

Владимирский государственный университет

С. В. ТИХОМИРОВА

**АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ**

Учебно-методическое пособие

Владимир 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Учебно-методическое пособие



Владимир 2024

УДК 372.581(0758)

ББК 74.262.21я73

Т46

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Тихомирова, С. В.

Актуальные вопросы методики преподавания математики
Т46 в начальной школе : учеб.-метод. пособие / С. В. Тихомирова ;
Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир :
Изд-во ВлГУ, 2024. – 152 с. – ISBN 978-5-9984-1978-2.

Содержит материал по методике преподавания математики, необходимый для подготовки учителей начальной школы. Представлены арифметические действия с целыми неотрицательными числами, алгебраический и геометрический материал начальной математики; акцентировано внимание на логических приемах мышления младшего школьника. Приведены вопросы и задания для самоподготовки, предложены темы проектных исследований, а также курсовых и выпускных квалификационных работ.

Предназначено для студентов вузов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (профиль «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе») всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 2. Библиогр.: 13 назв.

УДК 372.581(0758)

ББК 74.262.21я73

ISBN 978-5-9984-1978-2

© ВлГУ, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Глава 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ	7
1.1. Общие вопросы методики изучения арифметических действий.....	7
1.2. Смысл действий сложения и вычитания.....	10
1.3. Методика изучения сложения и вычитания в пределах десяти	15
1.4. Методика изучения сложения и вычитания однозначных чисел с переходом через разряд	18
1.5. Методика изучения сложения и вычитания в пределах ста.....	23
1.6. Методика изучения сложения и вычитания трехзначных чисел.....	26
1.7. Методика изучения сложения и вычитания многозначных чисел.....	30
1.8. Свойства сложения чисел	34
1.9. Смысл действия умножения. Методика изучения умножения	38
1.10. Свойства умножения	43
1.11. Смысл действия деления. Методика изучения деления.....	48
1.12. Деление суммы на число	55
1.13. Порядок выполнения действий в выражениях	57
1.14. Деление с остатком	59
1.15. Алгоритмы выполнения арифметических действий.....	67
<i>Практические задания по теме «Методика изучения арифметических действий в начальной школе»</i>	<i>75</i>
<i>Рейтинг-контроль по теме «Методика изучения арифметических действий в начальной школе»</i>	<i>78</i>
Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ.....	82

2.1. Методические основы изучения алгебраического материала.....	82
2.2. Методика изучения числовых выражений	87
2.3. Методика изучения тождественных преобразований.....	90
2.4. Методика изучения буквенных выражений.....	91
2.5. Методика изучения равенств и неравенств.....	92
2.6. Методика изучения уравнений в начальных классах.....	94
2.7. Методические основы изучения геометрического материала.....	105
<i>Вопросы для обсуждения по теме «Методико-математические основы изучения алгебраического материала»</i>	<i>118</i>
<i>Вопросы для обсуждения по теме «Методико-процессуальные основы изучения алгебраического материала»</i>	<i>118</i>
<i>Практические задания по теме «Методико-математические основы изучения геометрического материала»</i>	<i>119</i>
<i>Практические задания по теме «Методико-процессуальные основы изучения геометрического материала»</i>	<i>119</i>
<i>Рейтинг-контроль по теме «Методика изучения алгебраического и геометрического материала в начальной школе».....</i>	<i>121</i>
 Глава 3. РАЗВИТИЕ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ	 125
3.1. Об учебной деятельности	125
3.2. Приемы умственной деятельности	127
3.2. Взаимосвязь логического и алгоритмического мышления младшего школьника	137
<i>Рейтинг-контроль по теме «Развитие мышления младших школьников в процессе изучения математики».....</i>	<i>139</i>
 ТЕМЫ ПРОЕКТОВ, КУРСОВЫХ И ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ РАБОТ.....	 145
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	 149
 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	 150

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие составлено для подготовки будущих учителей начальной школы. Часть вопросов методики начальной математики: нумерация чисел, величины, особенности обучения решению задач – рассмотрена в предыдущем издании «Актуальные вопросы начальной математики и методики ее преподавания» [11]. Теперь внимание уделено не менее важным разделам методики: изучению арифметических действий, алгебраического и геометрического материала.

Зачастую конкретные вопросы разделов раскрываются с двух позиций, как, например, в предыдущем пособии [11]. Взгляды различаются самым подходом к организации процесса обучения математике. В рамках одного подхода, он считается *традиционным* (методика М. И. Моро), обучающиеся усваивают математические понятия, упражняясь в решении большого количества задач. Благодаря тренингу происходит формирование результатов обучения: знаний, умений, навыков младшего школьника. Основа другого подхода – развитие приемов умственной деятельности: анализа, синтеза, классификации, сравнения, аналогии, обобщения, и в таком случае обучение считается *развивающим* (методика Н. Б. Истоминой).

Большинство предлагаемых практических заданий имеют целью развитие логических приемов мышления ученика начальной школы. Третья глава полностью посвящена изучению развития младших школьников в процессе обучения математике. Развитие алгоритмического мышления обучающихся тесно связано с развитием логического мышления, так как в основе алгоритмического мышления лежат следующие умения, основанные на мыслительных операциях: понимать сущность алгоритма и его свойства, наглядно изображать алгоритм, четко использовать алгоритм, преобразовывать алгоритм, составлять алгоритм, проверять правильность алгоритма, выбирать рациональный алгоритм. Все эти умения основаны на мыслительных операциях: анализе, синтезе, сравнении, классификации, аналогии, обобщении. Таким образом, алгоритмическое мышление – это правильно выстроенная последовательность действий для решения какой-либо конкретной задачи. В таком случае показателем и итогом развития алгоритмического мышления будет мышление логическое. Принимать решения, делать выводы на основе полученного опыта, сортировать и анализировать полученную информацию способен человек с логическим мышлением.

Чтобы подготовить младших школьников к изучению математики, учитель должен овладеть специальными знаниями и умениями, которые называют методическими. Особенность методических знаний заключается в их непосредственной связи с психолого-педагогическими и математическими знаниями. Методико-математическая подготовка будущего учителя предполагает развитие его самого, способного творчески подходить к процессу обучения младшего школьника, грамотно и гибко мыслящего в решении методических задач.

Учебно-методическое пособие включает в себя предисловие; главы, сформированные согласно рабочим программам учебных дисциплин «Методика преподавания математики», «Актуальные проблемы методики преподавания математики»; заключение и библиографический список. В конце глав приведены вопросы для обсуждения, практические задания, а также задания рейтинг-контроля. Издание включает в себя перечень тем проектов, курсовых и выпускных квалификационных работ.

Детальное исследование теоретических основ начальной математики представлено ранее: в пособиях автора настоящего издания [8 – 11] по теоретическим основам математической подготовки учителей начальных классов. Содержание данного учебно-методического пособия определено структурой изложения тем «Арифметические действия» «Алгебраический и геометрический материал» в начальной школе, систематизацией материала по теме «Развитие младших школьников в процессе обучения математике» согласно методическому подходу Н. Б. Истоминой в рамках развивающего обучения.

Издание разработано для студентов бакалавриата начального педагогического образования с целью обучения самостоятельной разработке уроков в школе согласно требованиям ФГОС НОО.

При подготовке пособия были использованы учебники по теоретическим основам предметного курса математики, методическая и педагогическая литература, задачки-практикумы по математике для студентов высших педагогических учебных заведений, написанные Л. П. Стойловой, Н. Я. Виленкиным, А. М. Пышкало, М. И. Моро, А. А. Столяром, Н. Б. Истоминой, В. А. Сластениным, школьные учебники методических комплексов авторов М. И. Моро и Н. Б. Истоминой, а также методические разработки коллег-предшественников – В. П. Покровского, Е. Н. Селиверстовой, Е. В. Лопаткиной, Г. Г. Шмыревой и И. И. Цыганок.

Глава 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1.1. Общие вопросы методики изучения арифметических действий

Изучение арифметических действий предполагает рассмотрение теоретических основ данного вопроса и выполнение практических задач.

К теоретической части относится осознание конкретного смысла арифметических действий, т. е. раскрытие связи между операциями над множествами и соответствующими действиями с числами (операция объединения множеств согласована с операцией сложения чисел). Это знание усваивается на эмпирическом уровне, значит, при работе с дидактическим материалом обучающиеся уясняют смысл арифметических действий.

Свойство арифметического действия – это математическое предложение, в котором формулируется условие тождественных преобразований математических выражений. Другими словами, то, при каких условиях математическое выражение не меняет своего значения. Какие же свойства арифметических действий рассматривают в начальной математике?

Это переместительные $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, сочетательные $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и распределительное $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ свойства. Студент, успешно усвоивший программу дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» [8; 9], очень подробно с разных точек зрения изучал эти свойства. В высшей математике их называют законами: коммутативный и ассоциативный для операций сложения и умножения и дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

В начальной школе обучающиеся усваивают указанные свойства на уровне теоретического обобщения, т. е. знают и воспроизводят словесную формулировку.

Поговорим о связи между компонентами и результатом в арифметических действиях.

Арифметические действия – это математические положения о том, как выражается каждый компонент через результат действия и другой компонент.

При изучении однозначных чисел раскрывается связь между слагаемым и суммой, а также между уменьшаемым, вычитаемым и разностью. При изучении двузначных чисел раскрывается связь между множителем и произведением, между делимым, делителем и частным. С точки зрения математической логики любое правило о связи между компонентами арифметических действий – составное истинное высказывание. Его выстраивают с помощью логической операции импликации и логических связок «если... то». Поэтому формулировки всех правил содержат союзные слова «если... то». Например: *если* к вычитаемому добавить разность, *то* получим уменьшаемое.

Знание взаимосвязи между компонентами и результатами арифметических действий применяют:

- 1) при решении уравнений;
- 2) при проверке арифметического действия;
- 3) как теоретическую основу некоторых вычислительных приемов;
- 4) при изучении вопроса: как меняется результат арифметического действия, если изменяется один из компонентов операции? Применение таких вычислительных навыков требуется, например, при выполнении задания «найдите значение сумм и разностей чисел удобным способом». Сумму чисел 57 и 19 грамотнее посчитать, заменив слагаемое 19 ближайшим круглым числом (это число 20): $57 + 19 = (57 + 20) - 1 = 77 - 1 = 76$. Разность чисел 57 и 19 находим, заменяя вычитаемое 19 ближайшим круглым числом 20. Согласно правилу вычитания разности из числа получаем $57 - 19 = 57 - (20 - 1) = (57 - 20) + 1 = 37 + 1 = 38$. Можно найти значение разности $57 - 19$ иначе: заменить уменьшаемое ближайшим круглым числом. Тогда следует применить правило вычитания числа из разности и правило вычитания суммы из числа $57 - 19 = (60 - 3) - 19 = 60 - (3 + 19) = 60 - 22 = 60 - (20 + 2) = (60 - 20) - 2 = 40 - 2 = 38$.

Как найти разность $52 - 19$? Первый вариант – округление вычитаемого $52 - 19 = 52 - (20 - 1) = (52 - 20) + 1 = 32 + 1 = 33$. Второй вариант – округление уменьшаемого $52 - 19 = (50 + 2) - 19 = (50 - 19) + 2 = (50 - (20 - 1)) + 2 = (50 - 20) + 1 + 2 = 30 + 1 + 2 = 33$. Оба предложенных варианта опираются на правила вычитания (разности из числа, числа из суммы и снова разности

из числа). Замечаем, что рассуждения в первом случае лаконичнее, короче. Скорее всего, большинство обучающихся именно такой вариант вычислений и будут запоминать;

5) к теоретическому материалу относят: а) умножение на число 1 и число 0 ($25 \cdot 1$, $25 \cdot 0$); б) умножение 1 и 0 на число ($1 \cdot 14$, $0 \cdot 14$); в) деление нуля на число ($0 : 45$, $0 : 1$).

Термины и символы: сложение, вычитание, цифры, знаки действий $+$, $-$, $:$, $\cdot$. Знаки отношений $>$, $<$, $=$.

К практическому материалу относят упражнения математического содержания. Задача: формирование у обучающихся вычислительных навыков (должны быть усвоены таблица сложения однозначных чисел, таблица умножения и соответствующие случаи деления).

Работу над вычислительными навыками проводят в несколько этапов.

Первый этап – подготовительный:

- а) обучающиеся усваивают смысл вычислительного приема;
- б) отрабатывают те приемы, которые входят в новый прием как его составляющая часть;
- в) повторяют правила, которые были введены в другие приемы.

Второй этап – знакомство с вычислительным приемом. Включает в себя использование наглядных пособий, запись, проговаривание.

Третий этап – закрепление вычислительного приема. Таким образом, вычислительный прием отрабатывают на разных заданиях.

Сложение и вычитание однозначных чисел изучают по плану:

- 1) смысл действий сложения и вычитания;
- 2) переместительное свойство сложения;
- 3) взаимосвязь компонентов и результатов арифметических действий;
- 4) составление таблиц сложения и вычитания в пределах 10;
- 5) составление таблиц сложения и вычитания в пределах 20.

1.2. Смысл действий сложения и вычитания

В традиционной системе обучения

Смысл действий сложения и вычитания в начальном курсе математики раскрывается на основе теоретико-множественного подхода к определению целого неотрицательного числа. В соответствии с этим подходом сложение связано с операцией объединения попарно непересекающихся конечных множеств, а вычитание – с операцией дополнения выделенного подмножества. Такой подход интерпретируется при помощи предметных действий, что способствует уровню развития детей 6 – 7-летнего возраста.

В учебниках для первого класса при раскрытии смысла сложения и вычитания приведены упражнения двух видов:

- 1) выполнение операций с предметными множествами;
- 2) решение простых арифметических задач на увеличение числа на несколько единиц.

К первому виду относятся следующие.

Задание на сложение (с использованием дидактического материала):

Положите на парту слева три красных кружочка, а справа два зеленых. Придвиньте зеленые к красным. Сколько стало кружочков слева?

Рассуждение обучающегося. Новое множество есть объединение множества кружочков красного цвета с множеством кружочков зеленого цвета. Количество элементов нового множества можно посчитать. Известно также, что количество элементов объединения множеств равно сумме элементов первого множества и элементов второго. Поэтому к трем прибавляем два. Ответ: слева стало пять кружочков.

Задание на вычитание:

Положите на парту пять зеленых квадратов. Отодвиньте один. Сколько осталось?

Рассуждение обучающегося. Из данного множества квадратов один отодвигают, т. е. забирают. На парте остается квадратов меньше, чем было. Остается на один квадрат меньше. Можно посчитать, сколько осталось. Можно вычитанием из четырех одного найти результат. Ответ: на парте осталось три квадрата.

Ко второму виду относится следующее задание:

На озере плавали четыре белых лебедя и два черных. Сколько всего лебедей плавало на озере?

Рассуждение обучающегося: к четырём прибавляем два. Ответ: шесть лебедей плавало на озере.

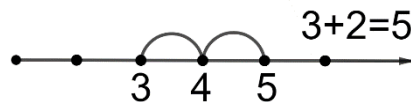
В системе развивающего обучения

Данный подход связан с выполнением обучающимися предметных действий и их интерпретацией с помощью различных моделей. Работу над смыслом сложения и вычитания проводят на разных уроках. Сначала раскрывают смысл сложения. На специальном уроке предлагают рассмотреть рисунки. На рисунках изображены аквариум с рыбками, цветы в вазе, грибы в корзинке, конфеты в коробке.

Предполагается следующий порядок установления смысла операции сложения.

Учитель поясняет то, что изображено на картинке: обучающиеся Маша и Миша запускают рыбок в аквариум. Это можно перевести на математический язык. Под картинкой есть записи: $3 + 2$; $5 + 4$; $3 + 1$; $2 + 3$; $3 + 4$; $4 + 5$; $1 + 3$. Такие записи называют *математическими выражениями*. В математике по-другому их называют *суммой*. Учитель предлагает сравнить выражения между собой. Показывает, как по-разному прочесть эти выражения: три плюс два, к трем прибавить два, сложить числа три и два. Теперь обучающиеся должны поупражняться в чтении записанных выражений. Учитель предлагает соотнести каждое выражение с соответствующим рисунком. Далее переходят к вычислению значения выражения, пересчитывая количество предметов на каждом рисунке.

Учитель говорит, что записи вида $3 + 2 = 5$; $5 + 4 = 9$ называют *равенствами*; бывают верные и неверные равенства. Вводит термин «значение суммы». Числовое равенство интерпретируют на числовом луче.



При формировании действий сложения выделяют три вида предметных ситуаций:

1) увеличение данного предметного множества на несколько предметов;

2) увеличение на несколько предметов множества, равночисленного данному;

3) соответствие одного предметного множества другому предметному множеству.

При рассмотрении сюжетов обучающиеся оперируют предметными множествами. Например:

У Наташи пять открыток, ей подарили еще три. Сколько всего открыток стало у Наташи?

Задачу удобно иллюстрировать с помощью модели. Учитель просит обучающегося нарисовать столько квадратиков, сколько открыток было у Наташи. Потом – столько квадратиков, сколько открыток подарили. Количество изображенных квадратиков обозначает общее количество открыток.

Рассматривая сюжеты ситуаций, младшие школьники учатся записывать действия при помощи цифр, а также математических символов «равно», «плюс»

$$\underbrace{5 + 3 = 8}_{\text{выражение}} \\ \text{равенство}$$

У обучающихся формируется понятие «больше на...». Они составляют совокупность предметов, проговаривая: «взять столько же и еще...».

При формировании у первоклассников представлений о вычитании можно условно ориентироваться на предметные ситуации:

1) уменьшение данной предметной совокупности на несколько предметов (предметы удаляют, зачеркивают);

2) уменьшение предметной совокупности, равночисленной данной, на несколько предметов;

3) сравнение двух предметных совокупностей и ответ на вопрос: «На сколько больше (меньше) предметов в одной совокупности, чем в другой?»

Рассматривают различные сюжеты. Речь ведут о предметном соотношении части и целого.

Пример первой ситуации.

У Маши было шесть шаров. Два она подарила Тане. Покажите шары, которые у нее остались.

Обучающиеся рисуют шесть шаров, зачеркивают два из них и показывают движением руки те шары, которые остались у Маши.

Для разъяснения смысла вычитания (как и сложения) можно использовать представления обучающихся о соотношении целого и его частей. В этом случае шары, которые были у Маши (целое), состоят из двух частей: «шары, которые она подарила» и «шары, которые у нее остались». Часть меньше целого, поэтому нахождение части связано с вычитанием. Обозначая целое и части их числовыми значениями, обучающиеся получают выражение $6 - 2$ или равенство $6 - 2 = 4$.

В процессе выполнения предметных действий, соответствующих *второй предметной ситуации*, у обучающихся формируются представления об отношении «меньше на...» («уменьшить на...»), которые связаны с построением совокупности, равночисленной данной («взять столько же»), и ее уменьшением на несколько предметов («без»). В этом случае совокупность, обозначаемая термином «без», включается в совокупность, обозначаемую термином «столько же». Совокупность, полученная в результате вычитания, является дополнением совокупности, обозначаемой термином «без», до совокупности предметов, обозначаемой термином «столько же».

Для усвоения понятий «больше на...», «меньше на...» также следует использовать прием соотнесения предметных и символических моделей. Приведем примеры возможных заданий.

На картинках изображены птички: на первой – пять, на следующей – больше на две птички. Задание: сравните картинки. Что изменилось слева направо? Что изменилось справа налево? Что обозначают выражения $5 + 2$; $7 - 2$?

На картинке восемь игрушек, на каждой последующей картинке количество игрушек уменьшается на два. Задание: рассмотрите картинки. Что изменяется? Разгадайте правило. Выберите ряд числовых выражений, который соответствует данному рисунку:

- 1) 8 ; $8 - 2$; $6 - 2$; $4 - 2$;
- 2) 9 ; $9 - 1$; $8 - 1$; $7 - 1$;
- 3) 9 ; $9 - 2$; $7 - 2$; $5 - 2$.

В процессе выполнения предметных действий у младших школьников формируется представление о вычитании как о действии, которое связано с уменьшением количества предметов.

При рассмотрении *третьей предметной ситуации* в практике обучения обучающимся предлагают иллюстрацию с двумя рядами предметов. Пусть, например, даны ряды кругов: в верхнем ряду кругов больше, чем в нижнем; каждый круг нижнего ряда расположен под соответствующим кругом верхнего ряда.

Учитель задает вопросы: «В каком ряду кругов больше? На сколько предметов в верхнем ряду больше, чем в нижнем?»

Вопросы у обучающихся не вызывают затруднений, потому что они ориентируются на количество предметов, оставшихся без пары. Однако свой ответ первоклассники никак не связывают с выполнением вычитания, так как никаких действий с предметами они не выполняют. Для осознания обучающимися связи вопроса: «На сколько больше (меньше)?» с вычитанием нужно направить их деятельность на решение этой задачи.

Возможен следующий вариант организации деятельности обучающихся.

У каждого обучающегося на парте наглядный материал (картинки, вырезанные из бумаги): семь белочек и пять орехов. Учитель сообщает: «Ребята, белки живут на высоком дереве, давайте поселим белок в верхнем ряду. А орехи растут ниже, разложите орехи в нижнем ряду. Каждая белочка находит орех. Покажем это: под каждой белкой положите ее орех. Что вы можете сказать, ребята? Что вы заметили?» *(Некоторым белкам не хватило орехов.)*

«Ребята, можете ли вы сказать, больше белок или орехов? Меньше белок или орехов? Как это можно увидеть в рядах картинок?» *(Орехов не хватило, значит, орехов меньше, чем белок. А белки остались, значит, белок больше, чем орехов.)*

«Ребята, сколько белок остались без орехов? Может быть, вы догадаетесь, какое нужно выполнить действие, чтобы ответить на вопрос: “На сколько больше белок, чем орехов?”» *(Итак, было семь белок и пять орехов. Нужно из семи вычесть пять.)*

В истинности ответа обучающиеся могут убедиться, проанализировав ряды картинок у себя на парте.

Далее можно рассмотреть картинки пар предметов (например, рыбки – червячки, черепахи – листочки, птичка – скворечник), задавая вопросы: «На сколько больше?», «На сколько меньше?».

В результате у первоклассников формируется представление о разностном сравнении чисел, которое можно обобщить в виде правила: «Чтобы узнать, на сколько одно число больше (меньше) другого, нужно из большего числа вычесть меньшее».

При сравнении совокупностей двух предметных множеств также можно опираться на представления обучающихся о соотношении целого и его частей. Для этого необходимо обратить их внимание на то, что для ответа на вопрос: «На сколько больше (меньше)...» мы выделяем в большей совокупности такую часть предметов, которая равночисленна другой данной совокупности, и находим другую часть большей совокупности, т. е. выполняем вычитание.

1.3. Методика изучения сложения и вычитания в пределах десяти

В традиционной системе обучения

С арифметическими действиями обучающиеся знакомятся сразу же после изучения числа 2. Изучение каждого из чисел первого десятка (кроме единицы) завершается изучением действий сложения и вычитания в пределах этого числа. Действия сложения и вычитания изучают параллельно.

Обучающиеся знакомятся со знаками сложения – плюсом (+); вычитания – минусом (–) и знаком равенства – равно (=).

Главная задача обучения – формирование у младших школьников вычислительных навыков. **Вычислительное умение** – это развернутое действие, в котором каждая вычислительная операция осознается и контролируется. **Навыки** – это свернутые автоматизированные действия с пропусками промежуточных операций и переносом контроля на конечный результат. На уровне навыков обучающиеся должны усвоить таблицу сложения и вычитания в пределах десяти. При составлении таблицы предусмотрено четыре этапа.

Этап	Случаи сложения и вычитания	Теоретическая основа	Способ действия
1-й	$\square + 1$ $\square - 1$	Принцип построения натурального ряда	Присчитывание и отсчитывание по одному
2-й	$\square \pm 2$ $\square \pm 3$	Смысл сложения и вычитания	Присчитывание и отсчитывание группами
3-й	$\square + 5$ $\square + 6$ $\square + 7$ $\square + 8$ $\square + 9$	Переместительное свойство сложения	Перестановка слагаемых
4-й	$6 - \square$ $7 - \square$ $8 - \square$ $9 - \square$ $10 - \square$	Взаимосвязь сложения и вычитания	Правило: если из суммы вычесть одно слагаемое, то получится другое слагаемое

Итак, при изучении данной темы обучающиеся должны овладеть приемами вычисления, получить прочные вычислительные навыки, заучить табличные случаи сложения и вычитания в пределах десяти, а также состав чисел первого десятка, уметь узнавать и показывать компоненты и результаты двух арифметических действий и понимать их названия в речи учителя.

После ознакомления обучающихся с последовательностью натуральных чисел и свойствами данного числового ряда (натуральный ряд начинается с числа 1, этот ряд бесконечен, каждое последующее число в ряду на 1 больше предыдущего) нужно переходить к приемам сложения и вычитания. Младшие школьники учатся этим приемам: прибавлять и вычитать единицу из числа, т. е. присчитывать и отсчитывать по одному.

Когда обучающиеся научатся прибавлять и вычитать по одному, надо учить их прибавлять по два. Когда обучающиеся овладеют приемами присчитывания, учитель знакомит их с приемами отсчитывания. Если приемами присчитывания ученики первого класса овладевают довольно быстро, то приемами отсчитывания — намного медленнее. Трудность состоит в том, что прием отсчитывания основан на хорошем

знании обратного счета, а обратный счет для многих обучающихся первого класса труден. Кроме того, младшие школьники плохо запоминают, сколько нужно отнять, сколько уже отняли, сколько еще надо отнять.

При изучении каждого числа первого десятка обучающиеся получают представление и о составе этих чисел.

Вначале необходимо давать такие упражнения, в которых одно из слагаемых воспринимается первоклассниками наглядно, а второе они находят по представлению.

При выполнении действий сложения и вычитания в пределах данного числа вводят примеры с отсутствующим компонентом. Его обозначают точками, знаками вопроса, окошком и так далее, например: $4 + \dots = 6$; $? - 2 = 4$; $\square + 1 = 3$.

Отсутствие предметов обозначают цифрой ноль. Запишем: $1 - 1 = 0$. Решают примеры, когда значение разности чисел равно нулю. Ноль сравнивают с единицей. Устанавливают, что ноль меньше единицы, единица больше нуля, поэтому ноль должен стоять перед единицей. Однако учитель должен помнить, что ноль не относится к натуральным числам. Поэтому ряд натуральных чисел должен начинаться с единицы.

Вводить число ноль в качестве вычитаемого, а потом и слагаемого следует в многочисленных упражнениях. Смысл действий с нулем будет лучше понятен обучающимся, если ноль в качестве вычитаемого и ноль в качестве слагаемого будут вводиться не одновременно. Затем выполняют упражнения на сортировку выражений, в которых ноль будет слагаемым или вычитаемым.

Полезно показать обучающимся зависимость изменения суммы при изменении слагаемых, а также изменения остатка от изменения уменьшаемого.

Учитель первого класса должен обращать внимание обучающихся на то, что сумма всегда больше каждого из слагаемых, а остаток всегда меньше уменьшаемых. Уменьшаемое больше или равно вычитаемому, в противном случае вычитание произвести нельзя. Уже с первого класса школьники должны быть приучены к проверке правильности выполненного задания.

В системе развивающего обучения

Подход в учебниках Н. Б. Истоминой к составлению и заучиванию таблиц сложения основан на знании состава числа с использованием предметных действий. Таблицы сложения составляют отдельно от таблиц вычитания.

Обучающиеся работают над составом числа сразу же после знакомства с действием сложения. При этом над составом числа работа осуществляется в следующем порядке:

- на наборном полотне расположены кораблики. Учитель предлагает разбить их на части: $1 + 5$; $3 + 3$; $4 + 2$. Изучается состав числа 6;
- изучается состав числа 4. Дается установка на запоминание состава этого числа:

$$3 + 1 = 4;$$

$$2 + 2 = 4;$$

$$3 + 1 = 4;$$

- изучается состав числа 5. Четыре случая для запоминания:

$$4 + 1 = 5;$$

$$1 + 4 = 5;$$

$$3 + 2 = 5;$$

$$2 + 3 = 5;$$

- изучается состав числа 8. Семь случаев для запоминания:

$$5 + 3 = 8; \quad 6 + 2 = 8; \quad 7 + 1 = 8; \quad 4 + 4 = 8;$$

$$3 + 5 = 8; \quad 2 + 6 = 8; \quad 1 + 7 = 8;$$

- изучается состав числа 7. Шесть случаев для запоминания:

$$3 + 4 = 7; \quad 5 + 2 = 7; \quad 6 + 1 = 7;$$

$$4 + 3 = 7; \quad 2 + 5 = 7; \quad 1 + 6 = 7;$$

- изучается состав числа 9. Восемь случаев для запоминания:

$$8 + 1 = 9; \quad 7 + 2 = 9; \quad 6 + 3 = 9; \quad 5 + 4 = 9;$$

$$1 + 8 = 9; \quad 2 + 7 = 9; \quad 3 + 6 = 9; \quad 4 + 5 = 9.$$

1.4. Методика изучения сложения и вычитания однозначных чисел с переходом через разряд

Методика изучения сложения и вычитания однозначных чисел с переходом через разряд включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Усвоение состава однозначных чисел.

Шаг 2. Дополнение первого слагаемого до 10.

Шаг 3. Прибавление оставшихся единиц второго слагаемого к числу 10

$$\overset{\text{шаг 1}}{7 + 5} \cong \overset{\text{шаг 2}}{7 + (3 + 2)} \cong \overset{\text{шаг 3}}{(7 + 3) + 2} \cong 10 + 2 = 12.$$

Число 3 в этой записи показывает, какое число нужно прибавить к 7, чтобы получить 10; число 2 – сколько единиц нужно прибавить к 10.

В традиционной системе обучения

В учебниках М. И. Моро (1-й класс) после изучения нумерации чисел в пределах 20 рассматривается тема «Сложение и вычитание однозначных чисел».

В качестве подготовительной работы раскрывается вычислительный прием, связанный с дополнением числа до 10. Далее обучающиеся постепенно составляют таблицу сложения в пределах 20. В таблице 20 случаев. Рассмотрены случаи сложения одинаковых слагаемых: $6 + 6$; $7 + 7$; $8 + 8$; $9 + 9$ и случаи прибавления меньшего числа к большему. Для прибавления большего числа к меньшему используют переместительное свойство сложения. Пример задания представлен ниже.

Пользуясь таблицей сложения, найдите значения выражений: $11 - 7$; $14 - 7$.

Методика выполнения. Для вычитания однозначного числа из двузначного (в пределах 20, с переходом через десяток) используют два вычислительных приема. Основа *первого приема* – понятие о взаимосвязи суммы и слагаемых и знание таблицы сложения в пределах 20. Прием состоит из следующих операций: а) представление уменьшаемого в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно вычитаемому; б) вычитание из данной суммы слагаемого, равного вычитаемому, согласно правилу: если из суммы вычесть одно слагаемое, то останется другое.

По таблице сложения в пределах 20 имеем: число 11 является суммой числа 7 с числом 4. Значит, из суммы $7 + 4$ будем вычитать 7. Останется второе слагаемое: $11 - 7 = (7 + 4) - 7 = 4$. Аналогично $14 - 7 = (7 + 7) - 7 = 7$.

Второй вычислительный прием – отсчитывание по частям – содержит операции: а) вычитание из данного двузначного числа его разрядных единиц (в результате выполнения этой операции всегда полу-

чается число 10); б) представление вычитаемого в виде суммы слагаемых, одно из которых равно количеству разрядных единиц двузначного числа (основа этой операции – знание состава однозначного числа); в) вычитание из 10 второго слагаемого этой суммы.

