

Федеральное агентство по образованию  
Российской Федерации  
Владимирский государственный университет  
Кафедра конструирования и технологии радиоэлектронных средств

**Е. Н. Талицкий**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Конспект лекций

Владимир, 2005

## Оглавление

Предисловие.....	3
Лекция 1. Введение.....	5
Лекция 2. Понятие о системе и системном анализе.....	10
Лекция 3. Оценка вариантов систем.....	15
Лекция 4. Моделирование систем.....	19
Лекция 5. Погрешности и их математическое описание.....	29
Лекция 6. Уравнения погрешностей. Коэффициенты влияния.....	37
Лекция 7. Методы расчета точности.....	40
Лекция 8. Расчет размерных цепей.....	44
Лекция 9. Метод матричных испытаний.....	48
Лекция 10. Основы теории надежности электронных устройств.....	57
Лекция 11. Показатели надежности.....	60
Лекция 12. Показатели надежности ремонтируемых изделий.....	65
Лекция 13. Законы распределения времени безотказной работы РЭС.....	68
Лекция 14. Методы расчета надежности.....	72
Лекция 15. Методы расчета надежности при параллельном соединении элементов.....	76
Лекция 16. Методы оптимизации при конструировании и в технологии производства РЭА.....	80
Лекция 17. Методы регулярного поиска экстремумов.....	86
Лекция 18. Оптимизация методом линейного программирования ...	92
Лекция 19. Математическая теория эксперимента.....	97
Лекция 20. Определение доверительного интервала для дисперсии.....	101
Лекция 21. Обработка результатов пассивного эксперимента.....	109
Лекция 22. Теория активного многофакторного эксперимента.....	114
Лекция 23. Проведение и обработка результатов эксперимента.....	121
Лекция 24. Оптимизация параметров.....	126
Лекция 25. Планы второго порядка.....	130
Лекция 26. Введение в теорию массового обслуживания.....	134
Рекомендуемая литература.....	143

## Предисловие [1]

*Цель курса* – изложение математических методов, используемых в исследовании конструкций и технологии радиоэлектронных средств (РЭС) и электронно-вычислительных средств (ЭВС), проводимых, прежде всего, на этапах Научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Данный курс призван углубить и расширить фундаментальную подготовку инженеров-конструкторов-технологов, которые обязаны овладеть передовой технологией надежного проектирования РЭС (ЭВС) с применением ЭВМ. Кроме того, изучение курса должно способствовать выполнению студентами и молодыми специалистами научных работ, а в будущем – и диссертаций в области конструирования, технологии и надежности РЭС (ЭВС).

Курс основывается прежде всего на знаниях по высшей и вычислительной математике, а также физике в объемах, даваемых в технических вузах. Полученные при изучении курса знания предназначены для того, чтобы в последующих конструкторских и технологических курсах использовать современные математические методы системного подхода, вероятностно-статистического анализа, математического моделирования и вычислительного эксперимента, теории надежности и оптимизации. Все это в сочетании с физическими представлениями и эвристическими (интуитивными) приемами, излагаемыми в конструкторских и технологических курсах, позволит студентам овладеть современными диалоговыми системами автоматизированного конструирования и технологической подготовки производства РЭС (ЭВС). Именно на такой основе возможно проведение всесторонних проектных исследований конструкций и технологии с целью получения РЭС (ЭВС) высокой надежности и конкурентоспособности.

Хотя курс носит теоретико-математический характер, являясь прикладной математикой для инженеров-конструкторов-технологов, его следует читать не на математических, а на конструкторско-технологических кафедрах вузов, что позволит глубже увязать его особенно на практических занятиях, в лабораторных работах и при курсовом проектировании с задачами конструкторско-технологической деятельности и иллюстрировать примерами из этой области. С другой стороны, наличие этого курса на конструкторско-технологических кафедрах позволит инициировать теоретико-математическую и функциональную переподготовку, и совершенствование преподавательских кадров этих кафедр.

В результате изучения курса студент должен: познакомиться с сущностью, содержанием и применением системного подхода и анализа в про-

ектировании и исследованиях РЭС (ЭВС); освоить основы идеи математического моделирования, а также методы синтеза и анализа конструкций и технологий РЭС (ЭВС) с использованием математических моделей и теории параметрической чувствительности; углубить знания в области теории вероятностей и математической статистики, включая инженерные методы решения задач точности, стабильности, серийнопригодности и надежности РЭС (ЭВС); овладеть теорией и методами активного эксперимента и обработкой его результатов; изучить математические методы оптимизации технических решений; получить представления о перспективных теоретико-математических проблемах конструирования и технологии РЭС (ЭВС).

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие радиоэлектроники оказывает существенное влияние на научно-технический прогресс и успехи в социально-экономической области. Машиностроение, которое играет ключевую роль в ускорении научно-технического прогресса, нуждается в надежно работающих сложных изделиях радиоэлектроники, органически входящих в качестве комплектующих элементов в станки с числовым программным управлением, роботы и другие устройства гибких производственных систем. Транспорт, энергетика, космические системы и другие направления нашей экономики, где велики последствия одного-единственного отказа, также нуждаются в высоконадежных изделиях радиоэлектроники. Надежность этих изделий закладывается при их проектировании, обеспечивается при производстве и поддерживается при эксплуатации в составе РЭС. С другой стороны, изделия радиоэлектроники должны рассматриваться как результат разработки схемы, конструкции и технологии.

Дадим основные определения рассматриваемых понятий и связанных с ними терминов. Исходными являются понятия радиоэлектроники и радиотехники.

*Радиоэлектроника* – это область науки и техники, охватывающая широкий круг вопросов использования электромагнитной энергии для передачи, приема и преобразования сигналов и содержащейся в них информации.

*Радиотехника* – область науки и техники, связанная с генерированием, преобразованием, излучением и приемом электромагнитных колебаний и волн радиочастотного диапазона. В соответствии с международным регламентом границы радиочастот лежат в пределах 3 кГц ... 3 ГГц, которым соответствуют длины волн от 100 км до 0,1мм. Таким образом, радиотехника является частью радиоэлектроники. Кроме того, к радиоэлектронике относят технику инфранизких частот, инфракрасную технику и оптоэлектронику. С технической стороны радиоэлектроника также охватывает автоматику, техническую кибернетику, вычислительную технику и электронику.

Как отрасль промышленности радиотехника связана с разработкой, производством и применением радиоаппаратуры для радиосвязи, радиовещания, телевидения, радиолокации, радионавигации и других направлений техники передачи информации. В более широком смысле вместо ра-

диоаппаратуры применяется термин *радиоэлектронная аппаратура* (РЭА), под которым подразумеваются приборы и технические устройства, предназначенные для преобразования электрических и электромагнитных сигналов с определенными целями.

Наиболее общим названием изделий радиоэлектроники, рекомендованным в стандартах, является термин *радиоэлектронное средство*, понимаемый как техническое изделие определенной сложности или его составная часть, в основу действия которого положены принципы радиотехники и электроники. По функциональной сложности РЭС разделяют на уровни: система, комплекс, устройство, узел. Собирательное понятие РЭА объединяет последние два уровня РЭС.

*Радиоэлектронная система* (РЭ система) – это РЭС в виде совокупности функционально взаимодействующих автономных радиоэлектронных комплексов и устройств, которые образуют целостное единство, обладающее свойством перестроения структуры в целях рационального выбора и использования входящих средств нижних уровней при решении технических задач. Примером РЭ системы может служить аэродромная автоматизированная система управления воздушным движением, которая производит измерения траекторных параметров самолетов и управление ими при полетах по кругу в районе аэродрома. В ее состав входят бортовой радиоэлектронный комплекс и наземные радиолокационный и вычислительный комплексы, которые, в свою очередь, состоят из РЭУ, т. е. РЭС более низкого уровня. Перестроение структуры данной РЭ системы вызывается условиями воздушной обстановки в районе аэродрома, в зависимости от интенсивности воздушного движения назначается оптимальная (с точки зрения безопасности) совокупность работающих РЭС.

В зависимости от сложности разрешаемых технических задач РЭ система может быть частью другой РЭ системы более высокого уровня.

Разновидностью РЭ системы является *радиотехническая система*, под которой понимают совокупность РЭС для передачи сообщений и команд по радиоканалам, состоящих из радиопередатчиков, линий радиосвязи и радиоприемников. Другой важной разновидностью РЭ системы служит *вычислительная система*, определяемая как взаимосвязанная совокупность вычислительных комплексов и устройств, согласованных по быстродействию, пропускной способности и другим параметрам. Отличительным признаком как радиотехнической, так и вычислительной системы является возможность перестроения ее структуры с целью наиболее эффективного использования входящих в систему технических средств.

В составе любой РЭ системы могут присутствовать механические, электромеханические и другие средства, без которых невозможна ее эксплуатация. Эти средства могут входить в РЭС как отдельно, так и внутри

радиоэлектронных комплексов или устройств.

*Радиоэлектронный комплекс (РЭК)* – это РЭС в виде совокупности функционально связанных РЭУ, обладающих свойством изменения структуры в целях сохранения работоспособности при выполнении технических задач в составе РЭ системы или в режиме самостоятельного применения. Примером РЭК может служить радиолокационный комплекс, состоящий из дальномера, высотомера и устройства опознавания и предназначенный для обнаружения объекта, определения его координат и установления принадлежности. При выходе из строя одного из устройств, входящих в комплекс, изменяются связи между ними, обеспечивая решение задачи при пониженной точности определения параметров объекта.

В качестве второго примера РЭС рассмотрим вычислительный комплекс, состоящий из двух или большего количества ЭВМ с собственными устройствами ввода-вывода, коммутаторами и дополнительными устройствами для информационного обмена между ЭВМ. Техническая задача такого комплекса – обработка информации. При выходе из строя одной ЭВМ ее функцию берет на себя другая ЭВМ. Работоспособность комплекса при этом сохраняется, но снижается его пропускная способность либо ограничивается круг решаемых задач.

*Радиоэлектронной устройством (РЭУ)* – есть РЭС в виде функционально законченной сборочной единицы, которая выполнена на несущей конструкции и реализует функции приема, преобразования и передачи информации или решает техническую задачу на их основе. В зависимости от сложности решаемых задач РЭУ может быть частью другого РЭУ. Примером РЭУ является метеонавигационный бортовой радиолокатор, который может быть выполнен на несущей конструкции в виде корпуса шкафа или блока. Данный радиолокатор предназначен для выполнения технической задачи по обнаружению с борта летательного аппарата опасных для полета гидрометеорологических образований и определению их углового положения и удаленности. Он состоит из совокупности функционально законченных сборочных единиц: антенного передающего и приемного устройства, а также устройств преобразования и отображения информации, каждое из которых также может быть отдельным примером РЭУ.

Еще одной иллюстрацией РЭУ может служить курсовой радиомаяк, предназначенный для изучения радиосигналов, содержащих информацию для управления самолетом по азимуту при заходе на посадку и во время посадки. Функционально законченными сборочными единицами, входящими в радиомаяк, являются антенное и передающее устройства. Обычно радиомаяк конструируется в виде шкафа или блока.

Каждый из рассмотренных РЭУ может эксплуатироваться самостоятельно или в составе РЭК (РЭ системы). Любое РЭУ структурно разделя-

ется на радиоэлектронные функциональные узлы, которые являются РЭС первого уровня, состоящие, в свою очередь, из элементов нулевого уровня функциональной иерархии: радиоэлементов (РЭ) и электротехнических элементов (ЭЭ). Некоторые РЭ и ЭЭ могут входить непосредственно в РЭУ.

*Радиоэлектронный функциональный узел (РЭФУ)* – есть РЭС в виде законченной сборочной единицы, которая выполнена на несущей конструкции и реализует функции преобразования сигнала и не имеет самостоятельного эксплуатационного значения.

Примером РЭФУ являются усилитель, модулятор, источник вторичного электропитания и др. Первый узел выполняет функции преобразования тока или напряжения по амплитуде без изменения их формы, второй – преобразования амплитуды либо частоты сигналов в соответствии с изменениями модулирующего напряжения, а третий – преобразование переменных токов и напряжения в постоянные или постоянных одного значения в постоянные другого значения. Самостоятельного применения эти РЭФУ не имеют, а могут эксплуатироваться в составе РЭУ. В зависимости от технических характеристик указанные РЭФУ могут иметь конструктивное исполнение в виде радиоэлектронного шкафа, блока или ячейки.

По конструктивной сложности РЭС имеют четыре уровня иерархического деления. Нулевой уровень составляют изделия электронной техники (ИЭТ) и электротехнические изделия (ЭТИ). Они входят в радиоэлектронные ячейки или кассеты, выполненные на основе несущей конструкции первого уровня (НК 1). На несущих конструкциях второго уровня (НК 2) строятся радиоэлектронные блоки или рамы, которые могут включать в себя как ячейки (кассеты), так и ИЭТ с ЭТИ. Наконец, на несущих конструкциях третьего уровня (НК 3) разрабатываются радиоэлектронные шкафы, пульты или стойки, в которые входят конструкции как второго, так и первого уровня.

Наличие двух видов классификации уровней разукрупнения свидетельствует о том, что в любом РЭС как готовом изделии различают две непосредственно взаимосвязанные части: электрическую схему и конструкцию.

*Электрическая схема РЭС* – есть совокупность РЭ, соединенных между собой в соответствии с заданным принципом действия РЭ системы или в соответствии с функциями, выполняемыми данным РЭС внутри другого РЭС более высокого уровня. Иными словами, электрическая схема отображает те преобразования полезных сигналов и помех, которые происходят с ними при прохождении через РЭС.

*Схемотехника* – прикладная научная дисциплина, занимающаяся анализом и синтезом электрических схем РЭС. Теоретическим фундамен-

том схемотехники является радиотехника.

*Конструкция РЭС* – есть совокупность ИЭТ, ЭТИ и конструктивных деталей, находящихся в определенной пространственно-механической, информационной и энергетической взаимосвязи, которая обеспечивает выполнение данным РЭС необходимых функций с высокой надежностью.

*Надежность* – это свойство РЭС сохранять во времени в установленных пределах значения всех требуемых характеристик, параметров и показателей при заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортировки.

Различают два понимания термина «конструирование». *Конструирование РЭС как вид инженерной деятельности* есть совокупность работ, выполняемых при создании проекта конструкции аппаратуры. *Конструирование РЭС как прикладная научная дисциплина* – это обобщение методов анализа и синтеза конструкций. Теоретический фундамент конструирования РЭС составляют: системный анализ, математическое моделирование, исследование операций, планирование эксперимента, теория вероятностей и математическая статистика, теория надежности, теория оптимизации и другие научные направления. В настоящее время на основе этих фундаментальных направлений формируется самостоятельная *теория конструирования РЭС* как система научных принципов и общих закономерностей разработки конструкций в радиоэлектронике. Ускоренного развития теории конструирования РЭС требуют применения ЭВМ как главной технической базы разработки конструкций, усложнение практических задач создания конструкций и усиление взаимосвязи конструирования с системотехникой, схемотехникой, технологией и эксплуатацией РЭС.

*Технология РЭС как область техники* – совокупность способов обработки, изменения состояния, свойств и формы материалов, изготовления полуфабрикатов (деталей, узлов, устройств) и их сборки с определенной точностью и производительностью в процессе производства для получения готового РЭС. С другой стороны, *технология РЭС как прикладная научная дисциплина* – это обобщенное представление физических химических, механических и других закономерностей и методов воздействия на материалы соответствующими орудиями производства.

*Эксплуатация РЭС как область техники* – совокупность способов транспортировки, хранения, установки и технического обслуживания РЭС при их функциональном использовании по назначению. В то же время *эксплуатация РЭС как прикладная научная дисциплина* – это системное представление и условий наилучшего использования аппаратуры для заданных целей с высокой надежностью и эффективностью.

# Системные методы в проектировании ЭС

## Л е к ц и я 2

### Понятие о системе и системном анализе.

#### 2.1. Конструирование и технология производства ЭС как система

Совершенствование конструкций РЭА представляет собой одно из направлений развития ЭС. Правильное понимание задач и перспектив конструирования РЭА возможно только при комплексном рассмотрении вопросов, т. е. при учёте взаимосвязи между конструкцией, системой, схемой, технологией, производством, эксплуатацией. Развитие конструкций, в свою очередь, оказывает значительное влияние на систему, схему, технологию, производство и эксплуатацию.

Поэтому конструкцию РЭА (а следовательно, и технологию её изготовления) нельзя рассматривать изолированно от РЭС, основное назначение которых состоит в выдаче, обработке и запоминании полезной информации.

Увеличивающаяся сложность РЭС, применяемых в последние годы в народном хозяйстве, повышение точности, быстродействия технологического оборудования, а также расширяющиеся специализация и кооперирование предприятий ставят перед конструкторами новые научно-технические проблемы. Среди них существенное место занимают вопросы, связанные с более детальным и глубоким изучением свойств и специфики функционирования отдельных видов аппаратуры и оборудования, особенно если речь идёт о средствах, работающих на новых малоисследованных принципах.

Однако при разработке крупных комплексов возникают проблемы, относящиеся не только к свойствам отдельных средств, но также и к закономерностям функционирования соответствующей системы в целом.

Более того, появился широкий круг проблем, мало связанных с рассмотрением свойств отдельных элементов: определение общей структуры системы, организация взаимодействия между её элементами, учёт влияния внешней среды, определение оптимальных режимов функционирования и т. д. По мере увеличения сложности систем комплексным «общесистемным» вопросам отводится всё более значительное место.

Они составляют содержание нового направления инженерной мысли, получившего наименование системотехники.

Научной, главным образом, математической базой системотехники является *теория сложных систем*.

В настоящее время нет возможности дать общее определение сложной системы, обладающее достаточной чёткостью с точки зрения построения строгой теории, поскольку отнесение той или другой реальной системы к разряду «сложных» или «простых» является в значительной мере условным и связано в основном с тем, насколько существенную роль играют при изучении системы комплексные «общесистемные» вопросы.

Рассмотрение изучаемого объекта материального мира как системы, состоящей из взаимодействующих элементов, построение математической модели для него и исследование его свойств методом моделирования составляет сущность *системного подхода*, а совокупность методов и приёмов исследования входит в арсенал самостоятельного научного направления, получившего название *системный анализ*. Системный подход играет решающую роль в исследовании операций, системотехнике, а также в сфере проектирования и построения РЭС, АСУ и др.

## **2.2. Основные понятия и методология системного анализа**

*Системный анализ* – это методология решения крупных задач и проблем, основанная на концепции систем.

*Методология* – это логически и процедурно организованная последовательность операций.

*Система* – это целостное множество взаимосвязанных элементов.

Системы подразделяются на простые и сложные.

*Простые* обычно состоят из одного элемента (*рис. 2.1.*).

*Сложные системы* должны удовлетворять ряду требований:

1. Система может быть разделена на подсистемы, подсистема на более мелкие подсистемы (элементы).

2. Элементы функционируют не изолированно друг от друга, а во взаимодействии.

3. Свойства системы зависят не только от свойств элементов, но и от характера их взаимодействия. Пример сложной системы показан на *рис.2.2.*

Как установить входит элемент в систему или нет? Это зависит от того участвует элемент в процессе приводящем к появлению выходного результата или нет.

Каждая система состоит из системных объектов, свойств и связей.

Системные объекты: *вход, процесс, выход, обратная связь, ограничения.*



Рис. 2.1. Простая система

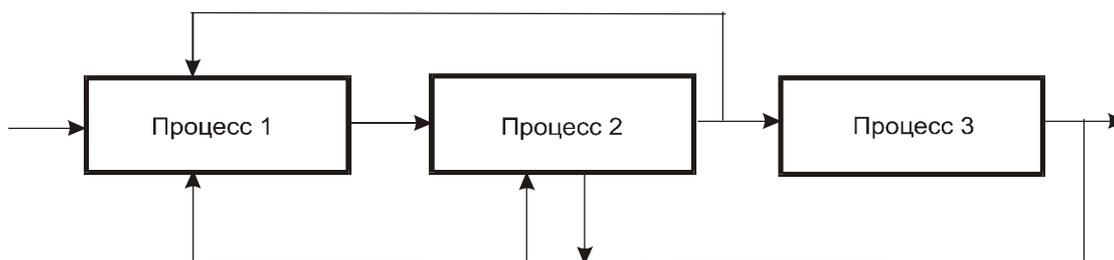


Рис. 2.2. Сложная система

*Входом* называется то, что изменяется при протекании этого процесса.

*Выходом* называется результат или конечное состояние процесса.

*Процесс* – это то, что переводит вход в выход.

*Обратная связь* служит для сравнения реального выхода с моделью выхода, выделяет различие и оценивает его, вырабатывает решение связанное с различием, формирует процесс ввода решения и воздействует на процессе с целью сближения выхода и модели выхода.

*Ограничения* – обеспечивают соответствие выхода системы целям потребителя.

*Свойством процесса* называется способность системы переводить данный вход в заданный выход.

*Связь* – это то, что определяет следование процесса, то есть вход некоторого процесса является выходом другого процесса, выход другого является входом следующего и так далее.

Выход является *необходимым*, если его отсутствие создает угрозу существованию или развитию системы.

*Проблемой* называется ситуация, характеризующаяся различием между необходимым и существующим выходом.

*Решение проблемы* – это система, которая устраняет промежуток между существующей и желаемой системами.

Система заполняющая промежуток является объектом конструирования и называется *решением проблемы*.

Системный анализ указывает необходимую последовательность операций, при решении проблем.

Последовательность заключается в следующем:

1. Обнаружение проблемы.
2. Оценка ее актуальности.
3. Определение цели и критериев.
4. «Вскрытие» структуры существующей системы.
5. Определение дефектных элементов существующей системы ограничивающих получение заданного выхода.
6. Оценка «веса» дефектных элементов.
7. Построение набора альтернатив (вариантов) и их оценка по выбранным критериям.
8. Выбор варианта для реализации, определение процесса реализации и реализация выбранного решения.
9. Оценка результатов реализованного решения.

Системный анализ претендует на роль некоторого «каркаса» объединяющего все необходимые методы, знания и действия для решения проблемы.

При системном анализе используются следующие математические методы:

- Методы математической статистики.
- Методы теории эксперимента.
- Методы исследования операции.
- Методы теории надежности и теории прочности.
- Методы распознавания образа.
- Методы теории игр.
- Методы инженерной психологии, а также многие другие.

Рассмотрение изучаемого объекта (процесса) как систему состоящую из взаимодействия элементов, построение математической модели для него и исследование его свойств методом моделирования составляет сущность системного подхода.

Системный подход играет решающую роль при проектировании РЭС, ЭВС, АСУ.

### **2.3. Проектирование ЭС как сложная система**

На *рис. 2.3.* показана структурная схема проектирования новых изделий, показывающая, что процесс проектирования ЭВС может рассматриваться как большая система.

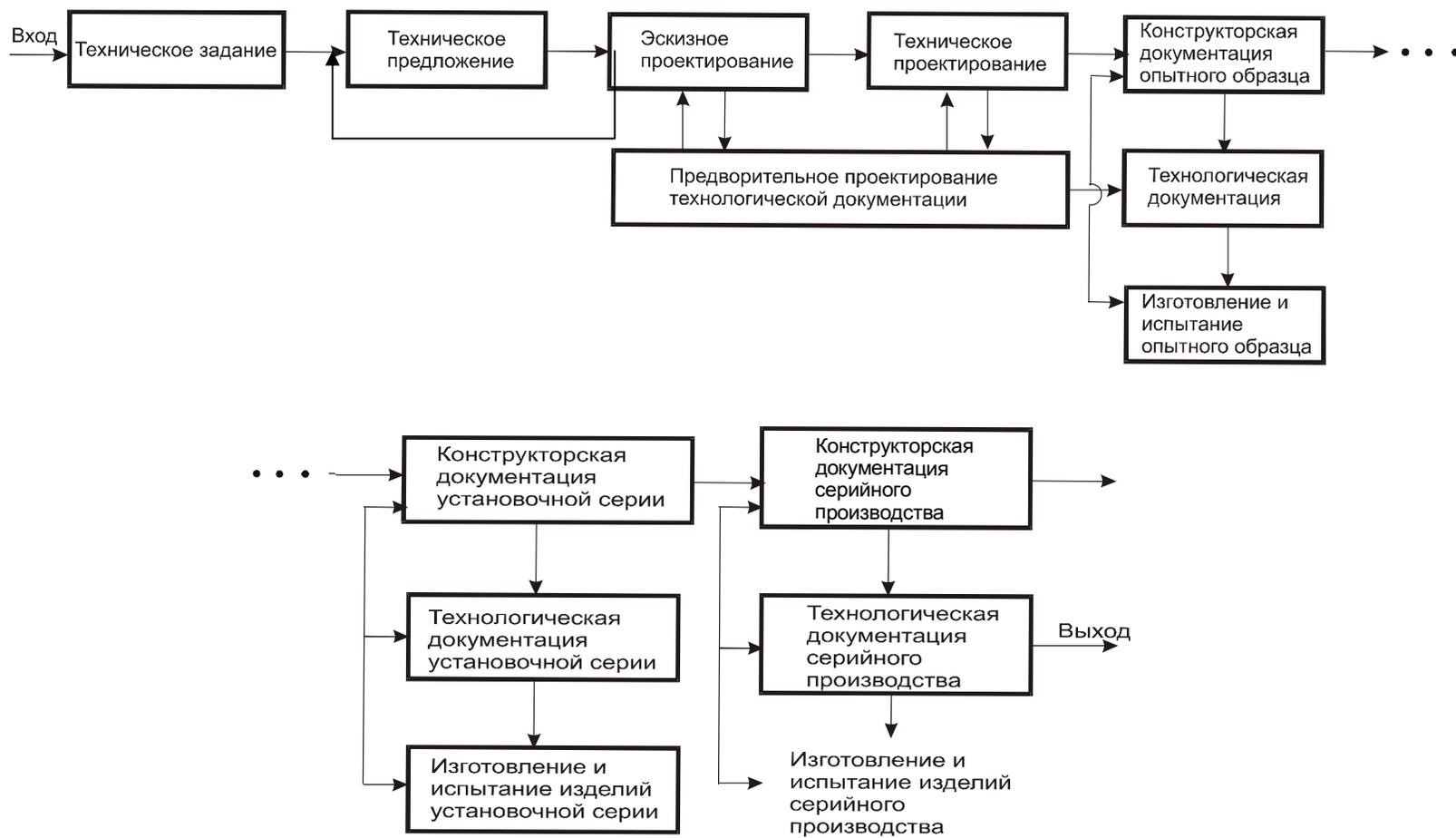


Рис. 2.3. Схема проектирования нового изделия

## Оценка вариантов систем

Одной из задач при системном анализе является выбор альтернатив (вариантов) систем по определенным критериям. Из всех вариантов наилучшим (оптимальным) является тот, который обладает наилучшим значением критерия называемым критерием оптимальности. Следовательно, для выбора оптимальности системы необходимо выбрать этот критерий, который, как правило, характеризует качество системы.

