

Владимирский государственный университет

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические указания к практическим занятиям
(часть первая)

Составитель: О.Н.Шамышева

Владимир 2005

УДК _____

Теория принятия решений. Методические указания к практическим занятиям/
Владим. гос. ун-т. Сост. О.Н.Шамышева. Владимир 2006. 27с.

Содержит краткое описание методов многокритериальной оценки альтернатив теории принятия решений и их использование для решения практических задач. Первая часть методических указаний включает краткое содержание следующих методов: многокритериальная теория полезности (МАУТ), подход аналитической иерархии, методы ELECTRE. Варианты заданий представлены в конце методического пособия.

Методические указания предназначены для студентов специальности 2201 – вычислительные системы, комплексы и сети. Практические занятия предполагают использование в процессе выполнения стандартных офисных программ.

Библиогр.: 2назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского государственного университета.

Рецензент - д.т.н., профессор Макаров Р.И. (Владимирский государственный университет).

ОЦЕНКА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ.

СОДЕРЖАНИЕ.

Стр.

1. Введение.
 - 1.1 Об этапах процесса принятия решений.
 - 1.2 Различные группы задач принятия решений.
 - 1.3 Пример.
 - 1.4 Контрольные вопросы.
2. Многокритериальная теория полезности (MAUT).
 - 2.1 Основные этапы подхода MAUT.
 - 2.2 Аксиоматическое обоснование.
 - 2.3 Основные теоремы.
 - 2.4 Построение однокритериальных функций полезности.
 - 2.5 Проверка условий независимости.
 - 2.6 Определение весовых коэффициентов (коэффициентов важности) критериев.
 - 2.7. Определение полезности альтернатив.
 - 2.8. Пример использования метода MAUT.
 - 2.9. Контрольные вопросы.
3. Оценка многокритериальных альтернатив: подход аналитической иерархии.
 - 3.1. Основные этапы подхода аналитической иерархии.
 - 3.2. Структуризация.
 - 3.3. Парные сравнения.
 - 3.4. Вычисление коэффициентов важности.
 - 3.5. Определение наилучшей альтернативы.
 - 3.6. Проверка согласованности суждений ЛПР.
 - 3.7. Контрольные вопросы.
4. Оценка многокритериальных альтернатив: методы ELECTRE.
 - 4.1. Конструктивистский подход.
 - 4.2. Два основных этапа.
 - 4.3. Свойства бинарных отношений.
 - 4.4. Метод ELECTRE I.
 - 4.5 Пример использования метода ELECTRE I.
 - 4.6. Контрольные вопросы.
5. Варианты заданий.
6. Литература.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

1.1 Об этапах процесса принятия решений.

Существует три основных этапа процесса принятия решений: поиск вариантов решения (альтернатив), изобретение новых альтернатив, выбор наилучшей из группы альтернатив[1]. Все эти этапы, безусловно, встречаются в достаточно сложных реальных ситуациях принятия решений. Мы можем представить себе политика, подготавливающего законопроект для рассмотрения парламентом. Изучая проблему, политический деятель обращается к истории, анализирует современную ситуацию. Зная точки зрения политических партий, представленных в парламенте, он ищет вариант законопроекта, достаточно приемлемый для других и решающий, с его точки зрения, поставленную задачу. Наконец, сравнивая несколько вариантов законопроекта, исходящих от различных авторов, он оценивает их по совокупности критериев (эффективность, затраты, влияние на различные социальные группы, реализуемость и т. д.) и выбирает наилучший.

Если мы обратимся к существующим методам принятия решений[1], то увидим, что подавляющее большинство этих методов предназначено для решения задач, которые Г. Саймон относит к третьему этапу - к сравнению заданных альтернатив и к выбору наилучшей из них. Легко понять, почему задачи первого и второго этапов не рассматриваются в рамках различных теорий выбора. Задачи эти в основных своих чертах неформализованы и решаются благодаря навыкам и умениям консультанта и ЛПР. Если в процессе принятия решений всегда переплетены наука и искусство [3], то на первых двух этапах научные методы не играют основной роли. На третьем этапе задача предстает уже в достаточно определенном виде.

Рассмотрим наиболее известные методы анализа решений, ориентированные на задачи, при решении которых используются модели субъективного характера. При решении таких задач строится не модель окружающей нас реальности, а модель желаний, предпочтений, политики человека, принимающего решения. Описанные далее методы построения таких моделей реализованы в виде компьютерных систем поддержки принятия решений.

1.2 Различные группы задач принятия решений

Представим в самых общих чертах группы задач принятия решений.

Задачи первой группы

Дано: группа из n альтернатив (вариантов решения проблемы) и N критериев, предназначенных для оценки альтернатив. Предположим, что каждая из альтернатив имеет оценку по каждому из критериев, полученную либо от экспертов, либо на основании объективных расчетов.

Требуется: построить решающие правила на основе предпочтений ЛПР, позволяющие:

- выделить лучшую альтернативу;
- упорядочить альтернативы по качеству;
- отнести альтернативы к упорядоченным по качеству классам решений.

Задачи второй группы

Дано: группа из N критериев, предназначенных для оценки любых возможных альтернатив; альтернативы либо заданы частично, либо появляются после построения решающего правила.

Требуется: на основании предпочтений ЛПР построить решающие правила, позволяющие:

- упорядочить по качеству все возможные альтернативы;
- отнести все возможные альтернативы к одному из нескольких (указанных ЛПР) классов решений.

Примером задач первой группы является многокритериальная оценка имеющихся в продаже товаров, например телевизоров или стиральных машин. Здесь все возможные альтернативы заданы, критерии определены ЛПР; оценки реальных альтернатив по критериям дают, как правило, эксперты. От ЛПР требуется построить правило сравнения объектов, имеющих оценки по многим критериям (например, сравнить стиральные машины на основании таких оценок, как цена, долговечность, стоимость эксплуатации, надежность, возможность ремонта и т.д.).

Примером задач второй группы является построение правила принятия решений для государственного или частного фонда, распределяющего ресурсы на научные исследования. Проекты проведения исследований еще не поступили, но критерии оценки и решающее правило должны быть определены заранее. Обычно таких проектов много, и можно предположить, что они будут достаточно разнообразны по оценкам. Критерии и решающее правило определяет ЛПР. Затем уже поступают

проекты, которые оцениваются экспертами по заданным критериям. Решающее правило позволяет сразу же получить целостную оценку проекта.

Представленные выше две группы задач становятся весьма близки при рассмотрении в рамках первой задачи большого числа достаточно разнообразных (по своим оценкам) альтернатив. Но при малом числе заданных альтернатив методы решения задач первой и второй групп существенно различаются.

1.3 Пример

В силу благоприятных обстоятельств жители одного из городов некой страны стали чаще выезжать за границу. Существующие аэропорты, расположенные около города (назовем его городом М), не соответствовали по своим возможностям новому потоку пассажиров. Возникла необходимость в построении еще одного аэропорта около города М.

Правительство этой страны назначило комиссию по выбору места для аэропорта, которая приступила к работе. Были обследованы различные площадки около города, где постройка аэропорта нужного размера представлялась возможной. После многочисленных дискуссий комиссия определила три основных критерия для оценки вариантов расположения аэропорта.

- 1. Стоимость постройки.** Желательно построить аэропорт с заданной пропускной способностью за наименьшую возможную цену.
- 2. Расстояние от города.** Желательно, чтобы поездка пассажиров от аэропорта в город и обратно занимала наименьшее время.
- 3. Минимальное шумовое воздействие.** Количество людей, подвергающихся нежелательным шумовым воздействиям, должно быть, по возможности, минимальным.

Легко заметить, что все эти критерии противоречивы. Постройка аэропорта на большом расстоянии от города потребует, вероятно, меньших затрат, хотя время поездки будет больше. Противоречивы также критерии расстояния от города и числа людей, подвергающихся шумовым воздействиям. Как выбрать площадку для аэропорта? Как найти компромисс между критериями? Подчеркнем некоторые особенности рассматриваемой задачи. Прежде всего, она может быть отнесена к так называемым неструктурированным задачам. Хотя все критерии имеют вполне ясное объективное содержание, а оценки по критериям — количественное выражение, нет единой количественной модели, описывающей проблему в целом. Есть лишь набор из трех субъективно (комиссией) определенных критериев. Необходимо выбрать ту из заданных альтернатив (место для строительства), где достигается наиболее предпочтительный, с точки зрения комиссии, компромисс между критериями. Для решения таких задач строятся модели, описывающие предпочтения ЛПП (в данном случае комиссии), применение которых позволяет сделать лучший выбор.