Вышеописанный способ рассуждений выстраивается таким образом: число 11 состоит из одного десятка и одной единицы. Представим вычитаемое 7 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно 1. Вычтем из числа 10 второе слагаемое

$$11 - 7 = (10 + 1) - 7 = (10 + 1) - (1 + 6) = (10 + 1 - 1) - 6 = 10 - 6 = 4.$$

Аналогично $14 - 7 = (10 + 4) - (4 + 3) = (10 + 4 - 4) - 3 = 10 - 3 = 7.$

В системе развивающего обучения

Эффективность формирования вычислительных навыков существенно зависит от следующих факторов:

1) насколько хорошо обучающиеся усвоили нумерацию чисел в пределах 20 (состав двузначного числа из десятка и единиц);

2) насколько хорошо обучающиеся усвоили состав числа в пределах 10.

Поэтому, приступая к изучению сложения в пределах 20, обучающимся дают возможность усвоить общий способ действия. Этот способ состоит из двух операций: *первая* – дополнение первого слагаемого до 10 (выполнение операции требует прочного знания состава числа 10); *вторая* – составление числа из десятков и единиц (выполнение этой операции требует прочного знания состава всех однозначных чисел и разрядного состава двузначных чисел).

В учебниках предложены самые разные задания, которые способствуют усвоению общего способа действия. Основные методические приемы – соотнесение наглядности (внутри треугольника находятся кружочки; один заполненный кружками треугольник – один десяток) и математические записи в виде числовых выражений и равенств. Примеры таких заданий представлены ниже.

На рисунке изображены треугольники, в первом – 10 кружков, во втором – 9, в третьем – 8, в четвертом – 7, в пятом – 6. Задание: сколько кружков нужно добавить в каждый треугольник, чтобы получить один десяток? Запишите числовые равенства.

Согласно ответам появляются записи: $10 + 0 = 10$; $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$.

На парте у обучающегося в верхнем ряду лежит 8 синих кругов, в нижнем – 5 серых. Задание: дополните синие круги серыми до 10. Объясните, что обозначает выражение $8 + 2 + 3$. Что обозначает выражение $8 + 5$? Можно ли утверждать, что значения этих выражений одинаковы?

Выполняя такие упражнения, обучающиеся осознают связь между наглядностью и числовыми выражениями (замена в первом выражении суммы двух чисел значением этой суммы, числом 5).

Даны четыре группы счетных палочек: две группы в верхнем ряду, две в нижнем. Разместим группы палочек на парте следующим образом: верхний ряд – девять синих и рядом шесть розовых (это первая группа), восемь зеленых и шесть розовых (вторая группа); нижний ряд – девять синих и рядом пять белых (третья группа), восемь зеленых и пять белых (четвертая группа).

Задание: в каждой из групп дополните палочки слева палочками справа до десятка. Сосчитайте, сколько всего палочек в каждой группе. Запишите значения сумм чисел $9 + 6$; $8 + 6$; $9 + 5$; $8 + 5$.

С С С С С С С С С С	Р Р Р Р Р Р Р	З З З З З З З З З	Р Р Р Р Р Р Р
С С С С С С С С С С	Б Б Б Б Б Б Б	З З З З З З З З З	Б Б Б Б Б Б Б

При выполнении последнего задания учитель продумывает диалог и организывает деятельность обучающихся таким образом, чтобы усваивались следующие операции:

- а) до числа 10 следует дополнить большее слагаемое;
- б) необходимо понимать смысл действий сложения и вычитания и знать состав однозначных чисел. Опираясь на эти знания, обучающиеся отвечают на вопрос: сколько единиц осталось во втором слагаемом после того, как выполнена первая операция?
- в) следует оставшиеся единицы второго слагаемого прибавлять к числу 10.

Таким образом, для овладения приемом сложения однозначных чисел с переходом через десяток необходимо прочное усвоение обучающимися состава каждого числа в пределах 10 и состава двузначного числа из десятков и единиц. Этот прием можно представить в виде тождественных преобразований (запишем, например, для третьей группы счетных палочек: $8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13$), выполнение которых осуществляется на основе правила прибавления суммы к числу.

В учебниках и методических указаниях по изучаемой теме встречаются еще задания на числовой прямой и задания с окошками. Практический навык отрабатывается на многочисленных заданиях разного вида.

В случае вычитания однозначного числа в пределах 20 с переходом через разряд выполняются две операции:

1) уменьшение данного числа на количество разрядных единиц (требуется знание разрядного состава двузначных чисел);

2) вычитание из 10 оставшихся в вычитаемом единиц (выполнение этой операции требует отточенных знаний состава числа 10).

Таблицу вычитания не составляют, опираются на таблицу сложения. Формируют общий способ действия. Таких способов два.

Первый способ – вычитание по частям. В основе лежит знание состава однозначных чисел, знание разрядного состава двузначных чисел.

В качестве наглядных средств используют треугольник-десяток и кружочки-единицы. В множестве элементов содержится один треугольник и несколько кружочков. Как и в случае сложения, надо соотносить с каждым рисунком математическую запись:

$16 - 7;$	$17 - 9;$	$14 - 2;$	$17 - 7;$
$14 - 6;$	$16 - 3;$	$15 - 4;$	$15 - 7.$

Выражения распределяют на две группы следующим образом:

$16 - 3;$	$16 - 7;$
$17 - 7;$	$17 - 9;$
$14 - 2;$	$14 - 6;$
$15 - 4;$	$15 - 7.$

Учитель спрашивает обучающихся, чем похожи выражения в каждом столбике.

Основа *второго способа* – взаимосвязь компонентов и результатов действия, а также прочные знания состава чисел в пределах 20. Например, следующее задание «заполните таблицу» требует второго способа действия.

Первое слагаемое	8		6	7
Второе слагаемое	5	4		
Значение суммы		13	11	13

1.5. Методика изучения сложения и вычитания в пределах ста

В традиционной системе обучения

Методические особенности формирования умения сложения и вычитания в пределах ста (2-й класс) заключаются в следующем:

1) необходимо изучение теоретических вопросов, на основе которых формируются вычислительные знания, умения, навыки;

2) в основе овладения вычислительными приемами лежат знания: нумерации в пределах ста; табличных случаев сложения и вычитания; переместительного и сочетательного свойств сложения; правил вычитания числа из суммы и вычитания суммы из числа.

Большую роль при формировании практических умений по освоению вычислительных приемов играют: демонстрация образца действия с помощью дидактического материала; выполнение однотипных упражнений с целью отработки и закрепления нового вычислительного приема; пошаговое ознакомление с конкретным вычислительным приемом, предполагающее постепенное усложнение заданий.

Этап	Случаи	Теоретические основы	Способ действия
I	$40 + 20$; $70 - 30$	Десятичный состав числа, таблицы сложения и вычитания	Сложение и вычитание однозначных чисел
II	$36 + 2$; $30 - 7$; $36 - 2$; $36 - 20$	Сочетательное свойство, правило вычитания числа из суммы	Складывание единиц с единицами двузначного числа
III	$60 - 24$	Правило вычитания суммы из числа	Вычитание по частям
IV	$26 + 7$	Прибавление суммы к числу, знание состава однозначных чисел	Сложение по частям, добавление до круглого десятка и сложение оставшихся единиц
V	$35 - 7$	Правило вычитания суммы из числа	Вычитание по частям

В системе развивающего обучения

Усвоение обучающимися смысла сложения и вычитания, разрядного состава двузначных чисел и состава каждого однозначного числа позволяет организовать деятельность младших школьников, направленную на овладение приемами устного сложения и вычитания двузначных чисел. Содержание этой деятельности включает в себя:

- сложение/вычитание круглых десятков ($30 + 20$);
- сложение/вычитание двузначных и однозначных чисел без перехода в другой разряд ($75 + 4$; $75 - 4$);
- сложение/вычитание двузначных чисел и круглых десятков ($46 + 30$; $46 - 30$);
- дополнение любого двузначного числа до круглого десятка ($28 + 2$; $53 + 7$);
- вычитание однозначного числа из круглого десятка ($20 - 3$);
- сложение/вычитание однозначного и двузначного числа с переходом в другой разряд ($29 + 6$; $43 - 5$);
- сложение/вычитание двузначных чисел с переходом в другой разряд ($38 + 57$).

Эти виды действий рассматривают после изучения табличного сложения однозначных чисел и соответствующих случаев вычитания: $7 + 8$; $15 - 7$; $15 - 8$; создают условия для совершенствования ранее полученных знаний. Для формирования вычислительных умений используют подход, основа которого – действия с предметными моделями и перевод их на язык математики. Средства организации такой работы – специальные задания, в процессе выполнения которых обучающиеся наблюдают изменения в записи чисел, выявляют сходства и различия выражений, классифицируют их и обобщают наблюдения. В результате этой деятельности младшие школьники самостоятельно открывают способы действия – вычислительные приемы – и затем применяют их для вычисления значений различных выражений. При выполнении заданий обучающиеся опираются на знания разрядного состава двузначных чисел, на табличное сложение и соответствующие случаи вычитания.

Обучающимся предлагают выполнить следующее задание.

Увеличьте число 32 на 1, 2, 3, 4, 5. Понаблюдайте, какая цифра изменяется в числе 32.

Младшие школьники приходят к выводу, как нужно действовать при сложении однозначных и двузначных чисел: единицы нужно складывать с единицами, оставив данное количество десятков без изменения.

Изучение приема сложения с круглыми десятками происходит с помощью следующего упражнения.

По какому правилу составлены суммы во всех случаях?

$$\begin{array}{llll} 66 + 3; & 44 + 5; & 22 + 6; & 38 + 4; \\ 66 + 30; & 44 + 50; & 22 + 60; & 38 + 40. \end{array}$$

Специальным образом подобранные числа, выражения, их анализ, сравнение, классификация и обобщение позволяют обучающимся самостоятельно сделать вывод о способе действия. Например, при рассмотрении дополнения двузначного числа до круглого десятка обучающимся предлагают выполнить следующее задание.

Дан ряд чисел: 38, 17, 68, 79, 46, 57, 48, 29. На сколько можно увеличить каждое число, чтобы в нем изменялась только цифра, обозначающая единицы, а цифра, обозначающая десятки, не изменялась?

Для усвоения приема дополнения двузначного числа до круглого десятка предлагают следующее задание.

Проверьте себя, используя модели десятков и единиц. Какие цифры надо вставить в окошки, чтобы получились верные равенства?

$$\begin{array}{ll} 37 + 3 = 4\boxed{}; & 32 + 8 = 4\boxed{}; \\ 54 + 6 = 6\boxed{}; & 29 + 1 = 3\boxed{}. \end{array}$$

Обучающиеся сами открывают способ действия при вычитании однозначного числа из круглого десятка, используя прием соотнесения предметных и символических моделей на примере задания.

Предметная модель. Изображены две ситуации: первая модель – три треугольника-десятка, в крайнем справа вычеркнуты два кружка; вторая – четыре треугольника-десятка, в крайнем справа вычеркнуты четыре кружка. Обучающиеся устанавливают сходства и различия данных рисунков: везде изображены модели-треугольники; в последнем зачеркнуто несколько кружочков (т. е. единиц).

Символическая модель: $30 - 2 = 28$; $40 - 4 = 36$.

Обучающиеся приходят к выводу: если однозначное число вычитают из круглых десятков, то количество десятков уменьшается на

один, а чтобы определить количество разрядных единиц, надо вычесть это однозначное число из десяти.

Обучающимся предлагают открыть еще один способ вычитания однозначного числа из круглого десятка.

Верно ли утверждение, что значения выражений в каждой паре одинаковы?

$$\begin{array}{lll} 30 - 1 - 3; & 60 - 1 - 6; & 80 - 1 - 7; \\ 30 - 4; & 60 - 7; & 80 - 8. \end{array}$$

Преимущество данного способа вычисления заключается в том, что, вычитая единицу, обучающиеся легко находят предыдущие числа и тем самым получают случай вычитания, где нужно из двузначного числа вычесть однозначное число без перехода в другой разряд.

1.6. Методика изучения сложения и вычитания трехзначных чисел

В традиционной системе обучения (3-й класс)

В основе устных вычислений лежат те же самые приемы сложения и вычитания, что и при изучении действий с двузначными числами. Только теперь, при работе с новым множеством чисел, от обучающегося требуется: а) владение знаниями состава трехзначных чисел из разрядных слагаемых; б) понимание того, что счет десятков или сотен ведется так же, как и счет единиц; в) умение распространить известные приемы вычислений на новую область чисел.

Этап	Случаи сложения и вычитания	Теоретические основы	Способ действия
I	400 + 200; 800 – 500	Разрядный состав трехзначного числа. Табличные случаи сложения/вычитания	Сложение и вычитание однозначных чисел (выполняется с сотнями)
	200 + 40; 200 + 4; 803 – 3; 803 – 800; 299 + 1; 300 – 1	Разрядный состав трехзначного числа. Понимание того, как образуются трехзначные числа из сотен, десятков и единиц. Табличные случаи сложения/вычитания	Выполнение действий по разрядам: сложение единиц с единицами, десятков с десятками, вычитание из единиц трехзначного числа однозначного числа, вычитание в разряде сотен для трехзначных чисел

Этап	Случаи сложения и вычитания	Теоретические основы	Способ действия
II	$250 + 30$; $570 + 300$; $570 + 30$; $570 - 300$; $600 - 40$	Разрядный состав трехзначного числа: понимание того, из скольких десятков состоит каждое слагаемое. Правило прибавления числа к сумме. Правило вычитания числа из суммы	Складывание и вычитание десятков трехзначного числа. Вычитают десятки из десятков, а сотни из сотен
III	$90 + 70$; $160 - 70$; $350 + 60$; $420 - 8$; $243 + 400$; $827 - 500$	Правила прибавления суммы к числу и числа к сумме. Правило вычитания числа из суммы. Разрядный состав числа	Сложение/вычитание разрядных единиц. Представление числа в виде суммы «удобных» слагаемых

При введении каждого нового случая прежде всего проводят подготовительную работу, цель которой – подвести обучающихся к самостоятельному объяснению вычислительных приемов.

Начальный этап предваряет повторение разрядного состава трехзначных чисел. Целесообразно использование наглядных пособий: квадратов, полосок, карточек с разрядными числами. Благодаря такой подготовительной работе обучающиеся могут самостоятельно дать объяснение вычислительному приему $200 + 4$.

Ко второму этапу подготавливают изучение разрядного состава трехзначного числа по образцу разрядного состава чисел 250, 150, 490. Рассматривают случаи сложения и вычитания вида $(20 + 5) + 3$ и $(20 + 5) + 30$. Аналогично на вычитание.

Далее учитель предлагает по аналогии следующее задание: $(20 + 50) + 300$.

После чего рассматривают случаи вычислительных приемов, которые обучающиеся должны объяснить самостоятельно:

$460 + 30$;	$460 - 30$;
$460 + 300$;	$460 - 300$;
$460 + 40$;	$460 - 60$.

На этом же уроке целесообразно показать и другие вычислительные приемы:

$$250 + 30 =$$

$$25 \text{ дес.} + 3 \text{ дес.} = 28 \text{ дес.} = 280;$$

$$90 + 70$$

$$9 \text{ дес.} + 7 \text{ дес.} = 16 \text{ дес.} = 160;$$

$$350 + 60 =$$

$$(350 + 50) + 10 = 410;$$

первое слагаемое

дополнили до круглой

$$\text{сотни } 60 = 50 + 10$$

$$350 + 60$$

$$35 \text{ дес.} + 6 \text{ дес.} = 41 \text{ дес.} = 410.$$

Заметим, что эта работа происходит уже на третьем этапе. Закрепляя навыки вычислений в рассмотренных случаях, следует предусмотреть и упражнения на выполнение действий в выражениях следующего вида: $175 + 23$; $243 + 400$; $456 - 3$; $827 - 500$. Для нахождения значений этих выражений применяют те же вычислительные правила, что и выше. Однако в указанных случаях каждый компонент действия можно не разбивать на сумму разрядных слагаемых, а заменить суммой двух слагаемых. Например, $243 + 400 = (200 + 43) + 400 = (200 + 400) + 43 = 600 + 43 = 643$; $456 - 3 = (450 + 6) - 3 = 450 + (6 - 3) = 450 + 3 = 453$.

В системе развивающего обучения

Основой служит усвоение структуры трехзначного числа в десятичной системе счисления.

Обучающимся предлагают следующие задания.

Запишите все трехзначные числа, у которых в разряде единиц цифра 8, в разряде сотен – цифра 1: $1\boxed{}8$. Запишите эти числа в порядке возрастания (ответ: 108, 118, 128, 138, 148, 158, 168, 178, 188, 198). Чему равна разность двух соседних чисел в этом ряду? Запишите эти равенства.

На сколько можно увеличить число 308, чтобы изменилась только цифра, стоящая в разряде десятков? Запишите эти числа.

На сколько можно уменьшить число 529, чтобы изменились только единицы?

По какому правилу записан каждый ряд?

а) 123, 125, 127, 129, 131...

б) 812, 822, 832, 842, 852...

Продолжите каждый ряд тремя числами.

Увеличьте число 372 на 1, 2, 3, 4. Понаблюдайте, какая цифра изменяется в числе 372. Какие еще числа можно прибавить к 372, чтобы изменилась только цифра, обозначающая единицы?

Увеличьте число 827 на один десяток, на два десятка, на три, на четыре. Понаблюдайте, какая цифра изменяется в числе 827. Какие еще числа можно прибавить к 827, чтобы изменилась только цифра, обозначающая десятки?

Увеличьте число 693 на одну сотню, на две сотни. Понаблюдайте, какая цифра изменяется в числе 693. Какие еще числа можно прибавить к 693, чтобы изменилась только цифра, обозначающая сотни?

Для нахождения значения выражений вида $900 - 600$; $500 + 300$ обучающиеся используют вывод, который был сделан ими при изучении нумерации трехзначных чисел, а именно: считать сотнями можно точно так же, как единицами и десятками.

Вывод:

– процесс формирования вычислительных умений ориентирован на усвоение общего способа действий, в основе которого лежит осознание обучающимися записи чисел в десятичной системе счисления и смысла действия сложения и вычитания;

– основной способ введения нового вычислительного приема – не показ образца действия, а выполнение обучающимися действий с моделями десятков и единиц и соотнесение этих действий с математическими записями;

– наблюдение за изменением в записи чисел сопровождается активным использованием приемов анализа и синтеза, сравнения, классификации, обобщения¹. Средства организации этой деятельности – система учебных заданий, в процессе выполнения которых обучающиеся открывают способ действия и овладевают вычислительными приемами.

¹ Третья глава настоящего пособия посвящена подробному изучению приемов умственной деятельности: анализа, синтеза, классификации, сравнения, аналогии, обобщения.

1.7. Методика изучения сложения и вычитания многозначных чисел

Обозначим планируемые результаты освоения младшими школьниками сложения и вычитания многозначных чисел.

Обучающиеся должны *знать*: названия компонентов арифметических действий; знаки арифметических действий; таблицу сложения; арифметические действия с числами 0 и 1; взаимосвязь арифметических действий; правило нахождения неизвестного компонента при сложении и вычитании; порядок выполнения арифметических действий сложения и вычитания в выражениях со скобками и без них; свойства арифметических действий (перестановка и группировка слагаемых в сумме); алгоритмы письменного сложения и вычитания; способы проверки правильности вычислений; как изменяется сумма при изменении одного из слагаемых и разность – при изменении уменьшаемого или вычитаемого.

Обучающиеся должны *уметь*: делать прикидку и оценку суммы и разности; сравнивать различные способы вычислений; пошагово контролировать правильность и полноту выполнения алгоритма арифметического действия; выполнять поиск, обнаружение и устранение ошибок арифметического характера.

Обучающиеся должны *владеть*: устными приемами сложения и вычитания разрядных чисел в пределах миллиона; письменными алгоритмами сложения и вычитания целых неотрицательных чисел и именованных чисел в пределах миллиона.

Методическая система ознакомления младших школьников со сложением и вычитанием многозначных чисел имеет целью формирование навыка устных и письменных вычислений (сложения и вычитания) целых неотрицательных чисел в пределах миллиона; закрепление правила порядка выполнения действий в числовых выражениях в два-четыре действия со скобками и без них.

Согласно озвученной цели определяются *задачи*:

- 1) распространить уже известные обучающимся правила (алгоритмы) сложения и вычитания трехзначных чисел на числа четырехзначные, пятизначные и т. п.;
- 2) отработать приемы письменного сложения и вычитания;
- 3) обобщить представления обучающихся об основных свойствах сложения и вычитания;

4) сформировать у обучающихся осознанное понимание того, что сложение и вычитание величин (длины, массы и др.) выполняется так же, как и сложение и вычитание многозначных чисел.

Остановимся теперь на методических особенностях изучения действий сложения и вычитания многозначных чисел.

I этап. Задача: распространение уже известных обучающимся правил (алгоритмов) сложения и вычитания трехзначных чисел на числа четырехзначные, пятизначные и т. п.

Возможные затруднения обучающихся при ознакомлении с новым материалом связаны:

- с плохим знанием таблицы сложения и вычитания однозначных чисел;
- с неумением распорядиться суммой разрядных слагаемых в том случае, когда она является двузначным числом.

Для ликвидации этих пробелов следует усилить работу над табличными случаями сложения и вычитания. Как правило, такую работу проводят на этапе актуализации опорных знаний в форме устного опроса, дидактической игры или обучающего самотестирования младших школьников.

Далее материал отрабатывают на уже известных обучающимся случаях сложения и вычитания трехзначных чисел с подробным комментированием. Затем аналогично рассматривают сложение и вычитание с четырех- и пятизначными числами. Специально отводят время на особые случаи (с нулями в разрядах уменьшаемого):

$$\begin{array}{r} \text{= } 100 \\ \text{--- } 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{= } 200 \\ \text{--- } 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{= } 2000 \\ \text{--- } 142 \end{array}$$

Особо внимательно проговаривают процесс «занимания» и запись одной единицы высшего разряда десятью единицами ближайшего низшего разряда.

При этом много работают устно над случаями сложения и вычитания разрядных чисел сначала в пределах тысячи, а затем в пределах миллиона. Младшие школьники устно выполняют сложение и вычитание с опорой на знание нумерации целых неотрицательных чисел в пределах миллиона, например:

$$\begin{aligned} 8400 + 600 &= 84 \text{ сотни} + 6 \text{ сотен} = 90 \text{ сотен} = 9000 \text{ единиц,} \\ 9800 - 700 &= 98 \text{ сотен} - 7 \text{ сотен} = 91 \text{ сотня} = 9100 \text{ единиц,} \\ 2000 - 1700 &= 20 \text{ сотен} - 17 \text{ сотен} = 3 \text{ сотни} = 300 \text{ единиц,} \\ 600 + 800 &= 6 \text{ сотен} + 8 \text{ сотен} = 14 \text{ сотен} = 1400 \text{ единиц,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1 \text{ сотня тысяч } 5 \text{ десятков тысяч } - 7 \text{ десятков тысяч } = \\
 & = 15 \text{ десятков тысяч } - 7 \text{ десятков тысяч } = \\
 & = 8 \text{ десятков тысяч } = 80\,000 \text{ единиц.}
 \end{aligned}$$

При ознакомлении с письменным сложением и вычитанием многозначных чисел обучающиеся решают примеры с нарастающей трудностью, где каждый последующий включает в себя предыдущий:

$$\begin{array}{ll}
 752 + 246; & 837 - 425; \\
 4752 + 3246; & 6837 - 2425; \\
 54\,752 + 43\,246; & 76\,837 - 52\,425.
 \end{array}$$

Обучающиеся самостоятельно могут сделать вывод о том, что алгоритм сложения и вычитания многозначных чисел тот же, что и для трехзначных.

II этап. Задача: отработка приемов письменного сложения и вычитания многозначных чисел.

Различные случаи сложения и вычитания вводятся с нарастающей трудностью:

- постепенное увеличение числа переходов через разрядную единицу;
- включение случаев вычисления, когда в уменьшаемом содержатся нули.

Знакомясь с каждым новым случаем, обучающиеся сначала дают подробные пояснения вычислений, после усвоения приема вычисления – сокращенные пояснения. В результате формирования навыка все пояснения осуществляются в уме.

Как правило, трудность вызывают случаи вычитания, когда уменьшаемое выражено разрядным числом, например: $700\,000 - 4097$; $400\,100 - 205\,708$.

Для закрепления алгоритма письменного сложения и вычитания требуется выполнять достаточное количество разнообразных упражнений. Обучение младших школьников выполнению проверки вычислений необходимо. Со временем обучающиеся сами будут определять, где следует вести устный счет, а где письменный.

III этап. Задача: обобщение представлений обучающихся об основных свойствах сложения и вычитания.

Обучающиеся должны научиться использовать взаимосвязь между сложением и вычитанием: $27 - 15 = 12$, потому что $15 + 12 = 27$.

В процессе вычислительной работы обучающиеся убеждаются в справедливости переместительного свойства сложения для трех, четырех и более слагаемых, что полезно при упрощении вычислительной работы. Например: $1027 + 2492 + 5073 = (1027 + 5073) + 2492$.

Необходимо ознакомить обучающихся с возможностью группировать слагаемые при вычислении суммы (сочетательное свойство). При этом школьники делают вывод: при сложении трех и более чисел любые два (или больше) числа можно заменить их суммой. Особое внимание необходимо уделить формированию умений использовать эти свойства.

На этом этапе продолжается закрепление правила о порядке выполнения арифметических действий в числовом выражении, формируется осознанное понимание роли скобок и свойств сложения и вычитания:

- прибавления числа к сумме;
- прибавления суммы к числу;
- вычитания из числа суммы и т. п.

Для осуществления последнего рекомендуется включать в содержание урока текстовые задачи, например:

Запишите сумму числа 127 и разности чисел 12 307 и 25;

Запишите выражение, где уменьшаемое равно 20 137, а вычитаемое выражено суммой чисел 457 и 89.

Действия сложения и вычитания над величинами в процессе изучения многозначных чисел и арифметических действий над ними

Основная задача на этом этапе – формирование у обучающихся осознанного понимания того, что сложение и вычитание величин (длины, массы и др.) выполняется так же, как и сложение, и вычитание многозначных чисел.

Связь между изучением сложения и вычитания многозначных чисел и величин основывается на свойстве величин: если величина состоит из частей, то ее можно найти в результате сложения этих частей. При этом важно уметь выразить компоненты действий в одних и тех же единицах: $2 \text{ т } 5 \text{ ц} + 500 \text{ кг} = 25 \text{ ц} + 5 \text{ ц} = 30 \text{ ц}$ или $2500 \text{ кг} + 500 \text{ кг} = 3000 \text{ кг}$.

Важно соблюдать требования к оформлению записи: $42 \text{ м} + 65 \text{ см} + 26 \text{ м } 83 \text{ см} = ?$

$$4265 + 2683 = 6948 \text{ (см)} \text{ или}$$

$$42 \text{ м } 65 \text{ см} + 26 \text{ м } 83 \text{ см} = 69 \text{ м } 48 \text{ см}.$$

Сложение и вычитание величин, выраженных в двух единицах измерения времени, изучают позже и без перевода величин в единицы одного наименования.

1.8. Свойства сложения чисел

Переместительное свойство сложения

Ознакомление с темой логично начать с рассмотрения рисунков предметных множеств с малочисленным количеством объектов (например, фишек домино, или множеств листьев двух разных деревьев, или мальчика с флажками) и проведения беседы-наблюдения по этим рисункам.

Ниже предложен вариант диалога по картинке, на которой мальчик держит в руках флажки.

Учитель: ребята, давайте рассмотрим рисунок. Сколько флажков у мальчика в правой руке?

Ответ обучающихся: два синих флажка.

Учитель: сколько флажков у мальчика в левой руке?

Ответ обучающихся: один красный флажок.

Учитель: сколько всего флажков у мальчика в руках? Запишите полученное равенство в тетрадь.

Записывают в тетради: $2 + 1 = 3$.

Учитель: как называется число 2?

Ответ обучающихся: первое слагаемое.

Учитель: как называется число 1?

Ответ обучающихся: второе слагаемое.

Учитель: что же такое число 3, как оно называется?

Ответ обучающихся: значение суммы.

Учитель: хорошо! Теперь внимательно посмотрите на соседний рисунок. Мальчик поменял флажки местами. Запишите равенство к этому рисунку.

Обучающиеся записывают: $1 + 2 = 3$.

Учитель: чем похожи эти равенства?

Ответ обучающихся: эти равенства похожи слагаемыми и значением суммы.

Учитель: что произошло с числами, когда мальчик поменял флажки местами?

Ответ обучающихся: первое и второе слагаемые поменялись местами.

Учитель: какой результат сложения в обоих случаях?

Ответ обучающихся: одинаковый.

Учитель: попробуем с вами ответить на вопрос: можно ли менять местами слагаемые при вычислении значения суммы?

Ответ обучающихся: можно.

Приведем вариант диалога учителя с обучающимися по картинке, где изображены листья (три листа липы и четыре листа дуба). Вниманию младших школьников предлагается следующее задание.

Выберите равенства, которые соответствуют рисунку:

1) $4 + 3 = 7$; 2) $5 + 2 = 7$; 3) $1 + 6 = 7$; 4) $3 + 4 = 7$.

Чем они похожи? Чем отличаются?

Учитель: ребята, перед вами четыре равенства, а под ними находится рисунок. Ваша задача найти равенства, которые будут соответствовать рисунку.

Обучающиеся выписывают в тетрадь равенства в соответствии с рисунком.

Учитель: какие равенства вы себе выписали в тетрадь?

Ответ обучающихся: $4 + 3 = 7$ и $3 + 4 = 7$.

Учитель: совершенно верно! Чем похожи эти равенства?

Ответ обучающихся: они похожи слагаемыми и значением суммы.

Учитель: чем отличаются равенства?

Ответ обучающихся: они отличаются положением первого и второго слагаемого.

Учитель: а значение суммы в обоих случаях получилось одинаковым?

Ответ обучающихся: да. В первом и во втором равенствах значение суммы равно 7.

Учитель: хорошо, ребята. Вы, наверное, уже догадались, какое правило математики нам помогло выполнить это задание. Давайте вместе сформулируем это правило (учитель вместе с обучающимися проговаривает правило: «От перестановки слагаемых значение суммы не меняется»).

Авторы учебников в рамочке вводят правило: **от перестановки слагаемых результат сложения не изменяется**. Оно выделено жирным шрифтом, учитель говорит, что это правило надо запомнить.

Сочетательное свойство сложения

Традиционный подход к теме «Нумерация чисел» выстроен концентрически. Знакомство с сочетательным свойством в данном случае осуществляется постепенно. Сначала, в центре «десяток», выполнения практические упражнения, младшие школьники убеждаются, что числа можно прибавлять по частям (аналогично предметам, которые можно присоединять сразу или частями). Обучающиеся выполняют предметные действия или рассматривают иллюстрации. С их помощью объясняют, как можно вычислить сумму трех слагаемых по-разному. Выполняют следующие задания.

Вычислите сумму трех слагаемых по-разному

33333KKKCC

33333KKKCC

$$(5 + 3) + 2 = \square$$

$$5 + (3 + 2) = \square$$

Значит, $(5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2)$.

Проверьте, что $(2 + 7) + 3 = 2 + (7 + 3)$, $(6 + 1) + 9 = 6 + (1 + 9)$. Приведите пример, в котором перестановка слагаемых облегчает вычисления.

Затем, в центре «сотня», после выполнения практических упражнений обучающиеся приходят к обобщению и теоретической формулировке свойства: результат сложения не изменится, если соседние слагаемые заменить их суммой.

В рамках развивающего подхода к обучению тема «Сочетательное свойство сложения» изучается в параграфе «Порядок выполнения действий в выражениях. Скобки». Одной из главных задач при изучении темы служит проговаривание действий: например, к числу три прибавляется сумма чисел десять и пять, или число три прибавляется к сумме чисел десять и пять. Обучающимся предлагают следующие задания.

Определите порядок действий и прочитайте выражения в каждой паре:

а) $18 - 7 + 4$ и $18 - (7 + 4)$;

б) $14 + (6 + 2)$ и $14 + 6 + 2$;

в) $9 + (5 + 3)$ и $(9 + 5) + 3$.