### 3.1. Понятие о качестве системы. Показатели качества.

*Качество продукции* это совокупность свойств продукции, предназначенных удовлетворять определённые потребности в соответствии с ее назначением. Для количественной характеристики качества введены показатели качества. Государственный стандарт предусматривает десять групп показателей качества.

1. *Показатели назначения*, например: мощность, чувствительность, быстродействие, КПД.

2. *Показатели надежности*. Делятся на четыре группы: показатели безотказности, показатели долговечности, показатели ремонтпригодности и показатели сохраняемости, например: вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, средняя наработка на отказ, среднее время восстановления и т. д.

3. *Показатели технологичности*, делятся на основные, технико-экономические и технические. К основным показателям относятся трудоемкость изготовления и себестоимость изделия, к технико-экономическим – относительная трудоемкость процесса изготовления изделия и др., к техническим – коэффициент шероховатости поверхности, коэффициент использования материала, коэффициент точности обработки и др.

4. *Эргономические показатели*. Это обширная группа показателей делится на гигиенические, антропологические, психологические, физиологические и психофизические показатели. *Гигиенические* показатели оценивают соответствие изделия гигиеническим условиям жизнедеятельности и работоспособности человека при взаимодействии его с изделием, например: уровень освещенности, температура, влажность шум, и т.д. *Антропологические* показатели оценивают соответствие изделия размерам и форме

человеческого тела. *Физиологические* и *психофизические* оценивают соответствие изделия физиологическим свойствам человека и особенностям функционирования его органов чувств, то есть оценивают скоростные, зрительные, слуховые и другие возможности. *Психологические* оценивают соответствие изделия психологическим особенностям человека, то есть оценивают возможности восприятия и переработки информации человеком. В отличие от трех предыдущих групп эргономические показатели не могут быть определены расчетным путем и определяются обычно экспертами по бальной системе.

5. *Эстетические показатели*. Эти показатели оценивают цвет, форму изделия, например: показатели цветового колорита, показатель соответствия моде, показатель стилевого соответствия и другие.

6. *Патентно-правовые показатели*. Эти показатели характеризуют количество и весомость изобретений и патентов, используемых в изделии, например: показатель патентной чистоты, показатель патентной защиты.

7. *Показатели стандартизации и унификации*. Они характеризуют насыщенность продукции стандартными, унифицированными и оригинальными элементами, например: коэффициент стандартизации и унификации, коэффициент повторяемости и другие.

8. *Показатели транспортабельности*. Они характеризуют приспособленность продукции к перемещению в пространстве, не сопровождающимся ее использованием или потреблением, например: средняя трудоемкость подготовки продукции к транспортировке, коэффициент использования объема средства транспортировки.

9. *Экологические показатели*. Эти показатели характеризуют уровень вредных воздействий на окружающую среду возникающий при эксплуатации или потреблении продукции, например: содержание вредных примесей выбрасываемых в окружающую среду.

10. *Показатели безопасности*, например: вероятность безотказной работы, электрическая прочность изоляции и другие.

### **3.2. Оценка уровня качества систем**

Применяется несколько методов оценки уровня качества системы, но наибольшее распространение получили дифференциальный и комплексный методы. *Дифференциальный* метод является наиболее простым, для этого определяются отдельные (единичные) показатели качества и сравниваются с базовыми показателями, регламентированными стандартами или

техническими условиями. Эти показатели обычно записываются в абсолютной или относительной форме:

$$K_{yi} = \frac{K_i}{K_{oi}},$$

где  $K_{yi}$  - коэффициент уровня по  $i$ -му показателю качества;  $K_i$  -  $i$ -й показатель качества;  $K_{oi}$  - базовое значение  $i$ -го показателя качества.

Если показатель характеризует положительное свойство изделия, то желательно чтобы  $K_y > 1$ , если показатель характеризует отрицательное свойство изделия, наоборот то  $K_y < 1$ . Например, необходимо стремиться чтобы значение показателя стоимости было меньше базового показателя. Недостаток этого метода в том, что одни показатели могут быть лучше базового значения или таких же показателей других изделий, а другие хуже. Для выхода из этого противоречия из всей номенклатуры показателей выделяется один (или несколько), основной, а другие показатели переводятся в разряд ограничений. *Комплексный* метод имеет целью характеризовать качество системы одним показателем качества, учитывающим значения других (единичных) показателей качества, то есть проводится свертка единичных показателей в один комплексный показатель качества. Наибольшее применение нашел показатель в виде суммы:

$$K = g_1 K_{y1} + g_2 K_{y2} + \dots + g_n K_{yn},$$

где  $K_{y1}, K_{y2}$  - единичные показатели качества.

$g_1, g_2$  - коэффициенты "веса" показателей, определяемые экспертами.

Сумма всех коэффициентов "веса" должна равняться единице.

### Пример оценки уровня качества

Известны параметры шести судовых РЛС, которые приведены в таблице.

№ станции	1	2	3	4	5	6
Показатели						
1. Дальность действия, ( $D$ ) км	45	40	45	50	35	60
2. Стоимость, ( $C$ ) млн. руб.	80	90	120	90	100	200
3. Масса, $m \cdot 10^3$ кг	2,5	4	2,5	3	2	4

Выбрать наилучший вариант, при следующих ограничениях:  $D_{min} = 40$  км,  $C_{max} = 100$  млн. руб.,  $m_{max} = 3000$  кг.

Видно, что этим ограничениям удовлетворяют только варианты 1 и 4. Сравнение их дифференциальным методом по 3-м указанным параметрам невозможно. Поэтому применим интегральный метод, принимая коэффициенты «веса» равными  $g_D = 0,5$ ,  $g_C = 0,25$ ,  $g_G = 0,25$ . В качестве «базового» значения выберем среднее по двум сравниваемым вариантам.

$$D_{cp} = 47,5 \text{ км}, C_{cp} = 85 \text{ млн. руб.}, m_{cp} = 2750 \text{ кг.}$$

$$K_{\Sigma 1} = K_{D1}g_D + K_{C1}g_C + K_{G1}g_G = \frac{45}{47,5} \cdot 0,5 + \frac{85}{80} \cdot 0,25 + \frac{2,75}{2,5} \cdot 0,25 = 1,015$$

$$K_{\Sigma 4} = \frac{50}{47,5} \cdot 0,5 + \frac{85}{90} \cdot 0,25 + \frac{2,75}{3} \cdot 0,25 = 0,99$$

Видно, что предпочтение следует отдать первому варианту.

# Моделирование систем

## 4.1. Общие сведения о моделировании

Моделирование представляет собой метод научного познания при котором исследуемый объект замещается другим, более простым, называемым моделью, изучение которой даёт возможность получить новую и ранее неизвестную информацию об исходном объекте. В зависимости от способа воплощения изучаемого объекта в модели различают физическое и математическое моделирование. Оба эти вида используют при проектировании ЭС.

Процесс создания ЭС всегда включает в себя прогнозирование её основных характеристик. Наиболее естественным и, как правило, достоверным методом такого предсказания является макетирование, которое предполагает создание устройства и последующие его испытания. В процессе проведения последних выявляются ошибки и слабые места конструкции, которые далее устраняются. Такой способ отработки изделий называют *физическим моделированием*, поскольку он осуществляется на вещественной (материальной) модели, которая, отображая излучаемый объект, сохраняет его физическую природу. Для удешевления экспериментов физические модели (макеты) изготавливают зачастую в упрощённом виде (например, меньшей мощности, производительности и пр.). естественно, что при этом точность предсказания снижается.

Часто натурный эксперимент практически невыполним, настолько он сложен, дорог и рискован. В ряде случаев или создание макета устройства экономически нецелесообразно, особенно когда после изготовления в него практически невозможно внести какие-либо усовершенствования (изменения). Так, например, обстоит дело при создании новых типов БИС. Поэтому естественно стремление разработчиков создавать сразу конструкции ЭС с характеристиками, близкими к оптимальным.

Решение перечисленных задач требует применения методов, с помощью которых можно было бы провести оценку (расчёт) наиболее важных процессов, имеющих место в проектируемом изделии. Это достигается *математическим моделированием*, суть которого в том, что проектируемому изделию ставят в соответствие его математическую модель (ММ). Под последней обычно понимают упрощённое отображение наиболее существенных свойств реального объекта, выраженное в математической форме.

Математическая модель может быть в общем случае задана системой уравнений, неравенств, логической последовательностью операций и пр. Независимо от способа задания ММ она всегда дополняется ограничениями, связанными, как правило, с техническими возможностями устройства, условиями его эксплуатации и т. п.

Наиболее распространённым способом представления ММ является система (каких-либо) уравнений с необходимыми для её решения данными: начальными и граничными условиями, численными значениями коэффициентов в уравнениях и пр. Варьируя ими, можно провести детальное изучение физических процессов в изделии, отображённых выбранной ММ, выявить основные их закономерности, оценить влияние на них различных факторов, т. е. получить информацию, аналогичную получаемой в ходе физического эксперимента. Однако в данном случае вместо экспериментальной установки мы используем ЭВМ, а вместо изучаемого физического объекта – его математическую модель. Подобные исследования называют *вычислительным экспериментом*.

Вычислительный эксперимент обладает рядом преимуществ по сравнению с натурным. Он, как правило, намного дешевле, легче и быстрее реализуем, допускает (с корректировкой) на любой стадии исследования и позволяет моделировать условия эксперимента, которые зачастую вообще невозможно воспроизвести при натуральных испытаниях.

Математическое моделирование включает в себя математические модели объектов проектирования, методы и алгоритмы выполнения проектных процедур.

#### **4.2. Требования к математическим моделям**

к математическим моделям предъявляются требования универсальности, адекватности, точности и экономичности.

**Степень универсальности** ММ характеризует полноту отображения в модели свойств реального объекта. Математическая модель отображает лишь некоторые свойства объекта. Так, большинство ММ, используемых при функциональном проектировании, предназначено для отображения протекающих в объекте физических или информационных процессов, при этом не требуется, чтобы ММ описывала такие свойства объекта, как геометрическая форма составляющих его элементов. Например, ММ резистора в виде уравнения закона Ома характеризует свойство резистора пропускать электрический ток, но не отображает габариты резистора, как детали, его цвет, механическую прочность, стоимость и т. п.

**Точность** ММ оценивается степенью совпадения значений параметров реального объекта и значений тех же параметров реального объ-

екта и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью оцениваемой ММ. Пусть отражаемые в ММ свойства оцениваются вектором выходных параметров  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Тогда, обозначив истинное и рассчитанное с помощью ММ значения  $j$ -го выходного параметра через  $y_{j\text{ист}}$  и  $y_{j\text{м}}$  соответственно, определим относительную погрешность  $\varepsilon_j$  расчёта параметра  $y_j$  как

$$\varepsilon_j = (y_{j\text{м}} - y_{j\text{ист}}) / y_{j\text{ист}}.$$

**Адекватность** ММ – способность отображать заданные свойства объекта с погрешностью не выше заданной. При этом, как правило, адекватность модели имеет место лишь в ограниченной области изменения внешних переменных – области адекватности (ОА) математической модели.

**Экономичность** ММ характеризуется затратами вычислительных ресурсов (затратами машинных времени  $T_{\text{м}}$  и памяти  $P_{\text{м}}$ ) на её реализацию. Чем меньше  $T_{\text{м}}$  и  $P_{\text{м}}$ , тем модель экономичнее. Вместо значений  $T_{\text{м}}$  и  $P_{\text{м}}$ , зависящих не только от свойств модели, но и от особенностей применяемой ЭВМ, часто используют другие величины, например: среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к модели, размерность системы уравнений, количество используемых в модели внутренних параметров и т. п.

Необходимо помнить, что требования высоких точности, степени универсальности, широкой области адекватности, с одной стороны, и высокой экономичности, с другой стороны, противоречивы.

### 4.3. Классификация математических моделей

Основные признаки классификации и типы ММ приведены на *рис. 4.1*.

По характеру отображаемых свойств объекта ММ делятся на структурные и функциональные.

**Структурные** ММ предназначены для отображения структурных свойств объекта. Различают структурные ММ топологические и геометрические.

*В топологических ММ* отображаются состав и взаимосвязи элементов объекта. Их чаще всего применяют для описания объектов, состоящих из большого числа элементов, при решении задач привязки конструктивных элементов к определённым пространственным позициям (например, задачи компоновки оборудования, размещения деталей, трассировки соединений) или к относительным моментам времени (например, при разра-

ботке расписаний, технологических процессов). Топологические модели могут иметь форму графов, таблиц (матриц), списков и т. п.

*В геометрических ММ* отображаются геометрические свойства объектов, в них дополнительно к сведениям о взаимном расположении элементов содержатся сведения о форме деталей. Геометрические ММ могут выражаться совокупностью уравнений линий и поверхностей; алгебрологических соотношений, описывающих области, составляющие тело объекта; графами и списками, отображающими конструкции из типовых конструктивных элементов, и т. п. Геометрические ММ применяют при решении задач конструирования в приборостроении, радиоэлектронике, для оформления конструкторской документации, при задании исходных данных на разработку технологических процессов изготовления деталей. Используют несколько типов геометрических ММ.

Для отображения геометрических свойств деталей со сравнительно несложными поверхностями применяют ММ, представляемые в аналитической или алгебрологической форме (аналитические, алгебрологические). *Аналитические ММ* – уравнения поверхностей и линий, например уравнение плоскости имеет вид  $ax + by + cz + d = 0$ , где  $x, y, z$  – пространственные координаты,  $a, b, c, d$  – коэффициенты уравнений. *В алгебрологических ММ* тела описываются системами логических выражений, отражающих условия принадлежности точек внутренним областям тел.

Для сложных поверхностей аналитические и алгебрологические модели оказываются слишком громоздкими, их трудно получать и неудобно использовать. Область их применения обычно ограничивается поверхностями плоскими и второго порядка.

В машиностроении для отображения геометрических свойств деталей со сложными поверхностями применяют ММ каркасные и кинематические.

*Каркасные (сеточные) ММ* представляют собой конечные множества элементов, например точек или кривых, принадлежащих моделируемой поверхности. В частности, выбор каркаса в виде линий, образующих сетку на описываемой поверхности, приводит к разбиению поверхности на отдельные участки. Кусочно-линейная аппроксимация на этой сетке устраняет главный недостаток аналитических моделей, так как в пределах каждого из участков, имеющих малые размеры, возможна удовлетворительная по точности аппроксимация поверхностями с простыми уравнениями. Коэффициенты этих уравнений рассчитываются исходя из условий плавности сопряжений участков.

**Ф у н к ц и о н а л ь н ы е** ММ предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании или изготовлении. Обычно функциональные ММ

представляют собой системы уравнений, связывающих фазовые переменные, внутренние, внешние и выходные параметры.

Деление описаний объектов на аспекты и иерархические уровни непосредственно касается математических моделей. Выделение аспектов описания приводит к выделению моделей электрических, механических, гидравлических, оптических, химических и т. п., причём модели процессов функционирования изделий и модели процессов их изготовления различные, например модели полупроводниковых элементов интегральных схем, описывающих процессы диффузии и дрейфа подвижных носителей заряда в полупроводниковых областях при функционировании прибора и процессы диффузии примесей в полупроводник при изготовлении прибора.

В зависимости от места в иерархии описаний математические модели делятся на ММ, относящиеся к микро-, макро- и метауровням.

Использование принципов блочно-иерархического подхода к проектированию приводит к появлению иерархии математических моделей проектируемых объектов. Количество иерархических уровней при моделировании определяется сложностью проектируемых объектов возможностью средств проектирования. Однако для большинства предметных областей можно отнести имеющиеся иерархические уровни к одному из трёх обобщённых уровней, называемых далее микро-, макро- и метауровнями.

Особенностью ММ на микроуровне является отражение физических процессов, протекающих в непрерывном пространстве и времени. Типичные ММ на микроуровне – дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП). В них независимыми переменными являются пространственные координаты и время. С помощью этих уравнений рассчитываются поля механических напряжений и деформаций, электрических потенциалов, давлений, температур и т. п. Возможности применения ММ в виде ДУЧП ограничены отдельными деталями, попытки анализировать с их помощью процессы в многокомпонентных средах, сборочных единицах, электронных схемах не могут быть успешными из-за чрезмерного роста затрат машинного времени и памяти.

На макроуровне используют укрупнённую дискретизацию пространства по функциональному признаку, что приводит к представлению ММ на этом уровне в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В этих уравнениях независимой переменной является время  $t$ , а вектор зависимых переменных  $V$  составляют фазовые переменные, характеризующие состояние укрупнённых элементов дискретизованного пространства. Такими переменными являются силы и скорости механических систем, давления и расходы гидравлических и пневматических систем и т. п. Системы ОДУ являются универсальными моделями на

макроуровне, пригодными для анализа как динамических, так и установившихся состояний объектов. Модели для установившихся режимов также представить в виде систем алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений зависит от числа выделенных элементов объекта. Если порядок системы приближается к  $10^3$ , то оперирование моделью становится затруднительным и поэтому необходимо переходить к представлениям на метауровне.

На метауровне в качестве элементов принимают достаточно сложные совокупности деталей. Метауровень характеризуется большим разнообразием типов используемых ММ. Для многих объектов ММ на метауровне по-прежнему представляются системами ОДУ. Однако так как в моделях не описываются внутренние для элементов фазовые переменные, а фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов, то укрупнение элементов на метауровне означает получение ММ приемлемой размерности для существенно более сложных объектов, чем на макроуровне.

В ряде предметных областей удаётся использовать специфические особенности функционирования объектов для упрощения ММ. Примером являются электронные устройства цифровой автоматики, в которых можно применять дискретное представление таких фазовых переменных, как напряжения и токи. В результате ММ становится системой логических уравнений, описывающих процессы преобразования сигналов. Такие логические модели существенно более экономичны, чем модели электрические, описывающие изменения напряжений и сил токов как непрерывных функций времени. Важный класс ММ на метауровне составляют модели массового обслуживания, применяемые для описания процессов функционирования информационных и вычислительных систем, производственных участков, линий и цехов.

Структурные модели также делятся на модели различных иерархических уровней. При этом на низших иерархических уровнях преобладает использование геометрических моделей, на высших иерархических уровнях используются топологические модели.

По степени детализации описания в пределах каждого иерархического уровня выделяют полные ММ и макромоделли.

Полная ММ – модель, в которой фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояния всех имеющихся межэлементных связей (т. е. состояния всех элементов проектируемого объекта).

Макромодель - ММ, в которой отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупнённом выделении элементов.

- **Примечание.** Понятия «полная ММ» и «макромодель» относительны и обычно используются для различения двух моделей, отображающих различную степень детальности описания свойств объекта.

По способу представления свойств объекта функциональные ММ делятся на аналитические, алгоритмические, имитационные.

**Аналитические** ММ представляют собой явные выражения выходных параметров как функций входных и внутренних параметров, т. е. имеют вид (1.1). Такие ММ характеризуются высокой экономичностью, однако получение формы (1.1) удаётся лишь в отдельных частных случаях, как правило, при принятии существенных допущений и ограничений, снижающих точность и сужающих область адекватности модели.

**Алгоритмические** ММ выражают связи выходных параметров с параметрами внутренними и внешними в форме алгоритма. Типичной алгоритмической ММ является система уравнений (1.2), дополненная алгоритмом выбранного численного метода решения и алгоритмом вычисления вектора выходных параметров как функционалов решения системы уравнений  $V(z)$ .

**Имитационная** ММ – алгоритмическая модель, отражающая поведение исследуемого объекта во времени при задании внешних воздействий на объект. Примерами имитационных ММ могут служить модели динамических объектов в виде систем ОДУ и модели систем массового обслуживания, заданные в алгоритмической форме.

Для получения ММ используют методы неформальные и формальные.

По способу получения модели делятся на теоретические и эмпирические. *Теоретические* ММ создаются в результате исследования процессов и их закономерностей, присущих рассматриваемому классу объектов и явлений; *эмпирические ММ* – в результате изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерений фазовых переменных на внешних входах и выходах обработки результатов измерений.

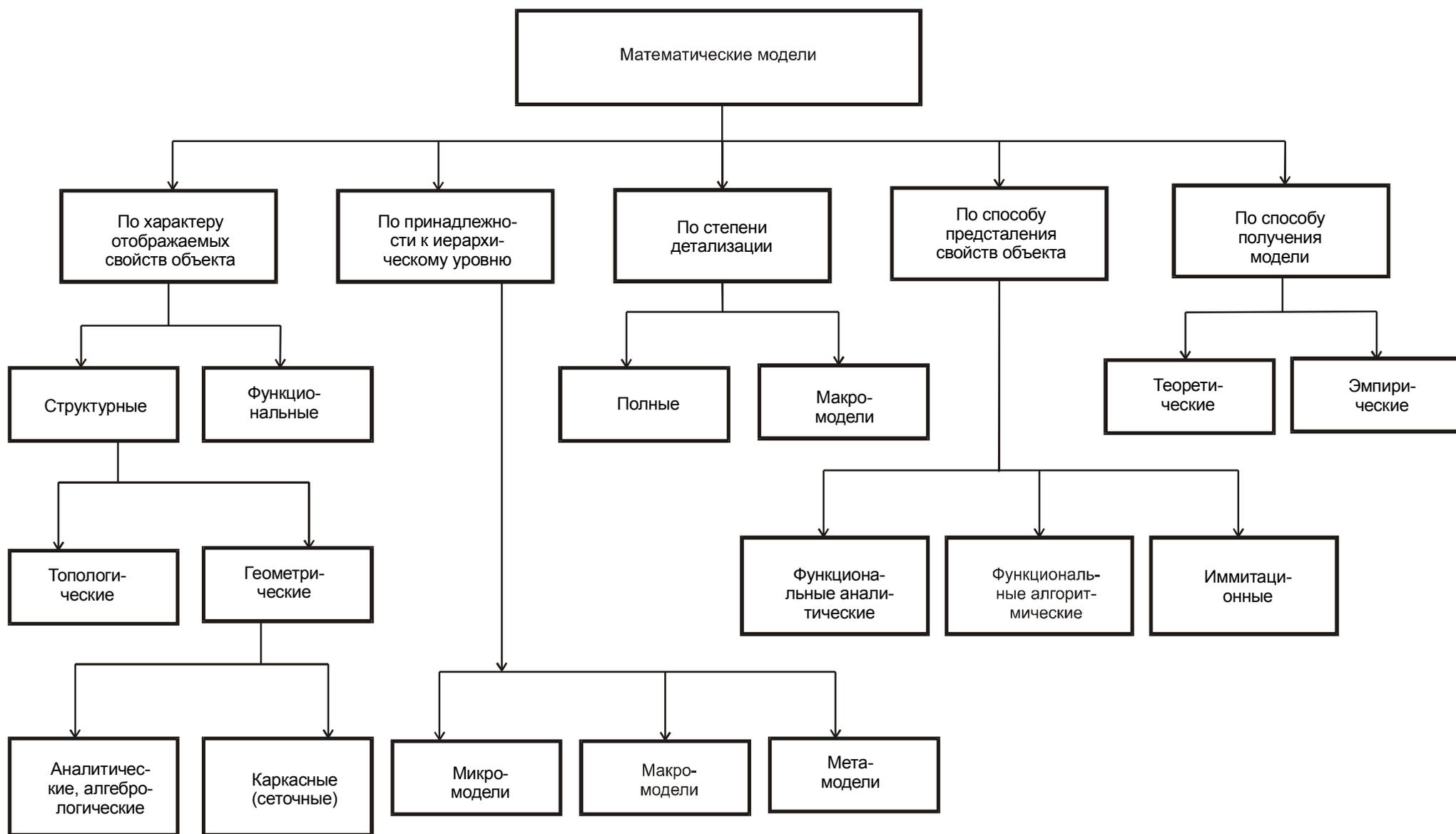


Рис. 4.1. Классификация моделей

#### 4.4. Понятие об оптимизации систем

В последние годы становится всё более актуальна задача создания не только удовлетворяющих исходным данным, но и оптимальных (наилучших) систем. Это объясняется тем, что с каждым годом возрастают требования, предъявляемые к ЭС, время и средства, затрачиваемые на их изготовление. Поэтому весьма существенно не просто удовлетворить исходным требованиям, предъявляемым к показателям качества системы, но и перевыполнять эти требования (уменьшить по сравнению с запланированным стоимость системы и время её разработки, повысить надёжность и т. д.).

Оптимизация ЭС включает в себя оптимизацию как собственно разрабатываемой системы, так и процесса её разработки. Обе эти стороны оптимизации взаимно связаны. Показатели качества разработанной системы существенно зависят от степени оптимальности процесса разработки и от отпущенных на неё времени и средств.

Мы будем рассматривать в основном оптимизацию двух подсистем: конструкцию и технологию РЭА, поскольку от степени оптимальности этих подсистем зависят показатели качества РЭС. Очевидно, что в задачу оптимизации конструкции и технологии входит выбор лучшего варианта конструкции, выбор лучшего варианта технологического процесса и лучших режимов его проведения.

Оптимизация системы осуществляется обычно как на этапах технического предложения и эскизного проекта, так и на всех последующих этапах. Однако важно осуществить оптимизацию в возможно большей степени на самых ранних этапах разработки, так как при этом она может быть наиболее радикальной и требует меньших экономических затрат. В дальнейшем отыскание оптимальной системы (конструкции) называется для краткости *синтезом системы* (конструкции).

Синтез конструкции обычно включает решение следующих задач:

1. Синтез оптимальной структуры конструкции, т. е. отыскание оптимальных принципов построения конструкции (синтез структуры).
2. Выбор оптимальных значений параметров конструкции (оптимизация параметров).

Оптимизация технологического процесса включает решение следующих задач:

1. Выбор оптимального варианта технологического процесса (дискретный выбор техпроцесса).
2. Выбор оптимальных режимов проведения техпроцесса (оптимизация параметров техпроцесса).

Оптимизация конструкции и технологического процесса производится обычно коллективами, возглавляемыми главным конструктором и главным технологом, путём сочетания различных методов. Различают следующие методы оптимизации: *математический* и *эвристический*.

*Математический синтез* заключается в математической формулировке (записи) совокупности исходных данных и критерия предпочтения и отыскания чисто математическим путём такого решения, которое обеспечивает наилучшее значение вектора  $K$ .

Под эвристическим синтезом понимают сложный и многообразный творческий процесс, заключающийся в отыскании инженерным коллективом приемлемых решений на основе использования накопленных данных, собственного инженерного опыта, приближённых расчётов, инженерной интуиции и творческих способностей членов коллектива.

Сопоставление и взаимная коррекция данных, полученных математическими и эвристическими методами, и позволяют получить оптимальные результаты. Такой комбинированный процесс сочетания математических и эвристических методов будем называть *инженерным синтезом*.

Инженерный синтез связан с информационно-поисковыми работами. Прежде чем приступить к выбору вариантов конструкции и технологического процесса, конструктору и технологу нужно получить информацию по существу дела. Для этой цели служат соответствующие информационно-поисковые системы.

