Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

Е.В. ДМИТРИЕВА   В.С. ПЛЕШИВЦЕВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ФИЗИКЕ.
МЕХАНИКА

Владимир 2009

УДК 531/534
ББК 22.2 я 73
Д 53

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой общей физики
Владимирского государственного гуманитарного университета
Е.Н. Куркутова

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и прикладной физики
Владимирского государственного университета
А.А. Шишелов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Дмитриева, Е.В.
Д53 Учебное пособие по физике. Механика / Е. В. Дмитриева, В. С. Плешивцев ; Владим. гос. у-нт. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 144 с.
ISBN 978-5-9984-0005-6

Содержит в кратком изложении теоретический материал, соответствующий программе курса общей физики, читаемого во Владимирском государственном университете. Включает в себя следующие основные теоретические разделы: кинематика и динамика, законы сохранения, элементы релятивистской механики и газовой гидродинамики, а также задачи, которые предлагаются студентам для самостоятельной работы и на экзаменах по физике.

Предназначено для студентов I и II курсов всех форм обучения, изучающих физику, а также для лиц, желающих расширить свои знания в области физики.

Табл. 1. Ил. 69. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531/534
ББК 22.2 я 73

ISBN 978-5-9984-0005-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения. Физика и ее законы лежат в основе всего естествознания. Человек добывает знания о природе, частью которой сам является, и в своем познании природы проходит длительный и трудный путь от незнания к знанию, непрерывно заменяя неполное знание все более полным и совершенным. Эти знания появляются не сразу и не в законченном виде. Например, законы Ньютона потребовали длительного пути познания. После их открытия еще два с половиной столетия потребовалось, чтобы понять, что законы Ньютона не универсальны и нуждаются в уточнении для тел, движущихся с большими скоростями и для тел весьма малых размеров. По существу каждый исследователь должен быть осведомлен о том, что сделано до него в изучаемом им вопросе, критически оценить результаты, полученные предшественниками. Каждое новое поколение начинает с того, на чем остановилось предыдущее, и передает сделанное им последующему поколению.

Физика – базовая дисциплина для большого числа общеинженерных и специализирующих дисциплин. Пути развития любой отрасли современного производства весьма тесно переплетаются с физикой, поэтому специалист любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы активно и со знанием дела применять научные достижения и новые технологии в своей деятельности. Последовательное изучение физики вырабатывает специфическое мышление, физическую интуицию, которые оказываются весьма плодотворными в различных науках. Специалисты, получившие широкое физико-математическое образование, могут самостоятельно осваивать новые научные направления, успешно работать в них, легко переходить от решения одних задач к другим, искать нестандартные и нетрадиционные пути, что особенно важно для профессиональной мобильности специалистов.

При написании данной работы широко использованы методические разработки и сведения, содержащиеся в классических учебниках и справочниках по физике, а также работы некоторых зарубежных авторов. Это, прежде всего, Физический энциклопедический словарь и Таблицы физических величин, учебники и учебные пособия авторов: В.А. Алешкевич, А.В. Астахов, А.А. Детлаф, С.Г. Калашников, П.С. Кудрявцев, А.Н. Матвеев, И.В. Савельев, Д.В. Сивухин, С.П. Стрелков, И.Е. Тамм, С.Э. Фриш и А.В. Тимарева, Б.М. Яворский, Р. Фейнман, Кл. Э. Суорц, Р.С. Спроул, Ч. Киттель и др. Авторы отдают дань уважения названным здесь и другим ученым, по книгам которых изучали и продолжают изучать науку ФИЗИКА.

Пособие не претендует на полноту сведений и содержит лишь ту информацию, которая рассматривается в рамках программ изучения физики в технических вузах и на нефизических специальностях университетов: кратко изложен теоретический материал, соответствующий программе курса общей физики, читаемого во Владимирском государственном университете, введены задачи, которые предлагались студентам для самостоятельной работы, а также на экзаменах, таблицы с фундаментальными константами и различными физическими величинами (приложения).

ВВЕДЕНИЕ

Механика и ее структура

Окружающий мир заполнен материей и рассматривается как сложная многоуровневая развивающаяся система взаимосвязанных материальных образований, каждое из которых воплощает в себе единство устойчивости и изменчивости, дискретности и непрерывности и других философских противоположностей. Движение – неотъемлемый способ существования материи, и в самом общем смысле этого слова представляет собой изменение вообще как в пространстве, так и во времени. Нет движения без материи, как нет и материи без движения.

Движение материи многообразно по своим проявлениям и имеет различные формы: механическую, тепловую, электромагнитную, химическую, биологическую и т.д. Один из видов движения материи – механическая форма движения. Законы механического движения изучаются в разделе физики – в *механике*.

Механика – это наука о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Например, движение небесных тел, колебание земной коры, движение транспортных средств, воздушные и морские течения, деформация частей конструкций и сооружений и т.д. В классической механике рассматриваются движения макроскопических тел, совершающиеся со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме. В основе этой механики лежат законы Ньютона. Законы, сформулированные Ньютоном, были известны до него. Он сам утверждал: «Я излагал начала, принятые математиками и подтверждаемые многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами, Галилей нашел, что падение тел пропорционально квадрату времени… Из этих же двух законов и из третьего кавалер Христофор Врен, Иоанн Уаллис и Христиан Гюйгенс, величайшие геометры нашего времени, вывели законы удара и отражения тел.».* Но до Ньютона не было представления о том, что эти три закона являются основой всей механики.

Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, изучаются релятивистской механикой.

Внутриатомные явления и движение элементарных частиц изучаются в квантовой механике.

Разделы механики

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение. Понятия массы тела и действующей на него силы играют важную роль не только в динамике, но и в физике вообще.

Статика изучает законы равновесия системы тел.

Механическая система

Механическая система – совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Тела, не входящие в состав исследуемой механической системы, называются внешними телами. Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, – внешние силы.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между частями рассматриваемой системы.

Механическая система считается замкнутой, или изолированной, системой, если она не взаимодействует с внешними телами (на нее не действуют внешние силы).

Тело свободно, если на его положение и движение в пространстве не наложено никаких ограничений, и несвободно, если на его возможные положения и движения наложены те или иные ограничения, называемые в механике связями. Несвободное тело можно рассматривать как свободное, заменив действие на него тел, осуществляющих

* См.: Механика / С.П. Стрелков. – М.: Наука, 1975. – С.69.

связи, соответствующими силами. Эти силы называются реакциями связей, а все остальные силы, действующие на тело, – активными силами.

Физические модели

В реальном мире связи между явлениями и объектами столь многообразны, что объединить и осмыслить их все невозможно. Поэтому в своем изучении мира мы выделяем лишь то, что нам представляется наиболее существенным, тем самым заменяя реальность модельным представлением. Все модели имеют принципиально приближенный характер и справедливы лишь для той группы явлений, для которой они созданы. В механике для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач используют разные упрощенные физические модели. К таковым относятся материальная точка, абсолютно твердое тело, абсолютно упругое тело, абсолютно неупругое тело, несжимаемая и невязкая жидкость.

Материальная точка – *физический объект бесконечно малых размеров, обладающий массой. Положение материальной точки в пространстве определяется как положение геометрической точки, что существенно упрощает решение задач механики.* Тело можно считать практически материальной точкой, если форма и размеры его несущественны в условиях решаемой задачи. Например, Землю можно считать материальной точкой по отношению к Солнцу, но это протяженное тело по отношению к Луне и другим околоземным объектам. При изучении движения любой механической системы закон движения ее центра масс находится как закон движения материальной точки, имеющей массу, равную массе системы, и находящейся под действием внешних сил, приложенных к системе.

Абсолютно твердое тело – *физический материальный объект, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь.* Расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела остается *неизменным*. Другими словами, все элементы такого тела неподвижны в системе координат, жестко связанной с телом.

Абсолютно упругое тело – *тело, деформация которого подчиняется закону Гука.* После прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругое тело – *тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.*

Несжимаемая жидкость – *такая жидкость, объем которой остается неизменным под действием всестороннего давления.*

Невязкая жидкость – *такая жидкость, в которой отсутствует сопротивление перемещению одной части относительно другой.*

Система отсчета

Движение является основополагающим свойством материи. Но всякое движение относительно, и поэтому описание движения возможно лишь при наличии системы отсчета (СО).

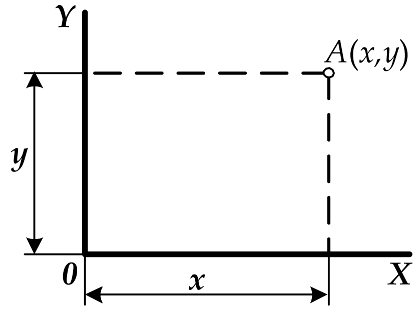
В механике система отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение или равновесие какой-нибудь другой системы материальных точек или тел. В механике Ньютона пространственные и временные координаты рассматриваются независимо друг от друга – пространство является трехмерным и эвклидовым, а время – абсолютным, т.е. протекающим одинаково во всех точках пространства. Следует отметить, что эвклидово пространство – плоское, т.е. не обладает кривизной. Современная физика в рамках общей теории относительности допускает искривление пространства.

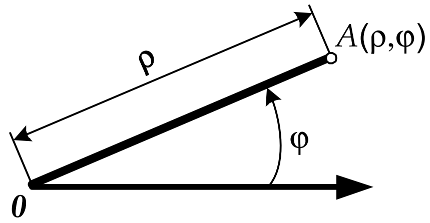
Выбор системы отсчета зависит от задачи и целей исследования. В каждой конкретной задаче выбор системы отсчета производится так, чтобы максимально упростить решение этой задачи. Обычно в физике пользуются инерциальными системами отсчета

Система координат

В геометрии Евклида пространство, в котором мы живем, является трехмерным. Это означает, что положение точек в нем характеризуется тремя числами. Какими именно числами, зависит от системы координат, с помощью которой описывается положение точек пространства. В научных исследованиях и на практике чаще всего используются следующие системы координат.

1. На плоскости



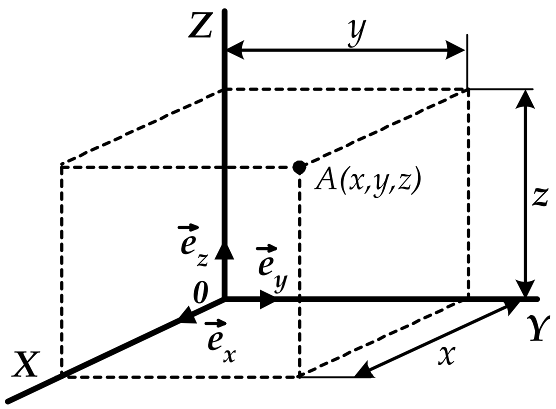


В прямоугольной декартовой системе положение точки A(x,y) задается двумя координатами (двумя числами, равными длинам отрезков x и y).

В полярной системе положение точки A(ρ,φ) задается двумя координатами (двумя числами, равными длине отрезка ρ и угла φ).

2. В пространстве

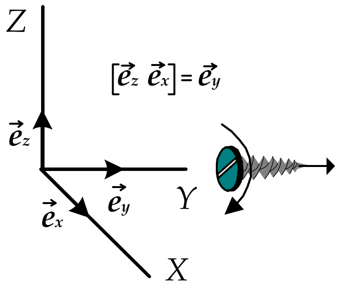
В прямоугольной декартовой системе положение точки A(x,y,z) задается тремя координатами (тремя числами, равными длинам отрезков x, y, z.) Направление осей координат X, Y, Z задается тремя единичными векторами (ортами) – $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. (Отметим, что в учебниках математики и в ряде учебников физики орты обозначаются символами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Модуль единичного вектора равен единице: $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$.



Преимущественно используют правовинтовую систему координат. В правовинтовой системе единичные векторы удовлетворяют условию

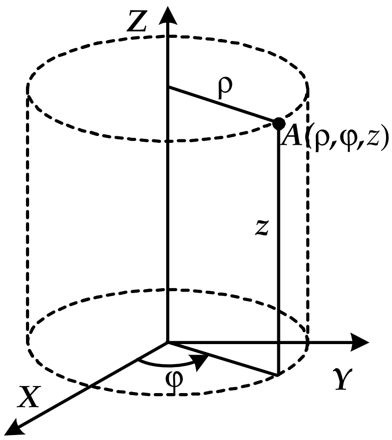
$$[\vec{e}_x\vec{e}_y] = \vec{e}_z; \qquad [\vec{e}_y\vec{e}_z] = \vec{e}_x; \qquad [\vec{e}_z\vec{e}_x] = \vec{e}_y.$$

Направление осей координат в пространстве можно определить, применяя *правило правого винта* к единичным ортам, как показано на рисунке.



Вектор $\vec{e}_y$ *перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы* $\vec{e}_z$ *и* $\vec{e}_x$*, и направлен в ту сторону, в которую будет поступательно двигаться винт с правой нарезкой, если его головку вращать в том же направлении, в каком необходимо поворачивать вектор* $\vec{e}_z$ *для совпадения с вектором* $\vec{e}_x$ *по кратчайшему пути.*

Ориентацию осей системы координат исследователь выбирает так, чтобы получить простое, удобное и понятное решение задачи.

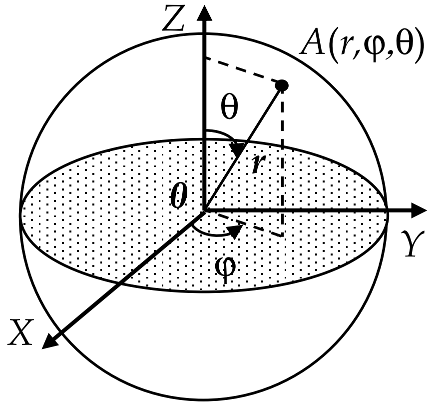


<u>В цилиндрической системе координат</u> положение точки A(ρ*,z,*φ) задается тремя координатами (двумя числами, равными длинам отрезков ρ и z и углом φ). В этой системе координатными поверхностями являются цилиндрическая поверхность радиуса ρ = const, полуплоскость, ограниченная осью Z и повернутая относительно оси X на угол φ = const, плоскость z = const.

Координаты цилиндрической системы связаны с декартовыми координатами соотношениями: $x = \rho\cdot\cos\varphi$; $y = \rho\cdot\sin\varphi$, $z = z$.

<u>В сферической системе координат</u> положение точки A(r,φ, θ) задается тремя координатами (длиной радиус-вектора r и двумя углами – долготой φ и полярным расстоянием θ). Формулы перехода от сферических координат к декартовым:

$x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$, $z = r\cdot\cos\theta$.



1. КИНЕМАТИКА

Кинематика (от греч. kinema, kinematos – движение), раздел механики, посвященный изучению геометрических свойств движения тел, без учета их масс и действующих на них сил. Исходными в кинематике являются понятия пространства и времени. В зависимости от свойств изучаемого объекта кинематику разделяют на кинематику точки, кинематику твердого тела и кинематику непрерывной изменяемой среды, например жидкости или газа.

Движение считается заданным (известным), если получена информация, позволяющая определить положение исследуемого объекта по отношению к системе отсчета в любой момент времени. Такой информацией могут быть уравнения, графики или таблицы.

В кинематике используют физические понятия: траектория, скорость, ускорение, перемещение, путь. Рассматриваемые в механике кинематические характеристики выражаются через первые и вторые производные от координат по времени. Число и вид этих характеристик связаны с особенностями рассматриваемого движения.

Устанавливаемые в кинематике понятия и зависимости используются при решении задач динамики и при расчетах движений в различных машинах и механизмах.

1.1. Способы задания движения точки. Радиус-вектор

Описать движение материальной точки – значит задать способ, позволяющий определить ее местоположение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Известны три способа описания движения материальной точки.

Естественный. В этом способе задают:

- траекторию движения точки относительно выбранной системы координат (рис. 1.1);
- начало отсчета – некоторую точку О на траектории;
- положительное направление отсчета параметра s, задающего закон движения;
- закон движения точки вдоль траектории $s = f(t)$. Закон движения может быть задан аналитически или графически.

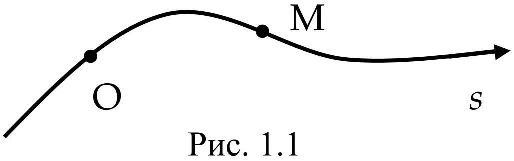


Рис. 1.1

Функция $f(t)$ должна быть: а) однозначной, так как движущаяся точка в один и тот же момент времени не может находиться в разных точках пространства; б) непрерывной; в) дифференцируемой, т.е. иметь, по крайней мере, первую производную, которая однозначно определяет скорость движения.

Координатный. В этом способе задается зависимость выбранных координат от времени. Так для декартовой системы координат должны быть заданы уравнения

$$x = f(t); \quad y = f(t); \quad z = f(t). \tag{1.1}$$

Функции $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$, как и в предыдущем способе, должны быть однозначными, непрерывными и дифференцируемыми. Исключая из (1.1) время t, получим одну из трех возможных систем уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0; \\ \psi(y,z) = 0. \end{cases} \quad (1.2) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = 0; \\ \xi(x,z) = 0. \end{cases} \quad (1.3) \qquad \begin{cases} \psi(y,z) = 0; \\ \xi(x,z) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Каждая из этих систем задает траекторию движения точки.

Векторный. В этом способе положение точки М (рис. 1.2) задается радиусом-вектром $\vec{r} = r(t)$. При этом точка М (конец радиуса-вектора) движется по траектории, которая называется годографом вектора $\vec{r}$. В этом способе оперируют проекциями радиуса-вектора на координатные оси. Для декартовой системы координат связь между радиусом-вектором и его проекциями задана уравнениями

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \tag{1.5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.6}$$

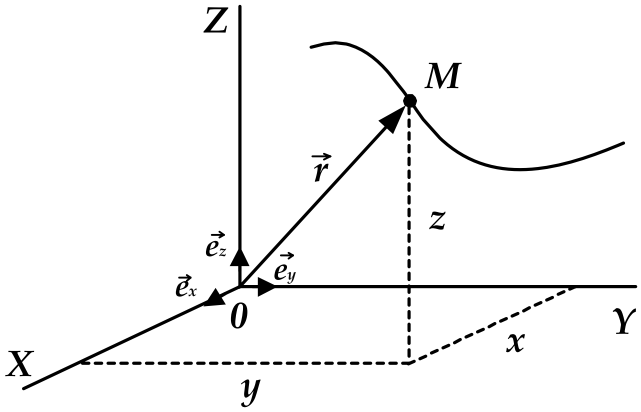


Рис.1.2

1.2. Траектория

Совокупность точек пространства, в которых находится движущаяся материальная точка в последовательные моменты времени, можно рассматривать как некоторую непрерывную линию. Эту линию называют траекторией движущейся точки. Механическое движение тела относительно, а значит, вид траекторий также зависит от выбора системы отсчета. Например, траектория малого тела, брошенного вертикально вверх, в прямолинейно и равномерно движущемся вагоне, будет прямая линия относительно вагона и парабола относительно земли. Точка А колеса железнодорожного вагона, катящегося без скольжения (рис.1.3), движется по окружности относительно системы отсчета, связанной с вагоном, и по циклоиде (пунктирная кривая на рис.1.3) относительно системы отсчета, связанной с рельсом.

Движение точки называется *плоским*, если ее траектория лежит в одной плоскости. Движение точки А на рис.1.3 является плоским.

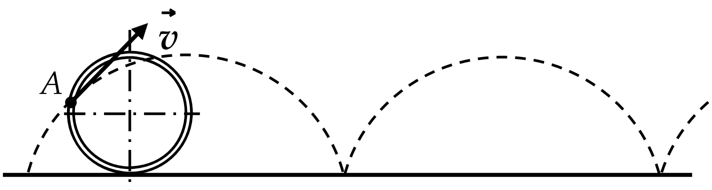


Рис. 1.3

В общем случае траектория материальной точки представляет собой не плоскую, а пространственную кривую. Для такой кривой вводится понятие *соприкасающейся плоскости*. Соприкасающейся плоскостью в произвольной точке М кривой называется предельное положение плоскости, проходящей через любые три точки кривой M', М, M'' (рис.1.4), когда эти точки неограниченно приближаются к точке М.

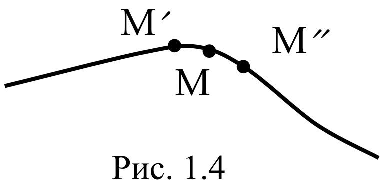


Рис. 1.4

Характеристики траектории – ее кривизна и радиус кривизны. Рассмотрим участок траектории рис. 1.4 в окрестности точек M', М, M'' и проведем через эти три точки окружность (рис. 1.5). Эта окружность лежит в соприкасающейся плоскости и является соприкасающимся кругом радиуса R. Проведем касательные T' и T'' в точках траектории M' и M'', которые также лежат на соприкасающемся круге и расположены симметрично относительно точки М. Угол между этими касательными $\Delta\theta$.

Точка О является *центром кривизны* траектории в точке М, а ее кривизна k определяется соотношением

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS}, \qquad (1.7)$$

где ΔS – длина участка траектории между точками М$'$ и М$''$.

Величина, обратная кривизне k, называется радиусом кривизны траектории в данной точке

$$R = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta}. \tag{1.8}$$

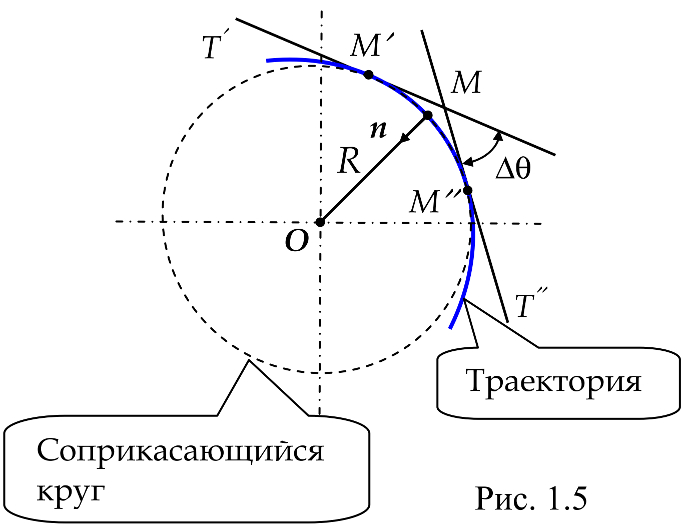


Рис. 1.5

В случае плоской траектории, если кривая задана аналитически в виде зависимости $y=f(x)$, радиус кривизны можно вычислить по формуле

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Вектор $\vec{\boldsymbol{n}}$, лежащий на радиусе R и направленный к центру кривизны, называется *главной нормалью* к кривой в точке М. Касательная к кривой в точке М перпендикулярна к главной нормали в этой точке и также лежит в соприкасающейся плоскости.

В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движение точки.

1.3. Скорость

Для характеристики быстроты движения тел в механике вводится понятие скорости. Скорость – одна из основных кинематических характеристик движения материальной точки. *Средней скоростью* движущейся точки в интервале времени от t до $t+\Delta t$ называется вектор $<\vec{v}>$, равный отношению приращения радиуса-вектора $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt :

$$<\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t}. \tag{1.9}$$

Вектор $<\vec{v}>$ направлен так же, как $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$, т. е. вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок траектории точки.

Скорость точки в данный момент времени (*мгновенная скорость* точки) определяется как предел, к которому стремится средняя скорость $<\vec{v}>$ при $\Delta t \to 0$. Эта векторная величина равна первой производной от радиуса-вектора $\vec{r}$, определяющего положение точки в пространстве, по времени t

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.10)$$

Вектор скорости лежит на касательной к траектории и направлен в сторону движения точки.

Вектор скорости можно представить как его модуль, умноженный на единичный вектор (рис.1.6)

$$\vec{v}=v\vec{e}_\tau. \qquad (1.11)$$

Единичный вектор $\vec{e}_\tau$ лежит на касательной к траектории и направлен в сторону движения материальной точки.

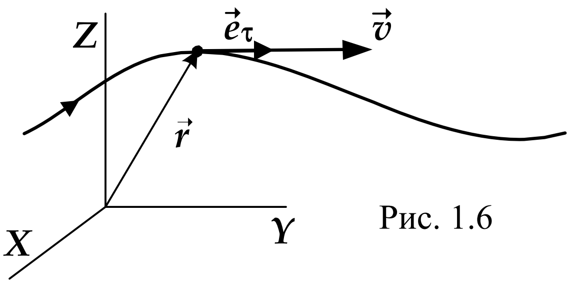


Рис. 1.6

Модуль вектора скорости можно вычислить как производную от пути по времени

$$|\vec{v}|=v=\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{ds}{dt}. \qquad (1.12)$$

В декартовой системе координат формулу (1.10) можно записать в виде

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x+\frac{dy}{dt}\vec{e}_y+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z, \qquad (1.13)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на соответствующие оси координат. Модуль скорости через его проекции вычисляется по формуле

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}. \qquad (1.14)$$

Формула размерности $[v]$ = м/с.

1.4. Ускорение

Для характеристики быстроты изменения скорости материальной точки вводится понятие ускорение. Рассмотрим движение материальной точки по траектории. Пусть в момент времени t она находилась в положении А и имела скорость $\vec{v}(t)$ (рис.1.7), а в момент времени $t+\Delta t$ точка оказалась в положении В и имела скорость $\vec{v}(t+\Delta t)$. Для определения приращения скорости $\Delta\vec{v}$ на интервале времени Δt строим в соответствующем масштабе отрезки, равные и совпадающие по направлению с векторами $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t+\Delta t)$ (рис.1.8).

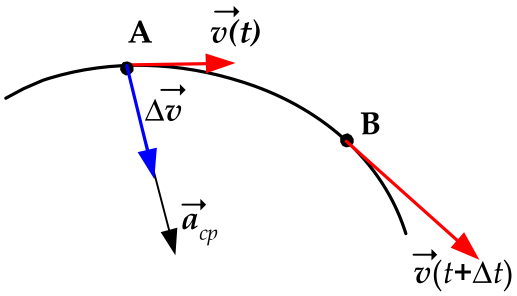


Рис.1.7

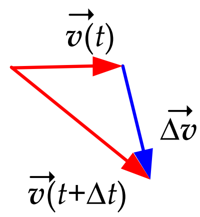


Рис. 1.8

Средним ускорением точки в интервале времени от t до $t+\Delta t$ называется вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, равный отношению приращения $\Delta\vec{v}$ вектора скорости точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.15}$$

Ускорением (или *мгновенным ускорением*) точки называется векторная величина $\vec{a}$, равная пределу среднего ускорения $\vec{a}_{\text{ср}}$ при неограниченном уменьшении продолжительности интервала Δt, или первой производной по времени от скорости $\vec{v}$ рассматриваемой точки или, что то же самое, второй производной по времени от радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ . \tag{1.16}$$

Единица измерения ускорения – м/с^2.

Разложение вектора ускорения $\vec{a}$ материальной точки по базису прямоугольной декартовой системы координат представлено формулой

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{e}_x+a_y\cdot\vec{e}_y+a_z\cdot\vec{e}_z, \tag{1.17}$$

где проекции ускорения на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости или, что то же самое, вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad . \tag{1.18}$$

В общем случае движения материальной точки по криволинейной траектории изменяются модуль скорости v и направление вектора скорости $\vec{v}$, т.е. ориентация единичного вектора $\vec{e}_\tau$. Для определения ускорения запишем вектор скорости в виде $\vec{v} = v\vec{e}_\tau$ и продифференцируем это выражение по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \tag{1.19}$$

Из формулы (1.19) видно, что вектор ускорения $\vec{a}$ в точке А траектории можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.9).

Тангенциальная составляющая ускорения – $\vec{a}_\tau$ направлена по касательной к траектории и характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\tau \quad . \tag{1.20}$$

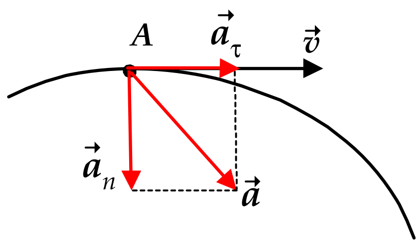


Рис.1.9

Если модуль тангенциальной составляющей ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt} > 0$, то вектор тангенциальной составляющей совпадает по направлению с вектором скорости. В противном случае – вектор тангенциальной составляющей ускорения противоположен вектору скорости.

Нормальная составляющая ускорения – $\vec{a}_n$ направлена по главной нормали $\vec{n}$ к траектории в рассматриваемой точке A в сторону к центру кривизны траектории и характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} \quad . \tag{1.21}$$

Нормальную составляющую ускорения $\vec{a}_n$ называют также *центростремительным ускорением*.

Через эти составляющие ускорение материальной точки определяется по формуле (1.22) в векторном виде или по формуле (1.23) в скалярном формате

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n \tag{1.22}$$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}\quad . \tag{1.23}$$

Если при криволинейном движении модуль тангенциальной составляющей ускорения равен нулю ($a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=0$), то вектор ускорения будет направлен по нормали и полное ускорение равно нормальному $\vec{a}=\vec{a}_n$. Например, при рассмотрении движения тела, брошенного под углом к горизонту, если пренебречь сопротивлением воздуха, то в максимальной точке подъема скорость достигнет экстремума и ускорение тела будет направлено по нормали.

Если модуль нормальной составляющей ускорения равен нулю ($a_n=\dfrac{v^2}{R}=0$), то вектор ускорения будет лежать на касательной к траектории и полное ускорение равно тангенциальному $\vec{a}=\vec{a}_\tau$. Например, при изменении направления движения математического маятника в положении максимального смещения, где скорость маятника обращается в ноль, полное ускорение колеблющейся точки направлено по касательной к траектории.

1.5. Кинематика вращательного движения

Движение тела, при котором две его точки А и В остаются неподвижными (рис.1.10), называется *вращением* (или *вращательным движением*) *тела вокруг неподвижной оси.* Неподвижная прямая *AB* называется *осью вращения* тела. Ось вращения может проходить сквозь тело или лежать вне тела. При вращении вокруг неподвижной оси все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости окружностей перпендикулярны к ней (на рис. 1.10 – штрихованные). Такого рода движение относительно Земли совершают, например, роторы турбин, электромоторов и генераторов, лопасти вентиляторов установленных неподвижно на Земле.

Рассмотрим кинематические характеристики вращающегося тела.

Угловая скорость. В момент времени t некоторая точка тела находилась в положении М и имела скорость $\vec{v}(t)$ (рис.1.11). В процессе вращения точка М движется по окружности радиуса r, и к моменту времени $t + dt$ она прошла путь ds и угловой путь $d\varphi$. Скорость изменения угла поворота рассматриваемой точки называют ее угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.24)$$

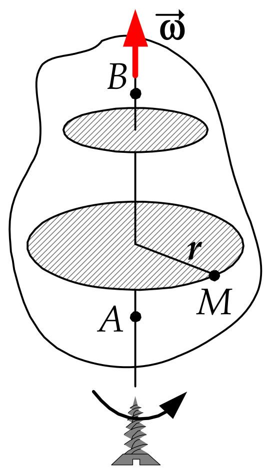


Рис.1.10

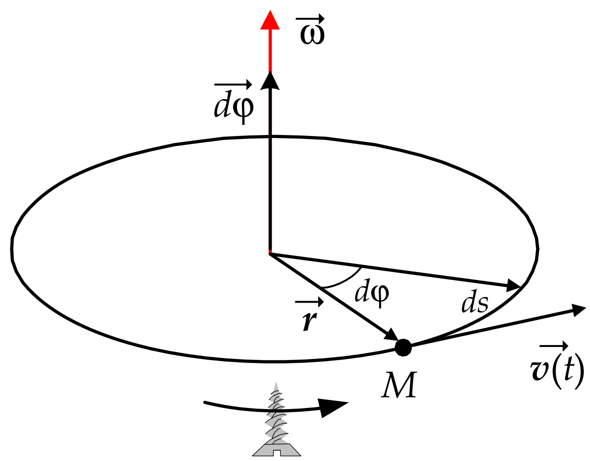


Рис.1.11

Каждая движущаяся точка вращающегося тела за один интервал времени пройдет одинаковый угловой путь $d\varphi$, поэтому угловая скорость одинаковая для всех точек твердого тела и является угловой скоростью вращения тела. Информация о вращательном движении будет полной, если задана ориентация плоскости вращения точки тела по отношению к наблюдателю (выбранной системе координат). Элементарный угловой путь $d\varphi$ следует рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, который лежит на оси вращения, а его направление определяется правилом правого винта: *при повороте правого винта по направлению вращения тела, поступательное движение винта совпадет с направлением вектора* $d\vec{\varphi}$. Поэтому угловая скорость является вектором

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}. \qquad (1.25)$$

Направления векторов $\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ совпадают, следовательно, направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ также определяется правилом правого винта. Вектора $d\vec{\varphi}$ и $\vec{\omega}$ не имеют определенной точки приложения и могут откладываться от любой точки оси вращения.

Если угловая скорость тела постоянна, то она называется круговой или циклической частотой. Единица измерения угловой скорости – рад/с.

Угловое ускорение. Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости вращения точек тела. Производная угловой скорости по времени называется угловым ускорением

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{\varphi}}}{dt^2}. \qquad (1.26)$$

Для тела, вращающегося относительно закрепленной оси, вектор углового ускорения $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ лежит на оси вращения и совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, если модуль угловой скорости с течением времени увеличивается $\omega > 0$. Вектор углового ускорения $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ лежит на оси вращения и противоположен по направлению вектору угловой скорости $\vec{\omega}$, если модуль угловой скорости с течением времени уменьшается $\omega < 0$. Единица измерения углового ускорения – рад/с^2.