Эти модели строятся по-разному в различных научных школах в области принятия решений.

1.3 Контрольные вопросы.

Дайте определения следующих ключевых понятий:

- *Принятие решений*
- *Лицо, принимающее решения (ЛПП)*
- *Роли людей в процессах принятия решений*
- *Активные группы*
- *Индивидуальный выбор*
- *Альтернативы*
- *Критерии*
- *Шкалы критериев*
- *Процесс принятия решений, его этапы*
- *Доминирующие и доминируемые альтернативы*
- *Множество Эджворта-Парето (Э-П)*

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ (МАУТ).

Научное направление МАУТ (Multi-Attribute Utility Theory) отличаются следующие особенности [4]:

- строится функция полезности, имеющая аксиоматическое (чисто математическое) обоснование;
- некоторые условия, определяющие форму этой функции, подвергаются проверке в диалоге с ЛППР;
- обычно решается задача из второй группы, а полученные результаты используются для оценки заданных альтернатив.

2.1 Основные этапы подхода МАУТ

Представим этапы решения задачи при подходе МАУТ.

1. Разработать перечень критериев.
2. Построить функции полезности по каждому из критериев.
3. Проверить некоторые условия, определяющие вид общей функции полезности.
4. Построить зависимость между оценками альтернатив по критериям и общим качеством альтернативы (многокритериальная функция полезности).
5. Оценить все имеющиеся альтернативы и выбрать наилучшую.

2.2 Аксиоматическое обоснование

Точно так же, как и классическая теория полезности, МАУТ имеет аксиоматическое обоснование. Это означает, что выдвигаются некоторые условия (аксиомы), которым должна удовлетворять функция полезности ЛППР. В случае, если условия удовлетворяются, дается доказательство существования функции полезности в том или ином виде. В МАУТ эти условия можно разделить на две группы. Первая группа — аксиомы общего характера, идентичные тем, которые использовались в теории полезности.

1. **Аксиома полноты**, утверждающая, что может быть установлено отношение между полезностями любых альтернатив: либо одна из них превосходит другую, либо они равны.

2. **Аксиома транзитивности**: из превосходства полезности альтернативы А над полезностью альтернативы В и превосходства полезности В над полезностью С следует превосходство полезности альтернативы А над полезностью альтернативы С.

3. Для соотношений между полезностями альтернатив А, В, С, имеющими вид

$$U(A) > U(B) > U(C), \quad 0 < \alpha < 1; \quad 0 < \beta < 1,$$

можно найти такие числа, что:

$$\begin{aligned} \alpha * U(A) + (1 - \alpha) * U(C) &= U(B), \\ U(A) * (1 - \beta) + \beta * U(B) &> U(C). \end{aligned}$$

Аксиома 3 основана на предположении, что функция полезности непрерывна и что можно использовать любые малые части полезностей альтернатив.

Вторая группа условий специфична для МАУТ. Они называются аксиомами (условиями) независимости, позволяющими утверждать, что некоторые взаимоотношения между оценками альтернатив по критериям не зависят от значений по другим критериям. Приведем несколько условий независимости.

1. **Независимость по разности**. Предпочтения между двумя альтернативами, отличающимися лишь оценками по порядковой шкале одного критерия C_1 не зависят от одинаковых (фиксированных) оценок по другим критериям C_2, \dots, C_N . На первый взгляд, это условие кажется естественным и очевидным. Но возможны случаи, когда оно не выполняется. Так, в статье П. Хампфриса [5] приведен следующий пример: выбор автомобиля. При примерно одинаковой цене ЛППР предпочитает большую по размеру машину. Однако его предпочтение меняется на обратное, когда он узнает, что у машины не гидравлическая, а механическая коробка передач, что усложняет управление.

2. **Независимость по полезности**. Критерий C_1 называется независимым по полезности от критериев C_2, \dots, C_N , если порядок предпочтений лотерей, в которых меняются лишь уровни критерия C_1 не зависит от фиксированных значений по другим критериям. Как мы увидим далее, лотереи используются при построении функций полезности по отдельным критериям.

3. **Независимость по предпочтению** является одним из наиболее важных и часто используемых условий. Два критерия C_1 и C_2 независимы по предпочтению от других критериев $C_3,$

..., CN, если предпочтения между альтернативами, различающимися лишь оценками по C_1 , C_2 , не зависят от фиксированных значений по другим критериям.

Приведем пример нарушения условия независимости по предпочтению — выбор дачи для летнего отдыха (табл. 2.1). Вполне возможно, что альтернатива А предпочтительнее альтернативы В, если по критерию «Расстояние от города» оба варианта имеют оценку «Дача расположена недалеко от города». В то же время, если оба варианта имеют по последнему критерию оценку «Дача расположена далеко от города», вариант В может оказаться предпочтительнее варианта А.

Таблица 2.1.

Задача выбора дачи для летнего отдыха.

Альтернатива	Критерий		
	Качество дачи (комфортность)	Наличие магазина Недалеко от дачи	Расстояние от города
А	Хорошее	Нет магазина	
В	Среднее	Есть магазин	

Первые два условия независимости относились к независимости одного критерия от остальных, третье условие — к независимости пары критериев от прочих.

Судя по литературе, отсутствуют примеры зависимости трех и большего числа критериев от остальных, которая не проявлялась бы в нарушении условия независимости по предпочтению. По мнению известных ученых Г.Фишера и Д.Винтерфельда [6], появление такой зависимости «неопределенно по своей природе и трудно обнаружимо». В связи с этим понятно особое внимание, уделяемое проверке условия независимости по предпочтению.

2.3 Основные теоремы

Если аксиомы первой группы и некоторые условия независимости выполнены, то из этого следует строгий вывод о существовании многокритериальной функции полезности в определенном виде.

Приведем без доказательств основную теорему многокритериальной теории полезности, на которой основаны практические методы оценки альтернатив [7].

Если условия независимости по полезности и независимости по предпочтению выполнены, то функция полезности является аддитивной

$$U(x) = \sum_{i=1}^N w_i U_i(x) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

либо мультипликативной

$$1 + k U(x) = \prod_{i=1}^N [1 + k w_i w_j U_i(x)] \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^N w_i \neq 1$$

где U , U_i — функции полезности, изменяющиеся от 0 до 1; w_i — коэффициенты важности (веса) критериев, причем $0 < w_i < 1$; коэффициент $k > -1$. Таким образом, многокритериальную функцию полезности можно определить, если известны значения коэффициентов w_i , k , а также однокритериальные функции полезности $U_i(x)$.

Полученный теоретический результат является основой метода, неоднократно использованного для решения практических задач. Обсудим приведенные выше этапы применения этого метода, используя в качестве примера задачу выбора площадки для строительства аэропорта.

2.4 Построение однокритериальных функций полезности

Выше был приведен перечень критериев для оценки вариантов постройки аэропорта. Предположим, что после рассмотрения вариантов разброс оценок по критериям может быть представлен табл. 2.2

Таблица 2.2

Разброс оценок вариантов постройки аэропорта.

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение

(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	200 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	40 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

Зная диапазон изменения оценок по каждому из критериев, построим функцию, определяющую полезность для ЛПР каждой оценки из этого диапазона. Максимальное значение этой функции положим равным единице, а минимальное — нулю.

На рис.2.1 приведен пример построения функции полезности ЛПР для критерия «Стоимость постройки аэропорта».

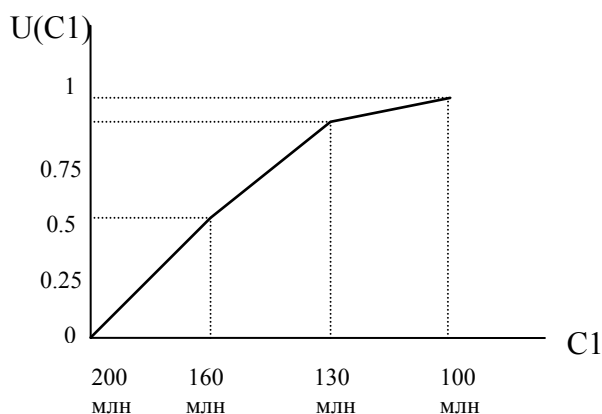


Рис. 2.1. Функция полезности для критерия «Стоимость постройки аэропорта»

Первоначально известны две точки функции полезности: $U(100 \text{ млн}) = 1$, $U(200 \text{ млн}) = 0$. Для нахождения промежуточных точек используются типовые лотереи. В лотерее 1 на рис. 2.2 (слева) перед ЛПР ставится следующая задача: «Определите эквивалент определенности для лотереи, имеющей с равными вероятностями ($p=0,5$) минимальную и максимальную стоимости постройки». ЛПР предъявляют ряд значений (например, 120 млн, 130 млн и т.д.) и спрашивают: выше или ниже данного значения находится, по его мнению, эквивалент определенности. Предположим, что ЛПР остановился на значении 160 млн. Тогда делается вывод, что $U=0,5$ соответствует 160 млн. Аналогично определяются другие значения функции полезности. Так, правая лотерея на рис. 2.2 позволяет определить точку $U(130 \text{ млн})=0,85$. Идентичным образом строятся функции полезности для каждого из критериев.