Аналогичным образом инженерный синтез связан с использованием ЕСКД, ЕСТД и ЕСТПШ, и др. ЕС. Использование этих систем позволяет сократить срока разработки и производства изделий.

В настоящее время оптимизация конструкции и технологии – процессы весьма сложные, требующие перебора ряда вариантов с громоздкими и трудоемкими расчетами, которые необходимо выполнять с помощью ЭВМ.

В общем случае решение проблемы построения системы является одной из задач последовательного приближения. Так, варианты конструкции и технологического процесса вначале сравниваются в свете достижения критериев и модифицируются так, чтобы в большей степени удовлетворить исходным требованиям.

Отобранный модифицированный (квазиоптимальный) вариант вновь анализируется и вновь совершенствуется до тех пор, пока не будут удовлетворены поставленные задачи и заданные показатели функционирования. При этом для оценки качества промежуточных решений используют математический и экспериментальный методы анализа.

# Основы теории точности электронных средств

## Л е к ц и я 5

### Погрешности и их математическое описание

#### Понятие о погрешностях. Классификация погрешностей.

Под *погрешностью* понимается разность между действительным и заданным значением параметра. Их иногда называют ошибками, или отклонениями.

По характеру погрешностей их делят на:

- *Систематические* – входят в результаты опыта постоянной величиной и с постоянным знаком; они могут быть учтены и исключены из результатов опыта;
- *Случайные* – входят в результаты опыта случайной величиной и со случайным знаком; они могут быть уменьшены, но полностью их исключить невозможно;
- *Грубые* – резко выделяются на фоне других погрешностей.

Погрешности можно также разделить по стадиям их появления:

<i>погрешности при проектировании</i>	<i>погрешности при производстве</i>	<i>погрешности при эксплуатации, хранении и транспортировании</i>	
(подразумевают погрешности выбранных закономерностей, формул, законов, вычислений, округлений, технической документации др.);	(погрешности параметров исходных материалов, погрешности определения, оборудования, приспособлений, обслуживающего персонала, погрешности измерений, испытаний и пр.)	<b>Объективные</b> (обусловлены действием внешних факторов – повышенной или пониженной температуры, давления, вибраций, процессы старения компонентов и пр.)	<b>Субъективные</b> (обусловлены действием обслуживающего персонала)

Таким образом, погрешности зависят от многих случайных факторов, поэтому они являются случайными величинами.

#### Математическое описание погрешностей

Погрешности по своей природе являются случайными величинами.

*Случайной величиной* называется такая переменная величина, которая в результате опыта может принимать одно из возможных заранее неизвестных значений.

Случайные величины делятся на:

- *дискретные*, которые в результате опыта могут принимать конечное количество значений; свойством дискретной случайной величины является равенство единице суммы вероятностей всех возможных значений случайной величины, то есть:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

- *непрерывные* (количество значений бесконечно, поэтому непрерывные величины описываются интегральной функцией):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

где  $f(x)dx$  имеет, как будет показано дальше, смысл вероятности.

Наиболее полной характеристикой случайной величины является ее *закон распределения*, который устанавливает связь между всеми возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Законы распределения могут иметь различную форму, но наиболее часто они представляются в виде ряда, функции или плотности распределения.

**Ряд распределения.** Эта форма представления закона распределения применяется только для дискретных случайных величин и обычно приводится в виде таблицы;

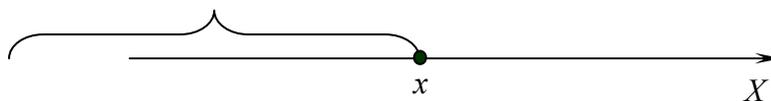
<b>X</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	....	$x_n$
<b>P</b>	$p_1$	$p_2$	$p_3$	....	$p_n$

но может быть представлена и графически.

**Функция распределения** – это есть вероятность того, что случайная величина  $X$  не превысит некоторого заданного значения  $x$ , то есть:

$$F(x) = P(X < x).$$

Суть функции распределения можно пояснить графически (это вероятность попадания случайной величины  $X$  на участок от  $-\infty$  до  $x$ ):

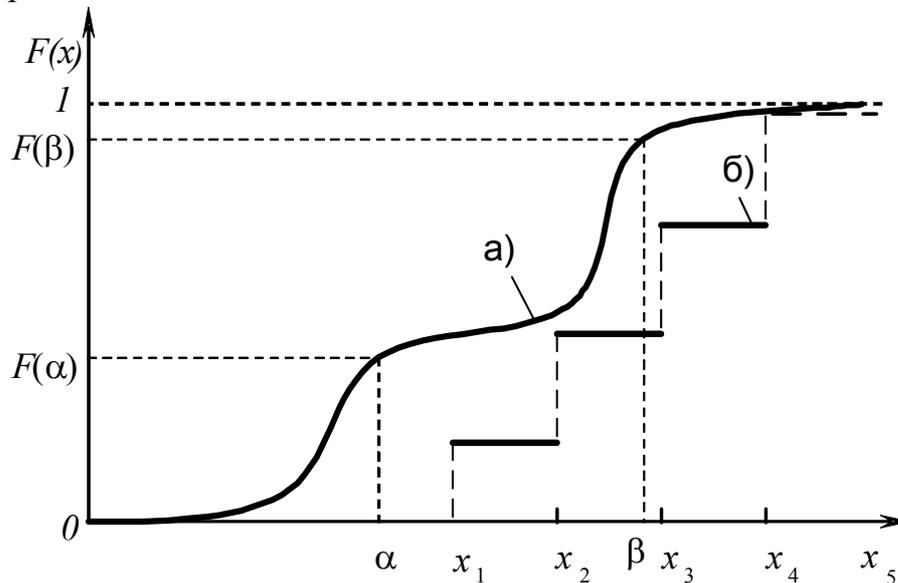


Свойства функции распределения:

1. при  $x = \infty$ ;  $F(x) = F(+\infty) = 1$ ;
2. при  $x = -\infty$ ;  $F(x) = F(-\infty) = 0$ ;

3. Если  $a_1 > a_2$ , то  $F(a_1) \geq F(a_2)$ , то есть функция распределения это неубывающая функция своего аргумента.

Графически функцию распределения можно представить в виде, показанном на *рис. 5.1*:



*Рис. 5.1.* Примерный вид функции распределения  
а) непрерывной СВ, б) дискретной СВ

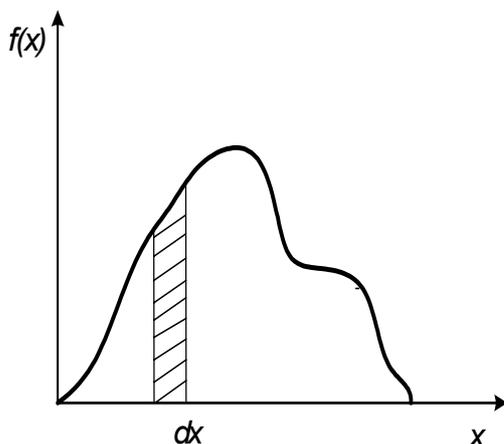
Зная функцию распределения, легко определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (от  $\alpha$  до  $\beta$ ):

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

**Плотность распределения**  $f(x)$  связана с функцией распределения следующим соотношением:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\Delta x)}{\Delta x}$$

Таким образом, *плотность распределения случайной величины есть плотность распределения ее вероятности*. Примерный вид плотности расщепления показан на *рис. 5.2*:



*Рис. 5.2.* Примерный вид плотности распределения

Из предыдущего соотношения получим два важных выражения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

$$P(dx) = f(x) dx.$$

Последнее выражение получило название *элемента вероятности*.

Из рис. 5.2. видно, что он численно равен площади под кривой плотности распределения на участке  $dx$ .

Плотность распределения имеет два свойства:

1)  $f(x) \geq 0$ ;

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ .

На практике часто применяют типовые плотности распределения, называемые законами распределения: закон равномерной плотности, нормальный закон распределения, законы Пуассона, Вейбула, Релея и т.д.

**Закон равномерной плотности.** Здесь плотность одинакова на всем участке (график плотности распределения показан на рис. 5.3.):

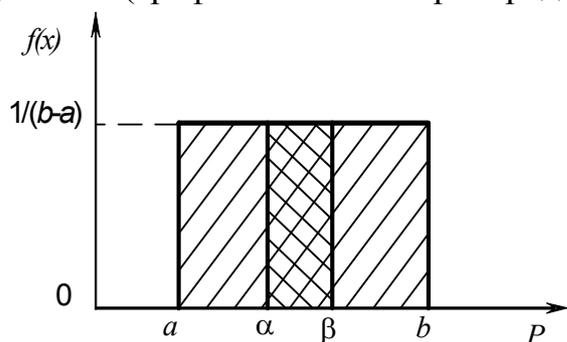


Рис. 5.3. Закон равномерной плотности

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x < b \\ f(x) = 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x < b, \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Отсюда  $P(\alpha \leq x \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ .

**Нормальный закон распределения.** График плотности распределения показан на рис. 5.4.

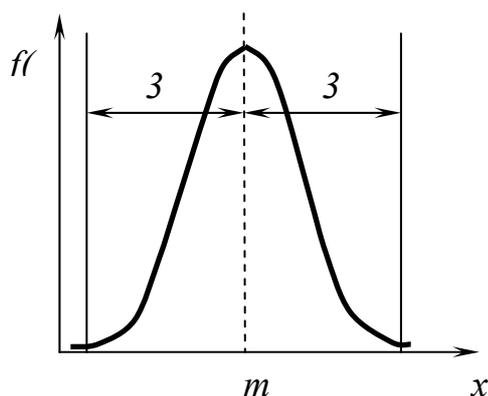


Рис. 5.4. Нормальный закон

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $m$  и  $\sigma$  – параметры закона, называемые математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, или стандартом. Для нормального закона справедливо соотношение:

$$P(\alpha \leq x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где  $\Phi(\dots)$  – табулированная функция Лапласа.

С нормальным законом распределения связано правило «трех сигм», говорящее о том, что вероятность попадания  $X$  в интервал  $(m - 3\sigma ; m + 3\sigma)$  равна 0,9973 (99,73%).

На практике действия с законами распределения часто бывают громоздкими, поэтому используют некоторые числовые характеристики законов (параметры), отражающие наиболее характерные черты этих законов: математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс.

**Математическое ожидание** определяет центр группирования случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности:

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx ,$$

где  $f(x)dx$  – элемент вероятности, определяющий вероятность попадания непрерывной случайной величины на бесконечно малый интервал  $dx$ .

**Дисперсия.** Для характеристики разброса случайной величины пользуются понятием дисперсии или среднего квадратического отклонения.

*Дисперсия* – математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины:

$$D_x = D[X] = M \left[ \overset{\circ}{X}^2 \right] ,$$

где  $\overset{\circ}{X}$  – *центрированная случайная величина* – разность между значением случайной величины и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x .$$

Дисперсия дискретной случайной величины:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i .$$

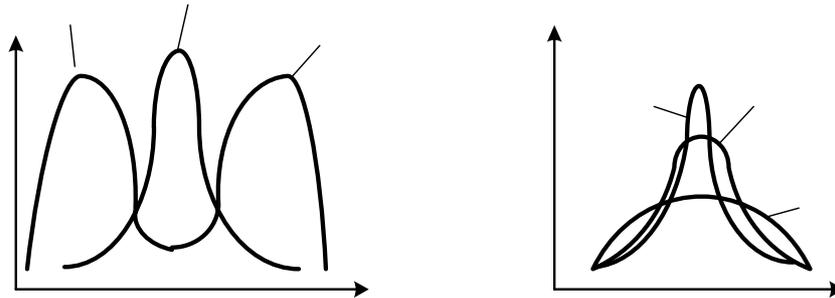
Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx .$$

Использование дисперсии на практике неудобно, так как она имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому вместо дисперсии часто применяют *среднее квадратическое отклонение (СКО)*, называемое также *стандартом*:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Для характеристики асимметрии распределения применяют *коэффициент асимметрии А* (рис. 5.5), а для характеристики острровершинности *коэффициент эксцесса Е* (рис. 5.6):



Математическое ожидание, дисперсия, стандарт, коэффициенты асимметрии, острровершинности являются общими (интегральными) характеристиками распределения. Применяются также группа параметров, характеризующая отдельные значения случайной величины. Это квантиль, мода и медиана.

$$A < 0$$

$$A = 0$$

$$A > 0$$

*Квантилем*  $x_p$  распределения случайной величины  $X$  называется значение случайной величины  $f(x)$  для которого выполняется условие

$$P(X < x_p) = p$$

*Медиана (Me)* – это значение случайной величины, для которого выполняется условие

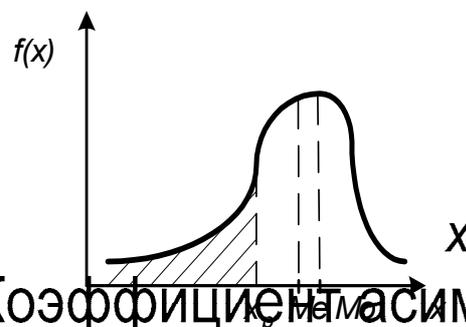
$$P(X < Me) = 0,5,$$

а следовательно и

$$P(X > Me) = 0,5$$

Медиана равна квантилю  $x_{0,5}$ .

*Мода* – это значение случайной величины, которому соответствует наибольшая ордината плотности распределения.



**Рис. 5.5. Коэффициент асимметрии**

Случайные величины могут быть

*Рис. 5.8. Случайные величины*

зависимыми и независимыми друг от друга. Эта связь может быть линейной и нелинейной.

Линейную связь обычно называют *корреляционной*. Она характеризуется *корреляционным моментом*, называемым также *ковариацией*. Его часто обозначают  $K_{xy} = K[xy]$ . Это есть математическое ожидание произведения

центрированных случайных величин  $\overset{\circ}{X}$  и  $\overset{\circ}{Y}$ , то есть  $K_{xy} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}]$ ,

где  $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ ,  $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$

В соответствии с формулами для математических ожиданий получим

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_i p_j,$$

для дискретных случайных величин и

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x) f(y) dx dy$$

для непрерывных случайных величин.

*Коэффициент корреляции* между двумя случайными величинами:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

он может принимать значения в диапазоне от  $-1$  до  $1$ , то есть  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ .

Графическая интерпретация различных значений  $r_{xy}$  представлена на *рис. 5.7*.

### Действия с числовыми характеристиками случайных величин

1. Математическое ожидание неслучайной величины  $C$  равно этой величине:

$$M[C] = C;$$

2. Дисперсия неслучайной величины  $C$  равна 0:

$$D[C] = 0;$$

3. Математическое ожидание произведения неслучайной величины на случайную:

$$M[cX] = cM[X];$$

4. Дисперсия произведения неслучайной величины на случайную:

$$D[cX] = c^2 D[X];$$

5. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y];$$

6. Дисперсия суммы двух случайных величин есть сумма дисперсий с удвоенным корреляционным моментом:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

## Л е к ц и я 6

### Уравнения погрешностей. Коэффициенты влияния.

#### Уравнения погрешностей.

Каждая система (электронное средство, технологический процесс) характеризуется своими выходными параметрами (быстродействие, мощность, скорость и т.д.), которые зависят от первичных параметров  $x$ .

То есть:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

Все первичные параметры имеют погрешности  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , которые возникают в силу различных причин. Тогда и каждый выходной параметр  $Y$  имеет погрешность  $\Delta Y$ .

Следовательно, можно записать:

$$Y + \Delta Y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_i + \Delta x_i)$$

Если функция непрерывна и дифференцируема на каком-то интервале, то она может быть разложена в ряд Тейлора. Это разложение имеет вид:

$$Y + \Delta Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 + \dots$$

Если погрешности  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) малые, то всеми слагаемыми, где  $\Delta x$  в квадрате или более высокой степени, можно пренебречь. Погрешности считаются малыми если их величина не превышает 5% от номинального значения. Тогда, учитывая (5.1) можно получить:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Или более компактно:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i, \quad (6.2)$$

где

$$A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Коэффициент влияния  $A_i$  показывает как влияет погрешность  $i$ -го параметра на погрешность выходного параметра. Уравнение (6.2) называется уравнением абсолютных погрешностей, а коэффициент

$$A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (6.3)$$

называется коэффициентом влияния.

Уравнение относительных погрешностей получим после несложных преобразований уравнения (6.2):

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right) \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Его можно записать в компактной форме:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad (6.4)$$

где коэффициенты влияния определяются по формуле:

$$B_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{Y}. \quad (6.5)$$

Расчет по формулам (6.2) и (6.4) не представляет труда, если известны погрешности первичных параметров (они известны как правило, из технической документации – чертежей, перечня элементов и т.д.) и коэффициенты влияния.

### **Методы определения коэффициентов влияния.**

Наибольшее применение нашли два метода: расчетно-аналитический и экспериментальный или метод малых приращений.

#### **Расчетно-аналитический метод.**

Расчетно-аналитический метод применяется, когда имеется аналитическое приложение связывающее выходные и первичные параметры.

Для определения используются формулы (6.3) и (6.5).

*Пример.* Найти коэффициенты влияния  $B_x$  и  $B_z$ , если имеем функцию:

$$y = x^2 z^3$$

Применяя формулу (6.5) найдем  $B_x$  и  $B_z$ :

$$B_x = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{x}{y} = 2xz^3 \frac{x}{x^2 z^3} = 2;$$

$$B_z = \frac{\partial y}{\partial z} \frac{z}{y} = x^2 3z^2 \frac{z}{x^2 z^3} = 3.$$

Аналитический метод имеет два недостатка:

1. Не всегда имеется необходимое аналитическое выражение, связывающее выходной и первичный параметры.

2. В аналитических выражениях число первичных параметров может быть большим и они могут находиться в сложной взаимосвязи. Определение частных производных в этом случае затруднительно и используется экспериментальный метод (малых приращений).

**Метод малых приращений.** Этот метод основан на линейности уравнения погрешностей:

$$\frac{\Delta y}{y} = B_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \dots + B_i \frac{\Delta x_i}{x_i} + \dots + B_n \frac{\Delta x_n}{x_n}.$$

Так как это уравнение линейно, то оно обладает свойством суперпозиции, которое заключается в независимости влияния погрешности каждого первичного параметра от погрешностей других параметров на погрешность выходного параметра.

Считая погрешности всех параметров кроме одного равным 0, можно получить уравнение:

$$\frac{\Delta y}{y} = B_i \frac{\Delta x_i}{x_i}.$$

Из него получим:

$$B_i = \frac{\Delta y / y_i}{\Delta x_i / x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

## Методы расчета точности

### Понятие о допусках

Допуски устанавливают границы, в которых должны находиться параметры. Их подразделяют на производственные, лабораторные, эксплуатационные. Производственные допуски ограничивают погрешности возникающие при производстве. Лабораторные допуски ограничивают производственные погрешности и отклонения, возникающие при исправлениях (лабораторный допуск должен быть шире производственного). Эксплуатационные допуски ограничивают погрешности возникающие при эксплуатации (испытание на повышенных температурах).

Допуски подразделяются также на механические и электрические, в зависимости от типа параметров, которые они ограничивают.

Предельные значения параметров  $Y_{\text{пр}}$ :

$$Y_{\text{пр}} = Y_{\text{н}} + E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) \pm \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right), \quad (7.1)$$

где  $Y_{\text{н}}$  – номинальное значение;  $E\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$  – отклонение середины поля допуска от номинального значения (координаты середины поля допуска);  $\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$  – половина поля допуска.

На использовании уравнений погрешностей основываются методы предельных отклонений и вероятностей.

**Метод предельных отклонений.** Если использовать уравнение погрешностей:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

то можем записать:

$$E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i E\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right) \quad (7.2)$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n |B_i| \delta\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right) \quad (7.3)$$

Эти выражения и являются основными при работе допусков методом предельных отклонений.

### Вероятностный метод расчета электрических допусков

Необходимо определить  $E\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$  и  $\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$ .

Начнем с решения первой задачи. Используя уравнения погрешностей и применяя правило сложения математических ожиданий запишем:

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i M\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right). \quad (7.4)$$

Связь между математическим ожиданием и отклонением  $E$  устанавливается известным уравнением Бородачева:

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) + a_y \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right);$$

или

$$M\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = E\left(\frac{\Delta x}{x}\right) + a_x \delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right);$$

Подставляя эти выражения в (7.4), получим:

$$E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) + a_y \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i \left[ E_i\left(\frac{\Delta x}{x}\right) + a_i \delta_i\left(\frac{\Delta x}{x}\right) \right], \quad (7.5)$$

где  $a$  - коэффициент относительной асимметрии.

Его смысл виден из рис. 7.1.

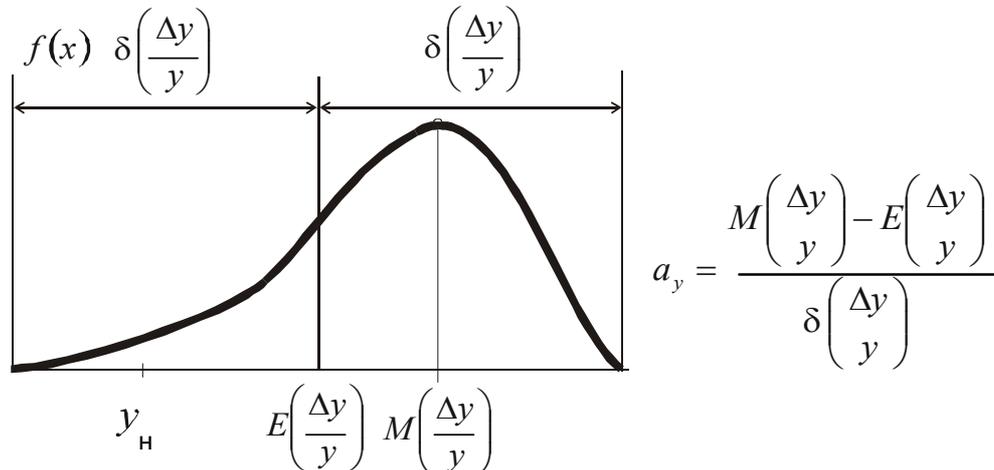


Рис. 7.1.

Так как радиоэлементы изготавливаются в крупносерийном и массовом производстве, то их погрешности подчиняются, как правило, нормальному закону распределения. В этом случае коэффициенты относительной асимметрии равны нулю. Выражение (7.5) принимает вид:

$$E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i E\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

Как видим, что это уравнение полностью совпадает с уравнением (7.2), применяемом при методе предельных отклонений.

Определим теперь выражение для половины поля допуска  $\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$

выходного параметра.

Если погрешности независимы, то используя правило использования дисперсий можно записать следующие выражение:

$$D\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i^2 D\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right);$$

или

$$\sigma^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \sum_{i=1}^n B_i^2 \sigma^2\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right) \quad (7.6)$$

Введем понятие относительного рассеивания:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\delta}, \quad (7.7)$$

где  $\sigma$  - среднеквадратичное отклонение погрешностей;  $\delta$  - половина поля допуска.

Применим также величину  $K$  - коэффициент относительного рассеивания:

$$K = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad (7.8)$$

где  $\lambda_0$  - относительное рассеивание эталонного распределения, в качестве которого обычно принимается нормальное распределение. Используя выражение (7.7) и (7.8) получаем:  $\sigma^2 = \lambda^2 \delta^2 = K^2 \lambda_0^2 \delta_y^2$ .

Подставляя это выражение в (7.6) запишем:

$$K_y^2 \lambda_0^2 \delta_y^2 = \sum_{i=1}^n B_i^2 K_i^2 \lambda_0^2 \delta_i^2,$$

где

$$\delta_y = \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right); \quad \delta_i = \delta\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right),$$

или

$$\delta_y = \frac{1}{K_y} \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 K_i^2 \delta_{\delta_i}^2}, \quad (7.9)$$

где  $B_i$  - коэффициент влияния;  $K_i$  - коэффициент относительного рассеивания  $i$ -го первичного параметра;  $K_y$  - коэффициент относительного рассеивания выходного параметра.

Если законы распределения первичных параметров нормальные, то коэффициенты относительного рассеивания  $K_i$  и  $K_y$  равны единице.

Пример. Определить предельные отклонения параметра  $y = x^2 z^3$ , если  $x = 5^{+0,1}$ ;  $z = 2 \pm 0,005$ .

**Р е ш е н и е .** Применяя метод предельных отклонений.

$$E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = B_x E\left(\frac{\Delta x}{x}\right) + B_z E\left(\frac{\Delta z}{z}\right).$$

$$B_x = 2;$$

$$B_z = 3;$$

$$E\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = +0,05;$$

$$E\left(\frac{\Delta z}{z}\right) = 0;$$

$$E\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0 = 0,1;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = B_x \delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right) + B_z \delta\left(\frac{\Delta z}{z}\right);$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,05 \pm 0,1 + 0,15 = 0,25;$$

$$Y_{\text{пред.}} = 200 + 0,1 \pm 0,25.$$

## Л е к ц и я 8

### Расчёт размерных цепей

#### Понятие о размерных цепях.

Под *размерной цепью* понимается совокупность расположенных по замкнутому контуру размеров, определяющих расположение поверхностей в детали или деталей в узле.

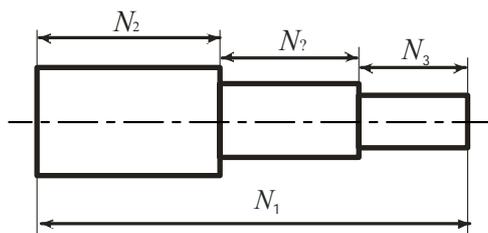


Рис. 8.1

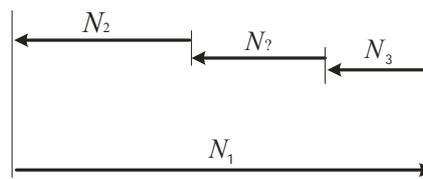


Рис.8.2

Размер детали, который получается последним в процессе изготовления, называется *замыкающим*.

Размеры в размерной цепи называются *звеньями*.

Все звенья, входящие в размерную цепь, кроме замыкающего, называются *составляющими звеньями*. Составляющие звенья могут быть *увеличивающими* и *уменьшающими*.

Уменьшающее звено – это звено, с увеличением которого уменьшается замыкающее звено.

Увеличивающее звено – это звено, с увеличением которого увеличивается замыкающее звено.

Размерные цепи могут быть *линейными* и *угловыми*. Если есть хотя бы одно звено под углом, то это угловая размерная цепь.

Размерные цепи могут быть *независимыми* и *взаимосвязанными*. Если все звенья цепи не зависят от звеньев других размерных цепей, то такая размерная цепь называется *независимой*.