Период вращения – время, за которое точка тела сделала один полный оборот. При равномерном вращении тела его период определяется соотношением $T = 2\pi/\omega$. Единица измерения периода – с.

Частота вращения – определяет число оборотов, совершенных вращающимся телом за 1 сек. Эта физическая величина обратна периоду $\nu = 1/T = \omega/2\pi$. Единица измерения частоты – с$^{-1}$ = Гц (Герц).

Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами

Линейная $\vec{v}$, угловая $\vec{\omega}$ скорости точки тела и вектор $\vec{\boldsymbol{r}}$, задающий местоположение точки (см., например, рис. 1.11), связаны векторным произведением

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{1.27}$$

В скалярном формате эта зависимость имеет вид

$$v = \omega r\,. \tag{1.28}$$

Дифференцируя (1.28) по времени, получим

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}; \qquad \text{или} \qquad a_\tau = r\varepsilon. \tag{1.29}$$

Для нормального ускорения точки при вращении по окружности получим

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \tag{1.30}$$

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Понятия силы, массы, импульса

Динамика (от греч. dynamis – сила) – раздел механики, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил. В основе динамики лежат законы Ньютона, из которых получаются уравнения, необходимые для решения задач динамики. Все задачи классической динамики сводятся к двум типам:

1) в прямой задаче динамики определяется закон движения тела, если известна его масса и действующая на тело сила;

2) в обратной задаче динамики определяется сила, действующая на тело, если известны закон движения этого тела и его масса.

Понятия силы, массы и импульса являются наиболее важными в физике. Эти физические величины используются при описании состояний и изменения состояний различных механических систем.

Сила. Силы не являются самостоятельными сущностями, независимыми от материальных объектов. Они создаются материальными телами, поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела взаимодействуют.

Сила – количественная мера взаимодействия тел. Сила величина векторная и в каждый момент времени она характеризуется численным значением, направлением и точкой приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\vec{F}_i$ (рис.2.1), то их действие эквивалентно действию одной силы $\vec{F}$, равной геометрической сумме всех действующих сил, т. е. *равнодействующей* силе $\vec{F}=\sum\vec{F}_i$. Несмотря на разнообразие воздействий тел друг на друга, в природе, по современным данным, имеется четыре типа фундаментальных взаимодействий. Это гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое взаимодействия. Действие силой может иметь место при непосредственном контакте тел (например, при трении, при давлении тел друг на друга), или через создаваемые телами силовые поля. Первоначально в физике утвердилось представление о том, что взаимодействие между телами на расстоянии передается мгновенно – это *концепция дальнодействия*. Впоследствии было доказано, что эта концепция является ошибочной и взаимодействие между телами осуществляется не мгновенно, а с конечной скоростью. Такое представление о взаимодействии тел получило название – *концепция близкодействия*. Основоположник этой концепции – Р. Декарт. Согласно этой концепции взаимодействие между телами осуществляется посредством силовых полей (например, поле тяготения, электромагнитное поле).

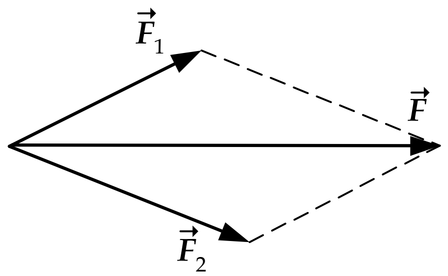


Рис. 2.1

Механическое действие силой на данное тело со стороны других тел проявляется двояко. Оно способно вызывать, во-первых, изменение состояния механического движения рассматриваемого тела, а во-вторых, – его деформацию.

Единица измерения силы – Н (Ньютон).

Масса (лат. massa – глыба, ком, кусок) – одна из основных физических характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства. Согласно Ньютону, количество материи (масса) есть мера таковой, и понятие «масса» было введено Ньютоном в определении импульса тела $\vec{p}=m\vec{v}$, где m – коэффициент пропорциональности, постоянная для данного тела величина.

Под действием силы материальная точка изменяет свою скорость не мгновенно, а постепенно, т. е. приобретает конечное по величине ускорение, которое тем меньше, чем больше масса материальной точки. Для сравнения масс m_1 и m_2 двух материальных точек достаточно измерить модули ускорений a_1 и a_2, приобретаемых этими точками под действием одной и той же силы:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (2.1)$$

Определенная таким образом масса является мерой инерции тела и называется инерционной (или инерциальной, инертной) массой.

Иной физический смысл имеет масса в теории гравитации, в которой масса выступает как источник поля тяготения. Каждое тело создает поле тяготения, характеристики которого пропорциональны массе тела. Поле тяготения вызывает притяжение тел с силой, определяемой законом:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.2)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы притягивающихся тел, r – расстояние между центрами масс взаимодействующих тел. Масса, входящая в закон (2.2), называется гравитационной.

Опыт показал, что числовые значения инерциальной и гравитационной массы тела совпадают с точностью до 10^{-12} (1971 г). Этот фундаментальный закон природы получил название принцип эквивалентности.

В классической механике считается:

а) что масса материальной точки не зависит от состояния движения точки, являясь ее неизменной характеристикой;

б) масса – величина аддитивная, т. е. масса системы m (например тела) равна сумме масс m_i всех материальных точек, входящих в состав этой системы, т.е. $m = \sum m_i$;

в) масса замкнутой системы остается неизменной при любых процессах, происходящих в этой системе (*закон сохранения массы*).

Эти положения ньютоновской механики подверглись пересмотру и уточнению в релятивистской механике. Понятие массы приобрело более глубокий смысл. Из релятивистской теории следует, что масса частицы зависит от скорости v ее движения

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (2.3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Масса покоя частицы m определяет внутреннюю энергию частицы – так называемую энергию покоя

$$W = m\,c^2. \tag{2.4}$$

В механике Ньютона масса таким свойством не обладает. Таким образом, масса всегда связана с энергией (и наоборот). Поэтому в релятивистской механике не существуют по отдельности законы сохранения массы и энергии. Они объединены в единый закон сохранения полной энергии, учитывающий и энергию покоя частицы.

Импульс (от лат. impulses – удар, толчок) – то же, что количество движения, – мера механического движения, равная для материальной точки произведению массы материальной точки на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{2.5}$$

Импульс системы N материальных точек равен произведению массы всей системы M на скорость ее центра масс: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_c$.

Единица измерения импульса $[p]$ – кг·м/с.

2.2. Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета

В качестве первого закона динамики Ньютон принял закон, установленный еще Галилеем: материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет его из этого состояния.

Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения не требуют для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью. Соответственно первый закон Ньютона называют *законом инерции,* а движение тела в отсутствие воздействий со стороны других тел – движением по инерции.

Система отсчета, по отношению к которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*

(ИСО). Содержание первого закона Ньютона сводится по существу к двум утверждениям:

- все тела обладают свойством инертности;
- существуют инерциальные системы отсчета. Любые две инерциальные системы отсчета могут двигаться друг относительно друга только поступательно и притом равномерно и прямолинейно.

Пример ИСО при рассмотрении движения в пределах солнечной системы – *гелиоцентрическая система отсчета,* начало координат, которой находится в центре инерции Солнечной системы (приближенно – в центре Солнца). Оси этой системы проведены в направлении трех удаленных звезд, выбранных так, чтобы оси координат были взаимно перпендикулярны.

Изучая движение тел в земных условиях, мы часто пользуемся *лабораторной системой отсчета,* оси координат которой жестко связаны с Землей. Эта система отсчета – неинерциальная, главным образом, из-за суточного вращения Земли. Однако Земля вращается столь медленно, что максимальное нормальное ускорение точек ее поверхности в суточном вращении не превосходит 0,034 м/с^2. Поэтому в большинстве практических задач лабораторную систему отсчета можно приближенно считать инерциальной.

Ни одна из инерциальных систем отсчета не имеет каких либо преимуществ или особенностей по отношению к другим системам. Все инерциальные системы равноправны.

Законы Ньютона перестают быть справедливыми для описания движения объектов малых размеров (элементарных частиц) и при движении со скоростями, близкими к скорости света.

2.3. Второй закон Ньютона. Уравнение движения

Основным законом динамики материальной точки является второй закон Ньютона. В формулировке, данной самим Ньютоном, закон гласит: «…изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит в том направлении, в каком действует сила», другими словами – скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\vec{\boldsymbol{F}}=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}, \text{ или } \vec{\boldsymbol{F}}=\frac{d(m\vec{\boldsymbol{v}})}{dt}. \tag{2.6}$$

Если масса постоянна, то уравнение (2.6) можно записать в виде

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \tag{2.7}$$

где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки.

Уравнение (2.7) называют уравнением движения материальной точки.

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Под силой $\vec{F}$ во втором законе Ньютона нужно понимать геометрическую сумму всех действующих сил – как активных, так и реакций связей, т. е. равнодействующую силу $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$.

Из уравнения (2.7) следует:

1. *При неизменной силе тело неизменной массы движется равноускоренно, т.е.* $\vec{a} = \text{const}$, *если* $\vec{F} = \text{const}$.

2. *Направление вектора ускорения тела совпадает с направлением действующей на тело силы, т.е.* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$.

3. *Ускорение тела неизменной массы пропорционально действующей силе* $\vec{a} \sim \vec{F}$.

4. *Величина ускорения тела зависит также от его инертности, т.е. от массы тела.*

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса материальной точки $d\vec{p}$ равно импульсу действующей на нее силы:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \quad \text{или} \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \ . \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) получили название теоремы импульсов, где $\vec{F}dt$ – импульс силы.

Уравнения движения – это уравнения изменения физических величин динамической системы во времени и в пространстве. Исходя из этого, уравнения (2.6), (2.7), (2.8) и другие по форме, но полученные из них, – уравнения движения материальной точки.

Если в данный момент времени точно известны координаты X, Y, Z и проекции импульса p_x, p_y, p_z каждой частицы системы, то согласно классической механике Ньютона, однозначно определено состояние системы. Все процессы сводятся к переходу системы из одного состояния в другое. Поэтому состояние механической системы в начальный момент времени (набор ее импульсов и координат) наряду с известным законом взаимодействия частиц может рассматриваться как причина, а состояние в последующий момент – как следствие. Уравнения движения отражают причинно-следственную связь. Можно рассматривать силу, действующую на тело причиной, а ускорение тела – следствием причины.

2.4. Третий закон Ньютона

Механическое воздействие тел друг на друга носит характер их взаимодействия, причем каждое из тел действует на другое тело с одинаковой по величине, но противоположной по направлению силой. Об этом говорит *третий закон Ньютона: две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Физический смысл третьего закона Ньютона заключается в следующих утверждениях:

1) силы возникают парами и имеют одинаковую природу;
2) эти силы равны по величине;
3) силы действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях.

Каждое из двух взаимодействующих тел – источник действующей на другое тело силы и объект противодействующей силы, источник которой – другое тело (рис. 2.2).

Математически третий закон Ньютона имеет вид: в векторном представлении

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (2.9)$$

и в скалярном представлении

$$F_{12} = F_{21}\,. \tag{2.10}$$

Третий закон Ньютона ничего не говорит о величине сил, а только о том, что они равны.

Рис. 2.2

Согласно третьему закону Ньютона обе силы должны быть равны по величине в любой момент времени независимо от движения взаимодействующих тел. На самом деле скорость распространения взаимодействия одного тела на другое конечна и она не может превзойти скорость света в вакууме. Поэтому третий закон Ньютона имеет пределы применимости при рассмотрении взаимодействия движущихся тел с большими скоростями и находящимися на больших расстояниях. Например, рассмотрим взаимодействие двух частиц в некоторой системе координат, и в этой системе выполняется равенство действия и противодействия. Под действием этих сил частицы в некоторый момент времени начнут одновременное движение с равными по величине и противоположными по направлению ускорениями. В другой инерциальной системе отсчета, по отношению к первой, движение частиц начнется не одновременно (см. следствия преобразований Лоренца), поэтому в течение некоторого интервала времени одна из частиц ускоряется, а другая еще покоится. В течение этого интервала времени третий закон Ньютона не выполняется. Утверждение о невыполнении третьего закона Ньютона имеет принципиальное значение лишь при определении границ применимости классической механики Ньютона.

Третий закон Ньютона – существенное дополнение к первому и второму законам. Он позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы (системы материальных точек). Из третьего закона Ньютона следует, что в любой механической системе геометрическая сумма всех внутренних сил равна нулю.

2.5. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Уравнение движения центра инерции

Любой объект можно рассматривать как множество материальных точек. Это могут быть малые частицы твердого тела, атомы или молекулы газа, находящегося в некотором объеме. Солнце и планеты, входящие в Солнечную систему, можно также представить системой материальных точек (СМТ) во всех вопросах, когда внутреннее строение и размеры тел в рассматриваемой задаче роли не играют.

Точки СМТ пронумеруем, при этом масса каждой точки будет m_i, а масса всей системы будет $m=\sum m_i$.

Центром инерции, или центром масс, системы материальных точек (рис. 2.3) называется воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе. Радиус-вектор $\vec{r}_c$ центра инерции определяется уравнением

$$\vec{r}_c=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}, \tag{2.11}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й точки системы.

Проекции центра масс СМТ в декартовой системе координат:

$$x_c=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\quad y_c=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\quad z_c=\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \tag{2.12}$$

Понятие о центре инерции не связано с силовым полем и имеет смысл для любой механической системы. Положение точки С относительно материальных точек системы не зависит от выбранной исследователем системы отсчета. Для твердого тела положение центра масс и центра тяжести совпадают, причем центр тяжести имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести.

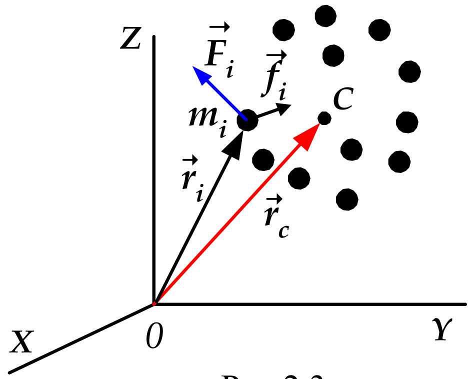


Рис.2.3

В ряде задач динамики нет необходимости рассматривать структуру системы материальных точек. Например, исследуя движение самолета, важно знать величину и направление вектора скорости и вектора ускорения этого тела. В этом случае не следует рассматривать самолет как очень сложную физическую и техническую систему, а достаточно изучить только движение его центра масс под действием сил.

Рассмотрим движение системы материальных точек под действием приложенных сил. В общем случае на каждую материальную точку СМТ действуют силы двоякого происхождения. Силы, источники которых находятся вне системы, называются *внешними силами* $\vec{F}_i$. Силы со стороны материальных точек, входящих в состав системы, – *внутренние силы* $\vec{f}_i$.

Запишем уравнение движения каждой материальной точки СМТ и просуммируем левые и правые части этих уравнений:

$$\sum\vec{F}_i+\sum\vec{f}_i=\sum\frac{d^2(m_i\vec{r}_i)}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\sum(m_i\vec{r}_i). \tag{2.13}$$

В уравнении (2.13) сумма всех внешних сил – это равнодействующая сила $\sum\vec{F}_i=\vec{F}$, сумма всех внутренних сил равна нулю $\sum\vec{f}_i=0$, а $\sum(m_i\vec{r}_i)=m\vec{r}_c$.

С учетом этого, уравнение движения системы материальных точек имеет вид:

$$\vec{F}=m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=m\vec{a}_c, \tag{2.14}$$

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс системы материальных точек.

Уравнение (2.14) является теоремой о движении центра инерции, записанной в аналитическом виде, а саму теорему можно сформулировать так: *центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная равнодействующей внешних сил, приложенных к системе*.

2.6. Движение тела переменной массы. Уравнение Мещерского. Реактивная сила. Формула Циолковского

Движение тела переменной массы. Уравнение Мещерского.

Есть такие явления, в которых при движении тел их масса изменяется. В ньютоновской механике масса тела может изменяться только в результате отделения от тела или присоединения к нему частиц вещества, например движение автомобиля, поливающего улицу водой, загрузка или разгрузка на ходу подвижной платформы, движение летательного аппарата с реактивным двигателем.

Рассмотрим уравнение движения тела переменной массы на примере полета ракеты в отсутствии внешних сил, действующих на ракету, и полагая, что скорости тел много меньше скорости света в пустоте, т.е. нерелятивистский случай.

На рис. 2.4 показана ракета, которая движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета по прямой, совпадающей с продольной осью симметрии ракеты. В момент времени t скорость ракеты $\vec{v}$, а ее масса M. В процессе полета масса ракеты уменьшается, так как газообразные продукты сгорания топлива в двигателе ракеты выбрасываются через сопло двигательной установки. Предположим, что скорость продуктов горения относительно корпуса ракеты $\vec{u}$ не меняется со временем. Это предположение допустимо, поскольку скорость газов зависит от температуры в камере сгорания, которая остается практически неизменной. Кроме того, скорость газов на выходе камеры сгорания зависит от давления внешней среды, следовательно, при полете в пустоте или на малых перепадах высот полета ракеты эта связь не проявляется.

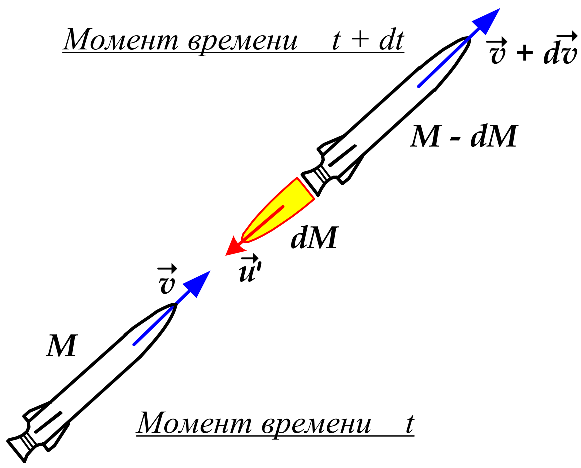


Рис. 2.4

Продукты горения массой dM выбрасываются за время dt и движутся относительно выбранной системы отсчета со скоростью $\vec{u}'$, которую можно выразить через скорость ракеты и относительную скорость, используя правило сложения скоростей классической механики $\vec{u}'=\vec{v}+\vec{u}$.

К моменту времени $t+dt$ масса ракеты изменится на величину dM и станет равной $M - dM$, а скорость ракеты станет $\vec{v}+d\vec{v}$. Применим закон сохранения импульса для этой системы тел, рассматривая моменты времени t и $t+dt$,

$$M\vec{v}=(M-dM)\cdot(\vec{v}+d\vec{v})+dM\,\vec{u}'. \qquad (2.15)$$

Из уравнения (2.15), пренебрегая величиной второго порядка малости $dM\cdot d\vec{v}$, имеем

$$Md\vec{v}-\vec{v}dM+\vec{u}'\,dM=Md\vec{v}-\vec{v}dM+(\vec{u}+\vec{v})\,dM=0.$$

Из этого уравнения следует

$$Md\vec{v}+\vec{u}\,dM=0, \qquad (2.16)$$

или после деления уравнения (2.16) на dt получим

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\frac{dM}{dt}. \tag{2.17}$$

Обозначим в (2.17) массовый расход вещества $\mu = (dM/dt)$. С учетом этого уравнение (2.17) принимает вид

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \cdot \vec{\boldsymbol{u}}. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) и есть уравнение движения тела переменной массы в отсутствии внешних сил.

Если на ракету действуют внешние силы, то уравнение (2.18) примет вид

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}} - \mu \cdot \vec{\boldsymbol{u}}, \tag{2.19}$$

где сила $\vec{\boldsymbol{F}}$ – это результирующая всех внешних сил (сила тяжести и силы сопротивления внешней среды). Уравнение движения (2.19) получено И.В. Мещерским для тела при отбрасывании от него некоторой массы со скоростью $\vec{\boldsymbol{u}}$ относительно тела. Если масса движущегося тела изменяется и путем присоединения части вещества массой dM_1, то в правой части уравнения (2.19) появится еще одно слагаемое $\vec{u}_1\frac{dM_1}{dt}$, где $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ – относительная скорость частиц присоединяемого вещества.

Реактивная сила

Второй член правой части уравнения (2.19) представляет собой *реактивную силу*, действующую на тело при изменении его массы. Реактивная сила или сила тяги ракеты, действующая на тело, возникает вследствие того, что выбрасываемому веществу сообщается скорость u :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{Т}} = -\vec{\boldsymbol{u}}\frac{dM}{dt}. \tag{2.20}$$

Из уравнения (2.20) следует, что сила тяги направлена противоположно вектору скорости выбрасываемых газов. Реактивная сила характеризует механическое действие на ракету отделяющегося от нее вещества.

Формула Циолковского

Перепишем уравнение (2.17) в виде.

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}. \qquad (2.21)$$

Полагая, что u = const, проинтегрируем выражение (2.21) в следующих пределах: начальная и конечная массы ракеты соответственно M_0 и M; начальная и конечные скорости ракеты соответственно v_0 и v_k

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = -\int_{v_0}^{v_k} \frac{dv}{u}. \qquad (2.22)$$

Выполним интегрирование $\ln\frac{M}{M_0} = -\frac{v_k - v_0}{u}$ и выразим конечную скорость ракеты v_k

$$v_k = v_0 - u \cdot \ln\frac{M}{M_0}. \qquad (2.23)$$

Уравнение (2.23) получено Циолковским и позволяет рассчитать максимальную скорость (характеристическую скорость), которую может развить ракета в отсутствии внешних сил. Эта скорость достигается в момент окончания работы двигателя из-за использования всего запаса топлива и окислителя, имевшегося на борту ракеты. Для вывода аппаратов на околоземную орбиту ракетой с реактивным двигателем необходимо использовать многоступенчатые ракеты. Современные технологии решают проблему запуска на орбиту искусственного спутника Земли, как правило, ракетой с тремя ступенями.

Влияние тяготения Земли и сопротивления воздуха вызывают заметное уменьшение максимальной скорости, фактически приобретаемой ракетой в процессе работы двигателя.

2.7. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

Движение материальной точки относительно: ее положение, скорость, вид траектории зависят от того, по отношению к какой инерциальной системе отсчета (ИСО) это движение рассматривается. Существует бесчисленное множество инерциальных систем отсчета. Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы с постоянной скоростью, также инерциальна. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны. Рассмотрим это положение с позиций наблюдателя, который находится в системе K' (в точке М рис. 2.5), движущейся относительно неподвижной инерциальной системы K прямолинейно и равномерно.

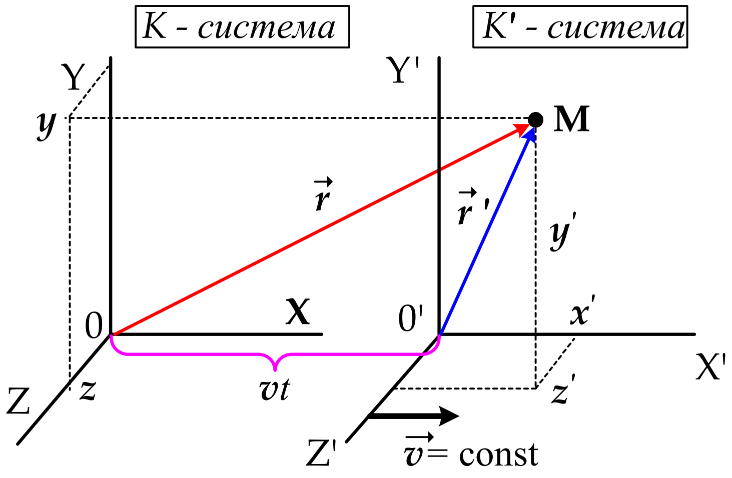


Рис. 2.5

Оградим наблюдателя непроницаемыми стенками от пространства вне системы K'. В этих условиях никакие механические эксперименты внутри огражденного пространства не позволят наблюдателю определить, движется система K' относительно системы K прямолинейно и равномерно или покоится. Аналогичные рассуждения можно провести, если поместить наблюдателя в системе K в такие же условия, как и рассмотрено выше.

Принцип относительности Галилея

Принцип относительности Галилея или принцип физического равноправия всех инерциальных систем отсчета в классической механике, состоит в том, что *законы механики во всех инерциальных системах отсчета одинаковы*. Другими словами, никакими физическими опытами из области механики, находясь в изолированной системе, нельзя обнаружить, движется эта система с постоянной скоростью или неподвижна. Этот фундаментальный физический принцип был впервые сформулирован Галилео Галилеем в 1636 г. Однако этот принцип остается постулатом, т.е. основополагающим допущением, выходящим за рамки экспериментальной проверки. С математической точки зрения принцип относительности означает, что вид закона в механике будет одинаковым в разных ИСО.

Преобразования Галилея

Рассмотрим преобразования координат двух ИСО, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью (см. рис.2.5), причем будем считать K- систему неподвижной, а K'- систему движущейся со скоростью v = const. Координатные оси систем сориентируем так, чтобы ось X и X' совпадали, а оси Y , Y' и Z , Z' были параллельны друг другу. Найдем связь между координатами точки М K-системы и K'-системы. Взаимное положение систем координат выберем так, чтобы в момент времени t =0 начала координат совпадали, а в момент времени t начало координат K'-системы находилось на удалении vt от начала координат K-системы. Связь между радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ точки М приводит к соотношению

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \ . \qquad (2.24)$$

Записывая уравнение (2.24) в проекциях на координатные оси и учитывая, что с позиций классической механики *время абсолютно и неизменно* в различных ИСО, т.е. $t = t'$, получим прямые и обратные преобразования координат:

$$\begin{cases} x' = x - vt'; \\ y' = y; \ z' = z; \quad t' = t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' + vt; \\ y = y'; \ z = z'; \quad t = t' \end{cases} \qquad (2.25)$$

Система уравнений (2.25) получила название преобразований Галилея. Эти преобразования справедливы, когда тела (системы отсчета) движутся со скоростями много меньшими скорости света в вакууме. При скорости движения тела, сравнимой со скоростью света (релятивистский случай), преобразования (2.25) должны быть заменены преобразованиями Лоренца.

Инварианты преобразования координат Галилея

В физических теориях важную роль играют *инварианты*(inv) преобразований – это физические величины, числовые значения которых не изменяются при преобразовании координат. Физические величины, которые изменяются при переходе от одной ИСО к другой, называются *вариантными*.

Инвариант длины. В декартовой системе координат, согласно геометрии Евклида, расстояние между двумя точками (длина отрезка) определяется формулой

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (2.26)$$

В K'-системе расстояние между этими же точками определяется формулой

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}\,. \qquad (2.27)$$

После подстановки в (2.26) обратных преобразований Галилея или в (2.27) прямых преобразований Галилея, получим $l = l' = \mathrm{inv}$. Таким образом, расстояние между двумя точкам (длина отрезка) – инвариант преобразований Галилея.

Инвариант ускорения. Ускорение материальной точки в K-системе определяется формулой

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (2.28)$$

и в K'- системе

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2}\,. \qquad (2.29)$$

Дифференцируя (2.24) и учитывая то, что $dt = dt'$, получим $\vec{a} = \vec{a}' = \mathrm{inv}$. Таким образом, ускорение частицы – инвариант преобразований Галилея. Сила, которая действует со стороны одной точки на другую, интервал времени протекания события также являются инвариантами преобразований Галилея.

Правило сложения скоростей в классической механике

Скорость материальной точки зависит от того, из какой системы отсчета мы определяем ее. Рассмотрим движение тела, находящегося в K' системе в точке М и движущегося относительно этой системы со скоростью $\vec{u}'$ (рис. 2.6).

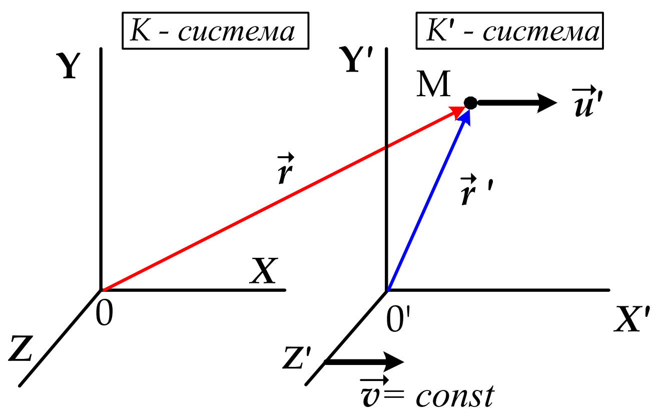


Рис. 2.6

Положение этого тела относительно каждой ИСО задано соответствующими радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, соотношение между которыми определено уравнением (2.24). Продифференцируем это уравнение $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}\,t$ по времени

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{v}\,t) \ . \tag{2.30}$$

Из уравнения (2.30) следует правило сложение скоростей в классической механике

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v} \ , \tag{2.31}$$

где $\vec{u}$ – скорость тела относительно K-системы. Таким образом, скорость материальной частицы является вариантной величиной. Вариантными величинами являются также импульс частицы, кинетическая энергия.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Вращательное движение твердого тела

Если при движении тела две точки этого тела остаются неподвижными, например А и В (рис. 3.1), то тело вращается вокруг оси, а прямая, проходящая через эти две точки, является осью вращения. При таком вращении тела любая точка тела (например D), не лежащая на оси, движется по окружности, оставаясь всегда в одной плоскости. Тело, совершающее вращательное движение, имеет одну степень свободы. Положение этого тела определяется углом φ между неподвижной полуплоскостью K, проведенной через ось вращения, и полуплоскостью K', жестко связанной с телом, проведенной через ось вращения и вращающейся вместе с телом. Основные кинематические характеристики вращающегося тела – угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

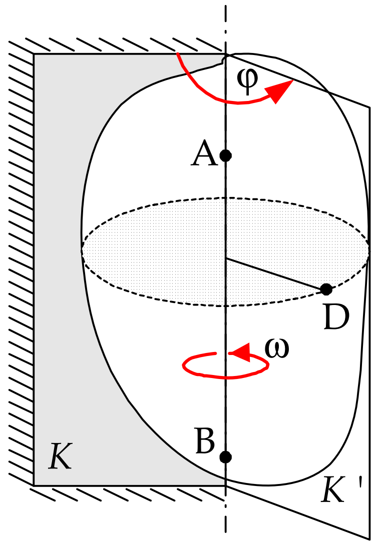


Рис.3.1

Для изменения состояния тела (это когда тело из состояния покоя начало вращаться или у вращающегося тела меняется угловая скорость) необходимо осуществить силовое воздействие на него. Проделаем опыт с дверью, не закрытой на замок. Потянем за дверную ручку так, чтобы направление линии силы пересекало подвеску двери, и мы обнаружим, что дверь не откроется. Если потянем обычным способом, то дверь повернется. В рассмотренных случаях силовое воздействие на объект есть, а результат воздействия – разный. Стало быть, для изменения состояния тела, закрепленного на оси вращения, воздействие силы необходимо, но не достаточно. Динамической характеристикой, изменяющей состояние твердого тела, является **момент силы**.

Рассмотрим динамическую характеристику вращающегося твердого тела. При поступательном движении такой характеристикой служит импульс тела, определяемый произведением массы тела на скорость его центра масс. Исследуем состояние вращающегося симметричного тела относительно неподвижной оси, которая является осью симметрии тела, например раскрученного велосипедного колеса. В реальных условиях из-за различных физических воздействий (трение в оси вращения, сопротивление внешней среды) состояние вращающегося колеса будет изменяться – будет изменяться угловая скорость вращения. Таким образом, в рассмотренном примере состояние тела меняется, а его импульс остается неизменным и равным нулю, поскольку центр масс лежит на оси вращения и неподвижен в условиях поставленного опыта. Стало быть, импульс вращающегося тела не характеризует его состояние. Динамической характеристикой, определяющей состояние твердого тела, является **момент импульса**. Изменение момента импульса точки или твердого тела происходит только в результате внешних воздействий и зависит от момента внешних сил.

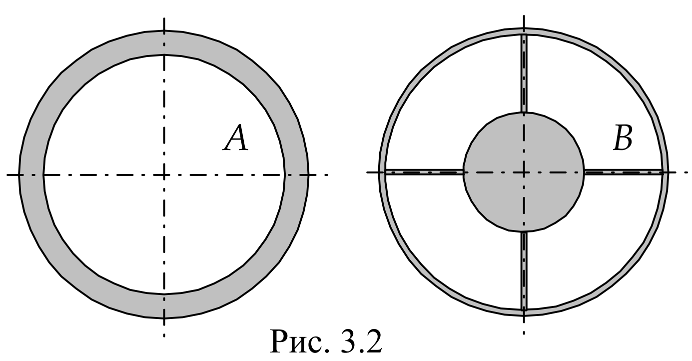


Рис. 3.2

При изучении поведения тела в динамических воздействиях на него важная характеристика тела – его масса. Проделаем опыт, в котором по наклонной плоскости будут скатываться два тела цилиндрической формы одинаковой массы и радиуса, но с разным распределение массы относительно оси симметрии. У тела «*A*» (рис. 3.2) масса преимущественно расположена на периферии, а у тела «*B*» – вблизи оси симметрии. В опыте обнаружим, что время скатывания с наклонной плоскости тела «*B*» будет меньше, чем тела «*А*», т.е. состояние тел в один и тот же момент времени разное. Из этого наблюдения следует, что масса тела, оставаясь его инерционной характеристикой, при вращательном движении тела проявляется совместно с другими параметрами. Инерционной характеристикой тела в динамике вращательного движения является **момент инерции** этого тела.

Таким образом, динамика вращательного движения рассматривается на основе трех важнейших параметров, определяющих динамическое воздействие на тело и следствие этого воздействия, а именно это **момент силы, момент импульса** и **момент инерции**. Уравнения, которые решают в динамике вращательного движения, содержат эти параметры и устанавливают взаимосвязь между ними.

