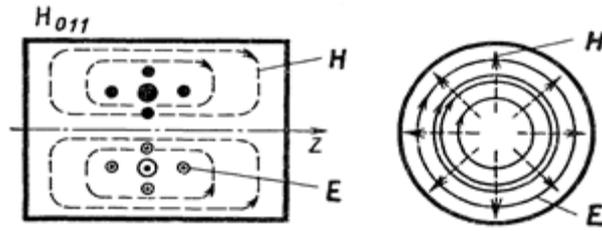


Рис. 4.12

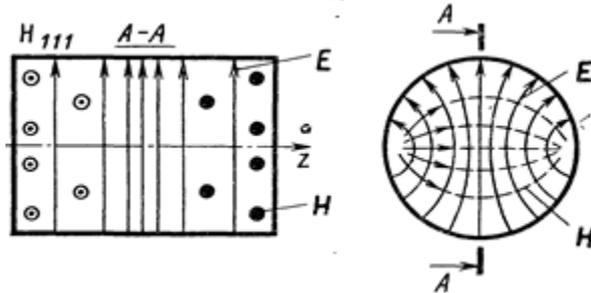


Рис. 4.13

Поля построены на основе известной структуры соответствующих типов волн в волноводе и относятся к некоторому фиксированному моменту времени.

#### 4.5. Способы возбуждения и включения объемных резонаторов

Для возбуждения электромагнитных колебаний в резонаторе используют специальные элементы, называемые *возбуждающими устройствами*, а для вывода энергии из резонатора применяют *устройства связи с внешними нагрузками*. Отметим, что в качестве

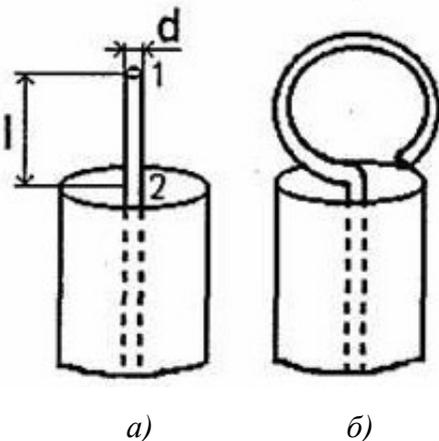


Рис. 4.14

возбуждающих устройств и устройств связи с внешними нагрузками используют одни и те же элементы. Это следует из теоремы взаимности. Эту теорему можно распространить на резонаторы с устройствами ввода и вывода энергии при условии, что и резонатор, и эти устройства не содержат анизотропных элементов. На практике для возбуждения резонатора или его связи с внешними нагрузками используют достаточно малые элементы, содержащие электрический (рис. 4.14, а) или магнитный излучатели в виде малой рамки (рис. 4.14, б).

Обычно такие излучатели конструктивно объединяются с коаксиальной линией, используемой или для подвода энергии к резонатору, или для отвода энергии, принимаемой излучателем. Электрический излучатель 1 (рис. 4.14, а) будет принимать энергию электромагнитного поля из резонатора и передавать ее в коаксиальную линию 2 (рис. 4.14, а), если электромагнитное колебание, существующее в резонаторе, будет вызывать в нем ток. Для получения наибольшего тока электрический излучатель следует поместить в пучность электрического поля колебания в резонаторе параллельно линиям вектора  $\vec{E}$ .

Аналогично наибольшая связь рамки (рис. 4.14, б) с полем колебания в резонаторе будет в случае наведения в ней полем максимальной ЭДС. Для этого рамку следует поместить в пучность магнитного поля колебания в резонаторе так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна вектору  $\vec{H}$ . Аналогично при возбуждении колебания в резонаторе следует помещать электрический излучатель с током в пучность электрического поля параллельно линиям вектора  $\vec{E}$  возбуждаемого колебания, а рамку с током – в пучность магнитного поля, располагая ее плоскость перпендикулярно вектору  $\vec{H}$ .

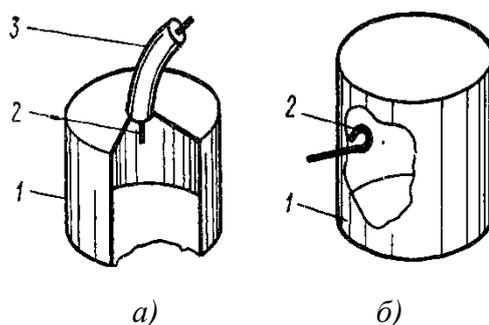


Рис. 4.15

Используя эти правила и зная структуру поля возбуждаемого колебания, можно построить конструкцию возбуждающего устройства, или устройства связи резонатора с внешней нагрузкой: рис. 4.15, а, где 1 – резонатор, 2 – электрический возбуждающий излучатель, 3 – коаксиальный кабель; рис. 4.15, б, где 1 – резонатор, 2 – петлевой возбуждающий излучатель.

Узкая щель, прорезанная в стенке резонатора, является излучающей, если она пересекает линии поверхностного тока. Этот принцип позволяет возбуждать резонатор при помощи щели. Подобное возбуждающее устройство приведено на рис. 4.16 применительно к колебанию  $E_{010}$  в цилиндрическом резонаторе.

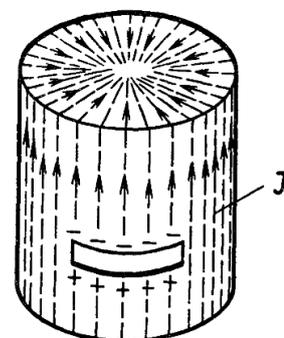


Рис. 4.16

Рассмотрим два характерных способа включения объемных резонаторов. При первом способе – *адсорбционном* (рис. 4.17, а, где

1 – резонатор, 2 – устройство связи) на резонансной частоте происходит интенсивный отбор мощности из основной линии передачи. Как следствие, в частотной характеристике коэффициента передачи линии наблюдается выраженный провал (рис. 4.17, в). При *проходном* способе включения резонатор имеет два возбуждающих устройства и используется как четырехполюсник (рис. 4.17, б).

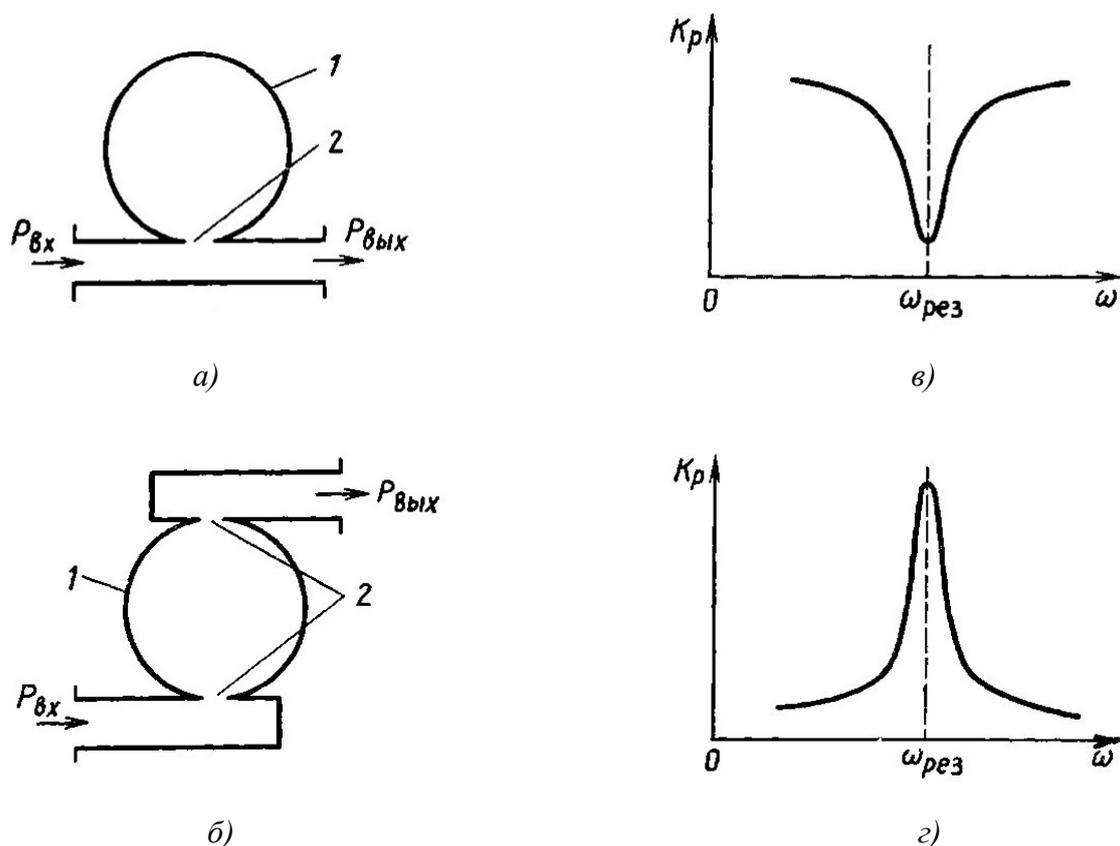


Рис. 4.17

Частотная характеристика коэффициента передачи в системе имеет максимум на резонансной частоте используемого типа колебаний (рис. 4.17, г).

#### 4.6. Добротность объемных резонаторов

Рассмотрим объемный резонатор как изолированную систему, баланс мощностей которой описывается системой уравнений

$$Re\dot{P}_{ст} = P_{п\text{ ср}}; \quad (4.29)$$

$$Im\dot{P}_{ст} = 2\omega(W_{ср}^M - W_{ср}^Э), \quad (4.30)$$

где, полагая, что потери в резонаторе обусловлены конечной проводимостью стенок, средняя за период мощность потерь будет определяться формулой

$$P_{\text{п ср}} = \frac{1}{2\sigma d} \oint_S |\dot{H}_{0m}|^2 dS = \frac{R_s}{2} \oint_S |\dot{H}_{0m}|^2 dS, \quad (4.31)$$

а средние за период значения энергии магнитного и электрического полей следующими соотношениями:

$$W_{\text{ср}}^M = \frac{1}{4} \int_V \mu_a \dot{H}\dot{H}^* dV, \quad W_{\text{ср}}^Э = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a \dot{E}\dot{E}^* dV. \quad (4.32)$$

В объеме  $V$  резонатора энергия электрического поля периодически преобразуется в энергию магнитного поля и обратно. Если средние за период энергии магнитного и электрического полей равны

$$W_{\text{ср}}^M = W_{\text{ср}}^Э, \quad (4.33)$$

то этот процесс протекает без участия сторонних источников и мощность источников оказывается чисто активной ( $\text{Im} \dot{P}_{\text{ст}} = 0$ ). Если  $W_{\text{ср}}^M \neq W_{\text{ср}}^Э$ , то периодическое преобразование энергий возможно только при участии сторонних источников. При этом  $\text{Im} \dot{P}_{\text{ст}} \neq 0$ . Если в изолированной области мощность сторонних источников будет чисто активной, то имеет место *резонанс*. Из изложенного следует, что для резонанса в резонаторе необходимо выполнение условия (4.33). Отношение

$$Q = \omega \frac{W_{\text{ср}}}{P_{\text{п ср}}}, \quad (4.34)$$

где  $W_{\text{ср}} = W_{\text{ср}}^M + W_{\text{ср}}^Э$ , называют добротностью изолированной системы, или *добротностью резонатора*. Выражение (4.34) можно записать в иной форме. Учитывая, что  $\omega = 2\pi/T$ , получим

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W}, \quad (4.35)$$

где  $\Delta W$  – изменение энергии электромагнитного поля в резонаторе за период.

Таким образом, добротность резонатора – это увеличенное в  $2\pi$  раз отношение полной энергии, запасенной в резонаторе  $W_{\text{ср}}$ , к энергии  $\Delta W$ , расходуемой за период  $T$ .

При резонансе  $W_{\text{ср}}^M = W_{\text{ср}}^Э$  и в соотношениях (4.34), (4.35) полную энергию, запасенную в резонаторе  $W_{\text{ср}}$ , можно выразить следующим образом

$$W_{\text{ср}} = 2W_{\text{ср}}^M = 2W_{\text{ср}}^Э = W_{\text{макс}}^M = W_{\text{макс}}^Э, \quad (4.36)$$

где 
$$W_{\text{макс}}^M = \frac{1}{2} \int_V \mu_a \dot{\dot{H}} \dot{\dot{H}}^* dV, \quad W_{\text{макс}}^\Delta = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a \dot{\dot{E}} \dot{\dot{E}}^* dV. \quad (4.37)$$

Подставляя формулы (4.31), (4.37) в (4.34), получим интегральное выражение добротности резонатора

$$Q = \frac{\omega \int_V \mu_a \dot{\dot{H}} \dot{\dot{H}}^* dV}{R_s \oint_S |\dot{H}_{0m}|^2 dS}. \quad (4.38)$$

При расчете по формуле (4.38) значение частоты полагается равным резонансной:  $\omega = \omega_p$ . Из формулы (4.38) следует, что с ростом размеров резонатора добротность увеличивается. Это связано с тем, что с ростом размеров его объем, а следовательно, и величина накапливаемой энергии возрастают быстрее мощности потерь, которая пропорциональна площади его внутренней поверхности.

Соотношения (4.34), (4.35) были получены при условии, что среда в резонаторе идеальная:  $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$ ,  $\tilde{\mu}_a = \mu_a$ , а потери обусловлены конечной проводимостью стенок. В общем случае электродинамические параметры среды определяются соотношениями

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a;$$

$$\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a.$$

При этом формулы для добротности резонатора остаются неизменными, но выражение и значение входящих в них величин изменятся. Так, мощность потерь необходимо дополнить потерями в среде

$$P_{\text{п ср}} = \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon''_a \dot{\dot{E}} \dot{\dot{E}}^* dV + \frac{\omega}{2} \int_V \mu''_a \dot{\dot{H}} \dot{\dot{H}}^* dV,$$

а средние за период энергии полей будут определяться соотношениями

$$W_{\text{ср}}^\Delta = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon'_a \dot{\dot{E}} \dot{\dot{E}}^* dV;$$

$$W_{\text{ср}}^M = \frac{1}{4} \int_V \mu'_a \dot{\dot{H}} \dot{\dot{H}}^* dV.$$

Для многих объемных резонаторов, используемых на практике, в справочной литературе приводятся формулы для расчета добротности. Например, для прямоугольного резонатора с колебанием  $H_{101}$  или (что то же самое)  $E_{110}$  выражение для добротности, полученное с помощью соотношения (4.39), будет иметь вид

$$Q^{H_{101}} = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} \frac{(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2})^{3/2}}{\frac{1}{a^2}(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}) + \frac{1}{l^2}(\frac{1}{b} + \frac{2}{l})},$$

а добротность цилиндрического резонатора с колебанием  $E_{010}$  будет определяться формулой

$$Q^{E_{010}} = \sqrt{2\omega\mu_0\sigma} al/2(a + l).$$

В заключение сделаем следующее замечание. В приведенных выражениях для добротности объемных резонаторов не учитывается шунтирующее действие внешних цепей, проявляющееся через элементы связи. Поэтому добротность резонатора, найденная с помощью полученных соотношений, принято называть *ненагруженной*, или *собственной*, добротностью в отличие от *нагруженной добротности*, которая оказывается тем меньше, чем больше коэффициент связи резонатора с внешними цепями.

#### 4.7. Другие типы объемных резонаторов

Помимо рассмотренных резонаторов в технике СВЧ находят применение резонаторы других конструкций.

*Коаксиальный резонатор* представляет собой отрезок коаксиальной линии, закороченный на концах поперечными металлическими пластинами (рис. 4.18). Коаксиальный резонатор обычно работает на колебаниях типа  $T$ , поэтому его поперечные размеры не имеют ограничения по частоте снизу. Тип колебания в коаксиальном резонаторе обозначают как  $T_{00p}$ .