#### Метод предельных отклонений (максимума – минимума)

При этом методе расчёта используется уравнение погрешностей:

$$\Delta N_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N A_k \Delta N_k ,$$

где  $N = n + m$ ,  
 $N$  – количество составляющих звеньев,  
 $n$  - количество увеличивающих звеньев  
 $m$  - количество уменьшающих звеньев.

При расчёте линейных размерных цепей коэффициенты влияния  $A_k = \pm 1$ : "+" для увеличивающий звеньев, "-" для уменьшающих звеньев.

$$\Delta N_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \Delta N_i - \sum_{j=1}^m \Delta N_j. \quad (8.1)$$

С учётом этого:

$$E(\Delta N_{\Sigma}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}(\Delta N_i) - \sum_{j=1}^m \overleftarrow{E}(\Delta N_j). \quad (8.2)$$

Стрелка "→" означает, что звено увеличивающее, а стрелка "←" означает, что звено уменьшающее.

$$\delta(\Delta N_{\Sigma}) = \sum_{k=1}^{n+m} \delta(\Delta N_k)$$

### Вероятностный метод

Используя формулу Бородачёва, можем записать:

$$M(\Delta N) = E(\Delta N) + a\delta(\Delta N). \quad (8.3)$$

Применяя правило сложения математических ожиданий и (8.1):

$$M(\Delta N_{\Sigma}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\Delta N_i) + \sum_{j=1}^m \overleftarrow{M}(\Delta N_j)$$

Используя (8.3) можем получить:

$$E(\Delta N_{\Sigma}) = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{E}(\Delta N_i) + a_i \vec{\delta}(\Delta N_i) \right] - \sum_{j=1}^m \left[ \overleftarrow{E}(\Delta N_j) + a_j \overleftarrow{\delta}(\Delta N_j) \right] - a_{\Sigma} \delta_{\Sigma}(\Delta N),$$

где  $a_i$  и  $a_j$  – коэффициенты относительной асимметрии.

Половина поля допуска:

$$\delta(N_{\Sigma}) = \frac{1}{K_{\Sigma}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+m} K_k^2 \delta_k^2(\Delta N)},$$

где  $K$  – коэффициент относительного рассеивания.

При расчётах коэффициенты асимметрии  $a_k$  и относительного рассеивания  $k_k$  берутся из справочной литературы.

Если  $a_k$  и  $k_k$  неизвестны, то рекомендуется брать  $k_k = 1,2—1,3$  и  $a_k = 0,1—0,2$ .

Кроме того,  $K_\Sigma = 1, a_\Sigma = 0$  в следующих случаях:

1. законы распределения погрешностей составляющих звеньев нормальные (Гауссовские);
2. законы распределения одновершинные и число составляющих звеньев не менее 5;
3. законы распределения имеют несколько вершин, но не резко различаются друг от друга и число составляющих звеньев не менее 8.

Если эти условия не выполняются, то расчёты  $K_\Sigma$  и  $a_\Sigma$  проводятся по эмпирическим формулам.

$$a_\Sigma = 0,59 \left[ \sum_{i=1}^n a_i \overset{\rightarrow}{\delta}_i - \sum_{j=1}^m a_j \overset{\leftarrow}{\delta}_j \right] / \sum_{k=1}^{n+m} \delta_k$$

$$K_\Sigma = 1 + \frac{0,55}{\sum_{k=1}^{n+m} \delta_k} \left[ \sqrt{\sum_{k=1}^{n+m} K_k^2 \delta_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n+m} \delta_k^2} \right]$$

*Пример.* Определить предельные отклонения замыкающего звена детали, показанной на рис. 8.3, методами предельных отклонений и вероятностным ( $a_i = 0; K_i = 1$ ).

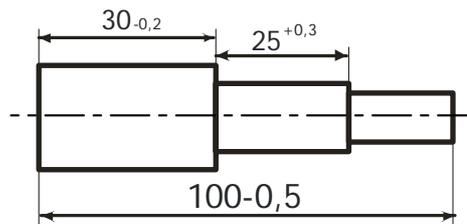


Рис.8.3

Составим размерную цепь (рис. 8.4)

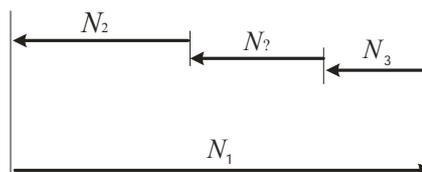


Рис.8.4

$$N_{\Sigma\text{пред}} = N_n + E_{\Sigma}(\Delta N) = \delta_{\Sigma}(\Delta N)$$

Определяем

$$N_n = 100 - 30 - 25 = 45$$

### Метод предельных отклонений.

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{E}_i - \sum_{j=1}^m \overset{\leftarrow}{E}_j = E_1 - (E_2 + E_3) = -0,25 - (0,15 - 0,1) = -0,3$$

$$\delta_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{n+m} \delta_k = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0,25 + 0,15 + 0,1 = 0,5$$

$$N_{\Sigma\text{пред}} = 45 - 0,3 \pm 0,5 = 45_{-0,8}^{+0,2}$$

### Вероятностный метод.

Примем

$$a_i = a_j = 0 \qquad K_i = K_j = 1$$

$E_{\Sigma}$  определяется как и в методе предельных отклонений, поэтому  $E_{\Sigma} = -0,3$ .

$$\delta_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+m} \delta_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \delta_k^2} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} = 0,3$$

Различия полученных результатов объясняются следующим: при методе предельных отклонений мы считаем, что размеры деталей имеют предельные отклонения, что не соответствует действительности.

Метод предельных отклонений применяется при расчёте точности единичных изделий или особо важных (взрывоопасных) изделий. Этот метод гарантирует 100% - ное нахождение допуска замыкающего звена в рассчитанных пределах. При массовом производстве целесообразно применять вероятностный метод расчёта. Необходимо учитывать, что он гарантирует нахождение погрешности выходного звена в пределах расчётного допуска с вероятностью, равной 0,9973.

## Л е к ц и я 9

### Метод матричных испытаний

Метод матричных испытаний – метод физического моделирования. Он позволяет определить рабочую область радиоустройства при всех возможных значениях *первичных параметров*, находящихся в пределах допусков, оптимизировать его работоспособность.

Первичные параметры можно разбить на следующие группы:

- параметры деталей, из которых состоит устройство;
- параметры источников питания;
- параметры входных сигналов;
- параметры нагрузки;
- параметры, характеризующие условия окружающей среды.

Суть метода матричных испытаний и задачи оценки и оптимизации работоспособности по результатам этих испытаний поясним на примере устройства, работоспособность которого существенным образом зависит только от двух первичных параметров  $X_1$  и  $X_2$ . Такие параметры будем называть *определяющими первичными параметрами*.

Пусть диапазон возможного изменения этих параметров задан интервалами  $[x_{1 \min}, x_{1 \max}]$  и  $[x_{2 \min}, x_{2 \max}]$ . Разобьем интервалы на  $l^{(1)}$  и  $l^{(2)}$  равных квантов соответственно (рис. 9.1).

В качестве *представителей квантов* выберем значения параметров, соответствующие серединам квантов. Если устройство оказывается неработоспособным (работоспособным) при значении параметров, соответствующем представителю кванта, то будем считать, что оно не работает (работает) при всех значениях параметров, лежащих в этом кванте.

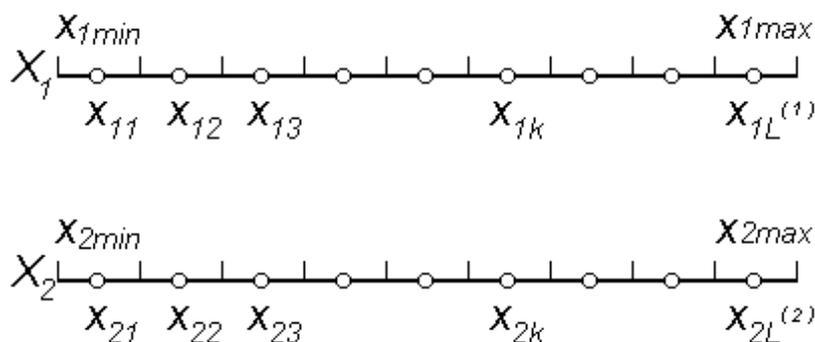


Рис. 9.1. Пример разбиения параметров  $X_1$  и  $X_2$  на кванты

Введем *понятие ситуации*, под которым будем понимать такое состояние устройства, когда каждый из его двух определяющих параметров

(двумерный случай) принимает значение, соответствующее представителю определенного кванта. Определение легко распространить на  $n$ -мерный случай. Число всех возможных ситуаций устройства в двумерном случае, очевидно, равно

$$N_2 = I^{(1)} \cdot I^{(2)}.$$

Индекс 2 при  $N$  означает, что рассматривается двумерный случай, т.е. имеются два определяющих параметра. В общем случае при  $n$  определяющих параметрах число возможных ситуаций равно

$$N = \prod_{i=1}^n I^{(i)}.$$

Перебрав в какой либо последовательности все несовместные ситуации устройства, составим матрицу ситуаций. Для двумерного случая она будет иметь вид

$$\|\alpha_{n_2}\| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{11} & x_{22} \\ \dots & \dots \\ x_{11} & x_{2I^{(2)}} \\ \dots & \dots \\ x_{12} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \dots & \dots \\ x_{1I^{(1)}} & x_{2I^{(2)}} \end{vmatrix}$$

В матрице вторая строка  $x_{11} x_{22}$ , например, означает, что параметр  $X_1$  принял значение в первом, а параметр  $X_2$  – во втором кванте.

Упорядоченную таким образом последовательность всех возможных ситуаций устройства обозначим

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{N_2}.$$

Среди  $N_2$  возможных ситуаций устройства при матричных испытаниях будет обнаружено некоторое количество  $Q$  отказных ситуаций с точки зрения заданного *критерия отказа* рассматриваемого устройства. Отказные ситуации будем отмечать чертой сверху. Они могут быть определены натурным физическим моделированием, поскольку такое моделирование позволяет довольно точно воспроизвести работу устройства и автоматически учесть все факторы, влияющие на его работоспособность, в том числе и второстепенные, которые при всех других видах моделирования, как правило, не учитываются.

Результаты матричных испытаний позволяют найти область работоспособности устройства (рис. 9.2), вероятность нахождения выходного параметра в пределах поля допуска и оптимизировать работоспособность.

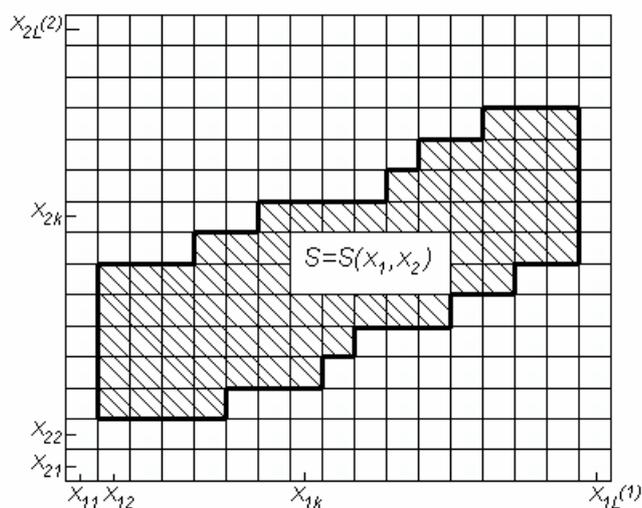


Рис. 9.2. Область работоспособности

Вероятность того, что схема окажется неработоспособной выразится так:

$$P = \sum_{i=1}^Q P(\bar{\alpha}_i),$$

где  $Q$  – число отказных ситуаций.

Вероятность отказных ситуаций, если определяющие первичные параметры независимы, находят как произведение вероятностей нахождения параметров в соответствующих квантах. Например, для ситуации  $\alpha_1$

$$P(\alpha_1) = P(x_{11}) \cdot P(x_{21}).$$

Вероятность нахождения параметров  $X_1$  и  $X_2$  в квантах  $x_{11}$  и  $x_{21}$  можно вычислить, если известны законы распределения  $f(x)$  этих параметров, по выражению

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Вероятность будет численно равна площади фигуры под кривой распределения, построенной на основании, равном длине кванта (рис. 9.3). При нормальном законе распределения эти вероятности могут быть найдены по формуле

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sqrt{D}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sqrt{D}}\right),$$

где  $\Phi(z)$  – функция Лапласа (из таблицы П1);  $\alpha, \beta$  – границы кванта;  $m, D$  – математическое ожидание и дисперсия соответственно.

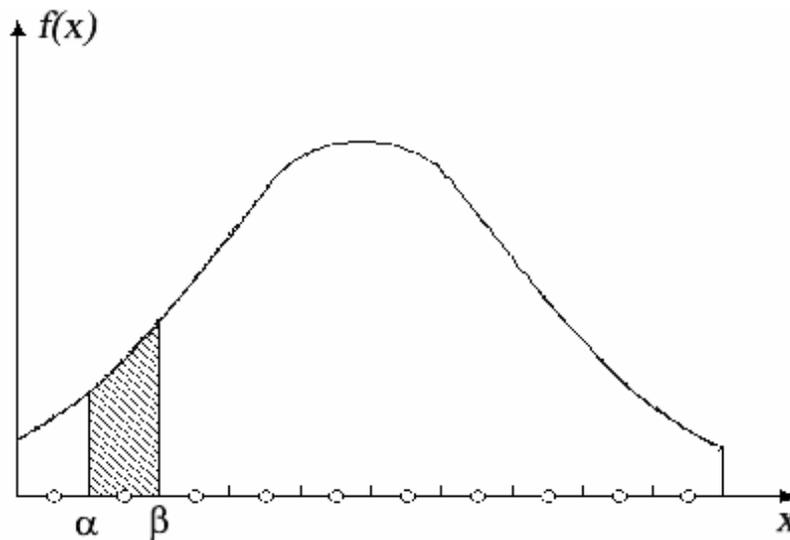


Рис. 9.3. Плотность распределения параметра  $X$

Для сравнительной оценки вероятность работоспособности исследуемого устройства может быть найдена по формуле

$$P = 1 - \frac{Q}{N}.$$

Вероятность здесь будет несколько заниженной из-за принятия веса каждой отказной ситуации равной единице. Если в некоторый фиксированный момент времени  $t$  известна плотность распределения параметров  $X_1$  и  $X_2$ , то задача оптимизации работоспособности исследуемого устройства для этого момента времени геометрически может рассматриваться как задача отыскания такого положения функции  $f(x_1, x_2)$ , чтобы объем, вырезаемый из  $f(x_1, x_2)$ , восстановленный цилиндром с основанием  $S(x_1, x_2)$ , был бы максимальным. Аналитически это записывается в виде

$$P_{\max} = \max \iint_{S(x_1; x_2)} f(x_1 - m_{x_1}; x_2 - m_{x_2}) dx_1 dx_2,$$

где  $m_{x_1}, m_{x_2}$  – математическое ожидание функции  $f(x_1, x_2)$ ;

$P_{\max}$  – максимальная вероятность нахождения выходного параметра в пределах поля допуска.

Практически задача оптимизации может быть сведена к расчету новых номинальных значений определяющих первичных параметров [1].

Эти значения могут быть установлены простой процедурой нахождения координат центра тяжести  $n$ -мерной области работоспособности

(в рассматриваемом случае – двумерной области) исследуемого устройства. Координата центра тяжести по  $j$ -тому параметру  $x_{jl}$ :

$$x_{jl} = x_{j1} + \frac{N(l^{(j)} - 1) \cdot \Delta x_j}{2 \cdot (N - Q)} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{N \cdot (l^{(j)} - 1)} \cdot \sum_{\chi=1}^{l^{(j)}-1} \chi \cdot Q_{j,\chi+1} \right],$$

где  $N$  – общее количество ситуаций;  $Q$  – количество отказных ситуаций;  $Q_{j,\chi+1}$  – количество отказных ситуаций, соответствующих  $\chi+1$  кванту.

Достоинства метода матричных испытаний – возможность количественной оценки работоспособности. Недостатки – значительная трудоемкость и сложность использования для устройств, в которых моделирование первичных параметров затруднено.

## Метод статистического моделирования

Будем считать, что известна функциональная зависимость

$$N = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (9.1)$$

где  $N$  – выходной параметр изделия,

$X_1, X_2, \dots, X_n$  – начальные параметры, влияющие на  $N$ .

Под начальными параметрами понимаются параметры элементов изделия, внешние воздействия, паразитные связи и т. п. Зависимость (9.1) может быть задана аналитически или графически. Подставляя в эту зависимость по одному случайному значению  $x_i$ , получим одно значение  $N_i$ . Если многократно повторять расчёт, пользуясь случайными значениями  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , то получим множество значений  $N$ . Очевидно, если начальные параметры выбираются в соответствии с теми законами распределения, которые их характеризуют, то распределение параметра  $N$  соответствует искомой плотности распределения.

Согласно теореме Бернулли, частота попадания параметра  $N$  в пределы поля допуска  $\alpha, \beta$  при неограниченном увеличении числа опытов (расчётов) приблизится к вероятности  $P(\alpha \leq N < \beta)$ . Поэтому при достаточно

большом количестве расчётов можно считать, что  $\frac{m}{n} \approx P(\alpha \leq N < \beta)$ , где  $m$  – количество попаданий параметра  $N$  в пределы от  $\alpha$  до  $\beta$ , а  $n$  – общее количество испытаний.

Алгоритм вычисления вероятности на ЭВМ следующий:

1. Параметрам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  задаются случайные значения согласно их законам распределения  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ .
2. В соответствии с функциональной зависимостью (9.1) определяется значение  $N_i$ .

3. Найденное значение  $N_i$  сравнивается с граничными значениями интервала  $(\alpha, \beta)$ ; выполнение неравенства  $\alpha \leq N_i < \beta$  отмечается признаком  $\omega = 1$ , невыполнение – признаком  $\omega = 0$ .

4. Полученное значение признака  $\omega$  прибавляется к количеству случайных чисел, попавших внутрь интервала  $(\alpha, \beta)$ .

5. К содержанию счётчика количества испытаний прибавляется единица.

6. Управление передаётся снова первой операции.

7. После проведения  $n$  таких испытаний вычисляется значение частоты  $\frac{m}{n}$ .

При решении задачи методом статистических испытаний большое значение имеет оценка необходимого объёма испытаний для заданной точности  $\varepsilon$  или же оценка точности вычислений  $\varepsilon$  по известному числу испытаний  $n$ . В тех случаях, когда мы имеем дело с обработкой статистического материала, нельзя ограничиваться лишь только заданной точностью решения, необходимо ещё задавать так называемую степень надёжности (достоверности).

Моделирование непрерывных случайных величин. Решить эту задачу можно различными способами. Один из них основан на известной теореме: если случайная величина имеет плотность распределения  $f(x)$ , то распределение случайной величины  $Y = F(x_i)$  (рис. 9.4)

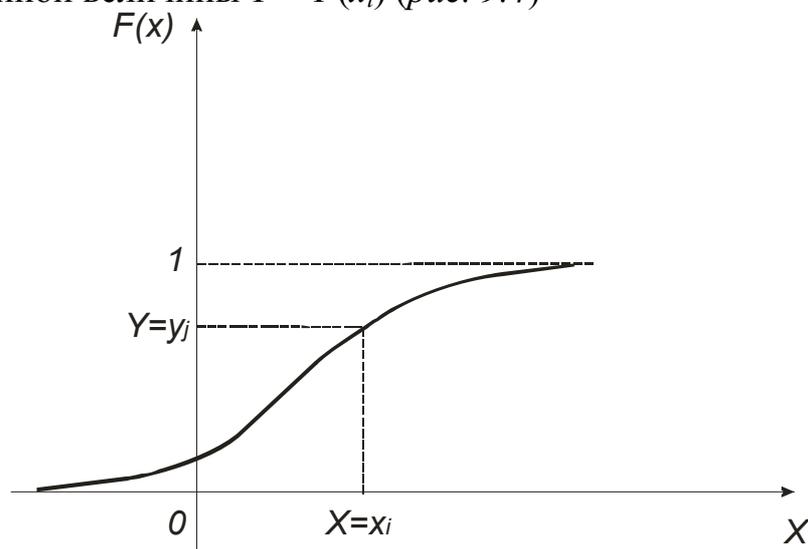


Рис. 9.4.

может интерпретироваться как последовательность случайных чисел, равномерно распределённых в интервале  $[0, 1]$ . Следовательно, справедлив и обратный переход: если мы располагаем совокупностью равномерно распределённых в интервале  $[0, 1]$  случайных чисел  $y_i$ ; то каждому из них со-

ответствует определённое для данного вида функции  $F(x)$  число  $x_i$ , значение которого находится обратным преобразованием  $x_i = F^{-1}(y_i)$ . Случайная величина  $X$ , полученная таким способом, имеет функцию распределения  $F(x)$ .

Отсюда следует, что процесс получения последовательности случайных чисел  $x_i$  с заданным законом распределения сводится к решению относительно  $x_i$  уравнения

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx. \quad (9.2)$$

Посмотрим как делается такое преобразование для нескольких законов распределения, широко применяемых на практике.

**Экспоненциальный закон.** функция распределения при экспоненциальном законе определяется выражением

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Учитывая (9.2), можно записать

$$y_i = F(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}.$$

Решив это уравнение относительно  $x_i$ , получим

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y_i). \quad (9.3)$$

**Равномерный закон.** Функция распределения случайной величины  $X$ , равномерно распределённой в интервале  $[a, b]$ , определяется выражением

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Учитывая, что  $y_i = F(x_i)$ , из последнего выражения получим

$$x_i = a + y_i(b - a). \quad (9.4)$$

**Закон Релея.** Для закона Релея функция распределения может быть записана в виде

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Приравнявая  $y_i = F(x_i)$ , из последнего выражения найдём

$$x_i = \sqrt{-2\sigma^2 \ln y_i}. \quad (9.5)$$

**Закон Вейбулла.** Функцию распределения случайной величины, имеющей распределение Вейбулла, можно записать в виде

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^b}{a}}.$$

Как и в предыдущих случаях, учитывая (9.2), из последнего выражения получим

$$x_i = [-a \ln(1 - y_i)]^{\frac{1}{b}}.$$

К сожалению, не всегда существуют элементарные преобразования для получения случайных чисел с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел. В частности, у случайных величин с нормальным распределением функции обратной функции распределения не выражается в замкнутом виде через элементарные функции. В этих случаях для формирования случайных величин с заданным законом распределения применяются приближённые методы.

Рассмотрим один из таких методов, который применяется для моделирования случайной величины  $X$ , распределённой по нормальному закону с параметрами  $M[x]$  и  $\sigma[x]$ . Известно [ ], что такую величину можно представить в виде

$$X = M[x] + \sigma[x] \cdot Z, \quad (9.6)$$

где  $Z$  – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с параметрами  $m = 0$  и  $\sigma = 1$ .

Воспользуемся центральной предельной теоремой теории вероятностей: если  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ , то при неограниченном увеличении  $n$  закон распределения суммы

$$Z_\Sigma = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (9.7)$$

неограниченно приближается к нормальному. Математическое ожидание  $m_\Sigma$  и дисперсия  $\sigma_\Sigma^2$  суммарной величины будут равны:

$$m_\Sigma = n \cdot m, \quad \sigma_\Sigma^2 = n \cdot \sigma^2.$$

Если суммируемые величины распределены равномерно на интервале  $[0, 1]$ , то есть имеют  $m = 0,5$  и  $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , то соответствующие параметры для суммарной величины можно найти по формулам

$$m_\Sigma = \frac{n}{2}, \quad \sigma_\Sigma = \sqrt{\frac{n}{12}}. \quad (9.8)$$

Согласно выражениям (9.6) и (9.7) можно получить

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - m_\Sigma}{\sigma_\Sigma}.$$

С учётом (9.8) последнее выражение представим в виде

$$Z = \sqrt{\frac{12}{n}} \left( \sum_{i=1}^n Z_i - \frac{n}{2} \right)$$

и, подставим его в (9.6), получим

$$X = M[x] + \sigma[x] \sqrt{\frac{12}{n}} \left( \sum_{i=1}^n Z_i - \frac{n}{2} \right). \quad (9.9)$$

Формула (9.8) связывает последовательность случайных чисел  $X$ , распределённых по нормальному закону с параметрами  $M[x]$  и  $\sigma[x]$ , с последовательностью случайных чисел  $Z_i$ , распределённых по равномерному закону в интервале  $[0, 1]$ .

Точность моделирования  $X$  возрастает с увеличением  $n$ . На практике обычно бывает достаточно  $n = 4 - 12$ . Если  $n = 12$ , то формула (9.8) принимает более простой вид

$$X = M[x] + \sigma[x] \left( \sum_{i=1}^{12} Z_i - 6 \right). \quad (9.10)$$

В некоторых случаях необходимо иметь случайные числа  $X_i$ , распределённые по нормальному закону с параметрами  $m = 0$  и  $\sigma = 1$ . Их можно получить, используя выражение

$$X_i = \sum_{i=1}^{12} Z_i - 6, \quad (9.11)$$

полученное из формулы (9.9).

## Основы теории надежности электронных средств

### Введение

#### Причины возникновения проблемы надежности:

1. Усложнение ЭС и систем автоматического управления;
2. Отставание качества и надежности ЭС от их количественного применения;
3. Усложнение условий эксплуатации ЭС;
4. Возрастание цены отказа ЭС;
5. Невозможность восстановления во время работы в ряде случаев (атомные реакторы, агрессивные среды и тд.).

#### Методы повышения, обеспечения и сохранения надежности:

1. При проектировании (выбор надежных элементов, облегчение режимов работы элементов, резервирование, современные методы проектирования изделий).
2. При производстве (применение современных технологий, применение более качественных материалов, современных методов контроля и испытаний).
3. При эксплуатации (повышение квалификации персонала и своевременное проведение профилактических работ, обеспечение запасными частями).

#### Основные понятия и определения в теории надежности

В соответствии с ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Термины и определения:

*Надежность* – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.

Надежность определяется безотказностью, долговечностью, ремонтпригодностью, сохраняемостью.

*Безотказность* – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течении некоторого времени или некоторой наработки.

*Долговечность* – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

*Ремонтопригодность* – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений и поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонтов.

*Сохраняемость* – свойство объекта сохранять значения показателей безотказности, долговечности и ремонтпригодности в течении и после хранения и (или) транспортирования.

*Исправное состояние* – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

*Работоспособное состояние* – состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

*Отказ* – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

*Восстанавливаемый объект* – объект, для которого в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

*Ремонтируемый объект* – объект, для которого проведение ремонтов предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

*Единицы показателей надежности* – показатель надежности, характеризующий одно из свойств, составляющих надежность объекта.

*Комплексный показатель надежности* – показатель надежности, характеризующий несколько свойств, составляющих надежность объекта.

*Независимый отказ* – отказ объекта, не обусловленный отказом другого объекта.

*Зависимый отказ* – отказ объекта, обусловленный отказом другого объекта.

*Внезапный отказ* – отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких заданных параметров объекта.