3.2. Момент силы

Как показано в п. 3.1, динамической характеристикой, изменяющей состояние твердого тела, является **момент силы** и по сути это физическая величина, характеризующая вращательный эффект силы. Различают момент силы относительно центра (точки) и момент силы относительно оси.

Рассмотрим эту динамическую характеристику на примере, приведенном на рис. 3.3.

В системе координат X Y Z расположена точка А, к которой приложена сила $\vec{F}$. Положение точки А относительно центра О определяется радиус вектором $\vec{r}$. Угол между силой и радиус-вектором равен α.

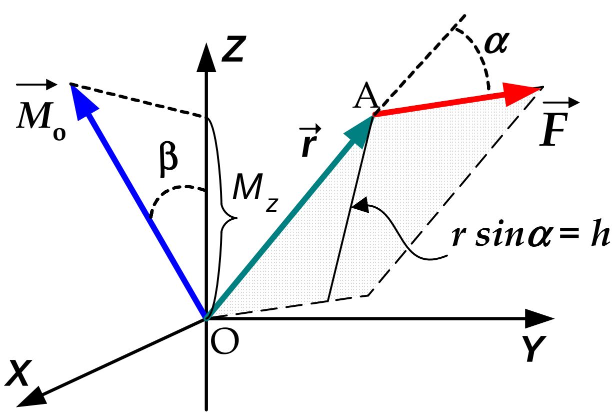


Рис. 3.3

1. *Моментом силы относительно центра О называется векторная величина* $\vec{M}_o$, *равная векторному произведению радиуса вектора* $\vec{r}$, *проведенного из центра О в точку* А *приложения силы, на силу* $\vec{F}$. В аналитической форме это выглядит так

$$\vec{M}_{\text{o}} = [\vec{r}\,\vec{F}\,], \qquad (3.1)$$

или то же в другом формате:

$$\vec{M}_{\text{o}} = \vec{r} \times \vec{F} \ . \qquad (3.2)$$

Модуль момента силы

$$\boldsymbol{M}_{\text{o}} = r \cdot F \cdot \sin\alpha \ . \qquad (3.3)$$

В формуле (3.3) произведение $r \cdot \sin\alpha = h$, где h – плечо силы – это кратчайшее расстояние от линии действия силы до центра О. С учетом этого модуль момента силы относительно центра $M_{\text{o}} = F \cdot h$. Он численно равен площади штрихованного на рис.3.3 параллелограмма, поскольку h – высота параллелограмма, если за основание этой фигуры принять длину отрезка равного силе F.

Единица измерения момента силы – Н·м.

Вектор $\vec{M}_{\text{o}}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (на рис. 3.3 в этой плоскости лежит штрихованный параллелограмм, и его направление определяется правилом *правого винта*).

2. *Моментом силы относительно оси Z называется скалярная величина M_z, равная проекции на ось Z вектора момента силы, относительно любого центра О, взятого на этой оси*:

$$\boldsymbol{M}_z = M_{\text{o}} \cdot \cos\beta = r \cdot F \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \ . \qquad (3.4)$$

Необходимо отметить, что проекция момента силы на ось не зависит от того, какая точка взята на этой оси в качестве центра, для которого определяется $\vec{M}_{\text{o}}$. В качестве оси Z может быть принята любая ось, но практическую значимость имеет та ось, относительно которой осуществляется или возможен поворот точки А в данный момент времени.

3.3. Момент импульса

Как показано в п. 3.1, динамической характеристикой, определяющей состояние вращательного движения точки или твердого тела, является его **момент импульса.** Эта физическая величина в трактовке разных явлений может иметь такие варианты названий: момент количества движения, кинетический момент, орбитальный момент, угловой момент.

Различают момент импульса относительно центра (точки) и момент импульса относительно оси. Рассмотрим эту динамическую характеристику на примере, приведенном на рис. 3.4. В системе координат XYZ расположена материальная точка массы m, которая движется со скоростью $\vec{v}$ и имеет импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Положение материальной точки относительно центра O определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Угол между импульсом $m\vec{v}$ и радиус-вектором равен α.

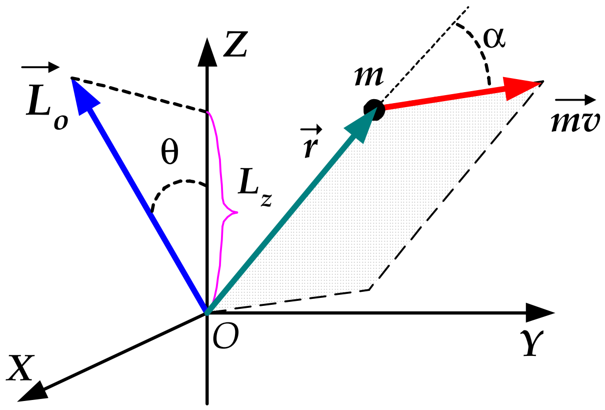


Рис. 3.4

1. *Моментом импульса относительно центра О называется векторная величина* $\vec{L}_o$*, равная векторному произведению радиуса-вектора* $\vec{r}$*, проведенного из центра О к материальной точке, на импульс этой материальной точки.* В аналитической форме это выглядит так:

$$\vec{L}_o = [\vec{r}\, m\vec{v}], \tag{3.5}$$

или то же в другом формате:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} \ . \tag{3.6}$$

Модуль момента импульса

$$L_o = r \cdot mv \cdot \sin\alpha \ . \tag{3.7}$$

Единица измерения момента импульса – *кг·м²/с*.

Вектор $\vec{L}_o$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $m\vec{v}$ (на рис.3.4 в этой плоскости лежит штрихованный параллелограмм), и его направление определяется правилом *правого винта*.

2. *Моментом импульса относительно оси Z называется скалярная величина* L_z*, равная проекции на ось Z вектора момента импульса, относительно любого центра О, взятого на этой оси*:

$$L_z = L_o \cdot \cos\theta = r \cdot mv \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta \ . \tag{3.8}$$

В качестве оси Z может быть принята любая ось, но практическую значимость имеет та ось, относительно которой осуществляется или возможен поворот материальной точки в данный момент времени.

3. *Момент импульса свободного симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии (рис. 3.5), определяется формулой*

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\,. \tag{3.9}$$

Вектор момента импульса $\vec{L}$ такого тела лежит на оси вращения

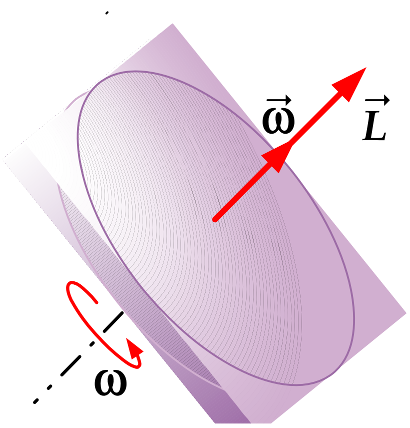


Рис. 3.5

и направлен в ту же сторону, что и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. В формуле (3.9) I – момент инерции тела относительно оси симметрии. Оси, для которых направления векторов угловой скорости вращения и момента импульса тела совпадают, называются *главными осями инерции.*

Момент импульса обладает важным свойством. Момент импульса в целом покоящейся системы (когда центр масс системы неподвижен) может быть отличен от нуля. Момент импульса тела при нулевом значении полного импульса системы называется *собственным*. Примером тела, обладающего собственным моментом импульса, является вращающийся волчок с неподвижным центром масс.

3.4. Момент инерции. Теорема Гюйгенса – Штейнера

Как показано в п. 3.1 инерционной характеристикой тела в динамике вращательного движения является **момент инерции** этого тела.

Момент инерции – величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся наряду с массой мерой инертности тела при непоступательном движении. В механике различают осевые и центробежные моменты инерции. Ниже будем рассматривать осевые моменты инерции. Эта физическая характеристика приобретает однозначную значимость, если указана ось, для которой задан или определен осевой момент инерции. В примерах, рассматриваемых ниже, такую ось будем обозначать символом Z.

Осевым моментом инерции тела относительно оси Z называется величина, определяемая равенством

$$I_z = \sum m_i r_i^2 \tag{3.10}$$

или

$$I_z = \int\limits_V \rho r^2 dV\;, \tag{3.11}$$

где m_i – масса i-й точки тела; r_i – расстояние от этой точки до оси Z; ρ – плотность вещества тела; V – объем тела; dV – элементарный объем в пределах тела; r – расстояние от элементарного объема dV до оси Z (рис. 3.6).

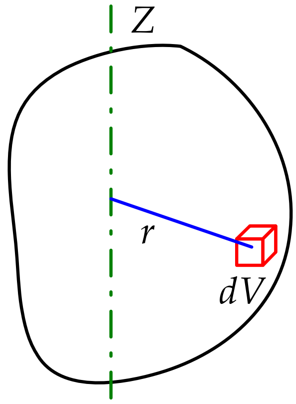


Рис.3.6

В формуле (3.10) $m_i r_i^2$ можно рассматривать как момент инерции i-й материальной точки относительно оси Z, а в формуле (3.11) подынтегральное выражение $\rho r^2\, dV$ можно рассматривать как момент инерции части тела в элементарном объеме dV относительно оси Z.

Единица измерения момента инерции – кг·м^2.

Вычисление моментов инерции

Расчет момента инерции твердого тела относительно оси Z сводится к вычислению интеграла (3.10) $I_z = \int r^2 dm$ или, полагая что $dm = \rho \cdot dV$, к вычислению интеграла (3.11) $I_z = \int\limits_V \rho r^2 dV$.

Вычислим, например, момент инерции сплошного цилиндра относительно продольной оси симметрии Z с равномерным распределением массы m по всему объему (т.е. ρ = const) относительно продольной оси симметрии Z. Геометрические параметры цилиндра: радиус цилиндра – R ; высота цилиндра – h (рис. 3.7)

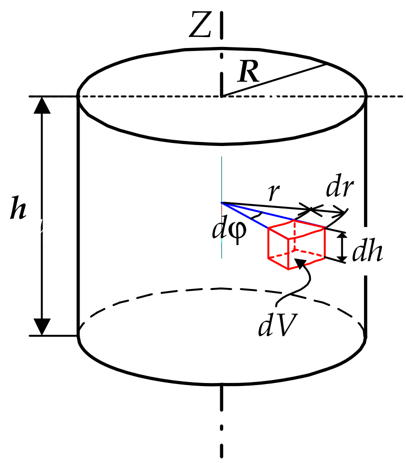


Рис. 3.7

Выделим внутри цилиндра элементарный объем dV с размерами сторон: длина сторон основания – $r\, d\varphi$ и dr, высота – dh. Элементарный объем расположен на удалении r от оси Z.

Для вычисления момента инерции цилиндра воспользуемся уравнением (3.11)

$$I_z = \int\limits_V \rho r^2 dV = \rho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^h r^2 \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dh = \\ = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot h = \frac{1}{2} mR^2 . \tag{3.12}$$

Момент инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через центр масс и являющейся осью симметрии

В технических устройствах часто встречаются объекты типичной формы. К таким объектам относится тонкое кольцо и тонкостенный цилиндр, диск и сплошной цилиндр, шар и тонкий длинный стержень (рис. 3.8). Моменты инерции I_0 этих тел относительно оси симметрии Z, проходящей через центр масс, определены и их значения приведены ниже:

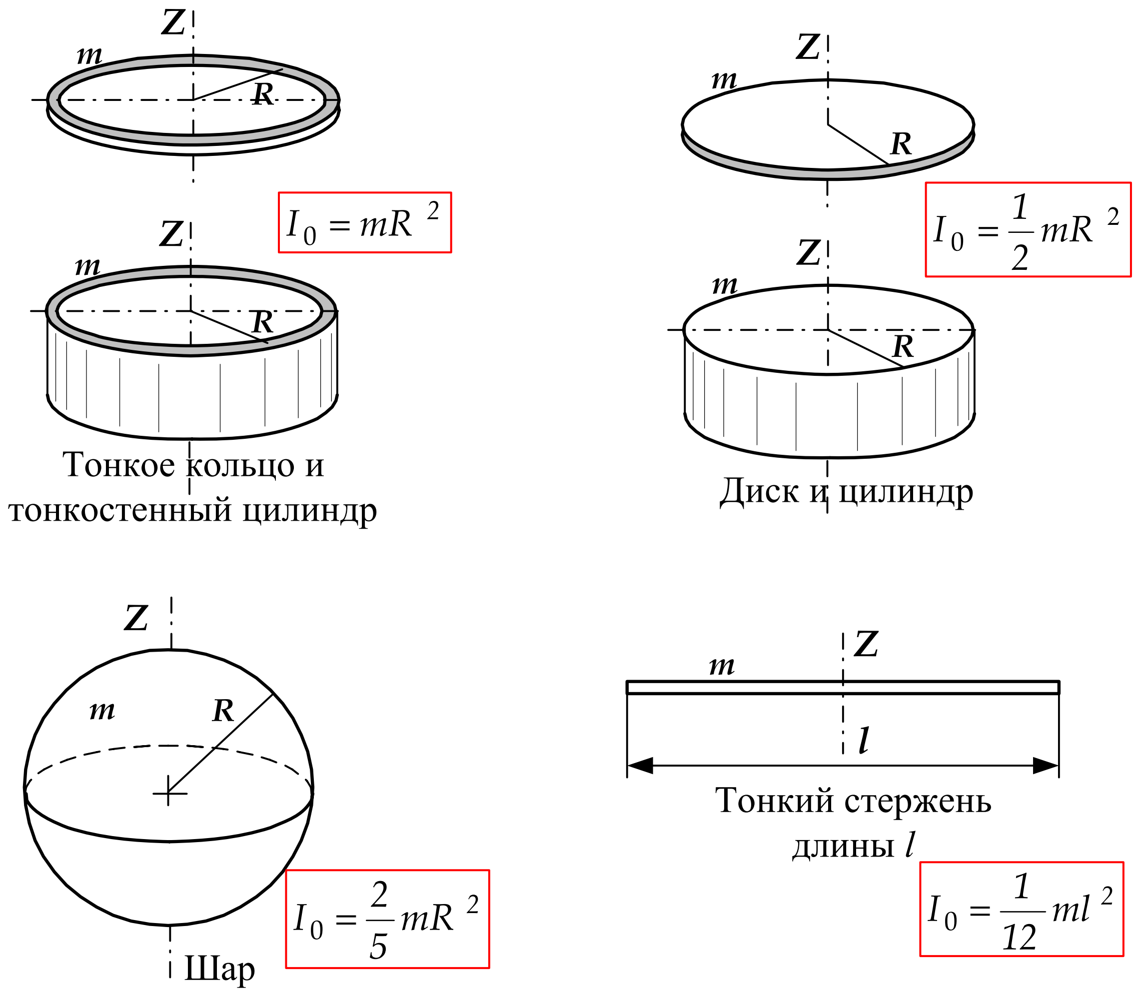


Рис. 3.8

Теорема Гюйгенса – Штейнера

Эта теорема связывает моменты инерции тела относительно двух параллельных осей. Одна из осей проходит через центр масс тела, а другая отстоит от нее на расстоянии a. В аналитической форме эта теорема имеет вид:

$$I = I_0 + ma^2 . \tag{3.13}$$

Применения теоремы Гюйгенса – Штейнера рассмотрим на примере качения цилиндра массы m и радиуса R по плоской поверхности без проскальзывания (рис. 3.9). Центр масс цилиндра движется со скоростью v. Такое движение цилиндра можно рассматривать как вращение его относительно *мгновенной оси*, проходящей через точку касания С и перпендикулярной плоскости основания цилиндра. Момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси

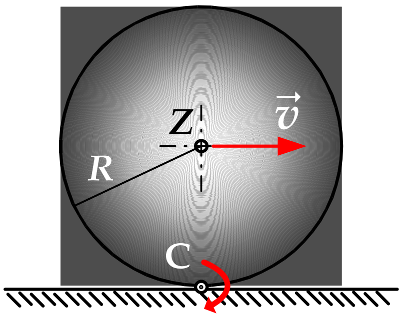


Рис. 3.9

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 . \tag{3.14}$$

В многочисленных практических случаях осевые моменты инерции тел сложной конфигурации определяют экспериментально. Методика решения такой задачи изучается в лабораторном практикуме на кафедрах физики, в частности, при определении момента инерции крестообразного маятника (маятника Обербека).

3.5. Основной закон динамики вращательного движения (уравнение моментов)

Рассмотрим материальную точку массы m, которая в данный момент времени движется в системе координат XYZ, имея импульс $m\vec{v}$. Положение материальной точки относительно системы координат определено радиус-вектором $\vec{r}$ и она находится на расстоянии R от оси Z. На материальную точку действует сила $\vec{F}$ (рис. 3.10). Уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d(m\,\vec{v})}{dt} . \tag{3.15}$$

Умножим это уравнение векторно на радиус-вектор r

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d(m\,\vec{v})}{dt} . \tag{3.16}$$

Правую часть уравнения можно записать в виде

$$\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) \ . \tag{3.17}$$

С учетом (3.17) уравнение (3.16) принимает вид

$$\vec{r}\times\vec{F}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) \ . \tag{3.18}$$

В (3.18) левая часть уравнения соответствует моменту сил относительно центра О, действующему на материальную точку $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$, а под знаком производной – момент импульса материальной точки относительно центра О, т.е. $\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{L}$.

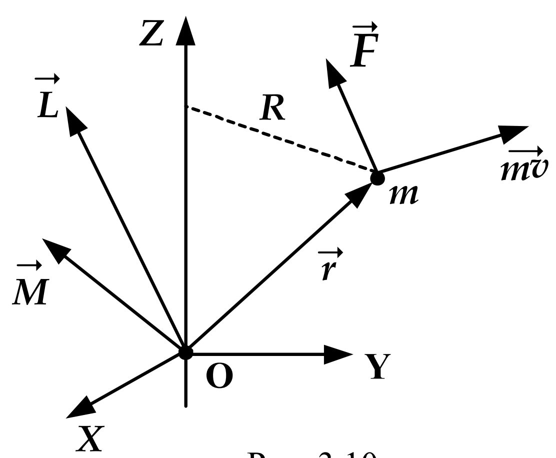


Рис. 3.10

Таким образом, уравнение (3.18) записывается в виде

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt} \ . \tag{3.19}$$

Уравнение (3.19) называется *уравнением моментов* и из него следует, что момент силы относительно центра, действующий на материальную точку, приводит к изменению момента импульса этой точки относительно центра.

Примечание

1. Внутренние силы не могут изменить момент импульса тела.
2. Точку приложения силы можно произвольно переносить вдоль линии, по которой действует сила. Указанный перенос не изменяет момента силы, так как сила и плечо силы при этом не изменяются.

3.6. Уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим абсолютно твердое тело (АТТ) на рис. 3.11, которое состоит из n-го количества материальных точек m_i. На материальную точку могут действовать внешние силы, результирующая которых равна F_i, результирующая же всех внутренних сил f_i равна нулю. Тело может вращаться вокруг неподвижной оси Z и материальная точка m_i удалена от оси на расстоянии R_i.

Применим уравнение моментов к этой материальной точке $\vec{\boldsymbol{M}}_i = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{L}}_i}{dt}$ и запишем это уравнение в проекциях на ось Z.

$$M_{iz} = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_i}{dt}\right)_z = \left(\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i\right)_z = \frac{d}{dt}(r_i\, m_i\, v_i \cos\beta)\,. \qquad (3.20)$$

В уравнении (3.20) совокупность параметров под знаком производной можно переписать в виде: $r_i\cos\beta = r_i\sin\theta = R_i$, а также $v_i = R_i\,\omega$, где ω – угловая скорость вращения твердого тела вокруг оси Z. С учетом сделанных замен уравнение (3.20) запишем в виде

$$M_{iz} = \frac{d}{dt}(m_i R_i^2\,\omega)\,. \qquad (3.21)$$

Уравнение (3.21) справедливо для любой материальной точки абсолютно твердого тела. Просуммировав уравнение (3.21) по всем материальным точкам, получим

$$\sum M_{iz} = \sum \frac{d}{dt}(m_i R_i^2\,\omega)\,. \qquad (3.22)$$

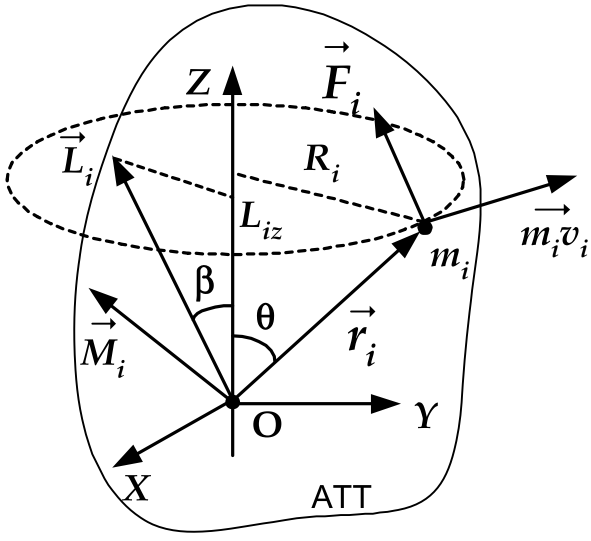


Рис. 3.11

В уравнении (3.22) $\sum M_{iz} = M_z$ – результирующий момент всех внешних сил относительно оси Z. Правую часть уравнения (3.22) можно записать в виде

$$\sum \frac{d}{dt}(m_i R_i^2\,\omega) = \frac{d\omega}{dt}\sum (m_i R_i^2)\,, \qquad (3.23)$$

где сумма $\sum (m_i R_\text{i}^2) = I$ есть момент инерции АТТ относительно оси Z.

С учетом выполненных преобразований уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

$$M_z = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\,\varepsilon\,. \qquad (3.24)$$

В уравнении (3.24) ε – угловое ускорение АТТ.

Для тела симметричной формы относительно оси Z уравнение (3.24) можно записать в виде, которое по форме аналогично второму закону Ньютона в динамике поступательного движения,

$$\vec{M} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\varepsilon} \quad , \qquad (3.25)$$

поэтому уравнение (3.25) можно трактовать как второй закон Ньютона динамики вращательного движения абсолютно твердого тела.

На рис. 3.12 показано решение задачи, в которой задано направление вращения симметричного твердого тела относительно оси симметрии и направление внешнего момента сил $\vec{M}$, приложенного к этому телу (рис. 3.12, *а*). Необходимо определить направления кинематических (угловой скорости и углового ускорения) и динамических (момента импульса) характеристик тела. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси Z, и это направление определяется правилом правого винта (рис. 3.12, *б*). Направление углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ определяется из уравнения (3.25), т.е. направление векторов момента силы и углового ускорения одинаковые.

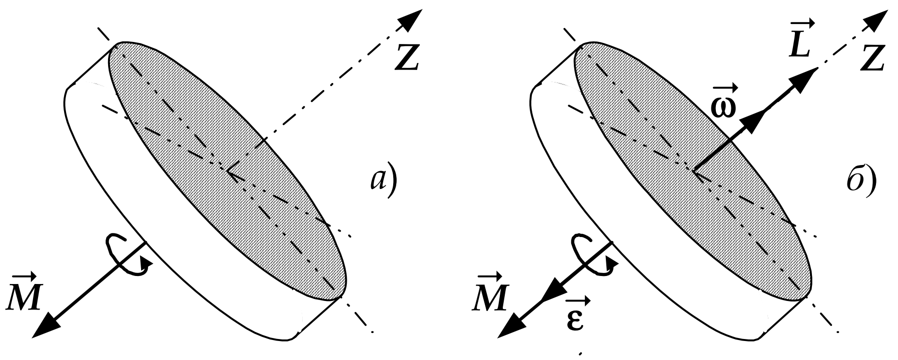


Рис. 3.12

Направление вектора момента импульса $\vec{L}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости (см. формулу (3.9) в п. 3.3).

3.7. Свободные оси. Вращение тела относительно свободной оси

В различных технических устройствах оси вращения элементов закреплены в подшипниках, которые удерживают эти элементы при их вращении. Если ось вращения тела не проходит через центр масс, то такое тело является несбалансированным и при его вращении оси (валы) испытывают динамическую нагрузку. Поскольку динамические нагрузки определяются центробежными силами $F_{ЦБ} = m\omega^2 R$, динамическое воздействие становится значительным и даже разрушительным у несбалансированных устройств, вращающихся с большими угловыми скоростями. Таких, например, как колеса турбин самолетов. У симметричного тела с равномерным распределением массы по объему этого тела существуют оси, вращение вокруг которых не сопровождается динамическими воздействиями. Такие оси называются *главные центральные оси инерции* (термин «*главная*» означает, что у вращающегося тела вокруг такой оси направление векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и момента импульса $\vec{L}$ тела совпадают; термин «*центральная*» означает, что ось вращения пересекает центр масс тела). Главные центральные оси инерции называются *свободными осями*.

На рис. 3.13 в качестве примера показаны тела разной формы и обозначены главные центральные оси инерции этих тел: для сплошного диска (рис. 3.13, *а*; 3.13, *б*); для тела, имеющего форму параллелепипеда (рис. 3.13, *в*).

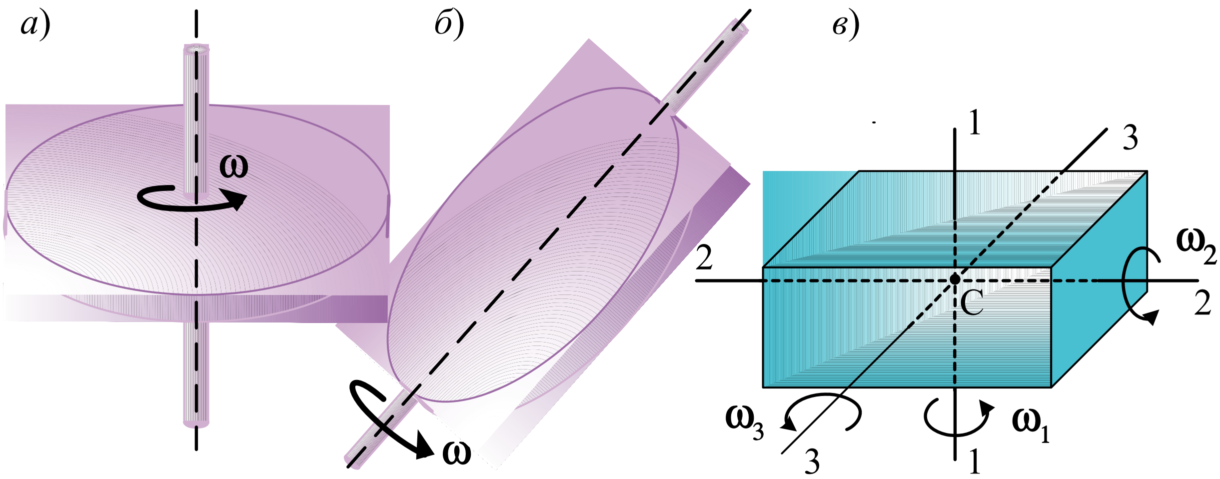


Рис. 3.13

В реальном производстве техническими условиями и технологическими процессами предусматривается статическая и динамическая балансировка вращающихся устройств, в результате чего ось вращения устройства становится главной центральной осью инерции.

Если твердое тело раскрутить вокруг некоторой оси и высвободить ось из удерживающих подшипников, то движение тела будет происходить вокруг незакрепленной оси и характер этого движения изменится. Разные вращения тела относительно незакрепленной оси можно наблюдать, например, в спортивных соревнованиях при выполнении упражнений гимнастами, прыгунами в воду, при выполнении самолетами сложных фигур воздушного пилотажа и т.д.

Опыты показывают, что вращение тела относительно незакрепленной оси в общем случае носит сложный характер. Может происходить непрерывное изменение направления оси вращения в пространстве. Такое движение тела *неустойчивое* и подобно кувырканию. В некоторых опытах можно обнаружить, что ось вращения тела сохраняет неизменным направление в пространстве и в процессе движения ось может перемещаться параллельно первоначальному положению. Такое движение тела является *устойчивым*. Устойчивым будет вращение тела относительно свободной оси. Однако возможны малые возмущения, которые могут повлиять на устойчивость вращения. Опыты показывают, что вращение вокруг главных центральных осей с *наибольшим* и *наименьшим моментом инерции* является устойчивым по отношению к малым возмущениям, а вращение вокруг оси с *промежуточным* значением момента инерции – неустойчивым. Так для параллелепипеда (рис. 3.13,*в*) момент инерции тела I_{11} относительно оси 1–1 максимальный, момент инерции тела I_{22} относительно оси 2–2 минимальный, а момент инерции тела I_{33} относительно оси 3–3 промежуточный по величине. Поэтому вращение такого тела с незакрепленной осью будет устойчивым только относительно осей 1–1 и 2–2. Это можно наблюдать на примере спичечного коробка, если его положить на ладонь и щелкнуть по нему пальцем, заставляя совершать вращательное движение.

3.8. Гироскоп. Свойства гироскопа

Гироскоп (от греч. gyreuö – кружусь, вращаюсь и skopeö – смотрю, наблюдаю) – быстровращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять свое направление в пространстве. Чтобы ось гироскопа свободно поворачивалась в пространстве, тело гироскопа обычно закрепляют в кольцах карданова подвеса, в котором оси внутреннего и внешнего колец и ось гироскопа пересекаются в одной точке, называемой центром подвеса (на рис. 3.14 приведены фотографии модели гироскопа в разных позициях). Закрепленный в таком подвесе гироскоп может совершать поворот в любом направлении около центра подвеса. Если центр тяжести гироскопа совпадает с центром подвеса, гироскоп является *уравновешенным*, или астатическим, и при любых движениях элементов такого гироскопа его центр масс остается неподвижным.

Рис. 3.14

Точностные свойства гироскопа зависят от величины трения в подшипниковых узлах осей вращения тела гироскопа и кардана. Создатели гироскопов стремятся трение свести к очень малой величине, для этого применяют газовые подшипники, например, весь карданов подвес помещают в кожух, заполненный водородом (в водороде самое малое внутреннее трение). Стремление получить гироскоп с более высокими свойствами привело к созданию электростатических и магнитных подвесов и в таких гироскопах быстровращающийся шар поддерживается электрическим или магнитным полем в вакууме.

Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, роторы турбин, устанавливаемые на судах и самолетах, артиллерийские снаряды и т. п. В современной технике гироскоп – основной элемент разнообразных гироскопических устройств и приборов, предназначенных для управления движением, стабилизации платформ и навигации.

Основные свойства гироскопа

1. Неизменность положения оси вращения свободного гироскопа

Для свободного гироскопа моменты всех внешних сил (включая и силу тяжести) относительно центра подвеса равны нулю $(\vec{M}=0)$. Из уравнения моментов следует, что момент импульса $\vec{L}$ свободного гироскопа, раскрученного относительно оси симметрии, остается величиной постоянной:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{L}}=\text{const} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\omega}}=\text{const}. \qquad (3.26)$$

Поскольку момент импульса пропорционален угловой скорости вращения гироскопа и эти вектора имеют одинаковое направление, то угловая скорость вращения не меняется и, следовательно, направление оси вращения гироскопа остается неизменным в пространстве

Это свойство гироскопа можно наблюдать на примере раскрученного демонстрационного гироскопа при его перемещении с поворотом из одного места пространства в другое.

2. Прецессия

Если к оси гироскопа, раскрученного до угловой скорости ω, приложить пару сил $\vec{F}$ (на рис. 3.15, *а* эти силы лежат в плоскости Y – Z системы координат), момент которых равен $M = F \cdot h$ и вектор момента $\vec{M}$ направлен вдоль оси X, то гироскоп начнет дополнительно поворачиваться не вокруг оси X, а вокруг оси Y. Это дополнительное движение называется *прецессией* гироскопа. Прецессия будет происходить по отношению к инерциальной системе отсчета с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, направленной вдоль оси Y.