Вычислите значения выражений в каждой паре. В каких парах значения выражений одинаковые, а в каких разные?

Найдите правило, по которому составлены столбцы выражений:

$9 + 3 + 4;$	$8 + 4 + 5;$	$7 + 6 + 4;$
$12 + 4;$	$12 + 5;$	$13 + 4;$
$9 + 7;$	$8 + 9;$	$7 + 10.$

Составьте столбцы по тому же правилу для выражений:

$18 + 30 + 40;$
 $40 + 8 + 50;$
 $12 + 3 + 20.$

Вычислите значения всех выражений. Что вы заметили?

Далее обучающиеся формулируют вывод. Оказывается, два соседних слагаемых можно заменять значением их суммы. Учитель объясняет, что это сочетательное свойство сложения: **результат сложения не изменится, если соседние слагаемые заменить их суммой**
 $(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3).$

В учебниках это свойство выделяется в рамочку и заучивается младшими школьниками.

Формированию умения применять сочетательное свойство сложения способствуют следующие задания:

Каким выражением в каждой паре вы воспользуетесь для вычисления результата?

$(21 + 9) + 7;$	$(69 + 27) + 3;$	$(82 + 8) + 5;$
$21 + (9 + 7);$	$69 + (27 + 3);$	$82 + (8 + 5).$

Покажите с помощью скобок, какие два слагаемых вы замените значением их суммы, чтобы найти значение каждого выражения:

$54 + 6 + 9;$	$36 + 7 + 3;$	$18 + 2 + 54.$
---------------	---------------	----------------

Используя оба свойства сложения, можно складывать числа в любом порядке, как удобнее.

Например,

$6 + 9 + 4 + 1 = (6 + 4) = (9 + 1);$
 $17 + 8 + 3 + 2 = (17 + 3) + (8 + 2).$

Сравните выражения в каждом столбике и объясните, как получено каждое следующее из предыдущего:

$$7 + 8 + 3 + 2;$$

$$3 + 4 + 2 + 1;$$

$$7 + 3 + 8 + 2;$$

$$(3 + 4) + (2 + 1);$$

$$(7 + 3) + (8 + 2);$$

$$7 + 3.$$

$$10 + 10;$$

Вы уже знаете, что слагаемые можно складывать в любом порядке, как удобнее. Пользуясь этим правилом, вычислите следующие суммы:

$$50 + 6 + 30;$$

$$7 + 20 + 3 + 70;$$

$$20 + 9 + 40;$$

$$1 + 50 + 40 + 9.$$

Вычислите удобным способом следующие суммы:

$$20 + 8 + 60 + 2;$$

$$70 + 10 + 16;$$

$$40 + 1 + 9 + 50;$$

$$20 + 5 + 5 + 30;$$

$$35 + 2 + 48 + 5;$$

$$89 + 7 + 1 + 3;$$

$$27 + 54 = 3 + 16;$$

$$18 + 24 + 26 + 22.$$

Решите удобным способом:

$$45 + 38 + 5 + 2;$$

$$17 + 6 + 34 + 3;$$

$$6 + 27 + 14 + 3;$$

$$25 + 8 + 5 + 42;$$

$$12 + 19 + 8 + 1;$$

$$13 = 55 + 5 + 7;$$

$$16 + 17 + 4 + 3;$$

$$9 + 4 + 31 + 56.$$

1.9. Смысл действия умножения. Методика изучения умножения

Основа определения операции умножения, так же как операций сложения и вычитания – теоретико-множественный подход к целым неотрицательным числам².

Рассмотрим непустые множества $A_1, A_2 \dots A_b$, которые попарно не пересекаются и принадлежат одному классу равномощных множеств. Значит, $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_b$ и $m(A_1) = m(A_2) = \dots = m(A_b) = a$,

² Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел – один из разделов дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов», изученный студентами ранее.

$a \in \mathbb{N}$. В универсальном множестве всегда существует их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b$. Поскольку $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), то $m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_b) = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}$.

Определение. Произведением двух целых неотрицательных чисел a и b называют число элементов объединения b равномощных попарно не пересекающихся подмножеств, содержащих по a элементов в каждом,

$$a \cdot b = m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b); \quad A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_b, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

При $b = 1$ произведение $a \cdot b$ определяется как число элементов в множестве A , и если $m(A) = a$, то $a \cdot b = a$.

При $b = 0$ произведение $a \cdot b$ определяется как число элементов пустого множества, а поскольку $m(\emptyset) = 0$, то $a \cdot b = 0$.

Для младшего школьника формулировка операции умножения чисел будет иметь следующий вид.

Определение. Произведением двух целых неотрицательных чисел a и b называют:

$$1) a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}, b > 1;$$

$$2) a \cdot b = a, b = 1;$$

$$3) a \cdot b = 0, b = 0.$$

Такая трактовка определения легко переводится на язык предметных действий, позволяет активно использовать ранее изученный материал. Для осознания необходимости введения нового действия, опираясь на наглядные пособия, обучающиеся наблюдают тарелки с яблоками. На каждой тарелке по три яблока. Учитель спрашивает, сколько яблок на четырех тарелках.

Обучающийся записывает на доске: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Учитель сообщает, что сложение одинаковых слагаемых можно заменить умножением. Для записи этого действия используют знак «точка» ($\cdot$), читают «умножить». Тогда про количество яблок на тарелках с помощью нового действия можно записать $3 \cdot 4 = 12$, что означает «по три взять четыре раза».

Далее учитель раздает каждому обучающемуся бумажную закладку для книги прямоугольной формы, разбитую на равные участки (квадраты). Нужно посчитать, на сколько квадратов разбита закладка.

Достаточно посчитать число квадратов в одном ряду (их восемь) и повторить это число слагаемых пять раз ($8 + 8 + 8 + 8 + 8$). Затем учитель записывает на доске $8 \cdot 5$. Сколько получается в результате, говорят обучающиеся или посчитав значение суммы, или пересчитав квадраты закладки.

Необходимо выяснить, что в записях действия умножения обозначает каждый множитель. Сопоставляя записи $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ и $8 \cdot 5$, обучающиеся приходят к выводу, что первый множитель обозначает то, какие слагаемые складываются, а второй множитель обозначает количество таких слагаемых. Поэтому важно упражняться в чтении выражений вида $6 \cdot 7$ (6 взять 7 раз, 6 повторить 7 раз, 6 умножить на 7); $15 \cdot 2$; $24 \cdot 4$; $57 \cdot 3$.

В рамках *традиционного подхода* обучающиеся переходят к выполнению заданий, задача которых – формирование умения умножать числа.

В *развивающем обучении* при выполнении практических заданий для усвоения смысла умножения имеют место приемы анализа, синтеза, классификации, сравнения, выбора, конструирования. Приведем примеры таких заданий.

1. На классификацию.

По каким признакам можно разбить выражения каждого столбца на две группы?

$9 + 9 + 9 + 9 + 9$;	$34 + 34 + 34 + 34$;	$8 + 7 + 5 + 8 + 8 + 8$;
$12 + 12 + 12 + 12$;	$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$;	$32 + 32 + 32$;
$5 + 5 + 9 + 5 + 8$;	$28 + 28 + 28$;	$18 + 18 + 28 + 27$;
$8 + 8 + 8 + 8 + 8$;	$24 + 24 + 24 + 21$;	$6 + 6 + 6 + 3 + 3$.

2. На соотнесение рисунка с математической записью.

Даны рисунки множеств с одинаковыми предметами, но их разными количествами и различными расположениями предметов (парами, тройками, пятками). Из множества рисунков выберите тот, который соответствует записи $2 \cdot 6$.

Подпишите оставшиеся рисунки математической записью по форме $\square \cdot \square$.

Рассмотрите любые два рисунка. Ответьте на вопрос: какие изменения нужно внести в данные рисунки, чтобы они соответствовали записи $2 \cdot 6$?

3. На сравнение выражений на основе определения умножения.

Не вычисляя значений произведений, поставьте знаки $>$ или $<$, чтобы получились верные неравенства: $12 \cdot 9$ и $12 \cdot 11$; $24 \cdot 7$ и $24 \cdot 5$.

Можно ли, не вычисляя значений выражений, ответить на вопрос: «На сколько в каждой паре значение первого произведения меньше значения второго произведения?»

$6 \cdot 4$;	$5 \cdot 3$;	$7 \cdot 8$;	$6 \cdot 3$;	$7 \cdot 2$;
$6 \cdot 5$;	$5 \cdot 4$;	$7 \cdot 9$;	$6 \cdot 5$;	$7 \cdot 4$.

Не выполняя вычислений, найдите в каждом столбце «лишнее» выражение:

$9 \cdot 5$;	$8 \cdot 4$;	$7 \cdot 4$;
$9 \cdot 6 - 6$;	$8 \cdot 5 - 4$;	$7 \cdot 3 + 3$;
$9 \cdot 4 + 9$;	$8 \cdot 3 + 8$;	$7 \cdot 3 + 7$;
$9 \cdot 6 - 9$;	$8 \cdot 5 - 8$;	$7 \cdot 5 - 7$.

4. На замену произведения суммой и суммы – произведением.

Замените там, где можно, сложение умножением и запишите, чему равно значение каждого выражения:

$13 + 31 + 9$;	$4 + 4 + 4 + 4 + 4$;
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4$;	$0 + 0 + 0 + 0 + 0$;
$1 + 1 + 1 + 1 + 1$;	$19 + 19 + 119$.

Запишите каждое произведение в виде суммы одинаковых слагаемых:

$(19 - 3) \cdot 4 = \square + \square + \square + \square$;

$(56 - 8) \cdot 6 = \square + \square + \square + \square + \square + \square$.

5. На сравнение двух произведений, значение одного из которых известно.

Вычислите значения произведений в каждом столбце, пользуясь данными равенствами:

$$9 \cdot 5 = 45;$$

$$9 \cdot 4;$$

$$9 \cdot 6;$$

$$8 \cdot 7 = 56;$$

$$8 \cdot 6;$$

$$8 \cdot 8;$$

$$7 \cdot 6 = 42;$$

$$7 \cdot 5;$$

$$7 \cdot 7.$$

О понятиях «больше в...», «меньше в...»

В учебниках М. И. Моро вышеназванные понятия вводят одновременно после знакомства обучающихся с операцией деления. В разделе «Методические особенности изучения задач в начальной школе» учебника [13] и пособия [3] озвучено, что средством формирования понятий служат простые задачи. Поэтому усвоение отношений «больше в...», «меньше в...» связано с решением простых задач на предметном уровне. Выполняется задание: «Сделай к задаче рисунок, реши ее».

На ветке сидело три птички, потом прилетело птичек в два раза больше, чем было. Сколько птичек прилетело?

На одной ветке сидело три птички, на другой ветке – на две птички больше. Сколько птичек сидело на второй ветке?

Одновременное использование в одном задании понятий «увеличить на...» и «увеличить в...» позволит обучающимся дифференцировать их и допускать меньше ошибок, применяя эти понятия к решению разных задач.

Методически другой подход используют в учебниках Н. Б. Истоминой. Понятие «увеличить в...» вводится сразу после знакомства со смыслом умножения, понятие «уменьшить в...» – после знакомства со смыслом деления. Ранее усвоенные знания и приемы умственной деятельности (анализ, синтез, сравнение) обучающиеся активно используют при выполнении заданий на усвоение понятия «больше в...» / «увеличить в...».

В основе выполнения заданий при данном подходе лежит способ соотнесения рисунка с математической записью. Например:

На рисунке справа изображены три предмета, на рисунке слева – 12 таких же предметов (расположены вертикально в четыре столбца по три предмета в каждом столбце). Задание: сравните два рисунка.

Расскажите, что изменилось слева направо? Что обозначают записанные выражения $3 \cdot 4$ и $3 + 4$? Соотнесите записи с соответствующими рисунками.

Учитель просит обучающихся прочитать запись $3 \cdot 4$ по-разному (три повторить четыре раза, по три взять четыре раза, три умножить на четыре). Младшие школьники при ответе на вопрос: «как увеличили число три, если его повторили четыре раза?» говорят, что «три увеличили в четыре раза». Учитель предлагает здесь начертить отрезок, длина которого в четыре раза больше данного. Заметим, что в этом задании множества предметов заменены схемой.

1.10. Свойства умножения

Переместительное свойство умножения

В начальном курсе математики нашли отражение все свойства умножения: коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное.

Коммутативность умножения представлена в начальных классах как переместительное свойство: **от перестановки множителей значение произведения не изменяется**. При знакомстве с этим свойством умножения обучающиеся выполняют задания на соотнесение рисунка с математической записью и на сравнение числовых выражений, в которых переставлены множители. Усвоение формулировки переместительного свойства умножения обычно не вызывает затруднений, хотя многие обучающиеся ошибаются, называя множители слагаемыми, а произведение – суммой.

Эти ошибки могут возникнуть по разным причинам. Во-первых, сам учитель редко использует в своей речи математическую терминологию; во-вторых, обучающиеся больше нацелены на заучивание таблицы, нежели на усвоение смысла умножения; в-третьих, вербальная формулировка переместительного свойства умножения не соотносилась с предметными моделями, иллюстрирующими это свойство.

В результате формального подхода к изучению данного свойства многие обучающиеся путают значения первого и второго множителей в записи произведения. Чтобы предупредить эту ошибку, полезно предлагать задания на выполнение рисунков, соответствующих той или иной конкретной ситуации. Например:

На каждую тарелку положили по два яблока. Покажите, сколько яблок на шести тарелках.

Большинство обучающихся выполняют этот рисунок и запишут $2 \cdot 6 = 12$. Стоит сразу же выяснить, можно ли к данному рисунку сделать запись $6 \cdot 2 = 12$. При обсуждении учитель предлагает заменить произведение суммой и найти результат. Обучающиеся выясняют, что означают в этом случае числа 6, 2 и 12; делают вывод, что выражение $6 \cdot 2$ к данной ситуации не подходит. Учитель предлагает иначе разложить яблоки на тарелки в соответствии с записью $6 \cdot 2 = 12$. Получается, что переместительное свойство умножения в любом случае справедливо только для выражений ($3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$; $5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$), не имеющих предметного смысла. Если же речь идет о предметной ситуации, то необходимо учитывать, что обозначает каждое число в записи произведения.

Выполнение таких упражнений оказывается полезным в дальнейшем при решении текстовых задач на умножение, в которых даны не отвлеченные числа, а числовые значения величин, поэтому при перестановке множителей произведение может не иметь смысла, соответствующего сюжету задачи.

Рассмотрим следующую задачу.

От мотка проволоки длиной 82 метра отрезали 4 куска по 8 метров каждый. Сколько метров проволоки осталось в мотке?

Приведем два варианта записи решения:

первый вариант

1) $8 \cdot 4 = 32$ (м);

2) $82 - 32 = 50$ (м).

второй вариант

1) $4 \cdot 8 = 32$ (м);

2) $82 - 32 = 50$ (м).

В практике начального обучения обычно второй вариант записи решения задачи считают ошибочным. Это объясняется тем, что, комментируя решение задачи, обучающиеся (да и сам учитель) говорят: «Я 8 метров умножу на 4, т. е. повторю 8 метров 4 раза». Если так же прочитать запись, которая дана справа: «Я 4 куска умножу на 8», то, конечно, это не будет иметь смысла. Но если в записи решения наименования даны только в скобках, то обе записи первого действия можно считать верными, так как предметный смысл произведения находит отражение в том наименовании, которое записано в скобках, а умножение выполняется с числами. Однако эта условность воспринимается с

трудом, и не столько обучающимися, сколько учителями начальных классов, так как в курсе арифметики запись первого действия в первом варианте выполнялась так: $8 \cdot 4 = 32$ м.

Знание переместительного свойства умножения позволяет обучающимся выполнять задания, в которых они используют и определение умножения, и его переместительное свойство.

Можно ли, не вычисляя значений выражений, вставить в окошки знаки $<$, $>$, $=$, чтобы получились верные записи?

$$9 + 9 \square 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2;$$

$$7 + 7 \square 2 + 2 + 2 + 2 + 2;$$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 \square 6 + 6.$$

Какие числа можно вставить в окошки, чтобы получились верные записи?

$$9 \cdot 8 + \square > 8 \cdot 9 + \square;$$

$$9 \cdot 7 > 9 + 9.$$

По какому правилу составлены равенства?

$$2 \cdot 9 = 9 + 9;$$

$$3 \cdot 9 = 9 + 9 + 9;$$

$$4 \cdot 9 = 9 + 9 + 9 + 9.$$

Пользуясь этим правилом, найдите значения выражений.

Сочетательное свойство умножения

С сочетательным свойством умножения обучающихся целесообразно познакомить после изучения таблицы умножения. Для этой цели можно использовать как прием аналогии, так и соотнесение предметных и символических моделей.

В первом случае следует вспомнить, какие свойства арифметических действий уже известны младшим школьникам. Уместно будет предложить задания на сравнение числовых выражений, при выполнении которых обучающимся предстоит пользоваться тем или иным свойством сложения.

Верно ли утверждение, что значения выражений в данном столбце одинаковы?

$$875 + (78 + 284);$$

$$(875 + 78) + 284;$$

$$875 + (284 + 78);$$

$$(875 + 284) + 78.$$

Вполне возможно, что не все обучающиеся смогут сформулировать сочетательное и переместительное свойства сложения, но все обратят внимание на то, что в предложенных выражениях даны одинаковые числа, только по-разному расставлены скобки и переставлены слагаемые. А это значит, что младшие школьники будут анализировать выражения, искать в них признаки сходства и различия, рассуждать и делать выводы.

Имеет смысл предложить выражения, значения которых обучающиеся вычислить не могут. В этом случае они будут вынуждены сделать вывод на основе рассуждений.

Сравнивая, например, первое и второе выражения, они отмечают их сходство и различие, вспоминают сочетательное свойство сложения и делают вывод, что значения выражений будут одинаковыми. Третье выражение целесообразно сравнить с первым и, используя переместительное свойство сложения, сделать вывод.

Четвертое выражение сравнивают со вторым.

Учитель спрашивает, как записать сочетательное свойство умножения. (Обучающиеся могут самостоятельно придумать различные выражения, чтобы высказать то или иное предположение.) Например: $(2 \cdot 3) \cdot 4$ и $2 \cdot (3 \cdot 4)$.

При знакомстве с сочетательным свойством умножения можно также использовать соотнесение предметных и символических моделей. Для этого учитель предлагает обучающимся следующее задание.

На рисунке изображены шесть одинаковых прямоугольников. Каждый прямоугольник разбит на шесть единичных квадратов. Задание: найдите на рисунке число единичных квадратов.

Обучающиеся предлагают различные способы действий. Записав каждый способ в виде выражений $(6 \cdot 4) \cdot 2$ и $6 \cdot (4 \cdot 2)$, учитель просит школьников объяснить, как они действовали в каждом случае, и

найти значение каждого выражения. В результате обсуждения обучающиеся записывают равенство $(6 \cdot 4) \cdot 2 = 6 \cdot (4 \cdot 2)$ и знакомятся с формулировкой сочетательного свойства умножения: **чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел.**

Сочетательное свойство умножения удобно применять, вычисляя значения произведений однозначных чисел на круглые десятки

$$4 \cdot 90 = 4 \cdot (9 \cdot 10) = (4 \cdot 9) \cdot 10 = 36 \cdot 10 = 360.$$

Распределительное свойство умножения

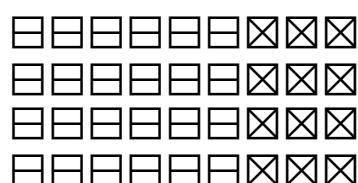
При изучении распределительного свойства умножения, которое звучит следующим образом: **при умножении суммы на число можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить**, также целесообразно использовать прием соотнесения предметных и символических моделей, что создает условия для анализа, сравнения, обобщения и понимания обучающимися формулировки данного свойства.

Объясните, что обозначают выражения, записанные под каждым рисунком. Чем они похожи? Чем отличаются? Вычислите их значения.



$$5 \cdot 3 + 2 \cdot 3;$$

$$(5 + 2) \cdot 3;$$



$$(6 + 3) \cdot 4;$$

$$6 \cdot 4 + 3 \cdot 4.$$

Вставьте знаки $<$, $>$, $=$, чтобы получились верные записи:

$$(14 + 8) \cdot 3 \dots 14 \cdot 3 + 8 \cdot 3;$$

$$(27 + 8) \cdot 6 \dots 27 \cdot 6 + 8;$$

$$(36 + 4) \cdot 18 \dots 40 \cdot 18.$$

Для усвоения распределительного свойства умножения полезно выполнить следующие задания.

Вставьте пропущенные числа, чтобы равенства были верными:

$$\text{а) } (8 + \dots) \cdot 3 = \square + 4 \cdot 3; \quad \text{б) } (\square + \square) \cdot 5 = 35 + 45;$$

$$(6 + \square) \cdot 7 = 6 \cdot 7 + 49; \quad (\square + \square) \cdot \square = 63 + 72;$$

$$(6 + 9) \cdot \square = 36 + \square; \quad (5 + \square) \cdot \square = 5 \cdot 8 + 32.$$

Запишите пропущенные числа и цифры, чтобы равенства были верными:

$$\begin{aligned} \text{а) } (7 + 6) \cdot \square = \square \cdot 3 + \square \cdot 3; \quad \text{б) } (\square + \square) \cdot 4 = 3 \cdot \square + 2 \cdot \square; \\ (8 + \square) \cdot \square = \square \cdot 6 + \square \cdot 2; \quad (\square + \square) \cdot \square = 42 + 6. \end{aligned}$$

Знакомство младших школьников с распределительным свойством умножения позволяет им самостоятельно «открыть» рациональный вычислительный прием устного умножения двузначного числа на однозначное, проверить результаты вычислений, а также научиться решать текстовые задачи различными способами.

1.11. Смысл действия деления. Методика изучения деления

В курсе дисциплины «Теоретические основы математической подготовки» рассматривают разные подходы к определению операции деления: теоретико-множественный, аксиоматический, подход с точки зрения измерения величин. Напомним, как определяли деление с теоретико-множественных позиций.

Определение. Деление на $\mathbb{N}_0$ – это частичная алгебраическая операция, которая двум целым неотрицательным числам n и k ($k \neq 0$) ставит в соответствие их частное,

$$n, k \in \mathbb{N}_0 \ (k \neq 0) \rightarrow n : k.$$

Деление – операция, обратная умножению. О делении говорят в том случае, когда по известному произведению и одному из множителей ищут другой множитель. Теоретико-множественный смысл деления лучше прояснить, используя второе определение произведения. Итак, пусть

$$p = n \cdot k = m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k),$$

где $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) и $m(A_1) = m(A_2) = \dots = m(A_k) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

В таком случае можно говорить о множестве M , представленном в виде объединения равномоощных попарно не пересекающихся подмножеств, число элементов множества m равно p . Далее определяют два типа деления – в зависимости от того, что задано: количество подмножеств (k) или число элементов в подмножествах (n).

Первый тип деления – *деление на равные части*. В этом случае множество M , число элементов которого равно p , разбивают на k равномоощных между собой подмножеств.

Определение. Частным от деления чисел p и k при делении на равные части называют число элементов в каждом подмножестве

$$p : k = m(A_i) \quad (i = 1, 2 \dots k).$$

Например, найдем частное от деления чисел 6 и 2 при делении на равные части.

По определению $6 = m(M)$, 2 – количество подмножеств A_i . Тогда $6 : 2 = m(A_i)$. Разобьем 6-элементное множество на два равномоощных между собой подмножества и подсчитаем число элементов в них (рис. 1).

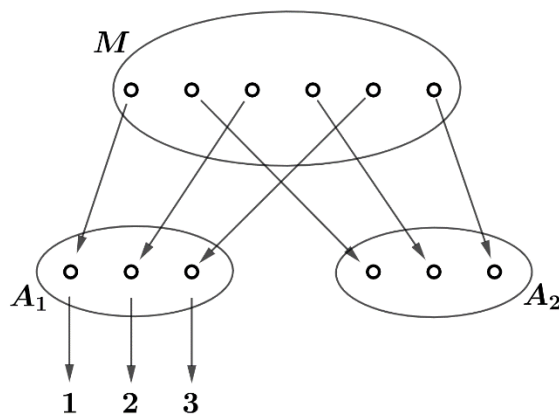


Рис. 1

Видим, что $A_1 \sim A_2 \sim \mathbb{N}_3$. Значит, $m(A_i) = 3$. Согласно выделенным условиям заключаем, что $6 : 2 = 3$.

Второй тип деления – *деление по содержанию*. В этом случае множество M , число элементов в котором равно p , разбивают на равномоощные между собой подмножества с известным, равным n , числом элементов в каждом.

Определение. Частным от деления чисел p и n при делении по содержанию называют количество подмножеств в разбиении множества M

$p : n$ – количество подмножеств A_i .

Например, найдем частное от деления чисел 6 и 2 при делении по содержанию.

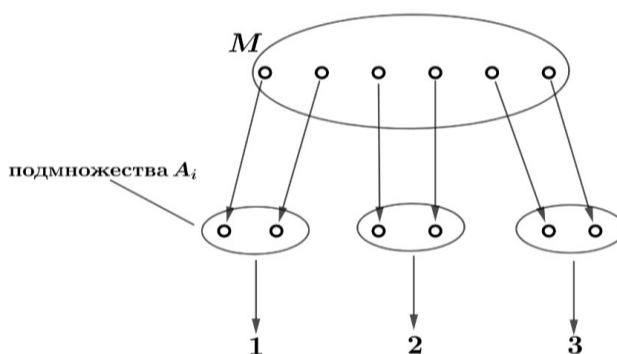


Рис. 2

По определению, $6 = m(M)$ 2 – число элементов в каждом подмножестве A_i , т. е. $2 = m(A_i)$. Тогда $6 : 2$ – количество подмножеств A_i .

Разобьем 6-элементное множество на равномоощные подмножества, число элементов в каждом из них равно 2, и после этого подсчитаем количество получающихся подмножеств.

Видим, что количество подмножеств A_i равно 3. Согласно выделенным условиям заключаем, что $6 : 2 = 3$.

Итак, представления о смысле деления у младших школьников формируются на основе теоретико-множественного подхода к трактовке частного, суть которого сводится к разбиению конечных множеств на равночисленные подмножества, не имеющие общих элементов.

Выбор этого подхода обусловлен тем, что он позволяет опираться на жизненный опыт обучающихся при введении новой терминологии и математической записи. Действительно, большинство школьников легко справляются с таким практическим заданием: «Раздай десять яблок по два каждой девочке».

Наглядное изображение выполняемых действий помогает ребенку осознать их математический смысл.



Он сводится к разбиению конечного множества яблок на равночисленные подмножества (по два яблока). В результате получаем число частей в этом разбиении. На языке, доступном младшему школьнику, это означает, что он разделил все яблоки на части, по два яблока в каждой, т. е. узнал, «сколько раз по два содержится в десяти». Выполненные действия в математике принято записывать следующим образом:

$$10 : 2 = 5 \text{ (десять разделить на 2, получится 5).}$$

Доступно обучающимся и такое задание: «Раздай десять яблок поровну двум девочкам».

В данной ситуации обучающиеся могут действовать по-разному: одни будут брать по одному яблоку и раздавать их девочкам по очереди (сначала одной девочке, потом другой), пока не раздадут все; другие могут сразу взять два яблока, так как девочек две, и разделить между ними эти яблоки, затем так же поступить со второй парой яблок, с третьей и так далее, пока не раздадут все яблоки.

В результате выполнения описанных действий множество всех яблок будет разделено на две равные части, численность каждой из которых равна пяти.

Процесс деления на равные части довольно трудно изобразить на рисунке, но, когда деление выполнено практически и определена численность каждой части, рисунок можно использовать для осознания обучающимися результата выполненного предметного действия.



Таким образом, число пять может обозначать число частей, на которые разделили десять яблок (при этом делили поровну, по два яблока в каждой части). Этот случай деления в методике математики стали называть *делением по содержанию*. Но число пять может обозначать и количество яблок в каждой части (при этом делили опять же поровну, но на две равные части). Этот случай стали называть в методике начальной математики *делением на равные части*.

В практике начального обучения традиционно принято сначала рассматривать ситуации, связанные только с первым случаем деления, а затем со вторым. Некоторые учителя вводят даже термины «деление по содержанию» и «деление на равные части», требуя от школьников узнавания каждого случая деления и воспроизведения его названия. При этом, когда выполняется деление «по содержанию», нужно говорить, что «десять разделили **по** два», а когда выполнено «деление на части», то «десять разделили **на** два».

Однако в математике числовые равенства ($10 : 2 = 5$; $8 : 4 = 2$) принято читать так: «Десять разделить на два; восемь разделить на четыре», независимо от тех конкретных ситуаций, которые им соответствуют. Термин «разделить по...» употребляют лишь в том случае, когда речь идет о конкретных предметах, что связано с особенностями русского языка. Например, по-русски не говорят: «десять яблок разделить на два яблока», а говорят так: «десять яблок разделить по два яблока». При чтении же числового равенства мы не называем предметы, поэтому можно сказать: «Десять разделить на два, получим пять». Отсюда следует, что термины «деление по содержанию» и «деление на равные части» вводить не нужно, так как числовые равенства вида $10 : 2 = 5$ могут соответствовать предметной ситуации, связанной как с «делением по содержанию», так и с «делением на равные части».

Естественно, что деятельность обучающихся при различных методических подходах организовывается по-разному. Традиционный

взгляд, где обучающиеся усваивают смысл деления в процессе решения простых задач, согласован с описанием рассуждений в задаче выше. В методике развивающего обучения предлагается устанавливать соответствие между предметными моделями и математической записью. Предметные модели служат наглядной основой установления существенного признака операции деления.

Такой вариант нашел отражение в учебнике Н. Б. Истоминой (2-й класс). Рассматривается ситуация деления 12 конфет. Сначала обучающиеся анализируют готовые рисунки, озвучивая, чем они похожи и чем отличаются (на одной картинке 12 конфет, на другой тоже 12. На первой картинке в каждой части число конфет одинаково, на второй картинке тоже. Конфеты разделили поровну и т. д.). Если никто не сможет в обобщенном виде указать существенный признак сходства (одинаковое количество конфет в каждой части), то следует задать этот же вопрос применительно к паре картинок, где первая содержит одинаковое количество конфет в каждой части, а вторая – разное. Тогда обучающиеся замечают, что на исходной паре картинок в каждой части одинаковое количество конфет, а на другой разное. Это позволяет им самостоятельно выполнить рисунки других способов деления 12 конфет на равные части (рисуют разбивки на группы по два, по одному, по шесть).

Последующая работа сводится либо к объяснению выражений и равенств, записанных под каждым рисунком, либо к выбору выражений, соответствующих каждому рисунку. Например, учитель выполняет запись $12 : 4 = 3$ под первой парой рисунков, а обучающиеся поясняют, что число 12 обозначает количество конфет на одной и другой картинке. Число четыре в первом случае обозначает количество конфет в каждой части, а во втором – количество равных частей, на которые разделили конфеты. Поэтому число три в одном случае обозначает количество частей, а в другом – количество конфет в каждой части. Такое комментирование требует содержательного анализа каждого рисунка, и в то же время оно доступно и понятно всем школьникам.

Подобная работа – хорошая подготовка к решению задач, где нужно будет вербальную модель переводить в символическую. Важно обратить внимание обучающихся на то, что деление конфет во второй паре картинок в случае с разными по количеству частями нельзя записать на языке математики с помощью действия деления.

Итак, основная задача учителя при знакомстве младших школьников со смыслом деления – организовать работу таким образом, чтобы обучающиеся, опираясь на свой опыт, анализировали конкретные ситуации и выбирали соответствующие им математические записи.

С этой целью предлагают задания следующих видов:

- к каждому рисунку подобрать соответствующее выражение;
- к одному рисунку выбрать несколько выражений из предложенных, а к следующему рисунку составить три своих выражения;
- сравнить рисунки в парах и объяснить, что обозначает каждое число в равенствах под рисунками.