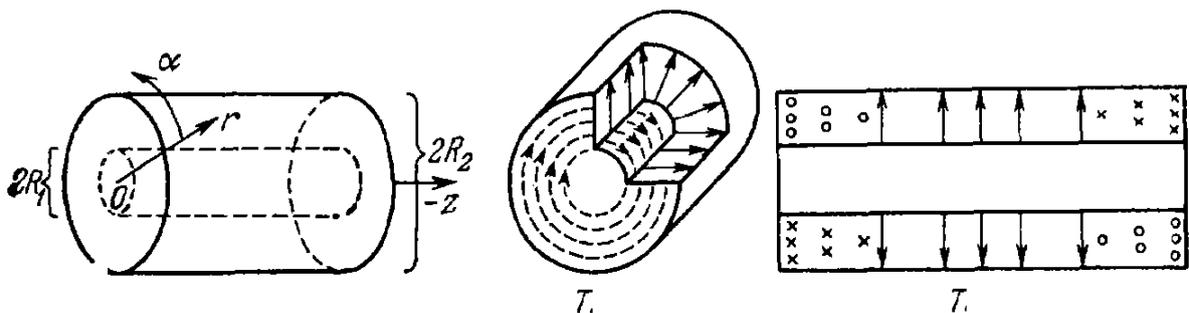


Рис. 4.18

Первые два индекса характеризуют отсутствие стоячих волн по цилиндрическим координатам  $r$  и  $\varphi$ . Последний индекс указывает на число стоячих полуволн вдоль координаты  $z$ . На рис. 4.18 приведена структура поля колебания  $T_{001}$ . Характерная особенность резонатора на коаксиальной линии заключается в том, что он резонирует на кратных частотах  $\lambda_p = 2l/p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , а его резонансная длина  $l = p\lambda_p/2$ .

Поэтому такие резонаторы удобно использовать в качестве волномера. По сравнению с цилиндрическим резонатором с теми же внешними размерами коаксиальный резонатор имеет меньшую добротность из-за большей площади внутренней поверхности и меньшего объема.

*Полосковый резонатор* представляет собой отрезок полосковой линии, на обоих концах которого осуществлен режим ХХ. На рис. 4.19, а показан полосковый резонатор, выполненный на МПЛ. Его поперечные размеры так же, как и поперечные размеры полосковой линии, выбираются из условия отсутствия высших типов волн и излучения из линии. Так как у волн  $T$  и квази- $T$   $\lambda_{кр} = \infty$ , то резонансная длина волн колебания  $T_p$  и квази- $T_p$  равна  $\lambda_p = 2l/p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Следовательно, длина резонатора  $l = p\lambda_p/2$ . Продольное сечение полуволнового резонатора на МПЛ и структура силовых линий электрического поля показаны на рис. 4.19, б. На концах отрезка МПЛ наблюдается концентрация электрического поля, что эквивалентно включению некоторых емкостей между концами полоски и экраном. Из-за этого длина резонатора  $l$  выбирается несколько меньше  $\lambda_p/2$ .

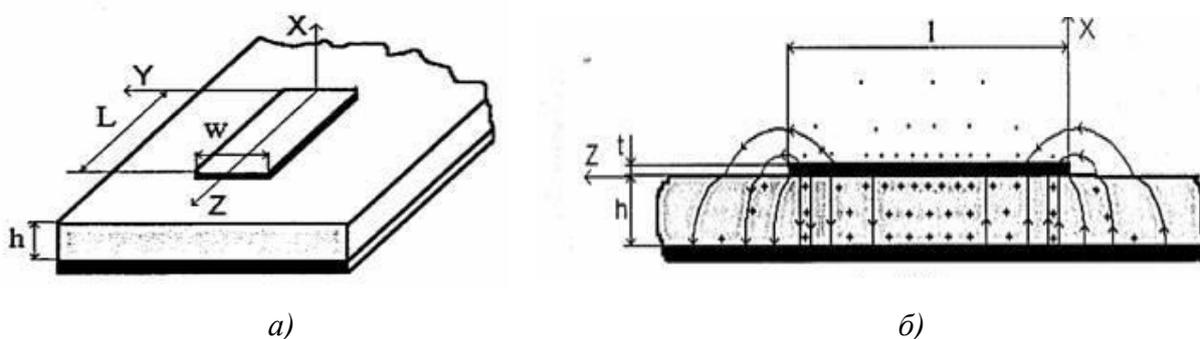


Рис. 4.19

*Диэлектрический резонатор* представляет собой таблетку, выполненную из искусственного материала с высокой диэлектрической

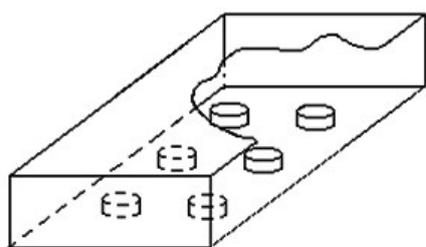


Рис. 4.20

проницаемостью. Ее можно устанавливать непосредственно в волноводе (рис. 4.20), вблизи боковой кромки проводника МПЛ и т. д. При использовании диэлектрических резонаторов отпадает необходимость в устройстве возбуждения, так как резонатор работает за счет использования эффекта полного внутреннего отражения.

## Темы для закрепления материала

1. Колебательные системы на сосредоточенных элементах. Объемные резонаторы. Колебательные системы на элементах с распределенными параметрами.
2. Решение граничной задачи для резонатора из отрезка прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$ .
3. Резонансная длина волны и тип колебаний для резонатора из отрезка прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$ .
4. Структура поля и структура поверхностных токов на стенках прямоугольного резонатора с колебанием  $H_{10p}$ .
5. Совокупность резонансных частот колебаний в прямоугольном резонаторе. Классификация типов колебаний.
6. Совокупность резонансных частот колебаний в цилиндрическом резонаторе. Простейшие типы колебаний ( $E_{010}$ ,  $H_{011}$ ,  $H_{111}$ ).
7. Возбуждение резонаторов с помощью электрического и магнитного излучателей. Адсорбционный и проходной способы включения резонаторов.
8. Собственная добротность резонаторов. Интегральное выражение для добротности. Зависимость добротности от геометрических размеров и электродинамических параметров среды, заполняющей резонатор. Нагруженная добротность.
9. Другие типы резонаторов.

## 5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

### 5.1. Магнитные свойства вещества. Ферриты

Атомы веществ состоят из положительно заряженного ядра и определенного числа отрицательно заряженных электронов. Каждый электрон вращается вокруг ядра, одновременно вращаясь вокруг своей оси. Учитывая заряд электрона, его перемещение по замкнутой траектории и вращение вокруг своей оси можно рассматривать как элементарные рамки с током. Под влиянием токов, протекающих по рамкам, в окружающем пространстве возникают постоянные магнитные поля, силовые линии которых перпендикулярны плоскости рамок. Этим магнитным полям соответствуют орбитальный  $\bar{m}_o$  и спиновой  $\bar{m}_c$  магнитные моменты электрона. Электрон обладает массой, поэтому его можно рассматривать как элементарный гироскоп, вращающийся вокруг ядра атома и одновременно вокруг собственной оси.

Полный магнитный момент атома представляет собой геометрические суммы соответственно магнитных спиновых и орбитальных моментов всех электронов в атоме. Магнитный момент ядра существенно меньше магнитного момента электрона, поэтому влиянием магнитного момента ядра можно пренебречь. В атомах большинства веществ у любых соседних электронов на орбите спиновые магнитные моменты антипараллельны, поэтому суммарный магнитный момент этих атомов близок к нулю.

У металлов переходных групп (железа, палладия, платины и др.) имеет место параллельная ориентация спиновых магнитных моментов у части электронов на орбите. При этом суммарный магнитный момент этих атомов отличен от нуля. Например, у атома железа на предпоследней орбите находятся четыре электрона с параллельными спинами. В постоянном магнитном поле магнитные моменты атомов этих металлов ориентируются параллельно приложенному полю.

*Взаимодействие магнитного поля электромагнитной волны с нескомпенсированными магнитными моментами атомов обуславливает явление ферромагнетизма, широко используемое при разработке управляющих устройств СВЧ. Вследствие поверхностного эффекта электромагнитные волны не распространяются в ферромагнитных металлах.*

Взаимодействие магнитного поля электромагнитной волны с нескомпенсированными магнитными моментами атомов становится возможным в химических соединениях этих металлов с другими элементами, обладающими свойствами диэлектриков. Такие магнитные диэлектрики называются *ферритами*.

Ферриты представляют собой твердые вещества, подобные керамике, полученные искусственным путем при высокотемпературном спекании порошка окиси железа и соединений двухвалентных металлов (марганца, цинка, бария и др.). Ферриты по своим электрическим и магнитным свойствам считаются уникальным материалом. С одной стороны, это ферромагнетик, сходный с железом. Его относительная магнитная проницаемость меняется в широких пределах в зависимости от диапазона частот, состава, температуры. Она может быть меньше единицы в сантиметровом диапазоне и достигать тысяч на низких частотах. С другой стороны, это диэлектрик с высоким удельным сопротивлением порядка  $10^6 \dots 10^{11}$  Ом/см и относительной диэлектрической проницаемостью, равной  $5 \dots 20$ . Поэтому в ферритах могут распространяться электромагнитные волны как в обычном диэлектрике. В ферритах вклад орбитальных магнитных моментов в общий магнитный момент обычно мал, поэтому магнитные свойства ферритов определяются в основном спиновыми магнитными моментами атомов.

*Прецессия магнитного момента.* Рассмотрим электрон со спиновым магнитным моментом  $\vec{m}_c$ , помещенный во внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0 = \vec{1}_z H_0$ . Направление  $\vec{H}_0$  не совпадает с  $\vec{m}_c$ , (рис. 5.1). Внешнее магнитное поле стремится ориентировать магнитный момент параллельно  $\vec{H}_0$ . Наличие спинового механического момента делает электрон подобным элементарному гироскопу, ось которого под влиянием действующих сил вращается (прецессирует). При этом конец векторов  $\vec{m}_c$  начинает прецессировать относительно  $\vec{H}_0$  (рис. 5.1). Исследования показывают, что конец вектора  $\vec{m}_c$  описывает при этом окружность, вращаясь по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора  $\vec{H}_0$ .

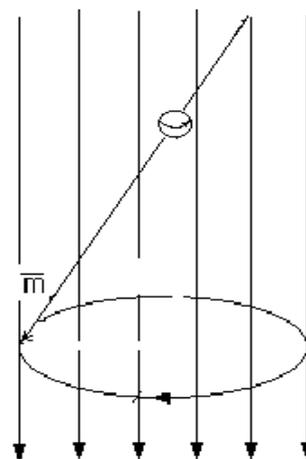


Рис. 5.1

Круговая частота  $\omega_0$  вращения вектора  $\bar{m}_c$  называется круговой частотой свободной прецессии электрона и вычисляется по формуле

$$\omega_0 = |\gamma_c| H_0, \quad (5.1)$$

где  $\gamma_c = -7\pi \cdot 10^4 \text{ М/(А/с)}$ .

Из-за потерь в реальных ферромагнитных средах конец вектора  $\bar{m}_c$  движется по свертывающейся спирали. Через время  $t_c \sim 10^{-8} \text{ с}$ , называемое временем прецессии, прецессия прекращается, и вектор  $\bar{m}_c$  устанавливается параллельно  $\bar{H}_0$ . При определенной величине  $\bar{H}_0$  все нескомпенсированные магнитные моменты ориентируются параллельно друг другу и внешнему полю – феррит намагничивается до насыщения. В результате вектор магнитного момента единицы объема феррита  $\bar{m}$ , равный произведению  $\bar{m}_c$  на число  $N$  нескомпенсированных магнитных моментов в единице объема, устанавливается параллельно  $\bar{H}_0$ :  $\bar{m} = N\bar{m}_c = \bar{1}_z m$ . Вектор  $\bar{H}_0$  оказывает одинаковое влияние на все нескомпенсированные магнитные моменты, поэтому явление прецессии спинового магнитного момента отдельного электрона в постоянном магнитном поле будет наблюдаться и для всех спиновых магнитных моментов в единице объема, т. е. на рис. 5.1 можно вместо  $\bar{m}_c$  подставить  $\bar{m}$ .

## 5.2. Линейно поляризованные волны в намагниченной ферритовой среде

Если в намагниченной под воздействием поля  $H_0$  ферритовой среде распространяется электромагнитная волна с произвольно ориентированным вектором напряженности магнитного поля  $\bar{H} = \bar{H}_m \cos(\omega t)$ , то на магнитные моменты действует суммарное поле с вектором

$$\bar{H}_\Sigma = \bar{1}_z H_0 + \bar{H}_m \cos(\omega t). \quad (5.2)$$

В этом случае ориентация в пространстве вектора  $\bar{H}_\Sigma$  не остается постоянной, ибо длина вектора  $\bar{H}$  изменяется по гармоническому закону. Изменение ориентации вектора  $\bar{H}$  вызывает прецессию магнитных моментов. Эта прецессия уже не будет затухающей, так как отсутствует какое-либо определенное направление внешнего поля, параллельно которому могли бы установиться магнитные моменты. Известно, что траектория движения конца суммарного вектора магнитного момента представляет собой в этом случае эллиптическую кривую. Возникает так

называемая вынужденная прецессия, частота которой совпадает с частотой электромагнитной волны. Качественную картину явлений в феррите можно получить, рассматривая, как и в предыдущем параграфе, поведение одного электрона с последующим обобщением.