Из уравнения моментов следует, что при действии на тело импульса момента силы $\vec{M}\,dt$ приращение момента импульса тела – $d\vec{L}$:

$$\vec{\boldsymbol{M}}\,dt = d\vec{\boldsymbol{L}}\,. \qquad (3.27)$$

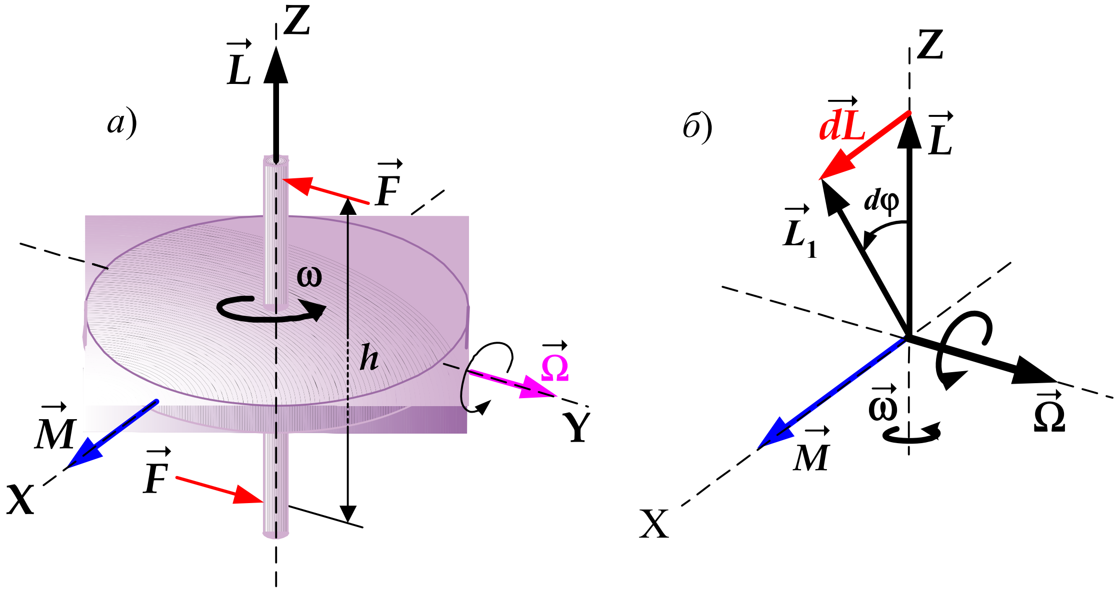


Рис. 3.15

На рис. 3.15, *б* направление вектора приращения момента импульса $d\vec{L}$ гироскопа будет таким же, как и направление вектора момента сил $\vec{M}$, а именно перпендикулярным вектору момента импульса $\vec{L}$ (см. формулу (3.27)). Это означает, что через время dt момент импульса гироскопа станет другим и равным $\vec{L}_1$. Поскольку момент импульса не меняется по величине, то его изменение связано с поворотом вектора момента импульса (в данном случае и оси вращения гироскопа) на угол $d\varphi$, т.е. его прецессией вокруг оси Y. Из рис. 3.15,*б* и уравнения (3.27) следует, что угол поворота

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{L}. \qquad (3.28)$$

Угловая скорость прецессии – есть первая производная от угла поворота по времени

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}. \qquad (3.29)$$

Из формулы (3.29) следует, что угловая скорость прецессии Ω тем меньше, чем больше угловая скорость ω вращения гироскопа. На практике угловая скорость прецессии Ω в миллион раз меньше угловой скорости ω вращения гироскопа. Из формулы (3.29) также следует, что у свободного гироскопа, на который не действует момент сил, т.е. $\vec{M} = 0$, угловая скорость прецессии $\Omega = 0$. Этот вывод подтверждает положение о неизменности ориентации в пространстве оси вращения свободного раскрученного гироскопа.

4. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

4.1. Понятия энергии и работы

В исследованиях свойств замкнутой системы тел установлена закономерность, согласно которой одна из характеристик этой системы не изменяется при любых (известных в настоящее время) взаимодействиях и различных движениях материи внутри этой системы. Такой характеристикой системы является ее *энергия*, а закон, обозначенный выше, носит название *сохранения энергии*.

Энергия (от греч. energeia – действие, деятельность) – это общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Через понятие *энергия* связываются воедино все явления природы.

Энергия не возникает из ничего и не исчезает, она может только переходить из одной формы в другую. Энергия – единственная количественная мера различных форм движения материи. Для количественной характеристики качественно различных форм движения и соответствующих им взаимодействий вводят различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, химическую, ядерную и др. Такое деление до известной степени условное, так например, внутренняя энергия вещества складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

В теории относительности установлена универсальная связь между энергией тела W и его массой m

$$W = m \cdot c^2 . \qquad (4.1)$$

В классической физике энергия тела может изменяться непрерывно, принимая различные значения, а квантовая теория базируется на том, что энергия микрочастицы, движущейся в ограниченном объеме, может принимать только дискретные значения или, другими словами, энергия такой частицы квантуется.

Энергия – это скалярная величина, измеряемая в джоулях (Дж).

В случае непрерывной среды или силового поля наряду с энергией вводятся понятия *объемной плотности энергии и плотность потока энергии*. Объемная плотность энергии определяется соотношением $w = \frac{dW}{dV}$, где dW – энергия, которая содержится в физически малом объеме dV вещества или поля. Плотность потока энергии – это вектор, численно равный энергии, которая переносится в единицу времени, через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока энергии в данном месте пространства, и эта физическая величина определяется соотношением $\vec{P} = w \cdot \vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость переноса энергии.

Принципиален вопрос, как численно связана энергия тела или поля с физическими величинами, характеризующими его состояние. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, необходимо рассмотреть физическую величину – *работу*, которая играет важную роль в понимании энергетического обмена при изменении состояний.

4.2. Работа. Мощность

<u>Работа силы</u>

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественного описания такого процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике пользуются понятием работы силы, приложенной к рассматриваемому телу. Рассмотрим частицу массы m, которая под действием силы $\vec{F}$ перемещается по некоторой траектории от точки 1 до 2 (рис. 4.1). *Элементарной работой силы* $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{l}$ называется величина δA, образованная скалярным произведением

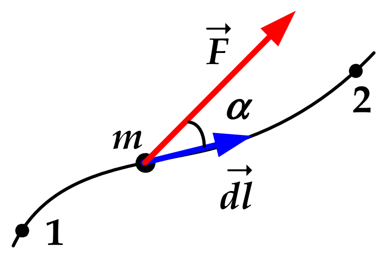


Рис. 4.1

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} \ . \tag{4.2}$$

Формулу (4.2) можно переписать в виде

$$\delta A = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = F_l \cdot dl , \tag{4.3}$$

где F_l – проекция силы на перемещение dl.

Элементарную работу непотенциальной силы нельзя представить в виде полного дифференциала какой-либо функции координат. Именно поэтому элементарная работа произвольной силы обозначена δA.

Очевидное свойство работы – ее аддитивность. Работа A, совершаемая силой F на конечном участке траектории L точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т. е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int_1^2 F_l \cdot dl . \tag{4.4}$$

Если перемещение тела под действием <u>постоянной</u> силы происходит по прямолинейной траектории, то интеграл (4.4) сводится к выражению

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha , \tag{4.5}$$

где s – путь, пройденный телом по траектории от точки 1 до точки 2.

Для вычисления интеграла (4.4) необходимо знать зависимость $F_l = f(l)$ вдоль всей траектории. Если эта зависимость представлена графически (рис. 4.2), то искомая работа A на участке траектории S от 1 до 2 измеряется площадью фигуры, заштрихованной на рис. 4.2.

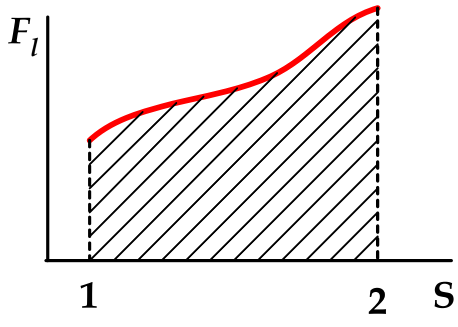


Рис. 4.2

Единица работы в системе единиц СИ – джоуль (Дж).

Один джоуль равен работе, совершаемый силой в 1 Н на пути в 1 м при условии, что направление силы и перемещения совпадают.

Работа момента силы

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться относительно закрепленной оси. Элементарная работа внешних сил при повороте тела на угол $d\varphi$

$$\delta A = M_{||} \cdot d\varphi, \tag{4.6}$$

где $M_{||}$ – момент сил относительно оси, численно равный проекции момента сил на ось вращения. Работа внешних сил при повороте тела на конечный угол φ относительно неподвижной оси определяется интегралом

$$A = \int_0^{\varphi} M\, d\varphi, \tag{4.7}$$

где M – суммарный момент всех сил относительно оси вращения.

Мощность

Разные системы или механизмы могут совершать одинаковую работу за разное время. Для того чтобы охарактеризовать быстроту совершения работы, вводится понятие мощность.

Мощностью называется скалярная величина, равная отношению элементарной работы δA к малому интервалу времени dt, в течение которого эта работа совершается

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \tag{4.8}$$

Если F – сила, совершающая работу δA, то мощность определяется соотношением

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{v}. \tag{4.9}$$

В системе СИ за единицу мощности принимается ватт (Вт). Один ватт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж.

4.3. Связь работы и изменения механической энергии

Рассмотрим перемещение тела массой m вблизи поверхности земли под действием внешней силы F (рис.4.3) и определим работу этой силы A_{12} при перемещении тела от точки 1 до точки 2. Пунктиром обозначена траектория, по которой перемещается тело.

В точке 1 скорость тела v_1 и положение относительно поверхности земли h_1, а в точке 2 – соответственно v_2 и h_2. За время dt перемещение тела в пространстве составит dl (рис. 4.3, а). Угол между действующей силой F и перемещением dl равен α. Уравнение движения тела имеет вид

$$\vec{F}+m\vec{g}=m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4.10}$$

Умножим уравнение (4.10) скалярно на вектор перемещения $d\vec{l}$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l}+m\vec{g}\cdot d\vec{l}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} \quad . \tag{4.11}$$

В уравнении (4.11) $\vec{F}d\vec{l}$ есть элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{l}$. Проинтегрируем выражение (4.11) на интервале траектории от положения 1 до 2.

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}+\int_1^2 \overrightarrow{mg}\cdot\overrightarrow{dl}=\int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\overrightarrow{dl} \quad . \tag{4.12}$$

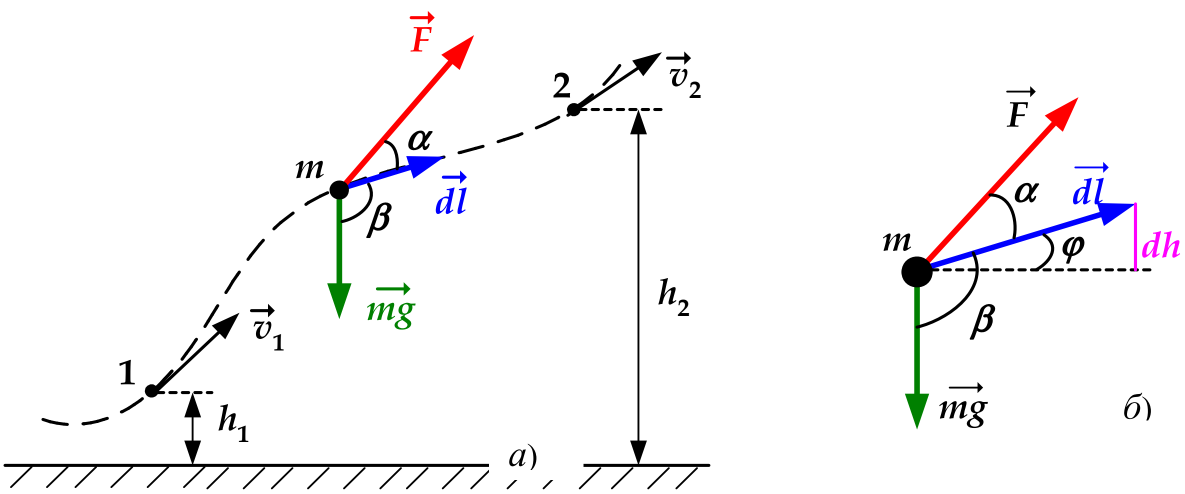


Рис. 4.3

Первое слагаемое в уравнении (4.12) является искомой работой силы, поэтому выделим эту компоненту уравнения

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\int_1^2 \overrightarrow{mg} \cdot \vec{dl} + \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{dl} \qquad (4.13)$$

и рассмотрим отдельно каждый из интегралов в правой части уравнения (4.13).

Первое слагаемое уравнения (4.13) является работой силы тяжести при перемещении тела из точки 1 в точку 2

$$A_{cm} = -\int_1^2 \overrightarrow{mg} \cdot \vec{dl} = -\int_1^2 mg \cdot dl \cdot \cos\beta. \qquad (4.14)$$

Из рис. 4.3, *б* видно, что $\cos\beta = -\sin\varphi$, а $dl \cdot \sin\varphi = dh$, где dh есть приращение высоты в положении тела над поверхностью земли при перемещении его на dl. Поэтому интеграл (4.14) запишем в виде

$$-\int_1^2 mg \cdot dl \cdot \cos\beta = \int_1^2 mg \cdot \sin\varphi = \int_{h_1}^{h_2} mg \cdot dh = mgh_2 - mgh_1. \qquad (4.15)$$

Второй интеграл уравнения (4.13) преобразуем с учетом того, что в подинтегральном выражении $\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{v}$ – скорость перемещения тела, поэтому

$$\int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{dl} = \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (4.16)$$

С учетом уравнений (4.15) и (4.16) формулу (4.13) перепишем в виде

$$A_{12} = \Delta(mgh) + \Delta(\frac{mv^2}{2}). \qquad (4.17)$$

Работа внешней силы в рассматриваемых условиях определяется приращением двух физических величин, имеющих одинаковую единицу измерения (Дж), одинаковую физическую трактовку – энергия, но разный физический смысл энергии. Приращение $\Delta(mgh)$ – это изменение энергии, определяемой положением тела массы m в силовом поле (в данном случае в поле силы тяжести), и эта энергия называется потенциальной. Приращение $\Delta(\frac{mv^2}{2})$ – это изменение энергии, зависящей от скорости движения тела массы m, и эта энергия называется кинетической. С учетом этого уравнение (4.17) запишем в виде

$$A_{12} = \Delta W_п + \Delta W_к \ . \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.17) для любых задач, в которых рассматривается изменение состояния тела, находящегося в потенциальном поле сил и при действии на него внешних сил, можно представить в виде

$$A_{12} = mgh_2 - mgh_1 + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = (mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}) - (mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}) . \qquad (4.19)$$

Выражения в скобках уравнения (4.19) есть полная механическая энергия системы в конечном состоянии W_2 и начальном состоянии W_1

$$A_{12} = W_2 - W_1 = \Delta W , \qquad (4.20)$$

где ΔW – приращение (изменение) полной механической энергии системы.

Таким образом, работа внешней силы при перемещении тела массы m в потенциальном поле и при изменении его скоростного режима равна изменению полной механической энергии этого тела.

Частный случай

1. Если положение тела относительно поверхности земли не меняется, т.е. $h_1=h_2$, то работа внешней силы определяется изменением кинетической составляющей механической энергии тела
$$A_{12} = \Delta W_к \ . \qquad (4.21)$$
2. Если скорости тела в точках 1 и 2 одинаковые по модулю, т.е. $v_1=v_2$, то работа внешней силы определяется изменением потенциальной составляющей механической энергии тела,
$$A_{12} = \Delta W_п \ . \qquad (4.22)$$
3. Если система изолирована, т.е. отсутствуют внешние силы, то A_{12} = 0 и в этом случае
$$\Delta W = 0 \ \text{или} \ \Delta W_п + \Delta W_к = 0 , \qquad (4.23)$$

из чего следует, что полная механическая энергия изолированной системы не меняется, а может только трансформироваться из одного вида в другой, т.е.

$$\Delta W_п = -\Delta W_к \ . \qquad (4.24)$$

Сохранение полной механической энергии изолированной системы означает, что уменьшение кинетической энергии системы должно приводить к увеличению ее потенциальной энергии и наоборот.

Результат, записанный в формулах (4.18) и (4.20) является фундаментальным и выполняется для любой механической системы.

4.4. Кинетическая энергия

Энергия механической системы зависит от скоростей частиц, из которых она состоит. Кинетическая энергия материальной частицы равна $W_к = mv^2/2$, где m – масса этой частицы, v – скорость ее движения. Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, относительно которой определяется скорость движения частицы. Кинетическая энергия не может быть отрицательной, т.е. $W_к \geq 0$. Кинетическая энергия в системе единиц СИ измеряется в джоулях (Дж).

Кинетическая энергия системы материальных частиц складывается из энергии движения системы как единого целого со скоростью, равной скорости $v_ц$ движения центра масс, и энергии движения частиц относительно центра масс

$$W_к = \frac{mv_ц^2}{2} + \sum \frac{m_i u_i^2}{2}, \qquad (4.25)$$

где u_i – скорость i-й точки в системе отсчета, связанной с центром масс.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Рассмотрим тело, которое вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ω. Материальная точка этого тела m_i движется с линейной скорость v_i по окружности радиуса r_i (рис. 4.4). Кинетическую энергию этого тела определим как сумму кинетических энергий всех точек в их вращении с угловой скоростью ω

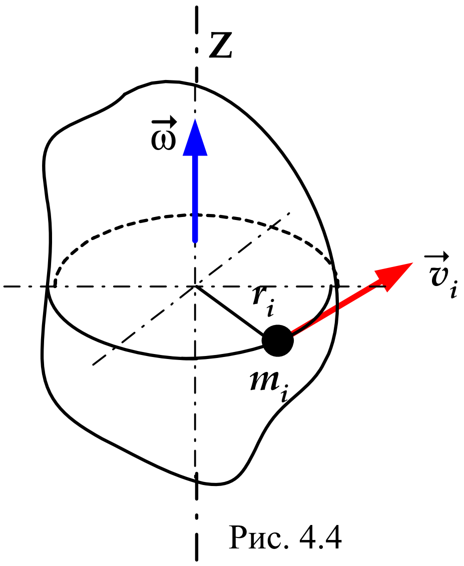


Рис. 4.4

$$W_к = \frac{1}{2}\Sigma(m_i v_i^2) = \frac{1}{2}\Sigma(m_i r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2}\omega\Sigma(m_i r_i^2) = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (4.26)$$

где I – момент инерции тела относительно оси Z.

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение

Пример такого движения – качение без проскальзывания различных тел вращения: шара, цилиндра, диска (рис. 4.5).

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении представляет собой сумму кинетических энергий составляющих его элементов:

$$W_к = \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i(v_ц + u_i)^2}{2}. \qquad (4.27)$$

Преобразуем уравнение (4.27) возведением суммы скоростей в квадрат

$$W_к = \frac{v_ц^2}{2}\sum_i m_i + \vec{v}_ц \sum_i m_i \vec{u}_i + \frac{1}{2}\sum_i (m_i u_i^2)\ . \qquad (4.28)$$

Поскольку суммарный импульс материальных точек относительно центра масс равен нулю, множитель во втором слагаемом формулы (4.28) $\Sigma(m_i u_i)=0$. С учетом этого кинетическая энергия твердого тела при его плоском движении определяется формулой

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\ , \qquad (4.29)$$

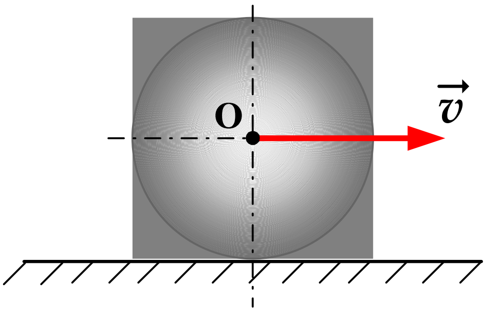


Рис. 4.5

где I – момент инерции тела относительно центральной оси.

Такое движение твердого тела можно представить как поступательное движение тела, каждая точка которого движется с линейной скоростью v, и вращательное движение тела с угловой скоростью ω относительно центральной оси (рис. 4.6).

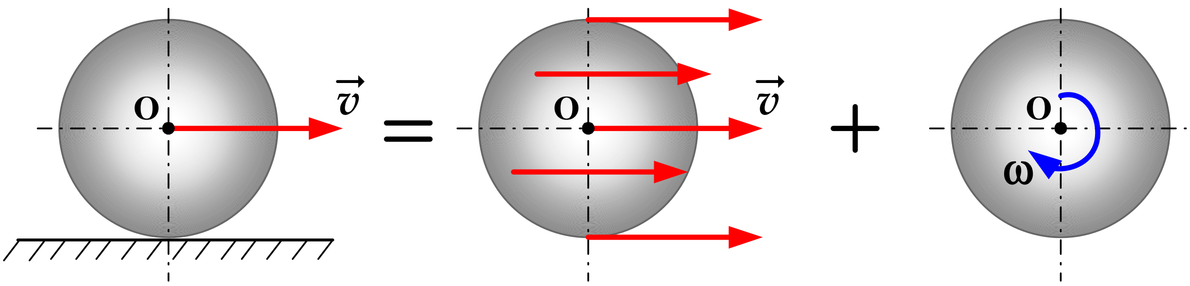


Рис. 4.6

Качение без проскальзывания тела вращения можно представить, как только вращательное движение этого тела с угловой скоростью ω, относительно *мгновенной оси вращения*. Мгновенная ось вращения проходит через точку контакта тела с поверхностью (точка С на рис. 4.7) и перпендикулярна вектору линейной скорости центра масс. В этом случае кинетическую энергию тела можно определить по формуле

$$W_{к} = \frac{I_{с} \cdot \omega^2}{2}, \tag{4.30}$$

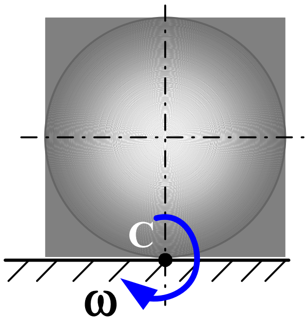


Рис. 4.7

где $I_с$ – момент инерции тела относительно мгновенной оси.

<u>Пример.</u> Сплошной цилиндр радиуса R = 0,1 м и массы m = 2 кг катится по плоской поверхности без проскальзывания. Линейная скорость центра масс цилиндра v = 0,2 м/с. Определить кинетическую энергию тела.

Решение. 1. Угловую скорость точек тела определим по формуле $\omega = \frac{v}{R}$. После подстановки числовых значений получим ω = 2 рад/с. Момент инерции сплошного цилиндра относительно центральной оси $I = \frac{mR^2}{2}$ = 0,01 кг·м^2. Кинетическая энергия цилиндра по формуле (4.29):

$$W_{к} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2 \cdot 0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}01 \cdot 2^2}{2} = 0{,}06\,\text{Дж}.$$

2. Момент инерции сплошного цилиндра относительно мгновенной оси по теореме Гюйгенса – Штейнера

$$I_{с} = \frac{m \cdot R^2}{2} + mR^2 = \frac{2 \cdot 0{,}1^2}{2} + 2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}03\ \text{кгм}^2$$

Кинетическая энергия цилиндра по формуле (4.30):

$$W_{к} = \frac{0{,}03 \cdot 2^2}{2} = 0{,}06\,Дж.$$

4.5. Силовое поле

Силовое поле – часть пространства, в каждой точке которой на помещенную туда частицу действует сила. Для изображения силового поля применяются силовые линии (рис.4.8, 4.9, 4.10). Впервые понятие силовые линии для электрических и магнитных полей ввел М. Фарадей. Силовые линии располагаются таким образом, что касательные к ним в каждой точке совпадают по направлению с вектором физической величины, характеризующей данное поле (напряженностью электрического или гравитационного полей, магнитной индукцией).

Величина и направление силы в общем случае зависят от координат точек, в которых находится частица, и от времени $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$.

Если величина и направление силы зависят только от координат $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, то такое поле является *стационарным*.

Если сила во всех точках стационарного поля имеет одно и то же значение, то есть не зависит от координат $\vec{F} = \mathrm{const}$, то силовое поле является *однородным*. Однородное поле изображается параллельными силовыми линиями одинаковой «густоты». Примером такого поля можно считать электрическое поле между пластинами плоского конденсатора (см. рис 4.8)

Силовое поле, в котором работа сил поля, действующих на перемещающуюся в нем частицу, зависит только от начального и конечного положения частицы и не зависит от вида траектории, является *потенциальным*. Силы, действующие в потенциальном поле, получили название *консервативные*. Стационарность силового поля – необходимое условие консервативности действующих в нем сил.

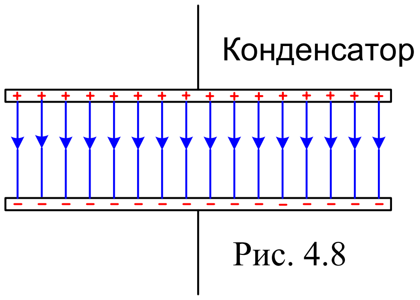


Рис. 4.8

Отметим два возможных подхода при определении консервативности сил:

1) работа консервативных сил при перемещении частицы по замкнутой траектории равна нулю: $A = \oint\limits_L \vec{F}\overrightarrow{dl} = 0$;

2) сила является консервативной, если работа этой силы не зависит от формы пути между двумя точками в поле сил, а определяется лишь положением этих точек.

Пример потенциального поля – поле тяготения и электростатическое поле (см. рис. 4.9, 4.10). Исследуемая система частиц называется консервативной, если в ней действуют только консервативные силы.

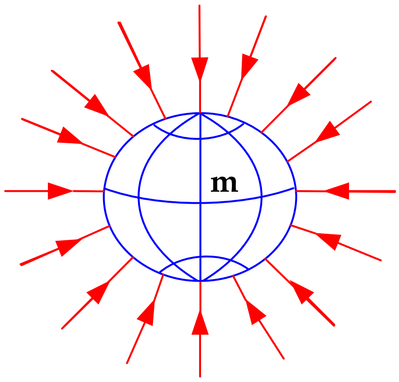


Рис. 4.9

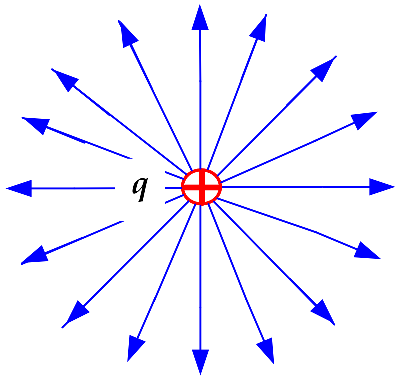


Рис. 4.10

Известны силы, работа которых по замкнутому контуру равна нулю, однако эти силы не являются консервативными, а поле этих сил не потенциально. Например, сила Лоренца, с которой магнитное поле действует на заряженную частицу, движущуюся в этом поле, не совершает работы, однако магнитное поле не является потенциальным и сила Лоренца не консервативная.

Силовое поле не потенциально, если работа сил этого поля зависит от траектории, по которой перемещается частица. Силы, действующие в таком поле, называются *неконсервативными* или *диссипативными*. Пример диссипативной силы – сила трения или сила сопротивления.

Если силовые линии сходятся в одном центре (силовом центре), то такое поле является *центральным*. Пример такого поля – гравитационное и электростатическое поля (см. рис.4.9, 4.10). Поле центральных сил – потенциальное.

4.6. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия частицы в поле консервативных сил

То обстоятельство, что работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положения частицы в потенциальном поле сил, позволяет ввести важную физическую величину – потенциальную энергию частицы. Понятие потенциальная энергия имеет место только для консервативных систем, и потенциальная энергия является скалярной функцией координат $W_п(x,y,z)$. Изменение потенциальной энергии частицы при перемещении ее в поле консервативных сил из одной точки в другую определяется работой консервативных сил. При этом приращение потенциальной энергии равно отрицательной работе сил поля и, наоборот, убыль потенциальной энергии связана с положительной работой сил поля

$$dW_{\text{п}} = -dA. \tag{4.31}$$

Поскольку работа сил поля при изменении положения частицы в поле определяется лишь разностью потенциальных энергий, можно в любой точке поля энергию частицы выбрать, равной наперед заданному значению. Тогда в других точках пространства ее значение будет фиксировано однозначно. Эта процедура придания потенциальной энергии однозначности называется *нормировкой*, или *калибровкой*, потенциальной энергии.

Например, в однородном поле силы тяжести

$$W_{\text{п}}(h) = mgh \tag{4.32}$$

осуществлена нормировка, при которой нулевое значение потенциальной энергии будет на высоте: $h = 0$, т.е. $W_{\text{п}}(0) = 0$.

Для упругой силы потенциальная энергия деформированной (растянутой или сжатой на величину x) пружины определяется соотношением

$$W_{\text{п}}(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.33}$$

В данном случае осуществлена калибровка, в которой потенциальная энергия пружины при нулевой деформации ($x = 0$) равна нулю, т.е. $W_{\text{п}}(0) = 0$.

В гравитационном поле объекта массы M потенциальная энергия частицы массы m, расположенной на расстоянии r от центра масс объекта, определяется соотношением

$$W_{\text{п}}(r) = -G\frac{M \cdot m}{r}. \tag{4.34}$$

В данном случае осуществлена нормировка, при которой нулевое значение потенциальной энергии принимается на расстоянии $r = \infty$, т.е. $W_{\text{п}}(\infty) = 0$.

Потенциальная энергия частицы в потенциальном поле – это составная часть общей механической энергии рассматриваемой системы.

Тот факт, что потенциальная энергия – функция только координат, позволяет ввести наглядный метод графического отображения потенциальной энергии. Например, для однородного поля силы тяжести потенциальная энергия частицы зависит от h и, если этот параметр изменяется в зависимости от координаты оси OX (рис. 4.11, *а*), то график зависимости $W_п = f(x)$ (рис.4.11, *б*) повторяет своей конфигурацией график зависимости $h = f(x)$.

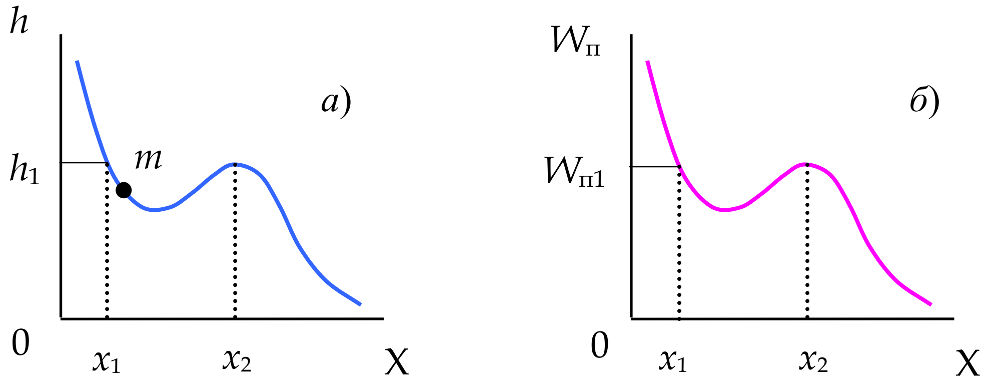


Рис. 4.11

Область пространства между координатами x_1 и x_2 называется потенциальной ямой. Если частица находится в потенциальной яме (на рис 4.11,*а* обозначена символом m) и ее полная механическая энергия меньше $W_{п1}$, то такая частица, с позиций классической механики, не может выйти за пределы пространственного интервала $x_1 \div x_2$. Для этой частицы, с позиций классической механики, область пространства вблизи точки x_2 – потенциальный барьер, который непроницаем для нее.

4.7. Связь консервативной силы и потенциальной энергии

Рассмотрим элементарное перемещение dr материальной частицы в потенциальном поле и определим элементарную работу dA консервативной силы, действующей на эту частицу

$$dA = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}\,. \tag{4.35}$$

Распишем скалярное произведение векторов, выразив эти вектора через их проекции на оси декартовой системы координат

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} &= (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \cdot (dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z) = \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Элементарную работу силы можно также определить через убыль потенциальной энергии материальной частицы в потенциальном поле

$$dA = -dW_п\,. \tag{4.37}$$

Поскольку потенциальная энергия является функцией только координат, приращение потенциальной энергии можно определить через частные производные этой функции по координатам

$$dW_п = \left(\frac{\partial W_п}{\partial x}dx + \frac{\partial W_п}{\partial y}dy + \frac{\partial W_п}{\partial z}dz \right), \tag{4.38}$$

и на основании (4.35 – 4.38) можно записать

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial W_п}{\partial x}dx + \frac{\partial W_п}{\partial y}dy + \frac{\partial W_п}{\partial z}dz \right). \tag{4.39}$$

Сопоставляя компоненты формулы (4.39) в правой и левой ее частях, получим

$$F_x = -\frac{\partial W_п}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial W_п}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial W_п}{\partial z}. \tag{4.40}$$

Из (4.40) для вектора силы получим соотношение

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\left(\frac{\partial W_п}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial W_п}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial W_п}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z \right). \tag{4.41}$$

Величину, стоящую в скобках (4.41), называют *градиентом* потенциальной энергии и (4.41) можно записать в следующей символике

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\mathbf{grad}\, W_п = -\vec{\nabla} W_п\,, \tag{4.42}$$

где в (4.42) символом $\vec{\nabla}$ обозначен *оператор Гамильтона* или его еще называют символический вектор *набла*

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z \right). \tag{4.43}$$

Градиент потенциальной энергии получается, если оператор набла $\vec{\nabla}$ умножить на скаляр $W_п$. *Градиент потенциальной энергии – это вектор, который направлен по нормали к поверхности одинакового уровня (значения) потенциальной энергии в сторону поверхности более высокого уровня.* В качестве примера на рис. 4.12 показаны пунктирными линиями уровни с одинаковым значением потенциальной энергии, причем

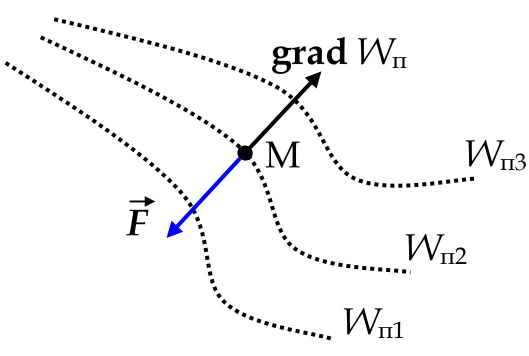


Рис. 4.12

$W_{п1} < W_{п2} < W_{п3}$. Для такого потенциального поля в точке М градиент потенциальной энергии перпендикулярен в этом месте уровню энергии $W_{п2}$ и направлен в сторону большего значения потенциальной энергии, т.е. в сторону уровня $W_{п3}$. Согласно уравнению (4.42) консервативная сила поля, действующая на материальную частицу в точке *М*, будет равна по величине градиенту потенциальной энергии и направлена в противоположную от него сторону.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

5.1. Симметрия в физике и законы сохранения

Симметрия (от греч. symmettria – соразмерность) законов отражает важные свойства природы. Законы сохранения выделяются среди всех физических законов своей всеобщностью, т.е. высшей степенью фундаментальности. Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени, поэтому они универсальны и всеобщи, поскольку пространство и время являются формами существования материи и не может быть материи вне пространства и времени. Своим происхождением законы сохранения обязаны свойствам симметрии природы.