В процессе выполнения таких заданий обучающиеся осознают связь действий умножения и деления, которая обобщается в виде правил, отражающих взаимосвязь компонентов и результатов умножения и деления. Правила формулируются следующим образом:

1) если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель;

2) если делитель умножить на значение частного, то получим делимое;

3) если делимое разделить на значение частного, то получим делитель.

Формирование представлений о смысле деления связано с введением понятия «уменьшить в несколько раз» («меньше в...»).

Два методических подхода

В *традиционной системе обучения* показывают образец действия. Далее понятие «меньше в...» (или усвоение способа действия) формируется при решении простых задач. Само задание формулируют так: «Сделай по задаче рисунок и реши ее». Например:

Юннаты вырастили десять цыплят, а утят в пять раз меньше, чем цыплят. Сколько утят вырастили юннаты?

У мальчика было восемь марок с городами, а с кораблями в два раза меньше. Сколько марок с кораблями было у мальчика?

В *развивающей системе* проводят анализ и сравнение моделей, описание выражений $3 + 9$ с $3 \cdot 4$ (по аналогии с отношениями «больше на...», «больше в...», см. выше) и $12 - 9$ с $12 : 4$. Обучающиеся высказывают предположение о том, что выражение $12 : 4$ связано

с понятием «меньше в...» / «уменьшить в...». Задания для усвоения нового понятия здесь даются аналогичные тем, которые были при изучении понятия «больше в...» / «увеличить в...»:

Рассмотрите рисунок. Ответьте, что изменилось слева направо? Справа налево?



Обучающийся проводит анализ рисунка. Слева три круга, справа три круга повторяются четыре раза. Это означает, что количество кругов увеличили в четыре раза. Справа 12 кругов. Если разделить их на четыре равные части, то в каждой части получим кругов в четыре раза меньше.

Начертите две пары отрезков длиной 3 см и 6 см, 8 см и 2 см. Что можно сказать о длине отрезков каждой пары?

Овладев понятиями «увеличить в...» («больше в...»), «уменьшить в...» («меньше в...»), обучающиеся получают возможность познакомиться с кратным сравнением: «Во сколько раз меньше? Во сколько раз больше?»

Для осознания предметного смысла кратного сравнения можно использовать представления младших школьников о величинах — длине и площади фигур — и их измерениях с помощью мерок. В данном случае имеет место быть практическая работа с вырезанными из клетчатой бумаги моделями фигур (прямоугольником, квадратом). Располагая квадрат на прямоугольнике последовательно несколько раз, обучающиеся определяют, сколько квадратов уложилось в прямоугольнике.

Затем самостоятельно выясняют, сколько мерок-клеток в прямоугольнике (54 клетки), квадрате (9 клеток). Учитель уточняет: «Чему равна площадь прямоугольника?» (54 клетки); «Чему равна площадь квадрата?» (9 клеток).

Так, размещая должным образом квадрат в прямоугольнике, обучающиеся выясняют, сколько раз площадь квадрата укладывается в площади прямоугольника, или сколько раз 9 клеток укладываются в 54 клетках. Вывод записывают на языке математики в виде равенства $54 : 9 = 6$.

Для усвоения понятия кратного сравнения обучающиеся выполняют различные задания, содержащие вопрос: «Во сколько раз...».

Например,

- а) одна мерка больше другой мерки?
- б) одна мерка меньше другой мерки?
- в) кругов на одном рисунке больше, чем на втором?
- г) кругов на одном рисунке меньше, чем на втором?

В результате обучающиеся приходят к выводу. Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, надо большее число разделить на меньшее.

1.12. Деление суммы на число

Изучая тему «Делимость целых неотрицательных чисел» в курсе дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» [8; 9], мы доказывали ряд теорем. Две из них в начальной школе интерпретированы как свойства деления суммы на число.

1⁰. Если каждое слагаемое делится на натуральное число n , то и сумма этих слагаемых делится на число n .

2⁰. Если в сумме одно слагаемое не делится на данное число m , а все остальные слагаемые делятся на число m , то сумма на число m не делится.

Пользуясь этим свойством, можно делимое записать в виде суммы двух чисел, каждое из которых делится на данное число; разделить на это число сначала первое слагаемое, затем второе и полученные результаты сложить.

Можно рассказать обучающимся о способе действия. Например, значение выражения $(6 + 9) : 3$ можно найти, вычислив сумму и разделив полученный результат на три $(6 + 9) : 3 = 15 : 3 = 5$. Можно каждое слагаемое поделить на три и потом сложить полученные результаты $(6 + 9) : 3 = 6 : 3 + 9 : 3 = 2 + 3 = 5$. После чего сравнить значения выражений в первом и втором случае. Далее обучающиеся выполняют похожие задания, закрепляют новый способ действия.

Обучающиеся могут самостоятельно «открыть» новый способ действия при выполнении такого задания.

По какому правилу записаны выражения в каждом столбце? Вычислите их значения:

а) $54 : 9$;	б) $63 : 7$;	в) $42 : 7$;
$(36 + 18) : 9$;	$(49 + 14) : 7$;	$(21 + 21) : 7$;
$36 : 9 + 18 : 9$;	$49 : 7 + 14 : 7$;	$21 : 7 + 21 : 7$.

Анализируя выражения каждого столбца, обучающиеся обнаруживают, что сначала дано частное двух чисел. Его значение легко найти, пользуясь таблицей умножения. Затем дано выражение, где делимое представлено в виде суммы двух слагаемых. Поэтому значения первого и второго выражений во всех столбцах одинаковы. В третьем выражении каждого столбца обучающиеся замечают, что каждое слагаемое суммы, записанной в скобках во втором выражении, делят на то же число. Пользуясь правилом порядка выполнения действий, школьники находят значение третьего выражения. Оно такое же, как значения первого и второго выражений.

По аналогии обучающиеся составляют такие же столбцы выражений для частных $36 : 4$; $48 : 4$; $27 : 3$; $45 : 9$. Остается только описать выполняемый способ действий. (Если представить делимое в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на данное число, то можно на это число разделить сначала первое слагаемое, затем второе и результаты сложить.)

Для усвоения нового способа действия выполняют различные задания. Поскольку выражения, используемые в заданиях, включают только табличные случаи деления, обучающиеся не испытывают затруднений в вычислении их значений.

Представьте числа 81, 72, 45 в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 9. Запишите выражения и вычислите их значения.

Чем похожи выражения в каждой паре? Чем различаются?

а) $(24 + 48) : 8$ и $(22 + 50) : 8$;
б) $(42 + 14) : 7$ и $(40 + 16) : 7$;
в) $(35 + 30) : 5$ и $(33 + 32) : 5$.

В процессе выполнения данного задания обучающиеся используют навыки анализа и синтеза, сравнения, обобщения. Они отмечают,

что первое выражение в каждой паре составлено так, что каждое слагаемое в скобках делится на данное число, а во втором выражении ни одно из слагаемых в скобках не делится на данное число. Однако сумма чисел в скобках каждого выражения на данное число делится. Обобщая свои наблюдения, обучающиеся делают вывод, что каждое слагаемое может не делиться на данное число, а сумма разделится. В этом случае для вычисления результата следует воспользоваться правилом порядка выполнения действий, т. е. сначала найти значение суммы в скобках, а потом выполнить деление.

Можно предложить следующее задание.

Какие из чисел 36, 48, 52, 6, 24, 38, 56, 54, 28 можно записать в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 6? Можно ли уже выбранные числа представить в виде суммы слагаемых, которые не делятся на 6?

1.13. Порядок выполнения действий в выражениях

Цель изучения данной темы – знакомство обучающихся с правилами порядка выполнения действий в выражениях и формирование умения пользоваться ими. В начальных классах эти правила обычно формулируют в следующем виде.

Правило 1. В выражениях без скобок, содержащих только сложение и вычитание или только умножение и деление, действия выполняют в том порядке, как они записаны: слева направо.

Правило 2. В выражениях без скобок сначала слева направо выполняют по порядку умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Правило 3. В выражениях со скобками сначала вычисляют значение выражений в скобках. Затем слева направо по порядку выполняют умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Анализ приведенных правил позволяет выделить те основные признаки выражений, на которые обучающиеся будут ориентироваться при вычислении их значений. А именно: выражения без скобок и со скобками; выражения, содержащие только сложение и вычитание или только умножение и деление; выражения, обладающие следующими признаками: наличие скобок и всех четырех арифметических действий.

Приступая к изучению данной темы, следует иметь в виду, что уже до знакомства с правилами порядка выполнения действий обучающиеся вычисляли значения выражений, содержащих либо только сложение и вычитание, либо только умножение и деление, т. е. действовали в соответствии с правилом 1.

Кроме того, они знакомы с тем, что действие, записанное в скобках, выполняют первым. Необходимость введения этого правила возникла при изучении сочетательного свойства сложения, а затем его использовали при изучении сочетательного и распределительного свойств умножения и при делении суммы на число. Однако обучающиеся воспринимали это правило, скорее, как один из способов вычисления определенных выражений, нежели как общий способ действий.

Для подготовки обучающихся к восприятию правил порядка выполнения действий в выражениях как общего способа действий нужно, прежде всего, акцентировать их внимание на необходимости анализа различных числовых выражений с точки зрения тех признаков, на которые ориентировано каждое правило.

Для этого до знакомства с правилами целесообразно выполнить следующие задания.

Сравните выражения в каждой паре. Чем они похожи? Чем отличаются? Чем похожи все вторые выражения в каждой паре? Чем похожи первые выражения в каждой паре?

$$\begin{array}{lll} 72 - 9 - 3 + 6; & 48 - 6 + 7 + 8; & 27 - 3 + 2 - 7; \\ 72 : 9 \cdot 3 : 6; & 48 : 6 \cdot 7 : 8; & 27 : 3 \cdot 2 : 6. \end{array}$$

Чем отличаются друг от друга выражения в каждом столбце?

$$\begin{array}{ll} 56 - (8 + 9) - 7; & 72 : 9 \cdot 3 : 6 : 2; \\ 56 - 8 - 9 - 7 + 24; & 72 : 9 \cdot 3 : (6 : 2) \cdot 7; \\ 56 - 8 - 9 - (7 + 24); & 72 : 9 \cdot 3 : 6 : 2 \cdot 7. \end{array}$$

Анализ и сравнение предложенных пар выражений акцентируют внимание обучающихся на количестве арифметических действий, которые даны в каждом выражении; на числах, с которыми эти действия выполняются; и подготавливают младших школьников к пониманию смысла каждого правила.

Дальнейшая работа направлена на формирование умения соотносить данное выражение с определенным правилом, которым следует

руководствоваться при вычислении его значения. В этом случае целесообразно по отношению к приведенным выше выражениям выполнить следующие задания.

Выпишите выражения, при нахождении значения которых вы будете пользоваться:

- а) правилом 1;
- б) правилом 2;
- в) правилом 3.

По какому признаку записаны выражения в каждом столбце?

$29 - 8 + 24;$	$72 : 9 \cdot 3;$	$84 - 9 \cdot 8;$
$32 + 9 - 7 + 14;$	$48 : 6 \cdot 7 : 8;$	$54 + 6 \cdot 3 - 72;$
$64 - 7 + 16 - 8;$	$27 : 3 \cdot 2 : 6 \cdot 9;$	$8 + 7 \cdot 8 + 63 : 9.$

Расставьте порядок выполнения действий и вычислите значения выражений.

Какие числа нужно вставить в окошки, чтобы получились верные равенства?

$24 + 4 \cdot 3 = \square + 24;$	$36 : 6 - \square = \square - 5;$
$72 - 5 \cdot 3 = 8 \cdot 9 - \square;$	$(4 + 2) \cdot 7 = 6 \cdot \square;$
$72 + (40 - 4) : 9 = \square + 4;$	$\square : (9 - 3) \cdot \square = 48 : \square \cdot 7.$

В процессе усвоения правил порядка выполнения действий в выражениях обучающиеся совершенствуют вычислительные умения и навыки, а также повторяют ранее изученный материал. Для этой цели можно предлагать не только упражнения на вычисление значений выражений, но и задания с различными способами решений, требующие рассуждений.

1.14. Деление с остатком

Из курса математики известно, что «разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b – значит найти такие целые неотрицательные числа q и r , чтобы $a = b \cdot q + r$; $0 \leq r < b$ ».

Методика формирования понятия «деление с остатком» во многом зависит от ответа на вопрос: «С какой целью вводят данное понятие в начальный курс математики?»

В числе этих целей можно назвать:

- а) расширение представлений обучающихся о делении;
- б) усвоение существенного признака деления с остатком (остаток должен быть меньше делителя);
- в) овладение способами деления с остатком (подбор делимого или подбор частного);
- г) совершенствование вычислительных навыков (табличных случаев умножения и соответствующих случаев деления);
- д) использование данного понятия для выполнения письменных вычислений (алгоритма письменного деления).

Все названные цели взаимосвязаны. Цель, названная последней, служит обобщением ранее озвученных. Во-первых, она включает в себя все предыдущие цели; во-вторых, определяет перспективу практического использования данного понятия, что позволяет в процессе его усвоения провести подготовительную работу для изучения алгоритма письменного деления.

Ориентируясь на математическое определение деления с остатком, основную цель изучения данного понятия и особенности усвоения понятий младшими школьниками, выделим в методике изучения темы «Деление с остатком» следующие этапы.

Этап 1. Постановка учебной задачи. Разъяснение предметного смысла деления с остатком. Знакомство с новой формой записи и с новыми терминами.

Для постановки учебной задачи учитель опирается на знания обучающихся о смысле действия деления и предлагает им следующее задание.

Объясните, что обозначают записи под каждым рисунком.



$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$



$$13 : 3 = 4 \text{ (ост. 1)}$$

$$13 : 4 = 3 \text{ (ост. 1)}$$



$$14 : 3 = 4 \text{ (ост. 2)}$$

$$14 : 4 = 3 \text{ (ост. 2)}$$

Обучающие самостоятельно комментируют записи, данные под верхним рисунком, используя знания о смысле деления. Рассматривая второй рисунок и пользуясь известным способом действия, они называют количество кругов в каждой части (3, 3, 3, 3) и обычно заканчивают свой ответ так: «А один круг остался». Потому комментирование записей под этим рисунком также не вызывает затруднений (первая запись означает, что 13 кругов делили на части по три круга в каждой, получили четыре равные части, и один круг остался; вторая запись означает, что 13 кругов разделили на четыре равные части, получили в каждой части по три круга, и один круг остался). Аналогично комментируют записи под третьим рисунком.

Для подведения обучающихся к выводу о том, что остаток при делении должен быть меньше делителя, полезно обсудить следующие вопросы:

а) «Можно ли к первому рисунку выполнить такую запись: $12 : 3 = 3$ (ост. 3)?» (Нет, так как имеем четыре равные части, в каждой из которых по три круга.);

б) «Можно ли ко второму рисунку сделать такую запись: $13 : 3 = 3$ (ост. 4)?»

Различные упражнения с предметными моделями помогают обучающимся самостоятельно высказать предположение о том, что остаток должен быть меньше делителя. Также учитель может сам сообщить об этом, а обучающиеся – проверить справедливость данного утверждения на различных моделях.

Этап 2. Усвоение смысла деления с остатком. Взаимосвязь различных форм записи деления с остатком.

Средство организации деятельности обучающихся на этом этапе – учебные задания:

– на выполнение рисунка по данной записи (лучше, если в этом случае учитель будет использовать как деление без остатка, так и деление с остатком);

– выполнение записи по данным рисункам;

– выбор рисунков, соответствующих данной записи;

– выбор записи, соответствующей данному рисунку.

Выполните рисунки, которые соответствуют записям:

$$3 \cdot 2 + 1 = 7;$$

$$7 : 3 = 2 \text{ (ост. 1);}$$

$$7 : 2 = 3 \text{ (ост. 1).}$$

Обучающиеся сначала рисуют круги, соответствующие первой записи.



Затем, опираясь на сделанный рисунок, комментируют записи:

$7 : 3 = 2$ (ост. 1) – семь кругов разделили на части по три круга в каждой. Получили две части, и один круг остался;

$7 : 2 = 3$ (ост. 1) – семь кругов разделили на два равные части, получили по три круга в каждой, и один круг остался.

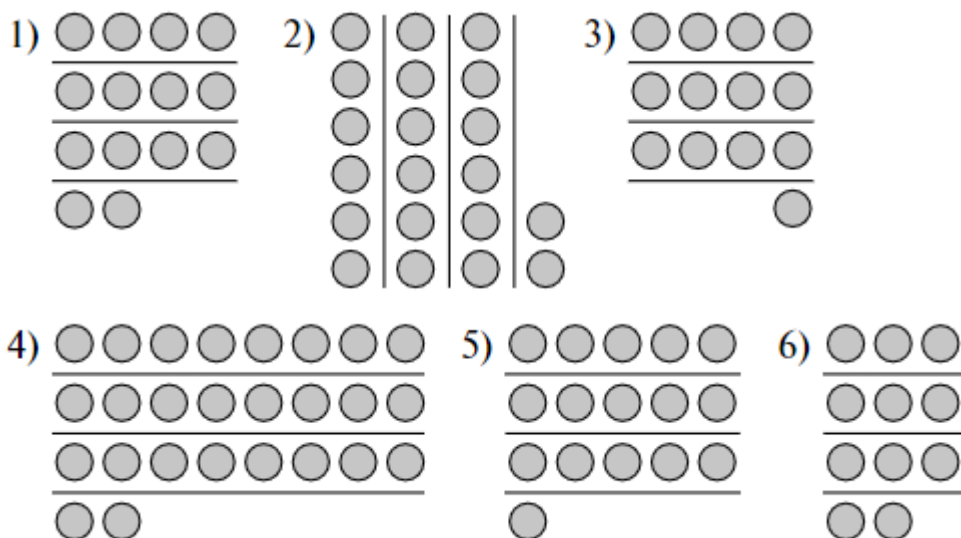
Аналогично нужно действовать и при выполнении следующего задания.

Выберите рисунок, которому соответствуют все три записи:

$$3 \cdot 4 + 2 = 14;$$

$$14 : 3 = 4 \text{ (ост. 2);}$$

$$14 : 4 = 3 \text{ (ост. 2).}$$



При выборе иллюстрации следует ориентироваться на запись $3 \cdot 4 + 2 = 14$ (на иллюстрации под цифрой 6 три круга повторяются три раза, и еще два круга остаются).

В процессе выполнения таких заданий обучающиеся осознают взаимосвязь между делимым, делителем, неполным частным и остатком.

Этап 3. Овладение способами деления с остатком. Возможны два способа деления с остатком. Один можно условно назвать подбором делимого, другой способ – подбором неполного частного.

Используя способ подбора делимого, обучающиеся рассуждают: « $28 : 5$. Делимое 28 не делится на 5. Самое большое число до 28, которое делится на 5, – это 25. Разделим 25 на 5, получится 5. Вычтем из 28 число 25, получится остаток 3. Таким образом, $28 : 5 = 5$ (ост. 3). Остаток 3 меньше, чем делитель 5».

Успешное проведение таких рассуждений во многом зависит от сформированности табличных навыков умножения и соответствующих случаев деления, так как начать свой ответ с фразы «28 не делится на 5» обучающийся сможет в том случае, если быстро вспомнит нужный случай из таблицы умножения, что и является показателем прочных и автоматизированных вычислительных навыков.

Но следует заметить, что данный способ действия при делении с остатком не позволяет обучающимся осознавать ту взаимосвязь, которая существует между делимым, делителем, неполным частным и остатком. В результате многие не понимают, что для нахождения остатка нужно из делимого вычесть произведение неполного частного и делителя, а для того чтобы найти делимое, нужно неполное частное умножить на делитель и прибавить остаток.

Для усвоения этих взаимосвязей более эффективно выполнение деления способом подбора частного, который предполагает знание таблицы умножения, что более доступно большинству обучающихся. Подбор частного требует применения операций, способствующих осознанию математического смысла деления с остатком.

Например, при делении 57 на 6 обучающийся может начать свои действия с подбора частного. Он вспоминает таблицу умножения на 6: $6 \cdot 8 = 48$; $57 - 48 = 9$; $9 > 6$. Поскольку остаток не может быть больше делителя, то число 8 не подходит.

Проверим число 9.

$6 \cdot 9 = 54$; $57 - 54 = 3$; $3 < 6$. Остаток меньше делителя, следовательно, $57 : 6 = 9$ (ост. 3).

Следует познакомить обучающихся с обоими способами деления с остатком. Однако приоритетным является способ подбора частного, так как он позволяет младшим школьникам осознать взаимосвязь делимого, делителя, неполного частного и остатка. Для этой цели полезно выполнить задания следующего вида.

Какие действия нужно выполнить, чтобы найти остаток?

$$26 : 8 = 3 \text{ (ост. } \square \text{)}.$$

Выяснив последовательность действий для ответа на поставленный вопрос, можно приступить к выполнению следующих заданий.

Вставьте пропущенное делимое, чтобы получились верные записи:

$$а) \square : 6 = 12 \text{ (ост. 3);}$$

$$б) \square : 9 = 8 \text{ (ост. 7);}$$

$$\square : 5 = 9 \text{ (ост. 4);}$$

$$\square : 7 = 14 \text{ (ост. 3);}$$

$$\square : 7 = 8 \text{ (ост. 2);}$$

$$\square : 4 = 15 \text{ (ост. 2).}$$

Можно ли, не выполняя вычислений, сказать, в какой паре записей делимые одинаковы?

$$а) \square : 7 = 5804 \text{ (ост. 3);}$$

$$б) \square : 8 = 607 \text{ (ост. 1);}$$

$$\square : 5804 = 7 \text{ (ост. 3);}$$

$$\square : 8 = 607 \text{ (ост. 2).}$$

Проверьте свой ответ, выполнив вычисления.

Задания на нахождение делимого приводят обучающихся к правилу: чтобы найти делимое, нужно значение частного умножить на делитель и прибавить остаток.

Найдите пропущенный делитель

$$86 : \square = 9 \text{ (ост. 5).}$$

Усвоение обучающимися способа подбора частного позволяет им самостоятельно выполнить деление трехзначного числа на двузначное, четырехзначного числа – на трехзначное, пятизначного – на четырехзначное (при условии получения в частном однозначного числа) до их знакомства с алгоритмом письменного деления.

Например, необходимо 107 разделить на 17. Подобрать число, меньшее 107, которое без остатка делится на 17, смогут не все обучающиеся. Если же воспользоваться способом подбора частного, то можно проверить числа 4, 5, 6, что послужит упражнением в вычислениях. При этом в каждом случае надо проверять, каким будет остаток (он должен быть меньше делителя).

На этом же этапе обучающихся следует познакомить еще с одной формой записи деления с остатком – «уголком».

Для этой цели можно воспользоваться следующим заданием.

Сравните записи $34 : 8 = 4 \text{ (ост. 2)}$ и
$$\begin{array}{r} 34 \overline{) 8} \\ \underline{32} \\ 2 \end{array}$$

2 ост.

Чем они похожи? Чем отличаются? Догадайтесь, что обозначает знак «уголок» в записи справа? Подумайте, в чем преимущество записи, которая выполнена справа?

В качестве преимуществ записи обучающиеся обычно называют следующее: «В этой записи помимо делимого, делителя, неполного частного и остатка, записывают еще число, которое делится без остатка на данный делитель». «Еще в этой записи хорошо видно, как получается остаток». Обучающиеся по образцу выполняют деление: $27 : 8$; $31 : 5$; $58 : 9$, используя знак «уголок».

Если тема «Умножение многозначного числа на однозначное» предшествует теме «Деление с остатком», то обучающиеся могут выполнить деление четырехзначных чисел на трехзначные. Например, можно рассмотреть деление числа 1384 на 275 и деление числа 3581 на 403 ($1384 : 275 = 5$ (ост. 9), $3581 : 403 = 8$ (ост. 357)). В ходе выполнения действия обучающиеся применяют форму записи «деление уголком». В процессе рассуждений проговаривают компоненты деления: «делимое» (1384; 3581), «делитель» (275; 403), называют результаты произведений (1375; 3224), полученные при перемножении делителя и неполного частного ($275 \cdot 5$; $403 \cdot 8$), вычитанием находят и озвучивают остаток (9; 357).

Этап 4. Деление с остатком меньшего числа на большее. Для обобщения способов деления с остатком целесообразно рассмотреть случаи деления меньшего числа на большее.

Например, $7 : 15$. Один способ – подбор делимого. В этом случае ученики рассуждают: «Найдем число, которое было бы меньше 7 и без остатка делилось на 15. Это число ноль: $0 \cdot 15 = 0$. Теперь найдем остаток: $7 - 0 = 7$. Получаем $7 : 15 = 0$ (ост. 7); 7 меньше 15».

Другой способ – подбор частного к данным числам. Возможно, у обучающихся возникнут затруднения. Тогда учитель сам предлагает подбирать числа. «Какое число попробуем первым? Давайте попробуем число 1. Рассуждаем: если 1 умножить на 15, то получим 15. Это число уже больше делимого. Ясно, что число 2 и больше пробовать не имеет смысла. Следует двигаться в сторону уменьшения. Поэтому (единственная возможность) – число 0».

В результате проведенных рассуждений обучающиеся делают вывод: если меньшее число разделить на большее, то неполное частное будет равно нулю, а остаток равен делимому.

Этап 5. Некоторые случаи деления с остатком на 10, 100, 1000. (Например, $65 : 10$; $365 : 100$; $5365 : 1000$). При выполнении такого

деления с остатком способом подбора делимого или способом подбора частного обучающиеся получают неполное частное и остаток. (В первом случае остаток 5, во втором 65, в третьем 365.) Более того, когда число делится на 10 или степени числа 10, необходимо ответить на вопрос, сколько в данном числе тех или иных разрядных единиц (вопрос: «Сколько в числе 2024 сотен?» равносильно заданию: «Поделите 2024 на 100».) Действительно, при делении числа на 10 узнаем, сколько в числе десятков; при делении на 100 – сколько в числе сотен, при делении на 1000 – сколько в числе тысяч: $54 : 10 = 5$ (ост. 4), $4125 : 100 = 41$ (ост. 25), $251\,384 : 1000 = 251$ (ост. 384).

Таким образом, методические особенности формирования понятия деления с остатком заключаются в следующем:

1) обучающиеся знакомятся с понятием «Деление с остатком» после того, как изучены темы «Пятизначные и шестизначные числа», «Сложение и вычитание многозначных чисел» и усвоен алгоритм письменного умножения на однозначное число. Это позволяет, во-первых, активно привлекать при изучении деления с остатком ранее усвоенные знания, умения и навыки; во-вторых, целенаправленно готовить обучающихся к изучению алгоритма письменного деления;

2) наиболее эффективный способ деятельности обучающихся, направленной на усвоение смысла деления с остатком, – установление соответствия между предметными моделями (рисунками) и математической записью. Вариативность способов деятельности обеспечивается применением действий сравнения, выбора, преобразования и конструирования;

3) основной способ действия при делении с остатком – подбор частного, поскольку:

а) он позволяет обучающимся осознать смысл новой записи с точки зрения взаимосвязи компонентов и результата действия;

б) его можно использовать при делении трехзначного числа на двузначное, а также в дальнейшем при выполнении письменного деления.

4) в теме «Деление с остатком» обучающихся целесообразно познакомить с формой записи деления «уголком» и обсудить ее преимущества;

5) в теме «Деление с остатком» рассматривается случай деления меньшего числа на большее. Для вычисления результата обучающиеся могут использовать как способ подбора частного, так и способ подбора делимого.

1.15. Алгоритмы выполнения арифметических действий

В учебной программе, разработанной согласно ФГОС НОО, одним из разделов дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» является раздел «Системы счисления». В позиционных системах счисления числа образуются, или составляются, поразрядно. Существует теорема о представлении числа в десятичной системе счисления.

Теорема. Любое натуральное число ℓ в десятичной системе счисления можно единственным образом представить в виде

$$\ell = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – цифры; ($a_i = 0, 1, \dots, 9$) и $a_n \neq 0$.

Именно десятичное представление заложено в основу арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) с числами. Ниже напомним алгоритмы сложения и вычитания чисел; алгоритмы умножения многозначного числа на однозначное; умножения многозначного числа на многозначное, а также деления чисел столбиком. В качестве обоснования действий с многозначными числами заметим, что доказательства сводятся к действиям с разрядными единицами.

При обосновании алгоритмов арифметических действий используют коммутативные, ассоциативные, дистрибутивные законы, которым подчиняются операции сложения и умножения; правила вычитания, а также теорема о делении с остатком.

Алгоритм сложения многозначных чисел

1. Записать второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом. В случае необходимости приписать перед меньшим из слагаемых несколько нулей, чтобы уравнять число разрядов обоих слагаемых.

2. Сложить единицы первого разряда. Если полученная сумма меньше десяти, то результат записать в разряд единиц ответа и перейти к следующему разряду (десятков).

3. Если сумма единиц больше или равна десяти, то представить ее в виде $a_0 + b_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, где c_0 – однозначное число; записать c_0 в разряд единиц ответа и прибавить единицу к десяткам первого слагаемого, после чего перейти к разряду десятков.

4. Повторить те же действия с десятками, потом с сотнями и т. д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов. При этом если их сумма больше или равна десяти, то приписать впереди обоих слагаемых нули, увеличить нуль перед первым слагаемым на один и выполнить сложение $1 + 0 = 1$.

Например, найдем сумму чисел 1352 и 275

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1352 \\ 275 \\ \hline 1627 \end{array}$$

Пусть $\ell_1 = 1352$, $\ell_2 = 275$.

Десятичная запись этих чисел имеет вид

$$\ell_1 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2;$$

$$\ell_2 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5.$$

Найдем десятичную запись суммы этих чисел

$$\ell_1 + \ell_2 = (1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2) + (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) =$$

(по коммутативному и ассоциативному закону сложения)

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2) + (5 \cdot 10 + 7 \cdot 10) + (2 + 5) =$$

(по дистрибутивному закону умножения относительно сложения)

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + (5 + 7) \cdot 10 + (2 + 5) =$$

(сложение в разряде единиц)

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + (5 + 7) \cdot 10 + 7 =$$

(сложение в разряде десятков дает двузначное число, которое представляется по теореме о делении с остатком)

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 7 =$$

(по дистрибутивному закону умножения относительно сложения)

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 =$$

$$= 1 \cdot 10^3 + (3 + 2 + 1) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 =$$

(сложение в разряде сотен)

$$= 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7.$$

$$\ell_1 + \ell_2 = 1627.$$

Алгоритм вычитания многозначных чисел

1. Записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом. В случае необходимости приписать перед вычитаемым столько нулей, чтобы уравнивать число разрядов уменьшаемого и вычитаемого.

2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, то вычесть ее из цифры уменьшаемого, записать разность в разряд единиц искомого числа, после чего перейти к следующему разряду.

3. Если цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т. е. $b_0 > a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшить цифру десятков уменьшаемого на один, одновременно увеличив число единиц уменьшаемого на десять, после чего вычесть из числа $10 + a_0$ число b_0 , записать разность в разряде единиц искомого числа и перейти к следующему разряду.

4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, а стоящие в разряде десятков, сотен и так далее цифры уменьшаемого равны нулю, то взять первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшить ее на один, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличить на девять, а цифру в разряде единиц – на десять, после чего из числа $10 + a_0$ вычесть число b_0 и записать разность в разряде единиц искомого числа; затем перейти к следующему разряду.

5. В следующем разряде повторить описанный процесс. Вычитание заканчивается, когда выполнено вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Например, найдем разность чисел 1627 и 275

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{1}627 \\ - 275 \\ \hline 1352 \end{array}$$

Пусть $\ell_1 = 1627$, $\ell_2 = 275$.