Пусть переменное магнитное поле с частотой  $\omega$  направлено вдоль оси  $x$ :  $\dot{\vec{H}} = \bar{1}_x \dot{H}_x$  (рис. 5.2). Представим вектор магнитного момента электрона  $\dot{\vec{m}}_c$  в виде суммы постоянного вектора  $\dot{\vec{m}}_1$ , направленного вдоль линий подмагничивающего поля – вдоль оси  $z$  и вращающегося с частотой  $\omega$  вектора  $\dot{\vec{m}}_2$ , лежащего в плоскости  $xy$ :

$$\dot{\vec{m}}_c = \dot{\vec{m}}_1 + \dot{\vec{m}}_2. \quad (5.3)$$

Величина  $\dot{\vec{m}}_2$  при небольших амплитудах будет пропорциональна величине вектора  $\dot{\vec{H}}$ . Вращающийся вектор  $\dot{\vec{m}}_2$  можно представить в виде суммы двух колеблющихся с частотой  $\omega$  векторов, отличающихся по фазе на  $\pi/2$ :

$$\dot{\vec{m}}_2 = \chi H_x \bar{1}_x + jk H_x \bar{1}_y, \quad (5.4)$$

где  $\chi, k$  – константы, соответствующие магнитной восприимчивости для изотропной среды. Таким образом, в подмагниченной ферритовой среде при воздействии на нее высокочастотного поля возникает внутреннее высокочастотное магнитное поле, характеризуемое вектором намагниченности  $\dot{\vec{m}}_2$ . Вектор магнитной индукции высокочастотного поля  $\dot{\vec{B}}$  связан с векторами  $\dot{\vec{H}}$  и  $\dot{\vec{m}}_2$  соотношением

$$\dot{\vec{B}} = \mu_0 (\dot{\vec{H}} + \dot{\vec{m}}_2) = \mu_0 (\bar{1}_x \dot{H}_x + (\chi H_x \bar{1}_x + jk H_x \bar{1}_y)). \quad (5.5)$$

Проекции вектора  $\dot{\vec{B}}$  в декартовой системе координат будут определяться уравнениями

$$\dot{B}_x = \mu_0 (1 + \chi) \dot{H}_x = \mu_a \dot{H}_x; \quad (5.6)$$

$$\dot{B}_y = j\mu_0 k \dot{H}_x = jk_a \dot{H}_x. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6), (5.7) указывают на отличие феррита от изотропной среды, в которой вектор магнитной индукции параллелен вектору напряженности магнитного поля. Это отличие проявляется в том, что

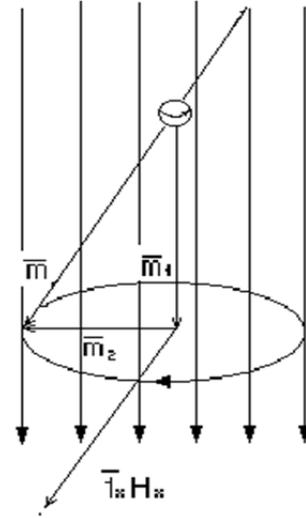


Рис. 5.2

при воздействии на феррит магнитного поля с единственной составляющей  $\dot{H}_x$  вектор  $\dot{\vec{B}}$  имеет две составляющие  $\dot{B}_x$  и  $\dot{B}_y$ . При воздействии на феррит высокочастотного поля с составляющей  $\dot{H}_y$  те же рассуждения приводят к уравнениям

$$\dot{B}_x = -j\mu_0 k \dot{H}_y = -jk_a \dot{H}_y; \quad (5.8)$$

$$\dot{B}_y = \mu_0(1 + \chi) \dot{H}_y = \mu_a \dot{H}_y. \quad (5.9)$$

При воздействии на электрон произвольно ориентированного поля  $\dot{\vec{H}}$  связь между векторами  $\dot{\vec{B}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  будет определяться следующими соотношениями:

$$\dot{B}_x = \mu_a \dot{H}_x - jk_a \dot{H}_y; \quad (5.10)$$

$$\dot{B}_y = jk_a \dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y; \quad (5.11)$$

$$\dot{B}_z = \mu_0 \dot{H}_z. \quad (5.12)$$

Связь между векторами  $\dot{\vec{B}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  можно представить в следующем виде:

$$\dot{\vec{B}} = ||\mu_a|| \dot{\vec{H}}, \quad (5.13)$$

где  $||\mu_a||$  – тензор магнитной проницаемости, которому соответствует матрица

$$||\mu_a|| = \begin{vmatrix} \mu_a & -jk_a & 0 \\ jk_a & \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_a \end{vmatrix}. \quad (5.14)$$

В литературе матрицу (5.14) называют тензором Полдера. Элементы тензорной матрицы  $\mu_a$  и  $k_a$  определяются функциональными выражениями

$$\mu_a = \mu_0 + \frac{|\gamma| M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad (5.15)$$

$$k_a = -\frac{|\gamma| M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (5.16)$$

где  $M$  – намагниченность феррита подмагничивающим полем.

Вектор  $\dot{\vec{H}}$  оказывает одинаковое влияние на все нескомпенсированные спиновые магнитные моменты, поэтому описанное взаимодействие будет наблюдаться и для всех спиновых магнитных моментов в единице объема, т. е. в формуле (5.3) можно вместо  $\bar{m}_c$  подставить вектор магнитного момента единицы объема феррита  $\bar{m}$ . Формулы (5.15), (5.16) были выведены для электрона. В случае феррита они дают хорошее качественное совпадение с экспериментом.

### 5.3. Волны с круговой поляризацией в гиромангнитных средах

Сложная связь между векторами  $\dot{\vec{B}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  сильно затрудняет решение уравнений поля даже при распространении линейно поляризованных волн в неограниченной ферритовой среде. Значительно более простым анализ оказывается в случае волн с круговой поляризацией. Причина этого заключается в том, что вектор намагниченности в феррите является вращающимся. Так как направление прецессии электрона зависит от направления подмагничивающего поля, удобно и направление вращения падающей на феррит волны высокочастотного поля связать с направлением линий подмагничивающего поля, а не с направлением распространения волны. Назовем правовращающейся волной ту, у которой вектор  $\dot{\vec{H}}$  вращается по часовой стрелке, если смотреть по направлению линий подмагничивающего поля. У левополяризованной волны вектор  $\dot{\vec{H}}$  вращается против часовой стрелки. Пусть на феррит воздействует правополяризованная волна. Для такой волны составляющие  $H_y$  и  $H_x$  связаны соотношением

$$\dot{H}_y = -j\dot{H}_x, \quad (5.17)$$

т. е. составляющая  $\dot{H}_y$  отстает по фазе на  $\pi/2$  по отношению к  $\dot{H}_x$ . Вычислим поперечные составляющие вектора  $\dot{\vec{B}}$

$$\dot{B}_x = \mu_a \dot{H}_x - jk_a \dot{H}_y; \quad (5.18)$$

$$\dot{B}_y = jk_a \dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y, \quad (5.19)$$

для случая, соответствующего формуле (5.17):

$$\dot{B}_x = (\mu_a - k_a) \dot{H}_x = \mu_a^+ \dot{H}_x; \quad (5.20)$$

$$\dot{B}_y = -j(\mu_a - k_a) \dot{H}_x = -j\mu_a^+ \dot{H}_x. \quad (5.21)$$

Из формул (5.20), (5.21) следует

$$\dot{B}_y = -j\dot{B}_x. \quad (5.22)$$

Следовательно, вектор  $\dot{\vec{B}}$  поляризован так же, как вектор  $\dot{\vec{H}}$ , и соотношение между этими векторами будет таким же, как в изотропной среде,

$$\dot{\vec{B}} = \mu_a^+ \dot{\vec{H}}. \quad (5.23)$$

Магнитная проницаемость для правополяризованной волны будет определяться формулой

$$\mu_a^+ = \mu_a - k_a = \mu_0 + \frac{|y|M}{\omega_0 - \omega}. \quad (5.24)$$

В случае левополяризованной волны

$$\dot{H}_y = j\dot{H}_x, \quad (5.25)$$

т. е.  $\dot{H}_y$  опережает по фазе на  $\pi/2$  составляющую  $\dot{H}_x$ . С помощью соотношений (5.17), (5.18) вычислим поперечные составляющие вектора  $\dot{\vec{B}}$  для случая, соответствующего формуле (5.25):

$$\dot{B}_x = (\mu_a + k_a) \dot{H}_x = \mu_a^- \dot{H}_x; \quad (5.26)$$

$$\dot{B}_y = j(\mu_a + k_a) \dot{H}_x = j\mu_a^- \dot{H}_x. \quad (5.27)$$

Следовательно, и в этом случае вектор  $\dot{\vec{B}}$  поляризован так же, как вектор  $\dot{\vec{H}}$ , и соотношение между этими векторами будет таким же, как в изотропной среде,

$$\dot{\vec{B}} = \mu_a^- \dot{\vec{H}}, \quad (5.28)$$

но магнитная проницаемость для левополяризованной волны будет иметь другое значение, которое определяется формулой

$$\mu_a^- = \mu_a + k_a = \mu_0 + \frac{|\gamma|M}{\omega_0 + \omega}. \quad (5.29)$$

Таким образом, при распространении в неограниченной ферритовой среде волн с круговой поляризацией магнитная проницаемость является скалярной величиной, но она различна для волн с правой и левой поляризациями. Зависимости относительной магнитной проницаемости  $\mu^+ = \mu_a^+/\mu_0$  и  $\mu^- = \mu_a^-/\mu_0$  соответственно для волн с правой и левой круговой поляризацией от величины  $H_0$  приведены на рис. 5.3.

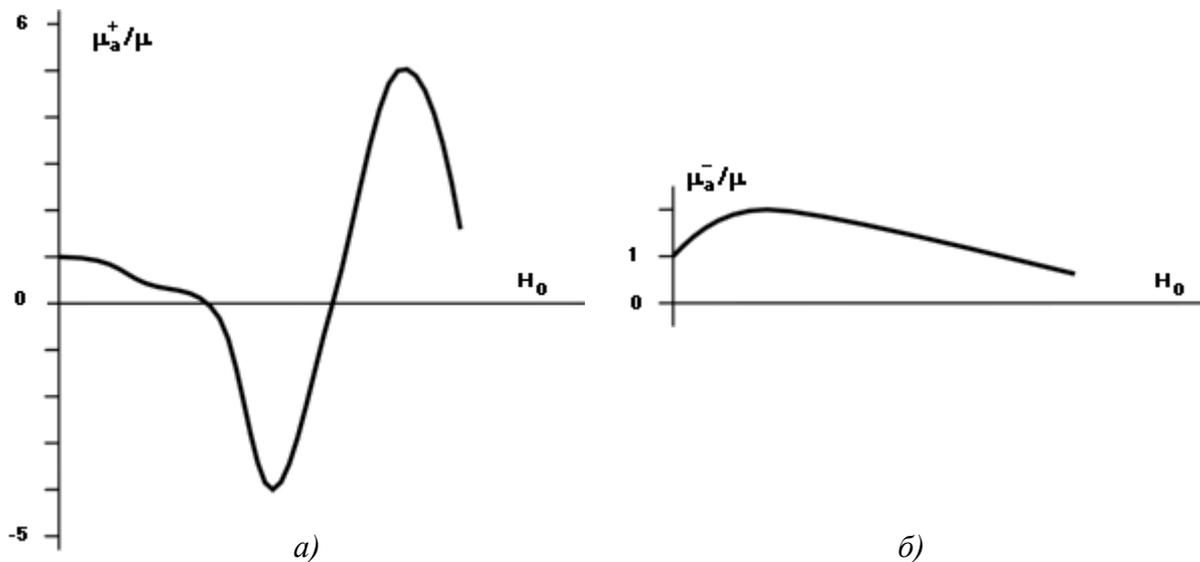


Рис. 5.3

Из рис. 5.3, а следует, что при определенном значении подмагничивающего поля происходит резкое изменение величины  $\mu^+$ . При этом значении подмагничивающего поля собственная частота прецессии  $\omega_0$  совпадает с частотой высокочастотного поля  $\omega$ . Явление, при котором направление вращения для правополяризованной волны совпадает с направлением прецессии, а ее частота совпадает с собственной частотой прецессии, получило название феррорезонанса. Аналогичные рассуждения следуют при рассмотрении формулы (5.24), полученной без учета потерь. Явление ферромагнитного резонанса сопровождается высокими потерями в феррите. С физической точки зрения это можно пояснить следующим образом. Когда собственная частота прецессии совпадает с частотой внешнего поля, электрон прецессирует с наибольшей амплитудой и забирает у поля наибольшую энергию. При этом значительная часть энергии расходуется на нагрев феррита. В этой же области наиболее сильно меняется магнитная проницаемость, так как вследствие сильной прецессии электрона вектор  $\vec{m}_2$  имеет наибольшее значение. Для левополяризованной волны подобных явлений не наблюдается (рис. 5.3, б). Это происходит потому, что в случае левополяризованной волны направления вращения волны и вектора  $\vec{m}_2$  противоположны, и в одну часть периода электрон получает энергию от волны, а в другую – отдает ее.

#### 5.4. Эффект Фарадея

Рассмотрим линейно поляризованную волну, распространяющуюся в подмагниченной ферритовой среде в направлении, совпадающем с постоянным магнитным полем  $\vec{H}_0$ . Введем декартову систему координат, ось  $z$  которой совпадает с  $\vec{H}_0$ :  $\vec{H}_0 = \vec{1}_z H_0$ . Представим волну в виде суперпозиции двух волн с круговой поляризацией и противоположным направлением вращения (рис. 5.4). В этом случае поперечную компоненту линейно поляризованной волны  $\vec{H}$  можно представить в виде  $\vec{H} = 0,5(\vec{H}^+ + \vec{H}^-)$ , где  $\vec{H}^+ = \vec{1}_x \dot{H}_x - j\vec{1}_y \dot{H}_y$  – поперечная компонента волны с правой круговой поляризацией и направлением вращения по часовой стрелке в плоскости  $XOY$ , если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля, а  $\vec{H}^- = \vec{1}_x \dot{H}_x + j\vec{1}_y \dot{H}_y$  – поперечная компонента волны с левой круговой поляризацией и направлением вращения против часовой стрелки в плоскости  $XOY$ , если смотреть вдоль

направления постоянного магнитного поля. Для волн, распространяющихся в подмагниченной ферритовой среде, в зависимости от поляризации постоянная распространения будет определяться формулами:  $\beta_z^+ = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a^+}$  – для правополяризованной волны;  $\beta_z^- = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a^-}$  – для левополяризованной волны.

Зависимости  $\mu_a^+$  и  $\mu_a^-$  от величины подмагничивающего поля  $\overline{H}_0$  приведены на рис. 5.5. Выбирая величину подмагничивающего поля, соответствующую точке 1 на рис. 5.5, получим  $\mu_a^+ < \mu_a^-$ , т. е.  $\beta_z^+ < \beta_z^-$ . Следовательно, эти волны имеют разный фазовый набег на одном и том же расстоянии.

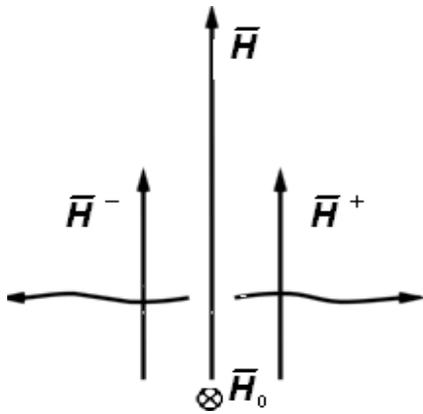


Рис. 5.4

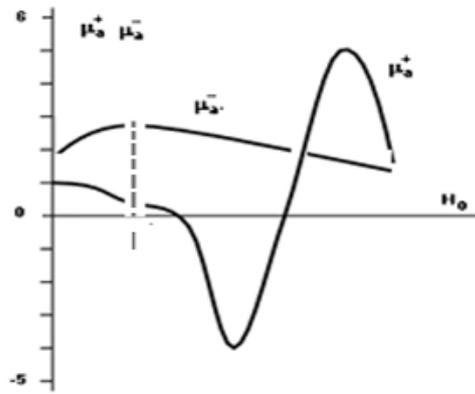


Рис. 5.5

Приведенные ниже преобразования подтверждают эти рассуждения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\overline{H}}(z) &= 0,5 (\overline{1}_x H_{0x} - j \overline{1}_y H_{0x}) e^{-j\beta^+ z} + 0,5 (\overline{1}_x H_{0x} + j \overline{1}_y H_{0x}) e^{-j\beta^- z} = \\
 &= 0,5 (\overline{1}_x H_{0x} e^{-j\beta^+ z} + \overline{1}_x H_{0x} e^{-j\beta^- z} - j \overline{1}_y H_{0x} e^{-j\beta^+ z} + j \overline{1}_y H_{0x} e^{-j\beta^- z}) = \\
 &= \overline{1}_x 0,5 H_{0x} (e^{-j\beta^+ z} + e^{-j\beta^- z}) - j \overline{1}_y 0,5 H_{0x} (e^{-j\beta^+ z} - e^{-j\beta^- z}) = \\
 &= \overline{1}_x 0,5 H_{0x} (e^{-j(\frac{\beta^+ z}{2})} e^{j(\frac{\beta^- z}{2})} + e^{-j(\frac{\beta^- z}{2})} e^{j(\frac{\beta^+ z}{2})}) e^{-j(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}) z} - \\
 &\quad - j \overline{1}_y 0,5 H_{0x} (e^{-j(\frac{\beta^+ z}{2})} e^{j(\frac{\beta^- z}{2})} - e^{-j(\frac{\beta^- z}{2})} e^{j(\frac{\beta^+ z}{2})}) e^{-j(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}) z} = \\
 &= \overline{1}_x 0,5 H_{0x} (e^{j(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}) z} + e^{-j(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}) z}) e^{-j(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}) z} - \\
 &\quad - j \overline{1}_y 0,5 H_{0x} (e^{j(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}) z} - e^{-j(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}) z}) e^{-j(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}) z} = \\
 &= \overline{1}_x H_{0x} \cos\left\{\left(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}\right) z\right\} e^{-j\left(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}\right) z} + \overline{1}_y H_{0x} \sin\left\{\left(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}\right) z\right\} e^{-j\left(\frac{\beta^- + \beta^+}{2}\right) z}.
 \end{aligned}$$

Из итогового выражения следует, что поперечный вектор  $\dot{H}$  линейно поляризованной волны, распространяющейся в подмагниченной ферритовой среде в направлении подмагничивающего поля, поворачивается по часовой стрелке (рис. 5.6), т. е. плоскость поляризации результирующего вектора повернется на угол  $\Phi$ , который определяется следующими формулами:

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{|\dot{H}_y|}{|\dot{H}_x|} = \operatorname{tg}\left\{\left(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}\right)z\right\};$$

$$\Phi = \left(\frac{\beta^- - \beta^+}{2}\right)z.$$

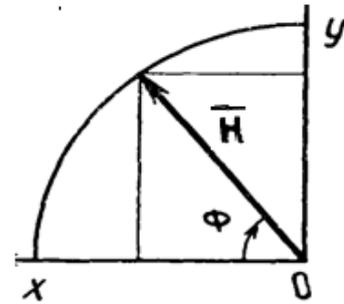


Рис. 5.6

Следует отметить, что вращение плоскости поляризации происходит по часовой стрелке, если волна распространяется по направлению силовых линий подмагничивающего поля, и против часовой стрелки, если волна распространяется против силовых линий подмагничивающего поля. Таким образом, направление вращения плоскости поляризации не зависит от направления распространения волны, если смотреть неизменно по направлению подмагничивающего поля.