*Постепенный отказ* – отказ, характеризующийся постепенным изменением значений одного или нескольких заданных параметров объекта.

*Перебегающий отказ* – многократно возникающий самоустраивающийся отказ объекта одного и того же характера.

*Конструкционный отказ* – отказ, возникающий в результате несовершенства или нарушения установленных правил и (или) норм конструирования объекта.

*Производственный отказ* – отказ, возникающий в результате несовершенства или нарушения установленного процесса изготовления или ремонта объекта, выполнявшегося на ремонтном предприятии.

*Эксплуатационный отказ* – отказ, возникший в результате нарушения установленных правил и (или) условий эксплуатации объекта.

## Л е к ц и я 11

### Показатели надежности

Показатели, характеризующие одну из сторон надежности, называются единичными, две или более – комплексными.

Показатели надежности должны учитывать максимальное число факторов влияющих на надежность, должны быть удобными для записи и должны предусматривать возможность экспериментального определения.

#### Показатели надежности не ремонтируемых изделий

К ним относятся вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа, интенсивность отказов и другие.

**Вероятность безотказной работы  $P(t)$ .** Это есть вероятность того, что в пределах заданного времени или заданной наработки не произойдет отказа изделия.

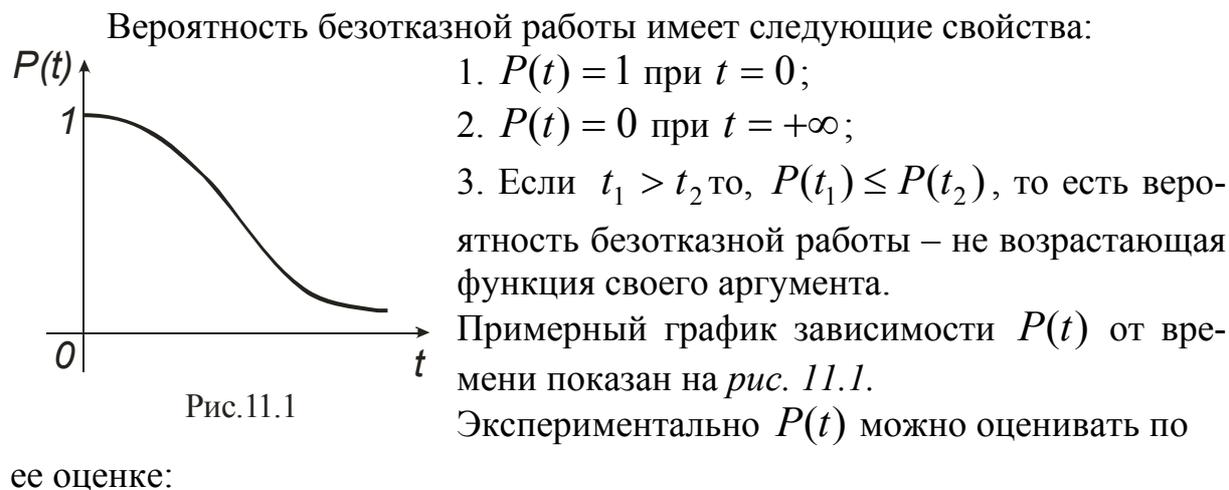
В соответствии с определением

$$P(t) = P(T \geq t), \quad (11.1)$$

где  $T$  – время безотказной работы, являющееся случайной величиной,  $t$  – заданное время

Если записать  $P(t) = P(t \leq T < \infty)$  и вспомнить из теории вероятностей, что  $P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ , то можем записать

$$P(t) = \int_t^{\infty} f(\tau)d\tau, \quad (11.2)$$



$$P^*(t) = \frac{N(t)}{N}, \quad (11.3)$$

где  $N$  – число испытываемых изделий;

$N(t)$  – число работоспособных изделий к моменту времени  $t$ .

Вместо  $P(t)$  часто используется вероятность отказа  $Q(t)$ .

*Вероятность отказа* – вероятность того, что в пределах заданного времени (наработки) произойдет отказ изделия.

Можно записать

$$Q(t) = P(T < t) = P(0 < T < t), \quad (11.4)$$

а, следовательно,

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt \quad (11.5)$$

Складывая  $P(t)$  и  $Q(t)$  получим:

$$P(t) + Q(t) = \int_0^t f(t)dt + \int_t^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$$

или

$$P(t) + Q(t) = 1 \quad (11.6)$$

Экспериментально  $Q(t)$  оценивается по оценке  $Q^*(t)$ ;

$$Q^*(t) = \frac{n(t)}{N}, \text{ где } n(t) \text{ – число отказавших изделий за время } t$$

Из выражения (11.4) следует, что вероятность отказа, равна функции распределения времени безотказной работы изделия, то есть  $Q(t) = F(t)$

**Средняя наработка до отказа**  $t_{cp}$  - математическое ожидание наработки изделия до первого отказа, то есть

$$t_{cp} = \int_0^{\infty} tf(t)dt \quad (11.7)$$

Учитывая, что

$$f(t) = F'(t) = Q'(t) = [1 - P(t)]' = -P'(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \quad (11.8)$$

и подставляя в (11.7), получим

$$t_{cp} = -\int_0^{\infty} t dP(t).$$

Используя правило интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

получим

$$t_{cp} = -tP(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t)dt$$

При увеличении  $t$  вероятность  $P(t)$  значительно быстрее стремится к нулю, чем  $t$  к бесконечности. Поэтому можно считать, что

$$t_{cp} = \int_0^{\infty} P(t)dt . \quad (11.9)$$

Очевидно, что численно  $P(t)$  равняется площади под кривой  $P(t) = \varphi(t)$ , показанной на *рис. 11.1*.

Статистически,  $t_{cp}^* = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$ , где  $t_i$  – время безотказной работы  $i$  – го изделия,  $N$  – число изделий поставленных на испытания.

**Интенсивность отказов  $\lambda(t)$ .** Статистически определяется по формуле:

$$\lambda^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t} , \quad (11.10)$$

где  $n(\Delta t)$  – число изделий отказавших на интервале времени  $\Delta t$ ,  $N(t)$  – число изделий, не отказывавших к моменту  $t$ .

Вероятность отказа изделий за время  $\Delta t$  :

$$Q^*(\Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N(t)}$$

Поэтому интенсивность можно трактовать как плотность вероятности отказов в интервале времени  $\Delta t$  .

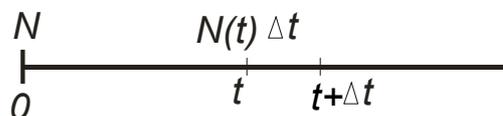


Рис.11.2

Учитывая, что  $n(\Delta t) = N(t) - N(t + \Delta t)$

и

$$P^*(t) = \frac{N(t)}{N} ;$$

$$P^*(t + \Delta t) = \frac{N(t + \Delta t)}{N},$$

получим

$$n(\Delta t) = N[P^*(t) - P^*(t + \Delta t)].$$

Подставляя в (11.10), найдем

$$\lambda^*(t) = \frac{P^*(t) - P^*(t + \Delta t)}{P^*(t)\Delta t}$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \lambda^*(t) = -\frac{1}{P(t)} \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{P^*(t + \Delta t) - P^*(t)}{\Delta t}.$$

Следовательно

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (11.11)$$

Учитывая (11.8), получим

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} \quad (11.12)$$

Логарифмируя и затем интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до  $t$ , найдем

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} \quad (11.13)$$

Это одна из основных формул теории надежности.

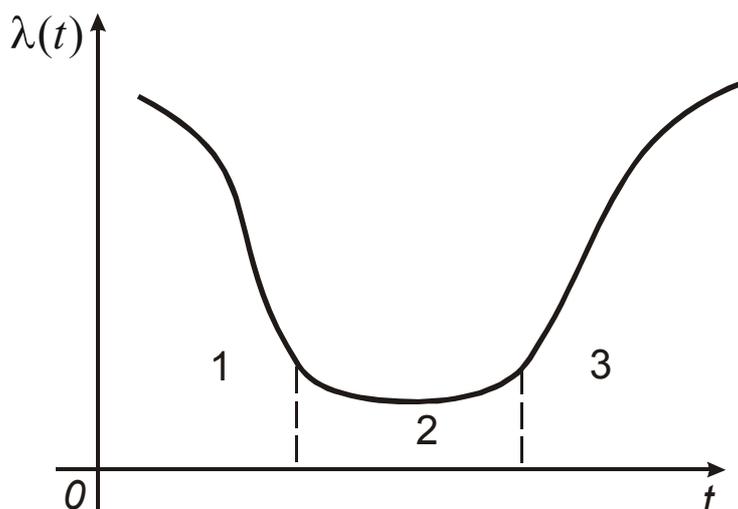


Рис.11.3

На *рис. 11.3* показана типичная зависимость  $\lambda(t)$ . Видно, что можно выделить три периода:

1 – период приработки изделия, характеризующий высоким значением  $\lambda(t)$ , уменьшающимся к концу изгиба. Такой характер зависимости объясняется наличием скрытых дефектов, невыявленных при контроле. Поэтому период приработки стремятся проводить на предприятии, «выжигая» элементы со скрытыми дефектами (электротренировка и т.д.)

2 – период нормальной эксплуатации изделия, характеризующийся наиболее низкой интенсивностью отказов,  $\lambda \approx const$ ;

3 – период старения и износа идет снижение надежности, увеличение интенсивности отказов.

Интенсивность отказов основная характеристика надежности ЭС.

## Л е к ц и я 12

### Показатели надежности ремонтируемых изделий.

К ним относятся: вероятность безотказной работы, средняя наработка на отказ (СНО), параметр потока отказа (ППО), вероятность восстановления и другие.

**Средняя наработка на отказ.** Статистически определяется по формуле:

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n},$$

где  $t_i$  – время безотказной работы,  $n$  – число циклов безотказной работы (рис.12.1)

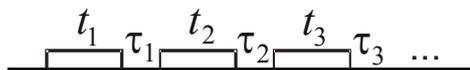


Рис.12.1

**Параметр потока отказов.** Статистически определяется по формуле

$$\omega^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t},$$

где  $N$  – число изделий, поставленных на испытания.

При определении параметра потока отказов отказавшие изделия заменяются новыми.

**Вероятность восстановления**  $P_B(t) = P(t_B < t)$ -, то есть функция распределения случайной величины  $t_B$  – времени восстановления изделия.

**Среднее время восстановления.** Статистически определяется по формуле

$$\bar{t}_B^* = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n},$$

где  $\tau_i$  – время восстановления изделия после  $i$ -го отказа (рис.12.1),  $n$  – общее число отказов.

## Комплексные показатели надежности.

Коэффициент готовности  $K_{\Gamma}$  экспериментально определяется по формуле

$$K_{\Gamma}^* = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n \tau_i}$$

где  $t_i$  – время безотказной работы,  $\tau_i$  – время восстановления после  $i$  – го отказа

Если поделить числитель и знаменатель на  $n$  – число отказов, то получим

$$K_{\Gamma}^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n}}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{n}}$$

или

$$K_{\Gamma}^* = \frac{T^*}{T^* + t_{\beta}^*}$$

При  $n$  больше 50 – 100  $K_{\Gamma}^*$  приближается к

$$K_{\Gamma} = \frac{T}{T + T_{\beta}}$$

Видно, что  $K_{\Gamma}$  – вероятность работоспособного состояния изделия в любой момент времени.

Часто применяется коэффициент оперативной готовности.

$$K_{OG} = K_{\Gamma} \cdot P(t)$$

Коэффициент технического использования

$$K_{m.u}^* = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n \tau_i + \sum_{i=1}^m t_{toj}}$$

где  $t_{toj}$  – время технического обслуживания,  $m$  – количество технических обслуживаний изделий.

## Надежность типовых элементов.

Характеризуется интенсивностью отказов. Например, интенсивность отказов  $\lambda_{io} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{час}}$ . Эта интенсивность относится к нормальным условиям эксплуатации. Усложнение условий эксплуатации приводит к снижению надежности радиоаппаратуры. Для учета дестабилизирующих факторов (повышенная температура, вибрации и т.д.) вводятся поправочные коэффициенты, учитывающие эти факторы.

Электрическая нагрузка характеризуется коэффициентом нагрузки  $K_H$  – отношением значения некоторого параметра, характеризующего работу элемента в реальном режиме, к номинальному значению этого параметра, установленному ТУ

Интенсивность отказов ЭРЭ при отклонении режимов их работы от нормальных можно представить в виде

$$\lambda(v) = \lambda_{io} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  коэффициенты, учитывающие эти отклонения, а  $\lambda_{io}$  – интенсивность отказов при нормальных условиях ( $K_H = 1$ ,  $t = +25^\circ \text{C}$ , механические нагрузки отсутствуют, относительная влажность 65%).

Значение  $\lambda_{io}$  берется из таблиц, а коэффициенты  $a_i$  из таблиц или графиков.

## Л е к ц и я 13

### Законы распределения времени безотказной работы РЭС

Знание этих законов распределения  $f(t)$  необходимо, так как все основные показатели безотказности являются функцией этих законов, например  $P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt$ ,  $t_{\gamma} = \int_0^{\infty} tf(t)dt$ . Они необходимы также для создания экономичных методов испытаний на надежность.

#### Потоки отказов

Под потоком отказов – понимают такую последовательность отказов, которые происходят один за другим в случайные моменты времени.

Наибольшее изменение находит простейший поток отказов.

*Простейший поток отказов* – это поток, который обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия.

*Поток стационарный*, если вероятность некоторого количества отказов в интервале времени  $\Delta t$  зависит от длины этого интервала и не зависит от положения на оси времени.

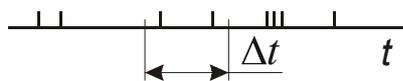


Рис.12.1

У потока *отсутствует последствие*, если вероятность появления некоторого количества отказов в интервале времени  $\Delta t$  не зависит от того, сколько отказов произошло до начала этого интервала времени.

*Поток ординарный*, если вероятность появления одного отказа в малом интервале времени  $\Delta t$  значительно превышает вероятность появления двух или большего количества отказов.

Поток отказов сложных электронных схем в период их нормальной эксплуатации соответствует простейшему потоку. Простой поток отказов хорошо изучен в теории вероятностей и для него получена формула, называемая законом Пуассона

$$P_m(t) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где  $m$  – количество отказов,  $t$  – время,  $a$  – среднее количество отказов за время  $t$ , равное  $a = \lambda \cdot t$ ,  $\lambda$  – интенсивность отказов (среднее количество отказов в единицу времени). Простейший поток часто называют Пуассоновским потоком.

Можем записать

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Если, например,  $m = 3$ , то

$$P_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{6} \cdot e^{-\lambda t}$$

а если  $m > 1$ , то

$$P_{m>1}(t) = P_2(t) + P_3(t) + \dots$$

*Пример:* На испытания поставлено 100 изделий. Определить вероятность того, что откажет не менее двух изделий:

Можем записать

$$P_{m \geq 2}(t) = P_2(t) + P_3(t) + \dots + P_{100}(t),$$

но учитывая, что  $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ , легче рассчитать по выражению

$$P_{m \geq 2}(t) = 1 - P_0 - P_1$$

### Экспоненциальный закон надежности

Если рассматривать случай  $m = 0$ , то  $P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$ ,

или

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (13.1)$$

Эта формула получила название экспоненциального закона надежности. Графически он показан на рис.13.2.

Можно получить эту формулу и из других соображений.

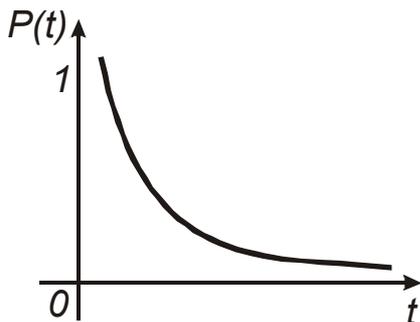


Рис.13.2

Вероятность безотказной работы по

$$\text{формуле (11.13)} \quad P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

Для периода нормальной эксплуатации  $\lambda(\tau) = \lambda - const$ . Тогда получим

$$P(t) = e^{-\lambda \int_0^t d\tau} = e^{-\lambda \tau} \Big|_0^t = e^{-\lambda(t-0)} = e^{-\lambda t}. \quad (13.2)$$

Средняя наработка до отказа

$$t_{cp} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda} (0 - 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Эта формула

$$t_{cp} = \frac{1}{\lambda}, \quad (13.3)$$

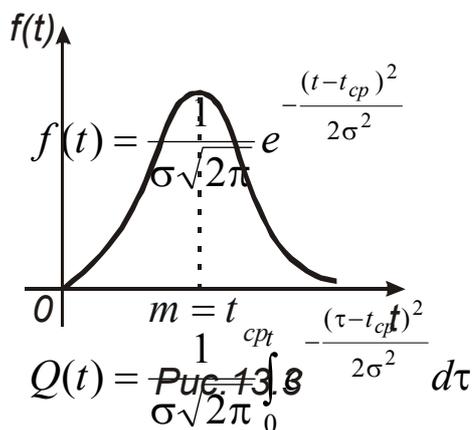
как и формула (13.2), имеет большое значение в теории надежности.

Учитывая, что  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$ , получим плотность распределения при

экспоненциальном законе в виде  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

Экспоненциальный закон надежности основной закон для расчета сложных электрических схем в период нормальной эксплуатации изделий.

### Нормальный закон распределения



Плотность распределения

Учитывая, что  $f(t) = F'(t) = Q'(t)$ ,  
получим

Введя обозначения

$$u = \frac{\tau - t_{cp}}{\sigma}; \quad \tau = u\sigma + t_{cp}$$

найдем

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{t-t_{cp}}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Это выражение табулировано и называется интегралом вероятностей или функцией Лапласа:

$$Q(t) = \Phi\left(\frac{t - t_{cp}}{\sigma}\right)$$

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - t_{cp}}{\sigma}\right).$$

Нормальный закон распределения является моделью отказов в период старения и износа.

### Закон Вейбулла

Плотность распределения (рис.13.4)

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b},$$

где  $a$  – характеризует масштаб распределения,  $b$  – форму распределения.

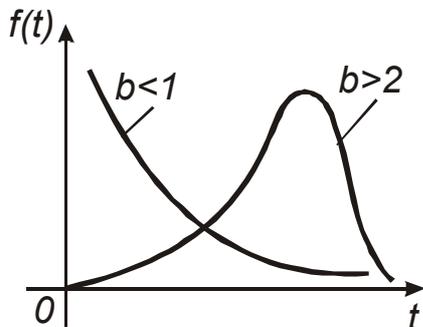


Рис.13.4

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1};$$

вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}.$$

Пусть  $b = 1$ , тогда  $\lambda(t) = \frac{1}{a}$ ;  $a = t_{cp}$ .

Получим  $P(t) = e^{-\frac{t}{a}}$ .

То есть, при  $b = 1$  закон Вейбулла совпадает с экспоненциальным законом распределения. При  $b = 3$  закон Вейбулла практически совпадает с нормальным законом распределения.

Закон распределения Вейбулла широко применяется в теории надежности, так как он более универсален. Наиболее часто применяется как модель отказов для различных механических и электромеханических изделий.

## Л е к ц и я 14

### Методы расчета надежности

#### Классификация методов расчета надежности

Методы расчета надежности в зависимости от вида соединения элементов можно разделить на методы при последовательном, параллельном и смешанном соединениях.

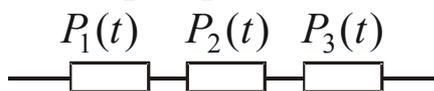
*Последовательное соединение* – когда отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы. *Параллельное соединение* – это когда отказ системы наступает при отказе всех элементов, составляющих систему.

Методы расчета надежности можно классифицировать в зависимости от видов отказов. Они делятся на расчеты при внезапных, постепенных и перемежающихся отказах.

Методы расчета надежности можно классифицировать в зависимости от этапа работы и исходных данных. Существуют приближенные методы, проводящиеся на начальных стадиях проектирования, и точные методы.

#### Методы расчета надежности при последовательном соединении элементов

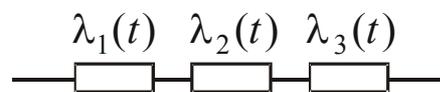
*Пример:*



*Рис.14.1*

Определить вероятность безотказной работы  $P(t)$  системы, показанной на рис.14.1. Событие заключающееся в безотказной работе будет наблюдаться если безотказно будут работать 1,2 и 3 элементы. Тогда вероятность безотказной работы системы:

$$P(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot p_3(t).$$



*Рис.14.2*

При последовательном соединении элементов вероятность безотказной работы системы равняется произведению вероятностей безотказной работы элементов.

Пусть  $\Lambda$  – интенсивность отказа системы, законы экспоненциальные. Можно записать

$$P(t) = e^{-\Lambda t} = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{-\lambda_3 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}.$$

Следовательно

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

При последовательном соединении элементов и экспоненциальном законе интенсивность отказов системы определяется как сумма интенсивностей отказов элементов составляющих данную систему.

## Приближенные методы расчета надежности

### Прикидочный метод

Применяется на самых ранних стадиях проектирования изделий (на стадиях технического задания и технического предложения) основан на следующих допущениях:

- законы распределения времени безотказной работы экспоненциальные;
- соединение элементов последовательное;
- имеется аналог, характеристики надежности которого известны;
- все элементы проектируемого элемента и аналога считаются равнонадежными;

Порядок расчета:

1. Определяется усредненная интенсивность отказов элементов аналога по формуле:

$$\lambda_a = \frac{\Lambda_a}{N_a},$$

где  $\Lambda_a$  – интенсивность отказа аналога (как системы),

$N_a$  – количество элементов в аналоге.

2. Интенсивность отказов проектируемого изделия принимается равная интенсивности отказов элементов аналога  $\lambda_n = \lambda_a$ .

3. Определяется число элементов проектируемого изделия  $N_n$

4. Определяется интенсивность отказов проектируемого изделия

$$\Lambda_n = \lambda_n N_n$$

5. Рассчитываются  $P(t) = e^{-\Lambda_n t}$ ,  $t_{cp.n} = \frac{1}{\lambda_n}$

### Ориентировочный метод

Проводится на стадиях эскизного или технического проектирования, т.е. когда известна принципиальная электрическая схема изделия.

Допущения:

- законы экспоненциальные;
- соединение элементов последовательное;
- режимы работы элементов нормальные;

Порядок расчета:

1. Определяется количество элементов каждого типа  $N_i$ ;
2. Определяется интенсивность отказов элементов каждого типа (по таблицам)
3. Определяется интенсивность отказа системы

$$\Lambda = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i,$$

где  $n$  – количество типов радиоэлементов

4. Рассчитываются

$$P(t) = e^{-\lambda t}, \text{ и } t_{cp} = \frac{1}{\Lambda}.$$

### ***Расчет надежности с учетом режимов работы элементов***

Последовательность расчета:

1. Определяются режимы работы элементов  $\mathfrak{G}_i$ .
2. Определяют количество элементов каждого типа, работающих в одинаковых режимах  $N_i(\mathfrak{G})$ .

3. Определяют интенсивность отказов элементов с учетом режимов их работы  $\lambda_i(\mathfrak{G}) = \lambda_{ia} a_1 a_2 \dots$ ,

где  $\lambda_{io}$  – интенсивность отказов при нормальных условиях,

$a_1, a_2 \dots$  - коэффициенты учитывающие режимы работы.

4. Находят  $\Lambda(\mathfrak{G}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathfrak{G}) \cdot N_i(\mathfrak{G})$ ,

где  $m$  - количество одинаковых элементов, работающих в идентичных условиях.

5. Рассчитывают  $P_n(t) = e^{-\Lambda(\mathfrak{G}) \cdot t}; \quad t_{cp.}(\mathfrak{G}) = \frac{1}{\Lambda(\mathfrak{G})}$ .

### ***Расчет надежности корпусированных полупроводниковых микросхем***

Интенсивность отказов в микросхеме определяется при рассмотрении ее как функционального узла, в который входят транзисторы, диоды, соединения внешние и внутренние. То есть

$$\Lambda = N_T a_T \lambda_T + N_D a_D \lambda_D + (3N_T + 2N_D + N_B) \lambda_{соед},$$

где  $N_T$  и  $N_D$  - число транзисторных и диодных переходов;  
 $\lambda_T$  и  $\lambda_D$  - интенсивность отказов;  
 $a_T$  и  $a_D$  - коэффициент учитывающий режим работы;  
 $\lambda_{соед.}$  - интенсивность отказов соединений;  
 $N_B$  - количество внешних выводов;

Ориентировочно

$$\lambda_T = 1 \cdot 10^{-8}, \text{ ч}^{-1} \quad \lambda_{соед.} = 0,1 \cdot 10^{-8}, \text{ ч}^{-1} \quad \lambda_D = 0,6 \cdot 10^{-8}, \text{ ч}^{-1}$$

## Л е к ц и я 15

### Методы расчета надежности при параллельном и смешанном соединении элементов

#### Понятия о резервировании

*Резервирование* – это способ повышения надежности путем введения дополнительных средств и возможностей с целью получения избыточности (структурной, информационной, временной и т.д.)

Структурное резервирование реализуется путем параллельного соединения элементов, как показано на рис.15.1.

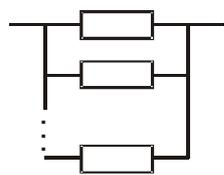


Рис.15.1

Под кратностью резервирования понимают отношение количества резервных цепей к количеству основных цепей.

Резервирование подразделяется на постоянное и динамическое.

При постоянном резервировании резервные цепи постоянно находятся в работе как и основные цепи. К моменту отказа основных цепей ресурс резервных цепей снижается.

При динамическом резервировании основные цепи замещают резервными только после отказа основных цепей.

При динамическом резервировании элемент может находиться в ненагруженном состоянии (холодный резерв), в горячем состоянии (горячий резерв) и находиться в среднем состоянии (теплый резерв).

Резервирование делится на общее и отдельное. При общем резервировании резервируется система в целом. При отдельном - резервируются отдельные элементы.

#### Расчет надежности при параллельном соединении элементов

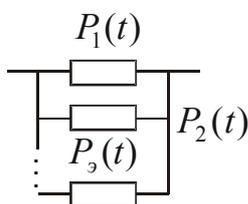


Рис.15.2

Для системы  $P(t) = 1 - Q(t)$ ,

где  $Q(t) = q_1(t)q_2(t) \dots q_{m+1}(t)$  – вероятность отказа

$$P(t) = 1 - \{[1 - p_1(t)] \dots [1 - p_{m+1}(t)]\} = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} [1 - p_i(t)]$$

Если  $p_1(t) = p_2(t) = \dots = p(t)$ , то вероятность безотказной

работы

$$P(t) = 1 - [1 - p(t)]^{m+1},$$

где  $m$  – число резервных элементов.

*Пример.* Если  $m = 2$ ;  $p(t) = 0,8$  (вероятность безотказной работы каждого элемента), то вероятность безотказной работы системы  $P(t) = 0,992$ .