Десятичная запись этих чисел имеет вид

$$\ell_1 = 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7;$$

$$\ell_2 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5.$$

Найдем десятичную запись разности этих чисел

$$\ell_1 - \ell_2 = (1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7) + (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) =$$

(проводим преобразования так, чтобы стало возможным вычитание в разряде десятков)

$$= (1 \cdot 10^3 + (6 - 1) \cdot 10^2 + (10 + 2) \cdot 10 + 7) - (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) =$$

$$= (1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 7) - (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) =$$

(группируем, используя правила вычитания и дистрибутивность умножения относительно сложения)

$$= 1 \cdot 10^3 + (5 - 2) \cdot 10^2 + (12 - 7) \cdot 10 + (7 - 5) =$$

$$= 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.$$

$$\ell_1 - \ell_2 = 1352.$$

Алгоритм умножения многозначного числа $\ell = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ на однозначное число n

1. Записать число n под числом ℓ .

2. Умножить цифру разряда единиц числа ℓ на число n . Если произведение меньше 10, записать его в разряд единиц ответа и перейти к следующему разряду (десятков).

3. Если произведение цифры разряда единиц числа ℓ на число n больше или равно 10, то представить его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0 — однозначное число, записать c_0 в разряд единиц ответа и запомнить q_1 — перенос в следующий разряд.

4. Умножить цифру разряда десятков на число n , прибавить к полученному произведению q_1 и повторить процесс, описанный выше в пунктах 2 и 3.

5. Процесс умножения заканчивается, когда найдено произведение цифры старшего разряда числа ℓ на число n .

Например, умножим число 3251 на число 3

$$\begin{array}{r} \times 3251 \\ 3 \\ \hline 9753 \end{array}$$

Пусть $\ell = 3251$, $n = 3$.

Десятичная запись этих чисел имеет вид

$$\ell = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1, n = 3.$$

Найдем десятичную запись произведения этих чисел

$$\ell \cdot n = (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1) \cdot 3 =$$

(по дистрибутивному закону умножения относительно сложения)

$$= (3 \cdot 10^3) \cdot 3 + (2 \cdot 10^2) \cdot 3 + (5 \cdot 10) \cdot 3 + 1 \cdot 3 =$$

(по коммутативному и ассоциативному законам умножения)

$$= (3 \cdot 3) \cdot 10^3 + (2 \cdot 3) \cdot 10^2 + (5 \cdot 3) \cdot 10 + 3 =$$

(умножение в разряде десятков дает двузначное число, которое представляется по теореме о делении с остатком)

$$= (3 \cdot 3) \cdot 10^3 + (2 \cdot 3) \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 3 =$$

(по дистрибутивному закону умножения относительно сложения)

$$= (3 \cdot 3) \cdot 10^3 + [(2 \cdot 3) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2] + 5 \cdot 10 + 3 =$$

$$= (3 \cdot 3) \cdot 10^3 + (2 \cdot 3 + 1) \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 =$$

$$= 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 =$$

$$\ell \cdot n = 9753.$$

Алгоритм умножения многозначного числа $\ell_1 = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ на многозначное число $\ell_2 = \overline{b_n \dots b_1 b_0}$

1. Записать множитель ℓ_1 и под ним второй множитель ℓ_2 .
2. Умножить число ℓ_1 на младший разряд b_0 числа ℓ_2 и записать произведение $\ell_1 \cdot b_0$ под числом ℓ_2 .
3. Умножить число ℓ_1 на следующий разряд b_1 числа ℓ_2 и записать произведение $\ell_1 \cdot b_1$ со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $\ell_1 \cdot b_1$ на 10.
4. Продолжить вычисление произведений до произведения $\ell_1 \cdot b_n$.
5. Полученные $(n + 1)$ произведения сложить.

Например, найдем произведение чисел 2136 и 423

$$\begin{array}{r} \times 2136 \\ 423 \\ \hline + 6408 \\ + 4272 \\ + 8544 \\ \hline 903528 \end{array}$$

Пусть $\ell_1 = 2136$, $\ell_2 = 423$.

Десятичная запись этих чисел имеет вид

$$\ell_1 = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6, \ell_2 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3.$$

Найдем десятичную запись произведения этих чисел

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = 2136 \cdot (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) =$$

(по дистрибутивному закону умножения относительно сложения
и ассоциативному закону умножения)

$$= (2136 \cdot 4) \cdot 10^2 + (2136 \cdot 2) \cdot 10 + (2136 \cdot 3) =$$

(используем алгоритм умножения многозначного числа на однозначное)

$$= ((2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 4) \cdot 10^2 +$$

$$+ ((2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 2) \cdot 10 +$$

$$+ (2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 3 =$$

(умножение в разряде единиц)

$$= ((2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 4) \cdot 10^2 +$$

$$+ ((2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 2) \cdot 10 +$$

$$+ (6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8) =$$

(умножение в разряде десятков)

$$= ((2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) \cdot 4) \cdot 10^2 +$$

$$+ (4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2) \cdot 10 +$$

$$+ (6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8) =$$

(умножение в разряде сотен)

$$= \underbrace{(8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 4)}_{8544} \cdot 10^2 +$$

$$+ \underbrace{(4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2)}_{4272} \cdot 10 +$$

$$+ \underbrace{(6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8)}_{6408} =$$

(используем алгоритм сложения многозначных чисел)

$$= 9 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8.$$

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = 903\,528.$$

Алгоритм деления многозначного числа $\ell_1 = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$

на многозначное число $\ell_2 = \overline{b_n \dots b_1 b_0}$

1. Если $\ell_1 = \ell_2$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.
2. Если $\ell_1 > \ell_2$ и число разрядов в числах ℓ_1 и ℓ_2 одинаково, то частное найти подбором.

3. Если $\ell_1 > \ell_2$ и число разрядов в числе ℓ_1 больше, чем в числе ℓ_2 , то записать делимое ℓ_1 и справа от него делитель ℓ_2 , который отделить от ℓ_1 уголком, и вести поиск частного и остатка в следующей последовательности:

а) выделить в числе ℓ_1 столько старших разрядов, сколько разрядов в числе ℓ_2 или при необходимости на один разряд больше, так, чтобы они образовали число d_1 , большее или равное ℓ_2 . Перебором найти частное q_1 чисел d_1 и ℓ_2 . Записать q_1 под уголком (ниже ℓ_2);

б) умножить ℓ_2 на q_1 и записать произведение под числом ℓ_1 так, чтобы младший разряд числа $\ell_2 \cdot q_1$ был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1 ;

в) провести черту под $\ell_2 \cdot q_1$ и найти разность $r_1 = d_1 - \ell_2 \cdot q_1$;

г) записать разность r_1 под числом $\ell_2 \cdot q_1$, приписать справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого ℓ_1 и сравнить полученное число d_2 с числом ℓ_2 ;

д) если полученное число d_2 больше или равно ℓ_2 , то с ним поступить согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записать после q_1 ;

е) если полученное число d меньше ℓ_2 , то приписать еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3 , большее или равное ℓ_2 . В этом случае записать после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступить согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записать после нулей. Если при использовании младшего разряда числа ℓ_1 окажется, что $d_3 < \ell_2$, то тогда частное чисел d_3 и ℓ_2 равно нулю, и этот нуль записать последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

Например, найдем частное от деления числа 903 528 на число 423

$$\begin{array}{r}
 \overset{\cdot\cdot}{9}0\overset{\cdot}{3}528 \overline{) 423} \\
 \underline{-846} \\
 575 \\
 \underline{-423} \\
 1522 \\
 \underline{-1269} \\
 2538 \\
 \underline{-2538} \\
 0
 \end{array}$$

Пусть $\ell_1 = 903\,528$, $\ell_2 = 423$.

Десятичная запись этих чисел имеет вид

$$\ell_1 = 9 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8;$$

$$\ell_2 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3.$$

Найдем десятичную запись частного от деления этих чисел

$$\ell_1 : \ell_2 = (9 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$= (903 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$(\text{по теореме о делении с остатком } 903 = 423 \cdot 2 + 57)$$

$$= ((846 + 57) \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$= (846 \cdot 10^3 + 575 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$(\text{по теореме о делении с остатком } 575 = 423 \cdot 1 + 152)$$

$$= (846 \cdot 10^3 + (423 + 152) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$= (846 \cdot 10^3 + 423 \cdot 10^2 + 1522 \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$(\text{по теореме о делении с остатком } 1522 = 423 \cdot 3 + 253)$$

$$= (846 \cdot 10^3 + 423 \cdot 10^2 + (1269 + 253) \cdot 10 + 8) : 423 =$$

$$= (846 \cdot 10^3 + 423 \cdot 10^2 + 1269 \cdot 10 + 2538) : 423 =$$

$$= (846 : 423) \cdot 10^3 + (423 : 423) \cdot 10^2 + (1269 : 423) \cdot 10 +$$

$$+ (2538 : 423) = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6.$$

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = 2136.$$

Из приведенных примеров следует, что десятичная запись чисел позволяет обосновать сформулированные алгоритмы сложения, вычитания, умножения и деления многозначных чисел. Также можно сделать вывод о том, что в десятичной системе счисления действия над многозначными числами сводятся к действиям над однозначными, записанными в соответствующих разрядах, и в этом огромное преимущество всех позиционных систем, в том числе и десятичной.

Практические задания по теме «Методика изучения арифметических действий в начальной школе»

1. Продумайте необходимые предметные действия и объясните, почему приведенные ниже ситуации можно использовать при формировании у обучающихся представлений о смысле действия сложения.

А. С дерева улетело сначала пять синиц, а затем еще три. Покажите, сколько синиц улетело с дерева.

Б. У Коли было четыре марки, а у Пети – на две марки больше. Покажите, сколько марок было у Пети.

В. У Коли было четыре марки, у Пети – две. Покажите, сколько марок у них было вместе.

Г. В гараже стояли грузовые и легковые машины. После того как три грузовые машины уехали, осталось три легковые. Покажи, сколько всего машин стояло в гараже.

2. Продумайте необходимые предметные действия и объясните, почему приведенные ниже ситуации можно использовать при формировании у обучающихся представлений о смысле действия вычитания.

А. В гараже стояло шесть машин. После того как несколько машин выехало, осталось две. Покажите, сколько машин выехало из гаража.

Б. Зайчику дали пять морковок. Две он съел. Покажите, сколько морковок осталось у зайчика.

В. В одной вазе шесть апельсинов, в другой – на две меньше. Покажите, сколько апельсинов во второй вазе.

Г. В одной коробке десять карандашей, в другой – шесть. Покажите, на сколько карандашей в одной коробке больше (меньше), чем в другой.

3. Найдите в учебниках математики для начальных классов иллюстрации, которыми можно воспользоваться при формировании у обучающихся представлений о смысле действий сложения и вычитания. Составьте вопросы для беседы с младшими школьниками по этим иллюстрациям и приведите предполагаемые ответы.

4. Найдите в учебниках математики для начальных классов или составьте самостоятельно задания, при выполнении которых обучающиеся соотносят: а) предметные действия с математическими записями; б) математические записи с графическими моделями; в) вербальную модель с предметной; г) вербальную модель с предметной и графической.

5. Найдите в различных учебниках математики для начальных классов уроки, на которых рассматривают переместительное свойство сложения. Составьте беседу к иллюстрациям, предложенным к этим урокам.

6. Найдите в учебниках математики для начальных классов упражнения, в процессе которых обучающиеся усваивают взаимосвязь между компонентами и результатами сложения и вычитания.

7. Найдите в учебниках математики для начальных классов задания, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают табличные случаи сложения (вычитания) в пределах десяти. Чем отличаются эти задания?

8. Подберите или составьте самостоятельно различные задания, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают соотношения между единицами массы и учатся складывать эти величины.

9. Подберите или составьте самостоятельно различные задания, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают соотношения между единицами времени и учатся складывать эти величины.

10. Найдите в различных учебниках математики упражнения, связанные с изучением приема сложения однозначных чисел с переходом через десяток. Соотнесите каждое из этих упражнений с операциями, входящими в вычислительный прием.

11. Найдите в различных учебниках математики упражнения для усвоения приемов вычитания однозначного числа из двузначного с переходом через десяток. Соотнесите каждое из этих упражнений с операциями, входящими в состав этих приемов.

12. Проанализируйте актуальные учебники математики для 2-го и 3-го классов и назовите порядок изучения приемов сложения и вычитания чисел в пределах ста. Охарактеризуйте предлагаемые в этих учебниках упражнения с точки зрения тех характеристик, которые определяют методические особенности формирования вычислительных умений.

13. Какое свойство сложения чисел представлено в виде правил прибавления числа к сумме и прибавления суммы к числу? Найдите в учебниках математики для 2-го класса задания, связанные с изучением данных правил.

14. Найдите в различных учебниках математики для начальных классов задания на сложение и вычитание многозначных чисел, которые обучающиеся могут выполнить устно. Приведите рассуждения обучающихся.

15. Проанализируйте актуальные учебники математики для 2 – 4-го классов и назовите порядок изучения письменных приемов сложения и вычитания чисел. Назовите цели каждого этапа (сложение и вычитание двузначных чисел, трехзначных, многозначных).

16. Подберите или составьте самостоятельно задания, при выполнении которых обучающиеся повторяют ранее изученные вопросы по усвоению алгоритмов письменного сложения и вычитания.

17. Подберите или составьте самостоятельно задания, в процессе выполнения которых у обучающихся вырабатывается умение вычислять площадь и периметр прямоугольника.

18. Проанализируйте различные учебники математики для начальных классов и приведите примеры заданий, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают смысл действия умножения.

19. Найдите в учебниках математики для 2 – 4-го классов страницы с записями «0» и «1». Нужно ли специально выделять случаи умножения нуля и единицы на число? Могут ли обучающиеся найти значения произведения этих чисел, пользуясь определением умножения?

20. Подберите или составьте самостоятельно задания, которые вы предложили бы обучающимся при изучении понятия «увеличить в...».

21. Подберите или составьте самостоятельно задания, которые вы могли бы предложить обучающимся при изучении переместительного свойства умножения.

22. Проанализируйте различные учебники математики для начальных классов и приведите примеры заданий, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают смысл действия деления. Каковы особенности этих заданий в каждом учебнике?

23. Подберите или составьте самостоятельно задания, которые вы можете предложить третьеклассникам на различных этапах изучения темы «Деление с остатком».

24. Подберите или составьте самостоятельно задания, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают предметный смысл деления с остатком, используя при этом действия сравнения, выбора, преобразования и конструирования.

25. Составьте различные задания, в процессе выполнения которых обучающиеся усваивают:

- а) способ подбора частного при делении с остатком;
- б) условие, которое необходимо выполнять при делении с остатком;
- в) взаимосвязь компонентов и результата при делении с остатком.

Рейтинг-контроль по теме «Методика изучения арифметических действий в начальной школе»

Рейтинг-контроль № 1

1. Дополните высказывания:

С операцией объединения можно связать следующие виды ситуаций:

- а) составление одного предметного множества из двух данных;
- б) увеличение на несколько предметов множества, равночисленного данному множеству;
- в) _____

С операцией удаления правильной части подмножества из данного множества можно связать следующие виды ситуаций:

- а) уменьшение данного предметного множества на несколько предметов;
- б) сравнение двух предметных множеств, чтобы ответить на вопрос: «На сколько предметов в одном множестве больше (меньше), чем в другом?»
- в) _____

2. На какие знания обучающиеся могут опираться при выполнении задания: «Используя числа 10, 3, 7, составьте четыре верных равенства?»

- а) смысл сложения и вычитания;
- б) взаимосвязь сложения и вычитания;
- в) сочетательное свойство сложения;
- г) принцип построения натурального ряда чисел;
- д) переместительное свойство сложения.

Обведите кружком номера правильных ответов.

3. Дополните высказывание: прием сложения однозначных чисел с переходом через разряд включает следующие операции:

- а) дополнение первого слагаемого до 10;
- б) установление, сколько единиц осталось во втором слагаемом после того, как выполнена первая операция;
- в) _____

Продemonстрируйте эти операции при вычислении значения выражения $7 + 4$.

г) сравнение двух произведений, значение одного из которых известно:

$$15 \cdot 3 = 45$$

$$17 \cdot 4 = 68$$

$$15 \cdot 4 = \dots$$

$$17 \cdot 3 = \dots$$

Какие еще задания можно предложить с этой же целью?

д) _____

е) _____

Рейтинг-контроль № 3

1. На уроке учитель предложил выполнить следующие задания.

А. Вычислите значения выражений $42 : 8$, $43 : 8$, $45 : 8$, $46 : 8$.

Б. Какие остатки могут быть получены при делении на 5, на 7, на 9?

В. Сколько различных остатков может быть получено при делении на 4?

Г. Какой наибольший остаток может быть получен при делении на 6?

Д. Правильно ли выполнено деление с остатком? $68 : 7 = 9$ (ост. 3).
Сформулируйте цель урока, на котором обучающиеся выполняют эти задания: _____

2. В какой последовательности целесообразно предложить учащимся задания, чтобы они могли самостоятельно выполнить каждое из них?

А. Найдите значения выражений: $32 \cdot 40$, $15 \cdot 30$.

Б. Вычислите значения выражений удобным способом:

$$15 \cdot (4 \cdot 10), 29 \cdot (2 \cdot 5), 25 \cdot (2 \cdot 3), 29 \cdot (4 \cdot 10).$$

В. Вычислите результат и объясните способ вычисления:

$$45 \cdot 2, 54 \cdot 2, 36 \cdot 3.$$

Г. Представьте в виде произведения числа: 20, 40, 50, 60.

Ответ: _____

3. Перед изучением алгоритма письменного деления учитель запланировал повторить: связь умножения и деления; нумерацию многозначных чисел; табличное умножение и деление. Дополните план учителя.

Ответ: _____

4. Составьте задания, которые вы можете предложить учащимся к следующим записям:

$$\square : \square = \square \text{ (ост. 3)}$$

$$36 : \square = \square \text{ (ост. 1)}$$

$$52 : \square = 7 \text{ (ост. } \square \text{)}$$

Приведите рассуждения детей при выполнении каждого задания.

5. Учитель предложил обучающимся для выполнения следующее задание: «Даны выражения: $268 : 2$; $372 : 4$; $348 : 3$; $618 : 6$; $9177 : 7$; $2960 : 4$; $5973 : 11$; $27\,072 : 24$; $3303 : 9$. В первый столбик выпишите выражения, в которых количество цифр в делимом и частном одинаковое, во второй – выражения, в которых количество цифр в частном на одну меньше количества цифр в делимом».

Дидактическая цель задания:

- а) усвоение алгоритма письменного деления;
- б) умение выделять первое неполное делимое;
- в) умение устанавливать количество цифр частного;
- г) умение находить остаток.

Обведите кружком номера правильных ответов.

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Материал главы составлен в соответствии с логикой изложения вопросов методики начальной математики педагогов-методистов и учителей-классиков Анатолия Михайловича Пышкало, Натальи Борисовны Истоминой, Марии Игнатьевны Моро, Марии Александровны Бантовой [4; 11 – 15].

В 1-м классе обучающимся дают задание сравнить числа 5 и 9 и поставить между ними знак $>$, $<$, $=$ так, чтобы получилась верная запись.

Для выполнения задания требуются знания понятий «количественное число», «установление взаимно однозначного соответствия», «теоретико-множественный подход к определению отношений больше, меньше, равно». Согласно этому учитель выбирает способ деятельности для работы над заданием.

Учитывая наглядно-образный характер мышления младшего школьника, учитель предлагает одному обучающемуся выложить пять кружков, а другому – девять треугольников и дает задание: как подходящим образом расположить эти фигуры, чтобы увидеть каких больше?

Если все справились, то учитель просит обучающихся обосновать ответ. В таком случае понадобятся понятия «счет» и «натуральный ряд чисел». Число, которое называется раньше, всегда меньше числа, которое следует за ним.

2.1. Методические основы изучения алгебраического материала

Поэтапное ознакомление обучающихся с алгебраическим материалом в виде ступенчатой таблицы представлено ниже.

IV		Решение уравнений. Понятие «уравнение» как обобщение понятия «буквенное выражение»
III		Понятие «буквенное выражение» как обобщение понятия «числовое выражение»
II		Понятие «числовое выражение». Сравнение выражений. Понятия «числовое равенство», «числовое неравенство» вводятся как обобщение понятия «числовое выражение»
I	Исходная база для обобщения арифметического материала. Неявное использование понятия «переменная»	

При разработке методики изучения таких алгебраических понятий, как числовое и буквенное выражения, числовое равенство, неравенство, уравнение, исходят из их математического смысла, а также из дидактических задач изучения алгебраического материала начальной школы: требуется создание условий для развития у обучающихся способностей к обобщению и абстракции, необходимых для дальнейшего обучения математике. Понятие **числового выражения** – обобщение таких понятий, как сумма, разность, произведение, частное, т. е. это новая ступень, более абстрактная в овладении этими понятиями.

Действительно, было число, были действия (сложения, вычитания, умножения, деления). Из них вырастает новое понятие – числовое выражение. Числовое выражение – это запись, которая конструируется из чисел, знаков действий и скобок. С этих позиций записи вида $2 + 3$; $7 - 4$; $5 \cdot 3$; $12 : 4$ получают более общее название «числовое выражение».

С логической точки зрения числовые выражения могут рассматриваться как слова в математическом языке.

Понятие **числового равенства и неравенства** – обобщение записей, полученных при сравнении числовых выражений: $5 \cdot 3$ и $5 \cdot 2 + 5$; $20 - 17$ и $18 : 6$; $5 \cdot 3$ и $5 \cdot 2$. Они обеспечивают новый уровень абстракции в изучении арифметического материала: оказывается, из известных сумм, разностей, произведений и частных можно образовать истинные или ложные предложения, т. е. числовые равенства и неравенства выступают как предложения математического языка.

Понятие **буквенного выражения** появляется как обобщение понятия числового выражения и наглядно иллюстрирует ступени абстракции в математике. В самом деле, рассматривая выражения $5 + 7$; $12 + 3$; $45 + 26$; $15 + 0$, можно считать, что речь идет о выражении $a + b$, где a принимает значения 5, 12, 45, 17, а b – значения 7, 3, 26, 0. В выражении $a + b$ буквами a и b обозначены переменные.

Переменная – это знак, символ, вместо которого можно подставлять значение. В начальных классах вместо переменной подставляют числа. Переменную можно обозначать любым символом: a , Δ , $\square$. Символ «окошко» $\square$ появляется уже на первых уроках математики, значит, можно сказать, что учащиеся начальных классов имеют дело с переменной сразу, как только начинают изучать математику. Однако следует отметить, что окошко используют в разных целях. На первых

порах окошком обозначают то место, где обучающиеся должны записать результат вычисления: $4 - 1 = \square$; $3 + 2 = \square$. Используют окошко и для обозначения неизвестного числа, например $4 = \square + 1$; $9 = \square + \square$. Широко применяют этот символ для выражений вида $\square + 1$; $\square - 1$; $\square + 1 + 1$; $\square - 1 - 1$; $10 - \square$; $\square - 9$. В этих случаях окошко выступает обозначением переменной, принимающей числовые значения.

Если представить процесс ознакомления младших школьников с алгебраическими понятиями поэтапно, то можно сказать, что *на первом этапе* создают исходную базу для обобщения арифметического материала. Этот этап характеризуется неявным, интуитивным использованием понятия переменной, с широким использованием для ее обозначения такого символа, как окошко.

На втором этапе вводят понятие числового выражения. Оно определяется остенсивным способом. На этом этапе обучающиеся учатся читать выражения различного вида и находить их значения. Затем – сравнивать выражения, устанавливая между ними отношение $>$, $<$, $=$. Как обобщение получаемых при этом записей вводят понятия числового равенства и неравенства.

На третьем этапе происходит знакомство обучающихся с обозначением переменной при помощи буквы, т. е. наступает этап, на котором переменная выступает явно, так же как и ее обозначение при помощи буквы.

На четвертом этапе вводят решение уравнений, в которых неизвестное число обозначают буквой латинского алфавита, чтобы не потерять связь между выражениями с переменной и уравнениями. Современная методика предлагает решать уравнения не только на основе зависимости между компонентами и результатом действия, но и путем подбора. Это важно: с логической точки зрения, уравнение с одной переменной – это высказывательная форма вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – выражения с одной переменной.

К алгебраическим понятиям относят числовые и буквенные выражения, числовые равенства и неравенства, уравнения.

Алгебраический материал включен в курс математики:

- 1) с целью преемственности с курсом математики основной школы;
- 2) более осознанного усвоения арифметических знаний.

В начальной школе не все алгебраические понятия определяют *остенсивным путем* (*ostendere* — «показывать»); здесь определять понятия остенсивным путем означает устанавливать значение терминов путем демонстрации объектов, которые этим термином определяются). Однако учителю необходимо знать, из какой трактовки этих понятий исходят, определяя систему заданий и упражнений.

Числовое выражение — запись, состоящая из чисел, знаков действий и скобок.

Буквенное выражение (выражение с переменной) — конструкция из букв, чисел, знаков действий и скобок.

Например, $(27 - 3) : 8$; $13 \cdot 4 + 42 : 7$; $5 \cdot 9$; $41 - 13$; $15 + 28 - 17$ — это числовые выражения, а $a + b$; $10 - d$; $40 : (b - 3)$ — буквенные выражения.

Число, которое получается в результате выполнения всех действий, указанных в числовом выражении, называют *значением числового выражения*. Существуют выражения, значения которых найти нельзя. Про такие выражения говорят, что они не имеют смысла. В начальной школе эта терминология не используется, но такие выражения могут встретиться. Например, выражение $42 : (7 - 7)$ не имеет смысла.

Следует учесть, что в начальном курсе математики к выражениям, не имеющим смысла, относят и такие, значение которых не принадлежит множеству целых неотрицательных чисел.

Из числовых выражений образуют равенства и неравенства. **Равенством** называют два числовых выражения, соединенных знаком «равно». **Неравенством** называют два числовых выражения, соединенных знаком «больше» или знаком «меньше».

Такой процесс образования равенств и неравенств приводит к тому, что они могут быть истинны или ложны. В школе говорят: равенство/неравенство «верно» или «неверно».

Среди упражнений, связанных с формированием понятия числового выражения, ведущее место принадлежит тем, в которых предлагается найти значение (нахождение значений числовых выражений требует выполнения их тождественных преобразований).

Тождественные преобразования – замена одного числового выражения другим, тождественно равным ему.

В начальных классах такое преобразование происходит с помощью использования приемов перестановки слагаемых и множителей (переместительное свойство), замены двух слагаемых суммой (сочетательное свойство), а также с помощью различных правил (правил умножения и деления суммы на число).

Ряд правил используют в неявном виде, например, правило вычитания суммы из числа и числа из суммы.

Основной вид упражнений, направленных на формирование представлений о выражении с переменными, – упражнения на вычисление значений буквенных выражений при заданных числовых значениях входящих в них букв. При помощи них формируется понятие функции. Здесь могут быть упражнения следующего типа:

Заполните таблицу.

b	2	4	6	8
$b \cdot 6$				

При выполнении таких упражнений обучающийся имеет возможность наблюдать различные свойства функциональных зависимостей:

1) если значение переменной b увеличивается, то увеличивается и значение произведения $b \cdot 6$;

2) если значение b увеличивается в два раза, то значение функции $b \cdot 6$ увеличивается в два раза.

В начальном курсе математики происходит знакомство с уравнениями следующего вида:

$$a + x = b;$$

$$x + a = b;$$

$$a - x = b;$$

$$x - a = b;$$

$$a \cdot x = b;$$

$$x \cdot a = b;$$

$$a : x = b;$$

$$x : a = b.$$

где x – неизвестное, a, b – буквы.

Под **уравнением** в начальной школе понимают равенство с неизвестным числом x . Решить уравнение – значит найти такое число x , при постановке которого в уравнение получится верное числовое равенство.

В начальном курсе математики рассматривают только уравнения, которые имеют единственное решение в множестве целых неотрицательных чисел.

Тождественные преобразования имеют особую форму записи. В ней чаще всего отсутствует этапность, она сжата.

Например, $23 + 6$;

$$23 + 6 = (20 + 3) + 6 = 20 + (3 + 6) = 20 + 9 = 29.$$

Главное преобразование здесь – это замена одного выражения $(20 + 3) + 6$ другим выражением $20 + (3 + 6)$. Такой переход возможен на основе сочетательного закона сложения.

Чтобы найти значение выражения вида $35 - 7$, потребуется озвучить правило вычитания суммы из числа. Чтобы вычесть сумму двух слагаемых из числа, нужно из уменьшаемого вычесть сначала одно слагаемое, потом из полученной разности вычесть другое слагаемое

$$35 - 7 = 35 - (5 + 2) = (35 - 5) - 2 = 30 - 2 = 28.$$

Формированию понятия «числовое выражение», а также понятий «числовое равенство», «числовое неравенство» способствуют упражнения, в которых требуется поставить один из знаков сравнения $>$, $<$, $=$ так, чтобы запись была верной. Основа для выполнения таких упражнений:

а) вычисления;

б) свойства действий сложения и вычитания;

в) зависимости между компонентами и результатами действий.

Пример такого задания приведен ниже.

Поставьте вместо * знаки $>$, $<$, $=$, чтобы записи были верными:

а) $8 \cdot 7 * 7 \cdot 8$; б) $73 - 16 * 73 - 20$; в) $54 + 25 * 54 + 17$.

2.2. Методика изучения числовых выражений

С числовыми выражениями обучающиеся знакомятся с первого года обучения. В учебниках *Н. Б. Истоминой* сам термин «числовое выражение» вводится в первом классе, по *программе М. И. Моро* – во втором классе. В устной речи учитель с первого класса может использовать этот термин, выполняя задания с обучающимися.

Достижением результатов обучения в конкретной изучаемой теме (т. е. того, что обучающийся будет знать, понимать и уметь после успешного окончания процесса обучения) будет успешное решение следующих методических задач.

1. Научить обучающихся читать и записывать простейшие выражения.

2. Познакомить с правилами порядка выполнения действий. Выработать умение находить значение числовых выражений.

3. Познакомить обучающихся с тождественными преобразованиями на основе свойств арифметических действий.

Согласно сформулированным задачам можно выделить этапы изучения числовых выражений.

На первом этапе ведут работу над выражениями, содержащими одно арифметическое действие вида $5 + 8$; $12 - 3$; $8 \cdot 2$; $16 : 4$. С простейшими выражениями: суммой и разностью – обучающиеся знакомятся в первом классе, во втором – с произведением и частным. Обучающиеся оперируют терминами «сумма», «разность», «слагаемое», «уменьшаемое», «вычитаемое», знакомятся с символом «равно» и знаками действий (+, −, =), учатся читать выражения разными способами.

Например, рассмотрим сумму чисел 7 и 3.

Сначала обучающиеся знакомятся с названием компонентов и результатом действия:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{слагаемое} & & & \text{слагаемое} & & & \\ 7 & & + & 3 & & = & 10 \\ \hline & & \text{сумма} & & & & \text{значение суммы} \end{array}$$

С учетом того что вычислительный прием вычитания вида $8 - 6$; $9 - 7$ основан на знании связи между сложением и вычитанием, школьники учатся представлять уменьшаемое в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{array}{rcccl} 8 & - & 6 & & 9 & - & 7 \\ \swarrow \searrow & & & & \swarrow \searrow & & \\ 6 & & 2 & & 7 & & 2 \end{array}$$

Далее происходит знакомство с выражениями, которые содержат два и более арифметических действия. Начинается этот этап в первом классе. В качестве подготовки сначала проводят работу с выражениями с окошком типа $\square \pm 2$, $\square \pm 3$, $\square \pm 4$ на последовательное прибавление к числу и последовательное вычитание из числа: как прибавить к какому-либо числу число два? Надо сначала прибавить один, а потом к полученной сумме прибавить еще один. Аналогично с вычитанием: как вычесть из какого-либо числа число два? Надо сначала из данного

числа вычесть один, а затем из полученного значения вычесть еще один

$$\square \pm 2 = \begin{array}{l} 4 + 1 + 1; \\ 5 - 1 - 1. \end{array}$$

Далее обучающиеся выполняют задания на нахождение значения выражений вида $3 + 1 + 5$; $5 + 2 + 2$. Младшие школьники знакомятся с правилами порядка выполнения действий одной ступени. В дальнейшем, уже во втором классе, эти правила служат основой при работе с выражениями, содержащими скобки.