Эффект вращения плоскости поляризации носит название *эффекта Фарадея*.

### 5.5. Эффект смещения поля в прямоугольном волноводе с поперечно подмагниченным ферритом

Пусть в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения  $a \times b$  при  $a > b$  распространяется волна  $H_{10}$ . Выражения для составляющих поля волны  $H_{10}$  описываются формулами:

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (5.29)$$

$$\dot{E}_y = -j\omega\mu_a \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}; \quad (5.30)$$

$$\dot{H}_x = jh \frac{a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz}. \quad (5.31)$$

Структура поля волны  $H_{10}$ , построенная в соответствии с формулами (5.29), (5.30), (5.31), показана на рис. 5.7. Как следует из (5.29) и (5.31), составляющие  $\dot{H}_z$  и  $\dot{H}_x$  находятся в плоскости  $XOZ$ , параллельной широкой стенке волновода, взаимно ортогональны, отличаются по фазе на  $\pi/2$ , а их модули зависят от координаты  $x$ . В общем случае модули этих составляющих не равны, поэтому поляризация магнитного

поля в плоскости  $XOZ$  эллиптическая. Вблизи боковых стенок волновода при  $x = 0$  и  $x = a$  и в центре широких стенок при  $x = a/2$  магнитное

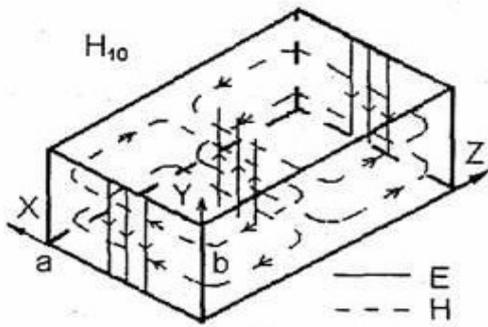


Рис. 5.7

поле волны  $H_{10}$  имеет линейную поляризацию, поскольку в этих точках одна из составляющих обращается в ноль. В тех сечениях, где  $|\dot{H}_z| = |\dot{H}_x|$ , поляризация магнитного поля будет круговая. Так как составляющая  $\dot{H}_z$  при переходе через точку  $x = a/2$  меняет знак, то во всех сечениях при  $0 < x < a/2$  вектор  $\dot{\vec{H}}$  вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси  $y$ ,

а в сечении  $a/2 < x < a$  – против часовой стрелки. Приравнивая модули составляющих магнитного поля  $|\dot{H}_z| = |\dot{H}_x|$ , получим

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \right| = \left| h \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \right|. \quad (5.32)$$

Приведем уравнение (5.32) к следующему виду:

$$\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \right| = \frac{\pi}{ha} = \frac{\lambda_B}{2a}. \quad (5.33)$$

Из уравнения (5.33) получим значение координаты  $x_0$ , при которой вектор  $\dot{\vec{H}}$  имеет круговую поляризацию:

$$x_0 = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_B}{a} \right). \quad (5.34)$$

Уравнение (5.34) имеет два решения:  $x_{01} \approx a/4$  и  $x_{02} \approx 3a/4$ .

Поместим в сечение с координатой  $x_{01}$  ферритовую пластину, намагничиваемую внешним постоянным магнитным полем, направленным вдоль оси  $y$   $\vec{H}_0 = \vec{1}_y H_0$  (рис. 5.8). В этом

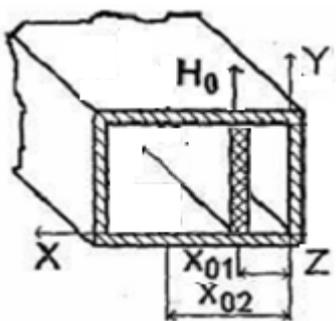


Рис. 5.8

случае для волны, распространяющейся в прямом направлении оси  $z$  в сечении  $x_{01}$  поляризация магнитного поля волны  $H_{10}$  такая же, как у вектора  $\dot{\vec{H}}^- = \vec{1}_x \dot{H}_x + j \vec{1}_z \dot{H}_z$ , что соответствует левой круговой поляризации с направлением вращения против часовой стрелки в плоскости  $XOZ$ , если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля. Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$  в сечении  $x_{01}$ , поляризация магнитного поля волны  $H_{10}$  такая же, как у вектора  $\dot{\vec{H}}^+ = \vec{1}_x \dot{H}_x - j \vec{1}_z \dot{H}_z$ ,

что соответствует правой круговой поляризации с направлением вращения по часовой стрелке в плоскости  $XOZ$ , если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля. В сечении  $x_{02}$  прямая волна будет иметь поляризацию, совпадающую с поляризацией поля  $\vec{H}^+$ , а обратная волна – совпадающую с поляризацией поля  $\vec{H}^-$ . Для волны, распространяющейся в ферритовой пластине, в зависимости от поляризации постоянная распространения будет определяться формулами  $\beta_y^+ = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a^+}$  – для правополяризованной волны;  $\beta_y^- = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a^-}$  – для левополяризованной волны. Зависимости  $\mu^+ = \mu_a^+/\mu_0$  и  $\mu^- = \mu_a^-/\mu_0$  от величины подмагничивающего поля  $\vec{H}_0$  приведены на рис. 5.9. Обратная волна, распространяющаяся по волноводу в обратном направлении оси  $z$  и в феррите, имеет поляризацию магнитного поля, совпадающую с  $\vec{H}^+$ . Магнитная проницаемость феррита для этой волны равна  $\mu^+$ . Выбирая величину подмагничивающего поля, соответствующую точке 1 на рис. 5.9, получим  $\mu^+ < 0$ , что соответствует мнимому значению постоянной распространения в феррите  $\beta_y^+$ , т. е., обратная волна не может распространяться в феррите. Она вытесняется из него и распространяется в основном вне ферритовой пластины. Распределение амплитуды вектора  $\vec{E}$  обратной волны в поперечной плоскости волновода с ферритом показано на рис. 5.10.

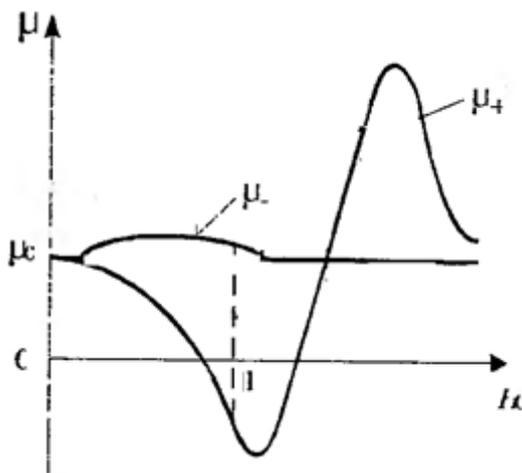


Рис. 5.9

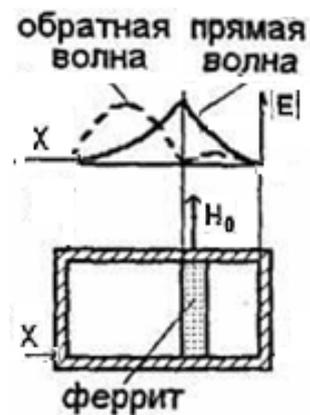


Рис. 5.10

Прямая волна, распространяющаяся по волноводу в положительном направлении оси  $z$  и в феррите, имеет поляризацию магнитного поля, совпадающую с  $\vec{H}^-$ , поэтому магнитная проницаемость феррита

для этой волны равна  $\mu_a^- \approx \mu_0$ . Однако ее структура в волноводе с ферритом достаточно сильно отличается от структуры волны  $H_{10}$ . Как показано на рис. 5.10, она существует в виде поверхностной волны на границе феррит – воздух.

Описанный эффект используется при создании невзаимных устройств СВЧ, например вентилях. Для образования вентиля достаточно на левую грань ферритовой пластины (см. рис. 5.8) нанести тонкую пленку, поглощающую прямую волну намного сильнее, чем обратную.

Возможен и иной способ реализации вентилях, основанный на использовании ферромагнитного резонанса. Суть его сводится к следующему: постоянное подмагничивающее поле выбирают такой величины, чтобы для правополяризованной волны соблюдались условия ферромагнитного резонанса. При этом поглощение волны, имеющее в феррите правую поляризацию, будет обеспечиваться за счет резонансных потерь.

### Темы для закрепления материала

1. Ферриты и их свойства. Взаимодействие электрона с постоянным магнитным полем. Прецессия электрона. Распространение линейно поляризованных волн в гиромангнитной среде. Тензор магнитной проницаемости феррита.

2. Распространение волн с круговой поляризацией в намагниченной ферритовой среде. Магнитная проницаемость намагниченной ферритовой среды при распространении волн с круговой поляризацией. Ферромагнитный резонанс.

3. Распространение в продольно намагниченной ферритовой среде линейно поляризованной волны. Поворот плоскости поляризации линейно поляризованной волны при распространении в продольно намагниченном феррите.

4. Структура и распределение амплитуды поля в прямоугольном волноводе с волной  $H_{10}$  при наличии поперечно намагниченного феррита. Вентили на эффекте смещения поля и ферромагнитном резонансе.

## 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

### 6.1. Общие характеристики диапазонов радиоволн

Термин «радиоволны» обозначает электромагнитные волны, принадлежащие тому или иному диапазону частот, применяемому в радиотехнике. Специальным решением Международного союза электросвязи (МСЭ) и Международной электротехнической комиссии (МЭК) принято различать следующие диапазоны радиочастот и соответствующих длин радиоволн:

- очень низкие частоты (ОНЧ) – от 3 до 30 кГц, или мириаметровые волны (длина волны от 100 до 10 км);
- низкие частоты (НЧ) – от 30 до 300 кГц, или километровые волны (длина волны от 10 до 1 км);
- средние частоты (СЧ) – от 300 кГц до 3 МГц, или гектометровые волны (длина волны от 1 км до 100 м);
- высокие частоты (ВЧ) – от 3 до 30 МГц, или декаметровые волны (длина волны от 100 до 10 м);
- очень высокие частоты (ОВЧ) – от 30 до 300 МГц, или метровые волны (длина волны от 10 до 1 м);
- ультравысокие частоты (УВЧ) – от 300 МГц до 3 ГГц, или дециметровые волны (длина волны от 1 м до 10 см);
- сверхвысокие частоты (СВЧ) – от 3 до 30 ГГц, или сантиметровые волны (длина волны от 10 до 1 см);
- крайне высокие частоты (КВЧ) – от 30 до 300 ГГц, или миллиметровые волны (длина волны от 1 см до 1 мм).

Радиотехника исторически развивалась с неуклонной тенденцией к освоению все более высокочастотных диапазонов. Это было связано, прежде всего, с необходимостью создавать высокоэффективные антенные системы, концентрирующие энергию в пределах узких телесных углов. Дело в том, что антенна с узкой диаграммой направленности обязательно должна иметь поперечные размеры, существенно превышающие рабочую длину волны. Такое условие легко выполнить в метровом, а тем более в сантиметровом диапазоне, в то время как остронаправленная антенна для метровых волн имела бы совершенно неприемлемые габариты. Вторым фактором, определяющим ценные свойства высокочастотных диапазонов, служит то обстоятельство, что

здесь удастся реализовать большое число радиоканалов с взаимно не пересекающимися полосами частот. Это дает возможность, с одной стороны, широко использовать принцип частотного разделения каналов, а с другой – применять широкополосные системы модуляции, например частотную модуляцию. При определенных условиях такие системы модуляции способны обеспечить высокую помехоустойчивость работы радиоканала. В практике радиовещания и телевидения сложилась несколько упрощенная классификация диапазонов радиоволн. Согласно ей метрические волны называют сверхдлинными волнами (СДВ), километровые – длинными волнами (ДВ), гектометровые – средними волнами (СВ), декаметровые – короткими волнами (КВ), а все более высокочастотные колебания с длинами волн короче 10 м относят к ультракоротким волнам (УКВ). Волны сантиметрового и длинноволновой части миллиметрового диапазонов иногда называют также микроволновыми.

## 6.2. Распространение радиоволн в свободном пространстве

Свободное пространство представляет собой неограниченную, непоглощающую среду ( $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ). Выражение, описывающее распространение радиоволн в свободном пространстве, является фундаментальным. Для описания распространения радиоволн в реальных условиях пользуются теми же выражениями, вводя в них корректирующие множители.

При проектировании радиотрасс важнейшими характеристиками являются:

- напряженность поля вблизи приемной антенны;
- мощность сигнала на входе приемного устройства.

Для получения соответствующих соотношений рассмотрим изотропный излучатель в свободном пространстве. При излучаемой мощности  $P_{\Sigma_0}$  плотность потока мощности на расстоянии  $r$  от источника будет определяться выражением

$$\Pi = \frac{P_{\Sigma_0}}{4\pi r^2}, \text{ Вт/м}^2. \quad (6.1)$$

Эту же величину можно записать через напряженность электрического поля в точке наблюдения  $|E_0|$

$$\Pi = \frac{|E_0|^2}{240\pi}. \quad (6.2)$$

Приравнивая формулы (6.1) и (6.2)

$$\frac{P_{\Sigma_0}}{4\pi r^2} = \frac{|E_0|^2}{240\pi} \quad (6.3)$$

и выражая  $|E_0|$ , получим

$$|E_0| = \frac{\sqrt{60P_{\Sigma_0}}}{r}, \text{ В/м.} \quad (6.4)$$

Реальные антенны обычно обладают направленным излучением, которое характеризуется коэффициентом направленного действия ( $D_{\Sigma}$ ). Коэффициент направленного действия – это число, показывающее, во сколько раз необходимо увеличить мощность излучения антенны при переходе от направленной к ненаправленной антенне при сохранении неизменной напряженности поля в месте приема:

$$D_{\Sigma} = \frac{P_{\Sigma_0}}{P_{\Sigma}}, \quad (6.5)$$

где  $P_{\Sigma_0}$  – мощность излучения ненаправленной антенны. Таким образом, направленная антенна по создаваемой ей напряженности поля в месте приема эквивалентна изотропной, излучающей в  $D_{\Sigma}$  раз большую мощность.