Если законы, устанавливающие соотношение между величинами, характеризующими физическую систему, не меняются при определенных операциях, которым может быть подвергнута система, то эти законы обладают симметрией относительно данных преобразований. Эти свойства выражаются в неизменности (в инвариантности) всех законов, при некоторых преобразованиях, которые называются преобразованиями фундаментальной симметрии. Законы физики симметричны относительно перемещений в пространстве и во времени, *симметричны в том смысле*, что не изменяются при перемещениях координат или начала отсчета времени. Отметим, что речь идет о свойствах законов, а не о свойствах предметов, для которых понятие симметрия вошло в наше обыденное понимание.

Физические законы симметричны относительно следующих преобразований:

1) симметрия по отношению к переносу (сдвигу) системы, как целого в пространстве, рассматривается, как свойство *однородности*

пространства. Из этого следует, что все точки физического пространства эквивалентны. Эквивалентность означает, что явление, происшедшее в одной области пространства, повторится без изменений, если будет вызвано в других частях пространства. При этом необходимо в новом месте повторить всю совокупность факторов, которая была в первом месте;

2) симметрия по отношению к повороту системы, как целого в пространстве, или свойство *изотропности пространства*, есть физическая эквивалентность разных направлений в пространстве. Она (симметрия к повороту) означает, что работа установки после поворота в пространстве будет протекать точно так же, как и до поворота. При этом условия протекания эксперимента в обоих случаях должны быть одинаковыми. Работа телевизора не изменится, после того как его повернуть экраном в другую сторону;

3) симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, или свойство *однородности времени*, проявляется в физической эквивалентности разных его моментов. Разные моменты времени эквиваленты в том смысле, что любой физический эксперимент протекает одинаковым образом независимо от того, когда он начался. При этом условия протекания эксперимента в будущем должны быть такими же, как в прошлом;

4) симметрия по отношению к переходу от состояния покоя к состоянию равномерного и прямолинейного движения заключается в *эквивалентности всех инерциальных систем отсчета*. В любой системе все происходит независимо от того, покоится система или движется равномерно и прямолинейно.

Вывод, вытекающий из положений квантовой механики, гласит: *каждому преобразованию фундаментальной симметрии соответствует закон сохранения определенной физической величины*. Указанная связь законов сохранения с фундаментальной симметрией существует и в классической механике, поскольку классическая механика – предельный случай квантовой. Законы сохранения играют важную роль и за пределами механики. Сохраняющиеся физические величины являются фундаментальными, а их законы сохранения – фундаментальными законами физики.

5.2. Закон сохранения импульса

Однородность пространства, т.е. симметрия по отношению к преобразованию сдвига, приводит к закону сохранения импульса.

Выведем этот закон, не акцентируя вначале наше внимание на симметрию сдвига. Для этого рассмотрим изолированную систему, т.е. такую систему, на которую не действуют внешние силы. Уравнение движения системы запишем в виде

$$\vec{\boldsymbol{F}}=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} \quad . \tag{5.1}$$

Поскольку система изолирована $\vec{\boldsymbol{F}}=0$, то (5.1) запишем в виде $0=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}$.

Из чего следует

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\text{const}\,. \tag{5.2}$$

Таким образом, можно сформулировать закон сохранения импульса – *импульс изолированной системы остается постоянным.*

Рассмотрим теперь закон сохранения импульса с позиций однородности пространства. Ограничимся исследованием изолированной системы, состоящей из двух частиц массами m_1 и m_2, расположенными в точках с координатами x_1 и x_2 (рис.5.1).

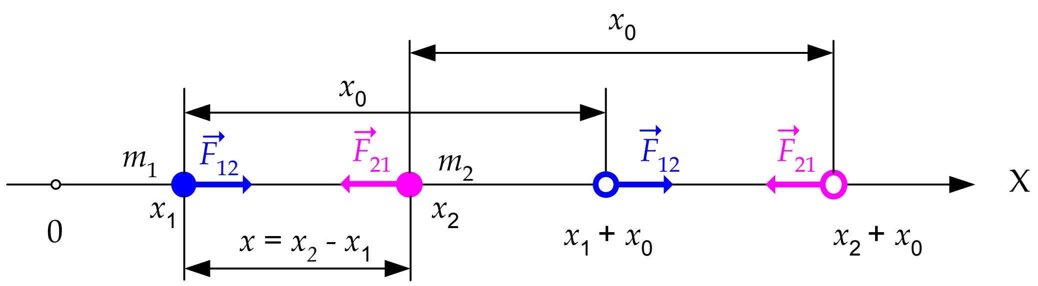


Рис. 5.1

В системе материальных частиц действуют внутренние силы $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$, которые являются результатом взаимодействий (гравитационного или кулоновского). Потенциальная энергия этих взаимодействий не изменяется при перемещении каждой частицы системы на одну и ту же величину x_0, т.е.

$$W(x_1,x_2)=W(x_1+x_0,\ x_2+x_0)\,. \tag{5.3}$$

Равенство (5.3) возможно только в том случае, когда потенциальная энергия взаимодействия зависит не от двух переменных x_1 и x_2 порознь, а только от их разности $x = x_2 - x_1$. Поэтому, если осуществить сдвиг всей системы в пространстве на величину x_0, то потенциальная энергия системы точек не изменится, поскольку расстояние между точками останется тем же, и в этом случае потенциальную энергию системы материальных частиц можно представить в виде

$$W(x_1,x_2)=W(x_2-x_1)=W(x). \tag{5.4}$$

Используя условие (5.4), выразим силы, действующие в системе на каждую частицу, применяя соотношение, связывающее силу и энергию

$$\vec{\boldsymbol{F}}=-(\frac{\partial W}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x+\frac{\partial W}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y+\frac{\partial W}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z). \tag{5.5}$$

В нашем случае действующие силы лежат на оси ОХ, поэтому уравнение (5.5), можно рассматривать только в проекциях на ось ОХ. Для материальной частицы m_1 имеем

$$(F_{12})_x=-\frac{\partial W(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{\partial W(x)}{\partial x_1}=-\frac{\partial W(x)}{\partial(x_2-x_1)}\cdot\frac{\partial(x_2-x_1)}{\partial x_1}=\frac{\partial W(x)}{\partial x}. \tag{5.6}$$

Для материальной частицы m_2 имеем

$$(F_{21})_x=-\frac{\partial W(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{\partial W(x)}{\partial x_2}=-\frac{\partial W(x)}{\partial(x_2-x_1)}\cdot\frac{\partial(x_2-x_1)}{\partial x_2}=-\frac{\partial W(x)}{\partial x}. \tag{5.7}$$

Из уравнений (5.6) и (5.7) следует, что для изолированной системы выполняется равенство $(F_{12})_x=-(F_{21})_x$. Мы получили не что иное, как третий закон Ньютона – две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки. Эта информация не в явном виде присутствовала при выводе закона (5.3).

Запишем теперь уравнение движения для каждой материальной частицы системы

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12}=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_1}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{21}=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_2}{dt}. \tag{5.8}$$

Складывая левые и правые части уравнений системы (5.8), получим

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12}+\vec{\boldsymbol{F}}_{21}=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_1}{dt}+\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_2}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{p}}_1+\vec{\boldsymbol{p}}_2)=\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} . \tag{5.9}$$

Поскольку $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}+\overline{F}_{21}=0$, то из уравнения (5.9) следует, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=0 \text{ или } \quad \vec{p}=(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=\text{const}. \qquad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что внутри системы материальных частиц изолированной системы, импульсы отдельных частиц могут изменяться, но при этом импульс всей системы в целом остается постоянным. Уравнение (5.10) – повторение полученного выше уравнения (5.2).

Раньше физическая величина импульс называлась *количество движения*. Само понятие количество движения было введено Декартом, им же был сформулирован принцип сохранения или неизменности количества движения тел Вселенной. Количество движения любого тела изолированной системы не может измениться без того, чтобы не изменить на такую же величину количество движения остальных тел системы.

Закон сохранения импульса выполняется также для системы, которая не является изолированной, но для которой сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Такая система материальных частиц называется замкнутой.

В некоторых случаях система является незамкнутой, но проекция внешней силы на некоторое направление в течение рассматриваемого промежутка времени может оказаться равной нулю. В этом случае проекция импульса на данное направление остается постоянной величиной. Так например, рассмотрим опыт, в котором тело брошено со скоростью v под углом α к горизонту (рис. 5.2). При малых высотах полета можно считать, что тело движется в однородном потенциальном поле силы тяжести mg, проекция которой на ось OX равна нулю во всех точках полетной траектории. Силой сопротивления воздушных масс можно пренебречь, и тогда проекция импульса тела на ось OX остается постоянной в течение всего времени его движения и рав-

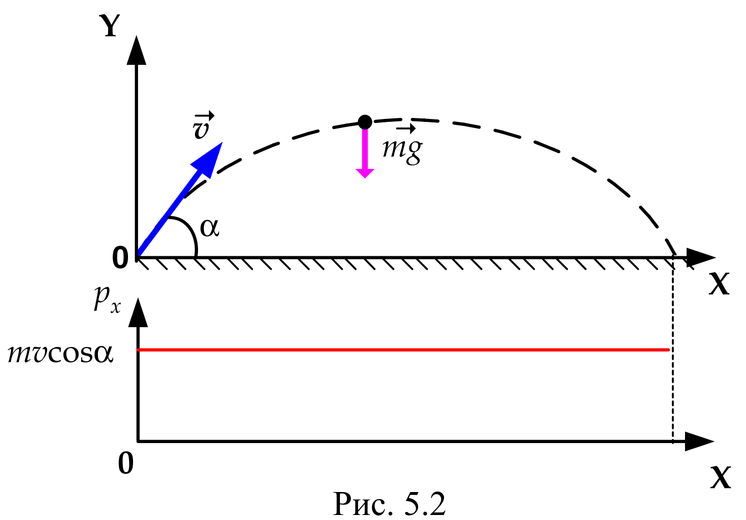


Рис. 5.2

ной $p_x = mv \cdot \cos\alpha = \text{const}$. При этом величина импульса движущегося тела и его проекция на ось OY меняются в течение всего времени полета.

5.3. Закон сохранения момента импульса

Подобно законам сохранения энергии и импульса, закон сохранения момента импульса относится к числу самых фундаментальных физических законов и выходит за рамки классической механики. Этот закон вытекает из свойств симметрии природы – ее изотропности. *Изотропность пространства, т.е. симметрия по отношению к преобразованию поворота системы в целом, приводит к закону сохранения момента импульса.*

Рассмотрим изолированную систему, т.е. такую систему, на которую не действуют внешние силы. Из изотропности пространства можно показать, что до поворота системы и после ее поворота как целого, силы взаимодействия между частицами этой системы (т.е. внутренние силы) остаются равными по величине, противоположными по направлению и направлены по линиям, соединяющим частицы. Следовательно, сумма моментов всех внутренних сил равна нулю. В этом случае из уравнения динамики вращательного движения $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, поскольку $\vec{M} = 0$, следует, что $0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$ и момент импульса системы

$$\vec{L} = \text{const}. \tag{5.11}$$

Таким образом, можно сформулировать закон сохранения момента импульса – *момент импульс изолированной системы остается постоянным.*

Закон сохранения момента импульса выполняется также для системы, которая не является изолированной, но для которой сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Такая система материальных частиц называется замкнутой.

В ряде случаев система является незамкнутой, но проекция моментов внешних сил на некоторое направление в течение рассматриваемого промежутка времени может оказаться равной нулю (M_z=0). В этом случае проекция момента импульса на данное направление ос-

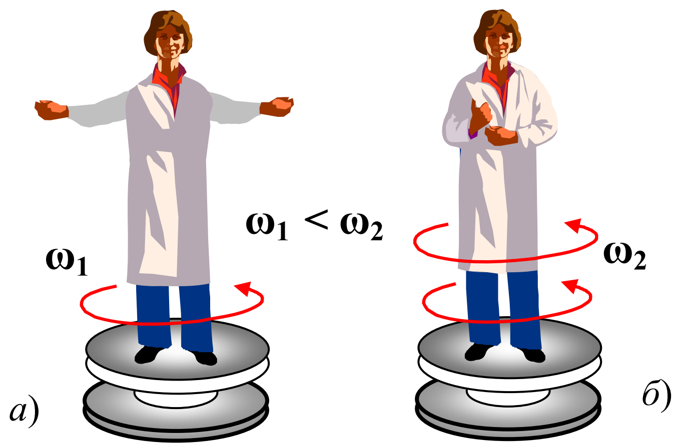


Рис. 5.3

тается постоянной величиной L_z= const . Например, в опыте со скамьей Жуковского, на которой стоит человек и вращается со скоростью ω_1 (рис.5.3, *а*). После смены человеком положения рук (рис.5.3, *б*) момент инерции человека уменьшился, и в соответствии с законом сохранения момента импульса, угловая скорость человека возрастет и станет ω_2 .

5.4. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии утверждает, что существует некоторая величина – энергия, которая не меняется в изолированной системе ни при каких превращениях, происходящих в ней. Это не описание механизмов каких-то конкретных явлений, происходящих в системе, а утверждение того, что существует некоторое числовое значение, свойственное системе, которое не изменяется ни при каких обстоятельствах.

Аналитическую форму закона сохранения энергии для изолированной механической системы, в которой действуют только консервативные силы, можно представить в следующем виде:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const} \;\; \text{или} \;\; \Delta W = 0, \qquad (5.12)$$

где W – полная механическая энергия системы, ΔW – изменение полной механической энергии; $W_{\text{к}}$ – кинетическая энергия системы; $W_{\text{п}}$ – потенциальная энергия системы.

Для изолированной системы, в которой, наряду с консервативными силами, действуют и диссипативные силы, полная механическая энергия будет уменьшаться, и это уменьшение обусловлено преобразованием части механической энергии в иные виды энергии, например, в теплоту Q в результате работы диссипативных сил $A_{\text{д}}$,

$$W_1 = W_2 + Q, \;\; \text{или} \;\; \Delta W < 0. \qquad (5.13)$$

Закон сохранения энергии – это один из наиболее фундаментальных законов природы. Исключений из этого закона не существует. В истории физики были ситуации, при которых, казалось бы, «выявлялось нарушение» закона. Например, в экспериментах по β-распаду измерения показали, что энергия частиц, участвующих в превращении атомных ядер, не сохраняется. В 1930 г. швейцарский физик Вольфганг Паули высказал гипотезу, согласно которой при β-распаде наряду с электроном рождается новая электрически нейтральная частица с большой проникающей способностью, поэтому ее трудно обнаружить в эксперименте. В 1932 г. итальянский ученый Энрико Ферми предложил эту частицу назвать нейтрино. Впоследствии (1953 – 1956 гг.) прямыми опытами было доказано существование такой частицы.

6. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1. Основы специальной теории относительности. Роль скорости света в становлении теории относительности. Принцип относительности

Основы специальной теории относительности (частной теории относительности) были сформулированы А.Эйнштейном*, а также содержатся в трудах Х.А. Лоренца и А. Пуанкаре. В специальной теории относительности (СТО) рассматриваются пространственно-временные соотношения, законы кинематики и динамики движений с околосветовыми (релятивистскими) скоростями. (Релятивистский от лат. relativus – относительный).

В отличие от классической механики, где явления можно наблюдать, даже, как говорится, «пощупать», в рассмотрении специальной теории относительности и вытекающих из нее следствий возникают психологические барьеры, поскольку воспроизвести условия, при которых движение осуществляется с релятивистской скоростью, невозможно или крайне сложно и при этом исчезает эффект нагляд-

* В 1905 г. в журнале «Annalen der Physik» (т.17) Эйнштейн опубликовал статью «К электродинамике движущихся сред», в которой содержатся основы специальной теории относительности.

ности. Кроме того, при движении с релятивистской скоростью физические величины, будучи *инвариантами* в задачах классической нерелятивистской механики, перестают быть таковыми. Например, зависимость массы тела от скорости его движения привела к радикальному изменению в физических воззрениях и отходу от привычных представлений, от «явного для нас» ко все более «неявному для нас», новому и непривычному.

Роль скорости света в становлении теории относительности

Попытки познать свойства света предпринимались на разных этапах развития цивилизации и, в частности, трактовались как распространение с некоторой скоростью волны или потока частиц от источника в окружающее пространство. Определение скорости распространения света было важной задачей познания свойств природы и впервые скорость света была определена датским ученым О.Ремером в 1676 г. в наблюдениях за движением спутника Юпитера и оценка этой величины соответствовала $2{,}143 \cdot 10^8$ м/с.

Распространение света как волны привело к необходимости введения некоторой всепроникающей воображаемой среды – эфира, заполняющего все пространство. Такой подход был обусловлен аналогией со звуковыми волнами, для распространения которых необходима среда. Поскольку скорость света относительно неподвижного эфира постоянна, то относительно тел, движущихся в эфире, она должна быть переменной и зависеть от скорости движения тела. Попытки обнаружить эфир путем определения *абсолютной скорости* Земли относительно эфира были предприняты А. Майкельсоном и Э. Морли. Результаты были опубликованы ими в статье «Об относительном движении Земли и светоносного эфира» в 1887 г. Идея опыта состояла в сравнении прохождения светом двух путей, один из которых совпадал с направлением движения Земли в эфире, а другой перпендикулярен ему. Для осуществления такого эксперимента Майкельсон сконструировал интерферометр, получивший впоследствии его имя. Эксперименты Майкельсона – Морли и, проведенные впоследствии другими учеными, показали, что скорость распространения света во всех направлениях одинакова и не зависит от движения тела, что противоречило преобразованиям Галилея. Эти и другие исследования показали, что гипотеза о существовании эфира является несостоятельной.

Работы Дж. Максвелла в области электродинамики показали, что для распространения электромагнитной волны не нужна никакая среда. Из уравнений Максвелла следовало, что электромагнитные волны в вакууме распространяются со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}$. Причем, уравнения Максвелла не были инвариантами преобразований Галилея. Затем было показано, что свет – это электромагнитная волна.

Таким образом, результаты исследований различных ученых привели А.Эйнштейна к пониманию, что скорость света в вакууме – это фундаментальная характеристика.

В основе специальной теории относительности лежат два основных принципа, принимаемых в качестве исходных постулатов, – *принцип относительности и постулат постоянства скорости света*.

Принцип относительности

Принцип относительности является обобщением механического *принципа относительности Галилея* на любые физические процессы. Этот постулат, называемый принципом относительности, или релятивистским принципом относительности Эйнштейна, гласит: *в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково*. Иначе говоря, принцип относительности утверждает, что физические законы, уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, на основе любых физических экспериментов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно (относительно какой-либо инерциальной системы отсчета). Основываясь на физических экспериментах, нельзя выбрать из множества инерциальных систем отсчета главную (абсолютную) систему отсчета, обладающую какими-либо качественными отличиями от других инерциальных систем отсчета. Областью применения принципа относительности является вся физика, включая и квантовую физику. Принцип относительности – закон такой же абсолютной значимости, как и законы сохранения.

Постулат постоянства скорости света

Постулат постоянства скорости света выражает принцип инвариантности скорости света*: скорость света в вакууме не зави-*

сит от движения источника света. Скорость света одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета и является одной из важнейших физических постоянных. Опыты показывают, что скорость света в вакууме – предельная скорость передачи информации в природе. Наблюдения за природными явлениями и специально поставленные эксперименты показывают, что не существует в природе объектов, частиц, тел, скорость которых превышала бы скорость света в вакууме.

6.2. Преобразования Лоренца

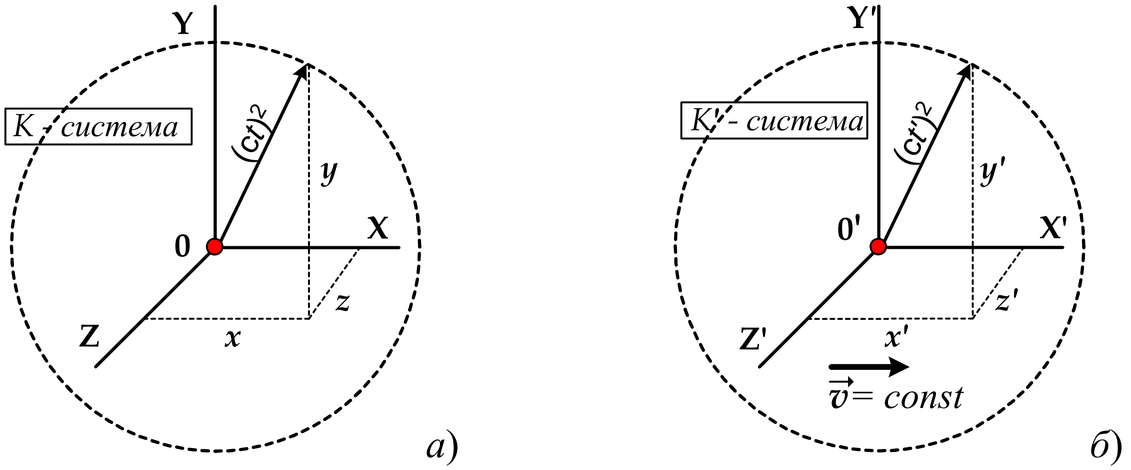
Факты, подтверждающие ограниченность применения преобразований Галилея

Постоянство скорости света находится в противоречии с формулой *сложения скоростей*, вытекающей из преобразований Галилея. На основании этого можно сказать, что преобразования Галилея противоречат экспериментальному факту постоянства скорости света. Следовательно, можно предположить, что преобразования Галилея имеют ограниченную область применения.

Уравнения Максвелла сводят воедино электричество, магнетизм, свет. Если уравнения Максвелла переписать для другой инерциальной системы отсчета, используя преобразования координат Галилея, то их вид изменится. В данном случае можно высказать гипотезу о том, что уравнения Максвелла не подчиняются принципу относительности Галилея (см. п.2.8). Были сделаны попытки видоизменить эти уравнения и подогнать к такому виду, чтобы они удовлетворяли принципу относительности в галилеевой форме. От этого в уравнениях электродинамики появлялись новые члены, предсказывающие неизвестные электрические явления, которые экспериментально не подтверждались. Постепенно от попыток подогнать уравнения Максвелла пришлось отказаться, так как становилось ясно, что они верны, а причина несоответствия в чем-то другом. Между тем, Х.Лоренц заметил, что если изменить преобразования Галилея, представив их в другой форме, то вид уравнений Максвелла не меняется при их записи в разных инерциальных системах отсчета. Таким образом, стало очевидным, что необходимо найти такие преобразования координат и времени, которые соответствовали бы всем известным науке случаям, и такую задачу решил Лоренц.

Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' (рис.6.1). Система K' движется со скоростью v относительно системы K вдоль совпадающих по направлению осей 0X и 0X′. Будем считать, что в момент времени $t = t' = 0$ начала координат совпадали, т.е находились в одной точке пространства (для этого мысленно совместим фрагменты *а*) и *б*) рис. 6.1 так, чтобы точки 0 и 0′ совместились).



а) *б*)

Рис. 6.1

Допустим, что в момент времени $t = t' = 0$ в точке 0 (в точке 0′) произошла световая вспышка. Точки пространства, до которых дойдет свет в момент времени $t > 0$, находятся на радиусе световой сферы ct и эти точки связаны с соответствующими проекциями координат системы K соотношением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad . \tag{6.1}$$

Точки пространства, до которых дойдет свет в момент времени t', находятся на радиусе световой сферы ct' и эти точки связаны с соответствующими проекциями координат системы K' соотношением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad . \tag{6.2}$$

Уравнения (6.1) и (6.2) следуют из постулата Эйнштейна постоянства скорости света.

Поскольку пространство однородно и изотропно, а время однородно, то между координатами и временем каждой ИСО должна иметь место линейная связь. При этом условии между координатами системы K' и K в момент времени t возможна такая связь

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{6.3}$$

где γ – некоторый коэффициент, который при v << с должен равняться единице (согласно преобразованиям Галилея).

Другие координаты систем связаны соотношением

$$y' = y; \qquad z' = z\,. \tag{6.4}$$

Время t' в системе K' будет линейно связано с координатами и временем системы K и эту связь можно представить в виде

$$t' = at + bx\;, \tag{6.5}$$

где a и b – некоторые коэффициенты, которые при v << с должны удовлетворять условию: $a \to 1$, $b \to 0$ (согласно преобразованиям Галилея).

Подставим (6.3), (6.4) и (6.5) в (6.2) и получим уравнение

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{c}^2(at + bx)^2\,. \tag{6.6}$$

Раскроем скобки в (6.6) и преобразуем полученное выражение, выделяя отдельно координатные и временные слагаемые

$$(\gamma^2 - \mathrm{c}^2b^2)x^2 + y^2 + z^2 = (\mathrm{c}^2a^2 - \gamma^2v^2)t^2 + (\gamma^2v + \mathrm{c}^2ab)2xt\,. \tag{6.7}$$

В уравнении (6.7) представлена связь между координатами и временем системы K, и в этом уравнении коэффициенты γ, a и b должны быть такими, чтобы уравнение (6.7) соответствовало уравнению (6.1). Поэтому члены уравнения (6.7) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\gamma^2 - \mathrm{c}^2b^2 = 1\;, \tag{6.8}$$

$$\mathrm{c}^2a^2 - \gamma^2v^2 = \mathrm{c}^2\;, \tag{6.9}$$

$$\gamma^2v + \mathrm{c}^2ab = 0\,. \tag{6.10}$$

Выразим из (6.10) $b = -\dfrac{\gamma^2v}{\mathrm{c}^2a}$ и подставим в (6.8):

$$\gamma^2 - \mathrm{c}^2\cdot\frac{\gamma^4v^2}{\mathrm{c}^4a^2} = 1 \quad \text{или} \quad \gamma^2\mathrm{c}^2a^2 - \gamma^4v^2 = \mathrm{c}^2a^2 \tag{6.11}$$

Выразим из (6.9) $\gamma^2v^2 = \mathrm{c}^2a^2 - \mathrm{c}^2$ и подставим в (6.11):

$$\gamma^2\mathrm{c}^2a^2 - \gamma^2c^2a^2 + \gamma^2\mathrm{c}^2 = \mathrm{c}^2a^2 \tag{6.12}$$

Из уравнения (6.12) следует, что

$$\gamma^2 = a^2\;\;. \tag{6.13}$$

Подставив (6.13) в (6.9), получим

$$\gamma^2 = \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^2 - v^2} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\;. \tag{6.14}$$

С учетом (6.13)

$$b = -\frac{\gamma v}{c^2} \ . \tag{6.15}$$

Полученные выражения для коэффициентов γ, a и b, после подстановки их значений в (6.3) и (6.5), позволяют записать прямые преобразования Лоренца:

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}; \qquad \boxed{y' = y; \qquad z' = z}; \qquad \boxed{t' = \frac{t - \frac{x}{c^2}v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \ . \tag{6.16}$$

Уравнения (6.16) можно разрешить относительно параметров K-системы, для этого из первого уравнения (6.16) выразим координату x через параметры K'-системы

$$x = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \,, \tag{6.17}$$

а из четвертого уравнения (6.16) выразим время t через параметры K'-системы

$$t = t' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{xv}{c^2} \ . \tag{6.18}$$

После подстановки (6.18) в (6.17) и (6.17) в (6.18) и учитывая (6.4), получим обратные преобразования Лоренца

$$\boxed{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}; \qquad \boxed{y = y'; \qquad z = z'}; \qquad \boxed{t = \frac{t' + \frac{x'}{c^2}v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \ . \tag{6.19}$$

Преобразования (6.16) и (6.19) были получены Лоренцем в теории электромагнитных явлений, и они имеют универсальный характер. Эти преобразования справедливы для любых скоростей движения. Из преобразований Лоренца следует, что скорость движения материальных объектов не может равняться или превышать скорость света. При подстановке v = с знаменатели формул (6.16) и (6.19) обращаются в ноль, а при подстановке v > с подкоренные выражения преобразований становятся отрицательными.

При малых скоростях движения v<<с коэффициент $\gamma \approx 1$ и в числителе четвертой формулы системы уравнений (6.16) и (6.19) слагаемое с x' и x являются бесконечно малыми величинами. Поэтому преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, которые описывают связь между картинами различных наблюдателей, известную из повседневного опыта: размеры объектов, их масса и длительность процессов одинаковы для всех наблюдателей, находящихся в инерциальных системах отсчета.

Универсальность преобразований Лоренца подтверждена их согласованием с многочисленными экспериментальными исследованиями, в которых объяснение полученных результатов и наблюдаемых эффектов строится на основе именно этих преобразований.

6.3. Следствия из преобразований Лоренца. Относительная одновременность, замедление времени и сокращение длины

Анализ преобразований Лоренца позволяет получить ряд важных следствий, вытекающих из связи пространства и времени[*]. Обозначим общий методологический подход к выводу некоторых следствий преобразований Лоренца.

Поскольку преобразования Лоренца линейные, следовательно, уравнения в приращениях переменных величин, входящих в преобразования, также справедливы. Запишем преобразования Лоренца в приращениях переменных величин для прямых преобразований

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \quad \Delta y' = \Delta y\ ; \quad \Delta z' = \Delta z\ ; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\Delta x}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.20}$$

и для обратных преобразований

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta y = \Delta y'\ ; \quad \Delta z = \Delta z'\ ; \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\Delta x'}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.21}$$

---

[*] Об экспериментах, подтверждающих эти следствия, см.: Механика: учеб. для студентов вузов / В.А. Алешкевич [и др.]. – М. : Академия, 2004. – С. 132 – 191.

Будем считать, что в инерциальных системах K и K' (рис. 6.2 – 6.4) находятся по наблюдателю, которые измеряют различные физические характеристики предметов, протекающих явлений или длительность событий с помощью инструментов, которыми они располагают. Не вдаваясь в методологию измерений физических величин, будем считать, что оба исследователя могут выполнить измерения с предельно возможной точностью, используя самые совершенные методы и приборы.

Относительная одновременность

Рассмотрим явление, в котором два события произошли одновременно в K'- системе в точках, находящихся на расстоянии $\Delta x'$. Например, в точках с координатами x'_1 и x'_2 одновременно вспыхнули электрические лампочки (см. рис. 6.2).

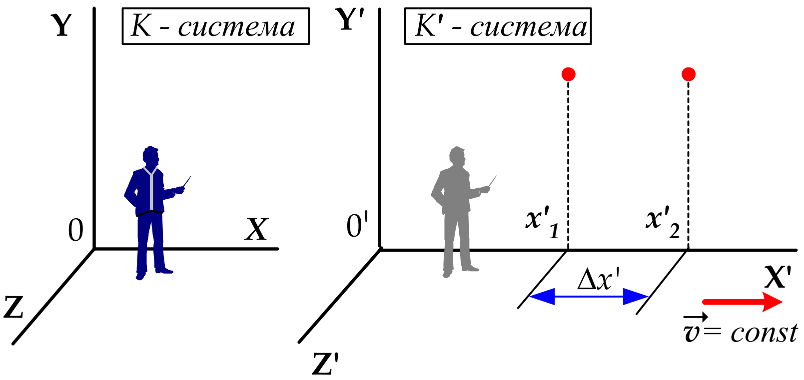


Рис. 6.2

Для этого явления сдвиг по времени начала протекания обоих событий в K'-системе равен нулю, т.е. $\Delta t' = 0$, поскольку лампочки вспыхнули одновременно. Рассмотрим, как связано начало обоих событий в K-системе. Для K-системы в четвертое уравнение (6.21) подставим $\Delta t' = 0$

$$\Delta t = \frac{\frac{\Delta x'}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.22}$$

Из (6.22) следует, что события, одновременные в разных точках пространства K'-системы, будут не одновременными в K-системе, т.е.

$\Delta t \neq 0$. Аналогично события одновременные в K-системе, будут не одновременными в K'-системе. Таким образом, *одновременность относительна* для разных инерциальных систем отсчета.

Замедление времени

Рассмотрим два события, которые произошли в точке М (см. рис. 6.3) K'-системы последовательно в моменты времени t'_1 и t'_2. Например, t'_1 соответствует моменту времени, когда в точке М включилась электрическая лампочка, t'_2 – когда лампочка выключилась. Моменты времени включения и выключения можно измерить по часам K'- системы, и эти часы измеряют *собственное время* в точке М. Координата точки М на оси $0'X'$ соответствует x'_1. Наблюдатель по часам этой системы измерил длительность интервала времени между началами двух событий $\tau_o = \Delta t' = t'_2 - t'_1$.

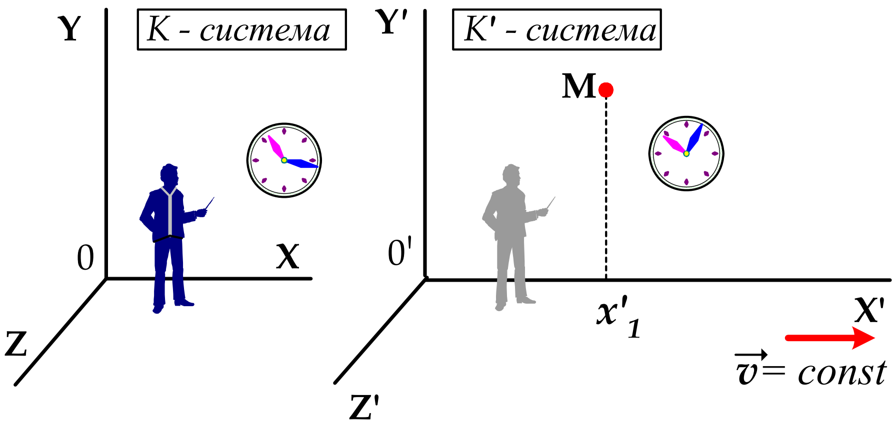


Рис. 6.3

Наблюдатель, находящийся в K-системе, тоже увидел эти события и по часам, расположенным в своей системе, измерил длительность интервала времени между этими событиями $\tau = \Delta t = t_2 - t_1$. Сравним интервалы времени, измеренные разными наблюдателями, воспользовавшись преобразованиями Лоренца для приращений переменных. Для этого в четвертое уравнение (6.21) подставим $\Delta x' = x'_1 - x'_1 = 0$, поскольку в K'- системе произошли оба события в точке М, неподвижной в этой системе

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{\tau_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{6.23}$$

Из (6.23) следует, что интервал времени τ_o в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз меньше интервала времени τ, как будто в K-системе ход часов медленнее.