На завершающем этапе в третьем классе знания обучающихся о правилах порядка выполнения действий обобщают и вводят еще одно правило – выполнение действий в выражениях без скобок, содержащих два и более арифметических действия разных ступеней. Задание «вычислите/найдите значение выражения» выполняют согласно правилу: «Чтобы найти значение выражения, не имеющего скобок и содержащего действия сложения, вычитания, умножения, деления, надо выполнять слева направо сначала умножение, деление, потом сложение, вычитание».

Для младших школьников на этом этапе предлагают задания следующего вида.

Расставьте скобки так, чтобы равенства были верными:
а) $20 - 16 : 4 = 1$; б) $3 \cdot 6 - 4 = 6$; в) $48 : 8 - 2 = 4$.

Вместо звездочек поставьте знак $+$, $-$, $\cdot$, $:$ так, чтобы получились верные равенства:

$38 \star 3 \star 7 = 34;$	$12 \star 6 \star 2 = 4;$
$38 \star 3 \star 7 = 42;$	$12 \star 6 \star 2 = 24;$
$38 \star 3 \star 7 = 28;$	$12 \star 6 \star 2 = 0;$
$38 \star 3 \star 7 = 48;$	$12 \star 6 \star 2 = 70;$
$38 \star 3 \star 7 = 5.$	$12 \star 6 \star 2 = 9.$

Из пары равенств выпишите только те, в которых вычисления выполнены верно (по правилам порядка действий):

$60 - 20 : 4 = 10;$	$4 \cdot 3 + 20 : 5 = 16;$
$60 - 20 : 4 = 55.$	$4 \cdot 3 + 20 : 5 = 28.$

Используя скобки, измените порядок действий в оставшихся выражениях так, чтобы они приняли указанное значение.

Вычислите значение каждого из следующих выражений, предварительно ответив на вопросы:

- Чем похожи записи?
- Чем они отличаются?
- Почему получились разные результаты?

$$6 \cdot 10 - 20 : 4;$$

$$6 \cdot (10 - 20 : 4);$$

$$6 \cdot (10 - 20) : 4.$$

2.3. Методика изучения тождественных преобразований

Младших школьников в начальной математике знакомят с тождественными преобразованиями числовых выражений. Основа для тождественных преобразований – свойства арифметических действий над целыми неотрицательными числами: переместительное и сочетательное свойства сложения чисел (в первом классе), переместительное, сочетательное и распределительное свойства сложения и умножения чисел (начиная со второго класса).

Например, преобразования в выражении $10 + 50 + 3 = (10 + 50) + 3 = 60 + 3 = 63$ опираются на сочетательное свойство. А выражение $(10 + 7) \cdot 3 = 10 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 30 + 21 = 51$ преобразуем, опираясь на распределительное свойство целых неотрицательных чисел.

Закончите запись так, чтобы равенства были верными:

$$534 + 79 = 534 + 80...$$

$$740 + 190 = 740 + 200...$$

$$510 - 290 = 510 - 300...$$

Какие знания, умения и навыки лежат в основе преобразования этих выражений?

Тождественное преобразование выражения – это замена данного выражения другим, значение которого равно значению данного.

Во втором классе с тождественными преобразованиями обучающиеся знакомятся именно при изучении свойств арифметических действий.

2.4. Методика изучения буквенных выражений

С буквенными выражениями обучающиеся знакомятся во втором классе, затем работа продолжается в третьем классе.

До введения буквенных выражений предусмотрена специальная подготовительная работа по раскрытию смысла переменной.

Подготовка проводится с первого класса. Для этого в учебник включены задания с окошком: $\square < 3$; $6 > \square$; $\square + 2 = 5$. Базовыми понятиями при выполнении подобных упражнений служат понятия нумерации в пределах десятка и следование натуральных чисел в числовом ряду.

Важно побуждать обучающихся к тому, чтобы они подставляли в окошко не одно, а несколько чисел, проверяя каждый раз, верная ли получается запись.

На некотором уроке обучающиеся знакомятся с выражениями, содержащими буквы. Сначала с выражением, в котором одна буква.

$5 + \square$;	Учитель спрашивает, чем похожи записи? (<i>Везде</i>
$5 + 3$;	<i>сумма, два слагаемых, одно из которых равно пяти.</i>)
$5 + 5$;	Записи с окошком обучающимся уже из-
$5 + 0$;	вестны, поэтому учитель говорит, что окошко
$5 + 10$;	можно заменить любой буквой латинского алфа-
$\boxed{5 + d}$.	вита: a, b, c, d, x, k .

Выражение $5 + d$ называют *выражением с переменной* или *буквенным выражением*.

Младшие школьники учатся вычислять значение буквенных выражений при данных значениях буквы. Узнают две формы записи буквенных выражений: первая – запись в строку, вторая – с помощью таблицы. Выполняют, следующие задания.

Найдите значение выражения $5 + a$, если известны значения переменной

a	7	12	51
$5 + a$			

где $a = 7; 12; 51$;
или

a	1	2	3
$a \cdot 4$			

Цель задания – отработать навык умножения на 4.

c	7	14	21
$c : 7$			

Цель задания – отработать навык деления на 7.

Далее вводят выражения, содержащие две переменные. В таком случае необходимыми для усвоения темы будут задания на подстановку вместо букв конкретных чисел. Здесь перечень упражнений содержит следующие задания.

Даны выражения вида $a + b$; $c - d$, $\square + \square$; $\square - \square$. Подставьте вместо $\square$ числа. Найдите значения полученных выражений.

Заполните таблицы.

a	10	8	83
b	21	7	17
$a + b$			
k	1	3	8
b	5	7	2
$k \cdot b$			

c	8	8	8	81	48
d	2	1	4	3	4
$c : d$					

2.5. Методика изучения равенств и неравенств

Ознакомление обучающихся с равенствами и неравенствами связано с решением следующих задач:

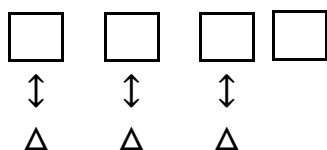
1) научить устанавливать отношения «больше», «меньше», «равно» между выражениями и записывать результаты сравнения с помощью соответствующих знаков;

2) научить читать равенства и неравенства.

Методика предполагает три этапа.

На первом этапе обучающиеся работают с дидактическим материалом и сравнивают группы предметов. Учатся устанавливать взаимно однозначное соответствие между предметами совокупностей. Упражнения следующие:

С каждой фигурой верхней строки сопоставили фигуру в нижней строке. Что можно сказать о количестве фигур в строках?



Есть флажки красного и белого цветов. Всего четыре красных и пять белых. Составьте из флажков пары красный – белый. Каждому ли красному флажку достался белый? Хватило ли белым флажкам красных? Какие можно сделать выводы о количествах флажков разного цвета? Можно ли сравнить множество красных флажков с множеством белых по количеству флажков в множествах?

На втором этапе переходят к сравнению чисел. Здесь обучающиеся сами приходят к выводу о том, что из двух чисел больше то, которое при счете называют позже, и меньше то, которое при счете называют раньше.

В это время вводят знаки $>$, $<$. Выполняя упражнения, младшие школьники учатся сравнивать числа двумя способами:

- а) по месту расположения чисел в натуральном ряду;
- б) на основе сравнения соответствующих разрядных чисел, начиная с высших разрядов.

Задание. Сравните два числа 1248 и 1257 разными способами.

Решение: а) число 1248 при счете появляется раньше числа 1257, значит, 1248 меньше 1257. Записываем $1248 < 1257$;

б) поскольку в числах 1248 и 1257 тысяч и сотен поровну, а десятков в первом числе меньше, чем во втором, то первое число будет меньше второго $1248 < 1257$.

На третьем этапе выполняют сравнение выражений вида

$$6 + 1 \dots 6;$$

$$2 \dots 4 - 1;$$

$$4 + 3 \dots 4 + 5;$$

$$7 - 2 \dots 7 - 5.$$

Сначала с опорой на наглядность $\triangle\triangle\triangle\triangle \blacksquare > \triangle\triangle\triangle\triangle$, далее используют способ вычисления значений выражений.

В начальных классах исключено рассмотрение «неравенств с переменной». Однако обучающиеся работают с записями вида $\square > 5$; $6 < \square$.

2.6. Методика изучения уравнений в начальных классах

В традиционной системе обучения

Уравнение трактуется как *равенство, содержащее букву*.

Решить уравнение – значит узнать, при каком значении буквы уравнение обращается в верное числовое равенство.

Понятие уравнения – одно из основных понятий в математике. Поэтому введение уравнения в начальный курс математики имеет целью обеспечить преемственность между начальным и средним звеном общеобразовательной школы.

Работа с уравнениями происходит поэтапно.

1-й этап – подготовительный (1, 2-й классы).

Предусмотрены два вида заданий:

1) работа с записями с окошками вида

$$\square + 3 = 7;$$

$$\square - 4 = 2.$$

Эти задания обучающиеся выполняют, используя способ подбора;

2) раскрытие связи между компонентами и результатом арифметических действий:

1-й класс: между суммой и слагаемыми (при изучении десятка),

2-й класс: между уменьшаемым, вычитаемым и разностью, между множителями и произведением, между делимым, делителем и частным.

2-й этап – ознакомительный. Здесь вводят понятие *уравнения*.

Сначала уравнения вида $x + 5 = 9$; $12 - x = 7$; $x - 7 = 6$; $7 + x = 13$.

Позже уравнения вида $x \cdot 2 = 20$; $6 \cdot x = 48$; $x : 2 = 5$; $40 : x = 5$.

Все эти уравнения решают способом подбора.

3-й класс: помимо способа подбора используют и другой способ решения уравнений, основанный на связи между компонентами и результатом арифметических действий.

Автор этой программы, М. И. Моро, считает, что обязательно сначала надо познакомить обучающихся со способом подбора, затем использовать правила. Способ подбора формирует осознанный и математически верный подход к решению уравнений. Используя способ подбора, обучающиеся могут решить уравнение сразу на нахождение неизвестного слагаемого, вычитаемого, уменьшаемого. При нахождении значения числового выражения младшие школьники могут воспользоваться как знаниями состава числа, так и вычислительными приемами.

Все рассуждения, связанные с подбором при решении уравнения, осуществляют устно.

3-й этап – формирование умений.

Обучающиеся знакомятся с другими способами решения уравнений, а именно со способом, основанным на взаимосвязи между компонентами и результатом арифметических действий (3-й класс), но перед тем как ввести уравнение, им напоминают о взаимосвязи между компонентами. Например:

Сравните записи $x + 6 = 13$ и $x + 6 = 72$. Что у них общего? В чем отличие? Как меняется первое слагаемое в зависимости от значения суммы (второе слагаемое при этом не менялось)?

Аналогично вводят уравнения на основе взаимосвязи компонентов и результата для операции вычитания, а в дальнейшем – для умножения и деления.

В системе развивающего обучения

Тема уравнения относится к заключительному этапу обучения математике в начальной школе (4-й класс, последняя четверть).

Это позволяет:

1) одновременно рассмотреть все виды простейших уравнений (их 8). Все четыре арифметических действия младшие школьники изучили и усвоили. Это делает возможным сравнение способов решения каждого уравнения и выявление их общей основы;

2) осуществить эвристический подход к рассмотрению способов решения уравнения;

- 3) мотивировать изучение уравнений;
- 4) решить уравнение на всем множестве целых неотрицательных чисел;
- 5) использовать обобщающий потенциал уравнений, т. е. осуществить с их помощью повторение основных тем курса математики.

Методика работы над уравнением

1. Подготовительная работа к знакомству с понятием уравнения.
2. Знакомство с понятием «уравнение». Введение термина.
3. Знакомство со способом решения уравнения.
4. Формирование умения решать уравнения на базе ранее изученных понятий.
5. Применение уравнений в новых условиях.
6. Подготовительная работа к овладению алгебраическим способом решения уравнений.

Рассмотрим каждый этап подробнее.

Первый этап длится 3,75 года.

Формируются представления:

- о смысле сложения, вычитания, умножения, деления;
- понятиях сложения, вычитания, умножения, деления и их компонентах;
- свойствах арифметических действий;
- взаимосвязи между компонентами и результатами арифметических действий;
- порядке выполнения действий в выражениях;
- верном и неверном числовом равенстве.

Второй этап – знакомство с понятием уравнения – по этой методике происходит отдельно от этапа изучения способа решения уравнений.

Целесообразность такого разделения обусловлена необходимостью прочного усвоения обучающимися существенных признаков уравнения, умений выделять объекты, входящие в объемы понятий «уравнение», «корень уравнения» еще до знакомства со способом решения уравнения.

Например, учитель говорит, что если число увеличить на 12, то получится 102

$$\left. \begin{array}{l} \square + 12 = 102 \\ \square - 12 = 78 \\ \square : 2 = 45 \\ \square \cdot 5 = 450 \end{array} \right\} 90!$$

$$\begin{array}{l} \square + 12 = 102 \\ \square - 12 = 78 \end{array} \quad \text{— это уравнения.}$$

Учитель спрашивает у обучающихся, почему ученые назвали эти записи уравнениями (*Чтобы осознать их существенные признаки: быть равенством и иметь характерные признаки*).

Обучающиеся выполняют следующие упражнения.

Подумайте, какие записи можно называть уравнениями, а какие нет:

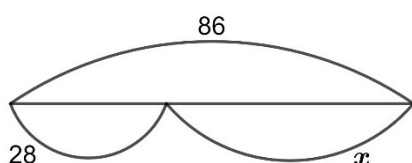
$$\begin{array}{l} (x + 20) - 4; \\ 120 - x + 451; \\ 2 \cdot x + 3 \cdot 4 = 84; \\ 8000 + 60 = 8060; \\ x + (30 + 45) > 100. \end{array}$$

С этой же целью обучающимся предлагают задания, выполнение которых предполагает использование существенных свойств уравнений для различения понятий «числовое равенство», «неравенство», «выражение», «уравнение».

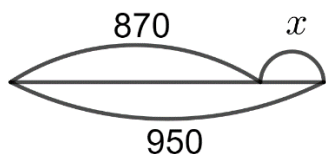
По какому признаку данные записи можно разбить на три группы? На две группы?

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot x \cdot 3 > 30; & 12 + x = 153; & 1073 - 2 \cdot y = 1067; \\ 2 \cdot y > 18; & 1 - 8 = 7; & 835 - 4 - 2 = 829; \\ 5 \cdot x + 3; & c - 8 = 100; & 5b - 3 < 18. \end{array}$$

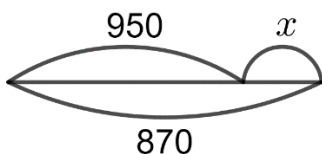
Объясните, почему уравнение $28 + x = 86$ соответствует схеме



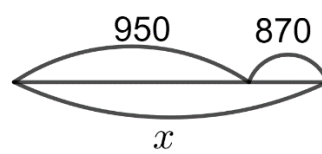
Выберите схему, соответствующую уравнению $870 + x = 950$.



а)



б)



в)

Покажите *целое* и *части* на отрезках.

Используя неравенство $297 < 312$ составьте уравнения.

Вводится термин «корень уравнения».

Решить уравнение – значит найти такое число, которое нужно записать вместо буквы, чтобы получить верное числовое равенство. Это число называют *корнем уравнения*.

При решении уравнений используют свойства арифметических действий, правила умножения на 1 и на 0, различные математические зависимости. Поэтому имеют место задания следующего вида.

Соедините между собой уравнения, имеющие одинаковые корни:

$$5 \cdot (x + 3) = 60;$$

$$3 \cdot x + 15 = 60;$$

$$3 \cdot (x + 5) = 60;$$

$$8 \cdot x = 60;$$

$$(5 + 3) \cdot x = 60;$$

$$5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 60;$$

$$5 \cdot x + 3 = 60;$$

$$15 + 5 \cdot 3 = 60.$$

Объясните, почему уравнения имеют одинаковые корни:

$$x : (3 \cdot 9) = 130 + 270;$$

$$x : (9 \cdot 3) = 400;$$

$$x : (54 : 2) = 200 \cdot 2.$$

Второй этап характеризуется следующими особенностями:

- отделен от этапа ознакомления со способом решения;
- вводится термин «корень уравнения»;
- для обозначения неизвестного числа используют разные буквы латинского алфавита;
- объяснительный текст заменен диалогами персонажей;

– учебные задания, используемые с целью осознания определенных понятий «уравнение» и «корень уравнения» носят проблемный характер.

Третий этап отличается следующими особенностями:

– отказ от рассмотрения способа подбора в качестве простейшего метода нахождения корня;

– одновременное изучение способов решения всех видов элементарных уравнений;

– уравнений разных видов.

На этом этапе обучающие задания в основном носят поисковый характер.

Четвертый этап – отказ обучающихся от репродуктивной деятельности.

Объясните свой выбор и подберите корень уравнения:

$$1200 \cdot x = 15;$$

$$x = 1200 \square 15;$$

$$x : 1200 = 15;$$

$$x = 1200 \square 15.$$

Соедините каждое уравнение с его решением:

$$x + 6 = 42;$$

$$x = 42 - 6;$$

$$42 - x = 6;$$

$$x = 36;$$

$$x - 6 = 42;$$

$$x = 42 + 6;$$

$$42 : x = 6;$$

$$x = 48.$$

$$x \cdot 6 = 42$$

$$6 + x = 42;$$

Запишите различные уравнения, пользуясь их решением:

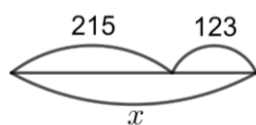
$$x = 81 - 27;$$

$$x = 54.$$

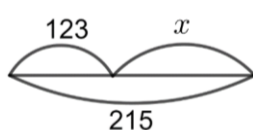
Ответ: ($81 - x = 27$; $81 - 27 = x$;

$27 + x = 81$; $x + 27 = 81$).

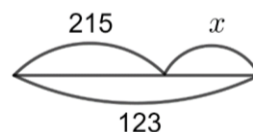
Используя схемы, составьте уравнения и решите их



а)



б)



в)

Ответ: а) $215 + 123 = x$; $x - 215 = 123$; б) $215 - x = 123$; в) неправильная схема.

На этом же этапе рассматривают уравнения более сложной структуры

$$2 \cdot (x - 30) = 412.$$

Предлагают объяснить решение следующих уравнений:

$$x - 30 = 412 : 2;$$

$$2 \cdot x - 30 = 412;$$

$$x - 30 = 206;$$

$$2x = 412 + 30;$$

$$x = 206 + 30;$$

$$x = (412 + 30) : 2;$$

$$x = 236;$$

$$x = 221.$$

Особенности четвертого этапа:

- использование проблемных поисковых учебных заданий;
- одновременное решение разных видов простейших уравнений, что устраняет возможность действовать по шаблону;
- проблемный подход к поиску способа решения проблемных уравнений.

Пятый этап – переходный из начального звена в среднее, и он разбивается на три ступени:

1. Использование уравнений для повторения и обобщения вопросов, изученных ранее.

2. Применение уравнений при решении задач, т. е. использование алгебраического способа решения задач.

3. Использование уравнений при изучении новых тем школьного курса математики в 5 – 6-х классах.

Перенесение темы «Уравнение» на заключительный этап позволяет пропустить через эту тему большинство вопросов курса математики с целью их повторения и обобщения:

- разрядный состав числа;
- смысл арифметических действий;
- деление с остатком;
- умножение на 10, 100, 1000 и т. д.;
- письменное умножение;
- письменное деление;
- свойства арифметических действий;
- координатный луч;
- зависимость изменения результатов арифметических действий при изменении их компонентов.

Разрядный состав числа

Не вычисляя, найдите корень уравнения

$$4000 + x + 30 + 2 = 4032.$$

Ход рассуждений. В правой части равенства записано число 4032, в левой представлен поразрядный состав этого числа: число 4032 состоит из двух единиц первого разряда, из трех единиц второго разряда, или тридцати, из нуля единиц третьего разряда и четырех единиц четвертого разряда. Если x – единицы третьего разряда, то заключаем $x = 0$.

Смысл арифметических действий

Не вычисляя, найдите корень уравнения

$$21 \cdot 3 + 21 + 21 + 21 = 21 \cdot x.$$

Рассмотрим левую и правую части уравнения. Вспомним, что такое умножение. Умножение – это сложение одинаковых слагаемых.

В левой части записана сумма четырех слагаемых. Первое слагаемое суммы представлено произведением, значит, какие числа складываем? А что собой представляет второе слагаемое? Какие числа складываем? Сколько их?

Итак, в левой части уравнения находится сумма чисел, в которой число 21 повторяется шесть раз, в правой части – произведение $21 \cdot x$. Следовательно, неизвестное число равно шести.

Необходимо провести самостоятельно рассуждения в аналогичном задании. Решить уравнение $7 + 7 + 7 + 7 + x = 7 \cdot 5$.

Деление с остатком

Пользуясь записью деления с остатком, найдите корни уравнения:

а) $18\,484 = 3080 \cdot 6 + 4$;

б) $18\,484 = y \cdot 6 + 4$;

в) $(18\,484 - x) : 6 = 3080$;

г) $3080 \cdot 6 + x = 18\,484$;

д) $18\,484 - 3080 \cdot y = 4$;

е) $(18\,484 - 4) : x = 6$.

Это задание позволяет обобщить знания о взаимосвязи между делимым и делителем ($18\,484 : 6 = 3080$ (ост. 4)).

Ход рассуждений. Для нахождения остатка нужно из делимого вычесть произведение неполного частного и делителя (пункт д). Чтобы найти делимое, нужно неполное частное умножить на делитель и прибавить остаток (пункт а). Чтобы найти делитель, нужно из делимого вычесть остаток и результат разделить на неполное частное (пункт е).

Умножение на 10, 100, 1000 и т. д.

Не вычисляя, найдите корень уравнения $73 \cdot x = 7300$.

Письменное умножение

Пользуясь записью, найдите корни уравнения:

$$\begin{array}{r} \times 375 \\ 24 \\ \hline +1500 \\ 750 \\ \hline 9000 \end{array}$$

$$375 \cdot x = 9000;$$

$$1500 + x = 9000;$$

$$375 \cdot x = 7500;$$

$$375 \cdot x = 1500;$$

$$9000 - x = 1500.$$

Алгоритм письменного умножения

1. Первый множитель умножить на единицы второго множителя, получить первое неполное произведение (1500 единиц).

2. Первый множитель умножить на десятки второго множителя, получить второе неполное произведение (750 десятков).

3. Сложить оба неполных произведения, получить результат (9000).

Письменное деление

Пользуясь записью, найдите корни уравнения:

$$\begin{array}{r} 5200 \overline{) 16} \\ \underline{48} \\ 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

$$16 \cdot x = 80;$$

$$16 \cdot x = 320;$$

$$16 \cdot x = 4800;$$

$$20 \cdot x = 320.$$

Алгоритм письменного деления

1. Выделить первое неполное делимое, чтобы определить первую цифру частного.

2. Эту цифру умножить на делитель, чтобы определить, сколько единиц первого делимого разделили.

3. Вычесть, чтобы узнать, сколько единиц осталось разделить.

4. Образовать второе неполное делимое и т. д.

Ход рассуждений. При делении числа 5200 на 16 получили три неполных делимых, поэтому в первом уравнении $x = 5$, так как при делении третьего неполного делимого 80 получается 5 (третья цифра в частном) и т. д.

Свойства арифметических действий

Не вычисляя, найдите корень:

$$1) 63 + (41 + 14) = (63 + x) + 14;$$

$$2) (14 - x) \cdot 3 = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3;$$

$$3) 8435 - 238 = 8435 - 230 - x; 7015 - 189 = 7015 - x - 85.$$

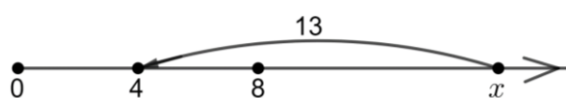
Ход рассуждения. Уравнение 1 составлено с помощью сочетательного свойства для натуральных чисел, по этому свойству легко установить, что $x = 41$. В уравнении 2 наблюдаем распределительное свойство, из которого находим $x = 5$.

Заметим здесь, что, работая со вторым уравнением, обучающиеся не только повторяют distributive свойство натуральных чисел, но и осознают способ упрощения выражений, приобретают навык выполнения тождественных преобразований.

Решая уравнения в третьем случае, обучающиеся повторяют зависимость между компонентами-вычитаемыми в арифметическом действии вычитания. Анализируют, как изменяется один компонент при изменении другого.

Координатный луч

Выберите уравнение, соответствующее рисунку:



$$x + 13 + 4 = 8;$$

$$(x - 13) + 4 = 8;$$

$$(x - 4) + 13 = 8;$$

$$x - (13 + 4) = 8.$$

Зависимость изменения результатов арифметических действий при изменении их компонентов

Вставьте в окошко число, чтобы корень второго уравнения был равен корню первого.

Сложение

$$x + 6450 = 18\,250;$$

$$x + (6350 - \square) = 18\,050.$$

Умножение

$$218 \cdot x = 1308;$$

$$(218 \cdot \square) \cdot x = 2616.$$

Вычитание

$$x - 3804 = 768;$$

$$(x + \square) - 3804.$$

Деление

$$840 : x = 70;$$

$$(840 : 2) : (x : \square) = 70.$$

Таким образом, использование подобных заданий позволяет:

- 1) осуществить повторение основных тем курса начальной математики;
- 2) расширить спектр подходов обучающихся к решению уравнений;
- 3) подойти к пониманию решения уравнений различными способами, базой которых служит знание математических понятий, зависимостей и фактов.

2.7. Методические основы изучения геометрического материала

1. В начальном курсе математики геометрический материал изучают не по концентрирам, а линейно.

Различают два направления: первое связано с изучением геометрических фигур, второе – с изучением геометрических величин.

Один из основных предметных результатов обучения – формирование геометрических представлений и понятий у младших школьников. Реализация этой задачи заключается в выполнении заданий практического характера. В частности, обучающиеся должны усвоить правила измерения длин предметов и площадей фигур.

В свою очередь, выполнение заданий по измерению площадей геометрических фигур, длин предметов связано с необходимостью изучения таких геометрических понятий, как отрезок, угол, треугольник, четырехугольник, прямоугольник, квадрат, многоугольник, круг, точка.

Основа формирования представлений о геометрических фигурах – способность обучающихся к восприятию формы. Эта способность позволяет им узнавать, различать, изображать следующие геометрические фигуры: точку, прямую, кривую, ломаную, отрезок, угол, многоугольник, квадрат, прямоугольник.

При знакомстве с геометрическими фигурами ставят следующие цели:

- накопление запаса геометрических представлений, на основе которых в дальнейшем можно будет определять геометрические понятия;
- развитие пространственных представлений у младших школьников.

Ряд геометрических понятий вводят без определений. Достаточно показать обучающемуся ту или иную геометрическую фигуру и назвать ее соответствующим термином. Таким образом происходит знакомство, например, с точкой или отрезком.

Ряд названий фигур обучающимся дают остенсивным путем (путем показа) [7]. При этом некоторые понятия появляются как обобщение свойств реальных предметов. Например: перед обучающимися ряд прямоугольников, длины сторон которых одинаковы, а ширина каждого последующего прямоугольника меньше, чем у предыдущего. По-

степенно уменьшая размер прямоугольника по ширине до нуля, получим отрезок (новую фигуру). В подобных случаях в математике говорят, что прямоугольник вырождается в отрезок [7].

Понятие прямого угла не дают. Модели получают практическим путем. Например, модель прямого угла легко получить, дважды согнув лист бумаги. Берут лист бумаги, необязательно с ровными границами. Ставят на плоскости листа точку. Сгибают лист так, чтобы точка оказалась на линии сгиба. Теперь поперек этой линии сгибают лист, при этом точка попадает и на новую линию сгиба. Оказывается, что точка – вершина прямого угла. Полученную модель прикладывают к углу учебника, парты, стола учителя; убеждаются, что все они прямые.

Далее на основе прямого угла обучающихся знакомят с понятиями острого и тупого угла.

Только знакомство с понятием прямоугольника (квадрата) определяют через род и видовое отличие. Такое знакомство с геометрической фигурой позволяет обучающимся воспринимать фигуру как целостный образ. Если не предусматривать специальные подходы, возникает ряд ошибок.

Например, обучающиеся не умеют сравнивать между собой геометрические фигуры, такие как прямоугольник, квадрат. Для наглядности можно изобразить прямоугольник, вписанный в квадрат, и задать вопросы: «Сколько прямоугольников вы видите на рисунке? Сколько квадратов?»

Одна из самых распространенных ошибок возникает, когда обучающиеся любую фигуру с прямым углом относят к прямоугольнику. В данном случае имеется ошибка в понятии многоугольника.

Чтобы предупредить подобные ошибки, необходимо продумать методику ознакомления младших школьников с геометрическими фигурами. При изучении геометрического материала в начальной школе основными методами являются наглядные пособия, игры дидактические, настольные, интерактивные, практические задания, метод беседы. Используют такие формы работы, как фронтальная, групповая, индивидуальная.

При изучении геометрического материала логично выделить этапы, на которых происходит:

- 1) подготовка к работе с геометрическими понятиями и фигурами;

2) уточнение названий геометрических фигур, умение различать фигуры, выполнять простые классификации, развивать пространственные представления;

3) знакомство с фигурами: точкой, прямой, кривой, лучом, отрезком, углом (всеми видами), прямоугольником, квадратом;

4) обобщение представлений о геометрических фигурах. Вводят обозначения заглавными латинскими буквами. Уточняют некоторые свойства этих фигур. Вводят термин «многоугольник», разъясняют его содержание.

2. Геометрические фигуры можно использовать как счетный материал и давать уточнение их названий.

Например, учитель знакомит обучающихся с числом и цифрой 3. На доске изображены треугольники (прямоугольный, равносторонний, тупоугольный). Учитель проводит беседу с обучающимися по вопросам: «Как называются эти фигуры? Почему? Можно ли их назвать по-другому? Что общего у всех этих фигур?»

Аналогично этому при знакомстве с цифрой и числом 4 обучающиеся работают с различными видами четырехугольников (трапецией, квадратом, прямоугольником, ромбом).

Наряду с указанными обязательны упражнения, связанные с поиском конкретной фигуры среди множества других фигур. Обучающиеся должны научиться различать фигуры, пользоваться простой классификацией.

Приведем задания, цель которых – формирование геометрических представлений у младших школьников.

Начальный этап работы может содержать следующие упражнения.

1. «Расставь правильно!»

Цель: развитие пространственных представлений о расположении объектов по горизонтальной оси.

Используемые материалы: наборы геометрических фигур из цветного картона по количеству обучающихся.

Обучающимся раздают вырезанные из цветной бумаги геометрические фигуры (квадраты, круги, треугольники, прямоугольники, ромбы). Величину и цвет педагог определяет сам. Число наборов должно соответствовать количеству человек в группе. По заданию ведущего обучающиеся раскладывают фигуры на своей парте в указываемом им порядке с помощью слов «дальше», «ближе», «за», «перед»,

«между». Затем обучающиеся по очереди становятся в роли ведущего и задают свой порядок выкладывания фигур, проверяют у одноклассников правильность выполнения задания.