Эти рассуждения позволяют представить выражение для амплитудного значения напряженности поля, создаваемой в свободном пространстве направленной антенной, в следующем виде:

$$|E_0| = \frac{\sqrt{60P_{\Sigma}D_{\Sigma}}}{r}, \text{ В/м.} \quad (6.6)$$

Для определения мощности в приемной антенне  $P_{np}$  необходимо найти произведение плотности потока мощности  $\Pi$  вблизи антенны на эффективную поверхность антенны  $S_{эфф}$

$$P_{np} = \Pi S_{эфф}. \quad (6.7)$$

Эффективная площадь приемной антенны связана с ее коэффициентом направленного действия  $D_{np}$  соотношением

$$S_{эфф} = \frac{D_{np}\lambda^2}{4\pi}. \quad (6.8)$$

Плотность потока мощности вблизи приемной антенны определяется через мощность, излучаемую передающей антенной, выражением

$$\Pi = \frac{|E_0|^2}{240\pi} = \frac{P_{\Sigma}D_{\Sigma}}{4\pi r^2}. \quad (6.9)$$

Подставляя формулы (6.8) и (6.9) в (6.7), получим выражение для мощности, создаваемой в приемной антенне при распространении радиоволн в свободном пространстве:

$$P_{np} = \frac{P_{\Sigma} D_{\Sigma} D_{np} \lambda^2}{4\pi r^2}. \quad (6.10)$$

Ослабление мощности  $L_0$  при распространении радиоволн в свободном пространстве, определяемое как отношение мощности сигнала на входе приемной антенны к мощности излучения передающей антенны при ненаправленных антеннах ( $D_{np} = D_{\Sigma} = 1$ ), называется *основными потерями радиолинии*

$$L_0 = \frac{P_{np}}{P_{\Sigma}} = 4\pi(\lambda/4\pi r)^2. \quad (6.11)$$

В удобном для расчетов виде ( $r$ , км;  $f$ , МГц;  $L_0$ , дБ) соотношение имеет вид

$$L_{0 \text{ дБ}} = 10 \lg\left(\frac{P_{np}}{P_{\Sigma}}\right) = -(33 + 20(\lg r + \lg f)), \text{ дБ}. \quad (6.12)$$

### 6.3. Область пространства, существенно участвующая в формировании поля на заданной линии

Форму и размеры существенной области можно установить

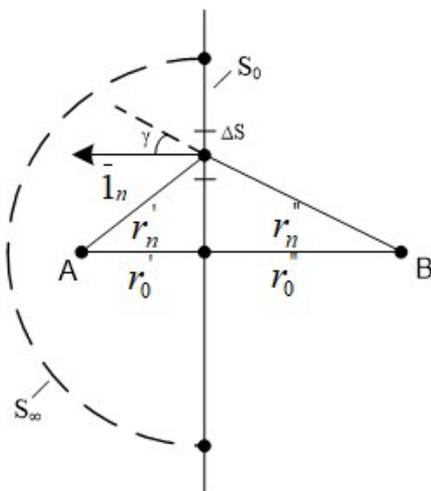


Рис. 6.1

аналитически, используя принцип эквивалентности. Согласно этому принципу поле в точке приема определяется суммарным действием вторичных источников, распределенных по воображаемой поверхности, замкнутой вокруг источника  $A$  или точки приема  $B$ . Для упрощения расчетов составим поверхность из бесконечной плоскости  $S_0$ , расположенной перпендикулярно линии  $AB$  (рис. 6.1), и полусферы  $S_{\infty}$  с бесконечным радиусом, которая замыкает плоскость  $S_0$ . Поля от источников, расположенных на бесконечно удаленных участках поверхности  $S_0 + S_{\infty}$ , бесконечно малы вследствие расходимости волны. Поэтому суммарное поле формируется источниками на поверхности  $S_0$ , расположенными на конечном

бесконечно удаленных участках поверхности  $S_0 + S_{\infty}$ , бесконечно малы вследствие расходимости волны. Поэтому суммарное поле формируется источниками на поверхности  $S_0$ , расположенными на конечном

расстоянии от точки  $B$ . Для облегчения суммирования разделим плоскость  $S_0$  на зоны Френеля.

Построим серию ломаных  $AC_nB$  (рис. 6.2), пересекающих плоскость  $S_0$  так, чтобы длина каждой последующей ломаной была больше длины предыдущей на половину длины волны:

$$AC_nB = AC_{n-1}B + \frac{\lambda}{2} = (r'_0 + r''_0) + n \frac{\lambda}{2}. \quad (6.13)$$

Семейство ломаных линий, удовлетворяющее выражению (6.13), при пересечении с плоскостью  $S_0$  образует на ней систему окружностей с центром в точке  $O$  (см. рис. 6.3).

Участки плоскости, ограниченные окружностями, называют *зонами Френеля на плоскости*. Первая зона представляет собой круг, зоны высших номеров – кольцевые области. Суммарное поле от всех источников рассчитывается с учетом их распределения по зонам Френеля. Амплитуда поля от элемента поверхности  $\Delta S$  оценивается как  $\Delta E = C \Delta S \cos \frac{\gamma}{r'_n + r''_n}$ , а фаза  $\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) (r'_n + r''_n)$ , где  $C$  – константа, зависящая от свойств первичного источника. Обозначения  $\gamma$ ,  $r'_n$ ,  $r''_n$  соответствуют рис. 6.1.

На рис. 6.4 показано векторное суммирование элементарных составляющих  $\Delta E$ , возбужденных источниками двух зон с номерами  $n$  и  $n+1$ . Расчеты показывают, что результирующие векторы полей от источников соседних зон почти коллинеарны, при этом векторы  $\vec{E}_n$  и  $\vec{E}_{n+1}$  направлены противоположно из-за различия на  $\lambda/2$  длин  $(r'_n + r''_n)$  и  $(r'_{n+1} + r''_{n+1})$

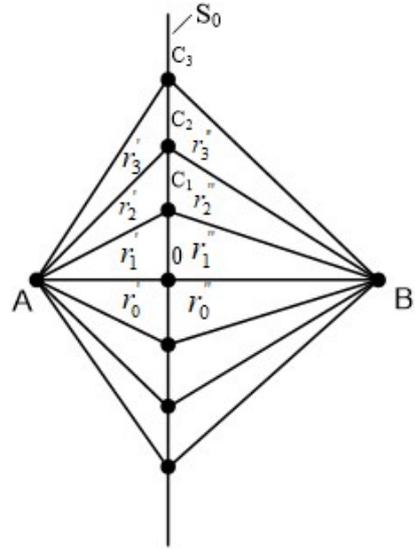


Рис. 6.2

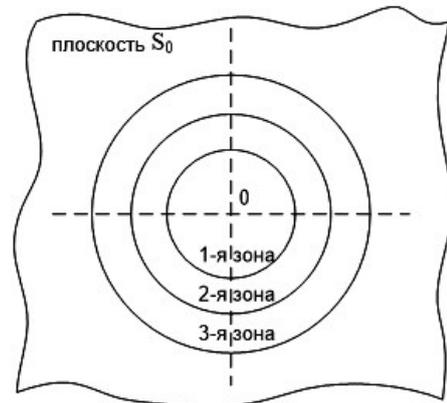


Рис. 6.3

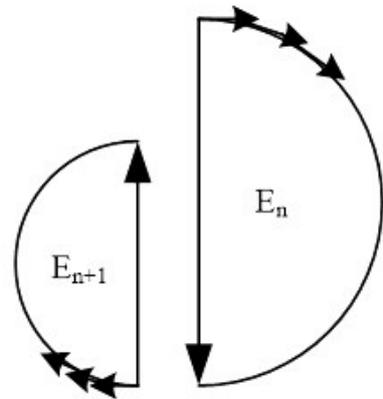


Рис. 6.4

согласно формуле (6.1) (рис. 6.4). Амплитуда  $E_{n+1 \text{ макс}} < E_{n \text{ макс}}$ , поскольку путь  $r'_{n+1} + r''_{n+1} > r'_n + r''_n$ , и с увеличением  $n$  уменьшается  $\cos \varphi$ .

В результате коллинеарности векторов полей от источников в отдельных зонах Френеля амплитуда результирующего поля определяется алгебраической суммой, при этом учет фазы приводит к знакопеременному ряду. Каждый член ряда равен амплитуде поля, созданного в точке приема источниками  $n$ -й зоны:

$$E_{\text{макс}} = E_{1 \text{ макс}} - E_{2 \text{ макс}} + E_{3 \text{ макс}} - E_{4 \text{ макс}} + \dots$$

Для выявления количественных соотношений удобно записать ряд в виде

$$E_{\text{макс}} = \frac{E_{1 \text{ макс}}}{2} + \left( \frac{E_{1 \text{ макс}}}{2} - E_{2 \text{ макс}} + \frac{E_{3 \text{ макс}}}{2} \right) + \quad (6.14)$$

$$+ \left( \frac{E_{3 \text{ макс}}}{2} - E_{4 \text{ макс}} + \frac{E_{5 \text{ макс}}}{2} \right) + \dots$$

Поскольку соседние члены ряда мало отличаются друг от друга, значение поля в каждой скобке (6.14) близко к нулю и в первом приближении результирующее поле

$$E_{\text{макс}} \approx \frac{E_{1 \text{ макс}}}{2}, \quad (6.15)$$

т. е. напряженность поля равна половине той величины, которая создается источниками первой зоны Френеля. Результат последовательного от зоны к зоне алгебраического суммирования полей можно проследить по кривой, приведенной на рис. 6.5. При суммировании полей от источников только первой зоны напряженность возрастает до  $E = 2E_0$ , где  $E_0$  – поле в свободном пространстве. При дальнейшем сложении проявляется действие противофазных полей от источников второй зоны и результирующее поле уменьшается. Компенсирующее действие полей от источников четных зон обуславливает немонотонный закон приближения  $E$  к  $E_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Существенную область обычно ограничивают примерно восьмью зонами Френеля (при этом ошибка в вычислении поля не превышает 16 %).

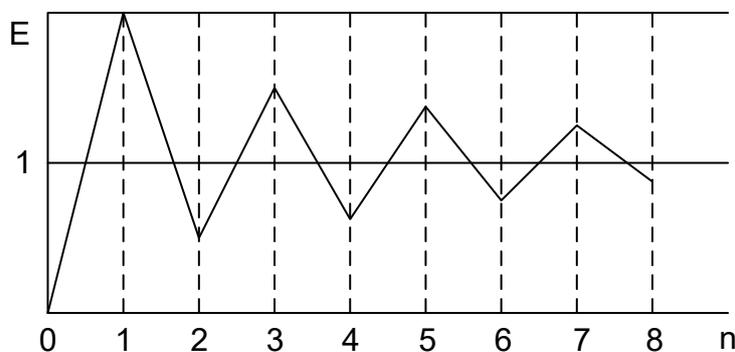


Рис. 6.5

Установим пространственную форму существенной области. Соотношение  $AC_nB = AC_{n-1}B + \frac{\lambda}{2} = (r'_0 + r''_0) + n \frac{\lambda}{2}$  должно выполняться при любом положении плоскости  $S_0$  вдоль линии  $AB$  (рис. 6.6.)

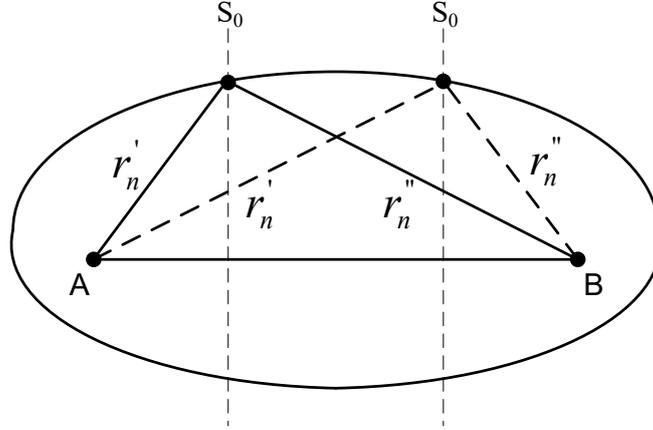


Рис. 6.6

Поэтому это выражение является уравнением эллипсоида вращения. Таким образом, существенная область является эллипсоидом вращения с фокусами в точках передачи и приема.

Внешний радиус  $n$ -й зоны Френеля  $r_n$  согласно рис. 6.7 и условию (6.1), а также с учетом того, что в реальных линиях  $(r'_n + r''_n) \gg \lambda/2$  находится в результате следующих преобразований:

$$\text{Из } \triangle AC_1O: (r'_1)^2 = (r'_0)^2 + \rho_1^2 = (r'_0)^2 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{(r'_0)^2}\right); r'_1 = r'_0 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{(r'_0)^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{из } \triangle BC_1O: (r''_1)^2 = (r''_0)^2 + \rho_1^2 = (r''_0)^2 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{(r''_0)^2}\right); r''_1 = r''_0 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{(r''_0)^2}\right)^{1/2},$$

где  $r'_1, r''_1 \gg \rho_1$ . Используя ряд Маклорена  $x \ll 1$ ,  $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \dots$ , и ограничиваясь двумя членами ряда, получим соотношения:

$$r'_1 = \sqrt{(r'_0)^2 + \rho_1^2} \simeq r'_0 + \rho_1^2 / (2r'_0);$$

$$r''_1 = \sqrt{(r''_0)^2 + \rho_1^2} \simeq r''_0 + \rho_1^2 / (2r''_0);$$

$$(r'_1 + r''_1) - (r'_0 + r''_0) = (\rho_1^2 / 2) \left(\frac{1}{r'_0} + \frac{1}{r''_0}\right) = \lambda / 2.$$

Из последнего выражения следует, что радиус первой зоны Френеля определяется формулой

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda r'_0 r''_0 / (r'_0 + r''_0)},$$

а для  $n$ -й зоны:

$$\rho_n = \sqrt{n\lambda r'_0 r''_0 / (r'_0 + r''_0)}. \quad (6.16)$$

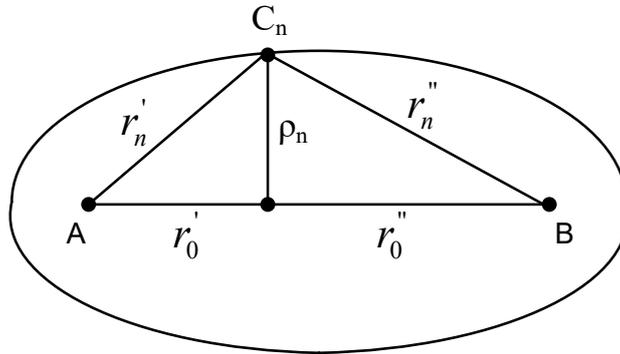


Рис. 6.7

Используя выражение (6.16), можно показать, что площади всех зон Френеля одинаковы:

$$S_\phi = \pi\lambda r'_0 r''_0 / (r'_0 + r''_0).$$

Максимальный радиус  $n$ -й зоны Френеля соответствует середине трассы, где  $r'_0 = r''_0 = r/2$ :

$$\rho_{n \text{ макс}} = \sqrt{n\lambda r} / 2. \quad (6.17)$$

Максимальный радиус существенного эллипсоида, ограниченного восемью зонами Френеля:

$$\rho_{8 \text{ макс}} = \frac{\sqrt{8\lambda r}}{2} = \sqrt{2\lambda r}.$$

#### 6.4. Электродинамические свойства земной поверхности и атмосферы Земли

Земной шар представляет собой тело почти сферической формы радиусом около 6 370 км. В большинстве радиолиний, исключая космические, приемные и передающие антенны приподняты над земной поверхностью на высоты, существенно меньшие радиуса Земли. В то же время длина трассы, т. е. расстояние между передатчиком и приемником, измеренное вдоль земной поверхности, может изменяться в очень широких пределах, колеблясь от нескольких километров (телевидение, ближняя радиосвязь) до нескольких тысяч километров (радиовещание, радионавигация).