Отметим, что обнаруженные эффекты, как следствия преобразований Лоренца, получили экспериментальное подтверждение в различных опытах и в частности в опытах на ускорителях элементарных частиц. Характерное для СТО явление замедления времени наблюдается при распадах нестабильных элементарных частиц космических лучей или получаемых на ускорителях высоких энергий. Такие частицы движутся со скоростями близкими к скорости света и с точки зрения наблюдателя на Земле их время жизни от рождения до распада, а, следовательно, и расстояния, пролетаемые этими частицами, увеличиваются в тысячи и десятки тысяч раз.

Сокращение длины движущихся объектов

Рассмотрим объект в виде рейки, который расположен в системе K' и движется вместе с этой системой с постоянной скоростью v относительно системы координат K (см. рис.6.4). Наблюдатель, находящийся в системе K', измеряя координаты x'_1 левого и x'_2 правого краев рейки, определит длину рейки как $l_o = x'_2 - x'_1 = \Delta x'$. Поскольку в этой системе рейка относительно наблюдателя неподвижна, в принятой терминологии будем считать, что наблюдатель измерил *собственную длину* рейки.

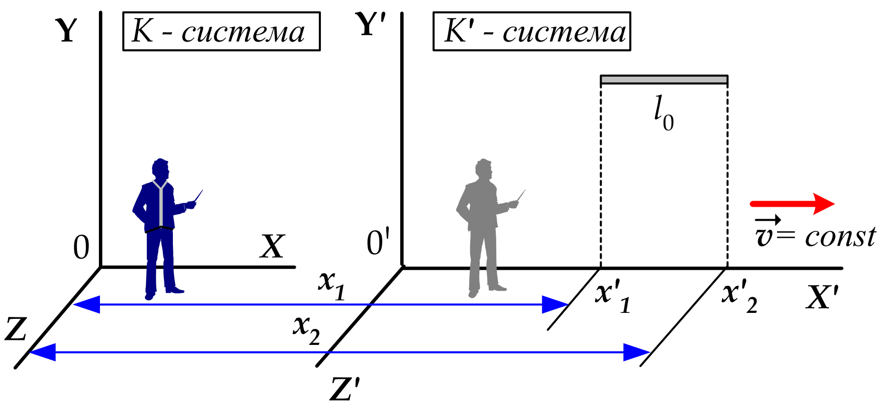


Рис. 6.4

Наблюдателю в системе *K*, относительно которого рейка движется со скоростью v, необходимо измерить <u>одновременно</u> координаты x_1 и x_2, чтобы определить длину рейки $l = x_2 - x_1 = \Delta x$. На основе этих данных можно получить соотношение между l и l_o, воспользовавшись первым уравнением в (6.20) и имея в виду, что $\Delta t=0$ (координаты x_1 и x_2 измерены наблюдателем <u>одновременно</u>):

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{6.24}$$

Заменяя в (6.24) приращения координат на соответствующие длины, получим

$$l = l_o \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad . \tag{6.25}$$

Из (6.25) следует, что длина рейки в направлении, совпадающем с направлением скорости движения рейки (продольный размер тела), для наблюдателя, относительно которого рейка движется, будет в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз меньше, чем собственная длина рейки. Или, иными словами, размеры подвижных тел сокращаются в направлении движения тела. Отметим, что линейные размеры тела в направлении, перпендикулярном скорости движения, совпадают с соответствующими размерами покоящегося тела.

6.4. Преобразование скоростей (сложение скоростей)

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета *K* и *K′* (рис.6.5), в которых находятся наблюдатели, определяющие скорость частицы, расположенной в точке М. В *K′*-системе частица движется со скоростью $\vec{u}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$, где r' – радиус-вектор точки М в *K′*-системе. Проекции этой скорости на оси координат *K′*-системы соответственно:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \; ; \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'} ; \qquad u'_z = \frac{dz'}{dt'} . \tag{6.26}$$

Какая скорость этой частицы будет в *K*-системе?

Из уравнений кинематики её следует определить так:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \tag{6.27}$$

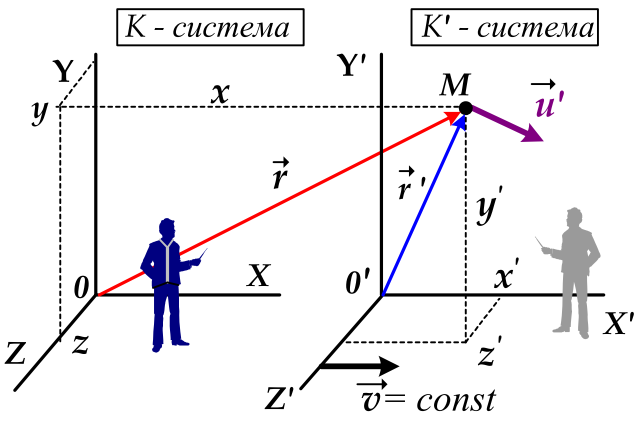


Рис. 6.5

Проекции скорости $\vec{u}$ на оси координат K-системы соответственно:

$$u_x = \frac{dx}{dt}\ ; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (6.28)$$

Из преобразований Лоренца следует связь между дифференциалами переменных величин различных систем отсчета (см. формулы 6.20 и 6.21).

Для дифференциалов приращений прямых преобразований Лоренца

$$dx' = \gamma(dx - v \cdot dt)\ ; \quad dy' = dy\ ; \quad dz' = dz\ ; \quad dt' = \gamma(dt - \frac{dx}{c^2}v). \qquad (6.29)$$

Для дифференциалов приращений обратных преобразований Лоренца

$$dx = \gamma(dx' + v \cdot dt')\ ; \quad dy = dy'\ ; \quad dz = dz'\ ; \quad dt = \gamma(dt' + \frac{dx'}{c^2}v), \qquad (6.30)$$

где коэффициент $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Запишем формулы для проекций скорости точки М на оси координат K'-системы, выраженные через соответствующие проекции скорости точки М в K-системе. Для этого подставим уравнения системы (6.29) в уравнения системы (6.26):

1. Для проекции скорости на ось 0′X′ имеем

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{dt(\frac{dx}{dt} - v)}{dt(1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt})} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \qquad (6.31)$$

2. Для проекций скорости на оси 0′Y′ и 0′Z′ имеем

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt})} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}; \qquad (6.32)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt})} = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}. \qquad (6.33)$$

Для вывода формул, связывающих проекции скорости точки М системы K с проекциями скорости точки М в системе K', воспользуемся методом, показанным выше, только уравнения системы (6.30) подставим в уравнения системы (6.28) и в итоге получим.

3. Для проекции скорости точки М на ось 0X имеем

$$u_x == \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad . \qquad (6.34)$$

4. Для проекций скорости точки М на оси 0Y и 0Z имеем

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v\cdot u'_x}{c^2})}; \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v\cdot u'_x}{c^2})}. \qquad (6.35)$$

Информация о проекции скорости точки М в K-системе, позволяет найти модуль скорости этой точки

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \ . \qquad (6.36)$$

Отметим, что полученные соотношения дают преобразования скоростей, которые принципиально отличаются от сложения скоростей при галилеевом преобразовании. При скорости $v \ll$ с формулы (6.31 – 6.35) переходят в соответствующие формулы преобразования скоростей Ньютоновой механики, а именно:

$$u_x = u'_x + v; \qquad u'_x = u_x - v; \qquad u_y = u'_y; \qquad u_z = u'_z.$$

Отметим, что классическое сложение скоростей, основанное на преобразованиях Галилея, не выполняется для скорости света. Так, например, если в K'- системе скорость u'_x = с, то в K-системе эта скорость по (6.34) также равна c:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{c+v}{\frac{c^2 + c \cdot v}{c^2}} = \frac{c(c+v)}{c+v} = c, \qquad (6.37)$$

что и следует из основных положений теории относительности.

6.5. Релятивистский импульс

Если исходить из определения импульса, данного Ньютоном:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (6.38)$$

где m – масса частицы, и полагать, что она постоянная величина, то можно показать, что при релятивистских скоростях движения группы частиц закон сохранения импульса этой группы не выполняется при рассмотрении этой группы частиц из разных ИСО. Следовательно, при релятивистских скоростях движения импульс должен вычисляться иначе, чем в Ньютоновой механике.

При определении импульса частицы массой m (это масса неподвижной частицы или масса покоя), движущейся со скоростью $\vec{v}$, по формуле

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (6.39)$$

закон сохранения импульса выполняется при переходе из одной ИСО в другую. Множитель, стоящий в формуле (6.39) перед скоростью, можно отождествлять с массой частицы, которая движется относительно наблюдателя со скоростью v и многие физики называют эту массу релятивистской:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (6.40)$$

Поправка к массе покоя в формулах (6.39) и (6.40) становится заметной при скоростях движения, близких к скорости света. В таблице представлено отношение релятивисткой массы к массе покоя частицы в зависимости от скорости ее движения

v/c	0,1	0,5	0,8	0,9	0,96	0,99	0,999	0,9999	0,99999
m_r/m	1,005	1,155	1,667	2,29	3,57	7,089	22,36	70,88	223,606

Как видно из таблицы, в широком интервале скоростей v, меньших скорости света, это отношение незначительно отличается от единицы. Лишь при скоростях, сравнимых со скоростью света, заметно проявляется релятивистское возрастание массы тела.

Опыты на ускорителях, в которых скорость частицы приближалась по величине к скорости света, подтвердили зависимость релятивистской массы частицы от скорости ее движения.

Обсудим, какие эффекты можно наблюдать, если на частицу действует постоянная сила в течение длительного времени? В механике Ньютона скорость частицы будет расти, достигая сколь угодно больших значений, поскольку согласно $a=F/m$ частица движется с постоянным ускорением. С позиций релятивистской механики такой эффект невозможен. Через некоторое время ускорение частицы практически исчезнет (см. в таблице последние три колонки), но импульс будет продолжать расти, т.к. будет возрастать масса частицы.

6.6. Взаимосвязь массы и энергии

Для увеличения скорости частицы, необходимо, совершая работу, сообщить ей дополнительно некоторую энергию, т.е. повысить энергию частицы. А из общего выражения для массы частицы (6.40), движущейся со скоростью v, следует, что увеличение скорости приводит к возрастанию массы частицы. Поэтому можно сделать вывод о закономерной связи энергии и массы. Такая связь становится весьма заметной при движении частицы с релятивистской скоростью. Это можно обосновать не только логически, но и аналитически, воспользовавшись релятивистским уравнением движения частицы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\vec{F}. \qquad (6.41)$$

Умножив это уравнение на вектор скорости частицы $\vec{v}$, и дифференцируя его левую часть, получим соотношение, связывающее полную энергию частицы и ее массу:

$$W=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_r c^2. \qquad (6.42)$$

Эта формула получена Эйнштейном и является фундаментальным законом физики.

Из соотношения (6,42) следует, что если скорость частицы равна нулю, то полная *энергия покоя* такой частицы

$$W=mc^2. \tag{6.43}$$

Полная энергия частицы равна сумме ее кинетической энергии $W_к$ и энергии покоя. Из этого следует, что кинетическая энергия частицы

$$W_к=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc^2=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \tag{6.44}$$

При скоростях частицы, незначительно отличающихся от скорости света, у множителя в скобках (6.44) $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}>>1$, поэтому для таких частиц их кинетическая энергия практически равна полной энергии.

6.7. Соотношение между полной энергией частицы и ее импульсом

Воспользуемся установленными ранее соотношениями между энергией и массой частицы, а также между импульсом и массой частицы

$$\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$W=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{6.45}$$

Поделим соответственно левые и правые части уравнений системы (6.45)

$$\frac{p}{W}=\frac{v}{c^2}. \tag{6.46}$$

Из этого уравнения выразим скорость $v=\frac{pc^2}{W}$ и подставим во второе уравнение системы (6.45):

$$W^2=\frac{m^2c^4c^2}{c^2-v^2}=\frac{m^2c^4c^2W^2}{c^2(W^2-p^2c^2)}. \tag{6.47}$$

После преобразования (6.47) получим

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \qquad (6.48)$$

Формулой (6.48) устанавливается связь между характеристиками частицы: полной энергией W, импульсом p и массой покоя m.

6.8. Пространство и время в специальной теории относительности. Инварианты преобразования

Преобразования Лоренца и следствия, вытекающие из них, показывают, что время неотделимо от пространства и наоборот. Все физические явления все процессы в мире происходят в пространстве и времени. Пространство и время представляет единую субстанцию, которую называют пространственно-временной континуум. Пространство выражает порядок существования отдельных объектов, а время – порядок смены явлений. Свойства пространства и времени делят на метрические – это протяженность и длительность, а также на топологические – это размерность, непрерывность и связанность пространства со временем, направление времени.

Из преобразований Лоренца следует, что координаты и время относительны. Но имеются такие физические величины, которые не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Эти величины являются инвариантами. Существование инвариантных величин имеет принципиальное значение. Прежде всего, заметим: основы теории относительности построены на том, что *скорость света в вакууме – инвариант*.

Другой инвариант – интервал события s. Квадрат интервала события в K-системе определяется следующим образом:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t^2 - r^2 . \qquad (6.49)$$

Величины ct, x, y, z можно рассматривать как четыре координаты события в четырехмерном пространстве-времени Минковского.

Запишем формулу для интервала события в параметрах K'-системы. Координаты y и z не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Поэтому уравнение (6.49) в обозначениях двух систем запишем в виде

$$s'^2 = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2). \qquad (6.50)$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца и преобразуем (6.50) через параметры системы K

$$s'^2 = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = c^2\left[\gamma(t - \frac{xv}{c^2}\right]^2 - [\gamma(x - vt)]^2 - y^2 - z^2. \quad (6.51)$$

После раскрытия скобок уравнения (6.51) и некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2\gamma^2t^2 - 2\gamma^2 tvx + \frac{\gamma^2x^2v^2}{c^2} - \gamma^2x^2 + 2\gamma^2 tvx - \gamma^2v^2t^2 - y^2 - z^2 = \\ &= c^2t^2\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - x^2\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

С учетом того, что $\gamma^2 = \dfrac{1}{(1 - \dfrac{v^2}{c^2})}$, уравнение (6.52) преобразуется к виду

$$s'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2\ . \quad (6.53)$$

Из (6.53) следует, что, *интервал,* определяемый уравнениями (6.49) и (6.50), *является инвариантом* преобразований Лоренца, а интервал между двумя последовательными событиями $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ также инвариант.

7. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

7.1. Общие положения газовой гидродинамики

В практике часто встречаются явления, в которых форма тел меняется в процессе их движения. Формоизменение тел под действием различных факторов называется течением. Частицы газа или жидкости меняют свое местоположение при различных воздействиях на них. Следовательно, можно рассматривать газ и жидкость как своеобразные тела, движение которых описывается законами динамики. И хотя имеется принципиальное различие между газом и жидкостью (газ не имеет определенной формы и фиксированного объема, а жидкость может менять форму, но практически сохраняет неизменным свой объем) некоторые законы динамики жидкости и газа в основном одинаковы, поэтому в курсе общей физики рассматривают единую науку газовую гидродинамику. В дальнейшем изложении газовой гидродинамики мы будем употреблять преимущественно термины «жидкость» и «гидродинамика», если нет необходимости специально выделить движущееся вещество.

Понятие сплошной среды

Вещество состоит из атомов и молекул, которых много в любом существенном для нас объеме. Например, в одном кубическом миллиметре воды при нормальных условиях содержится около 10^{20} молекул H_2O. В таком же объеме водяного пара содержится около 10^{17} молекул. Жидкости и газы, если не вдаваться в молекулярную структуру вещества, можно рассматривать как непрерывные среды, применяя к описанию их движения характерные методы. В каждом месте пространства, занимаемого такой средой, можно прибором измерить параметры состояния температуру, плотность, давление. Такую среду можно рассматривать как сплошную, и измеренные или вычисленные параметры состояния приписать каждой точке среды. Среду, заполняемую молекулами, расстояние между которыми много больше размеров прибора, измеряющего параметр состояния, нельзя рассматривать сплошной.

Описание течения сплошной среды сводится к рассмотрению поведения частицы жидкости. Частица жидкости или газа – это физический образ, который представляется как бесконечно малая масса жидкости, занимающая бесконечно малый объем, и поэтому частица жидкости может рассматриваться как точка с конечным числом молекул, обладающая всеми физическими свойствами жидкости.

Вязкость среды

Трудность изучения законов движения жидкости и газа обусловливается сложностью учета сил трения, которые оказывают существенное влияние на её движение. При движении жидкости между отдельными частицами движущейся среды существуют силы внутреннего трения, или по-другому, силы вязкости. Сила внутреннего трения сдвигу одного слоя движущейся среды относительно другого слоя пропорциональна градиенту скорости в направлении нормали к слоям (на рис.7.1 в направлении оси Z)

$$F \sim \eta \frac{dv}{dz} \quad . \tag{7.1}$$

Коэффициент пропорциональности η в формуле (7.1) называется коэффициентом динамической вязкости, имеющий размерность кг/м·с. По предложению Л. Эйлера, удобнее начинать рассмотрение движения идеальной жидкости, т.е. лишенной вязкости, внося затем в найденные уравнения поправки, учитывающие силы трения реальных жидкостей.

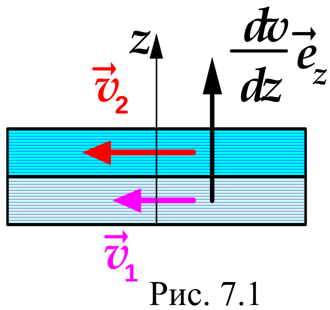


Рис. 7.1

Сжимаемость среды

При разных скоростях течения жидкости свойства среды оказываются разными. Это можно проверить в простом эксперименте: проведите медленно рукой по воде и вы почувствуете обтекание струйками, а если ударить по поверхности воды ладонью (только не очень сильно, иначе можно получить травму), то почувствуете, что вода ведет себя как твердое тело. В зависимости от скорости движения среды или тела в среде проявляются процессы, вызывающие изменение её плотности, т.е. наблюдается эффект, называемый сжимаемостью. Осмыслим этот эффект и введем критерий сжимаемости.

Рассмотрим тело длины L (рис. 7.2), на левую грань которого оказано воздействие, в результате чего эта сторона тела пришла в движение со скоростью v. В течение некоторого времени правая часть тела не будет двигаться, поскольку волна упругого взаимодействия между молекулами тела распространяется с конечной скоростью a, называемой скоростью звука. Время распространения упругой волны от границы до другой границы тела $\Delta t = L/a$. За время Δt левый край тела сместится на расстояние $\Delta L = v \cdot \Delta t = v\frac{L}{a}$ и тело станет короче на эту величину. Относительное сжатие тела $\frac{\Delta L}{L} = \frac{v}{a}$. Мерой сжимаемости сплошной среды служит критерий подобия – число Маха. Эта характеристика «M» равна отношению скорости v течения среды к скорости звука a в той же точке потока

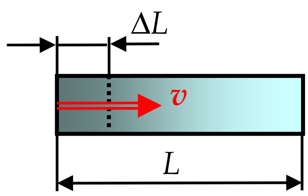


Рис.7.2

$$M = {}^{v}\!/_{a}\,. \qquad (7.2)$$

При M<< 1 газы можно считать несжимаемыми. В воздухе сжимаемость необходимо учитывать при скорости, которая соответствует M>0,3. При M<1 течение называется дозвуковым, при M=1 – звуковым, а при M>1 – сверхзвуковым.

При гиперзвуковых скоростях (M>5) в газе становятся существенными физико-химические превращения в ударной волне или тормозящем пограничном слое.

Стационарное течение

Течение жидкости называют стационарным, если в каждом месте пространства, занятого текущей жидкостью, параметры, характеризующие свойства жидкости и движущегося потока (скорость, давление, плотность, температура и др.), остаются постоянными за время наблюдения этого течения. В ином случае течение является нестационарным.

Поле скоростей. Линия тока. Трубка тока

Картину текущей жидкости можно представить при помощи поля скоростей движущихся частиц среды. Каждой точке пространства, занятого текущей жидкостью, соответствует в момент времени t вектор скорости $v(x,y,z,t)$ частицы вещества, находящейся в этой точке пространства.

Анализ картины стационарного течения жидкости упростится, если мы «разобьем» на достаточно малые по сечению трубочки. Так как сечение трубки тока можно взять сколь угодно малым, то можно считать, что скорость частиц одинакова в поперечном сечении трубки и направлена перпендикулярно к нормальному сечению трубки.

7.2. Задачи механики жидкостей и газов

Задачи механики жидкостей и газов сводятся к следующему:

1) определение усилий, действующих на тела обтекаемые жидкостью или движущиеся в жидкости. Задача такого типа рассматриваются в различных областях техники. Например, определение силы

лобового сопротивления, действующей на движущийся самолет, лопатку турбины, лопасти гребного винта корабля, ветровые нагрузки, действующие на телевизионные мачты, трубы, мосты, здания и сооружения, силы торможения, действующие на движущийся автомобиль и т.д.;

2) определение характера движения жидкости в трубах каналах, лабиринтах.

7.3. Ламинарный и турбулентный режимы течения

Течение вязкой жидкости в зависимости от ряда условий может быть ламинарным (слоистым) и турбулентным (вихревым). При *ламинарном режиме* отдельные слои жидкости скользят относительно друг друга, не смешиваясь между собой, а частицы жидкости движутся прямолинейно по параллельным друг другу траекториям (рис.7.3,*а*). При этом режиме движения скорости в каждой точке потока не изменяются во времени ни по величине, ни по направлению.

В случае ламинарного течения жидкости согласно третьему закону Ньютона более медленные слои за счет вязкого трения тормозят более быстрые и наоборот, быстрые ускоряют медленные. Причем молекулы стенок трубы не имеют тангенциальной составляющей скорости, и пограничный слой жидкости жестко «прилипает» к ее стенкам. Таким образом, скорость движения отдельных равноудаленных от оси трубы цилиндрических слоев жидкости возрастает от нулевого до максимального значения по мере удаления от стенок трубы.

При достаточно малых скоростях потока жидкости или газа течение всегда является ламинарным, Однако при увеличении скорости всегда происходит переход в турбулентное течение, которое является уже существенно нестационарным и пространственно-неоднородным, поскольку скорость частиц жидкости, давление и другие характеристики среды изменяются во времени и пространстве нерегулярно, случайным образом даже при постоянных внешних условиях.

Турбулентный режим характеризуется нарушением «струйчатости» движения и изменением во времени скоростей потока в каждой точке сечения трубы по величине и направлению. При этом частицы жидкости движутся по сложным, все время изменяющимся и перемежающимся траекториям. Однако при неизменных внешних условиях постоянной оказывается средняя (по времени) скорость в каждой точке сечения трубы. Профиль средних скоростей при турбулентном течении показан на рис.7.3,*б*. Вблизи стенок средняя скорость турбулентного течения жидкости меняется значительно, а в остальной части сечения средняя скорость практически остается постоянной.

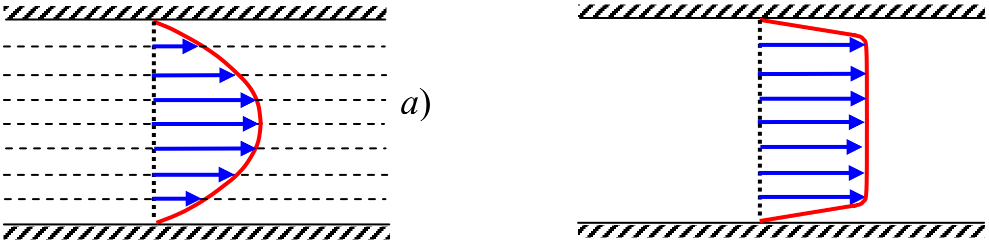


Рис. 7.3

Переход ламинарного течения в турбулентное можно наблюдать, используя подкрашенные струйки жидкости или задымленного газа, движущиеся в прозрачной трубе. При ламинарном течении подкрашенная струйка имеет вид ровной линии. При переходе к турбулентному течению жидкость завихряется, границы струйки размываются и краска постепенно расплывается по всему сечению трубы.

Число Рейнольдса

Основной параметр, с помощью которого описываются ламинарное течение, турбулентное течение и переход от ламинарного течения к турбулентному течению, – число Рейнольдса Re, введеное английским инженером Осборном Рейнольдсом (1842 – 1912). Это критерий подобия, он определяется формулой

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}. \tag{7.3}$$

Здесь η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность жидкости, v – скорость тела в неподвижной жидкости (например скорость движения самолета или падения шара в вязкой среде) или скорость невозмущенной части жидкости, набегающей на тело (например скорость движения воздуха в аэродинамической трубе). Длина l, входящая в критерий Рейнольдса, – характерный размер возмущенной части потока жидкости. Для течения около сферы в качестве l можно взять диаметр сферы. Для самолета – это хорда крыла, а для трубы, по которой прокачивается газ или жидкость, – ее диаметр.

Можно сравнивать числа Рейнольдса для течений различных сред (с различными значениями ρ и η) около двух сфер или двух геометрически подобных самолетов. Однако лишено физического смысла сравнение чисел Рейнольдса течений около сферы и около самолета, так как эти тела не являются геометрически подобными и нельзя определить один характерный размер, устанавливающий соответствие между этими двумя видами течений.

Сопоставление чисел Рейнольдса для однотипных течений может служить указанием влияния вязкости среды на характер течения и проявление сил вязкости. Чем меньше Re, тем большую роль в движении жидкости играют силы вязкости. При течении по трубам очень малого сечения, например по капиллярам, жидкость можно считать вязкой и, наоборот, при течении жидкости большей вязкости по трубам очень большого сечения, можно эту жидкость считать невязкой (в первом случае Re мал, а во втором случае Re большой).

Существует критическое число Рейнольдса Re^*, такое, что при вычисленном для потока $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ этот поток будет ламинарным, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ – турбулентным. Критическое число Рейнольдса получают на основе экспериментальных исследований. Например, для воды в гладких круглых трубах критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}^* = 2000$.

Изменение числа Re при течении в одной и той же трубке можно осуществлять как изменением скорости потока, так и изменением вязкости жидкости, например, нагревая ее или заменяя на другую.

Рассмотрим обтекание цилиндра вязкой средой и сопоставим вид обтекания со значениями чисел Рейнольдса (рис. 7.4).

При числах Рейнольдса Re < 1 (рис. 7.4,*а*) наблюдается ламинарный режим течения.

При значении Re ≥ 1 в потоке возникают области неустойчивости, однако новый тип течения окончательно определяется при Re > 10. При этом за цилиндром образуются два вихря (первая стадия неустойчивости потока), но течение в целом остается стационарным и ламинарным (рис. 7.4,*б*).

Обычно считают, что вихреобразование нарастает постепенно. Когда Re принимает значения от 10 до 30, поток меняет свой характер. При Re > 40 стационарное движение теряет устойчивость. Вихри удлиняются, отрываются и уносятся потоком жидкости. В результате за цилиндром образуется так называемая вихревая дорожка. При отрыве вихря жидкость за цилиндром снова закручивается и возникает новый вихрь. Вихри отслаиваются то с одной, то с другой стороны и в какой-то момент вытягиваются вихревым следом за цилиндром. Такой поток вихрей называется цепочкой Кармана (рис. 7.4, *в*). Движение становится нестационарным.

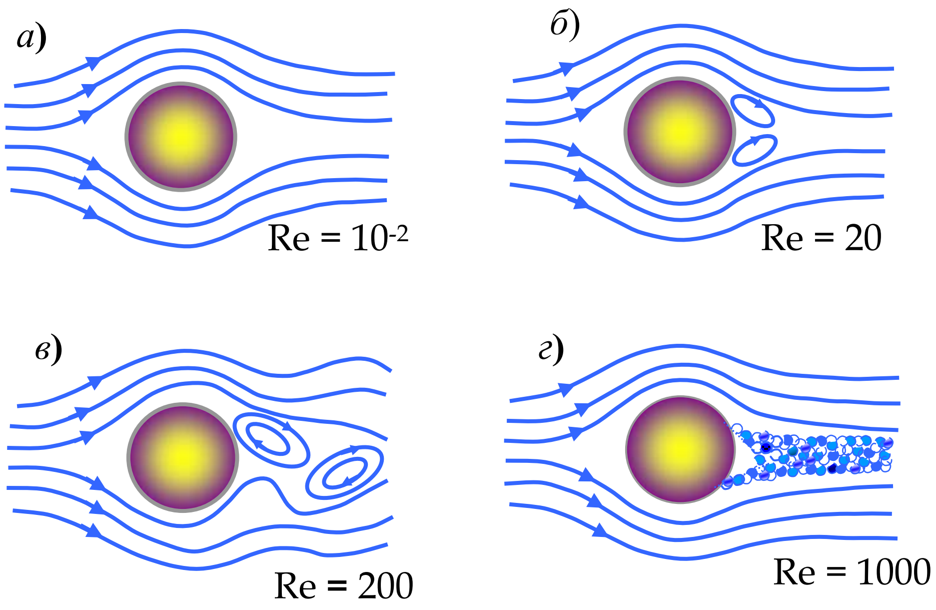


Рис. 7.4

При Re > 1000 вихри уже не успевают формироваться и заменяются быстро турбулизирующимися областями; при Re ~ 10^4 движение становится нерегулярным; при Re ~ 10^5 турбулентная область продвигается вплоть до поверхности цилиндра (рис. 7.4, *г*).

7.4. Уравнение движения в форме Эйлера

Рассмотрим жидкую (газообразную) среду плотностью ρ, движущуюся в поле силы тяжести (рис. 7.5). Ускорение свободного падения g направлено в противоположную сторону оси OZ, выбранной декартовой системы координат, и на рис. 7.5 задано соответствующим вектором. Выделим в жидкости частицу в виде кубика со сторонами Δx, Δy, Δz. На частицу действует сила тяжести, а также силы, обусловленные давлением на грани частицы со стороны окружающего вещества. В общем случае силовое воздействие на противоположные грани частицы будет разным, вследствие существования в жидкости градиентов давления. Определим проекции сил, действующих на частицу, на каждую ось системы координат и запишем уравнение движения частицы.