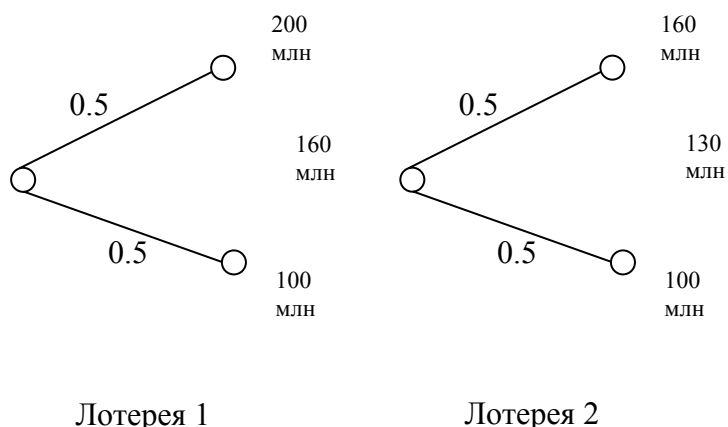


Рис 2.2. Типовые лотереи, используемые при построении функции полезности по одному критерию

2.5 Проверка условий независимости.

Для определения общей функции полезности необходимо проверить условия независимости по полезности и независимости по предпочтению. Проверку условия независимости по полезности можно совместить с предыдущим этапом построения однокритериальных функций полезности.

На рис.2.3 приведена левая лотерея из рис.2.2. Сначала лицу, принимающему решение, сообщается, что при нахождении эквивалента определенности он должен принять во внимание, что по остальным критериям имеются наилучшие значения (сверху справа на рис. 2.3). Затем перед ЛПР ставится та же задача, но уже при предположении, что по прочим критериям имеются наихудшие значения (снизу справа на рис.2.3). Если эквивалент определенности в двух случаях одинаков, то делается вывод, что критерий не зависит по полезности от прочих критериев.

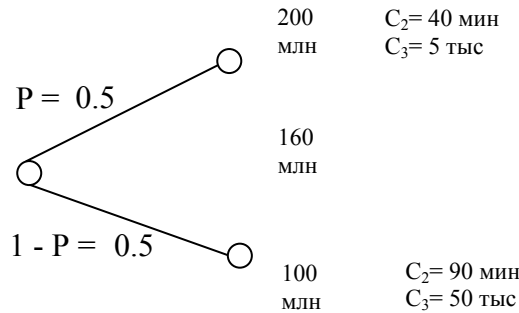


Рис. 2.3. Проверка условия независимости по полезности

Отметим, что для полноты проверки условия независимости по полезности следует осуществлять эту проверку для всех лотерей (например, для лотереи 2 на рис.2.2). Однако часто довольствуются приближенной проверкой — только для первой из лотерей, используемых при построении однокритериальных функций полезности.

При проверке условия независимости по предпочтению рассматривают плоскости, где по осям отложены значения двух критериев. Пример такой плоскости для критериев C_1 , C_2 приведен на рис. 2.4. Сначала предполагается, что по прочим критериям (в нашем случае — по критерию C_3) имеются наилучшие значения ($C_3 = 5$ тыс. человек).

Первоначально ЛПР должен определить свое предпочтение между альтернативами $[(C_2)_{\min}; (C_1)_{\max}]$ и $[(C_2)_{\max}; (C_1)_{\min}]$. В нашем случае ЛПР сравнивает площадки для постройки аэропорта с оценками (90, 100 млн) (40, 200 млн) - две крайние точки А и В на осях, при условии, что $C_3 = 5$ тыс. Предположим, что вариант А предпочтительнее. Это означает, что критерий стоимости более важен для ЛПР, чем критерий расстояния. Далее определяется такая точка на шкале критерия C_1 , что варианты А и К одинаково предпочтительны для ЛПР. Иначе говоря, ищется такая стоимость строительства C_1 при которой одинаково предпочтительны варианты (90, 100 млн) и (40, C_1^*).

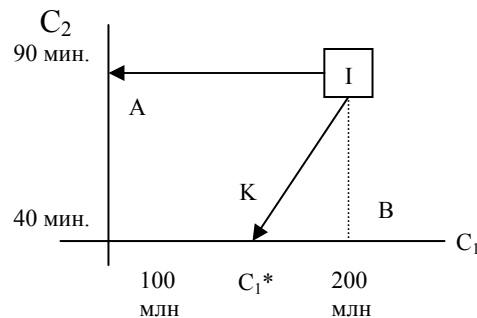


Рис. 2.4. Проверка условия независимости по предпочтению.

Затем точно такой же поиск точки безразличия осуществляется при $C_3 = 50$ тыс. Если результаты совпадают, то делается вывод, что пара критериев C_1 и C_2 не зависит по предпочтению от третьего критерия.

Для полной проверки условия независимости по предпочтениям следует рассмотреть все пары критериев. Однако при приближенной проверке выбираются один или два наиболее существенных критерия и прочие рассматриваются только в паре с ними [7].

При проверке и первого, и второго условий независимости критерии, независимость от которых проверялась, имели крайние значения. Строго говоря, следовало бы рассмотреть и промежуточные значения, но обычно такая проверка считается достаточной [7].

Что делать, если какие-то из условий независимости не выполняются? Теория не дает единственного ответа на этот вопрос. Предлагается определить группу независимых критериев, найти функции полезности для подгрупп зависимых и независимых критериев [7] и сформировать общую

функцию полезности «по частям» либо переформулировать задачу. Можно сказать, что нарушение условий независимости существенно усложняет задачу. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что условия независимости выполняются.

2.6. Определение весовых коэффициентов (коэффициентов важности) критериев

В МАУТ существенно используются веса (коэффициенты важности) критериев. Считается, что ЛПР может найти коэффициенты — числа, которые определяют важность критериев. Отношения между весами критериев устанавливаются поиском точек безразличия на плоскостях двух критериев. В отличие от проверки условий независимости по предпочтению по осям упорядочиваются значения критериев от худших к лучшим.

На рис.2.5 показана плоскость критериев C_1 , C_2 . Альтернативы А и К находятся в отношении безразличия, которое определяется так же, как и при проверке условия независимости по предпочтению (см. рис. 2.4).

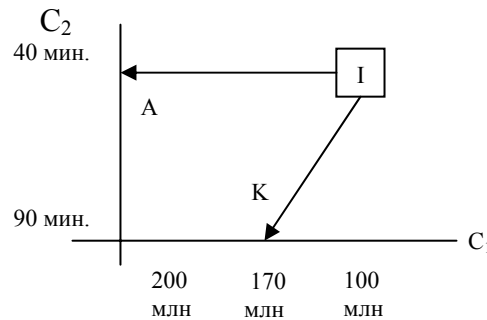


Рис. 2.5. Определение отношения между весами критериев C_1 и C_2

В точке равновесия полезности альтернатив равны, что позволяет записать $U(200 \text{ млн}, 40 \text{ мин.}) = U(170 \text{ млн}, 90 \text{ мин.})$. Это означает, что критерий стоимости важнее для ЛПР: $w_1 > w_2$.

Используя полученные ранее однокритериальные функции полезности (рис. 2.2), находим $w_2 = 0,4w_1$. Аналогичным образом определяется соотношение между весами критериев C_1 и C_3 . Пусть $w_3 = w_1$, $U(150 \text{ млн}) = 0,6w_1$. Итак, мы выразили веса всех критериев через вес наиболее важного из них и упорядочили критерии по важности: $w_1 > w_3 > w_2$.