По этой причине при расчете технических характеристик приземных радиоканалов используются различные модели формы земной поверхности. В простейшем случае короткой трассы кривизной поверхности Земли обычно пренебрегают и считают, что граница раздела этой поверхности с атмосферой является плоской. Если же длина трассы сравнима с радиусом Земли, то приходится учитывать реальную форму границы раздела, поскольку прямая видимость между начальной и конечной точками трассы отсутствует. Затеняющее действие земной поверхности приводит к известному явлению дифракции радиоволн, и, как следствие, принятая волна оказывается существенно ослабленной.

*Электродинамические параметры земной поверхности.* В земных условиях волны распространяются над той или иной подстилающей поверхностью (почва, скальный грунт, лес, пресная или морская вода, лед и т. д.). Все эти материальные среды являются практически немагнитными, и их относительная магнитная проницаемость  $\mu$  с достаточной для практики точностью может считаться равной единице. Основными параметрами материала подстилающей поверхности оказываются относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и удельная электрическая проводимость  $\sigma$ . Как показывают эксперименты, оба эти параметра подвержены частотной дисперсии, которая, однако, выражена достаточно слабо. В таблице приводятся числовые данные для наиболее распространенных сред применительно к частотам ниже 300 МГц. Нужно заметить, что подобные параметры, часто встречающиеся в литературе по распространению радиоволн и по радиолокации, описывают усредненные характеристики, получаемые на основе многочисленных измерений, проводимых в различных географических и метеорологических условиях.

Среда	Относительная диэлектрическая проницаемость	Удельная электрическая проводимость, см/м
Морская вода	75	1 – 6
Пресная вода	80	$10^{-2} - 3 \times 10^{-2}$
Влажная почва	20 – 30	$2 \times 10^{-2} - 0,1$
Сухая почва	3 – 5	$10^{-5} - 2 \times 10^{-3}$
Лед	4 – 5	$10^{-2} - 0,10^{-2} - 0,1$
Снег	1,2	$10^{-6}$
Лес	1,04	$10^{-8}$

Достоверность таких цифр применительно к отдельно взятому эксперименту не слишком высока и дает возможность проводить лишь ориентировочные расчеты, которые тем не менее во многих случаях удовлетворяют практическим запросам. Обобщающей числовой характеристикой немагнитной материальной среды с омическими потерями служит комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon\epsilon_0 - j\sigma/\omega. \quad (6.18)$$

Вещественная часть этого комплексного числа пропорциональна суммарной плотности тока смещения и тока поляризации, в то время как мнимая часть характеризует объемную плотность токов проводимости. Можно заметить, что с понижением рабочей частоты относительная доля токов проводимости непрерывно возрастает, и при  $\omega \rightarrow 0$  материальная среда с потерями становится металлоподобной. Таким образом, на волнах длинноволнового и средневолнового диапазонов сухая почва может рассматриваться как металлоподобная среда с потерями. Еще в большей степени это относится к такой распространенной подстилающей поверхности, как морская вода. Приблизительно при расчете радиолиний низкочастотных диапазонов с частотами менее 1 МГц земную поверхность можно считать идеально проводящей, что существенно упрощает решение любых задач о распространении радиоволн. С ростом рабочей частоты омические потери начинают сказываться все в большей степени. Это обстоятельство приводит к дополнительному ослаблению радиоволн. В диапазоне УКВ большинство материальных сред, из которых сложена земная поверхность, могут рассматриваться как несовершенные диэлектрики, у которых действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости существенно превосходит мнимую часть.

*Атмосфера Земли и ее строение.* Химический состав земной атмосферы в настоящее время изучен весьма тщательно. Атмосфера Земли представляет собой смесь молекулярного азота G (8 %) и молекулярного кислорода В (1 %). На долю прочих компонентов, главным образом водяного пара и некоторых инертных газов, приходится лишь 1 %. Физические параметры атмосферы Земли весьма сильно зависят от высоты. По этой причине общепринято рассматривать атмосферу как объединение двух областей: нижней атмосферы (области с высотами от нуля до 60 км) и верхней атмосферы, которая располагается в интервале

высот от 60 до 20 000 км. В свою очередь нижняя атмосфера делится на тропосферу (высоты до 15 км) и стратосферу (высоты от 15 до 60 км). Физические процессы в тропосфере и стратосфере определяют погодные и климатические явления на Земле. Они связаны с интенсивным массо- и теплообменом, а также переносом больших воздушных масс.

Верхняя атмосфера Земли, чаще называемая ионосферой, подвергается интенсивному облучению Солнца и других космических источников. За счет этого происходит ионизация атомов газов, что существенным образом влияет на характер распространения радиоволн в ионосфере. Следует заметить, что деление атмосферы на различные области носит условный характер и проводится лишь с тем, чтобы упростить раздельное изучение физических явлений. Какие-либо четко очерченные границы между областями атмосферы отсутствуют. Атмосфера удерживается за счет действия гравитационного поля Земли. Внутри атмосферы существует гидростатическое давление  $p$ , которое в средних широтах на уровне Мирового океана составляет около 0,1 МПа. С увеличением высоты давление воздуха в тропосфере падает приблизительно по линейному закону со скоростью 12 кПа/км. В ионосфере давление воздуха с ростом высоты падает по экспоненциальному закону, т. е. еще более резко.

Вторым физическим параметром атмосферного воздуха служит его абсолютная температура  $T$ . Измерения показывают, что температура воздуха на поверхности Земли составляет в среднем 300 К. При увеличении высоты температура меняется по сложному немонотонному закону, падая до 200 К на верхней границе стратосферы. В ионосфере температура газа непрерывно растет, достигая 1200 К на высотах порядка 1000 км. Зная параметры  $p$  и  $T$ , можно рассчитать электронную концентрацию молекул газа  $N_M$  по высоте, воспользовавшись формулой из курса физики:

$$N_M = p/(kT), \quad (6.19)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Задав, например,  $p = 10^5$  Па,  $T = 300$  К, находим оценочное значение молекул на поверхности Земли:  $N_M = 2,41 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} = 2,41 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Важную роль в формировании условий распространения радиоволн играет ионосфера Земли.

Плотность газа в ионосфере очень мала, поэтому жесткое электромагнитное излучение Солнца (в основном ультрафиолетовое и рентгеновское) оказывается здесь весьма интенсивным. Энергия квантов этого излучения достаточна не только для диссоциации молекул, приводящей к образованию атомарных газов, но и для отрыва электронов от атомов. В результате ионизации части атомов газ превращается в хаотическую смесь ионов, свободных электронов, нейтральных атомов, а также нейтральных молекул, не претерпевших диссоциации. Фотохимический процесс ионизации в плазме является обратимым: наряду с ним постоянно идет процесс рекомбинации ионов и свободных электронов, приводящий к возникновению нейтральных атомов газа. В стационарных условиях между процессами ионизации и рекомбинации устанавливается динамическое равновесие, уровень которого определяется главным образом интенсивностью ионизирующего излучения.

Важнейшим физическим параметром ионизированной газовой среды служит электронная концентрация  $N_e$ , определяющая число свободных электронов в единице объема. Характерные графики распределения электронной концентрации в зависимости от высоты  $h$  точки

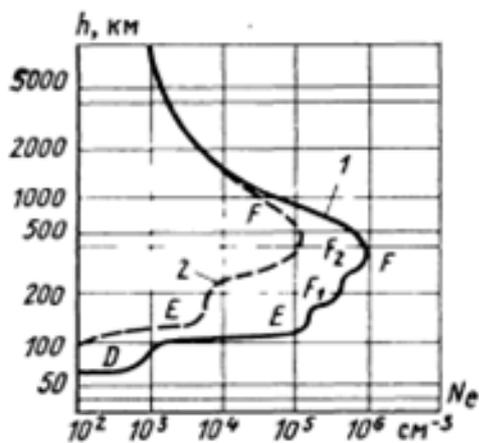


Рис. 6.8

наблюдения представлены на рис. 6.8. Одна из кривых 1 относится к дневным, а другая 2 – к ночным часам. Принципиально важно, что обе кривые имеют немонотонный характер; на некоторой высоте значение  $N_e$  оказывается максимальным. Причина этого состоит в следующем. На больших высотах плотность потока солнечного излучения велика, однако атмосфера здесь разрежена и поэтому значения  $N_e$  сравнительно малы. Вблизи земной поверхности,

наоборот, плотность газа велика, однако поток ионизирующего излучения сильно ослаблен толщиной атмосферы, что также приводит к малым значениям электронной концентрации. В высотном профиле распределения электронной концентрации принято выделять ряд более или менее выраженных слоев, получивших специальные буквенные символы (рис. 6.8).

- Слой *D*. Так называют самый нижний слой ионосферы, лежащий на высотах от 60 до 90 км. Слой *D* существует только днем. Электронная

концентрация в нем изменяется во времени пропорционально угловой высоте Солнца над горизонтом и не превышает  $10^3 - 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Ночью этот слой исчезает под действием рекомбинации.

- Слой *E*. Располагается на высотах порядка 110 км. Днем значение  $N_e$  в данном слое достигает  $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ , а ночью падает до  $5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ .

- Слой *F*. Существует на высотах порядка 250 км днем и 320 км ночью. Данный слой характеризуется наивысшей электронной концентрацией, которая достигает  $2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$  в полуденные часы. Ночью значения  $N_e$  в слое *F* не превышают  $2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ . Днем слой *F* разделяется на два подслоя –  $F_1$  и  $F_2$ , которые ночью сливаются в единый слой.

Кривые, приведенные на рис. 6.8, имеют усредненный характер и могут существенно варьироваться в зависимости от выбора географических координат точки наблюдения. Кроме того, числовые значения электронной концентрации во всех ионосферных слоях существенным образом зависят от уровня солнечной активности, которая, в свою очередь, испытывает как регулярные изменения с периодом в 11 лет, так и случайные колебания. Имеется специальная международная служба, занимающаяся прогнозом состояния ионосферы. Использование таких прогнозов дает возможность существенно повысить надежность работы радиоканалов в земных условиях.

### 6.5. Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн

Концентрация молекул в тропосфере  $N_m$  падает при увеличении высоты. Это, в свою очередь, приводит к снижению диэлектрической проницаемости воздуха  $\epsilon$ , а значит, и его показателя преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Фактически показатель преломления воздуха в пределах тропосферы весьма мало отличается от единицы при любых условиях. Поэтому в инженерных расчетах для удобства применяют так называемый индекс преломления

$$N = (n - 1)10^6. \quad (6.20)$$

Это безразмерное число зависит от метеорологических условий и от выбора пункта наблюдения на поверхности Земли. В среднем значение  $N$  колеблется в пределах от 250 до 450.

При увеличении высоты  $h$  индекс преломления тропосферы падает практически по линейному закону со скоростью  $dN/dh = -40 \text{ км}^{-1}$ .

Формула справедлива в интервале высот, не превышающих нескольких километров.

Рассмотрим пример. Известно, что на уровне земной поверхности значение индекса преломления  $N_0 = 300$ . Используя выражение (6.20), определим относительную диэлектрическую проницаемость воздуха  $\epsilon$  на земле и на высоте  $h = 3$  км. Из выражения (6.20) следует  $\epsilon = (1 + (\frac{N}{10^6}))^2$ . Индекс преломления на высоте 3 км  $N = N_0 - (dN/dh)h = 300 - 40 \cdot 3 = 180$ . Подставляя соответствующие цифры, находим, что при  $h = 0$  км  $\epsilon = 1,0006$ , а при  $h = 3$  км  $\epsilon = 1,00036$ . Из примера следует, что абсолютные изменения оптической плотности атмосферного воздуха при увеличении высоты оказываются незначительными. В большинстве случаев они не оказывают существенного влияния на процесс распространения радиоволн, например, в радиовещательных каналах длинноволнового и средневолнового диапазонов. Однако существуют задачи, в которых важнейшей информацией служит угол прихода радиоволн, поступающих в приемную антенну, например, в высокоточной радиолокации. Здесь необходимо учитывать даже небольшое искривление луча из-за непостоянства коэффициента преломления атмосферного воздуха вдоль вертикальной координаты. Это явление получило название атмосферной рефракции. Соответствующий чертеж приведен на рис. 6.9. Слой неоднородного воздуха упрощенно представлен в виде двух соприкасающихся однородных слоев 1 и 2 с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , причем  $n_2 < n_1$ . Углы падения  $\varphi$  и преломления  $\psi$  связаны между собой формулой

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}, \quad (6.21)$$

из которой следует, что в рассматриваемом случае всегда  $\psi > \varphi$ , т. е. луч в неоднородной по высоте тропосфере искривляется в сторону зем-

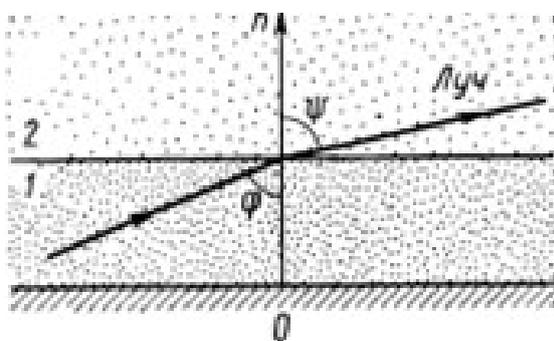


Рис. 6.9

ной поверхности. Сказанное проиллюстрируем примером. Оценим эффект атмосферной рефракции для конкретных условий, описанных в предыдущем примере.

Неоднородный слой заменим двумя однородными слоями с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1 = 1,0006$  и  $\epsilon_2 = 1,00036$ . Положим

угол падения  $\varphi = 70^\circ$ . Используя найденные в предыдущем примере значения индексов преломления  $N_0 = 300$  и  $N = 180$ , найдем показатели преломления обоих слоев по формуле  $n = N \cdot 10^{-6} + 1$ , откуда  $n_1 = 1,0003$  и  $n_2 = 1,00018$ . Подставив эти результаты в формулу (6.21), находим угол преломления  $\psi = \arcsin\left(\frac{\sin 70^\circ}{0,99958}\right) = 70^\circ 4'$ .

Таким образом, искривление траектории луча под действием атмосферной рефракции оказывается небольшим. Однако если путь, проходимый волной в тропосфере, достаточно протяжен и составляет, скажем, 10 км, то угловая ошибка в 4' или  $1,16 \cdot 10^{-3}$  рад приведет к погрешности в определении координаты цели по поперечной координате около 11 м. В ряде случаев такая ошибка может оказаться существенной. Следует также иметь в виду, что атмосферная рефракция рассматривалась в стандартных условиях. Если же под действием метеорологических факторов возникают большие градиенты температуры и плотности воздуха, то эффект рефракции может существенно возрасти.

Обратимся к вопросу о затухании радиоволн в тропосфере. Эксперименты показывают, что на частотах ниже 1000 МГц затухание в чистом воздухе пренебрежимо мало. На более высоких частотах начинает сказываться резонансное поглощение радиоволн молекулами тех газов, из которых состоит атмосфера. Особенно сильно этот эффект проявляется в коротковолновой части сантиметрового и в миллиметровом диапазонах. На рис. 6.10 приведены кривые, описывающие вклады в общее затухание двух наиболее существенных компонентов – молекулярного кислорода  $O_2$  и водяного пара  $H_2O$ .