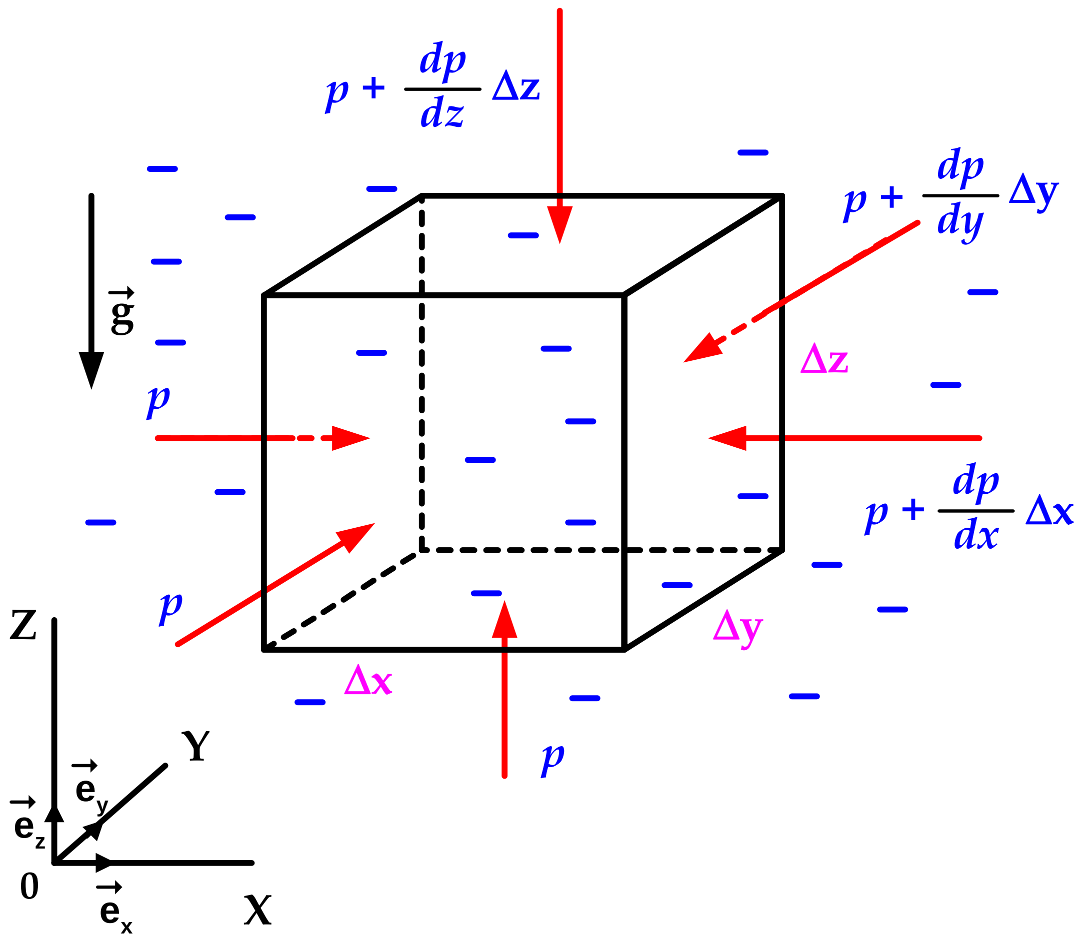


Рис. 7.5

Проекция сил на ось 0X обусловлена только действующими давлениями, поэтому $F_x = p \cdot \Delta y \cdot \Delta z - (p + \frac{dp}{dx}\Delta x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. После преобразований полученной формулы проекцию силы F_x запишем в виде:

$$F_x = -\frac{dp}{dx}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad . \tag{7.4}$$

Аналогично этому проекция сил на ось 0Y

$$F_y = -\frac{dp}{dy}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z . \tag{7.5}$$

Проекция сил на ось 0Z будет отличаться от других проекций на величину силы тяжести, действующей на частицу

$$F_z = -\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot g - \frac{dp}{dz} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z, \qquad (7.6)$$

где объем частицы $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, а ее масса $m = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на соответствующие оси координат:

$$\begin{cases} \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{dp}{dx} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\ ; \\ \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{dp}{dy} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z; \\ \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \dfrac{dv_x}{dt} = -\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot g - \dfrac{dp}{dx} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\ . \end{cases} \qquad (7.7)$$

Каждое уравнение системы (7.7) преобразуем и умножим на соответствующие орты

$$\begin{cases} \rho \cdot \dfrac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_x = -\dfrac{dp}{dx} \cdot \vec{e}_x; \\ \rho \cdot \dfrac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_y = -\dfrac{dp}{dy} \cdot \vec{e}_y; \\ \rho \cdot \dfrac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_z = -\rho \cdot g \cdot \vec{e}_z - \dfrac{dp}{dx} \cdot \vec{e}_z. \end{cases} \qquad (7.8)$$

Сложим левые и правые части уравнений системы (7.8), а слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, запишем в виде $g \cdot \vec{e}_z = -\vec{g}$

$$\rho \cdot \left(\frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_z + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_{\mathrm{y}} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} \right) = \rho \cdot \vec{g} - \left(\frac{dp}{dx} \cdot \vec{e}_z + \frac{dp}{dy} \cdot \vec{e}_{\mathrm{y}} + \frac{dp}{dz} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} \right). \qquad (7.9)$$

В скобках левой части уравнения (7.9) ускорение частицы $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

В скобках правой части этого уравнения градиент давления

$$\left(\frac{dp}{dx} \cdot \vec{e}_z + \frac{dp}{dy} \cdot \vec{e}_{\mathrm{y}} + \frac{dp}{dz} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} \right) = \operatorname{grad} p = \vec{\nabla} p. \qquad (7.10)$$

С учетом сделанных обозначений уравнение (7.10) принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \qquad (7.11)$$

Формула (7.11) была получена членом Петербургской академии наук Леонардо Эйлером, и выражает основной закон динамики для частицы идеальной жидкости или газа. Можно сказать, что уравнение (7.11) по своей конструкции (и смыслу) является аналогом второго закона Ньютона, записанному для частицы единичной массы. Умножим мысленно это уравнение на m=1. В левой части получим $m\vec{a}$, в правой части сумму сил, связанных с действием силового поля (в рассмотренном примере это поле силы тяжести) и силы, обусловленной градиентом давления.

Уравнение (7.11) устанавливает важные механические соответствия, которые существуют в потоке жидкости или газа:

1) если в жидкой (газовой) среде создать градиент давления, то скорости частиц среды будут изменяться;

2) торможение потока (изменение его скорости) приведет к возникновению градиентов давления на соответствующих участках потока и появлению сил, действующих на фрагменты системы, обусловливающие торможение.

7.5. Уравнение неразрывности

Рассмотрим течение жидкости внутри некоторой трубки тока (рис. 7.6), обладающей такими сечениями, что скорость молекул жидкости в любой точке каждого из них одинакова и в сечении S_1 она равна v_1, а в сечении S_2 равна v_2. Будем полагать, что частицы жидкости не выходят за пределы этой трубки и не появляются извне (такой подход реален в практическом случае, если границы трубки тока, например, совместить с границами трубы переменного сечения, по которой перетекает жидкость). Масса воды dM, протекающая за время dt через

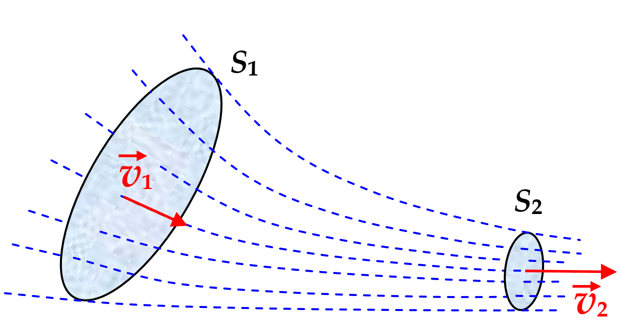


Рис. 7.6

сечения с площадями S_1 и S_2, будет одинаковой, поэтому имеет место равенство массовых секундных расходов жидкости через каждое сечение трубки тока, или

$$\frac{dM_1}{dt}=\frac{dM_2}{dt}\ , \qquad (7.12)$$

где $dM_1 = S_1 v_1 dt \rho_1$ и $dM_2 = S_2 v_2 dt \rho_2$. (7.13)

С учетом (7.13) уравнение (7.12) принимает вид:

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2\ . \qquad (7.14)$$

Формула (7.14) получила название *уравнение неразрывности* для сжимаемой жидкости.

Для несжимаемой жидкости плотности среды в разных частях жидкости одинаковые, т.е. $\rho_1 = \rho_2$. В этом случае уравнение неразрывности записывается в виде

$$S_1 v_1 = S_2 v_2\ . \qquad (7.15)$$

Физический смысл уравнения неразрывности (7.14) и (7.15) заключается в том, что жидкость нигде не «накапливается» внутри трубки тока, т. е. за одинаковый временной интервал, сколько втекает в трубку тока жидкости столько и вытекает. Иными словами уравнение неразрывности является аналогом закона сохранения массы.

Из уравнения неразрывности следует, что меняя геометрию поперечного сечения газового или жидкостного потока, можно менять его скорость. При уменьшении площади поперечного сечения потока его скорость возрастает. На рис.7.7 показан участок трубы переменного сечения, по которому протекает идеальная жидкость. Ниже трубы качественно показан график скорости течения жидкости в зависимости от координаты x. На участках трубы, где сечение не меняется, скорость течения постоянная, на участках с уменьшающимся сечением скорость потока растет, а на участках, где сечение увеличивается, скорость потока падает. Выводы, сделанные выше, справедливы, если скорость потока дозвуковая, т.е. $v<a$ или при М<1. При звуковых и сверхзвуковых скоростях течения характер изменения скорости потока от сечения канала становится иным.

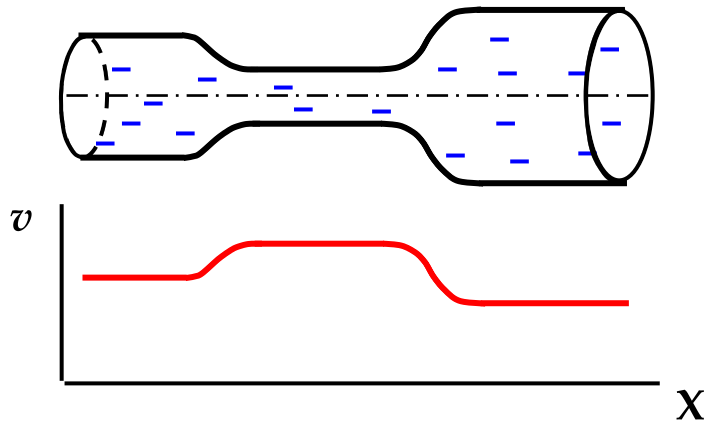


Рис. 7.7

Рассмотрим подробнее такой вариант течения газа по трубе переменного сечения. Для решения задачи рассмотрим систему уравнений, в которую входит уравнение движения в форме Эйлера, уравнение неразрывности и формула, определяющая скорость распространения звука в газе:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad , \tag{7.16}$$

$$\rho \cdot v \cdot S = \text{const} \quad , \tag{7.17}$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad . \tag{7.18}$$

Преобразуем эту систему уравнений так, чтобы из нее исключить плотность движущейся среды, оставив в качестве переменных параметры, содержащие скорость v и сечение S потока. В уравнении (7.16) выполним перестановку переменных величин

$$dv \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dp}{\rho} \qquad \text{или} \qquad v \cdot dv = -\frac{dp}{\rho} \ , \tag{7.19}$$

а затем в него подставим приращение давления dp, из уравнения (7.18) $dp = a^2 d\rho$

$$v \cdot dv = -\frac{a^2 \cdot d\rho}{\rho} \quad . \tag{7.20}$$

Преобразуем уравнение (7.20), выделяя компоненту

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v \cdot dv}{a^2}. \qquad (7.21)$$

Уравнение (7.17) прологарифмируем, $\ln\rho + \ln v + \ln S = \ln(\text{const})$, а затем продифференцируем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0 \quad . \qquad (7.22)$$

В уравнение (7.22) подставим уравнения (7.21) и выполним группировку одинаковых членов уравнения

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} - v\frac{dv}{a^2} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dS}{S} - \frac{dv}{v}(\frac{v^2}{a^2} - 1) = 0 \qquad (7.23)$$

Перепишем уравнение (7.23) в удобном для анализа виде, заменяя в нем отношение скорости потока к скорости звука числом Маха

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v}(M^2 - 1). \qquad (7.24)$$

Из уравнения (7.24) следует, что для дозвукового потока (M<1) приращения скорости и площади потока связаны обратным знаком, т.е. $dS \sim -\, dv$. В этом случае уменьшение площади потока будет приводить к увеличению его скорости, что было получено ранее из анализа уравнения неразрывности. Но при сверхзвуковых потоках (M>1) приращения скорости и площади потока связаны одинаковым знаком, т.е. $dS \sim\ dv$. Из этого следует, что *увеличение площади сверхзвукового потока должно приводить и к увеличению его скорости!!!*

Этот вывод нашел практическое применение в конструкциях реактивных (ракетных) двигателей (рис.7.8). Французский инженер Лаваль сконструировал сопло, получившее его имя. В ракетном двигателе в камере сгорания развивается большое давление, вызывая истечение продуктов горения через сопло. На суживающем участке поток дозвуковой и поэтому скорость потока нарастает, достигая в критическом сечении скорости, незначительно превышающей скорость звука, т.е. $M \geq 1$. В расширяющейся части сопла скорость потока возрастает, достигая на выходе сопла значений больше скорости звука.

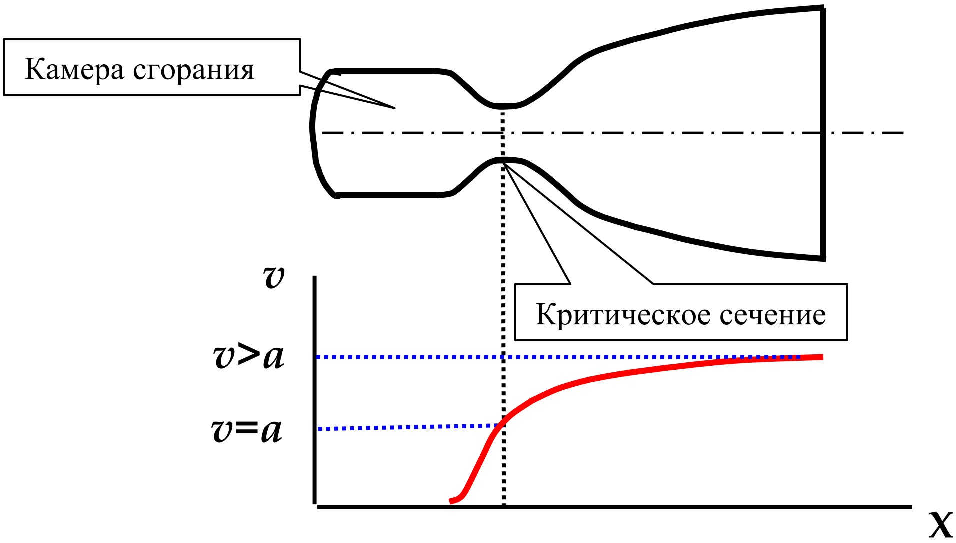


Рис.7.8

7.6. Уравнение Бернулли

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости плотности ρ в однородном поле силы тяжести под действием сторонних сил. Вследствие перепада давлений p_1 - p_2, вызванного внешними сторонними силами, за интервал времени dt частицы жидкости, находящиеся в объеме между сечениями S_1 и S_2 трубки тока, сместятся вдоль нее. Частицы в сечении S_1 сместятся на расстояние $dL_1 = v_1 dt$ и окажутся в сечении S'_1, а частицы в сечении S_2 сместятся на расстояние $dL_2 = v_2 dt$ и окажутся в сечении S'_2 (рис. 7.9). Объем жидкости dV_1 между сечениями S_1 и S'_1 будет равен элементарному объему жидкости dV_2 между сечениями S_2 и S'_2 вследствие уравнения неразрывности.

Для описания движения воспользуемся энергетическими соображениями. Рассмотрим объем жидкости между сечениями S_1 и S_2 трубки тока. Согласно закону изменения полной механической энергии ее приращение ΔW равно работе внешних сторонних $\delta A_{\text{ст}}$ и внутренних неконсервативных сил, действующих на рассматриваемый объем жидкости. Последняя из этих составляющих в отсутствие внутреннего трения у идеальной жидкости равняется нулю и, следовательно,

$$W_2 - W_1 = \delta A_{\text{ст}}. \tag{7.25}$$

Исходя из того, что работу совершают только тангенциальные составляющие сил, получим выражение для расчета работы по перемещению выделенного объема жидкости:

$$\delta A_{\text{ст}} = p_1 \cdot S_1 \cdot dL_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot dL_2 . \qquad (7.26)$$

Из этой формулы и уравнения неразрывности струи следует, что

$$\delta A_{\text{ст}} = (p_1 - p_2) \cdot dV, \qquad (7.27)$$

где dV – объем жидкости, протекающей через сечение трубки тока за время dt. Приращение полной механической энергии ΔW найдем как сумму приращений кинетической и потенциальной энергий в 1-м и 2-м сечениях трубки тока:

$$\Delta W = (\rho \cdot \Delta V \cdot \frac{v_2^2}{2} - \rho \cdot \Delta V \cdot \frac{v_1^2}{2}) + (\rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_1). \qquad (7.28)$$

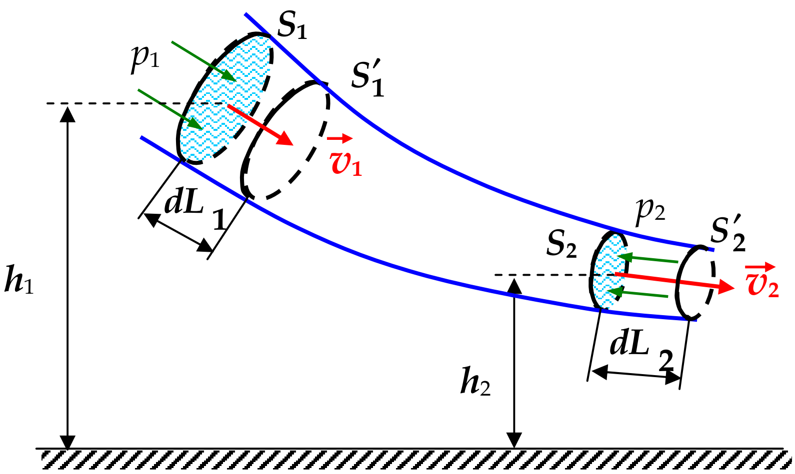


Рис. 7.9

Отсюда с учетом произвольности выбора сечений 1 и 2, решая совместно (7.25, 7.27, 7.28), получим, что для выбранной трубки тока справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} . \qquad (7.29)$$

Это соотношение, называемое *уравнением Бернулли*, получено для достаточно узкой трубки тока и, строго говоря, справедливо, когда трубка тока переходит в линию тока. Оно хорошо выполняется для реальных жидкостей, обладающих малым внутренним трением.

Это уравнение описывает стационарное течение несжимаемой жидкости (иногда употребляют термин «идеальная жидкость») и играет фундаментальную роль в гидродинамических исследованиях. Если нам известно давление p_1, скорость v_1 в некотором сечении трубки тока, находящемся на высоте h_1, то в любом другом сечении на высоте h_2 величины p_2 и v_2 связаны соотношением

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho g h_1+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g h_2+p_2. \qquad (7.30)$$

Рассмотрим более подробно физический смысл входящих в уравнение Бернулли членов. Так, статическое давление p численно равно работе сил давления, совершаемых над единичным объемом жидкости; динамическое давление $\rho v^2/2$ есть кинетическая энергия единицы объема, а величина $\rho g h$ является потенциальной энергией единичного объема в поле силы тяжести. Давление p – это статическое давление, которое измерит манометр, находящийся в жидкости и движущийся вместе с нею; $\rho v^2/2$ – это динамическое давление; $\rho g h$ – гидростатическое давление. Заметим, что в покоящейся жидкости равенство (7.29) описывает гидростатическое распределение давлений.

Из уравнения Бернулли следует, что в области газового или гидравлического потока, где скорость больше, давление в этом сечении потока будет меньше. Это видно из формулы (7.30), в которое для упрощения анализа явления подставим $h_1=h_2$ (это справедливо для потока, центры сечений которого находятся на одинаковой высоте):

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2. \qquad (7.31)$$

Многие эффекты объясняются связью скорости потока с давлением в этом потоке. Например, наблюдается столкновение морских судов на встречных курсах при малых расстояниях между траекториями движения. При разных скоростях обтекания крыла самолета будет разным давление со стороны потока на крыло, что приводит к возникновению подъемной силы.

7.7. Циркуляция скорости. Теорема Жуковского

Одна из задач газовой гидродинамики – определение усилий, действующих на тела, обтекаемые сплошной средой или движущиеся в такой среде. В практике тела, взаимодействующие с потоком жидкости или газа, имеют конфигурацию специального профиля для достижения необходимого эффекта. Это, например, крыло самолета, лопатка турбины, гребной винт и т.д. Рассмотрим профиль крыла, расположенного в плоско-параллельном потоке газа (рис. 7.10). У крыла самолета закругленная передняя поверхность (передняя кромка) и заостренная задняя (задняя кромка). Скорость набегающего потока $\vec{v}$, поперечный размер крыла λ, угол наклона осевой крыла к вектору скорости потока – угол атаки α.

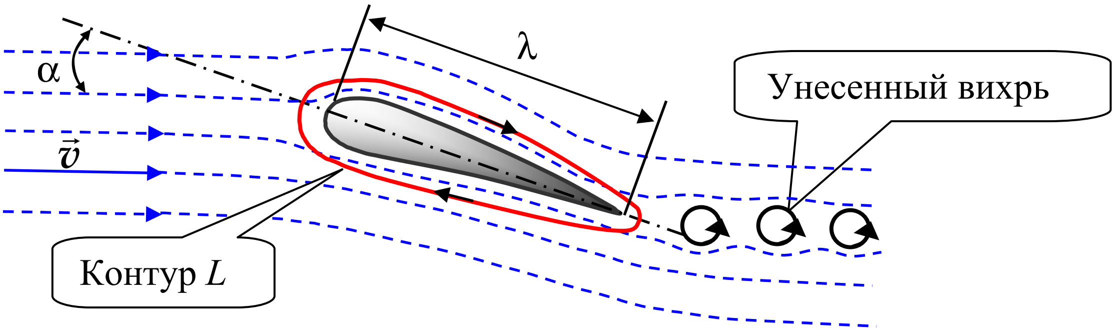


Рис. 7.10

В обычных условиях происходит «деформация» линий тока крылом, и можно заметить образование вихря у задней кромки крыла. Образовавшийся вихрь срывается с кромки крыла и уносится потоком. Вещество среды, ушедшее с вихрем, имеет момент импульса, следовательно, оставшееся у крыла вещество должно получить противоположный момент импульса (в соответствии с законом сохранения момента импульса). Рассматривая такой эффект, Жуковский ввел условный, присоединенный к крылу вихрь. В нем вещество будет вращаться вокруг крыла в направлении, противоположном вращению унесенного вихря (на рис.7.10 по часовой стрелке), обеспечивая сохранение момента импульса системы. Такое движение вокруг крыла называется циркуляционным движением и определяется количественной мерой, называемой циркуляцией скорости:

$$\Gamma_v = \oint_L \vec{v}\,\vec{dl}, \tag{7.32}$$

где L – контур, по которому вычисляется циркуляция скорости, а $\vec{dl}$ – элемент этого контура. Расчет циркуляции по формуле (7.32) приводит к значению

$$\Gamma_v = \frac{1}{2}\pi\lambda v\alpha. \tag{7.33}$$

Как показывает теория, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему тело, величина постоянная и зависит от тех параметров, которые входят в формулу (7.33).

Теорема Жуковского

Теорема сформулирована Н.Е. Жуковским в 1904 г. В ней рассматривается подъемная сила, действующая на тело, находящееся в потоке жидкости или газа. Согласно этой теореме, подъемная сила обусловлена связанным с обтекаемым телом присоединенным вихрем. Причина существования таких вихрей – вязкость жидкости или газа. Возникает подъемная сила вследствие несимметрии обтекания потоком крыла самолета. Такое обтекание можно объяснить, как результат наложения на симметричное течение циркуляционного потока вокруг крыла, что приводит к увеличению скорости обтекания на одной стороне крыла (у верхней поверхности крыла на рис. 7.10) и уменьшению – на другой (на рис.7.10 – нижней). Подъемная сила зависит от величины циркуляции скорости Γ_v и согласно теореме Жуковского определяется формулой

$$Y = \Gamma_v \rho v\, l\,, \tag{7.34}$$

где l – длина крыла в направлении, перпендикулярном скорости потока, ρ - плотность среды.

Направление подъемной силы можно получить, если направление вектора скорости частиц среды, бесконечно удаленных от тела, мысленно совместить с телом и повернуть на 90° против направления циркуляционного движения (рис. 7.11).

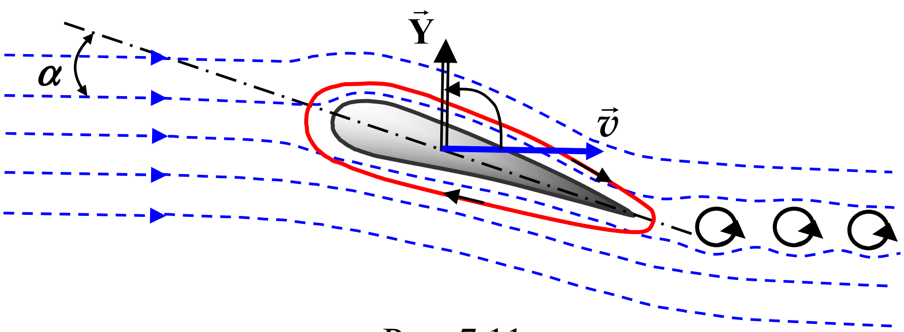


Рис. 7.11

Теорема Жуковского лежит в основе современной теории крыла и гребного винта. С помощью теоремы Жуковского могут быть вычислены подъемная сила крыла конечного размаха, тяга гребного винта, сила давления на лопатку турбины и др.

Для вывода формулы подъемной силы крыла в (7.34) подставим (7.33):

$$Y = \frac{1}{2}\pi\alpha\ \rho v^2 \lambda\ l = \pi\alpha \frac{\rho v^2}{2} S, \tag{7.35}$$

где площадь крыла $S = \lambda \cdot l$.

Как видно из (7.35), подъемная сила пропорциональна гидродинамическому давлению, площади крыла и углу атаки. В практической аэродинамике установлено, что подъемная сила зависит также от конфигурации тела и эта конфигурация учитывается эмпирическим коэффициентом подъемной силы C_y, который определяется экспериментально при продувке моделей или натурных изделий в аэродинамической трубе. С учетом сказанного формула для подъемной силы имеет вид:

$$Y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S. \tag{7.36}$$

Отметим, что коэффициент подъемной силы зависит от угла атаки, поэтому в практике управления летательным аппаратом при заданной скорости полета изменение подъемной силы осуществляется регулированием угла атаки крыла.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И РАСЧЕТНО - ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Кинематика

101*. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_о$=20,0 м/с. Когда тело достигло верхней точки полета из того же начального пункта, с той же начальной скоростью $v_о$ вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии h_1 от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать. Построить графики координаты каждого тела в функции от времени $y=f(t)$. За t = 0 принять момент начала движения первого тела. (*Ответ:* h_1*=15,3 м*).

102. Ракета, установленная на поверхности Земли, стартует вертикально вверх. Ее ускорение на интервале времени t = 5,0 с меняется по закону $a= kt^2$, где k = 0,4 м/с^4. Получить аналитические выражения для скорости ракеты и пройденного пути. Определить скорость в момент времени t = 5 с с начала движения и путь, пройденный ракетой за это время. Построить графики пройденного пути, скорости и ускорения ракеты для указанного интервала времени. (*Ответ:* v *=16,7 м/с;* s*=20,8* м).

103. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3 \cdot \vec{e}_x + 3t^2 \cdot \vec{e}_y$, где $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ – орты осей 0X и 0Y. Определить модуль скорости и модуль ускорения материальной точки для момента времени t = 1,5 с. Определить угол наклона вектора скорости к оси 0X в момент времени t=1,0 с. (*Ответ:* v *=11,6 м/с;* a *=10,8 м/с*^{2}*;* α*=63,4*^{o}).

104. В некоторый начальный момент времени скорость материальной точки, движущейся по прямолинейной траектории $v_о$ = 10,0 м/с, а ускорение постоянное и равное a = – 5,0 м/с^2. Определить, во сколько раз путь Δs, пройденный материальной точкой, будет превышать мо-

* Нумерация 101 и далее соответствует разделу «Механика».

дуль ее перемещения Δr после начала отсчета времени через интервал: 1) $t = 3{,}0$ с; 2) $t = 4{,}0$ с. Построить графики пути и модуля перемещения в зависимости от времени. (*Ответ: 1*) $\Delta s/\Delta r = 1{,}7$; *2*) $\Delta s/\Delta r = \infty$).

105. Велосипедист ехал из одного пункта в другой. Первую треть пути он проехал со скоростью $v_1 = 18$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 22$ км/ч, после чего до конечного пункта он шел пешком со скоростью $v_3 = 5{,}0$ км/ч. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ велосипедиста. (*Ответ: 14,7 км/ч*).

106. Тело брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_o = 30{,}0$ м/с. Каковы будут нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1{,}0$ с после начала движения? Построить графики зависимости проекций скорости v_x и v_y от времени на интервале движения тела до момента падения. (*Ответ:* $a_n = 9{,}62$ *м/с*^{2}; $a_\tau = 1{,}92$ *м/с*^{2}).

107. Материальная точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/6$ рад/с. Во сколько раз путь Δs, пройденный точкой за время $t = 4{,}0$ с, будет больше модуля ее перемещения Δr? Принять, что в момент начала отсчета времени радиус-вектор $\vec{r}$, задающий положение точки на окружности, относительно выбранного направления повернут на угол $\alpha = \pi/3$ рад. (*Ответ:* $\Delta s/\Delta r = 1{,}21$).

108. Материальная точка движется в плоскости XY согласно уравнениям $x = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ и $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = A_2 = 0{,}5$ м, $B_1 = 7$ м/с, $C_1 = -12$ м/с^2, $B_2 = -1$ м/с, $C_2 = 0{,}2$ м/с^2. Определить аналитическую зависимость модуля радиус-вектора r положения точки в зависимости от времени. Построить траекторию точки и график зависимости $r = f(t)$ до момента времени $t = 5{,}0$ с, а также найти модули скорости и ускорения точки в этот момент времени. (*Ответ:* $v = 13{,}04$ *м/с*; $a = 4{,}02$ *м/с* .)

109. По краю равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega = 1{,}0$ рад/с платформы идет человек с постоянной по модулю скоростью относительно платформы и обходит платформу за время $t = 9{,}9$ с. Оп-

ределить ускорение a человека относительно Земли? Принять радиус платформы R = 2,0 м. (*Ответ: a = 5,34 м/с^2*).

110. Точка движется по окружности радиусом R = 30,0 см с постоянным угловым ускорением. Определить тангенциальное ускорение точки, если известно, что за время t = 4,0 с она прошла угловой путь 6π, а в конце третьего оборота ее нормальное ускорение a_n = 2,7 м/с^2. Построить графики зависимости модулей нормального ускорения, тангенциального ускорения и угловой скорости от времени на указанном интервале времени: $a_n = f(t)$; $a_\tau = f(t)$; $\omega = f(t)$. (*Ответ: a_τ = 0,71 м/с^2*).

Импульс тела. Закон сохранения импульса

111. При горизонтальном полете со скоростью v = 250 м/с снаряд массой m = 8,0 кг разорвался на две части. Большая часть массой m_1= = 6,0 кг получила скорость u_1 = 400 м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда. Определить величину внутренней энергии U, которая была выделена при разрыве снаряда. Определить величину и направление импульса системы тел после разрыва снаряда. (*Ответ: u_2 = 200 м/с ; U=5,4·10^5 Дж*).

112. С тележки, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью v_1= 3,0 м/с, в сторону, противоположную движению тележки, прыгает человек, после чего скорость тележки стала равной u_1=4,0 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости u_{2x} человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки m_1 = 210 кг, масса человека m_2 = 70 кг. (*Ответ: u_2= 4 м/с*).

113. Два тела массами m_1 =2,0 кг и m_2 =5,0 кг, движущиеся свободно со скоростями $\vec{v}_1 = 10 \cdot \vec{e}_x$ (м/с) и $\vec{v}_2 = 3{,}0 \cdot \vec{e}_x + 5{,}0 \cdot \vec{e}_y$ (м/с), испытывают абсолютно неупругое соударение. Чему равны скорость $\vec{v}_c$, импульс $\vec{p}$ и модуль скорости v_c центра масс системы до и после удара? (*Ответ: $\vec{v}_c = 5{,}0 \cdot \vec{e}_x + 3{,}6 \cdot \vec{e}_y$; $\vec{p} = 35{,}0 \cdot \vec{e}_x + 25{,}0 \cdot \vec{e}_y$; v_c=6,14 м/с*).

114. Человек массой m_1 = 70 кг, бегущий со скоростью v_1 = 9,0 км/ч, догоняет тележку массой m_2 = 190 кг, движущуюся со скоростью v_2 =3,6 км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке? (*Ответ:* u_1 *=1,4 м/с;* u_2 *= 0,06 м/с*).

115. Тело массой m = 3,0 кг, двигаясь со скоростью v = 4,0 м/с, сталкивается с неподвижным телом такой же массы. Считая удар между телами неупругим и центральным, найти количество механической энергии ΔW, израсходованной на деформацию тел и на выделившееся тепло. (*Ответ:* ΔW*=12 Дж*).

116. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его m_1= 60 кг, масса доски m_2 = 20 кг. С какой скоростью v_2 (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) v' = 1,0 м/с? Массой колес и трением тележки пренебречь. (*Ответ:* v_2 *=0,75 м/с*).

117. Снаряд, летевший со скоростью v = 400 м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью u_1 = 150 м/с. Определить скорость u_2 большого осколка. (*Ответ:* u_2 *= 766,7 м/с*).

118. Частица массой m_1 испытала лобовое абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей массой m_2. Найти отношение масс частиц, если после столкновения они разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями. (*Ответ:* $m_1/m_2 = 1/3$)

119. Рыбак массой 70,0 кг, находясь на корме лодки длиной l=3,5 м и массой m = 200,0 кг, перешел в носовую часть лодки. На сколько переместится относительно берега лодка, если считать, что она расположена перпендикулярно берегу и нет течения воды. (*Ответ:* Δx*=0,91 м*).

120. Лодка длиной l = 3,0 м и массой m = 120 кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами m_1 = = 60,0 кг и m_2 = 90,0 кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами. (*Ответ: Δx=0,33 м*).

Закон сохранения энергии

121. В деревянный шар массой m_1 = 8,0 кг, подвешенный на нити длиной l = 1,8 м, попадает горизонтально летящая пуля массой m_2 = = 4,0 г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол α = 5°? Размером шара пренебречь. Определить величину энергии, перешедшей во внутреннюю. Удар пули считать прямым, центральным. (*Ответ: v = 438,2 м/с*).

122. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой m_1 = 300 кг, ударяет молот массой m_2 = 8,0 кг. Определить КПД удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа. (*Ответ: η = 97 %*).

123. Шар массой m_1 = 1,0 кг движется со скоростью v_1= 4,0 м/с и сталкивается с шаром массой m_2 = 2,0 кг, движущимся навстречу ему со скоростью v_2= 3,0 м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным. (*Ответ: u_1 =5,33 м/с; u_2 =1,66 м/с*).

124. Шар массой m_1 = 3 кг движется со скоростью v_1= 2,0 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 5,0 кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным. (*Ответ: A =3,75 Дж*).

125. Определить КПД неупругого удара бойка массой m_1 = 0,5 т, падающего на сваю массой m_2 = 120 кг. Полезной считать энергию, затраченную на вбивание сваи. (*Ответ: η = 81 %*).

126. Шар массой m_1 = 4,0 кг движется со скоростью v_1 = 5,0 м/с и сталкивается с шаром массой m_2 = 6,0 кг, который движется ему навстречу со скоростью v_2 = 2,0 м/с. Определить скорости u_1 и u_2 шаров

после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным. (*Ответ:* $u_1 = 3{,}4$ *м/с;* $u_2 = 3{,}6$ *м/с*).

127. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой m_1 = 10,0 г со скоростью v = 300 м/с. Затвор пистолета массой m_2 = = 200 г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой k = 25,0 кН/м. На какое расстояние отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен. (*Ответ:* $\Delta l = 4{,}2\cdot10^{-2}$ *м*).

128. Шар массой m_1 = 5,0 кг движется со скоростью v_1 = 1,0 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 2,0 кг. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным. (*Ответ:* $u_1 = 0{,}43$ *м/с;* $u_2 = 1{,}43$ *м/с*).

129. Из орудия, не имеющего противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда орудие было неподвижно закреплено, снаряд вылетел со скоростью v_1 = 600 м/с, а когда орудию дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью v_1 = 580 м/с. С какой скоростью откатилось при этом орудие? *(Ответ:* $u = 41$ *м/с).*

130. Шар массой m_1 = 2,0 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40 % кинематической энергии. Определить массу m_2 большого шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным. (*Ответ:* $m = 15{,}7$ *кг*).

Работа силы

131. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жестокостями k_1 = 400 Н/м и k_2 = 250 Н/м, если первая пружина при этом растянулась на Δl = 2,0 см. (*Ответ:* $A = 0{,}21$ *Дж*).

132. Из шахты глубиной h = 600 м поднимают клеть массой m_1=3,0 т на канате, каждый метр которого имеет массу m = 1,5 кг. Какая работа A совершается при поднятии клети на поверхность земли?

Каков КПД подъемного устройства? (*Ответ:* $A = 2{,}03 \cdot 10^7$ *Дж;* $\eta =$
$= 87\ \%$).

133. Пружина жесткостью k = 500 Н/м сжата силой F = 100 Н. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на Δl = 2,0 см. (*Ответ:* $A = 2{,}1$ *Дж*).

134. На двух параллельных пружинах одинаковой длины висит стержень, массой которого можно пренебречь. Жесткость пружин k_1=0,5 кН/м и k_2 = 1,0 кН/м. Длина стержня равна расстоянию между пружинами l = 0,1 м. На каком расстоянии от пружин следует подвесить небольшой груз, чтобы стержень оставался в горизонтальном положении после растяжения пружин. (*Ответ:* l_1*=6,7 см;* l_2*=3,3 см*).

135. На пружину повесили груз массой m_1 = 4,0 кг, в результате длина пружины стала 29 см. При увеличении нагрузки до m_2 = 10,0 кг длина пружины становится равной 35,0 см. Определить работу растяжения пружины. Определить приращение потенциальной энергии системы $\Delta W_п$ после подвешивания второго груза. (*Ответ:* A*=4,9 Дж;*
$\Delta W_п$= 4,12 Дж).

136. Если на верхний конец вертикально расположенной пружины положить груз, то пружина сожмется на Δl = 3,0 мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты h =
= 8,0 см? (*Ответ:* $\Delta x = 25{,}1 \cdot 10^{-3}$ *м*).

137. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью k = 150 Н/м был произведен выстрел пулей массой m = 8,0 г. Определить скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на Δx =
= 4,0 см. (*Ответ:* $v = 5{,}48$ *м/с*).

138. Налетев на пружинный буфер, вагон массой m = 16,0 т, двигавшийся со скоростью v = 0,6 м/с, остановился, сжав пружину на Δl =
= 8,0 см. Найти общую жесткость k пружин буфера. Какая сила действует со стороны буфера на вагон после его остановки? (*Ответ:*
$k = 9 \cdot 10^5$ *Н/м*).

139. Цепочка массой m= 0,5 кг и длиной l = 2,0 м лежит на шероховатом столе, одним концом свисая со стола. Если длина свешивающейся части превышает (1/3)l, то цепь соскальзывает со стола. Какую работу совершают силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола? Определить скорость v цепочки в момент ее отрыва от стола. (*Ответ: A=1,1 Дж; v = 3,6 м/с*).

140. Какая работа A должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки дымоходной трубы цилиндрической формы высотой h = 40,0 м. Наружный диаметр трубы D =5,0 м, внутренний d =4,0 м. Плотность материала ρ принять равной 2800 кг/м^3. (*Ответ:A=8,4·10^7 Дж*).

Динамика поступательного и вращательного движений

141. На горизонтальной поверхности лежит плоский брусок, массой m_1 = 2,0 кг. Коэффициент трения бруска о поверхность μ_1 = 0,2. На бруске находится другой плоский брусок массой m_2 = 8 кг. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков μ_2 = 0,3. К верхнему бруску приложена сила F, направленная горизонтально. Определить: 1) при каком значении силы F_1 начнется совместное движение брусков по поверхности; 2) при каком значении силы F_2 верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего. (*Ответ: F_1=19,6 Н; F_2=39,2 Н*).

142. Маховик в виде диска диаметром D = 70,0 см и массой m= = 20,0 кг вращается под действием силы F= 80,0 Н, приложенной по касательной к шкиву маховика. Определить угловое ускорение ε и число оборотов в минуту n маховика через время t = 10,0 с после начала действия силы, если радиус шкива r = 15,0 см. Силой трения и массой шкива пренебречь. (*Ответ: ε=9,79 рад/с^2 ; n = 935 об/мин*).

143. Маховик насажен на горизонтально расположенную ось. На обод маховика диаметром D = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2,0 кг. Определить момент инерции I махо-

вика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t = 3,0 с приобрел угловую скорость ω = 9,0 рад/с. Трением в шарнирах оси маховика пренебречь. (*Ответ:* $I=1,78$ *кг·м*^{2}).

144. Нить с привязанными к ее концам грузами массами m_1 = 50 г и m_2 = 60 г перекинута через блок диаметром D = 4,0 см. Определить момент инерции I блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение ε = 1,5 рад/с^2. Трением в подшипниках блока и проскальзыванием нити пренебречь. (*Ответ:* $I = 1,26\cdot10^{-3}$ *кг·м*^{2}).

145. Тонкий стержень длиной l = 0,7 м и массой m= 1,2 кг вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его край. Закон изменения угла поворота описывается уравнением $\varphi = At+Bt^3$, где A = 2,0 рад/с, B = 0,2 рад/с^3. Определить угловую скорость стержня и вращающий момент силы, действующий на стержень через время t = 2,0 с после начала вращения. Сколько полных оборотов N сделает стержень к моменту времени t = 4,0 с после начала вращения? (*Ответ:* $\omega=3,6$ *рад/с;* $M=0,47$ *Н·м;* $N=3$).

146. Колесо массой m = 1,5 кг и радиусом R=0,2 м скатывается по наклонной плоскости длиной l = 2,0 м и углом наклона α =30°. Определить момент инерции колеса, если его скорость в конце наклонной плоскости v= 3,8 м/с. Потерей энергии на трение пренебречь. (*Ответ:* $I=0,081$ *кг·м*^{2}).

147. Определить момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой ν = (1/12) с$^{-1}$, чтобы он остановился в течении времени Δt = 8,0 с. Диаметр блока D = 30 см. Массу блока m = 6,0 кг считать равномерно распределенной по ободу. Построить график зависимости угловой скорости блока в функции от времени. (*Ответ:* $M = 8,8\cdot10^{-3}$ *Н·м*).

148. В однородном плоском диске массой 1,0 кг и радиусом r=30 см вырезано круглое отверстие диаметром d = 20 см, центр которого находится на расстоянии l = 15 см от центра диска. Найти момент

инерции полученного тела относительно оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его поверхности. (*Ответ:* $I = 4{,}19 \cdot 10^{-2}$ *кг·м*^{2}).

149. На краю стола установлен блок цилиндрической формы, который может свободно вращаться. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по горизонтальной поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент трения μ между грузом и столом, если массы каждого груза и масса блока одинаковы и грузы движутся с ускорением a = 2,6 м/с^2. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения в оси вращения блока пренебречь. (*Ответ:* $\mu = 0{,}34$).

150. К концам легкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами m_1 = 0,2 кг и m_2 = 0,3 кг. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока m = 0,4 кг, а его ось движется вертикально вверх с ускорением a = 2,0 м/с^2 ? Силами трения в оси вращения блока и проскальзыванием нити по блоку пренебречь. (*Ответ:* $T_2/T_1 = 1{,}18$).

Закон сохранения момента импульса

151. На скамье Жуковского стоит человек и держит на вытянутых руках гири массой m = 3,0 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи l_1 = 70 см. Скамья вращается с частотой ν_1 = 0,5 с$^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу A произведет человек, если он прижмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до l_2 = 20 см? Момент инерции человека и скамьи относительно оси I = 2,5 кг·м^2. (*Ответ:* $\nu_2/\nu_1 = 1{,}98$; $A = 39{,}67$ *Дж*).

152. Скамья Жуковского с человеком вращается с угловой скоростью ω_1 = 5,0 рад/с. Человек держит в руках стержень вертикально по оси скамьи. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья, если человек повернет стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи I = 6,0 кг·м^2. Длина стержня l = 1,8 м, масса m = 6,0 кг. Считать, что центр масс

стержня с человеком находится на оси вращения платформы. (*Ответ:* ω *=3,94 рад/с*).

153. Платформа в форме сплошного диска диаметром D = 3,0 м и массой m_1 = 180 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой m_2 = 70 кг со скоростью v = 1,8 м/с относительно платформы? (*Ответ:* ω *=0,53 рад/с*).

154. На горизонтально расположенный вал насажены маховик в виде симметричного твердого тела и шкив радиусом R=4 см. На шкив намотана нить, к которой привязан груз массой m= 0,5 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь s= 1,5 м за время t= 3 с. Определить момент инерции вращающейся системы, принимая, что момент трения в подшипниках вала равен нулю. (*Ответ:* $I=2{,}27\cdot10^{-2}$ *кг*$\cdot$*м*^{2}).

155. Тонкий стержень длиной l=50 см и массой m= 400 г вращается относительно оси, проходящей через середину стержня и перпендикулярной стержню. Угловая скорость стержня меняется по закону $\omega = 2{,}4 + 3{,}5t$ (числовые коэффициенты формулы заданы в единицах системы СИ). Определить вращающийся момент силы, действующий на стержень, и момент импульса стержня в момент времени t=2 с. Проанализируйте полученные результаты решения задачи.
(*Ответ:* $M=2{,}9\cdot10^{-2}$ *Н*$\cdot$*м*; $L= 7{,}8\cdot10^{-2}$ *кг*$\cdot$*м*^{2}*/с*).

156. Однородный тонкий стержень длиной l = 1,0 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой m_1 = 7,0 г. Траектория пули перпендикулярна стержню и к плоскости, в которой лежат стержень и ось вращения. Определить массу m стержня, если в результате попадания пули он отклонился на угол α = = 30°. Принять скорость пули v = 360 м/с. (*Ответ:* m *= 1,9 кг*).

157. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой ν_1 = 6 мин$^{-1}$, стоит человек

массой m_1 =70 кг. Когда человек прошел в центр платформы, она стала вращаться с частотой ν_2 = 9 мин$^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Ось вращения платформы совпадает с ее осью симметрии, а момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. (*Ответ:* m_2 *= 280 кг*).

158. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром D = = 0,8 м и массой m_1 = 6,0 кг стоит человек массой m_2 = 60 кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него со скоростью v = 5,0 м/с мяч массой m = 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии r = 0,4 м от оси скамьи. (*Ответ:* ω*=0,098 рад/с*).

159. Шарик массой m = 60 г, привязанный к концу нити длиной l = 1,2 м, вращается с частотой ν = 2,0 с$^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить другим концом привязана к вертикальной неподвижной оси и, наматываясь на ось, укорачивается, приближая шарик к оси до расстояния l_1=0,6 м. С какой частотой ν_1 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь. (*Ответ:* ν_1 *= 8 с*$^{-1}$*; A=20,5 Дж*).

160. Однородный стержень длиной l = 1,0 м и массой m_1 = 2,0 кг подвешен на горизонтальной оси вращения, проходящей через верхний конец стержня. В точку стержня на расстоянии $(2/3)l$ от оси абсолютно упруго ударяет шарик массой m = 10,0 г. Траектория шарика перпендикулярна стержню и к плоскости, в которой лежат стержень и ось вращения. После удара стержень отклонился на угол α = 30°. Определить скорость шарика. Трением в шарнирах оси вращения стержня пренебречь. (*Ответ:* v *=100 м/с*).

Работа, мощность, энергия

161. Найти работу силы при перемещении груза по наклонной плоскости вверх с ускорением a = 1,1 м/с^2. Масса груза m = 120 кг, длина наклонной плоскости l= 2,5 м, угол наклона плоскости к горизонту α=30°, коэффициент трения μ=0,14. (*Ответ:* *A=2158 Дж*).

162. Тело массой m=2,0 кг, бросили со скоростью v= 10 м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти работу силы тяжести над телом при движении: а) до верхней точки траектории; б) на всем интервале движения по траектории. Построить график зависимости кинетической энергии тела от времени на интервале движения тела. (*Ответ: а) –50 Дж; б) 0 Дж*).

163. Скорость автомобиля на прямолинейном участке разгона меняется по закону $v = 0{,}4t + 0{,}2t^2$ (числовые коэффициенты формулы заданы в единицах системы СИ). Масса автомобиля 2000 кг. Найти работу силы тяги на интервале времени от t_1=2 с до t_2=4 с. Определить мощность, развиваемую автомобилем, в момент времени t = 4 с. (*Ответ: А=20,48 кДж; N=13,4 кВт*).

164. Горизонтально летящая пуля массой m = 8,0 г попадает в деревянный куб, лежащий на столе, и пробивает его. Определить, какая часть энергии пули перешла в тепло, если ее начальная скорость v_1 = 800 м/с, а скорость на вылете из куба v_2 = 100 м/с. Масс куба m = = 2,0 кг. Траектория пули проходит через центр куба, трением между кубом и столом пренебречь. (*Ответ: 17,36 Дж*).

165. Автомобиль массой m = $8\cdot10^3$ кг движется со скоростью v=72 км/ч по горизонтальной поверхности и испытывает постоянную силу сопротивления F= 1600 Н. После прекращения действия силы тяги определить: 1) время, требуемое для того, чтобы остановилась машина; 2) расстояние, которое пройдет машина до полной остановки; 3) работу силы сопротивления на всем пути. (*Ответ: 1) t=100 с; 2) s=1 км; 3) А=$1{,}6\cdot10^6$ Дж*).

166. Определить кинетическую энергию вращающегося на токарном станке полого стального цилиндра длиной l = 400 мм. Внутренний и наружный диаметры цилиндра соответственно равны d_1= 60 мм, d_2= 100 мм. Число оборотов станка n = 120 об/мин. (*Ответ: $W_к$= =154,45 Дж*).

167. Однородный шар массы m = 2 кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α=30° с горизонтом.

Найти кинетическую энергию шара через t=5 с после начала движения. Построить график зависимости кинетической энергии шара от времени. (*Ответ:* $W_к$ *= 430 Дж*).

168. Включенный вентилятор делает n = 900 об/мин. Момент инерции вентилятора I =1,1·10^{-2} кг·м^2. После выключения электропитания вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Определить момент сил торможения и работу момента сил. Построить график зависимости кинетической энергии вентилятора от времени на интервале торможения. (*Ответ: М=0,1 Н·м; А=48,8 Дж*).

169. Симметричное твердое тело вращается относительно оси симметрии с постоянной скоростью, соответствующей n=10 об/с. Кинетическая энергия тела $W_к$=7,9·10^3 Н·м. За сколько времени приложенный к телу момент силы M= 50 Н·м увеличит угловую скорость тела в два раза? Построить график зависимости $W_к$=$f(t)$ на этом интервале времени. (*Ответ:* t*= 5 с*).

170. Диск массой 5 кг насажен на вал, на котором он может вращаться. К ободу диска приложена постоянная касательная сила F=20 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через 5 с после начала действия силы. Массой вала пренебречь. (*Ответ:* $W_к$ *= 1,92 кДж*).

Потенциальное поле сил

171. Определить напряженность G гравитационного поля на высоте h = 1000 км над поверхностью Земли. Считать известными ускорение g свободного падения у поверхности Земли и ее радиус R. (*Ответ:* G *= 7,33 м/с*).

172. Какая работа A будет совершена силами гравитационного поля при падении на Землю тела массой m = 2,0 кг: 1) с высоты h = = 1000 км; 2) из бесконечности? (*Ответ:* $A_1 = 1,675\cdot 10^7$ *Дж;* $A_2 = 12,5\cdot 10^7$ *Дж*).

173. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой m = 30 кг. Определить работу A, которая при этом будет со-

вершена силами гравитационного поля Земли. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными. (*Ответ:* $A_1=1{,}87\cdot10^9$ *Дж*).

174. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью $v = 5$ км/с. На какую высоту поднимется ракета. (*Ответ:* $h=1593$ *км*).

175. По круговой орбите вокруг Земли обращается спутник с периодом $T = 90$ мин. Определить, на какой высоте от поверхности Земли движется спутник. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными. (*Ответ:* $h=260$ *км*).

176. На каком расстоянии r от центра Земли находится точка, в которой напряженность суммарного гравитационного поля Земли и Луны равна нулю? Принять, что масса Земли в 81 раз больше массы Луны и что расстояние от центра Земли до центра Луны равно 60 радиусам Земли. (*Ответ:* $r=3{,}43\cdot10^8$ *м*).

177. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 520$ км. Определить период обращения спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными. (*Ответ:* $T=5{,}7\cdot10^3$ *с*).

178. Определить линейную и угловую скорости спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на высоте $h = 1000$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус считать известными. (*Ответ:* $v=7{,}33\cdot10^3$ *м/с;* $\omega=6{,}29\cdot10^3$ *рад/с*).

179. Какова масса Земли, если принять, что Луна в течение года совершает 13 обращений вокруг Земли. Расстояние от Земли до Луны равно $3{,}844\cdot10^8$ м? (*Ответ:* $M=5{,}7\cdot10^{24}$ *кг*).

180. На какой высоте круговой орбиты должен вращаться искусственный спутник Земли, чтобы он находился все время над одной и той же точкой планеты? (*Ответ:* $h=35800$ *км*).

Гидродинамика

181. Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне наполнен водой и керосином. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекающей воды в начальный момент времени, если толщина слоя воды $h_в$ = 30 см, а слоя керосина – $h_к$= 20 см. (*Ответ: v =3 м/с*).

182. По горизонтально расположенной трубе протекает идеальная жидкость. На прямолинейном участке трубы вдоль ее оси давление меняется по закону $p = A+Bx$, где A=10^5 Па; B=10^2 Па/м. Определить усилие, которое действует на объем жидкости 1 $см^3$ внутри трубы на этом участке. Ось ОХ совпадает с осью трубы. (*Ответ:* $F = 10^{-4}$ *Н*).

183. Свинцовый шарик равномерно опускается в глицерине. При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание еще остается ламинарным? Известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу Re≥0,5. (*Ответ: d =5,2 мм*).

184. Радиус круглого сечения трубопровода монотонно уменьшается по закону $r = r_0 \cdot e^{-\alpha x}$, где α = 0,50 $м^{-1}$, x – расстояние от начала трубопровода. Найти отношение чисел Рейнольдса в сечениях, отстоящих друг от друга на Δx = 3,2 м. (*Ответ:* $Re_2/Re_1 = 4,95$).

185. Определить время истечения идеальной жидкости из открытого цилиндрической формы бака высотой 2 м, если диаметр небольшого отверстия в дне бака в 50 раз меньше диаметра сосуда. (*Ответ: t = 27 мин*).

186. Горизонтально расположенная прямая труба заполнена идеальной жидкостью. На участке трубы длиной Δx = 2,92 м разность давлений $\Delta p = 2{,}6\cdot10^2$ Па. Определить ускорение, с которым движутся частицы жидкости, если ее плотность равна ρ = 890 $кг/м^3$. (*Ответ:* $a = 0{,}1$ $м/с^2$).

187. Найти скорость течения углекислого газа в трубе, если известно, что за полчаса через поперечное сечение трубы протекает 0,51 кг

газа. Плотность газа принять равной ρ = 7,5 кг/м^3. Диаметр трубы равен D=2,0 см. В решении задачи пренебречь вязкостью газа. (*Ответ:* v *=0,12 м/с*).

188. Две свинцовые дробинки диаметром d_1= 3 мм и d_2= 1 мм опустили в бак с глицерином. Высота жидкости в баке h = 1 м. На сколько будет отличаться время Δt движения до дна этих дробинок. Температура глицерина 20 $^\circ$C. (*Ответ:* Δt *=4 мин*).

189. В сосуд льется вода, причем за 1 с наливается 0,2 л воды. Каков должен быть диаметр отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне, равном h = 8,3 см? (*Ответ:* d *=1,4 см*).

190. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Во сколько раз сила трения, действующая на всплывающий шарик, отличается от веса этого шарика. (*Ответ:* $F_{тр}/(mg) = 3$).

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ. СИСТЕМА СИ

Общие сведения

В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла стандарт, который впервые получил название «Международная система единиц (СИ)».

В 1971 г. IV Генеральная конференция по мерам и весам внесла изменения в СИ, добавив, в частности, единицу измерения количества вещества (моль).

В настоящее время СИ принята в качестве законной системы единиц измерения.

Система СИ определяет семь *основных* единиц измерения и *производные* единицы измерения, а также набор *приставок*. Установлены стандартные сокращённые обозначения для единиц измерения и правила записи производных единиц.

В России действует ГОСТ 8.417-2002, предписывающий обязательное использование СИ. В нем перечислены единицы измерения, приведены их русские и международные названия и установлены правила их применения. По этим правилам в международных документах и на шкалах приборов допускается использовать только международные обозначения. Во внутренних документах и публикациях можно использовать либо международные, либо русские обозначения (но не те и другие одновременно).

Основные единицы

Метр – длина, равная 1650763,73 длины волны излучения в вакууме, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома ^{86}Kr. Позднее на XVII Генеральной конференции по мерам и весам (1983 г.) метр определен как длина пути, проходимого в вакууме светом за 1/299 792 458 секунды. При этом скорость света в вакууме была постулирована равной точно 299 792 458 м/с.

Килограмм – единица массы – представлен массой международного прототипа килограмма. Это цилиндр из сплава платины (90 %), и иридия (10 %) диаметром 39 мм и такой же высоты. Этот эталон обеспечивает относительную точность его воспроизведения около 10^{-8}.

Секунда – единица времени. Принято считать (XIII Генеральная конференция по мерам и весам, 1967 г), что секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями атома цезия-133. Относительная точность воспроизведения секунды с помощью цезиевого эталона частоты составляет около 10^{-11}.

Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на каждый метр длины.

Градус Кельвин – единица измерения температуры по термодинамической шкале, в которой для температуры тройной точки воды установлено значение $273{,}16^{o}$ К (точно).

Кандела – единица силы света, значение которой принимается таким, чтобы яркость полого излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 кд/см^2.

Моль – количество вещества. Один моль любого вещества содержит, по определению, одинаковое число структурных элементов (число Авагадро $N_A = 6{,}0220921 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$). Это число атомов, содержащихся в 0,012 кг изотопа углерода ^{12} C.

Дополнительные единицы

Плоский угол – радиан, равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Телесный угол – стерадиан, равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

В рамках СИ считается, что основные единицы имеют независимую размерность, т. е. ни одна из основных единиц не может быть получена из других.

Обозначения основных и дополнительных единиц

Величина	Единица измерения			
	Наименование		Обозначение	
	русское	международное	русское	международное
Основные				
Длина	метр	metre (meter)	м	m
Масса	кило-грамм	kilogram	кг	kg
Время	секунда	second	с	s
Сила электрического тока	Ампер	ampere	А	A
Термодинамическая температура	Кельвин	kelvin	К	K
Сила света	кандела	candela	кд	cd
Количество вещества	моль	mole	моль	mol
Дополнительные				
Плоский угол	радиан		рад	rad
Телесный угол	стерадиан		ср	sr

Производные единицы получаются из основных с помощью алгебраических действий, таких как умножение и деление. Некоторым из производных единиц в Системе СИ присвоены собственные названия, например, 1 Н = 1 м ·1 кг ·1 с$^{-2}$ или в латинской транскрипции это записывается так –LMT^{-2}. Ниже приведены таблицы производных единиц физических величин.

Производные единицы Международной системы (СИ)*

Величина		Единица		
Наименование	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение (русское)
I. Производные единицы пространства и времени				
Площадь	S	L^2	квадратный метр	м^2

* Приведено по ГОСТ 9867-61

Величина		Единица		
Наименование	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение (русское)
Объём, вместимость	V	L^3	кубический метр	м^3
Скорость	v, u	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Ускорение	a	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с^2
Частота периодического процесса	f, ν	T^{-1}	герц	Гц
Частота дискретных событий (частота вращения, частота импульсов и т.д.)	f, ω	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$
Угловая скорость	ω	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	ε	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с^2
II. Производные единицы механических величин				
Плотность	ρ	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м^3
Удельный объём	v	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	м^3/кг
Момент инерции (динамический)	I	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг·м^2
Количество движения (импульс)	p	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Сила	P, F	LMT^{-2}	ньютон	Н

Величина		Единица		
Наименование	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение (русское)
Вес	G	LMT^{-2}	ньютон	Н
Удельный вес	γ	$L^{-2}MT^{-2}$	ньютон на кубический метр	Н/м^3
Давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	E, σ	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Коэффициент поверхностного натяжения	σ	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м
Работа	A	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Энергия	E, W	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Молярная концентрация	x_i	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м^3
Мощность	N, P	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Коэффициент вязкости динамический	μ	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па· с
Коэффициент вязкости кинематический	ν	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м^2/с
Объёмный расход	V	L^3T^{-1}	кубический метр на секунду	м^3/с
Массовый расход	G, M	MT^{-1}	килограмм на секунду	кг/с

Единицы, не входящие в Систему СИ

Некоторые единицы измерения, не входящие в Систему СИ, по решению Генеральной конференции по мерам и весам «допускаются для использования совместно с СИ».

Единица измерения	Между-народ-ное на-звание	Обозначение		Величина в единицах СИ
		русское	междуна-родное	
минута	minute	мин	min	60 с
час	hour	ч	h	60 мин = 3600 с
сутки	day	сут	d	24 ч = 86 400 с
градус	degree	°	°	(π/180) рад
угловая минута	minute	′	′	(1/60)° = (π/10 800)
угловая секунда	second	″	″	(1/60)′ = (П/648 000)
литр	litre (liter)	л	l, L	1 дм ^{3}
тонна	tonne	т	t	1000 кг
электронвольт	electron volt	эВ	eV	10 $^{-19}$ Дж
атомная едини-ца массы	unified atomic mass unit	а. е. м.	u	1,49597870691 $^{-27}$ кг
астрономиче-ская единица	astronom ical unit	а. е.	ua	10 ^{11} м
морская миля	nautical mile	миля		1852 м (точно)
узел	knot	уз		1 морская миля в час = = (1852/3600) м/с
ар	are	а	а	10 ^{2} м ^{2}
гектар	hectare	га	ha	10 ^{4} м ^{2}
бар	bar	бар	bar	10 ^{5} Па
ангстрем	engstrem	Е	Е	10 $^{-10}$ м
барн	barn	б	b	10 $^{-28}$ м ^{2}

Приложение 3

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Таблица П1

Основные физические постоянные

Физическая постоянная	Обозна-чение	Значение
Нормальное ускорение свободного па-дения	g	9,81 м/с^2

Окончание табл. П1

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг*с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль*К)
Стандартный объем	V_m	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Заряд электрона	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$
Постоянная Стефана – Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2*К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м*К
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж*с $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж*с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус Бора	a	$0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927 \cdot 10^{-23}$ А*м^2
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	*а.е.м.*	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблица П2

Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^{8}$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ м

Таблица П3

Физические свойства некоторых веществ

Вещество	Плотность, ρ, кг/м^3 (при 20^{o}С)	Предел прочности, $Ф_{вр}$ 10^7 Н/м^2	Модуль Юнга, Е, 10^{10} Н/м^2	Температура плавления, t ^{0}С
Алюминий	2700	8,96÷10,75	6,85	660
Железо	7870	1,84 ÷22,5	10 ÷ 13	1535
Латунь	8400			905÷1045
Медь	8930	20 ÷25	11,2	1083
Олово: белое серое	 7290 5800	1,47 ÷ 2,4	4,06 ÷5,86	231,9
Золото	19300	12,4	8,06	1063
Никель	8600÷8900	34,3÷56,1	20,2	1453
Платина	21370	14,0	14,7	1769
Ртуть	13546	–	–	- 38,86
Свинец	11342	1,47 ÷1,76	1,62	327,3
Серебро	10420÷10590	13,5	8,05	960,8
Вольфрам	18600÷19100	69,9 ÷80,9	34,2 ÷ 40	3380
Цинк	6920	2,94 ÷3,92	12,7	419,5
Сталь	7700	29,4	19,6	1300
Стекло	2400÷2800	-	-	-
Лед	917	-	-	0
Пробка	220÷260	-	-	-
Вода	1000	-	-	-
Керосин	800	-	-	-
Спирт	790	-	-	-
Глицерин	1260	-	-	-

Таблица П4

Коэффициент динамической вязкости различных сред при атмосферном давлении

Вещество	Химическая формула	$t = 0^o$ С	$t = 20^o$ С	$t = 50^o$ С	$t = 100^o$ С
Коэффициент динамической вязкости газов и пара при разных температурах, $\eta \cdot 10^{-8}$ кг/(м·с)					
Воздух		1708	1812	1954	2180
Водород	H_2	840	880	938	1033

Окончание табл. П4

Вещество	Химическая формула	$t = 0^{o}$ C	$t = 20^{o}$ C	$t = 50^{o}$ C	$t = 100^{o}$ C
Гелий	He	1860	1946	2082	2281
Азот	N_2	1665	1766	1883	2086
Углекислый газ	CO_2	1367	1463	1607	1827
Кислород	O_2	1910	2026	2182	2437
Аргон	Ar	2085	2215	2400	2695
Водяной пар	H_2O	883	-	1065	1250
Коэффициент динамической вязкости жидкостей при разных температурах, $\eta \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с)					
Глицерин	$C_3H_8O_3$	12100	1480	180	13
Бензол	C_6H_6	0,770	0,584	-	0,269
Анилин	C_6H_7	10,2	4,40	1,80	0,80
Этиловый спирт	C_2H_5OH	1,773	-	-	-
Вода, плотностью 10^3 кг/м^3	H_2O	0,1786	1,0019	0,05477	-
Бензин	-	-	0,530	-	-
Ртуть	Hg	1,680	1,550	-	-
Молоко	-	-	1,80	-	-

Таблица П5

Скорость звука в газах при 0 ^{o}C и давлении 1 атм.

Газ	Скорость звука a, м/с
Водород	1284
Гелий	965
Метан	430
Азот	334
Кислород	314
Воздух	331

Таблица П6

Скорость звука в жидкостях

Жидкость	Скорость звука a, м/с
Вода обычная (при $t = 25$ ^{o}C)	1497

Окончание табл. П6

Жидкость	Скорость звука a, м/с
Глицерин (при $t = 20\ ^oC$)	1923
Этиловый спирт (при $t = 20\ ^oC$)	1165
Бензин (при $t = 25\ ^oC$)	1295
Керосин (при $t = 34\ ^oC$)	1295
Ртуть (при $t = 20\ ^oC$)	1452÷1461

Таблица П7

Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		W_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8{,}16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$	1876
α – частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5{,}96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный π – мезон	$2{,}41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2{,}16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблица П8

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α,α	альфа	Ν,ν	ню
Β,β	бета	Ξ,ξ	кси
Γ,γ	гамма	Ο,ο	омикрон
Δ,δ	дэльта	Π,π	пи
Ε,ε	эпсилон	Ρ,ρ	ро
Ζ,ζ	дзета	Σ,σ	сигма
Η,η	эта	Τ,τ	тау
Θ,θ	тэта	Υ,υ	ипсилон
Ι,ι	йота	Φ,φ	фи

Окончание табл. П8

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Κ,κ	каппа	Χ,χ	хи
Λ,λ	ламбда	Ψ,ψ	пси
Μ,μ	мю	Ω,ω	омега

Таблица П9

Приставки и множители для образования десятичных кратных
и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель
Обозначение	Наименование	
Э	экса	10^{18}
П	пэта	10^{15}
Т	тера	10^{12}
Г	гига	10^{9}
М	мега	10^{6}
к	кило	10^{3}
г	гекто	10^{2}
да	дека	10^{1}
д	деци	10^{-1}
с	санти	10^{-2}
м	милли	10^{-3}
мк	микро	10^{-6}
н	нано	10^{-9}
п	пико	10^{-12}
ф	фемто	10^{-15}
а	атто	10^{-18}

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Механика. / С.П. Стрелков.– М.: Наука, 1975. – 560 с.

2. Механика и теория относительности : учеб. пособие для физ. специальностей вузов / А.Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

3. Механика: учеб. для студентов вузов / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев ; под ред. В. А. Алешкевича. – М. : Академия, 2004. – 480 с. – ISBN 5-7695-1155-9.

4. Астахов, А. В. Курс физики. Т.1 Механика. Кинетическая теория материи / А. В. Астахов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

5. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики. Вып. 2. Пространство. Время. Движение : пер. с англ. / Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; под ред. Я. А. Смородинского. – изд. 5-е. – М. : ЛКИ, 2007. – 440 с. – ISBN 978-5-382-00273-6.

Учебное издание

ДМИТРИЕВА Елена Валерьевна
ПЛЕШИВЦЕВ Валерий Семенович

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ФИЗИКЕ.
МЕХАНИКА

Подписано в печать 30.09.09
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 8,37. Тираж 1000 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
600000, Владимир, ул. Горького, 87.