Для нахождения численного значения веса критерия C_1 (и, следовательно, всех критериев) ЛПР предлагается сравнить две стратегии, представленные на рис.2.6, и определить вероятность p , при которой обе стратегии равноценны. Первая стратегия - это альтернатива, имеющая лучшую оценку по первому критерию и худшую — по двум другим. Вторая стратегия - это лотерея, дающая с вероятностью p альтернативу со всеми лучшими оценками и с вероятностью $(1-p)$ — альтернативу со всеми худшими оценками.

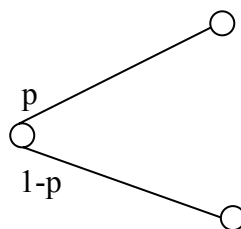
Предположим, что такое p найдено. Тогда $U(A) = U(B)$, или $w_1 = p$. Пусть $w_1 = 0,55$. Тогда $w_2 = 0,22$; $w_3 = 0,33$.

Стратегия А

$C_1 = 100 \text{ млн.}$
 $C_2 = 90 \text{ мин.}$
 $C_3 = 50 \text{ тыс.}$

Стратегия В

$C_1 = 100 \text{ млн.}$
 $C_2 = 40 \text{ мин.}$
 $C_3 = 5 \text{ тыс.}$



$C_1 = 200 \text{ млн.}$
 $C_2 = 90 \text{ мин.}$
 $C_3 = 50 \text{ тыс.}$

Рис.2.6. Определение коэффициента w_1

2.7. Определение полезности альтернатив.

После нахождения весов критериев и построения однокритериальных функций полезности мы имеем всю необходимую информацию. В соответствии с теоретическими результатами остается установить вид функции полезности. В нашем примере сумма коэффициентов важности критериев

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1,1 .$$

Считая полученное значение достаточно близким к единице, выбираем аддитивную форму представления функции полезности:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N w_i U_i(x) .$$

Зная оценки альтернатив (вариантов площадок), можем подставить их в эту формулу, определить полезность каждой альтернативы, сравнить полезности и выбрать альтернативу с наибольшей полезностью.

Пусть заданы четыре альтернативы со следующими оценками:

A (180 млн, 70 мин., 10 тыс.);

B (170 млн, 40 мин., 15 тыс.);

C (160 млн, 55 мин., 20 тыс.);

D (150 млн, 50 мин., 25 тыс.).

Подставляя в формулы для вычисления полезности альтернатив значения полезностей оценок и веса критериев, получаем:

$$U(A) = 0,55*0,25 + 0,22*0,4 + 0,33*0,89 = 0,52;$$

$$U(B) = 0,684; U(C) = 0,66; U(D) = 0,705;$$

$$U(D) \Rightarrow U(B) \Rightarrow U(C) \Rightarrow U(A).$$

Итак, альтернатива D - лучшая.

2.8. Пример использования метода MAUT.

Пусть дан следующий разброс оценок вариантов постройки аэропорта, представленный в табл.2.3.

Таблица 2.3.

Разброс оценок вариантов постройки аэропорта (вариант N).

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	150 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	80 мин.	20 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	100 тыс.	15 тыс.

А) Строим однокритериальные функции полезности на основе оценок экспертов (эксперт в данном примере выступает студент) для критериев

- «Стоимость постройки аэропорта»

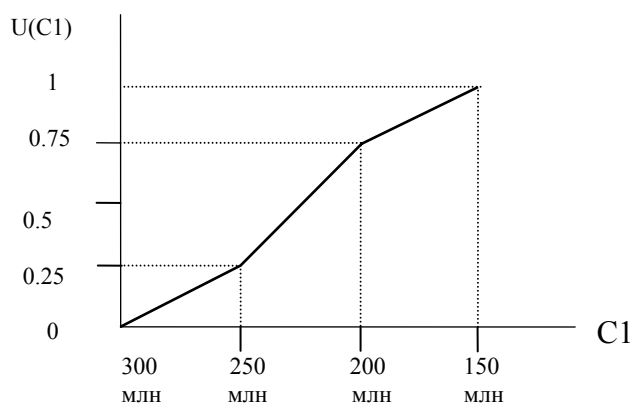


Рис. 2.7. Функция полезности для критерия «Стоимость постройки аэропорта»

- «Время поездки от центра города».

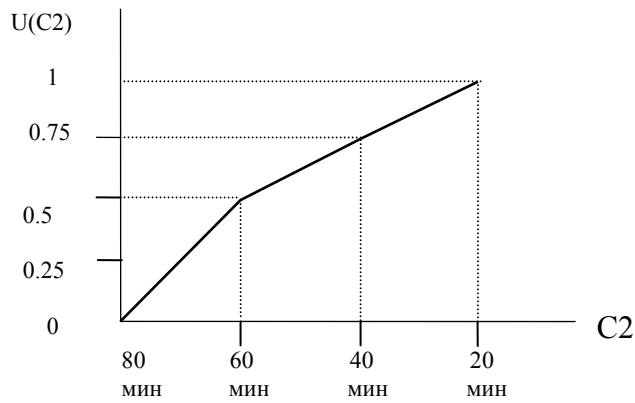


Рис. 2.8. Функция полезности для критерия «Время поездки от центра города»

- «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям».

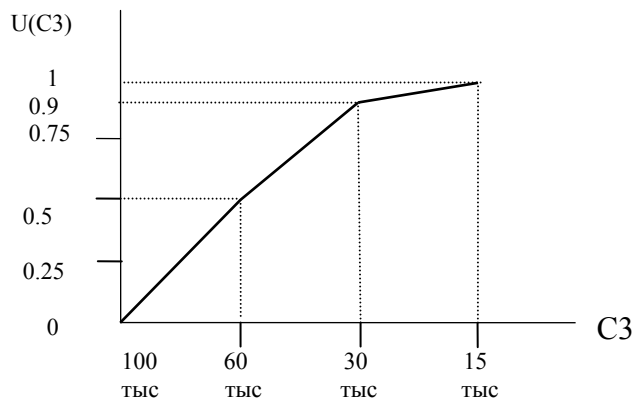


Рис. 2.9. Функция полезности для критерия «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям»

В) Проверка условий независимости.

С) Определение весовых коэффициентов (коэффициентов важности) критериев.

1) - определяем отношения между весами критериев C_1 и C_2 :

Предлагаем эксперту сравнить две альтернативы : А [(C_1)min; (C_2)max] и В [(C_1)max; (C_2)min] при $C_3 = 15$ тыс. (наилучшее значение по остальным критериям).

Эксперт дал следующую оценку при сравнении альтернатив А[150млн, 80 мин] и В[300 млн , 20 мин] - альтернатива А предпочтительнее альтернативы В. Следовательно критерий C_1 более важен для ЛПП , чем критерий C_2 - $w_1 > w_2$

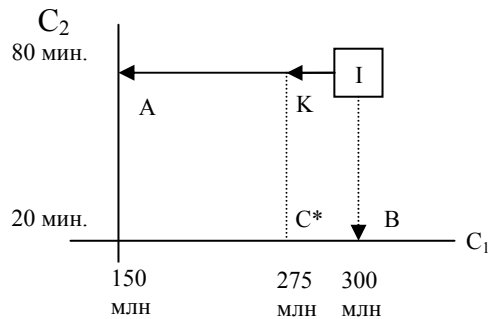


Рис.2.10

Определяем точку C^* на шкале критерия C_1 , так чтобы критерии В и К были эквивалентны:

$$U(B) = U(K) ; U(300 \text{ млн, } 20 \text{ мин}) = U(C^* , 80 \text{ мин}).$$

Эксперт дал оценку $C^* = 275$ млн.

Из равенства функций полезностей альтернатив В и К :

Альтернатива В Альтернатива К

Многокритериальные U
 $U(300 \text{ млн}, 20 \text{ мин}) = U(275, 80 \text{ мин})$

Однокритериальные U
 $U(C_1) = U(300) = 0,$ $U(C_2) = U(80) = 0$
 $U(C_2) = U(20) = 1$ $U(C_1) = U(275) = 0.125$ - находим по рис.2.7 Графика
 однокритериальной функции полезности.

Следовательно $w_2 = 0,125 * w_1$.

2) - определяем отношения между весами критериев C_1 и C_3 :

Предлагаем эксперту сравнить две альтернативы : А [$(C_1)_{\min}; (C_3)_{\max}$] и В [$(C_1)_{\max}; (C_3)_{\min}$] при $C_2 = 20$ мин. (наилучшее значение по остальным критериям).