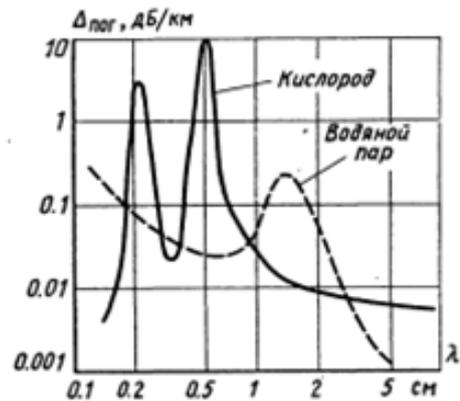


Рис. 6.10

Особенно ярко выраженными оказываются резонансные пики поглощения в кислороде на длине волны 5 мм и в водяном паре на длине волны 12,5 мм. Существуют и «окна прозрачности» атмосферы, например, в окрестности длины волны  $\lambda = 8$  мм.

Наконец, необходимо указать на тот вклад в ослабление радиоволн СВЧ-диапазона, который могут вносить туман и атмосферные осадки. Особенно сильно их влияние проявляется на волнах короче 3 см.

Здесь дополнительное ослабление из-за сильного дождя может достигать 1 дБ/км и даже более. Это обстоятельство серьезно осложняет работу систем ближней радиолокации, а также лимитирует наивысшие частоты, применяемые в радиорелейных линиях связи. Что же касается наземных лазерных линий связи оптического диапазона, то для них потери энергии сигнала из-за рассеяния на водяных каплях служат основным фактором, лимитирующим дальность связи.

*Отражение радиоволн от ионосферных слоев.* Как известно, бесстолкновительная плазма представляет собой диспергирующую среду, показатель преломления которой зависит от частоты поля  $f$  и записывается в виде

$$n = \sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f)^2}, \quad (6.22)$$

где  $f_{\text{пл}} = 8,98\sqrt{N_{\text{в}}}$  – плазменная частота, Гц; электронная концентрация  $N_{\text{в}}$  имеет размерность  $\text{м}^{-3}$ . Предположим, что плоская электромагнитная волна падает из вакуума по направлению нормали на однородную полубесконечную плазменную среду. Характеристическое сопротивление плазмы

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f)^2}} \quad (6.23)$$

обращается в бесконечность при  $f = f_{\text{пл}}$ ; на частотах, превышающих плазменную частоту, это сопротивление действительно, а при  $f < f_{\text{пл}}$  характеристическое сопротивление плазмы оказывается чисто мнимым. Если записать коэффициент отражения от границы раздела плазма – воздух в виде

$$R = (Z_c - Z_0)/(Z_c + Z_0) = 1 - \sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f)^2}/1 + \sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f)^2}, \quad (6.24)$$

то можно заметить, что величина  $|R|$  равна единице при  $f = f_{\text{пл}}$ . Это равенство сохраняется и на всех частотах, более низких, чем плазменная, т. е. в условиях непрозрачности плазмы для радиоволн.

Итак, полубесконечный плазменный слой полностью отражает все электромагнитные волны, частоты которых не превосходят критической частоты  $f_{\text{кр}}$ , численно совпадающей с плазменной частотой  $f_{\text{пл}}$ . Как уже говорилось, наибольшая электронная концентрация наблюдается в слое  $F$  ионосферы. Если принять, что для этого слоя

$N_{в\ макс} = 2 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$  в дневные часы и  $N_{в\ макс} = 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$  ночью, то значение частоты  $f_{кр}$  составит 12,7 МГц днем и 4 МГц ночью.

Рассмотрим теперь падение плоской волны на полубесконечную бесстолкновительную плазму под произвольным углом  $\varphi$ , который отсчитывается от направления нормали к границе раздела плазма – воздух. В общем случае в плазме будет возникать преломленная волна; угол преломления  $\psi$  может быть найден из закона Снеллиуса

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n = \sqrt{1 - (f_{пл}/f)^2}. \quad (6.25)$$

Если  $f < f_{пл}$ , то правая часть равенства (6.25) оказывается мнимой, а это, в свою очередь, означает, что угол преломления  $\psi$  становится комплексным. Вся мощность падающей волны при этом отражается от границы раздела назад в воздушную среду.

Если  $f > f_{пл}$ , т. е. плазма прозрачна для электромагнитных волн, то преломленная волна в плазме принципиально может существовать. Однако здесь следует учитывать, что показатель преломления плазмы  $n$  является действительным числом, но всегда меньше единицы. Поэтому в данном случае  $\psi > \varphi$  и возможно явление полного внутреннего отражения, когда  $\psi = 90^\circ$ , так что преломленная волна перестает быть обычной однородной плоской волной. Критическим углом падения  $\varphi_{кр}$  плоской волны на однородный плазменный слой называют такой угол падения  $\varphi$ , при котором возникает полное внутреннее отражение от границы раздела (рис. 6.11). В соответствии с формулой (6.25)

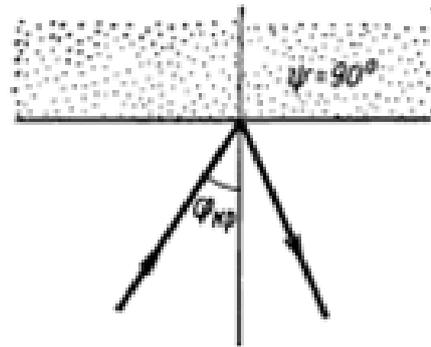


Рис. 6.11

$$\varphi_{кр} = \arcsin\sqrt{1 - (f_{пл}/f)^2}. \quad (6.26)$$

Если  $\varphi \geq \varphi_{кр}$ , то падающая из воздуха плоская волна целиком отражается от полубесконечного плазменного слоя; если же  $\varphi < \varphi_{кр}$ , то падающая волна частично преломляется внутрь плазмы. Пусть плоская волна падает на слой  $E$  ионосферы с электронной концентрацией  $N_{в} = 10^{11} \text{ м}$  под углом  $\varphi = 60^\circ$ . Определим наибольшее значение частоты  $f_{макс}$ , при котором еще наблюдается полное отражение от слоя. Для данного ионосферного слоя плазменная частота

$f_{\text{пл}} = 8,98\sqrt{N_B} = 2,84 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 2,84 \text{ МГц}$ . Заданный угол падения станет критическим на частоте  $f$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \sqrt{1 - (2,84 \cdot 10^6 / f_{\text{макс}})^2}.$$

Решив это уравнение, получим  $f_{\text{макс}} = 5,68 \text{ МГц}$ . Заметим еще раз, что при наклонном падении плазменный слой способен отражать колебания более высоких частот по сравнению с теми, которые полностью отражаются при нормальном падении.

Пусть ионосферный слой  $F$  с концентрацией электронов  $N_B = 10^{12} \text{ м}^{-3}$  располагается на высоте  $h = 400 \text{ км}$  от поверхности Земли. Найдем наивысшее значение частоты поля  $f_{\text{макс}}$ , которое еще обеспечивает полное отражение электромагнитной волны от этого слоя. Из рис. 6.12 следует, что угол падения волны на слой  $F$  будет наибольшим в том случае, когда луч падающей волны  $AC$  направлен по касательной к земной поверхности, проведенной в точке  $A$ , где размещен передатчик. Так как  $OA = OB = 6370 \text{ км}$  (радиус Земли),  $BC = h = 400 \text{ км}$  (высота слоя  $F$ ), а треугольник  $OAC$  прямоугольный, то

$$\sin \varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{6370}{6770} = 0,941, \text{ откуда } \varphi = 70^\circ.$$

Плазменная частота слоя  $f_{\text{пл}} = 8,98 \text{ МГц}$ , поэтому искомая частота есть корень уравнения  $\sqrt{1 - (8,98 \cdot 10^6 / f_{\text{макс}})^2} = 0,941$ , из которого находим, что  $f_{\text{макс}} = 27 \text{ МГц}$ . Все волны с более высокими частотами ни при каких условиях не смогут отражаться от ионосферы. Итак, ионосфера Земли представляет собой природное «зеркало», полностью возвращающее в приземное пространство все радиоволны с частотами ниже 15 – 20 МГц. Отражение радиоволн от ионосферы было теоретически предсказано в 20-х годах XX в. Хевисайдом и Кенелли. Практическое использование этого явления дало возможность в последующие десятилетия широко развить сети радиовещания и радиосвязи.



Рис. 6.12

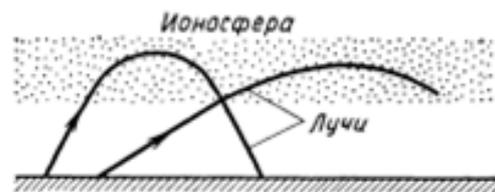


Рис. 6.13

В заключение следует отметить, что использованная модель ионосферного отражения, в рамках которой реальный ионизированный слой с плавным изменением электронной концентрации условно заменяется полубесконечной однородной плазменной средой, считается весьма упрощенной. На самом деле траектории лучей в ионосфере выглядят приблизительно так, как это показано на рис. 6.13, т. е. представляют собой гладкие кривые. Процесс распространения радиоволн в ионосфере сопровождается затуханием из-за соударений электронов с нейтральными атомами и молекулами. Если длина ионосферного участка трассы распространения радиоволн оказывается значительной, то дополнительный вклад в общее затухание может составить единицы и даже десятки децибел.

### **6.6. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов**

Рассмотрим особенности построения радиолиний различных диапазонов, связанные со специфическими условиями распространения радиоволн различных частот.

**Распространение сверхдлинных волн.** Сверхдлинные (мириаметровые) волны имеют частоты менее 30 кГц. В этом диапазоне практически любые природные среды, образующие подстилающую поверхность, хорошо отражают радиоволны, приближаясь по своим свойствам к идеальному проводнику. С другой стороны, сравнительно низкая частота колебаний обуславливает практически полное отражение сверхдлинных волн даже от самых нижних, наименее плотных ионосферных слоев *D* и *E*. В результате эти волны распространяются в сферическом приземном «волноводе» Земля – ионосфера. При современной технике генерирования и приема радиоволн дальность сверхдлинноволновых радиолиний может составлять несколько тысяч километров.

Распространение сверхдлинных волн выгодно отличается постоянством уровня сигнала в разное время суток и в различные сезоны года. Из-за весьма большой длины волны глубина поверхностного слоя в почве и морской воде составляет десятки метров, что позволяет создавать системы подземной и подводной радиосвязи. Однако передающие антенны рассматриваемого диапазона получаются громоздкими, и, что самое главное, из-за низкого значения несущей частоты здесь не удастся осуществить модуляцию достаточно высокими частотами. Как

следствие, подобные радиоканалы имеют очень малую скорость передачи информации и пригодны в основном для работы в телеграфном режиме. Основная область применения сверхдлинных волн – создание систем устойчивой дальней навигации для вождения кораблей и самолетов.

**Распространение длинных волн.** Условия распространения длинных (километровых) волн приближаются к тем, которые были описаны выше применительно к сверхдлинным волнам. Сравнительно низкая частота длинных волн приводит к тому, что они хорошо отражаются ионосферой как в дневные, так и в ночные часы. С этим обстоятельством связана высокая устойчивость работы длинноволновых радиоканалов. Структура электромагнитного поля длинноволнового диапазона в приземном пространстве на расстояниях в несколько сотен километров от передатчика оказывается весьма сложной, так как одновременно существуют земная (поверхностная) и ионосферная (пространственная) волны, которые складываются друг с другом. Распространение длинных волн сопровождается потерями за счет конечной проводимости подстилающей поверхности, а также за счет дифракции. Для расчета напряженности поля в длинноволновом диапазоне пользуются эмпирической формулой Остина, согласно которой множитель ослабления имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{0.0014r}{\lambda^{0.6}}\right), \quad (6.27)$$

где расстояние  $r$  и длина волны  $\lambda$  выражены в километрах. Данная формула была получена еще в 20-х годах XX в. на основе статистической обработки данных о работе радиовещательных каналов длинноволнового диапазона. Добавочное ослабление поля порой оказывается значительным. Так, если  $r = 5000$  км и  $\lambda = 2$  км, то  $F = 0,005$ . Основные области применения длинных волн – радиовещание, служебная телеграфная связь и навигация. Большой недостаток длинноволнового диапазона – его относительная узкополосность. Здесь полная ширина всего диапазона частот не превышает 270 кГц. Это обстоятельство ограничивает число радиоканалов, способных одновременно работать в длинноволновом диапазоне без взаимных помех.

**Распространение средних волн.** Условия распространения средних (гектометровых) волн оказываются различными в дневные и ночные часы. Дело в том, что днем эти радиоволны сильно поглощаются в низколежащем слое  $D$  ионосферы. Поэтому они могут распространяться лишь в форме земных волн на сравнительно короткие расстояния

до 1000 км. Ночью слой  $D$  исчезает, и средние волны могут распространяться на несколько тысяч километров за счет отражения от ионосферных слоев  $E$  и  $F$ . Средние волны используют в основном для создания радиовещательных каналов.

Работа средневолновых радиоканалов осложняется так называемыми замираниями. Сущность этого явления заключается в следующем. Ионосферные слои всегда неоднородны, т. е. представляют собой хаотические чередования пространственных областей с повышенной и пониженной электронной концентрацией. Эти области перемещаются под действием сильных ветров, постоянно присутствующих на больших высотах. Если передающая антенна имеет невысокую направленность и излучает волны в широком интервале углов, то возможна ситуация, когда в точку приема одновременно приходят несколько лучей, отраженных от разных неоднородностей. Фазы приходящих сигналов случайны, поэтому при сложении колебаний возникают беспорядочные изменения амплитуды напряжения на входе приемника с характерным временным интервалом в десятки секунд. Глубина замираний может быть весьма значительной. Частично ликвидировать замирания удастся в том случае, если приемник имеет достаточный запас усиления до детектора и снабжен системой автоматической регулировки усиления (АРУ). Радикальным способом борьбы с замираниями служит прием на несколько одинаковых антенн, разнесенных в пространстве на несколько длин волн, с последующим сложением сигналов.

***Распространение коротких волн.*** Широкое применение коротких волн в практике радиосвязи и радиовещания обусловлено прежде всего тем, что в этом диапазоне удается создать передающие антенны приемлемых габаритов с достаточно высокой направленностью излучения. Это позволяет в полной мере использовать отражающие свойства ионосферного слоя Земли и осуществлять достаточно надежные радиоканалы протяженностью в несколько тысяч и даже десятков тысяч километров при весьма ограниченной мощности передатчика, порой составляющей лишь несколько ватт. Влияние земных волн в коротковолновом диапазоне, как правило, незначительно.

Проектирование радиолинии КВ-диапазона требует сведений о характере распределения электронной концентрации в ионосфере применительно к конкретному времени суток и к известным географическим координатам точек размещения передатчика и приемника. Пусть, например, требуется создать радиолинию между пунктами  $A$

и  $B$ , удаленными друг от друга на 1200 км. Так как длина трассы невелика по сравнению с длиной земного экватора, поверхность Земли в данном случае можно приближенно рассматривать как плоскость (рис. 6.14). Связь осуществляется в ночные часы.

В качестве отражателя используется ионосферный слой  $E$  с электронной концентрацией  $N_E = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$ , располагающийся на высоте  $h = 110 \text{ км}$ . Из рисунка следует, что точка отражения от ионосферы размещается посередине трассы.