Пусть имеется система, показана на рис.15.3.

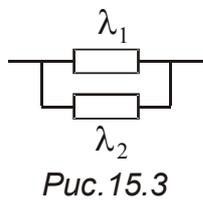


Рис.15.3

Получим

$$P(t) = 1 - [1 - p_1(t)] \cdot [1 - p_2(t)] = p_1(t) + p_2(t) - p_1(t) \cdot p_2(t)$$

Если законы экспоненциальные, то

$$P(t) = e^{-\lambda_1(t)} + e^{-\lambda_2(t)} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

и

$$t_{cp.} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} [e^{-\lambda_1(t)} + e^{-\lambda_2(t)} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}] dt.$$

Получим

$$t_{cp.} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то

$$t_{cp.} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} = 1,5 \frac{1}{\lambda} = 1,5 t_{cp.э},$$

где  $t_{cp.э}$  – средняя наработка до отказа одного элемента.

При постоянном резервировании ресурс резервного элемента является значительно истощенным. Поэтому, увеличивая количество элементов в два раза, только в 1,5 раза повысим надежность.

### Расчет надежности при общем резервировании

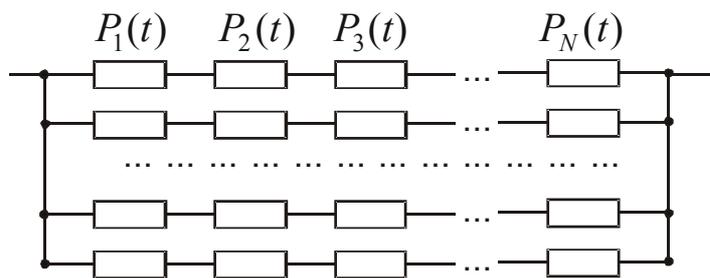


Рис.15.4

Определить вероятность безотказной работы этой системы, если одна цепь основная, а остальные  $m$  - резервные.

Данная система откажет, когда откажут все цепи, составляющей систему. Тогда вероятность отказа системы

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{m+1} q_{ц.i}(t), \text{ где } q_{ц.i}(t) - \text{ вероятность отказа } i - \text{ й цепи.}$$

Вероятность безотказной работы цепи

$$P_{ui}(t) = \prod_{j=1}^N p_j(t).$$

Отсюда 
$$Q(t) = \prod_{i=1}^{m+1} [1 - p_{ui}(t)] = \prod_{i=1}^{m+1} \left[ 1 - \prod_{j=1}^N p_j(t) \right].$$

Окончательно получим

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} \left[ 1 - \prod_{j=1}^N p_j(t) \right].$$

### Расчет надежности при раздельном резервировании

При этом резервируется не вся цепь, а отдельные элементы.

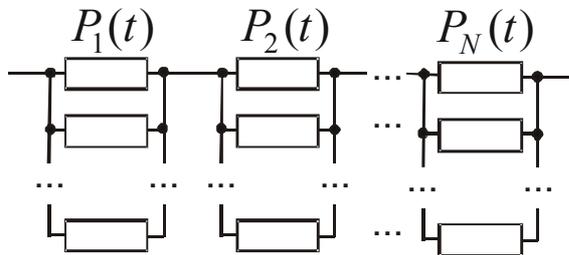


Рис.15.5

Вероятность безотказной работы

ты

$$P(t) = \prod_{j=1}^N P_{36.j}(t);$$

$$Q_{36.j}(t) = \prod_{i=1}^{m+1} q_i(t);$$

$$P_{36.j}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} [1 - p_i(t)]$$

Вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = \prod_{j=1}^N P_{36.j}(t)$$

и окончательно получим

$$P(t) = \prod_{j=1}^N \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{m+1} [1 - p_i(t)] \right\}.$$

Будем считать, что все элементы равнонадежны, то есть

$$p_1(t) = p_2(t) = \dots = p(t) \text{ тогда}$$

$$p(t) = 1 - [1 - p(t)^N]^{m+1} \text{ — при общем резервировании}$$

$$\text{и } P(t) = \{ [1 - [1 - p(t)]^{m+1}]^N \} \text{ при раздельном резервировании}$$

Предположим что  $m = 1$ ;  $N = 2$ ;  $P(t) = 0,8$  тогда

$$P(t) = 1 - [1 - 0,8^2]^2 = 0,87 \text{ при общем резервировании;}$$

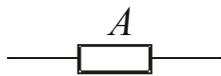
$P(t) = \{1 - (1 - 0,8)^2\}^2 = 0,92$  при раздельном резервировании;

Видно, что раздельное резервирование эффективнее общего.

Но этот вывод справедлив, только для постоянного резервирования.

Если резервирование динамическое, т.е. осуществляется замещением отказавших элементов, то при раздельном резервировании требуется значительно большее количество переключателей, которые являются наименее надежными элементами. Поэтому разделенное резервирование в этом случае часто оказывается менее эффективным, чем общее резервирование.

### Принципы расчета надежности при динамическом резервировании



Возможны гипотезы о работоспособности системы, показанной на рис.15.6

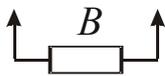


Рис.15.6

$H_1$  – элемент  $A$  и  $B$  проработали безотказно в течении заданного времени  $t$ .

$H_2$  – элемент  $A$  отказал в момент времени  $\tau < t$ , включился элемент  $B$  и проработал до окончания заданного времени  $t$ .

$H_3$  – элемент  $A$  проработал безотказно в течении заданного времени  $t$ , а  $B$  отказал в момент времени  $\tau < t$ .

$H_4$  – элемент  $A$  отказал в момент времени  $\tau < t$ , включился элемент  $B$  и тоже отказал до момента времени  $t$ .

$H_5$  – элемент  $A$  отказал в момент  $\tau$ , а элемент  $B$  отказал еще раньше.

Тогда вероятность работоспособного состояния, будет равняться сумме вероятностей первых трех гипотез, то есть

$$P(t) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)$$

Вероятность первой гипотезы

$$P(H_1) = P_A(t)P_B(t) = e^{-\lambda_A t} e^{-\lambda_B t} = e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$$

Более подробно эти методы изложены в литературе.

## Л е к ц и я 16

### Методы оптимизации при конструировании и в технологии производства РЭА

Под *оптимизацией* понимают нахождение наилучшего варианта изделия (технологического процесса) из какого-либо множества вариантов.

Если, например,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то необходимо найти решение, которое обеспечило бы наилучшее значение параметра  $y$ .

Оптимизацию можно разделить на оптимизацию параметров и оптимизацию структуры.

При *оптимизации параметров* необходимо найти такие значения параметров  $x_i$ , при которых функция  $y$ , называемая *целевой функцией*, имеет при *постоянной структуре объекта* экстремальное значение.

При *оптимизации структуры* ищут такую структуру системы (т.е. такое преобразование  $f$ ), при которой целевая функция  $y$  при постоянных параметрах  $x_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) принимает экстремальное значение.

Задача оптимизации может решаться при ограничениях типа равенств, типа неравенств, типа дискретности:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &< b \end{aligned} \right\} \\ x_1 = x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}; \\ x_2 = x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}. \quad (16.1)$$

Выражения (16.1) называются *функциями ограничений*, или *функциями связи*.

Задача оптимизации может быть решена экспериментальными или расчетно-аналитическими методами.

Расчетно-аналитические методы применяют в том случае, когда целевая функция или функция связи могут быть представлены в виде математического выражения. Задача решается в два этапа.

1. Находятся математические выражения для целевой функции и функции связи;

2. Производится непосредственно оптимизация.

Методы оптимизации можно разделить на:

- классические методы оптимизации;
- методы регулярного и случайного поиска оптимума;
- методы математического программирования.

## Классические методы оптимизации

К ним относят метод дифференцирования, метод множителей Лагранжа, метод на основе вариационного математического исчисления.

### *Оптимизация методом дифференцирования*

Пусть имеется целевая функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая не имеет ограничений, задана в аналитическом виде, непрерывна и дифференцируема на рассматриваемом интервале.

Находятся производные от функции  $y$  по каждому из параметров и приравниваются к нулю:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0. \end{array} \right\}$$

Получена система из  $n$  уравнений, решая которую, находят значения параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых целевая функция будет иметь экстремальное значение.

*Пример.* Найти оптимальные параметры и экстремальные значения целевой функции  $y = 6 + 3x_1 + 4x_2 - 0.5x_1^2 - 0.4x_2^2 + 0.8x_1x_2$ . Определить характер экстремума (максимум или минимум).

Находим первые производные и приравниваем их к нулю:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3 - x_1 + 0.8x_2 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = 4 - 0.8x_2 + 0.8x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

Решая эту систему, найдем оптимальные решения

$$x_1 = 35; \quad x_2 = 40$$

Экстремум первой функции

$$Y = 6 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 40 - 0.5 \cdot 35^2 - 0.4 \cdot 40^2 + 0.8 \cdot 35 \cdot 40 = 138.5$$

Вторые производные равны

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -1; \frac{\partial y}{\partial x_2} = -0.8$$

Следовательно,  $y=138.5$  является максимумом.

### **Оптимизация методом множителей Лагранжа**

Пусть  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – целевая функция.

Имеются ограничения

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1; \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_2; \\ &\dots \\ \Phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_m, \end{aligned} \tag{16.2}$$

где  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - постоянные величины.

Функции связи и целевая функция непрерывны и дифференцируемы. Параметры  $x$  независимы.

Для точки экстремума полный дифференциал

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

(16.3)

Полные дифференциалы функций связи:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0; \\ d\Phi_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} dx_i = 0; \\ &\dots \\ d\Phi_m &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} dx_i = 0. \end{aligned} \right\}$$

Каждое из уравнений этой системы умножим на постоянный множитель  $\lambda$  (для каждого уравнения он будет свой). Множители  $\lambda$  называются *неопределенными множителями Лагранжа*.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 d\Phi_1 &= \sum_{i=1}^n \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0; \\ \lambda_2 d\Phi_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} dx_i = 0; \\ &\dots \\ \lambda_m d\Phi_m &= \sum_{i=1}^n \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} dx_i = 0. \end{aligned} \right\}$$

Складывая левые и правые части этих уравнений и уравнение (16.3), получим:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

Так как параметры  $x$  независимы, это уравнение обратится в 0, когда каждое выражение в скобках равно 0.

Запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} &= 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Решая совместно  $n$  уравнений системы (16.4) и  $m$  уравнений функций связи (16.2) можно определить  $n$  неизвестных параметров  $x$  и  $m$  неизвестных множителей Лагранжа  $\lambda$ .

*Пример.* Требуется спроектировать цилиндрический сосуд заданного объема  $V$ , который бы имел наименьшую площадь поверхности  $S$  (рис.16.1).

Площадь поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r l \quad (16.5)$$

Здесь  $S$  – целевая функция.

Т.к. имеется ограничение  $\pi r^2 l = V$ ,

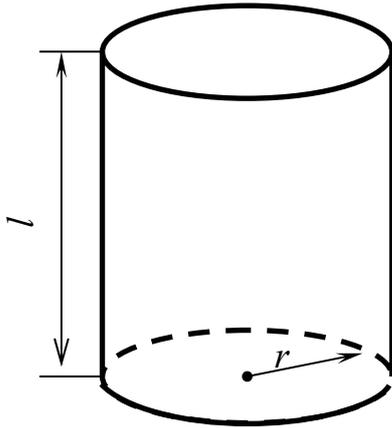


Рис. 16.1

то функцию связи можно записать в виде:

$$\Phi = V - \pi r^2 l = 0. \quad (16.6)$$

На основе(16.4) запишем:

$$\frac{\partial S}{\partial r} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial l} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражение (16.5), находим:

$$4\pi r + 2\pi l + \lambda_1(-2\pi r l) = 0$$

$$2\pi r + \lambda_1(-\pi r^2) = 0$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (16.6), найдем значения параметров  $r$  и  $l$ , при которых площадь  $S$  будет минимальной.

### Оптимизация на основе вариационного исчисления

Когда параметру ставится в соответствие функция – это есть *функционал*. Например функционал;

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

В вариационном исчислении доказано, что если функция  $F$  удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial dy'} \right) = 0,$$

то функционал  $J$  имеет экстремальное значение.

*Пример.* Найти зависимость  $y = f(x)$ , при которой расстояние между точками  $A$  и  $B$  будет минимально (рис. 16.2).

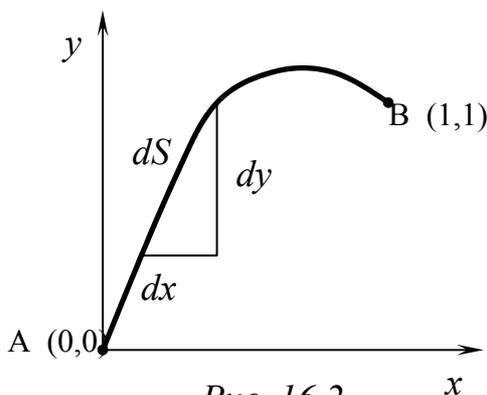


Рис. 16.2

Очевидно, что

$$dS = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

Обозначая расстояние между точками - $J$ , получим:

$$J = \int_A^B dS = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Обозначим

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

Подставляя его последовательно в уравнение Эйлера, найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(\sqrt{1 + y'^2})}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial(\sqrt{1 + y'^2})}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1 + y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

Отсюда

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

где  $c$  – постоянная величина. Очевидно:

$$y'^2 = c^2 + c^2 y'^2$$

или

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$y = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \cdot x + k$$

Неизвестные постоянные  $k$  и  $c$  найдем, используя граничные условия:

$$\text{в точке A: } x=0; y=0; k=0.$$

$$\text{в точке B: } x=1; y=1; \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = 1.$$

Следовательно, получим:  $y = x$ .

Оптимизация методом вариационного исчисления применяется при оптимизации систем с распределенными параметрами.

## Методы регулярного поиска экстремума

Экстремумов функции может быть несколько (рис. 17.1). Один из них – глобальный экстремум, остальные – частные экстремумы.



Рис. 17.1. Примеры экстремумов функции

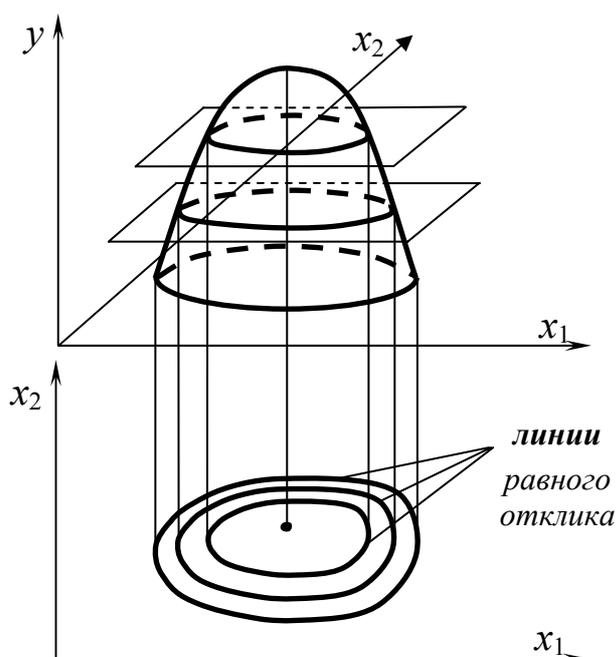


Рис.17.2. Получение топографических графиков

Для объяснения ниже рассматриваемых методов целесообразно использовать топографические графики. Их получение показано на рис. 17.2.

Для наглядности будем искать экстремум функции  $y = f(x_1, x_2)$ .

Будем считать, что экстремум функции равен ее максимальному значению.

### Метод слепого поиска (метод сканирования)

Дано:  $y = f(x_1, x_2)$ ,

и  $x_1$  принимает значения  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}$ ,  $x_2 \rightarrow x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2m}$

В этом методе значение  $y$  определяется для всех возможных сочетаний  $x$ .

$$\begin{aligned}
 x_{11}, x_{21} &\rightarrow y_1 \\
 x_{11}, x_{22} &\rightarrow y_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{11}, x_{2n} &\rightarrow y_i \\
 x_{1n}, x_{2m} &\rightarrow y_k
 \end{aligned}$$

Находится максимальное значение  $y_i$ , а соответствующие ему параметры  $x_{1i}, x_{2j}$  и будут оптимальными параметрами.

Если  $x_1$  и  $x_2$  непрерывные, т.е. имеют бесчисленное множество значений, то вначале переходят к дискретным параметрам (как в методе матричных испытаний), а затем ищут экстремум.

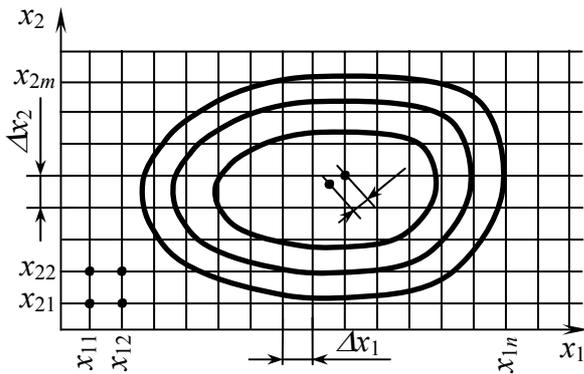


Рис.17.3. Последовательный перебор точек при использовании метода сканирования

Точность нахождения экстремума (E) зависит от величины шагов ( $\Delta x_1, \Delta x_2$ ) – чем меньше шаг, тем выше точность.

Метод довольно громоздкий, однако позволяет находить как глобальные, так и частные экстремумы.

### Метод покоординатного подъема и спуска (метод Гаусса-Зейделя).

Вначале выбираются начальные точки  $x_{20}, x_{10}$ . Производятся опыты в пробных точках, определяется значение выходной функции. Определим, в каком направлении двигаться. Если в процессе движения  $y$  увеличилось, то берут следующее значение. Если в некоторой точке  $y$  уменьшилось, то проверяем другие точки, где значение  $y$  уменьшается. Ищется оптимум.

Для уменьшения ошибки вблизи экстремума проводятся новые опыты с уменьшением шага.

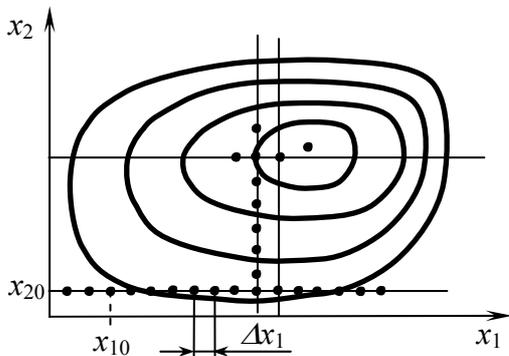


Рис.17.4. Метод покоординатного подъема-спуска

Достоинства опыта: он требует небольшого количества опытов (в несколько раз меньше, чем предыдущий).

Недостаток: оптимум можно и не найти.

## Градиентный метод.

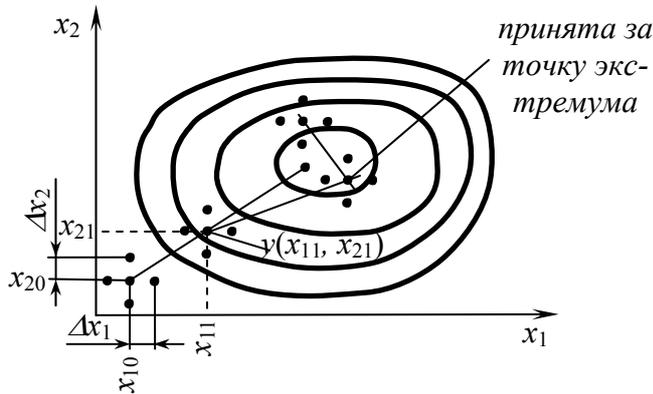


Рис.17.5. Пример использования градиентного метода

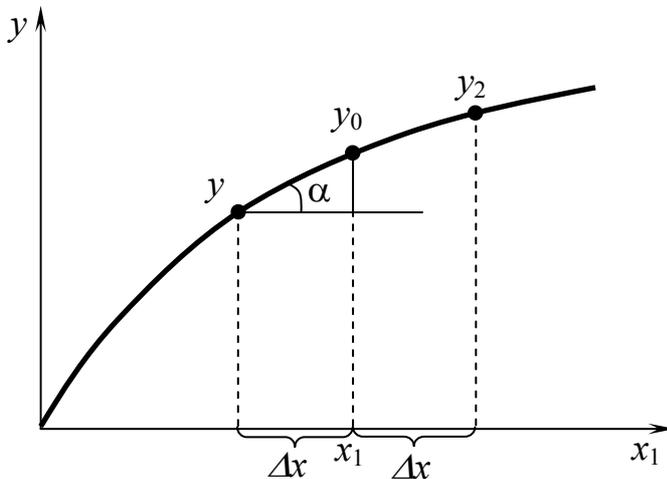


Рис. 17.6. Сечение к примеру использования градиентного метода

$$\text{Дано: } y = f(x_1, x_2)$$

Поиск экстремума начинается с выбора нулевой точки. Выбираются значения  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ . Градиент указывает направление наиболее быстрого изменения функции.

$$\nabla y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{x}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{x}_2,$$

где  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  – единичные векторы.

Выбирается начальная точка  $(x_{10}, x_{20})$  и шаги варьирования  $\Delta x_1, \Delta x_2$ .

Ставятся пробные опыты по точкам  $y_1$  и  $y_2$ . (рассмотрено сечение на рис. 17.6), производится обследование функции.

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) \cdot y_0 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{2\Delta x_1}$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) \cdot y_0 = \frac{y_4 - y_3}{2\Delta x_2}$$

Выбираем значение рабочего шага  $\rho$ . Чем меньше он будет, тем точнее можно найти значение экстремума.

$$x_1^{(1)} = x_{10} + \rho \frac{\partial y}{\partial x_1}; \quad (17.1)$$

$$x_2^{(1)} = x_{20} + \rho \frac{\partial y}{\partial x_2}; \quad (17.2)$$

Осуществляется движение по градиенту с выбранным шагом  $\rho$ .

За следующую рабочую точку принимается  $y_5$ , находится значение градиента.

Движение к экстремуму прекращается, когда частные производные становятся близкими к нулю.

Достоинство по сравнению с предыдущим методом заключается в том, что требуется меньшее количество шагов для нахождения экстремума.

Недостаток: нахождение глобального экстремума зависит от выбора начальной точки.

**Метод крутого восхождения (метод наискорейшего подъема-спуска).**

Метод крутого восхождения вобрал в себя лучшие черты двух предыдущих методов. Движение по градиенту продолжается до тех пор, пока не произойдет изменение направление функции.

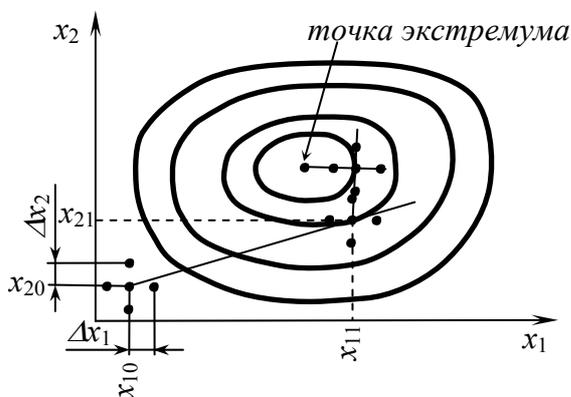


Рис.17.7. Графическая интерпретация метода крутого восхождения

Оптимизация осуществляется следующим образом. Выбираем нулевую точку. В окрестностях  $y_0$  строится полный или дробный факторный эксперимент.

Для этого выбираются интервалы варьирования.

Эксперименты ставятся в четырех точках квадрата. Это позволит найти математическую модель.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – это тангенс угла наклона прямой с оси координат:

$$b_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad b_2 = \operatorname{tg}\beta = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Уравнение  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  определяет направление градиента.

$$b_0 = \frac{\sum y_i}{4};$$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4};$$

$$b_2 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}.$$

Координаты новой точки находятся по формулам (17.1) и (17.2), но в отличие от градиентного метода движение по градиенту проводится до нахождения частного экстремума в направлении градиента.

Движение к экстремуму следует прекратить тогда, когда коэффициенты модели  $b_1$  и  $b_2$  будут незначимыми (близки к нулю).

Достоинства метода: меньший объем опытов.

Недостаток: Нахождение глобального экстремума зависит от правильного выбора начальной точки.

### Симплексный метод.

Симплекс – это  $n$ -мерный выпуклый равносторонний многогранник, имеющий  $n+1$  вершин.

Симплексом нулевой размерности (когда  $n=0$ ) является точка, одномерным симплексом является отрезок прямой, двумерным симплексом является равносторонний треугольник.

Выбирается начальный симплекс или начальное значение вершин симплекса двумерной размерности.

Определяется значение функции в точках  $y_1, y_2, y_3$ . Если имеем максимум функции, то в направлении, противоположном наименьшему значению функции находим новую точку, которая с двумя оставшимися точками образует новый симплекс.

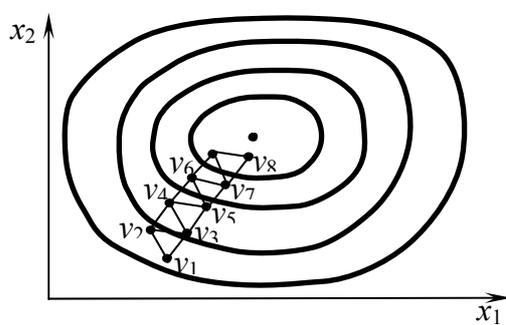


Рис.17.8. Пример использования симплексного метода

Предположим, что  $y_1$  – наименьшее значение (рис. 17.8). Тогда  $y_2, y_3, y_4$  образуют новый симплекс и так далее.

Чтобы максимально приблизиться к экстремуму, нужно уменьшить сторону симплекса.

### Метод случайного поиска экстремума.

Выбирается начальная точка  $y_0$ .

Проводится опыт в пробной точке, отстоящей от нулевой на расстояние  $\rho$ . На окружности точка, в которой проводится пробный опыт, определяется случайным образом.

Пусть  $\rho=10$ .

Берется таблица случайных чисел, выбираются точки со значением, меньшим 10:

28; 17; 8; 22; 6.

Число 8 принимаем в качестве размера вектора  $\xi$ , его направление определяем в зависимости от числа, которое стоит перед числом 8. если

предыдущее число четное, то направление вектора положительное, если нечетное – отрицательное.