Эксперт дал следующую оценку при сравнении альтернатив А[150млн, 100 тыс.] и В[300 млн, 15 тыс.] - альтернатив А предпочтительнее альтернативы В . Следовательно критерий C_1 наиболее важен чем критерий C_3 ЛПР - $w_1 > w_3$

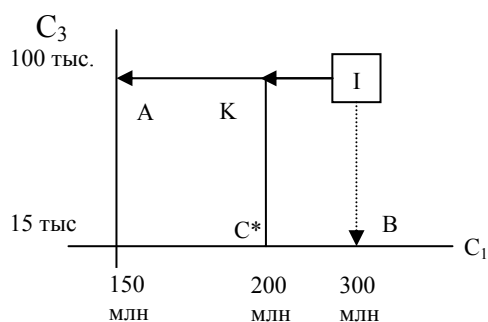


Рис.2.11

Определяем точку C^* на шкале критерия C_1 , так чтобы критерии В и К были эквивалентны:

$$U(B) = U(K) ; U(300 \text{ млн}, 15 \text{ тыс}) = U(C^*, 100 \text{ тыс}).$$

Эксперт дал оценку $C^* = 200$ млн.

Из равенства функций полезностей альтернатив В и К :

Альтернатива В Альтернатива К

Многокритериальные U
 $U(300 \text{ млн}, 15 \text{ тыс}) = U(200, 100 \text{ тыс})$

Однокритериальные U
 $U(C_1) = U(300) = 0,$ $U(C_3) = U(100) = 0$
 $U(C_3) = U(15) = 1$ $U(C_1) = U(200) = 0.75$ - находим по рис.2.7 Графика
 однокритериальной функции полезности.

Следовательно $w_3 = 0,75 * w_1$.

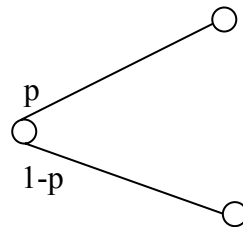
Итак, мы выразили веса критериев через вес наиболее важного из них и упорядочили критерии по важности $w_1 > w_3 > w_2$

3) Нахождение численного значения веса критерия C_1 (и следовательно, всех критериев). ЛПР предлагается сравнить две стратегии: стратегия А - это альтернатива $[(C_1)min; (C_2)max; (C_3)max]$, стратегия В - это лотерея, дающая с вероятностью p альтернативу $[(C_1)max; (C_2)max; (C_3)max]$ со всеми лучшими оценками и с вероятностью $(1-p)$ - альтернативу со всеми худшими оценками $[(C_1)min; (C_2)min; (C_3)min]$.

Предположим, что такое p найдено. Тогда $U(A) = U(B)$, или $w_1 = p$. Пусть $w_1 = 0,45$. Тогда $w_2 = 0,056$; $w_3 = 0,34$.

Стратегия А

$C_1 = 300$ млн.
 $C_2 = 80$ мин.
 $C_3 = 100$ тыс.



Стратегия В

$C_1 = 300$ млн.
 $C_2 = 20$ мин.
 $C_3 = 15$ тыс.

$C_1 = 150$ млн.
 $C_2 = 80$ мин.
 $C_3 = 100$ тыс.

Рис.2.12. Определение коэффициента

4) Определение полезности альтернатив.

Находим сумму коэффициентов важности критериев

$$\sum_{i=1}^N w_i = 0,846$$

Считая полученное значение достаточно близким к единице, выбираем аддитивную форму представления функции полезности:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N w_i U_i(x)$$

Пусть даны альтернативы:

- А (275 млн, 80 мин., 15 тыс.);
- В (250 млн, 20 мин., 100 тыс.);
- С (225 млн, 60 мин., 30 тыс.);
- Д (200 млн, 40 мин., 60 тыс.)

Значения однокритериальных функций $U_i(x)$ находим из графиков соответствующих функций Рис. 2.7. ... рис.2.9.

Вычислим многокритериальные функции полезности для каждой из альтернатив:

$$U(A) = 0,45 * 0,125 + 0,056 * 0 + 0,34 * 1 = 0,05625 + 0 + 0,34 = 0,39625$$

$$U(B) = 0,45 * 0,25 + 0,056 * 1 + 0,34 * 0 = 0,1125 + 0,056 + 0 = 0,1685$$

$$U(C) = 0,45 * 0,5 + 0,056 * 0,5 + 0,34 * 0,9 = 0,225 + 0,028 + 0,306 = 0,559$$

$$U(D) = 0,45 * 0,75 + 0,056 * 0,75 + 0,34 * 0,5 = 0,3375 + 0,042 + 0,17 = 0,5495$$

$$U(C) \Rightarrow U(D) \Rightarrow U(A) \Rightarrow U(B)$$

Итак, альтернатива С – лучшая.

2.9 Контрольные вопросы.

Дайте определения следующих ключевых понятий:

- Многокритериальная теория полезности
- Условия независимости
- Независимость по предпочтению
- Аддитивный и мультипликативный виды функции полезности
- Проверка условий независимости
- Определение коэффициентов важности критериев
- Построение функции полезности по отдельным критериям
- Определение полезности альтернатив
- Метод SMART

- *Первый эвристический метод Б.Франклина*
- *Теория важности критериев*
- *Различные способы получения информации о весах критериев*

3. ОЦЕНКА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ: ПОДХОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ.

3.1. Основные этапы подхода аналитической иерархии.

Подход аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process — АНР) широко известен в настоящее время. Мы можем найти в журналах оживленные дискуссии между противниками и сторонниками этого подхода.

При подходе МАУТ одни и те же усилия ЛПР по построению функции полезности могут быть затрачены при большом и малом числе альтернатив. Не всегда такой подход является обоснованным. В случае небольшого числа заданных альтернатив (задачи первой группы) представляется разумным направить усилия ЛПР на сравнение только заданных альтернатив. Именно такая идея лежит в основе метода АНР [9].

Постановка задачи, решаемой с помощью метода АНР, заключается обычно в следующем.

Дано: общая цель (или цели) решения задачи; N критериев оценки альтернатив; n альтернатив.

Требуется: выбрать наилучшую альтернативу.

Подход АНР состоит из совокупности этапов.

1. Первый этап заключается в структуризации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями; цели критерии—альтернативы.
2. На втором этапе ЛПР выполняет попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений переводятся в числа при помощи специальной таблицы (см. далее).
3. Вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.
4. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива.

Рассмотрим эти этапы подробнее применительно к основному методу АНР, разработанному Т. Саати [9], используя для иллюстрации приведенный выше пример выбора площадки для строительства аэропорта.

3.2. Структуризация.

Предположим, что комиссия по выбору места постройки аэропорта предварительно отобрала из нескольких возможных четыре варианта: А, В, С, D. Тогда структура решаемой задачи может быть представлена в виде, показанном на рис. 3.1.

Варианты имеют следующие оценки по критериям: А (180; 70; 10), В (170; 40; 15), С (160; 55; 20), D (150; 50; 25).

Цель

Цель строительства аэропорта:
прием и отправка большого числа
пассажиров

Критерии

Стоимость
строительства

Количество людей,
подвергающихся
шумовым воздействиям

Время в пути от
аэропорта до центра
города

Альтернативы



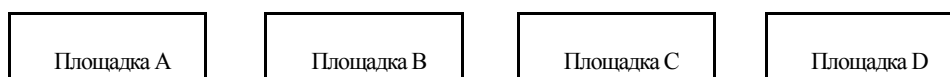


Рис. 3.1. Иерархическая схема проблемы выбора места для аэропорта

3.3. Парные сравнения

При парных сравнениях в распоряжение ЛПР дается шкала словесных определений уровня важности, причем каждому определению ставится в соответствие число (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Шкала относительной важности

Уровень важности	Количественное значение
Равная важность	1
Умеренное превосходство	3
Существенное или сильное превосходство	5
Значительное (большое) превосходство	7
Очень большое превосходство	9

При сравнении элементов, принадлежащих одному уровню иерархии, ЛПР выражает свое мнение, используя одно из приведенных в табл. 3.1 определений. В матрицу сравнения заносится соответствующее число. При желании ЛПР может использовать четные целые числа, выражая промежуточные уровни предпочтения по важности. Матрица сравнений критериев выбора площадки для аэропорта приведена в табл. 3.2.

Матрица соответствует следующим предпочтениям гипотетического ЛПР: критерий «Стоимость» существенно превосходит критерий «Время в пути» и умеренно превосходит критерий «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям»; критерий C_2 умеренно превосходит критерий C_3 .