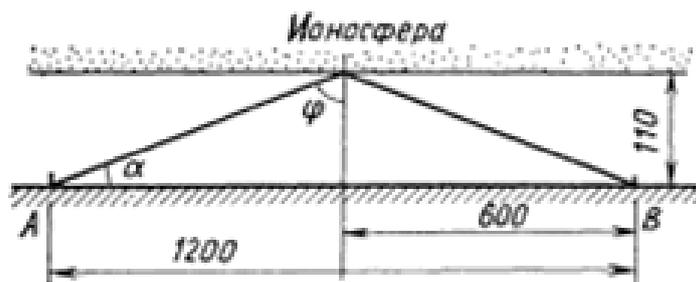


Рис. 6.14

Луч передатчика должен быть направлен под углом  $\alpha = \arctg(110/600) = 10^\circ$  по отношению к горизонту; при этом угол падения волны на слой  $\varphi = 80^\circ$ . Волны будут отражаться от ионосферы на частотах, не превышающих некоторого значения  $f_{\text{макс}}$ . Эта частота, называемая максимально применимой частотой (МПЧ), в соответствии с формулой

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n = \sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f)^2}$$

должна удовлетворять уравнению

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - (f_{\text{пл}}/f_{\text{макс}})^2},$$

откуда 
$$f_{\text{макс}} = \frac{f_{\text{пл}}}{\cos\varphi}. \quad (6.28)$$

В данном случае  $f_{\text{пл}} = 0,635 \text{ МГц}$  и, значит,  $f_{\text{макс}} = 3,52 \text{ МГц}$ . Фактически рабочая частота должна быть несколько ниже и составлять примерно 80 % от максимально применимой частоты. Связь между теми же пунктами  $A$  и  $B$  можно осуществить, используя отражение от более высокого и более плотного слоя  $F$ , который существует как днем, так и ночью. Для этого придется несколько увеличить угол  $\alpha$ , под которым волна излучается на передающем конце линии, а также взять большую рабочую частоту, чтобы расположенный ниже слой  $E$  оказался прозрачным для радиоволн. Однако, как правило, поглощение

волн в слое  $E$  достаточно интенсивное, так что общие потери в высокочастотном радиоканале могут оказаться выше, чем в низкочастотном. Практика показывает, что высокочастотный участок КВ-диапазона ( $\lambda = 15 \div 30$  м) целесообразно использовать в дневные часы. Для работы в ночное время более пригоден низкочастотный участок диапазона ( $\lambda = 40 \div 100$  м).

Важно отметить, что чисто ионосферный механизм распространения коротких волн приводит к тому, что лучи принципиально не могут попасть в точки земной поверхности, находящиеся примерно под областью отражения. Как следствие, электромагнитное поле здесь отсутствует. Такие участки вдоль трассы называют *зонами молчания*. Электромагнитные волны КВ-диапазона могут испытывать целый ряд скачков, т. е. последовательных отражений от ионосферы и от поверхности Земли. Это дает возможность существенно увеличивать протяженность канала, а при благоприятных условиях даже поддерживать радиосвязь между антиподами, т. е. корреспондентами, располагающимися на одной прямой, проходящей через центр Земли.

Отметим в заключение, что распространение волн КВ-диапазона на большие расстояния обычно сопровождается глубокими замираниями, которые серьезно осложняют работу радиоканалов и наряду с интенсивными помехами препятствуют высококачественному радиовещанию на волнах этого диапазона. Большие сложности возникают также из-за исключительно высокой плотности размещения передатчиков в этом участке спектра.

***Распространение ультракоротких волн.*** Электромагнитные волны с частотами выше 30 МГц практически не отражаются от ионосферных слоев в обычных условиях. С другой стороны, малость длины волны таких колебаний по сравнению с радиусом Земли приводит к тому, что дифракционные эффекты в этих диапазонах выражены слабо. Если приемная антенна размещается ниже уровня горизонта, т. е. попадает в область геометрической «тени», то поле в точке приема будет, как правило, весьма слабым. Поэтому радиолинии УКВ работают обычно в условиях прямой видимости. Эти условия естественно выполняются в космических линиях связи. Если же приемник и передатчик размещены вблизи земной поверхности, то факторами, ограничивающими протяженность УКВ-радиолинии, служат высоты подъема антенн над землей.

На рис. 6.15 условно изображены антенны, приподнятые над земной поверхностью на высоты  $h_1$  и  $h_2$ . Предельно возможная длина трассы распространения с прямой видимостью будет получена в том случае, когда луч  $AB$  касается поверхности Земли в точке  $C$ . Примем во внимание, что  $OC = R_3 = 6\,370$  км, а также то, что обычно  $h_1/R_3 \ll 1$ ,  $h_2/R_3 \ll 1$ . Тогда максимальная длина трассы

$$L = AC + CB = \sqrt{(R_3 + h_1)^2 - R_3^2} + \sqrt{(R_3 + h_2)^2 - R_3^2}.$$

Пренебрегая квадратами малых величин, получим

$$L \approx 2\sqrt{R_3}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) = 5,05 \cdot 10^3(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (6.29)$$

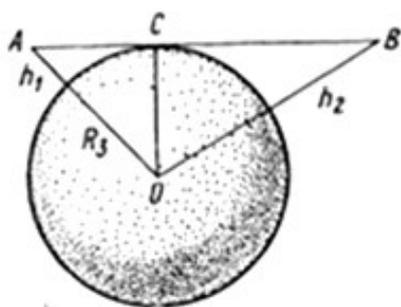


Рис. 6.15

Все входящие сюда величины выражены в метрах. Рассмотрим, например, УКВ-радиолинию между диспетчерской службой аэропорта и командиром воздушного лайнера. Пусть  $h_1 = 50$  м – высота антенны аэропорта,  $h_2 = 10\,000$  м – высота полета самолета. В соответствии с формулой (6.29) предельная длина трассы с прямой видимостью  $L = 540$  км, что обычно вполне

достаточно для оперативного управления воздушным движением в зоне аэропорта. Фактически длина трассы даже несколько больше из-за атмосферной рефракции радиоволн. Если направленные свойства применяемых антенн недостаточно совершенны, то часть энергии излучается передающей антенной по направлению к земной поверхности, отражается от нее и попадает на вход приемника наряду с энергией прямой волны. Описанное явление представляет собой интерференцию падающей и отраженной волн, которая может оказывать существенное влияние на работу радиолинии УКВ-диапазона. На рис. 6.16 схематически изображена подобная радиолиния с передатчиком в точке  $A$  и приемником в точке  $B$ .

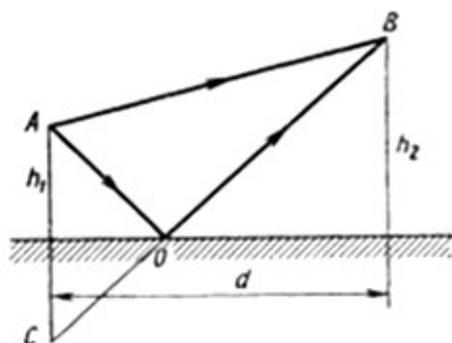


Рис. 6.16

Геометрическая длина пути отраженной волны равна сумме длин отрезков  $AO$  и  $OB$ . Из построения видно, что эта сумма равна длине отрезка  $CB$ , соединяющего «зеркальное изображение» передающей антенны с точкой размещения приемной антенны. Если  $d$  – длина трассы, измеренная вдоль земной поверхности, то

$$AB = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}; \quad CB = \sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2}.$$

Разность геометрических длин двух путей

$$\delta = CB - AB = d \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{h_2+h_1}{d}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{h_2-h_1}{d}\right)^2} \right]. \quad (6.30)$$

Обычно  $h_1/d \ll 1$ ;  $h_2/d \ll 1$ , т. е. относительные высоты подъема антенн невелики, поэтому можно воспользоваться приближенным равенством  $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ , справедливым при  $x \ll 1$ , с учетом которого формулу (6.30) можно представить следующим образом:

$$\delta \approx 2h_1h_2/d. \quad (6.31)$$

Предположим, что передающая антенна излучает волны с одной и той же интенсивностью по всем направлениям. Тогда в точке приема амплитуды волн, обусловленных прямой и отраженной волнами, будут одинаковыми. Фазы этих колебаний окажутся различными: во-первых, при достаточно наклонном падении на земную поверхность фаза отраженного колебания получит дополнительный сдвиг на угол, близкий к  $180^\circ$ ; во-вторых, отраженный луч длиннее прямого луча на величину, которая устанавливается формулой (6.30). В результате комплексная амплитуда сигнала на входе приемной антенны приобретает вид

$$E = \dot{E}_0 \left[ 1 - \exp(-j \frac{2\beta h_1 h_2}{d}) \right], \quad (6.32)$$

где  $\dot{E}_0$  – некоторая амплитуда, относящаяся к прямому лучу;  $\beta = 2\pi/\lambda$  – фазовая постоянная плоской волны в свободном пространстве.

Величину  $V$ , определяемую соотношением

$$V = 1 - \exp(-j \frac{2\beta h_1 h_2}{d}), \quad (6.33)$$

называют интерференционным множителем. Амплитуда сигнала на входе приемника пропорциональна модулю этого комплексного числа

$$|V| = \left\{ \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\beta h_1 h_2}{d}\right) \right]^2 + \sin^2\left(\frac{2\beta h_1 h_2}{d}\right) \right\}^{1/2} = 2 \left| \sin \frac{\beta h_1 h_2}{d} \right|. \quad (6.34)$$

Данное равенство представляет собой интерференционную формулу для расчета УКВ-радиолинии, полученную Б. А. Введенским. Как следует из выражения (6.34), если изменять высоту приемной антенны  $h_2$ , оставив другие параметры системы неизменными, то амплитуда принимаемого сигнала будет изменяться по немонотонному закону. В частности, если  $\beta h_1 h_2/d = \pi$ , то отраженный луч «гасит» прямой и сигнал на входе приемника исчезает. Чтобы бороться с интерференционными явлениями, следует сужать диаграммы направленности применяемых антенн.

В УКВ-диапазоне нашел практическое применение механизм дальнего распространения, получивший название *тропосферного рассеяния*, схематично приведенный на рис. 6.17, где 1 – передатчик, 2 – приемник, 3 – рассеивающий объем.

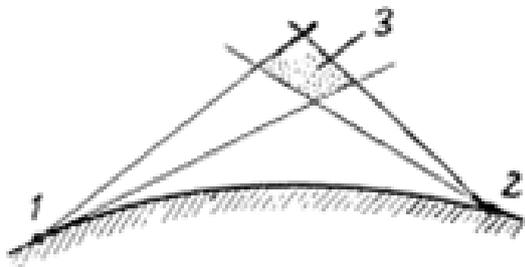


Рис. 6.17

Здесь для создания поля в точке приема, находящейся глубоко за горизонтом, используется рассеяние падающей волны на турбулентных неоднородностях тропосферы, которые всегда присутствуют на высотах 10 – 20 км. Этот способ связи требует применения остронаправленных антенн и передатчиков значительной мощности

(от единиц до сотен киловатт). Однако в большинстве случаев тропосферные линии дальней УКВ-связи экономически выгодны, так как не требуют никаких промежуточных сооружений вдоль трассы.

Используются также линии связи на УКВ с рассеянием от метеорных следов, время от времени возникающих в атмосфере на высотах 60 – 100 км. Эти высокоионизированные плазменные образования существуют всего несколько секунд, но имеют большую отражательную способность и дают возможность отдельными «порциями» передавать значительные объемы цифровой информации на расстояния в несколько сотен километров.

Отметим в заключение, что волны УКВ-диапазона часто используются для организации связи между подвижными объектами, например между автомобилями в условиях больших городов. Условия распространения волн оказываются здесь весьма сложными из-за дифракции на местных предметах. Расчет и проектирование таких радиолиний ведется на основе сбора статистической информации об условиях приема радиосигналов в различных условиях.

### Темы для закрепления материала

1. Классификация диапазонов радиоволн.
2. Тенденция к освоению высокочастотных диапазонов и ее причины.
3. Распространение радиоволн в свободном пространстве.
4. Напряженность поля вблизи приемной антенны, мощность сигнала на входе приемного устройства в условиях свободного пространства.

5. Форма и размеры области пространства, существенно участвующей в формировании поля на заданной линии.
6. Электродинамические параметры земной поверхности.
7. Атмосфера Земли и ее строение.
8. Влияние тропосферы на распространение радиоволн.
9. Влияние ионосферы на распространение радиоволн.
10. Распространение сверхдлинных волн.
11. Распространение длинных волн.
12. Распространение средних волн.
13. Распространение коротких волн.
14. Распространение ультракоротких волн.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Подводя итог рассмотренных в учебном пособии основных положений и аналитических методов теории электромагнитного поля и задач электродинамики, можно выделить главную цель дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн». Она состоит в систематическом анализе и разработке математических моделей волновых процессов для научно-технических направлений в радиотехнике и радиоэлектронике. Основой таких моделей является система уравнений Максвелла, решение которых исключительно широко и многообразно по физическому содержанию для различных источников возбуждения в разных начальных и граничных условиях.

Тематика и объем материала дисциплины рассматриваются в пособии в рамках классической электродинамики, в которой постулируются основные понятия и методы которой справедливы в условиях, когда скорости движущихся тел значительно меньше скорости света.

Студенты, освоившие материал, представленный в пособии, убеждаются в том, что электромагнитные процессы, рассматриваемые в радиотехнических задачах, происходят в полном соответствии с теорией Максвелла. Важным также следует считать освоение терминологии, которой пользуются специалисты в области волновых процессов.

В настоящее время принципы классической электродинамики пришли на смену методологии традиционной теории цепей. Влияние методов волновой теории, характерной для электродинамики и техники СВЧ, все больше проявляется при конструировании матричных сигнальных процессов, которые становятся важнейшей для радиотехники разновидностью сверхбольших интегральных схем.

## РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основная литература

1. Кураев, А. А. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / А. А. Кураев, Т. Л. Попкова, А. К. Сеницын. – М. : ИНФРА-М : Нов. знание, 2013. – 424 с. – ISBN 978-5-16-006211-2.
2. Будагян, И. Ф. Электродинамика : учеб. пособие / И. Ф. Будагян, А. С. Сигов, В. Ф. Дубровин. – М. : Альфа-М, 2018. – 288 с. – ISBN 978-5-98281-329-9.
3. Баскаков, С. И. Электродинамика и распространение радиоволн / С. И. Баскаков. – М. : Либроком, 2017. – 416 с. – ISBN 978-5-397-05574-1.
4. Нефедов, Е. И. Техническая электродинамика : учеб. пособие / Е. И. Нефедов. – М. : Academia, 2015. – 448 с. – ISBN 978-5-7695-4079-0.
5. Муромцев, Д. Ю. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / Д. Ю. Муромцев, Ю. Т. Зырянов. – СПб. : Лань, 2014. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-1637-0.
6. Юндин, М. А. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / М. А. Юндин, А. М. Королев. – СПб. : Лань, 2014. – 448 с. – ISBN 978-5-7996-3137-6.
7. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Либроком, 2016. – 352 с. – ISBN 978-5-397-04359-5.

### Дополнительная литература

1. Петров, Б. М. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. для вузов / Б. М. Петров. – М. : Горячая линия-Телеком, 2014. – 558 с. – ISBN 5-93517-073-6.
2. Каликинский, И. И. Электродинамика : учеб. пособие / И. И. Каликинский. – М. : Инфра-М, 2016. – 608 с. – ISBN 978-5-16-006771-1.
3. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Либроком, 2017. – 544 с. – ISBN 978-5-9710-4654-7.
4. Евдокимов, Ю. К. LabVIEW для радиоинженера: от виртуальной модели до реального прибора / Ю. К. Евдокимов, В. Р. Линдваль, Г. И. Щербаков. – М. : Пресс, 2012. – 400 с. – ISBN 5-94074-346-3.
5. Ампер, А. М. Электродинамика: Избранные работы : пер. с фр. / А. М. Ампер. – М. : Ленанд, 2015. – 496 с. – ISBN 978-5-9710-7046-7.

*Учебное электронное издание*

ГАВРИЛОВ Валериан Михайлович  
КОРНЕЕВА Наталья Николаевна

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина  
Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов  
Компьютерная верстка Д. В. Лавровой  
Корректор Н. В. Пустовойтова  
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

**Системные требования:** Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10;  
Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

**Тираж 9 экз.**

Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
Изд-во ВлГУ  
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и радиоэлектроники  
кафедра радиотехники и радиосистем  
korneevanata@list.ru