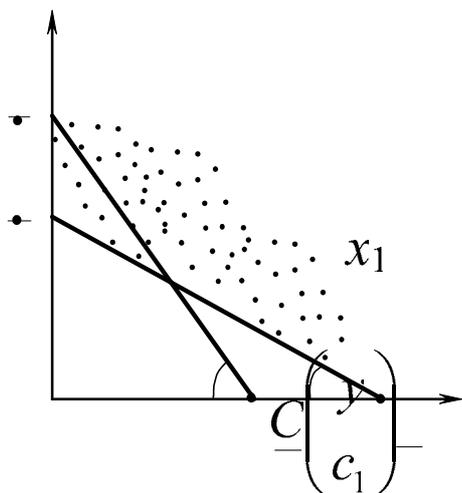
$$\xi_1 = -8;$$
$$\xi_2 = \sqrt{\rho^2 - \xi_1^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

Знак вектора  $\xi_2$  определяется от последующего числа: если последующее число четное, то знак  $\xi_2$  принимается отрицательным, если нечетное – положительным.

Затем определяется значение функции в точке  $y_1$  и сравнивается со значением  $y_0$ . если  $y_0 > y_1$ , то движение будет осуществляться в направлении, противоположном  $y_1$  на рабочий шаг  $r$ , который больше, чем  $\rho$  ( $r > \rho$ ).

В  $y_2$  снова находится значение случайной точки  $y_3$ ,  $\rho$  остается тем же.





область допустимых значений

В области допустимых значений нужно найти значения  $x_1, x_2$ , при которых значение  $y$  будет экстремальным.

Из выражения (18.1) можем записать

$$A \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} x_1 \geq \frac{y}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} x_2 \quad (18.5)$$

или

$$x_2 \geq \frac{y}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1 \quad (18.6)$$

Для предельного случая эти выражения можно представить отрезком CD  $x_1, x_2$ ,

Можем приравнять уравнения (18.3) и (18.5).

$$\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 = \frac{y}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} x_2 \quad D \begin{pmatrix} y \\ c_2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} d \\ a_2 \end{pmatrix} x_2$$

Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{y}{c_1} = \frac{b}{a_1} + \left( \frac{c_2}{c_1} - \frac{a_2}{a_1} \right) \cdot x_2 \quad (18.7)$$

Заметим, что

$$\frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \beta$$

Возможны три случая.

1) Угол  $\beta > \alpha$ , т.е.  $\frac{c_2}{c_1} > \frac{a_2}{a_1}$ . Если выполняется это условие, то  $y$  будет

иметь значение тем меньше, чем меньше  $x_2$  (уменьшается до 0). При  $x_2 = 0$   $y$  минимально.

$$y_{\min} = c_1 \cdot \frac{b}{a_1}$$

$$x_1 = \frac{b}{a_1}; x_2 = 0.$$

В этом случае минимальное значение в вершине С многоугольника ограничений.

2) Угол  $\beta > \alpha$ ,

$$\frac{c_2}{c_1} < \frac{a_2}{a_1}$$

Из уравнения (18.4) и (18.6) запишем:

$$\frac{b}{a_2} - \frac{a_1 x_1}{a_2} = \frac{y}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1$$

или

$$\frac{y}{c_2} = \frac{b}{a_2} + \left( \frac{c_1}{c_2} - \frac{a_1}{a_2} \right) x_1 \quad (18.8)$$

Учитывая неравенство  $\frac{c_1}{c_2} < \frac{a_1}{a_2}$ ,  $y$  будет минимально при  $x_1 = 0$ .

$$y_{\min} = c_2 \cdot \frac{b}{a_2}; x_2 = \frac{b}{a_2}$$

Минимальное значение  $y$  будет в вершине D многоугольника ограничений.

3) Угол  $\beta = \alpha$ , т.е.  $\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_2}{a_1}$ .

Из уравнения (18.7):

$$y_{\min} = c_1 \cdot \frac{b}{a_1}; \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$$

Из уравнения (18.8):

$$y_{\min} = c_2 \cdot \frac{b}{a_2}.$$

Минимум  $y$  будет находится в вершинах многоугольника, как и в предыдущих случаях. Минимальное значение целевой функции будет находится в вершинах многоугольника ограничений. Эти минимальные значения будут также на всем отрезке [C;D],  $y$  постоянна.

Таким образом, независимо от значений параметров  $a$  и  $c$  целевая функция будет иметь значение в одной из вершин многоугольника ограни-

чений. Нужно найти значение целевой функции в этих вершинах, экстремальное значение будет соответствовать экстремуму целевой функции, а параметры  $x$ , соответствующие этому значению  $y$  будут оптимальными параметрами.

*Пример.* Предприятия должны выпускать 2 вида продукции, используя при этом 4 группы производственного оборудования. Выпуск одного комплекта продукции  $A$  обеспечивает прибыль 200000 рублей, а комплекта  $B$  – 300000 рублей. Трудоемкость изготовления одного комплекта продукции вида  $A$  и  $B$ , а также фонд времени каждой группы оборудования в днях приведен в таблице:

Таблица

Группа производственного оборудования	Норма времени на выпуск одного комплекта, дни		Фонд времени (в днях) в месяц
	продукции $A$	продукции $B$	
I	3	3	15
II	3	6	18
III	4	0	16
IV	1	2	8

Составим целевую функцию, обозначив  $x_1$  – количество комплектов продукции типа  $A$ ;  $x_2$  – количество комплектов продукции типа  $B$ ;

$$\Pi = 2x_1 + 3x_2.$$

Функции ограничений будут иметь вид:

$$3x_1 + 3x_2 \leq 15 \quad (1)$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 18 \quad (2)$$

$$4x_1 \leq 16 \quad (3)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (4)$$

Учтем также, что  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ .

Задача сводится к задаче линейного программирования.

Нужно найти вершины многоугольника ограничений.

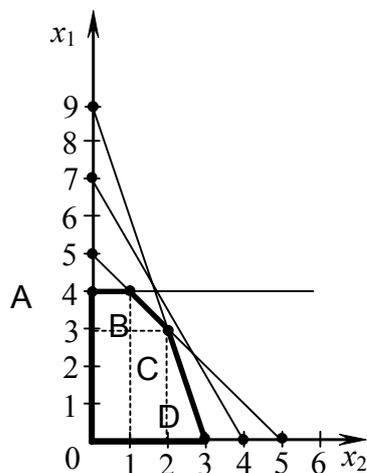


Рис.18.2.

Из первого уравнения:

$$x_1=0, x_2=5$$

$$x_2=0, x_1=5.$$

Из второго:

$$x_1=0, x_2=3;$$

$$x_2=0, x_1=9.$$

Из третьего:

$$x_1=4.$$

Из четвертого:

$$x_1=0, x_2=4;$$

$$x_1=8, x_2=0.$$

$$A(4;0) \quad \Pi = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 0 = 80 \text{ тыс. руб.};$$

$$B(4;1) \quad \Pi = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 1 = 1100 \text{ тыс. руб.};$$

$$C(3;2) \quad \Pi = 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 1200 \text{ тыс. руб.};$$

$$D(0;3) \quad \Pi = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 3 = 90 \text{ тыс. руб.};$$

Видим, что максимальная прибыль будет при  $x_1=3$  и  $x_2=2$  и составляет 1200 тыс.руб.

# Математическая теория эксперимента

## Лекция 19

### Введение

Эксперимент широко используется в различных отраслях человеческой деятельности. Как наука теория эксперимента зародилась в XIX в. Основой ее является математическая статистика (яркие представители – Фишер, Бокс, Уилсон, а из соотечественников – Налимов В.В., Адлер Ю.П. и др.)

Для описания трудно организуемых (сложных) систем требовался математический аппарат, а поскольку на основе физических представлений его получить очень сложно, использовали формальный способ, основанный на эксперименте.

Эксперимент можно разделить на пассивный и активный.

*Пассивный* широко применялся довольно давно (например, наблюдение за ходом техпроцесса и т.д.)

Недостатки пассивного эксперимента:

- 1) однофакторность;
- 2) пассивность (не можем на него активно влиять).

*Активный* эксперимент является многофакторным, то есть при нем одновременно может изменяться несколько параметров, что позволяет сокращать объем эксперимента.

Для активного факторного эксперимента характерны следующие признаки:

- одновременное варьирование всеми переменными по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать правильные решения после каждой серии эксперимента.

Задачи, для которых используется планирование эксперимента:

- 1) поиск оптимальных условий;
- 2) построение интерполяционных формул;
- 3) определение существенных факторов процесса;
- 4) оценка констант теоретической модели;
- 5) Определение механизма явления и др.

Реализация эксперимента:

- 1) организация полного перебора всех состояний процесса, нахождение при этом значения процесса и выбор наилучшего (количество экспериментов при этом велико);
- 2) определить состояние процесса в нескольких точках, выбранных иногда случайным образом, и экстремальное значение считать наилучшим (оптимальным);
- 3) на основе данных эксперимента построить математическую модель, которую использовать для поиска экстремума (наилучший путь).

Для математической модели используют полиномы:

- простейший (линейная функция)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2;$$

- сложнее (некоторая нелинейность):

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2;$$

- сложный (существенная нелинейность)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Чем более высокая степень полинома, тем точнее он описывает процесс, но тем большее количество опытов необходимо проводить для определения коэффициентов этой модели. Определение адекватности модели – важная задача.

На практике используется множество планов экспериментов (дисперсионного анализа, для изучения поверхности отклика, отсеивающего эксперимента, для эксперимента в условиях дрейфа, для и изучения механизма явления, многофакторного анализа и др.)

## Выборочный метод

### *Точечные и интервальные оценки параметров распределения*

*Точечные оценки.* Должны быть состоятельными, несмещенными и эффективными. Оценка *состоятельная*, если при увеличении числа опытов она приближается к оцениваемому параметру, - *несмещенная*, если математическое ожидание оценки равняется параметру и *эффективная*, если она обладает наименьшей дисперсией по сравнению с другими оценками. Этими свойствами обладают  $m^*$  и  $D^*$ .

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ – оценка математического ожидания;}$$

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2}{n-1} \quad \text{– оценка дисперсии.}$$

Тот факт, что для получения несмещенной оценки дисперсии  $D^*$  в знаменателе выборочной дисперсии пришлось  $n$  заменить на  $n - 1$ , непосредственно связан с тем, что величина  $\bar{x}$ , относительно которой берутся отклонения, сама зависит от элементов выборки. Если бы в формуле выборочной дисперсии были две такие величины, то  $n$  нужно было бы заменить на  $n - 1$  и т. д.

Каждая величина, зависящая от элементов выборки и участвующая в формуле выборочной дисперсии, называется *связью*. Оказывается (это можно строго доказать), *знаменатель выборочной дисперсии всегда равен разности между объемом выборки и числом связей, наложенных на эту выборку*. Эта разность фактически показывает, какое количество элементов выборки можно произвольно заменять, не нарушая связей, поэтому она называется *числом степеней свободы* выборки. Число степеней свободы участвует не только в формуле выборочной дисперсии, но и в формулах всех случайных величин, так или иначе связанных с этой дисперсией.

Достоинством точечных оценок является то, что они позволяют быстро оценить значение параметров, а недостатком – невозможность определения точности.

Поэтому для определения точности используются интервальные оценки.

*Интервальная оценка математического ожидания при нормальном законе распределения.* В соответствии с теоремой Чебышева, при увеличении числа опытов среднее арифметическое  $m^*$  приближается к значению математического ожидания  $m$ . Это можно записать в виде:

$$P[|m - m^*| \leq \varepsilon] = \gamma,$$

где  $\varepsilon$  – малая величина,  $\gamma$  – доверительная вероятность. Это выражение можно записать в виде:

$$P(m^* - \varepsilon \leq m \leq m^* + \varepsilon) = \gamma,$$

где  $(m^* - \varepsilon \leq m \leq m^* + \varepsilon)$  – доверительный интервал.

$$P(m - \varepsilon < m < m + \varepsilon) = \gamma = \Phi\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma_m}\right) - \Phi\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma_m}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_m}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_m}\right),$$

где  $\Phi(\dots)$  – функция Лапласа.

$$\text{Учитывая, что } \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma_m}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_m}\right);$$

получим 
$$\gamma = -1 + 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_m}\right);$$

или

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_m}\right) = \frac{\gamma + 1}{2};$$

Так как  $\sigma_m = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ ,

получим 
$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \frac{\gamma + 1}{2};$$

Обозначим

$$z_\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x};$$

Тогда

$$\varepsilon = z_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}};$$

Подставляя в выражение для доверительного интервала, получим

$$m^* - z_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq m < m^* + z_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},$$

где  $n$  – число опытов.

Если количество опытов  $n > 30$ , то  $\sigma_x \approx \sigma_x^*$ .

Если  $n < 30$ ; то используется не распределение Гаусса, а распределение Стьюдента, т. е. распределение случайной величины

$$t_\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n};$$

Отсюда 
$$\varepsilon = t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

и доверительный интервал

$$m^* - t_\gamma \cdot \frac{\sigma_\gamma^*}{\sqrt{n}} \leq m \leq m^* + t_\gamma + t_\gamma \cdot \frac{\sigma_\gamma^*}{\sqrt{n}}$$

Квантиль  $t_\gamma$ , берется из таблицы в зависимости от утвердительной вероятности  $\gamma$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$ .

## Доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины

Дисперсию генеральной совокупности  $\sigma_x^2$  нормально распределенной случайной величины можно оценить, если известно распределение ее оценки – *выборочной дисперсии*  $s_x^2$ . Распределение выборочной дисперсии можно получить при помощи распределения Пирсона или  $\chi^2$ -распределения. Если имеется выборка  $n$  независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  над нормально распределенной случайной величиной, то можно показать, что сумма

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 \quad (20.1)$$

имеет распределение  $\chi^2$  с  $f=n-1$  степенями свободы.

Плотность  $\chi^2$  распределения зависит только от числа степеней свободы  $f$ :

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{2^{f/2} \cdot \Gamma(f/2)} \cdot (\chi^2)^{\frac{f-2}{2}} \cdot e^{-\chi^2/2}, \quad 0 \leq \chi^2 < \infty$$

где  $\Gamma(f)$  – гамма-функция.

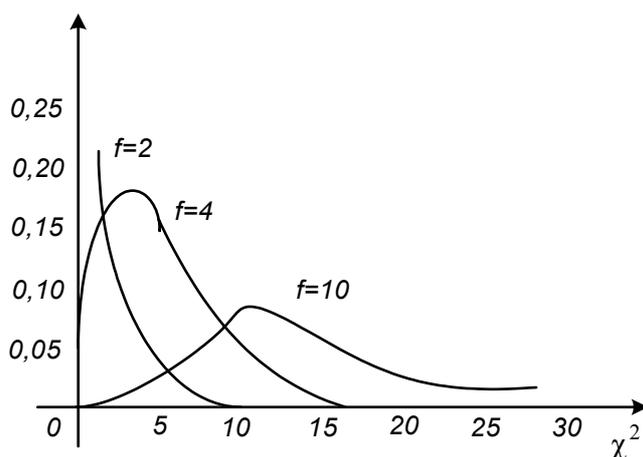
На рис. 20.1 Приведены кривые плотности вероятности  $\chi^2$ -распределения при некоторых значениях  $f$ . Кривые асимметричны, степень асимметрии уменьшается с увеличением  $f$ . При доверительной вероятности  $\beta=1-p$  двусторонняя доверительная оценка для  $\chi^2$  имеет вид

$$\chi_{p/2}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{1-p/2}^2, \quad (20.2)$$

односторонние оценки имеют вид

$$\chi^2 \leq \chi_{1-p}^2, \quad \chi^2 \geq \chi_p^2.$$

Квантили  $\chi_{1-p}^2$  при различных  $p$  и  $f$  приведены в таблице. Так как выборочная дисперсия  $s_x^2$  через элементы вы-



борки определяется по формуле

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{f};$$

из (20.1) имеем

$$\chi^2 = \frac{f \cdot s_x^2}{\sigma_x^2}. \quad (20.3)$$

Подставляя (20.3) в (20.2), получим

$$\chi_{p/2}^2 \leq \frac{f \cdot s_x^2}{\sigma_x^2} \leq \chi_{1-p/2}^2.$$

Решая неравенство относительно  $\sigma_x^2$ , получим доверительные двусторонние границы для генеральной дисперсии  $\sigma_x^2$ :

$$\frac{f \cdot s_x^2}{\chi_{1-p/2}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{f \cdot s_x^2}{\chi_{p/2}^2}.$$

Аналогично получаются односторонние доверительные оценки:

$$\sigma_x^2 \leq \frac{f \cdot s_x^2}{\chi_{p/2}^2}, \quad \sigma_x^2 \geq \frac{f \cdot s_x^2}{\chi_{1-p/2}^2}.$$

### Сравнение двух дисперсий

При обработке наблюдений часто возникает необходимость сравнить две или несколько выборочных дисперсий. Основная гипотеза, которая при этом проверяется: можно ли считать сравниваемые выборочные дисперсии оценками одной и той же генеральной дисперсии. Рассмотрим две выборки

$$x_1', x_2', \dots, x_n'$$

$$x_1'', x_2'', \dots, x_n'',$$

средние значения которых соответственно равны  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Выборочные дисперсии

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i' - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1},$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_i'' - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

определяются со степенями свободы

$$f_1 = n_1 - 1, \quad f_2 = n_2 - 1.$$

Требуется выяснить, являются ли выборочные дисперсии  $s_1^2$  и  $s_2^2$  значимо различными или же полученные выборки можно рассматривать как взятые из генеральных совокупностей с равными дисперсиями. Предположим, что первая выборка сделана из генеральной совокупности с дисперсией  $\sigma_1^2$ , а вторая из генеральной совокупности с дисперсией  $\sigma_2^2$ . проверяется нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Чтобы отвергнуть эту гипотезу, нужно доказать значимость различия между  $s_1^2$  и  $s_2^2$  при выбранном уровне значимости  $p$ . В качестве критерия значимости обычно используется критерий Фишера. *Распределением Фишера* ( $F$  – распределение,  $\nu^2$  – распределение) называется распределение случайной величины:

$$F = (s_1^2 / \sigma_1^2) : (s_2^2 / \sigma_2^2). \quad (20.4)$$

Плотность вероятности  $F$ –распределения определяется выражением

$$\varphi(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot f_1^{f_2/2} \cdot f_2^{f_1/2} \cdot \frac{F^{(f_1-2)/2}}{(f_2 + f_1 \cdot F)^{(f_1+f_2)/2}},$$

где  $\Gamma(f)$  – гамма-функция.

$F$  – распределение зависит только от числа степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$ . На рис. 20.2 приведены кривые плотности вероятности  $F$  – распределение для некоторых значений  $f_1$  и  $f_2$ .

Кривые имеют асимметричную форму. В таблице приведены квантили  $F_{1-p}$  для разных уровней значимости  $p$ , чисел степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$ . Для определения квантилей  $F_p$  для значений  $p$ , не вошедших в таблицу, используется соотношение

$$F_p(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{1-p}(f_2, f_1)} \quad (20.5)$$

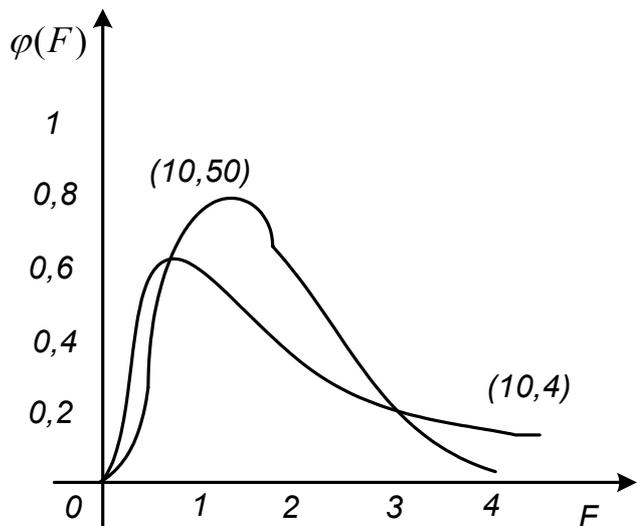


Рис. 20.2 Плотность  $F$ –распределения

В условия нулевой гипотезы  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  и  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ , и, следовательно,  $F$ -распределение может быть непосредственно использовано для оценки отношения выборочных дисперсий  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ . При доверительной вероятности  $1 - p$  двусторонняя доверительная оценка величины  $F$  имеет вид

$$F_{\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2) \leq F \leq F_{1-\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2).$$

С учетом (20.5)

$$\frac{1}{F_{1-\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2)} \leq F \leq F_{1-\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2).$$

В условиях нулевой гипотезы  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , следовательно, с вероятностью  $1-p$  должно выполняться неравенство

$1-p$  должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{F_{1-\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2)} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-\frac{1-p}{2}}(f_1, f_2)$$

или одно из односторонних неравенств

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-p}(f_1, f_2) \quad (\text{оценка сверху}),$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq \frac{1}{F_{1-p}(f_1, f_2)} \quad (\text{оценка снизу}).$$

### Сравнение нескольких дисперсий

При определении оценки дисперсии по текущим измерениям по формуле

$$s_y^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \dots + f_n s_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i s_i^2}{f}$$

была принята нулевая гипотеза равенства соответствующих генеральных дисперсий. Проверить эту гипотезу для выборок разного объема можно по критерию Барлета. Барлет показал, что в условиях нулевой гипотезы отношение  $B/C$ , где

$$B = 2.303 \left( f \cdot \lg s_y^2 - \sum_{i=1}^n f_i \cdot \lg s_i^2 \right),$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right),$$

распределено приближенно как  $\chi^2$  с  $n - 1$  степенями свободы, если  $f_i > 2$ .

Гипотеза равенства генеральных дисперсий принимается, если

$$\frac{B}{C} \leq \chi_{1-p}^2$$

при выбранном уровне значимости  $p$ . Различие между выборочными дисперсиями можно считать незначимым, а сами выборочны дисперсии – однородными. Так как всегда  $C > 1$ , если окажется  $B \leq \chi_{1-p}^2$ , нулевую гипотезу следует принять; если  $B > \chi_{1-p}^2$ , критерий Бартлетта вычисляются полностью.

Если выборочные дисперсии получены по выборкам одинаковых объемов  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ , для их сравнения используют более удобный и точный критерий Кохрена. Кохрен исследовал распределение максимальной выборочной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2}. \quad (20.6)$$

Распределение случайной величины  $G$  зависит только от числа суммируемых дисперсий  $n$  и числа степеней свободы  $f$ , с которым определена каждая дисперсия:  $f = m - 1$ . Если найденное по выборочным дисперсиям значение критерия Кохрена окажется меньше табличного

$$G < G_{1-p}(n, f), \quad (20.7)$$

где  $n$  – число суммируемых дисперсий;  $f = m - 1$ , расхождение между дисперсиями нужно считать случайными при выбранном уровне значимости  $p$ . Если при этом определятся оценка для дисперсии воспроизводимости, однородные дисперсии можно усреднить. Число степеней свободы  $f$  среднеарифметической дисперсии равно  $f = n(m - 1)$ .

### Сравнение двух средних

Для сравнения между собой двух средних, полученных по выборкам из нормально распределенных генеральных совокупностей, применяется критерий Стьюдента или  $t$ -критерий. Пусть заданы две случайные выборки:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$$

Первая выборка взята из нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами  $m_x$  и  $\sigma_x^2$ , вторая из генеральной совокупности с параметрами  $m_y$  и  $\sigma_y^2$ . По выборкам получены оценки для этих параметров:  $\bar{x}$ ,  $s_x^2$  и  $\bar{y}$ ,  $s_y^2$ . Требуется проверить нулевую гипотезу:  $m_x = m_y$  при условии  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ . Рассмотрим случайную величину

$$z = \bar{x} - \bar{y}$$

По свойству линейности нормального распределения (см. гл. 1, § 5)  $z$  распределена нормально с параметрами

$$m_z = m_x - m_y$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2} = \sigma^2 \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Составим нормированную случайную величину

$$\frac{z - m_z}{\sigma^2} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{\sigma^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

которая имеет стандартное нормальное распределение.

Если генеральный стандарт  $\sigma$  заменить выборочным, получится величина, имеющая распределение Стьюдента

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

с числом степеней свободы  $f$ , равным  $f = n_1 + n_2 - 2$ .

Однородность выборочных дисперсий  $s_1^2$  и  $s_2^2$  можно проверить по критерию Фишера. При доверительной вероятности  $\beta = 1 - p$  имеем двустороннюю оценку для разности  $m_x - m_y$ :

$$\bar{x} - \bar{y} - t_{1-p/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq m_x - m_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-p/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

или односторонние оценки

$$m_x - m_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-p} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \quad (20.8)$$

$$m_x - m_y \geq \bar{x} - \bar{y} - t_{1-p} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}. \quad (20.9)$$

В условиях нулевой гипотезы  $m_x=m_y$ , и неравенства (20.8) и (20.9) дают критерий проверки этой гипотезы. Нулевая гипотеза отвергается при двустороннем критерии, если

$$|\bar{x} - \bar{y}| \geq t_{1-p/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}};$$

при одностороннем критерии, если

$$|\bar{x} - \bar{y}| \geq t_{1-p} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

### Сравнение нескольких средних

При сравнении нескольких средних можно использовать  $t$ -критерий, проводя сравнение попарно. Однако для использования при сравнении полной информации о всех средних такое сравнение проводят при помощи *множественного рангового критерия Дункана* [ ]. Пусть по  $k$  выборкам разного объема получено  $k$  средних значений

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_k,$$

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ji}}{n_i}.$$

Генеральные дисперсии равны между собой, т. е.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \dots = \sigma_x^2.$$

При помощи критерия Дункана следует: 1) проранжировать  $k$  средних значений, расположив их в порядке возрастания; 2) определить ошибку воспроизводимости результатов  $s_x$  с соответствующим числом степеней свободы  $f_x$ ; 3) определить ошибку для каждого среднего

$$s_{\bar{x}_j} = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

4) выписать из таблицы Дункана значимых рангов с выбранным уровнем значимости, числом  $n_D=f_x$   $p=2, 3, \dots, k$  ( $k-1$ ) значений рангов; 5) умножить эти значения рангов на  $s_{\bar{x}_y}$ , и таким образом определить ( $k-1$ ) наименьших значимых рангов; 6) проверить значимость различия между средними, начиная с крайних в ранжированном ряду; разность максимального и минимального значений среднего сравнить с наименьшим значимым рангом при  $p=k$ , затем найти разность максимального среднего и второго среднего в ранжированном ряду и сравнить ее с наименьшим зна-

чимым рангом при  $p = k - 1$  и т. д. Это сравнение продолжить для второго по величине среднего, которое сравнивается с наименьшим, и т. д., пока не будут исследованы на значимость различия между всеми  $k(k - 1)/2$  парами.

Л е к ц и я 21

## Обработка результатов пассивного эксперимента

Пусть  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то есть функция  $n$  переменных.