На нижнем уровне иерархической схемы сравниваются заданные альтернативы (конкретные площадки) по каждому критерию отдельно. Приведем эти сравнения в табл. 3.3 — 3.5.

Таблица 3.2

Матрица сравнений для критериев

Критерий	C_1 Стоимость	C_2 Время в пути до центра города	C_3 Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	Собственный вектор	Вес критерия
C_1 Стоимость	1	5	3	2,47	0,65
C_2 Время в пути до центра города	1/5	1	3	0,848	0,22
C_3 Количество людей, подвергающихся шумовым Воздействиям	1/3	1/3	1	0,48	0,13

Таблица 3.3

Сравнение по критерию C_1

Альтернатива	A	B	C	D	Собственный вектор	Вес
A	1	0,2	0,14	0,11	0,23	0,04

B	5	1	0,33	0,2	0,76	0,13
C	7	3	1	1/3	1,63	0,27
D	9	5	3	1	3,4	0,56

Таблица 3.4

Сравнение по критерию С2

Альтернатива	A	B	C	D	Собственный вектор	Вес
A	1	0,11	0,2	0,14	0,23	0,05
B	9	1	3	1	2,28	0,43
C	5	0,33	1	1	1,14	0,22
D	7	1	1	1	1,63	0,3

Таблица 3.5

Сравнение по критерию С3

Альтернатива	A	B	C	D	Собственный вектор	Вес
A	1	3	5	9	3,4	0,56
B	0,33	1	3	7	1,63	0,27
C	0,2	0,33	1	5	0,76	0,13
D	0,11	0,14	0,2	1	0,23	0,04

3.4. Вычисление коэффициентов важности

Таблицы 3.2 — 3.5 позволяют рассчитать коэффициенты важности соответствующих элементов иерархического уровня. Для этого нужно вычислить собственные векторы матрицы, а затем пронормировать их. Формула для этих вычислений: извлекается корень n-й степени (n — размерность матрицы сравнений) из произведений элементов каждой строки.

Так, по табл. 3.2 определяются коэффициенты важности критериев. В предпоследнем столбце таблицы приведены значения собственных векторов. Нормирование этих чисел дает: $w_1 = 0,65$; $w_2 = 0,22$; $w_3 = 0,13$, где w_i — вес i-го критерия.

Таким же способом на основе табл. 3.3 — 3.5 можно рассчитать важность каждой из площадок по каждому из критериев. В таблицах приведены веса соответствующей площадки по каждому из критериев.

3.5. Определение наилучшей альтернативы

Синтез полученных коэффициентов важности осуществляется по формуле

$$V_j = \sum_{i=1}^n w_i V_{ji},$$

где S_j — показатель качества j-й альтернативы; w_i — вес i-го критерия; V_{ji} — важность j-й альтернативы по i-му критерию.

Для четырех площадок проведенные вычисления позволяют определить:

$$V_{(A)} = 0,65 \cdot 0,04 + 0,22 \cdot 0,05 + 0,13 \cdot 0,56 = 0,11;$$

$$V_{(B)} = 0,65 \cdot 0,13 + 0,22 \cdot 0,43 + 0,13 \cdot 0,27 = 0,215;$$

$$V_{(C)} = 0,65 \cdot 0,27 + 0,22 \cdot 0,22 + 0,13 \cdot 0,13 = 0,241;$$

$$V_{(D)} = 0,65 \cdot 0,56 + 0,22 \cdot 0,3 + 0,13 \cdot 0,04 = 0,431.$$

Итак, альтернатива D — наилучшая.

3.6. Проверка согласованности суждений ЛПР.

При заполнении матриц попарных сравнений человек может делать ошибки. Одной из возможных ошибок является нарушение транзитивности: из $a_{ij} > a_{jk}$, $a_{jk} > a_{is}$ может не следовать

$a_{ij} > a_{is}$ (a_{ij} — элементы матрицы попарных сравнений). Во-вторых, возможны нарушения согласованности численных суждений: $a_{ij} * a_{jk} \neq a_{ik}$.

Для обнаружения несогласованности предложен подсчет индекса согласованности сравнений, осуществляемый по матрице парных сравнений. Изложим алгоритм этого подсчета [9].

1. В матрице парных сравнений суммируются элементы каждого столбца.
2. Сумма элементов каждого столбца умножается на соответствующие нормализованные компоненты вектора весов, определенного из этой же матрицы.
3. Полученные числа суммируются, значение суммы обозначаем как λ_{\max} .
4. Находим индекс согласованности

$$L = (\lambda_{\max} - n) / (n-1),$$

где n - число сравниваемых элементов (размер матрицы). Заметим, что для кососимметрической матрицы $\lambda \geq n$.

5. Подсчитывается среднее значение индекса согласованности R для кососимметричных матриц, заполненных случайным образом. Так, для матрицы размера $n=7$ индекс $R=1,32$, а для матрицы размера $n = 8$ индекс $R = 1,41$.

6. Вычисляется отношение согласованности:
 $T = L / R$

При применении метода желательным считается уровень $T \leq 0,1$. Если значение T превышает этот уровень, рекомендуется провести сравнения заново.

3.7 Контрольные вопросы.

Дайте определения следующих ключевых понятий:

- *Основные этапы подхода аналитической иерархии*
- *Построение иерархии*
- *Матрицы сравнений*
- *Вычисление коэффициентов важности*
- *Лучшая альтернатива*
- *Проверка согласованности суждений*
- *Матрицы сравнений при мультипликативном методе*
- *Геометрическая шкала измерений*
- *Вычисление коэффициентов важности в мультипликативном методе*
- *Лучшая альтернатива при мультипликативном методе*
- *Проблема независимости от несвязных альтернатив при подходе аналитической иерархии*

4. ОЦЕНКА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ: МЕТОДЫ ELECTRE

4.1. Конструктивистский подход

В конце 60-х годов группа французских ученых во главе с профессором Б. Руа предложила новый подход к проблеме принятия решений при многих критериях. Название *oubran-king approach*, под которым он известен в мировой литературе, мало отражает его содержание. Мы будем называть его далее подходом, направленным на Разработку Индексов Попарного Сравнения Альтернатив (РИПСА). В настоящее время имеется много методов принятия решений, принадлежащих к данному подходу. Из них наиболее известна группа методов ELECTRE (Elimination Et Choix Traduisant la Realite — исключение и выбор, отражающие реальность) [10].

Как и методы аналитической иерархии, методы РИПСА направлены на сравнение заданной группы многокритериальных альтернатив. Следовательно, методы РИПСА принадлежат к методам первой группы согласно приведенной в лекции 4 классификации.

Прежде всего следует подчеркнуть методологическое отличие подхода РИПСА от подходов MAUT и АНР. В рамках двух последних подходов неявно предполагается, что основные

предпочтения ЛПП уже, в основном, сформированы до применения метода принятия решений. Следовательно, эти предпочтения могут быть получены от ЛПП «одномоментно» — при сравнениях оценок, назначении весов и т.д. Возможные уточнения введенных оценок осуществляются на этапе проверки чувствительности, т.е. на заключительном этапе применения метода. В отличие от этого при подходе РИПСА предполагается, что предпочтения ЛПП формируются при анализе проблемы, осуществляемом с помощью метода принятия решений. Следовательно, метод должен предъявлять ЛПП различные варианты решения проблемы в зависимости от тех или иных решающих правил. Эти правила формируются в виде индексов попарного сравнения альтернатив.

4.2. Два основных этапа

При подходе РИПСА принято различать два основных этапа [10]:

- 1) этап разработки, на котором строятся один или несколько индексов попарного сравнения альтернатив;
- 2) этап исследования, на котором построенные индексы используются для ранжирования (или классификации) заданного множества альтернатив.

Индексы попарного сравнения альтернатив в большинстве методов строятся на основе принципов конкорданса (согласия) и дискорданса (несогласия). В соответствии с этими принципами, альтернатива A_i является, по крайней мере, не худшей, чем альтернатива A_j , если

- «достаточное большинство» критериев поддерживает это утверждение (принцип согласия);
- «возражения» по остальным критериям «не слишком сильны» (принцип малого несогласия).

4.3. Свойства бинарных отношений

Подход РИПСА основан на построении бинарных отношений. Поэтому следует дать некоторые определения.

Бинарное отношение R , определенное на конечном множестве альтернатив A , называется (при любом $A_i, A_j \in A$):

- полным, если $A_i R A_j$ или $A_j R A_i$;
- транзитивным, если $A_i R A_j, A_j R A_k \Rightarrow A_i R A_k$;
- полным порядком, если оно полное и транзитивное;
- частичным порядком, если оно транзитивное, но не полное.