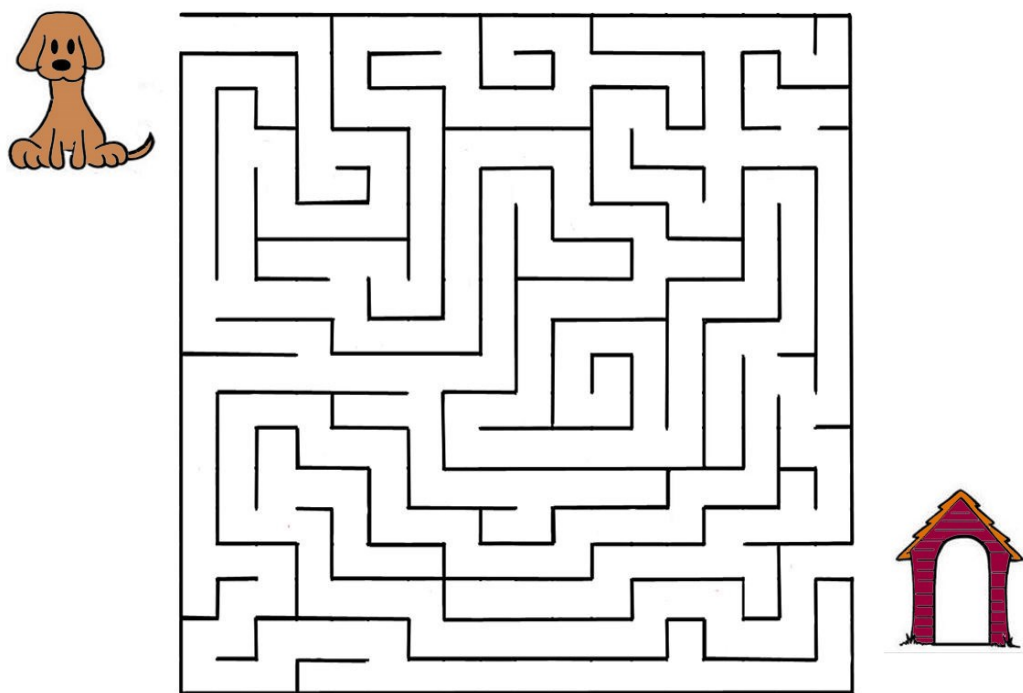
2. «Лабиринты»

Цели: развитие умения самостоятельного употребления слов, обозначающих расположение в пространстве; формирование умения работать в паре.

Используемые материалы: напечатанные на листе бумаги лабиринты по количеству участников, изображение лабиринта на большом листе бумаги формата А4 или А3.

Учитель: «Сейчас мы будем проходить лабиринты. Для этого вы должны объединиться в пары и определить, кто будет первым закрывать глаза и карандашом прочерчивать путь, а кто будет ему помогать в этом, смотря на сам лабиринт и сообщая товарищу с помощью слов “влево”, “вправо”, “вверх” “вниз” правильный путь». После того как все пары выполняют задание, учитель предлагает обучающимся поменяться ролями в паре и теперь, наоборот, от центра лабиринта найти выход за его пределы.

Перед выполнением упражнения учитель может предложить ребятам потренироваться на доске, на которой висит большое изображение лабиринта.



3. «Разноцветные клеточки»

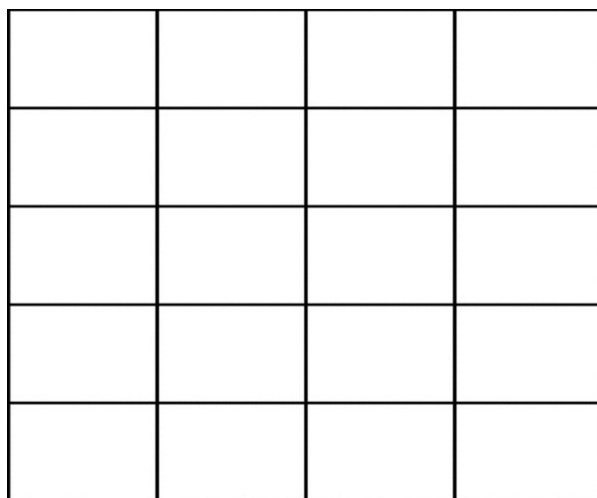
Цели: развитие пространственных представлений о расположении объектов по вертикальной оси; развитие умения самостоятельного употребления слов, обозначающих расположение в пространстве.

Используемые материалы: поля из клеток на отдельных листах бумаги по количеству обучающихся.

Каждому обучающемуся выдают лист бумаги с полем из клеток. Учитель же по заранее подготовленному им полю диктует, используя слова, обозначающие пространственное расположение объектов, какие клеточки каким цветом следует закрасить.

После выполнения задания обучающиеся также могут выступить в роли ведущего, отметив на своем поле по одной-две клеточки и описав их местоположение одноклассниками.

Например: «Клетку в верхнем левом углу закрасьте фиолетовым цветом, отсчитайте от нее две клетки влево и третью клетку закрасьте зеленым цветом. Отступите от зеленой клетки вниз одну клетку и вторую закрасьте желтым цветом».

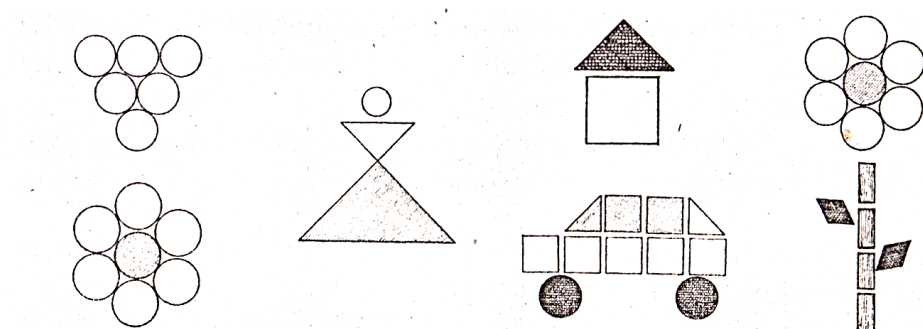


4. «Сложи картинку из фигур»

Цель: развитие воображения, образного мышления, пространственной ориентировки, конструктивных навыков.

Используемые материалы: магнитная доска, набор геометрических фигур разного размера и цвета (круги, треугольники, квадраты, прямоугольники) на магнитах; наборы геометрических фигур разного размера (круги, треугольники, квадраты, прямоугольники), вырезанных из цветного картона (по количеству детей).

Учитель, прикрепляя к магнитной доске круги, квадраты, треугольники, прямоугольники, конструирует простейшие рисунки.



Затем он раздает обучающимся наборы геометрических фигур и просит как можно точнее скопировать его рисунки.

После завершения упражнения учитель предлагает обучающимся сложить из имеющихся геометрических фигур новые красивые (или необычные) картины.

Второй этап изучения геометрического материала может содержать следующие упражнения в игровой форме.

1. «Фигуры заблудились».

Перед обучающимся набор из картонных многоугольников и два домика. Домики разные: у первого крыша и окна изображены в форме треугольников, у второго – в форме трапеции и прямоугольников соответственно. Каждую фигуру из данного набора следует поместить в подходящий домик.

2. «Две полочки».

На полочках лежат похожие наборы разноцветных фигур, расположенных в разном порядке: на первой – широкий розовый прямоугольник, большой фиолетовый треугольник, малый желтый треугольник, большой синий квадрат, узкий зеленый прямоугольник; на второй – большой фиолетовый треугольник, широкий розовый прямоугольник, малый желтый треугольник, большой синий квадрат, узкий зеленый прямоугольник, красный малый круг.

Обучающиеся анализируют расположение фигур на полочках, отвечают на вопросы учителя и выполняют задания:

- Что изменилось?
- Посчитайте фигуры на каждой полочке.
- Посчитайте большие фигуры на каждой полочке.

- Посчитайте малые фигуры на каждой полочке.
- Каких фигур больше? На сколько?

3. «Продолжи узор».

В горизонтальной цепочке последовательно расположены квадрат, круг, треугольник, квадрат. Требуется продолжить данный ряд фигур, соблюдая указанный порядок.

На этом же этапе необходимы упражнения для усвоения отношений между геометрическими фигурами.

1. «Поезд с геометрическими фигурами».

Цель: подбирать и сопоставлять разные геометрические фигуры по форме, отправлять нужную фигуру в подходящий вагончик с определенным цветом.

Используемые материалы: вагончики разного цвета с окнами в виде геометрических фигур; локомотив; геометрические фигуры разного цвета (круги, квадраты, треугольники, прямоугольники, овалы).

2. «Угадай, что спрятали».

На столе перед обучающимся лежат карточки с изображением геометрических фигур (звезда, шестиугольник, прямоугольник, трапеция, ромб, треугольник, круг, квадрат, овал). Обучающийся внимательно их рассматривает. Затем ему предлагают закрыть глаза, учитель прячет одну карточку. После условного знака обучающийся открывает глаза и говорит, что было спрятано.

3. «Разгадай загадки».

Нет углов у меня
И похож на блюдце я,
На медаль, на блинок,
На осиновый листок.
Людам я старинный друг.
Называют меня...

(Круг)

Четыре угла и четыре сторонки,
Похожи точно родные сестренки.
В ворота его не закатаешь, как мяч,
И он за тобою не пустится вскачь.
Фигура знакома для многих ребят.
Его вы узнали? Ведь это...

(Квадрат)

На фигуру посмотри
И в альбоме начерти
Три угла. Три стороны
Меж собой соедини.
Получился не угольник,
А красивый...

(Треугольник)

Он похожий на яйцо
Или на твое лицо.
Вот такая есть окружность –
Очень странная наружность:
Круг приплюснутым стал.
Получился вдруг...

(Овал)

Растянули мы квадрат
И представили на взгляд,
На кого он стал похожим
Или с чем-то очень схожим?
Не кирпич, не треугольник –
Стал квадрат...

(Прямоугольник)

А братишка мой, Сережа,
Математик и чертежник –
На столе у бабы Шуры
Чертит всякие...

(Фигуры)

4. «Кому какая форма».

Вариант 1

Цель: сформировать у обучающихся умение группировать геометрические фигуры (овалы, круги) по форме, отвлекаясь от цвета, величины.

Используемые материалы: большие мишка и матрешка; на каждого обучающего по три круга и овала разных цветов и размеров, два больших подноса.

Педагог демонстрирует круг и овал, просит обучающихся вспомнить названия этих фигур, показать, чем они отличаются друг от друга,

обвести контуры пальчиками. Предлагает положить все кружочки на один поднос – матрешке, все овалы на другой – мишке. Педагог наблюдает, как обучающиеся выполняют задание, в случае затруднения предлагает обвести фигуру пальцем и сказать, как она называется.

Вариант 2

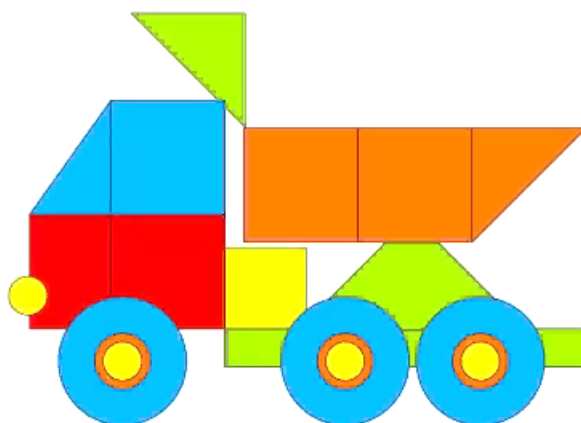
Цель: научить обучающихся группировать геометрические фигуры (квадраты, прямоугольники, треугольники) по форме, отвлекаясь от цвета и величины. Содержание аналогично варианту 1.

5. «Сломанная машина».

Цель: научить замечать нарушения в изображенном предмете.

Используемые материалы: машина, состоящая из геометрических фигур, в изображении которой не хватает какой-либо части.

Учитель строит на доске машину, состоящую из геометрических фигур, и спрашивает обучающихся, из каких фигур она состоит. Затем все обучающиеся, кроме одного – ведущего, отворачиваются. Учитель убирает какую-либо деталь машины. Кто раньше других скажет, какую деталь убрали и какой она формы, становится ведущим. Если обучающиеся легко справляются с задачей, можно одновременно убрать две детали.



Теперь переходим к следующему этапу, на котором работаем с фигурами: точкой, прямой, кривой, лучом, отрезком, углом (всеми видами), прямоугольником, квадратом.

Начало этого этапа характеризуется знакомством с элементарной геометрической фигурой – *точкой*. Любую геометрическую фигуру можно рассматривать как множество точек. Через точку можно прово-

дить различные линии. Опираясь на жизненный опыт младшего школьника, можно ему предложить самостоятельно выполнить задание «проведи линии через точку»



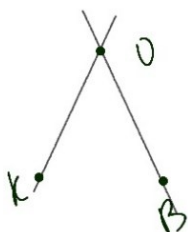
Обучающийся может сам назвать линию термином. Работая над этой терминологией, целесообразно изображать **прямые линии** не только на бумаге и доске, но и показать обучающимся, как получить прямую, сгибая лист бумаги.

Учитель ставит на листе две точки и сгибает лист так, чтобы линия сгиба проходила через эти точки. Обучающиеся могут самостоятельно справиться с решением этой задачи. Такая практическая работа позволяет младшим школь-

никам убедиться в том, что через две точки можно провести только одну прямую. После этой работы необходимо научить обучающихся пользоваться линейкой. При этом они должны сами убедиться в необходимости использования линейки: провести через две точки прямую с помощью линейки.

Чтобы научить обучающихся различать такие понятия, как точка пересечения двух линий; линия, проходящая через точку; линия, соединяющая две точки; точка, принадлежащая линии, необходимо выполнить следующие упражнения.

1. Проведите прямые линии через точку К и точку В так, чтобы они пересеклись в точке О.



2. Проведите прямую через точку К так, чтобы точка О лежала на прямой, а В была вне прямой.

3. Проведите разные кривые линии через данные точки А и В.

4. Проведите прямую так, чтобы она пересекала кривую:

- а) в одной точке;
- б) в двух точках;
- в) в трех точках.

Следует выделить такие признаки **отрезка**, ориентируясь на которые, обучающиеся смогли бы легко узнать эту геометрическую фигуру:

- 1) отрезок имеет два конца;
- 2) у любого отрезка можно измерить длину.

Осознавая существенные признаки отрезка, обучающиеся под руководством учителя находят отрезки даже на объемных фигурах.

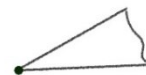
Если из данной точки провести по линейке прямую линию, то получим геометрическую фигуру **луч**.



Если из одной точки провести два луча, то получим фигуру, называемую углом. **Угол** – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами.

Каждый обучающийся получает лист бумаги с неровными краями. В середине листа изображена точка. Учитель предлагает сложить лист так, чтобы линия сгиба прошла через эту точку. Затем сложить лист так, чтобы линии сгиба совместились. У каждого обучающегося получится своя модель. Учитель предлагает наложить модели друг на друга и сравнить прямые углы между собой.

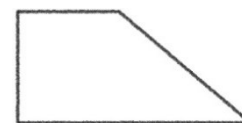
Далее происходит знакомство с тупым и острым углами. Если при наложении модели прямого угла на модель другого угла сторона другого угла оказывается внутри, то такой угол называют **острым**.



Если при наложении другая сторона пройдет вне прямого угла, то такой угол называют **тупым**.



В геометрической фигуре под названием **трапеция** есть все углы.



Имея представление о точке, отрезке и угле, обучающиеся могут находить эти геометрические фигуры в треугольнике, четырехугольнике, выделяя в качестве их элементов вершины, стороны и углы.

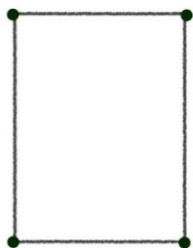
Оперируя **объемными телами**, обучающиеся усваивают термины **грань** (прямоугольник, квадрат, треугольник), **ребро** (отрезок), **вершина** (точка).



Если конец одного отрезка является началом другого, а конец второго – началом третьего, и эти отрезки образуют между собой угол, то имеем **ломаную линию**. Ломаные линии могут быть **замкнутыми** и **незамкнутыми**.

Отличительные особенности геометрических фигур.

1. **Прямоугольник** – параллелограмм, у которого все углы прямые.



Свойства прямоугольника:

- а) диагонали равны и делятся в точке пересечения пополам;
- б) около прямоугольника можно описать окружность с центром в точке пересечения его диагоналей и радиусом, который равен половине диагонали.

2. **Квадрат** – это тот же прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства квадрата:

- а) все стороны равны;
- б) все углы равны и составляют 90 градусов;
- в) диагонали равны и перпендикулярны;
- г) центры вписанной и описанной окружности совпадают и находятся в точке пересечения диагоналей.

3. **Трапеция** – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

Основное свойство: в трапецию можно вписать окружность, если сумма ее оснований равна сумме боковых сторон.

4. **Параллелограмм** – четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:

- а) противоположные стороны и углы равны;
- б) сумма любых двух соседних углов равна 180 градусам, диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- в) каждая диагональ делит фигуру на два равных треугольника.

5. **Ромб** – это параллелограмм с равными сторонами.

6. **Треугольник** – это такая фигура, которая образуется, когда три отрезка соединяют три точки, не лежащие на одной прямой. Эти три точки принято называть вершинами, а отрезки – сторонами.

Виды треугольников:

а) *прямоугольный* – один угол прямой, два других менее 90 градусов;

б) *остроугольный* – градус угла больше нуля, но меньше 90 градусов;

в) *тупоугольный* – один угол тупой, два других острые.

Свойства треугольника:

а) против большего угла лежит бо́льшая сторона, и наоборот;

б) сумма углов равна 180 градусам;

в) все углы равностороннего треугольника равны 60 градусам;

г) в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

7. **Круг** – это часть плоскости, которая лежит внутри окружности.

Окружность – это граница круга.

Радиус окружности – это расстояние от центра окружности до любой точки на ней.

Диаметр круга – это отрезок, соединяющий две точки на окружности и проходящий через ее центр. Диаметр круга равен двум его радиусам.

8. **Овал** – плоская замкнутая строго выпуклая гладкая кривая; следовательно, имеющая с любой прямой не более двух общих точек.

По теореме о четырех вершинах овал имеет не менее четырех вершин.

9. **Шестиугольник** – многоугольник с шестью углами. Также шестиугольником называют всякий предмет такой формы.

Свойства правильного шестиугольника:

а) равные стороны: все стороны правильного шестиугольника имеют одинаковую длину. Это означает, что каждая сторона равна другим сторонам в шестиугольнике;

б) равные углы: углы в правильном шестиугольнике равны между собой. Каждый угол равен 120 градусам.

Вопросы для обсуждения по теме «Методико-математические основы изучения алгебраического материала»

1. Какие алгебраические понятия изучают по программам М. И. Моро, Н. Б. Истоминой в курсе математики начальных классов?

2. Что такое «числовое выражение», «равенство», «неравенство»? В каком классе вводят эти термины по разным программам? В процессе выполнения каких упражнений у обучающихся формируются эти понятия? Укажите различные формы прочтения числовых выражений, равенств, неравенств, которые используют на уроках математики в начальных классах.

3. Какова роль тождественных преобразований при нахождении значения числового выражения. Каковы правила порядка выполнения действий в числовых выражениях?

Вопросы для обсуждения по теме «Методико-процессуальные основы изучения алгебраического материала»

1. Что такое «буквенное выражение», «переменная величина»? Как познакомить обучающихся с переменной? Приведите примеры различных видов упражнений из учебников математики, которые можно использовать для осознания обучающимися начальных классов понятия переменной. Какова методика ознакомления обучающихся с буквенными выражениями? Изготовьте необходимые наглядные пособия.

2. Как использовать буквенные выражения в процессе работы младших школьников с функциональной зависимостью? Расскажите о функциональной пропедевтике, проводимой на уроках математики в начальных классах.

3. Какова методика формирования у младших школьников представлений об уравнении? Как происходит изучение понятий «уравнение» и «решение уравнения»? Какие способы решения уравнений используют в начальных классах?

4. Как происходит ознакомление младших школьников с алгебраическим методом решения текстовых задач на основе составления и решения уравнения по задаче?

Практические задания по теме «Методико-математические основы изучения геометрического материала»

Основная задача – понять, как у младших школьников происходит процесс ознакомления с геометрическими фигурами (также важно помнить о геометрических величинах) и сам процесс их изучения.

1. Какие виды упражнений (а также методику работы с ними), раздаточный материал, занимательные задания рекомендовано предложить для младших школьников на этапе пропедевтики изучения геометрических фигур? Желательно подобрать практические задания из учебника и представить на семинаре.

2. Проведите сравнительный анализ различных учебников математики для начальной школы (М. И. Моро и Н. Б. Истоминой) с точки зрения рассматриваемых в них геометрических фигур и методики их изучения. Выполните этот анализ, отвечая на следующие вопросы: «Какие фигуры изучаются? В какой последовательности? Каким образом?» Укажите существенные признаки каждой геометрической фигуры.

3. Укажите существенные признаки каждой геометрической фигуры. (Данный вопрос должен быть изложен в рабочей тетради у каждого студента.)

4. Составьте библиографию статей журнала «Начальная школа» по данной теме за последние пять лет.

Практические задания по теме «Методико-процессуальные основы изучения геометрического материала»

1. Разработайте фрагменты уроков, цель которых – изучение существенных признаков геометрических фигур и их моделирование (подготовьте необходимую наглядность, используйте занимательный материал) по следующим темам:

- а) «Точка. Прямая и кривая линии»;
- б) «Луч. Отрезок»;
- в) «Угол»;

- г) «Ломаная линия»;
- д) «Многоугольник»;
- е) «Прямоугольник и квадрат»;
- ж) «Окружность. Круг».

2. Придумайте игры, которые вы могли бы предложить обучающимся для усвоения отношений между геометрическими фигурами, их существенных свойств и названий.

3. Подберите упражнения различных видов, способствующие развитию пространственного воображения и мышления обучающихся. Изготовьте дидактический материал к некоторым из них.

4. Задание по желанию студента. Охарактеризуйте курс внеурочной деятельности «Наглядная геометрия» Н. Б. Истоминой, поинтересуйтесь методикой изучения данного курса. Отметьте достоинства и возможные проблемы при ведении этого курса внеурочной деятельности.

5. Задание по желанию студента. Поинтересуйтесь методикой изучения темы «Симметрия» в 1 – 4-х классах по программе Н. Б. Истоминой, ориентируясь на следующие этапы:

- а) формирование представлений о симметричной фигуре;
- б) построение фигур, симметричных данной, относительно оси симметрии.

6. Методика ознакомления младших школьников с объемными фигурами: многогранниками и телами вращения.

Рейтинг-контроль по теме «Методика изучения алгебраического и геометрического материала в начальной школе»

Вариант I

1. Числовые и буквенные выражения, числовые равенства и неравенства, уравнения относятся:

- а) к арифметическим понятиям;
- б) алгебраическим понятиям;
- в) математическим понятиям средней школы.

2. Выражение с переменной иначе называют:

- а) числовым выражением;
- б) буквенным выражением;
- в) числовым выражением;
- г) тождеством;
- д) уравнением.

3. Замену одного числового выражения другим, тождественно равным ему, называют:

- а) уравнением;
- б) преобразованием;
- в) выражением, имеющим смысл;
- г) тождественным преобразованием;
- д) выражением, не имеющим смысла;
- е) заданием на нахождение числового значения.

4. Решить уравнение – это значит:

- а) найти такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение получится верное числовое равенство;
- б) найти такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение получится числовое неравенство;
- в) найти все его корни или доказать, что их нет.

5. Неравенство на множестве всех действительных чисел:

- а) $0,5x + 2 \leq 0$;
- б) $2 - 0,5x \geq 0$;
- в) $0,5x + 2 < 0$;
- г) $2 - 0,5x > 0$;
- д) $0,5x + 2 \geq 0$;
- е) $2 - 0,5x \leq 0$.

6. Усвоение правил измерения длин предметов и площадей фигур
(укажите неверный ответ):

- а) относится к одному из направлений реализации определенной задачи учебной программы;
- б) непостижимо детьми начальной школы;
- в) относится к упражнениям практического характера;
- г) способствует формированию геометрических представлений и понятий у младших школьников.

7. Через две точки плоскости можно провести:

- а) пучок прямых;
- б) единственную прямую;
- в) пару пересекающихся прямых;
- г) бесконечное множество прямых.

8. У квадрата:

- а) шесть осей симметрии;
- б) бесконечное множество осей симметрии;
- в) четыре оси симметрии;
- г) две оси симметрии.

9. Симметричные относительно точки и/или прямой фигуры:

- а) имеют ту же форму, что и исходные;
- б) считаются левоориентированными;
- в) другого размера по сравнению с исходными;
- г) того же размера, что и исходные;
- д) получают всегда «перевернутыми».

10. К методам обучения при ознакомлении с геометрическим материалом относят:

- а) метод беседы;
- б) наглядный материал;
- в) ребусы и загадки;
- г) практические задания;
- д) игры.

Вариант II

1. Запись, состоящую из чисел, скобок и знаков действий, называют:

- а) выражением;
- б) буквенным выражением;
- в) числовым выражением;
- г) тождеством;
- д) уравнением.

2. Цели включения алгебраического материала в курс начальной школы:

- а) научить детей быстрому счету;
- б) более осознанно усваивать арифметические знания;
- в) преемственность;
- г) непрерывное образование.

3. Значением числового выражения называют:

- а) ответ;
- б) число, полученное в результате выполнения всех действий, указанных в числовом выражении;
- в) выражения, не имеющие смысла;
- г) решение уравнения;
- д) задания на нахождение числового значения.

4. Равенство с неизвестным числом – это:

- а) выражение;
- б) буквенное выражение;
- в) числовое выражение;
- г) уравнение;
- д) тождество;
- е) математическая запись.

5. Неравенство на множестве всех действительных чисел:

- а) $0,5x + 2 \leq 0$;
- б) $2 - 0,5x \geq 0$;
- в) $0,5x + 2 < 0$;
- г) $2 - 0,5x > 0$;
- д) $0,5x + 2 \geq 0$;
- е) $2 - 0,5x \leq 0$.

6. Основа формирования представлений о геометрических фигурах – способность обучающихся к восприятию:

- а) предметов окружающего мира;
- б) визуальному;
- в) формы;
- г) информации;
- д) звуков.

7. Через точку на плоскости можно провести:

- а) единственную прямую;
- б) пару пересекающихся прямых;
- в) пучок прямых;
- г) бесконечное множество прямых.

8. У прямоугольника:

- а) шесть осей симметрии;
- б) бесконечное множество осей симметрии;
- в) четыре оси симметрии;
- г) две оси симметрии.

9. К методам обучения при ознакомлении с геометрическим материалом относятся:

- а) метод беседы;
- б) наглядный материал;
- в) ребусы и загадки;
- г) практические задания;
- д) игры.

10. Централно симметричными фигурами являются:

- а) прямоугольник;
- б) угол;
- в) прямая;
- г) параллелограмм;
- д) круг;
- е) отрезок;
- ж) правильный многоугольник;
- и) треугольник;
- к) равносторонний треугольник.

Глава 3. РАЗВИТИЕ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

3.1. Об учебной деятельности

Учебная деятельность – это вид практической педагогической деятельности, цель которой – воспитание человека, владеющего необходимой частью культуры и опыта старшего поколения, представленных учебными программами в форме совокупности знаний и умений ими пользоваться. Учебная деятельность может быть осуществлена только путем сочетания деятельности учителя и деятельности обучающегося.

Учебную деятельность составляют действия двух видов: общие и специфические.

1. *Общие*: умение планировать свою деятельность, умение контролировать выполнение любой деятельности, умение запоминать, умение быть внимательными, умение наблюдать.

2. *Специфические*: все приемы логического мышления: сравнение, подведение под понятие, выводение следствий, приемы доказательства, классификации и др. Они независимы от конкретного материала, хотя всегда выполняются с использованием каких-то предметных (специфических) знаний.

К примерам специфических действий относятся умения выполнять сложение чисел, проводить семантический анализ математического текста и др.

В зависимости от того, какие учебные задачи должны быть решены в процессе обучения математике и какие учебные действия выполняются обучающимися, говорят о различных видах учебной деятельности.

Например, школьник решает задачу. Его *практическая деятельность* связана с изучением наглядных пособий, составлением рисунка или чертежа. Если школьник выполняет воспроизводящие действия, то это связано с *репродуктивной деятельностью*. Например, обучающийся вспоминает правило, определение. Если же учебные действия выполняются в варьирующих условиях, то это *вариативно-воспроизво-*

дящая деятельность. Такая деятельность характерна для обучения младших школьников, так как использование этих действий связано с алгоритмом решения вопросов и т. д.

Деятельность, направленную на поиск новых знаний, нахождение новых способов действия, называют *продуктивной* (творческой, эвристической).

Если обучающийся находит способ действия самостоятельно, опираясь на имеющиеся у него знания, то такую деятельность называют *исследовательской*.

В том случае, когда школьникам помогает учитель, творческая деятельность носит частично-поисковый характер. Творческая деятельность может осуществляться на разных уровнях: частично-поисковом и исследовательском. Каждый уровень характеризуется степенью самостоятельности выполнения различных действий или операций.

В данном пособии разные методические вопросы предлагается изучить с двух точек зрения: *традиционного обучения* и *развивающего обучения*.

Основой традиционного подхода служит репродуктивная деятельность. Здесь знания предлагаются в «готовом» виде: учитель объясняет материал, обучающиеся сознательно усваивают знания, понимают и запоминают их. Прочные знания формируются многократными тренингами и повторением.

Развивающая система обучения построена на продуктивной (поисковой) деятельности. В данном случае учитель организует поиск новых знаний, обучающиеся самостоятельно рассуждают, решают возникшие познавательные и проблемные ситуации. Продуктивная деятельность связана с активной работой мышления и находит свое выражение в таких мыслительных операциях, как анализ и синтез, сравнение, классификация, аналогия, обобщение. Эти мыслительные операции в психолого-педагогической литературе принято называть *логическими приемами* или *приемами умственной деятельности*.

Поэтому развивающим называют обучение, которое оказывает существенное влияние как на общее психическое развитие детей, так и на развитие их специальных способностей (В. В. Давыдов).

Далее остановимся на рассмотрении логических приемов и изучим их более детально.

3.2. Приемы умственной деятельности

Анализ и синтез

Анализ объекта позволяет видеть составляющие его элементы, а также признаки объекта или его свойства. **Синтез** – это соединение различных элементов, сторон объекта в единое целое.

Способность к аналитико-синтетической деятельности находит свое выражение не только в умении выделять элементы того или иного объекта, его различные признаки или соединять элементы в единое целое, но и в умении включать их в новые связи, наблюдать их новые функции.

Формированию этих умений может способствовать: а) рассмотрение данного объекта с точки зрения различных понятий; б) постановка различных заданий к данному математическому объекту.

Например, с точки зрения понятий предлагают задания следующего содержания.

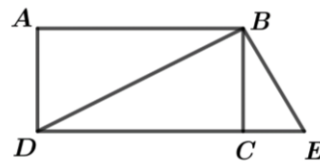
1. Прочитайте по-разному выражение $16 - 5$. (*16 уменьшили на 5; разность чисел 16 и 5; из 16 вычтешь 5.*)

2. Прочитайте по-разному равенство $15 - 5 = 10$. (*15 уменьшить на 5, получим 10; 15 больше 10 на 5; разность чисел 15 и 5 равна 10; 15 – уменьшаемое, 5 – вычитаемое, 10 – разность; если к разности (10) прибавить вычитаемое (5), то получим уменьшаемое (15); число 5 меньше 15 на 10.*)

3. Как по-разному можно назвать квадрат? (*Прямоугольник, четырехугольник, многоугольник.*)

4. Расскажите все, что вы знаете о числе 325. (*Это трехзначное число; оно записано цифрами 3, 2, 5; в нем 325 единиц, 32 десятка, 3 сотни; его можно записать в виде суммы разрядных слагаемых $300 + 20 + 5$; оно на одну единицу больше числа 324 и на одну единицу меньше числа 326.*)

5. Найдите отрезок BC. Что вы можете рассказать о нем? (*BC – сторона треугольника BCE; BC – сторона треугольника DBC; BC меньше, чем DC; BC меньше, чем AB; BC – сторона угла BCD и угла BCE.*)



Рассмотрение математических объектов с точки зрения различных понятий – способ составления вариативных заданий.

Например, выполним задание: «Запишите все четные числа от 2 до 20 и все нечетные числа от 1 до 19».

Результат выполнения задания – запись двух рядов чисел:

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

На основе этих математических объектов можно составить различные задания.

1. По какому правилу записан первый ряд? Продолжите его.
2. Какие числа нужно вычеркнуть в первом ряду, чтобы каждое следующее было на четыре больше предыдущего?
3. Подберите из первого ряда пары чисел, разность которых равна 10.
4. Подберите из второго ряда пары чисел, разность которых равна 10.
5. Найдите в первом ряду сумму первого и последнего чисел; сумму вторых чисел от начала и от конца ряда; сумму третьих чисел от начала и от конца ряда. Чем похожи эти суммы?
6. Выполните это же задание для второго ряда. Чем похожи полученные суммы?

Примером постановки различных заданий к данному математическому объекту служит и работа с текстовыми задачами.

К концу учебного года у Лиды осталось два чистых листа в тетради по русскому языку и пять чистых листов в тетради по математике. Поставьте к этому условию сначала такой вопрос, чтобы задача решалась сложением, а потом такой вопрос, чтобы задача решалась вычитанием.

В коробке было десять карандашей. Когда из коробки взяли несколько карандашей, в ней осталось шесть карандашей. Поставьте к этому условию вопрос и решите задачу.

Прием сравнения

Умение пользоваться *приемом сравнения* формируется поэтапно. Первый этап связан с выделением признаков, или свойств, одного объекта. На втором этапе устанавливаются сходства и различия между признаками двух объектов. Третий этап позволяет выявлять сходства и различия между признаками трех и более объектов.

На первом этапе в качестве объектов используют предметы или рисунки с их изображением, хорошо знакомые младшим школьникам. При этом обучающиеся замечают явные признаки предметов. Чтобы организовать деятельность обучающихся, направляя ее на определение признаков объекта, целесообразно задавать вопросы: «Что вы можете рассказать о предмете? Что вы можете рассказать о форме (размере, цвете) предмета?»

Второй этап работы предполагает наличие двух объектов. Поэтому можно задавать вопросы: «В чем сходство и различие данных предметов (например, яблока и груши, яблока и тыквы, яблока и солнышка)?».

Наличие трех и более объектов на третьем этапе позволяет обучающимся рассуждать об элементах множества, характеризовать их с точки зрения сходства и различия по формам, цвету, размеру, назначению предмета (яблоко, тыква, капуста, солнышко, банан).

Умение выделять признаки и, ориентируясь на них, сравнивать предметы обучающиеся переносят на математические объекты.

В чем сходство и различие:

1) выражений $2 + 3$; $2 - 3$; $2 \cdot 3$; $2 : 3$;

2) равенств $4 + 5 = 9$; $5 + 4 = 9$; $4 \cdot (5 + 3) = 32$; $4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 32$;

3) задач и их решений:

а) В саду два яблоневых дерева и шесть грушевых. На сколько грушевых деревьев больше, чем яблоневых?

б) В саду два яблоневых дерева и шесть грушевых. Во сколько раз грушевых деревьев больше, чем яблоневых?

4) геометрических фигур: прямоугольника и квадрата;

5) вычислительных приемов: $6 + 3 = 6 + (2 + 1) = (6 + 2) + 1$ и $9 + 3 = 9 + (1 + 2) = (9 + 1) + 2$?

Показатель сформированности приема сравнения – умение обучающихся самостоятельно использовать его при выполнении заданий без указания действий: сравните, опишите признаки, в чем сходство и различие? Например, в задании «Продолжите ряды чисел: 2, 4, 6...; 1,

5, 9, 13...» обучающийся, устанавливая закономерность в последовательности, обязательно сравнивает числа и делает вывод: в каждом ряду последующее число на одно и то же число ($2/4$) больше предыдущего; первый ряд начинается с числа 2, оно четное, значит, в первом ряду выписаны все четные натуральные числа. Второй ряд начинается с числа 1, значит, во втором ряду каждое последующее получалось прибавлением числа 4 к предыдущему; продолжим ряд согласно установленному правилу.

Прием классификации

Основа приема классификации – разбиение множества на классы. При этом необходимо соблюдать следующие условия:

- каждый класс не пуст;
- классы попарно не пересекаются;
- объединение всех классов составляет данное множество.

Как и при формировании приема сравнения, обучающимся сначала предлагают задания на классификацию хорошо знакомых предметов. Например, множество фруктов разбивают на три группы: по цвету, форме, размеру.

Задания, связанные с приемом классификации, обычно формулируют следующим образом: разбейте, разложите по определенному признаку. При классификации всегда происходит сортировка предметов по некоторому основанию, которое может быть озвучено учителем, или же обучающийся сам должен догадаться, о каком признаке идет речь. Например, для множества выражений $2 + 3$; $2 - 3$; $7 \cdot 4$; $7 - 4$; $2 \cdot 3$; $7 + 2$; $6 \cdot 5$; $2 : 3$ варианты формулировки задания зависят от уровня сформированности умения классифицировать: а) «Разбейте выражения на группы»; б) «Разбейте выражения на три группы»; в) «Разбейте выражения на группы по арифметическим действиям».

По мере изучения различных понятий классификацию рассматривают на числовых множествах, множествах выражений, равенств, уравнений, геометрических фигур, при изучении нумерации, арифметических действий.

Задания на классификацию целесообразно предлагать не только на этапе закрепления, но и при знакомстве с новыми понятиями. Например, определяем понятие «прямоугольник». Рассматриваем множество фигур. Среди них на рисунке изображены четырехугольники (прямоугольники, квадраты) и треугольник разных размеров и по-разному расположенные. Проводим беседу:

- 1) рассмотрите фигуры;
- 2) уберите лишнюю фигуру (это треугольник) (обучающиеся фактически разбивают множество на две группы, в основании разбиения лежит количество сторон);
- 3) чем похожи все оставшиеся фигуры?
- 4) как можно назвать такие фигуры (четырехугольники)?
- 5) посмотрите внимательно на эти четырехугольники и найдите четырехугольник с одним прямым углом;
- 6) покажите четырехугольники с двумя прямыми углами;
- 7) найдите четырехугольники с тремя прямыми углами (таких нет);
- 8) найдите четырехугольники с четырьмя прямыми углами.

Четырехугольники разбиваем на группы по количеству углов (первая группа – один угол, вторая – два угла, третья – три угла). Четырехугольники, вошедшие в третью группу, имеют все прямые углы. Такие фигуры называют прямоугольниками.

Прием аналогии

Под ***анalogией*** понимаем сходство в каком-либо отношении между предметами, явлениями, понятиями, способами действий.

В процессе обучения математике учитель часто говорит обучающимся: «Сделайте задание по аналогии» или «Это аналогичное задание». Такие указания следуют за показом образца действий, т. е. в аналогичном задании будут другие числа, а способ выполнения задания не изменится.

Аналогичные задания можно использовать и тогда, когда обучающиеся находят новые способы действия. В этом случае младшие школьники должны увидеть сходства между объектами и самостоятельно сделать вывод о сходстве в других отношениях, т. е. сделать заключение по аналогии. Но для того чтобы обучающиеся смогли высказать «догадку», необходимо определенным образом организовать их

деятельность. Например, обучающиеся овладели приемом умножения столбиком многозначного числа на однозначное. Будем умножать число 375 на 4. Переходя к письменному умножению на двузначное число, учитель предлагает обучающимся сравнить две записи, отвечая на вопросы:

$\begin{array}{r} *375 \\ 4 \\ \hline 1500 \end{array}$	$\begin{array}{r} *375 \\ 24 \\ \hline +1500 \\ 750 \end{array}$	– Чем записи похожи? (<i>Столбик, числа.</i>) – Чем записи отличаются? (<i>Умножение на 4, умножение на 24.</i>) – Кто догадался, как можно рассуждать, чтобы выполнить запись справа? – Почему запись 750 сместилась на одну цифру? (<i>Умножение на десятки, записали под десятками.</i>)
$\begin{array}{r} *375 \\ 2 \\ \hline 750 \end{array}$		

Умозаключение по аналогии можно использовать при изучении свойств арифметических действий. Например, при изучении переместительного свойства умножения.

Учитель предлагает найти значение следующих выражений;

$3 + 6;$	$4 + 7;$	$20 + 7;$
$6 + 3;$	$7 + 4;$	$7 + 20.$

И задает вопрос: «Каким свойством воспользовались?» (*Переместительным свойством сложения.*) «Подумайте, как установить, выполняется ли переместительное свойство умножения».

Учитель предлагает рассмотреть пару произведений $3 \cdot 4$ и $4 \cdot 3$. Заменить произведения суммами, найти значения, сравнить и сделать вывод

$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12;$
 $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12.$

Для правильного умозаключения по аналогии необходимо выделить существенные признаки объектов. В противном случае вывод может оказаться неверным. Например, иногда обучающиеся пытаются применять способ умножения числа на сумму $a \cdot (b + c)$ в случае умножения числа на произведение $a \cdot (b \cdot c)$. Ошибка: умножение на сумму – существенное свойство правила.

Итак, чтобы сформировать умение конструировать умозаключение по аналогии, необходимо иметь в виду следующее:

- 1) аналогия основывается на сравнении;
- 2) для использования аналогии необходимо иметь два объекта, один из которых известен, а второй с ним сравнивают по каким-либо признакам;
- 3) для правильных действий по аналогии сравнивают признаки объектов, существенные в данной ситуации.

Прием обобщения

Умение выделять существенные признаки математических объектов, их свойств и отношений – основная характеристика *приема обобщения*.

Различают результат и процесс обобщения. Результат фиксируется в понятиях, суждениях, правилах. Процесс обобщения связан с двумя типами обобщения – теоретическим и эмпирическим.

В начальном курсе математики применяют эмпирический тип, при котором обобщение знания – результат индуктивных рассуждений (умозаключений). «Индукция» в переводе на русский язык означает «наведение». Для организации индуктивных обобщений необходимо соблюдать следующие условия:

- продумать подбор математических объектов и их последовательность для наблюдения;
- рассмотреть как можно больше объектов, у которых повторяется одна и та же закономерность;
- варьировать виды частных объектов и помогать младшим школьникам словесно оформлять наблюдения, задавать им наводящие вопросы, уточняя те формулировки, которые они предлагают.

Используя эти рекомендации, покажем, как подвести обучающихся к формулировке переместительного свойства умножения.

Задание:

На рисунке изображен трехэтажный дом, на каждом этаже четыре окна. Как можно сосчитать окна?

Рассуждение первого ученика. На первом этаже четыре окна, на втором – четыре, на третьем – четыре. Сложим три раза по четыре $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$. Найдем результат.

Рассуждение второго ученика. В каждом вертикальном ряду три окна, всего четыре таких ряда, поэтому складываю четыре раза по три $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$. Вычислим результат.

Учитель предлагает сравнить полученные равенства; выявить сходства, различия. (*Результат произведения один и тот же, а множители переставлены местами.*)

Далее переходят к рассмотрению прямоугольника размером 10×3 . Учитель просит обучающихся подсчитать количество единичных квадратов разными способами ($10 + 10 + 10$ или $10 \cdot 3$; $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ или $3 \cdot 10$).

Далее учитель предлагает самостоятельно найти значение следующих выражений: $3 \cdot 2$ и $2 \cdot 3$; $4 \cdot 2$ и $2 \cdot 4$; $3 \cdot 6$ и $6 \cdot 3$; $4 \cdot 5$ и $5 \cdot 4$. Обучающиеся выясняют, чем похожи и чем отличаются равенства в парах. (*Множители одинаковые, но они переставлены.*) Подводя итог, учитель помогает сформулировать свойство с помощью наводящего вопроса: если множители переставить, то что можно сказать о произведении? (*Если множители переставить, то произведение не изменяется. Переместительное свойство.*)

Наряду с верным обобщением наблюдаемых фактов индуктивным способом необходимо рассмотреть и задания с неверным обобщением-выводом.

Приведем несколько таких заданий.

Сравните выражения $2 + 3$ и $2 \cdot 3$; $4 + 5$ и $4 \cdot 5$; $3 + 4$ и $4 \cdot 3$; $5 + 6$ и $5 \cdot 6$. Найдите общее в полученных неравенствах и сделайте соответствующие выводы.

Обучающиеся сравнивают выражения: слева – сумма, справа – произведение двух последовательных чисел. Замечают, что для всех выражений сумма меньше произведения этих же чисел.

Неравенства имеют вид

$$2 + 3 < 2 \cdot 3; 4 + 5 < 4 \cdot 5;$$

$$3 + 4 < 4 \cdot 3; 5 + 6 < 5 \cdot 6.$$

Учитель указывает, что высказанное мнение ошибочно, и это подтверждает контрпример: $0 + 1 > 0 \cdot 1$; $1 + 2 > 1 \cdot 2$. Правильное обобщение имеет место при выполнении некоторого условия: сумма двух последовательных чисел, начиная с числа 2, всегда меньше произведения этих же чисел.

Установите делимость суммы на число 2. Будет ли каждое слагаемое делиться на 2? Сделайте вывод.

$2 + 4$; Обучающиеся предлагают аналогичные данным

$4 + 4$; случаи, заключают: если сумма чисел делится на два,

$6 + 2$; то каждое слагаемое этой суммы делится на два.

$6 + 8$; Учитель указывает на неверный вывод, что под-

$8 + 10$. тверждает контрпример: сумма $3 + 5$.

Сравнивая математические объекты или способы действий, выделяя внешние общие признаки объектов, обучающиеся фиксируют их как содержание понятия. Однако ориентир на внешние доступные для восприятия признаки сравниваемых объектов не всегда позволяет раскрыть сущность изученного понятия или усвоить общий способ действия. При эмпирическом обобщении обучающиеся сосредотачиваются на несущественных свойствах объекта и конкретных ситуациях. Это отрицательно сказывается на формировании понятий и общих способах действий. Чаще всего так случается при формировании понятия «больше на...». Учитель предлагает серию конкретных ситуаций, которые отличаются друг от друга только числовыми характеристиками.

Положите в ряд три красных кружка. Под ними положите столько же синих. Что надо сделать, чтобы во втором ряду стало больше на два?

В результате выполнения таких заданий у обучающегося формируется понятие «больше на два», которое находит свое выражение в способе действий: взять столько же, сколько известно, да еще два. Однако в данном случае внимание младших школьников сосредотачивается только на числовых характеристиках, а не на самом общем способе действия.

Теоретическое обобщение осуществляется путем анализа данных о каком-либо объекте или ситуации с целью выявления существенных внутренних связей. Эти связи сразу фиксируются абстрактно (с помощью слова, знаков, схем) и становятся той основой, на которой в дальнейшем выполняются частные (конкретные) действия: взять столько же да еще несколько.

Необходимое условие формирования у младших школьников способности к теоретическому обобщению – направленность обучения на стимулирование общих способов деятельности. Для выявления этого условия необходимо продумать такие действия с математическими объектами, в результате которых обучающиеся сами смогут «открыть» существенные свойства изучаемых понятий.

Способы обоснования истинности суждений

Обучающиеся начальной школы встречаются с единичными, частными и общими суждениями. В единичных суждениях что-то утверждается или отрицается относительно одного предмета, например: число 12 – четное. В частных суждениях что-то утверждается или отрицается относительно некоторой совокупности предметов данного множества, например: уравнение $x - 17 = 9$ решают на основе взаимосвязи между компонентами и результатом вычитания. В общих суждениях что-то утверждается или отрицается относительно всех предметов в данной совокупности, например: в прямоугольнике противоположные стороны равны.

О математических предложениях и способах установления истинности/ложности умозаключений подробно изложено в пособиях [8; 9]. Правильность дедуктивных суждений или обоснована правилами логики, или доказывается с помощью кругов Эйлера – Венна.

Суть дедуктивных рассуждений сводится к тому, что на основе некоторого общего суждения о предметах данного класса и некоторых единичных суждениях о данном объекте высказывается новое единичное суждение о том же объекте.

Например, умозаключение «Все числа, оканчивающиеся на пять, делятся на пять. Число 1542 не оканчивается на пять. Значит, число 1542 не делится на пять» содержит общее суждение о числах: «Все числа, оканчивающиеся на пять, делятся на пять» и единичное суждение: «Число 1542 не оканчивается на пять». Заключение является новым единичным суждением о том же числе: «1542 не делится на пять». Установить правильность данного умозаключения легко с помощью контрпримера: если в качестве единичного суждения взять число 1540, то приходим к ложному выводу. Приведенное умозаключение правильным не является.

3.2. Взаимосвязь логического и алгоритмического мышления младшего школьника

Алгоритм – это точное предписание о выполнении в определенной последовательности элементарных операций для решения познавательных задач. Его можно использовать в готовом виде, а также давать задание обучающимся найти его самостоятельно. Примеры алгоритмов в начальных классах – алгоритмы выполнения письменных действий сложения, вычитания, умножения и деления. Учитель может предложить обучающимся и неалгоритмическое предписание, которое содержит рекомендации и общие принципы работы.

Умение последовательно, четко и непротиворечиво излагать свои мысли тесно связано с умением представлять сложные действия в виде организованной последовательности простых действий. Такое

умение называют *алгоритмическим*. Развитие алгоритмического мышления младших школьников тесно связано с развитием логического мышления, так как в основе алгоритмического мышления лежат умения, основанные на мыслительных операциях:

- 1) умение понимать сущность алгоритма и его свойства;
- 2) умение наглядно изображать алгоритм;
- 3) умение четко использовать алгоритм;
- 4) умение преобразовывать алгоритм;
- 5) умение составлять алгоритм;
- 6) умение проверять правильность алгоритма;
- 7) умение выбирать рациональный алгоритм.

Все эти умения основаны на мыслительных операциях: анализе, синтезе, сравнении, обобщении.

Логическое мышление помогает принимать решения, делать выводы на основе полученного опыта. *Алгоритмическое мышление* – это правильно выстроенная последовательность действий для решения какой-либо конкретной задачи.

В жизни мы совмещаем оба вида мышления, когда сталкиваемся с той или иной трудностью. Сначала при помощи логики мы ищем что-то подобное тому, с чем уже сталкивались, а потом разбиваем задачу на части и приступаем к ее решению.

**Рейтинг-контроль по теме «Развитие мышления
младших школьников в процессе изучения математики»**

Вариант I

1. Репродуктивная деятельность характеризуется тем, что ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, запоминает, затем воспроизводит. Определите основную цель такой деятельности.

- а) развитие письменных навыков учащегося;
- б) формирование у обучающегося знаний, умений и навыков, развитие внимания и памяти;
- в) сбор информации и формирование представлений школьника об окружающих предметах.

2. Продуктивная (творческая) деятельность связана с активной работой мышления и характеризуется логическими приемами мышления, или приемами умственных действий. К ним относятся следующие мыслительные операции:

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

3. Построение развивающего обучения основано на включении ... в процесс усвоения математического содержания.

- а) аналогии;
- б) систематизации;
- в) разнообразия информации;
- г) мыслительных операций.

4. Соединение различных элементов, сторон объекта называют:

- а) систематизацией;
- б) синтезом;
- в) анализом;
- г) обобщением;
- д) аналогией.

5. Выделение элементов данного объекта, его признаков, свойств называют:

- а) систематизацией;
- б) синтезом;
- в) анализом;
- г) обобщением;
- д) аналогией.

6. Разные задания к данному математическому объекту, в том числе рассмотрение данного объекта с точки зрения различных понятий, способствуют формированию умений:

- а) аналитико-синтетической деятельности;
- б) обобщающей деятельности;
- в) систематизации знаний и умений;
- г) описывать/характеризовать объект.

7. Выделение существенных признаков математических объектов, их свойств и отношений характеризуют мыслительный прием:

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

8. В основе приема классификации лежит:

- а) умение анализировать;
- б) умение устанавливать сходство и различие между предметами;
- в) умение формулировать связный ответ;
- г) умение выделять признаки предметов;
- д) умение обобщать.

9. Сходство в каком-либо отношении между предметами, явлениями, понятиями, способами действий называют:

- а) анализом;
- б) синтезом;
- в) сравнением;
- г) классификацией;
- д) аналогией;
- е) систематизацией;
- ж) обобщением;
- и) изучением.

10. Какой прием мышления характеризуют следующие этапы:

- 1) выделение признаков или свойств одного объекта;
- 2) установление сходства и различия между признаками двух объектов;
- 3) выявление сходства между признаками трех, четырех и более объектов?

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

11. Выберите из данных суждений индуктивное(ые):

- а) число 3 нечетное, число 5 нечетное, число 7 нечетное. Числа 3, 5, 7 больше 1. Значит, если число 9 нечетное, то оно больше 1;
- б) $5 > 3$, $7 > 5$, $9 > 7$; 5, 7, 9 – нечетные числа. Значит, любое число, большее 9, будет нечетным;
- в) любое круглое число четное. Число 20 четное. Значит, оно круглое;
- г) любое круглое число четное. Число 20 круглое. Значит, оно будет четным.

12. Приведите пример неправильного дедуктивного умозаключения.

Вариант II

1. Репродуктивная деятельность характеризуется тем, что ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, запоминает, затем воспроизводит. Определите основную цель такой деятельности.

- а) развитие письменных навыков учащегося;
- б) формирование у обучающегося знаний, умений и навыков, развитие внимания и памяти;
- в) сбор информации и формирование представлений об окружающих предметах школьника.

2. Продуктивная (творческая) деятельность связана с активной работой мышления и характеризуется логическими приемами мышления, или приемами умственных действий. К ним относятся следующие мыслительные операции:

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

3. Построение развивающего обучения основано на включении ... в процесс усвоения математического содержания

- а) аналогии;
- б) систематизации;
- в) разнообразия информации;
- г) мыслительных операций.

4. Выделение элементов данного объекта, его признаков, свойств называют:

- а) систематизацией;
- б) синтезом;
- в) анализом;
- г) обобщением;
- д) аналогией.

5. Соединение различных элементов, сторон объекта называют:

- а) систематизацией;
- б) синтезом;
- в) анализом;
- г) обобщением;
- д) аналогией.

6. Разные задания к данному математическому объекту, в том числе рассмотрение данного объекта с точки зрения различных понятий, способствуют формированию умений:

- а) аналитико-синтетической деятельности;
- б) обобщающей деятельности;
- в) систематизации знаний и умений;
- г) описывать/характеризовать объект.

7. Какой прием мышления характеризуют следующие этапы:

- 1) выделение признаков или свойств одного объекта;
- 2) установление сходства и различия между признаками двух объектов;
- 3) выявление сходства между признаками трех, четырех и более объектов?

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

8. В основе приема классификации лежит:

- а) умение анализировать;
- б) умение устанавливать сходство и различие между предметами;
- в) умение формулировать связный ответ;
- г) умение выделять признаки предметов;
- д) умение обобщать.

9. Сходство в каком-либо отношении между предметами, явлениями, понятиями, способами действий называют:

- а) анализом;
- б) синтезом;
- в) сравнением;
- г) классификацией;
- д) аналогией;
- е) систематизацией;
- ж) обобщением;
- и) изучением.

10. Выделение существенных признаков математических объектов, их свойств и отношений характеризуют мыслительный прием:

- а) анализ;
- б) синтез;
- в) сравнение;
- г) классификация;
- д) аналогия;
- е) систематизация;
- ж) обобщение;
- и) изучение.

11. Выберите из данных суждений дедуктивное(ые):

а) число 3 нечетное, число 5 нечетное, число 7 нечетное. Числа 3, 5, 7 больше 1. Значит, если число 9 нечетное, то оно больше 1;

б) $5 > 3$, $7 > 5$, $9 > 7$; 5, 7, 9 – нечетные числа. Значит, любое число, большее 9, будет нечетным;

в) любое круглое число четное. Число 20 четное. Значит, оно круглое;

г) любое круглое число четное. Число 20 круглое. Значит, оно будет четным.

12. Приведите пример правильного дедуктивного умозаключения.

ТЕМЫ ПРОЕКТОВ, КУРСОВЫХ И ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ РАБОТ

1. Использование геометрического материала в курсе математики начальной школы для развития творческого мышления.
2. Развитие личностных качеств современного младшего школьника на уроках математики.
3. Дидактическая игра как средство формирования познавательного интереса младших школьников на уроках математики (на примере 2-го класса).
4. Формирование компьютерной грамотности младших школьников.
5. Формирование учебно-познавательной компетенции на уроках математики в начальной школе.
6. Использование учебно-наглядных пособий на уроках математики в начальной школе.
7. Развитие логического мышления обучающихся в начальной школе средствами математики.
8. Виды самостоятельных работ на уроках математики в начальных классах.
9. Формирование понятия нумерации чисел в пределах ста на уроках математики в начальных классах.
10. Изучение симметрии в начальных классах.
11. Элементы математической логики в курсе математики начальной школы.
12. Формирование метапредметных компетенций при обучении решению арифметических задач.
13. Изучение табличного сложения и вычитания средствами дидактических игр и заданий.
14. Формирование УУД при решении логических задач.
15. Преемственность методик обучения математике младших школьников и дошкольников.
16. Формирование у младших школьников коммуникативных УУД на внеурочных занятиях по математике.

17. Формирование метапредметных УУД при изучении темы «Симметрия» в начальной школе.

18. Использование проектной деятельности при изучении темы «Сложение» в начальной школе.

19. Приемы активизации познавательной деятельности младших школьников на уроках математики.

20. История возникновения геометрических курсов для младших школьников.

21. Первые отечественные курсы геометрии для детей.

22. Развитие направления «Наглядная геометрия» в России в начале XX века.

23. Пространственное мышление как вид умственной деятельности.

24. Типы оперирования пространственным образом.

25. Возможности формирования пространственного мышления младших школьников при изучении геометрии.

26. Формирование метапредметных и предметных компетенций при изучении:

- длины предметов;
- площади геометрических фигур.

27. Развитие логического мышления обучающихся при изучении многоугольников.

28. Формирование проектно-исследовательской деятельности младших школьников при изучении геометрического материала.

29. Развитие познавательной самостоятельности младших школьников при изучении геометрических величин.

30. Проектная деятельность младших школьников в ходе изучения:

- длины предмета;
- площади геометрических величин.

31. Формирование у младших школьников навыков самоконтроля при изучении геометрических фигур.

32. Универсальные учебные действия как основа формирования предметных и метапредметных умений при изучении прямоугольника (квадрата).

33. Принципы обучения геометрическому материалу в начальной школе.

34. Логика построения курсов наглядной геометрии в альтернативных учебниках математики для начальных классов.

35. Развитие УУД при изучении геометрических величин в начальных классах.

36. Реализация проблемного обучения при изучении геометрического материала в начальных классах.

37. Развитие гибкости мышления младших школьников в процессе изучения геометрических представлений и понятий.

38. Формирование основ информационной компетенции при работе с геометрическими фигурами.

39. Формирование регулятивных действий у младших школьников при изучении геометрических фигур.

40. Формирование регулятивных УУД при изучении темы «Умножение» в начальных классах.

41. Формирование логического мышления младших школьников при изучении действий сложения и вычитания в концентре «десяток».

42. Формирование регулятивных УУД при обучении решению арифметических задач.

43. Приемы активизации обучающихся в процессе обучения математике в начальных классах при изучении нумерации в пределах десяти.

44. Педагогическая деятельность по организации самостоятельной работы обучающихся во 2-м классе при изучении арифметических действий.

45. Формирование приемов самоконтроля при обучении школьников решению задач.

46. Логическая подготовка дошкольников к обучению математике в 1-м классе.

47. Формирование логического мышления младшего школьника на уроках математики в 3-м классе.

48. Педагогические условия формирования самооценки младших школьников при обучении решению арифметических задач.

49. Педагогические условия формирования коммуникативных УУД младших школьников на уроках математики средствами дидактических игр.

50. Формирование познавательного интереса младших школьников в процессе использования ИКТ на уроках математики.

51. Формирование УУД обучающихся в начальной школе при использовании ИКТ на уроках математики.

52. Формирование познавательных УУД на уроках математики в начальной школе.

53. Формирование регулятивных УУД на уроках математики в начальной школе.

54. Развитие конструктивного мышления младших школьников как средство развития математического мышления.

55. Развитие воображения младших школьников средствами математики.

56. Развитие когнитивных способностей младших школьников при изучении математики.

57. Развитие интеллекта младших школьников при изучении математики.

58. Моделирование как метод формирования представлений о числе и величине у детей младшего школьного возраста.

59. Способы и средства развития познавательного интереса к математике у младших школьников.

60. Проектно-ориентированные курсовые работы в проектном модуле «Формирование мышления младшего школьника на уроках математики»: а) возможности формирования пространственного мышления младших школьников при изучении геометрии; б) пространственное мышление как вид умственной деятельности; в) использование геометрического материала в курсе математики начальной школы для развития творческого мышления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие содержит практический материал по темам «Методические особенности изучения арифметических действий в начальной школе», «Методические особенности изучения алгебраического и геометрического материала в начальной школе», «Развитие мышления младших школьников в процессе изучения математики» для подготовки бакалавров начального педагогического образования; тематические вопросы для самоподготовки к практическим занятиям по дисциплине, а также перечень тем проектов и выпускных квалификационных работ.

Методическая подготовка студентов бакалавриата интегрирует в себе специальные (математические), психолого-педагогические и методические знания. Бакалавр профиля «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе», владеющий умениями отбирать, анализировать, систематизировать учебный материал, грамотно и содержательно разрабатывать и выстраивать ход планируемого урока в школе, готовый к реализации и развитию творческих идей, самостоятельной и креативной работе в рамках личностно-деятельностного подхода к обучению, считается усвоившим учебные программы дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов», «Методика преподавания математики», «Актуальные проблемы методики преподавания математики» и отвечает требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования и начального общего образования, предъявляемым к учителям начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Истомина, Н. Б.* Методика обучения математике в начальной школе. Развивающее обучение / Н. Б. Истомина. – 2-е изд., испр. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-89308-699-7.

2. *Стойлова, Л. П.* Теоретические основы начального курса математики / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2014. – 272 с. – ISBN 978-5-4468-0768-0.

3. *Моро, М. И.* Методика обучения математике в 1 – 3 классах : пособие для учителя / М. И. Моро, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1978. – 336 с.

4. *Бантова, М. А.* Методика преподавания математики в начальных классах : учеб. пособие / М. А. Бантова, Г. В. Бельтюкова. – М. : Просвещение, 1984. – 335 с.

5. *Белошистая, А. В.* Методика обучения математике в начальной школе : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального образования» / А. В. Белошистая. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. – 455 с. – ISBN 978-5-691-01422-2.

6. *Байрамукова, П. У.* Методика обучения математике в начальных классах : курс лекций / П. У. Байрамукова, А. У. Уртеннова. – Ростов н/Д. : Феникс, 2009. – 299 с. – ISBN 978-5-222-14153-3.

7. *Сластенин, В. А.* Педагогика : учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин. – М. : Академия, 2007. – 576 с. – ISBN 5-7695-3712-4.

8. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Множества : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с. – ISBN 978-5-9984-1234-9.

9. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Целые неотрицательные числа. Величины : учеб. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-1394-0.

10. *Тихомирова, С. В.* Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников : учеб. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 104 с. – ISBN 978-5-9984-1532-6.

11. *Тихомирова, С. В.* Актуальные вопросы начальной математики и методики ее преподавания : учеб.-метод. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 156 с. – ISBN 978-5-9984-1793-1.

Дополнительная литература

12. *Истомина, Н. Б.* Математика. Учебники с 1-го по 4-й классы. УМК «Гармония» [Электронный ресурс]. – URL: <https://go.11klassov.net/> (дата обращения: 20.08.2023).

13. *Моро, М. И.* Математика. Учебники с 1-го по 4-й классы. УМК «Школа России» [Электронный ресурс]. – URL: <https://uchebniksonline.ru/uchebniki> (дата обращения: 20.08.2023).

Учебное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Учебно-методическое пособие

Редактор Е. А. Платонова

Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Корректор О. В. Балашова

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 20.12.24.

Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 8,84. Тираж 30 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.