Обозначим через X_i^k, X_j^k оценки альтернатив A_i, A_j по k -му критерию.

Напомним, что отношение предпочтения ЛПП при сравнении альтернатив по одному критерию является полным порядком.

При подходе РИПСА вводится понятие псевдокритерия [10]. Псевдокритерием является тройка (x, j^k, q, p) функций, представляющих предпочтения ЛПП и определенных так, что:

- $q(x, i^k) + x, i^k > x, j^k$, если по k -му критерию A_i имеет сильное предпочтение по сравнению с A_j ;
- $x, i^k + q(x, i^k) \geq x, j^k > x, i^k + p(x, i^k)$, если по k -му критерию A_i имеет слабое предпочтение по сравнению с A_j .

Альтернативы A_i, A_j находятся в отношении безразличия по k -му критерию ($x, i^k \sim x, j^k$), если не выявлено сильное или слабое предпочтение одной из альтернатив.

Функции p и q называются соответственно порогами безразличия и предпочтения. Бинарное отношение называется четким, если оно построено на основе критериев, и числовым (valued), если оно построено на основе псевдокритериев.

Далее мы рассмотрим ряд методов, принадлежащих подходу РИПСА.

4.4. Метод ELECTRE I

Метод ELECTRE I был первым в семействе методов, принадлежащих к подходу РИПСА. В нем используются четкие бинарные отношения между альтернативами.

Индексы согласия и несогласия строятся следующим образом. Каждому из N критериев ставится в соответствие целое число w , характеризующее важность критерия. Б. Руа предложил рассматривать w как число голосов членов жюри, поданное за важность данного критерия.

Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы A_i над альтернативой A_j . Множество I , состоящее из N критериев, разбивается на три подмножества:

- Γ^+ — подмножество критериев, по которым A_i предпочтительнее A_j
- Γ^- — подмножество критериев, по которым A_i равноценно A_j ;
- Γ — подмножество критериев, по которым A_j предпочтительнее A_i .

Далее формулируется индекс согласия с гипотезой о превосходстве A_i над A_j . Индекс согласия подсчитывается на основе весов критериев. В методе ELECTREI этот индекс определяется как отношение суммы весов критериев подмножеств Γ^+ и Γ^- к общей сумме весов:

$$C_{A_i A_j} = \frac{\sum_{i \in \Gamma^+, l=1}^N p_i}{\sum_{i=1}^N p_i}$$

Индекс несогласия d_{AB} с гипотезой о превосходстве A_i над A_j определяется на основе самого противоречивого критерия — критерия, до которого A_j в наибольшей степени превосходит A_i .

Чтобы учесть возможную разницу длин шкал критериев, разность оценок A_j и A_i относят к длине наибольшей шкалы:

$$d_{A_i A_j} = \max_{i \in I} \frac{I_{A_j}^i - I_{A_i}^i}{L_i}$$

где: $I_{A_i}^i, I_{A_j}^i$ — оценки альтернатив A_i и A_j по i -му критерию; L_j — длина шкалы i -го критерия.

Укажем очевидные свойства индекса согласия.

- 1) $0 \leq C_{A_i A_j} < 1$;
- 2) $C_{A_i A_j} = 1$, если подмножество I — пусто;
- 3) $C_{A_i A_j}$ сохраняет значение при замене одного критерия на несколько с тем же общим весом.

Приведем свойства индекса несогласия:

- 1) $0 \leq d_{A_i A_j} \leq 1$;
- 2) $d_{A_i A_j}$ сохраняет значение при введении более детальной шкалы по i -му критерию при той же ее длине.

Введенные индексы используются при построении матриц индексов согласия и несогласия для заданных альтернатив.

Отметим, что индекс несогласия может быть назван «вето», так как он как бы накладывает вето на сравнения.

В методе ELECTRE I бинарное отношение превосходства задается уровнями согласия и несогласия. Если $C_{A_i A_j} \geq \alpha_1$ и $d_{A_i A_j} \leq \lambda_1$ где α_1, λ_1 — заданные уровни согласия и несогласия, то альтернатива A_j объявляется превосходящей альтернативу A_i .

Если же при этих уровнях сравнить альтернативы не удалось, то они объявляются *несравнимыми*. С методологической точки зрения, введение понятия несравнимости было важным этапом развития теории принятия решений. Если оценки альтернатив в значительной степени противоречивы (по одним критериям одна намного лучше другой, а по другим - наоборот), то такие противоречия никак не компенсируются и такие альтернативы сравнивать нельзя. Понятие несравнимости исключительно важно и с практической точки зрения. Оно позволяет выявить альтернативы с «контрастными» оценками как заслуживающие специального изучения.

Отметим, что уровни коэффициентов согласия и несогласия, при которых альтернативы сравнимы, представляют собой инструмент анализа в руках ЛПР и консультанта. Задавая эти уровни (постепенно понижая требуемый уровень коэффициента согласия и повышая требуемый уровень коэффициента несогласия), они исследуют имеющееся множество альтернатив.

При заданных уровнях на множестве альтернатив выделяется *ядро* недоминируемых элементов, которые находятся либо в отношении несравнимости, либо в отношении эквивалентности. При

изменении уровней из данного ядра выделяется меньшее ядро и т.д. Аналитик предлагает ЛПП целую серию возможных решений проблемы в виде различных ядер. В конечном итоге можно получить и одну лучшую альтернативу. При этом значения индексов согласия и несогласия характеризуют степень «насилия» над данными, при которых делается окончательный вывод.

Итак, основные этапы метода ELECTRE I можно представить следующим образом.

Этап разработки индексов

На основании заданных оценок двух альтернатив подсчитываются значения двух индексов: согласия и несогласия. Эти индексы определяют согласие и несогласие с гипотезой, что альтернатива A_i превосходит альтернативу A_j .

Задаются уровни согласия и несогласия, с которыми сравниваются подсчитанные индексы для каждой пары альтернатив. Если индекс согласия выше заданного уровня, а индекс несогласия ниже, то одна из альтернатив превосходит другую. В противном случае альтернативы несравнимы.

Этап исследования множества альтернатив

Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся образуют первое ядро. Альтернативы, входящие в ядро, могут быть либо эквивалентными, либо несравнимыми.

Вводятся более «слабые» значения уровней согласия и несогласия (меньший по значению уровень согласия и больший уровень несогласия), при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

4.5 Пример использования метода ELECTRE I

Предположим, что в задаче выбора места для строительства аэропорта заданы альтернативы:

A (180; 70; 10),

B (170; 40; 15),

C (160; 55; 20),

D (150; 50; 25).

Пусть веса критериев следующие : $w_1 = 3$; $w_2 = 2$; $w_3 = 1$. Сохраним те же длины шкал : $L_1 = 100$; $L_2 = 50$; $L_3 = 45$.

A) Составляем матрицу индексов согласия

$$C_{AiAj} = \frac{\sum_{i \in I^+, j \in I^-} w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

$C_{AB} = 1/(3 + 2 + 1) = 1/6$; $C_{AC} = 1/(3 + 2 + 1) = 1/6$; $C_{AD} = 1/6$;

$C_{BA} = (3+2) / 6 = 5/6$; $C_{BC} = (2+1)/6 = 3/6$; $C_{BD} = (2+1)/6 = 3/6$;

$C_{CA} = (3+2) / 6 = 5/6$; $C_{CB} = 3/6$; $C_{CD} = 1/6$;

$C_{DA} = (3+2) / 6 = 5/6$; $C_{DC} = (3+2) / 6 = 5/6$; $C_{DB} = 3/6$;

Таблица 4.1

Индексы согласия для примера

Альтернатива	A	B	C	D
A	*	1/6	1/6	1/6
B	5/6	*	3/6	3/6
C	5/6	3/6	*	1/6
D	5/6	3/6	5/6	*

В) Составляем матрицу индексов несогласия

$$d_{A_i A_j} = \max_{i \in I} \frac{I_{A_i}^i - I_{A_j}^i}{L_i}$$

Напомним значения L_i : $L_1 = 100$; $L_2 = 50$; $L_3 = 45$.

$$d_{AB} = \max \{ (180-170)/100; (70-40)/50 \} = \max \{ 0.1; 3/5 \} = 0.6$$

$$d_{AC} = \max \{ (180-160)/100; (70-55)/50 \} = \max \{ 0.2; 15/50 \} = 0.3$$

$$d_{AD} = \max \{ (180-150)/100; (70-50)/50 \} = \max \{ 0.3; 20/50 \} = 0.4$$

и т.д.

Таблица 4.2

Индексы несогласия для примера

Альтернатива	A	B	C	D
A	*	0,6	0,3	0,4
B	0,11	*	0,1	0,2
C	0,22	0,3	*	0,1
D	0,33	0,22	0,11	*

С) Зададим первые уровни согласия и несогласия: $\alpha_1 = 5/6$ и $\gamma_1 = 0.11$

Таблица 4.3

Индексы согласия для примера

Альтернатива	A	B	C	D
A	*	1/6	1/6	1/6
B	5/6	*	3/6	3/6
C	5/6	3/6	*	1/6
D	5/6	3/6	5/6	*

Таблица 4.4

Индексы несогласия для примера

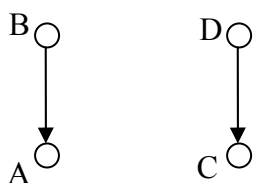
Альтернатива	A	B	C	D
A	*	0,6	0,3	0,4
B	0,11	*	0,1	0,2
C	0,22	0,3	*	0,1
D	0,33	0,22	0,11	*

В табл. 4.3 имеются 4-ре индекса согласия, удовлетворяющие условию: $\alpha_1 \geq 5/6$.

В табл. 4.4 имеются 4-ре индекса несогласия, удовлетворяющие условию: $\gamma_1 \leq 0.11$.

При сравнении альтернатив В и А оба индекса удовлетворяют условиям $C_{BA} \geq 5/6$ и $d_{BA} \leq 0.11$, следовательно альтернатива В доминирует над альтернативой А.

При сравнении альтернатив D и C оба индекса удовлетворяют условиям $C_{DC} \geq 5/6$ и $D_{DC} \leq 0.11$, следовательно альтернатива D доминирует над альтернативой C.



В первое ядро входят альтернативы В и D, исключаются альтернативы А и С, что легко устанавливается с помощью табл. 4.3 и 4.4. Альтернативы В и D, входящие в ядро, несравнимы при введенных уровнях α_1 и γ_1 согласия и несогласия. Их оценки противоречивы: альтернатива D превосходит альтернативу В по первому критерию, но существенно уступает по двум другим критериям.

Д) Изменим уровни согласия и несогласия: $\alpha_1 = 0,5$ и $\gamma_1 = 0,2$. Легко убедиться, что альтернатива В – наилучшая.

4.6 Контрольные вопросы.

Дайте определения следующих ключевых понятий:

- *Подход ELECTRE*
- *Основные этапы подхода ELECTRE*
- *Понятие несравнимости альтернатив*
- *Индексы согласия и несогласия*
- *Выделение ядер*
- *Определение лучших альтернатив*
- *Метод ELECTRE I*
- *Метод ELECTRE II*
- *Пороги безразличия и индекс вето*

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.

1. Альтернативы: A(275 млн, 70 мин, 10 тыс)
B(250 млн, 50 мин, 60 тыс)
C(225 млн, 80 мин, 20 тыс)
D(200 млн, 60 мин, 40 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	50 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	10 тыс.

2. Альтернативы: A(275 млн, 70 мин, 10 тыс)
B(220 млн, 50 мин, 60 тыс)
C(200 млн, 80 мин, 20 тыс)
D(150 млн, 60 мин, 40 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	50 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	10 тыс.

3. Альтернативы: A(250 млн, 70 мин, 10 тыс)
B(200 млн, 50 мин, 60 тыс)
C(150 млн, 100 мин, 20 тыс)
D(175 млн, 60 мин, 40 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	50 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	10 тыс.

4. Альтернативы: A(280 млн, 50 мин, 10 тыс)

B(200 млн, 50 мин, 60 тыс)
 C(180 млн, 80 мин, 20 тыс)
 D(150 млн, 120 мин, 50 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	50 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	10 тыс.

5. Альтернативы: A(250 млн, 50 мин, 10 тыс)
 B(220 млн, 70 мин, 60 тыс)
 C(200 млн, 90 мин, 20 тыс)
 D(150 млн, 110 мин, 40 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	300 млн	100 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	50 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	10 тыс.

6. Альтернативы: A(100 млн, 90 мин, 40 тыс)
 B(75 млн, 100 мин, 45 тыс)
 C(50 млн, 110 мин, 50 тыс)
 D(25 млн, 120 мин, 55 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	100 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	90 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	40 тыс.

7. Альтернативы: A(100 млн, 90 мин, 45 тыс)
 B(75 млн, 110 мин, 50 тыс)
 C(50 млн, 100 мин, 55 тыс)
 D(25 млн, 120 мин, 60 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	100 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	90 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	40 тыс.

8. Альтернативы: A(100 млн, 90 мин, 40 тыс)
 B(70 млн, 100 мин, 45 тыс)

C(40 млн, 110 мин, 50 тыс)

D(30 млн, 120 мин, 55 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	100 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	90 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	40 тыс.

9. Альтернативы: A(90 млн, 90 мин, 40 тыс)

B(70 млн, 100 мин, 45 тыс)

C(50 млн, 100 мин, 50 тыс)

D(35 млн, 120 мин, 55 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	100 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	90 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	40 тыс.

10. Альтернативы: A(90 млн, 90 мин, 40 тыс)

B(75 млн, 110 мин, 45 тыс)

C(60 млн, 110 мин, 45 тыс)

D(45 млн, 120 мин, 55 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	100 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	120 мин.	90 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	60 тыс.	40 тыс.

11. Альтернативы: A(100 млн, 90 мин, 5 тыс)

B(75 млн, 60 мин, 15 тыс)

C(50 млн, 40 мин, 30 тыс)

D(25 млн, 30 мин, 50 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(C ₁) Стоимость постройки аэропорта	150 млн	50 млн
(C ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	30 мин.
(C ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

12. Альтернативы: A(150 млн, 90 мин, 5 тыс)

B(125 млн, 60 мин, 15 тыс)

C(100 млн, 40 мин, 10 тыс)

D(75 млн, 30 мин, 50 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(С ₁) Стоимость постройки аэропорта	150 млн	50 млн
(С ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	30 мин.
(С ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

13. Альтернативы: А(170 млн, 90 мин, 5 тыс)
В(120 млн, 60 мин, 10 тыс)
С(100 млн, 40 мин, 15 тыс)
D(70 млн, 50 мин, 50 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(С ₁) Стоимость постройки аэропорта	150 млн	50 млн
(С ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	30 мин.
(С ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

14. Альтернативы: А(200 млн, 30 мин, 50 тыс)
В(120 млн, 40 мин, 30 тыс)
С(100 млн, 90 мин, 15 тыс)
D(70 млн, 90 мин, 15 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(С ₁) Стоимость постройки аэропорта	150 млн	50 млн
(С ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	30 мин.
(С ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

15. Альтернативы: А(200 млн, 30 мин, 50 тыс)
В(130 млн, 40 мин, 30 тыс)
С(75 млн, 60 мин, 15 тыс)
D(50 млн, 90 мин, 15 тыс)

Диапазон изменения по каждому из критериев :

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
(С ₁) Стоимость постройки аэропорта	150 млн	50 млн
(С ₂) Время поездки от центра города	90 мин.	30 мин.
(С ₃) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям	50 тыс.	5 тыс.

6. ЛИТЕРАТУРА.

1. Simon H.A. The New Science of Management Decision. N.Y.: Harper and Row Publ., 1960.
2. Ларичев О.И. , Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений. М.: Физматлит, 1996.
3. Ларичев.О.И. Наука и искусство принятия решений М.: Наука 1979.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
5. Humphreys P.C. Application of multiattribute utility theory // H.Jungerman and G. de Zeeuw (Eds.). Decision making and change in human affairs. Dordrecht: Reidel, 1977.
6. Winterfeldt D., Fischer G.W. Multiattribute utility theory : Models and assessment procedures // D. Wendt and C.Vlek (Eds.). Utility, probability and human decision making. Amsterdam: Reidel, 1975.
7. Кини Р.Л. Размещение энергетических объектов: выбор решений. М.: Энергоатомиздат, 1983.
8. Подиновский В.В. Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика, 2000, №5.
9. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
10. Анич И., Ларичев О.И. Метод ЭЛЕКТРА и проблема ацикличности отношений альтернатив // Автоматика и телемеханика. 1996 №8.