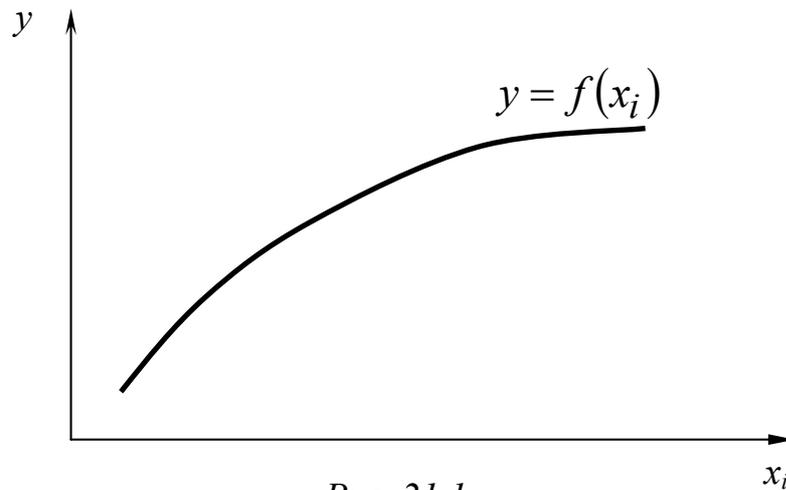


Рис. 21.1

При пассивном эксперименте  $n-1$  независимых переменных фиксируют, а изменяется только одна, т.е.  $y = f(x_i)$ , как показано на рис. 21.1.

Целью пассивного эксперимента часто бывает построение математической модели. В основе построения математических моделей обычно лежит регрессионный анализ. При построении математических моделей на основе пассивного эксперимента нужно решить следующие задачи:

- проверить постулаты регрессионного анализа;
- построить математическую модель;
- проверить адекватность модели;
- проверить значимость коэффициентов модели (коэффициентов регрессии).

Регрессионный анализ имеет три постулата:

- 1) выходной параметр  $y$  имеет нормальный закон распределения;
- 2) факторы (первичные параметры) есть неслучайные величины (на практике должно выполняться условие  $\sigma_{x_i}^2 \ll \sigma_y^2$ );

3) точность определения выходного параметра  $y$  не зависит от величины  $y$  (дисперсии  $y$  должны быть однородны различных точках факторного пространства). Однородность дисперсии проверяется с помощью критериев Фишера, Бартлета, Кохрена.

Математически модели строятся обычно в виде полиномов:

линейных:

$$y = b_0 + b_1 x_2 - \text{однофакторное пространство};$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 - \text{двухфакторное пространство};$$

нелинейных:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_{12} + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{32} x_1^2 x_2 + \dots$$

Создание математической модели включает четыре этапа:

- проверка постулатов регрессионного анализа;
- выбор вида полинома и определение его коэффициентов;
- проверка значимости коэффициентов;
- проверка адекватности модели.

*Определение математических моделей с использованием метода наименьших квадратов (МНК)*

Пусть точки  $\bar{y}_i$  соответствует средним экспериментальным значением в каждом сечении (при  $x_i$ ,  $x_i$  и т. д.), а точки  $\hat{y}_i$  – прямой, проверенной на основе расположения этих точек.

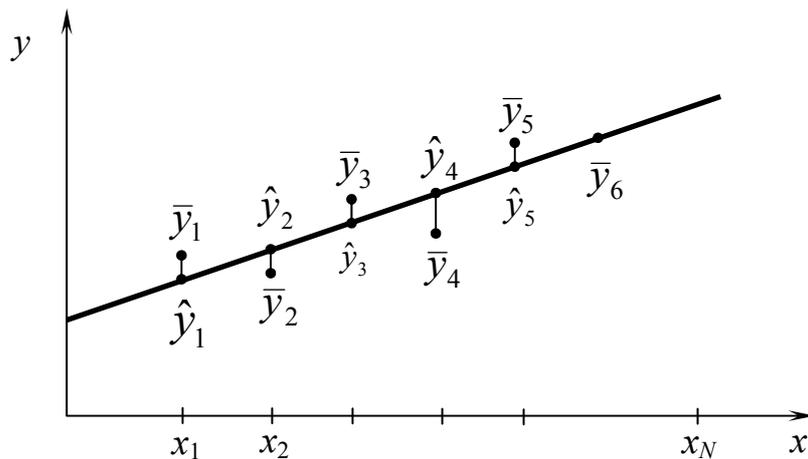


Рис. 21.2.

Разность между точками на модели и средними значениями обозначим  $E_i$ :

$$E_i = \hat{y}_i - \bar{y}_i.$$

При МНК линия должна проводиться таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений между средними значениями и точками модели должна быть минимальной:

$$B = \sum_{i=1}^N E_i^2 \rightarrow \min$$

Условием нахождения минимума является выполнение условий:

$$\frac{\partial B}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial b_1} = 0.$$

Запишем

$$B = \sum_{i=1}^N \left( \hat{y}_i - \bar{y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left( b_0 + b_1 x_i - \bar{y}_i \right)^2 \quad (21.1)$$

Производная

$$\frac{\partial B}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (b_0 + b_1 x_i - \bar{y}_i) = 0.$$

Отсюда получим

$$N b_0 + b_1 \sum x_i = \sum \bar{y}_i.$$

Производная

$$\frac{\partial B}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (b_0 + b_1 x_i - \bar{y}_i) \cdot x_i = 0.$$

Следовательно

$$b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \bar{y}_i.$$

Получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} N b_0 + b_1 \sum x_i &= \sum \bar{y}_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 &= \sum x_i \bar{y}_i \end{aligned} \right\}$$

которая получила название *системы нормальных уравнений*.

Решая эту систему, получим

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}, \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum \bar{y}_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \bar{y}_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}},$$

$$b_0 = \frac{\sum \bar{y}_i \sum x_i^2 - \sum x_i \bar{y}_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b_1 = \frac{N \sum x_i \bar{y}_i - \sum x_i \sum \bar{y}_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Коэффициенты уравнения регрессии часто называют коэффициентами регрессии.

### Проверка адекватности модели

На рис. 21.3 приведены примеры адекватной и неадекватной моделей. Вертикальные отрезки показывают интервал, в котором находятся экспериментальные значения.

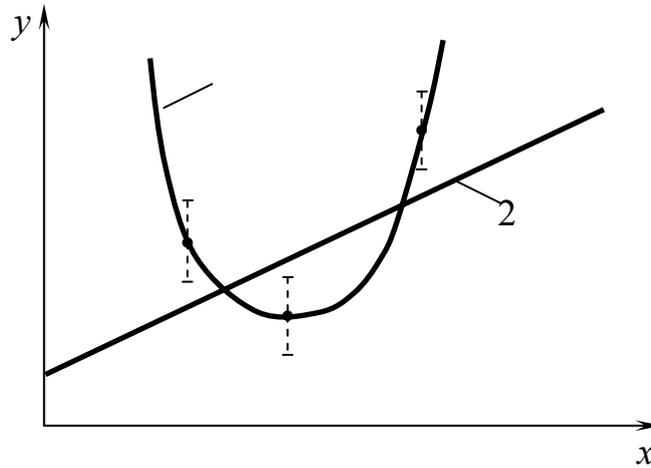


Рис. 21.3. Пример адекватной (1) и неадекватной (2) модели.

Проверка адекватности производится при помощи критерия Фишера:

$$F_{\mathcal{D}} = \frac{\sigma_{ad}^{2*}}{\sigma_y^{*2}},$$

где

$\sigma_{ad}^{2*}$  – дисперсия адекватности;

$\sigma_y^{*2}$  – дисперсия воспроизводимости.

Если  $F_{\mathcal{D}} < F_T$ , где  $F_T$  – табличное значение найденное при заданном уровне значимости  $p$ , то считается, что модель адекватна, в противном случае – неадекватна.

Степени свободы при нахождении  $F_T$

$$f_1 = N - (k + 1),$$

$$f_2 = N.$$

где  $k + 1$  определяет число коэффициентов регрессии,  $k$  определяет число факторов.

Дисперсия адекватности

$$\sigma_{ad} = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}{f_1},$$

где  $f_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i$ .

Дисперсия воспроизводимости – это дисперсия среднего значения выходного параметра. Последовательно ее можно рассчитать следующим образом. Дисперсия  $y_i$  в каждом сечении

$$\sigma_i^{2*} = \frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n-1},$$

где  $n$  – число параллельных опытов.

Дисперсия выходного параметра  $y$ :

$$\sigma_y^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N \cdot (n-1)}.$$

Дисперсия среднего значения выходного параметра (дисперсия воспроизводимости)

$$\sigma_y^{2*} = \frac{\sigma_y^{2*}}{n}$$

или

$$\sigma_y^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N \cdot n \cdot (n-1)}.$$

#### *Проверка значимости коэффициентов регрессии*

Значимость коэффициентов регрессии заключается в сравнении их абсолютных значений ошибками эксперимента. Считается, что коэффициент значим, если его абсолютная величина  $|b_k| > \Delta b_k$ , где  $\Delta b_k$  – ошибка при его определении, определяемая по выражению

$$\Delta b_k = t_\gamma \cdot \sigma_{bk}^*$$

или

$$\Delta b_k = \frac{t_\gamma \cdot \sigma_y^*}{\sqrt{N}},$$

где  $\sigma_{bk}^*$  – среднеквадратическое отклонение коэффициента  $b_k$ .

## Лекция 22

### Теория активного многофакторного эксперимента

Эксперимент *активный*, если факторы изменяются по ранее оговоренному правилу (алгоритму), и *многофакторный* (при условии варьирования несколькими или всеми факторами).

*Пример.* Взвешивание трех объектов:  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Табл. 22.1

$N$	$A$	$B$	$C$	$Y$
1	–	–	–	$y_1$
2	+	–	–	$y_2$
3	–	+	–	$y_3$
4	–	–	+	$y_4$

Если объект на весах, то в табл. 21.1 знак «+», если нет то «–». Веса

$$P(A) = y_2 - y_1; \quad P(B) = y_3 - y_1; \quad P(C) = y_4 - y_1.$$

Дисперсии  $D[A] = D[y_2 - y_1] = D[y_2] + D[y_1] = 2D[y]$ , т.к. измерения проводятся на одном приборе, то  $D[y_1] = D[y_2] = D[y]$

Теперь проведём взвешивание по плану табл. 22.2.

Табл. 22.2

$N$	$A$	$B$	$C$	$Y$
1	+	–	–	$y_1$
2	–	+	–	$y_2$
3	–	–	+	$y_3$
4	+	+	+	$y_4$

Например, вес  $P(A) = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}$ , а дисперсия

$$D[A] = \frac{D[y_1 - y_2 - y_3 + y_4]}{4} = \frac{4D[y]}{4} = D(y)$$

Следовательно, точность увеличивается в 2 раза, т.е. многофакторность позволяет сократить объем опыта.

## Полный факторный эксперимент типа $2^k$

Пусть  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Обозначение  $2^k$  означает, что каждый из  $k$  факторов варьируется на 2-ух уровнях.

*Полным факторным экспериментом* (ПФЭ) называется эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

При ПФЭ сначала выбирается начальный уровень факторов  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{k0}$ , потом для каждого фактора выбирается уровень варьирования  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_k$ , и выбирается нижний и верхний значения фактора (рис. 22.1)

$$\tilde{x}_{1H} = \frac{x_{1H} - x_{10}}{\Delta x_1} = \frac{-\Delta x_1}{\Delta x_1} = -1;$$

$$\tilde{x}_{1B} = \frac{x_{1B} - x_{10}}{\Delta x_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1} = 1.$$

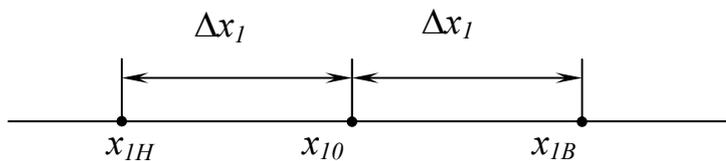


Рис. 22.1

Перед проведением ПФЭ составляется матрица планирования эксперимента (МПЭ). Например, если  $y = f(x_1, x_2)$  и требуется найти коэффициенты модели  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  то матрица будет иметь вид:

Матрица ПФЭ  $2^2$

$N$	$x_1$	$x_2$	$Y$
1	+	+	$y_1$
2	+	-	$y_2$
3	-	+	$y_3$
4	-	-	$y_4$

Расположение точек показано на рис. 22.3. Обозначение «+» в матрице означает, что фактор равен «+1», то есть принимает значение на верхнем уровне, а «-» – на нижнем.

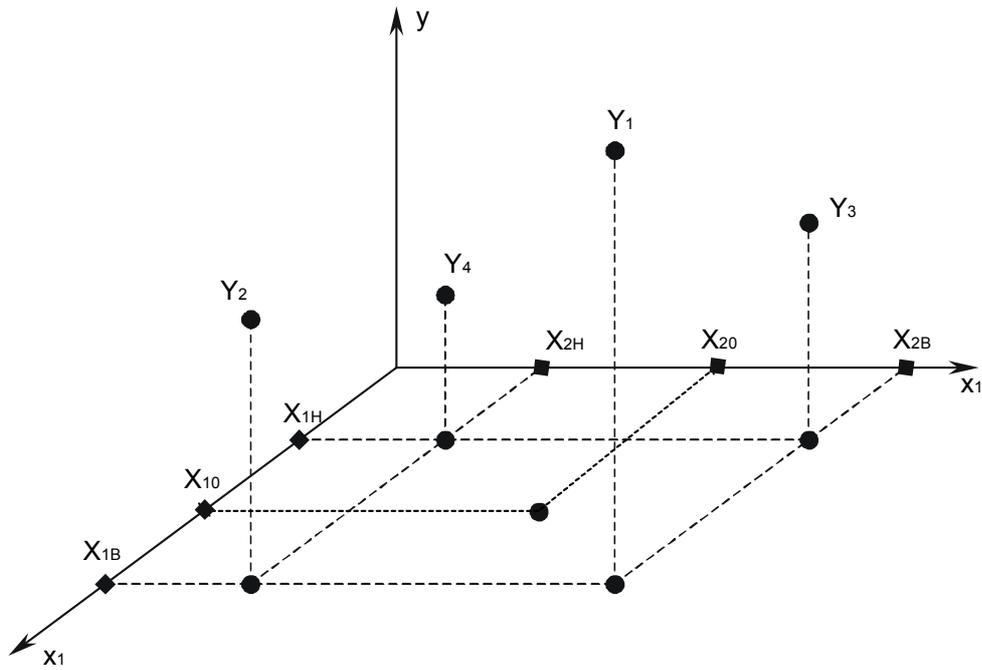


Рис. 22.2

Свойства МПЭ:

1) симметричность, означающая, что сумма элементов каждого столбца равна 0:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0;$$

2) нормированность – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов  $N$  (числу строк) – учитываем только независимые опыты:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N;$$

3) ортогональность – сумма почленных произведений любых двух столбцов равняется нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ki} = 0$$

Эти свойства легко проверить на матрице ПФЭ  $2^2$ , а также ПФЭ  $2^3$ , приведенной в качестве примера ниже.

### Матрица ПФЭ 2<sup>3</sup>

$N$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y$
1	–	–	–	$y_1$
2	+	–	–	$y_2$
3	–	+	–	$y_3$
4	–	–	+	$y_4$
5	+	+	–	$y_5$
6	+	–	+	$y_6$
7	–	+	+	$y_7$
8	+	+	+	$y_8$

Свойство матрицы ПФЭ позволяет резко упростить формулы для определения коэффициентов регрессии и перейти к очень простым алгоритмам их определения. В соответствии с МНК, если  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ , запишем

$$B = \sum_{i=1}^N E_i^2 \rightarrow \min, \text{ где } E_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} - \bar{y}_i.$$

Производные

$$\frac{\partial B}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial b_2} = 0.$$

Следовательно

$$\frac{\partial B}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} - \bar{y}_i) = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} &= \sum \bar{y}_i \\ b_0 \sum x_{1i} + b_1 \sum x_{1i}^2 + b_2 \sum x_{2i}x_{1i} &= \sum x_{1i}\bar{y}_i \\ b_0 \sum x_{2i} + b_1 \sum x_{1i}x_{2i} + b_2 \sum x_{2i}^2 &= \sum x_{2i}\bar{y}_i \end{aligned} \right\}$$

Расчетные формулы, учитывая свойства матрицы ПФЭ, принимает вид.

$$b_0 = \frac{\sum \bar{y}_i}{N}; b_1 = \frac{\sum x_{1i}\bar{y}_i}{N}; b_2 = \frac{\sum x_{2i}\bar{y}_i}{N}$$

т. е.

$$b_1 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}, b_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4}, b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Для того чтобы  $b_0$  определить по единым правилам в МПЭ вводят дополнительный столбец  $x_0$ .

N	$x_0$	$x_1$	$x_2$	Y
1	+	+	+	$y_1$
2	+	+	-	$y_2$
3	+	-	+	$y_3$
4	+	-	-	$y_4$

Возникает вопрос о возможности использования такого алгоритма в случае нелинейности модели.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_{12}x_1x_2,$$

$b_{12}x_1x_2$  – определяет нелинейность, называемую эффектом взаимодействия. Система нормальных уравнений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + b_{12} \sum x_1x_2 &= \sum y_i; \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1x_2 + b_{12} \sum x_1^2 &= \sum x_{1i}y_i; \\ b_0 \sum x_2 + b_1 \sum x_1x_2 + b_2 \sum x_2^2 + b_{12} \sum x_1x_2^2 &= \sum x_2y_i; \\ b_0 \sum x_1x_2 + b_1 \sum x_1^2x_2 + b_2 \sum x_1x_2^2 + b_{12} \sum x_1^2x_2^2 &= \sum x_1x_2y_i \end{aligned} \right\}$$

то есть 
$$b_0 = \frac{\sum y}{N}, b_1 = \frac{\sum x_1y}{N}, b_2 = \frac{\sum x_2y}{N}, b_{12} = \frac{\sum (x_1x_2)y}{N}.$$

Таким образом, видно, что  $b_{12}$  может быть найден по тем же алгоритмам.

Для определения коэффициентов модели

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 = 0$$

матрица МПЭ имеет следующий вид:

N	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	Y
1	+	-	-	-	+	+	+	$y_1$
2	+	+	-	-	-	-	+	$y_2$
3	+	-	+	-	-	+	-	$y_3$
4	+	-	-	+	+	-	-	$y_4$
5	+	+	+	-	+	-	-	$y_5$
6	+	+	-	+	-	+	-	$y_6$
7	+	-	+	+	-	-	+	$y_7$
8	+	+	+	+	+	+	+	$y_8$

Рассмотрим теперь модель

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2^2.$$

Система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2^2 &= \sum y \\ b_0 \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_2^2 x_1 &= \sum x_1 y \\ b_0 \sum x_2^2 + b_1 \sum x_1 x_2^2 + b_2 \sum x_2^4 &= \sum x_2^2 y \end{aligned} \right\}$$

тогда:

$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + Nb_2 + \sum y; \\ Nb_1 = \sum x_1 y; \\ Nb_0 + Nb_2 = \sum x_2^2 y = \sum y; \end{aligned} \right\}$$

Первое и третье уравнения идентичны, а из двух уравнений невозможно определить 3 неизвестные.

Если привести матрицу

$N$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_2^2$	$Y$
1	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	+	$y_2$
3	+	-	+	+	$y_3$
4	+	+	+	+	$y_4$

то видно, что столбцы при  $x_0$  и при  $x_2^2$  неразличимы:

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{22},$$

то есть наблюдается смешение эффектов. Следовательно, нелинейные члены, в которых факторы во 2-ой и более высокой степени, при помощи ПФЭ определить нельзя (используются другие планы).

### Дробный факторный эксперимент

ПФЭ требует проведения большого объема опытов ( $k = 3$ ,  $2^3=8$ , но в каждом не менее 2-х, т.е. всего 16 опытов).

При 2-х факторах на 2-х уровнях МПЭ будет иметь вид:

$N$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$Y$
1	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	$y_4$

Можно определить коэффициенты модели

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Предположим, нам априорно известно, что процесс линейный, и тогда определения коэффициента  $b_{12}$  не требуется ( $b_{12} = 0$ ). В этом случае результаты ПФЭ обладают избыточностью, и нельзя ли за счет избыточности получить дополнительную информацию или сократить число опытов?

Составим матрицу

N	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	Y
1	+	-	-	+	+	-	-	$y_1$
2	+	+	-	-	-	-	+	$y_2$
3	+	-	+	-	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	+	+	+	$y_4$

Эта матрица обладает свойствами симметричности, нормированности, ортогональности и, используя ее, можно рассчитать коэффициенты модели

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3$$

но

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{12}$$

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$$

Так как заранее известно, что процесс линейный, то  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$ , и получим модель, для которой провели 4 эксперимента, сократив опыт в 2 раза, но с применением априорной информации. Такой ДФЭ называется полуреplikой.

При ПФЭ  $2^{15} = 32768$  экспериментов, а если 1/16-реплики, то достаточно поставить 16 экспериментов.

## Проведение и обработка результатов эксперимента

### Подготовка к проведению эксперимента

К проведению эксперимента нужно тщательно подготовиться: проверить и откалибровать приборы, подготовить материалы и журнал эксперимента (чтобы была ясна последовательность его проведения), определить вид эксперимента – ПФЭ или ДФЭ, провести *рандомизацию* опытов (определение случайного порядка проведения опытов). Рандомизация применяется для исключения систематической ошибки. Для этого берется таблица случайных равномерно распределенных чисел, если опытов 16, то выбираются цифры от 1 до 16. Например, 8, 13, 3, 12, 11, 15, 6, 14, 2, 4, 5, 7, 1, 9, 10, 16.

Составляется матрица ПФЭ  $2^3$  и проводится эксперимент.

N	Порядок проведения опытов	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y$
1	8,13	+	–	–	–	2,40	1,46	1,93
2	3,12	+	+	–	+	3,58	2,78	3,18
3	11,15	+	–	–	+	6,10	4,50	5,30
4	6,14	+	–	+	–	4,76	3,12	3,94
5	2,4	+	+	+	–	5,35	4,15	4,75
6	5,7	+	+	–	–	4,10	2,70	3,40
7	1,9	+	–	+	+	5,42	4,00	4,71
8	10,16	+	+	+	+	15,41	12,99	14,20

### Обработка результатов эксперимента

- 1) Нахождение средних значений в каждой строке (приведены в матрице).
- 2) Расчет дисперсии и дисперсии среднего в каждой строке матрицы.

$$\sigma_j^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{n-1}$$

( $i$  – параллельные опыты,  $j$  – номер строки).

$$\sigma_1^{*2} = \frac{(2,40 - 1,93)^2 + (1,46 - 1,93)^2}{2-1} = 0,44.$$

Дисперсии среднего в каждой строке матрицы

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_1^{*2}} = \frac{\sigma_1^{*2}}{n} = \frac{0,44}{2} = 0,22; \quad \overline{\sigma_2^{*2}} = 0,16; \quad \overline{\sigma_3^{*2}} = 0,64; \quad \overline{\sigma_4^{*2}} = 0,67; \quad \overline{\sigma_5^{*2}} = 0,36; \\ \overline{\sigma_6^{*2}} = 0,49; \quad \overline{\sigma_7^{*2}} = 0,504; \quad \overline{\sigma_8^{*2}} = 1,46; \end{aligned}$$

3) Проверка однородности дисперсий.

Проводится по критерию Кохрена.

$$G_{\mathcal{D}} = \frac{\overline{\sigma_{\max}^{*2}}}{\sum_{j=1}^N \overline{\sigma_j^{*2}}}$$

Экспериментальное значение  $G_{\mathcal{D}}$  сравнивается с табличным значением  $G_T$ . Если  $G_{\mathcal{D}} < G_T$ , то дисперсии однородны.

$$G_{\mathcal{D}} = \frac{1,46}{0,16 + 0,64 + 0,67 + 0,36 + 0,49 + 0,504 + 1,46} = 0,32.$$

Табличное значение определяется при заданном уровне значимости  $p$  и числах степеней свободы  $f_1 = n - 1$ ,  $f_2 = N$ .

Если  $p = 0,005$  и  $f_1 = 2 - 1 = 1$ ,  $f_2 = 8$ , то  $G_T = 0,679$ , т.е. выполняется условие  $G_{\mathcal{D}} < G_T$ , значит дисперсии однородны.

4) Проверка значимости различий средних.

Сравнение средних проводится путем сравнения критерия Стьюдента, найденного экспериментальным путем, с табличным значением. Если экспериментальное значение меньше табличного, то различия незначимы.

Для двух близких значений  $Y$  (2-я и 6-я строки)

$$t_{\mathcal{D}} = \frac{\overline{y_6} - \overline{y_2}}{\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_6}}},$$

где  $n_1 = n_2 = 2$ .

Средне взвешенная дисперсия

$$\sigma^{*2} = \frac{\overline{\sigma_1^{*2}} f_1 + \overline{\sigma_2^{*2}} f_2}{f_1 + f_2} = \frac{0,32 + 0,92}{2} = 0,65,$$

так как  $f_1 = f_2 = n - 1 = 1$ , стандарт  $\sigma^* \approx 0,8$ .

Получим

$$t_{\mathcal{D}} = \frac{3,40 - 3,18}{0,8 \cdot 1} = \frac{0,22}{0,8} \approx 0,27.$$

Величину  $t_T$  находим для  $p = 0,05$  и  $f = n_1 + n_2 - 2 = 2$ . Из таблицы найдем  $t_T = 4,3$ .

Т.к.  $t_{\mathcal{E}} < t_T$ , то различие незначимо, оно могло появиться за счет ошибок эксперимента.

В этом случае нужно уменьшить ошибки эксперимента или увеличить интервалы варьирования.

### *Определение коэффициентов регрессии (коэффициентов уравнения)*

Будем искать коэффициенты полинома

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3.$$

Получим

$$b_0 = \frac{1,93 + 3,18 + 5,30 + 3,94 + 4,75 + 3,40 + 4,71 + 14,20}{8} = 5,18,$$

$$b_1 = \frac{-1,93 + 3,18 - 5,30 - 3,94 + 4,75 + 3,40 - 4,71 + 14,20}{8} = 1,21 \text{ и т.д.}$$

С учетом рассчитанных коэффициентов запишем  
 $y = 5,8 + 1,21 \cdot x_1 + 1,72 \cdot x_2 + 1,67 \cdot x_3 + 1,37 \cdot x_1x_2 + 0,64 \cdot x_1x_3 + 0,88 \cdot x_2x_3$

### *Проверка адекватности модели*

Определяется с использованием критерия Фишера:

$$F_{\mathcal{E}} = \frac{\sigma_{ad}^{2*}}{\sigma_y^{2*}}.$$

Дисперсия адекватности

$$\sigma_{ad}^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f},$$

где  $\Delta y_i = \hat{y}_i - \bar{y}_i$ ;  $f = N - (k + 1)$ ;  $\hat{y}_i$  – значение  $y$ , найденное по математической модели;  $\bar{y}_i$  – среднее значение;  $k$  – число факторов (в данном случае  $k = 3$ ),  $f = N(n - 1)$ .

Дисперсия воспроизводимости

$$\sigma_y^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i^{*2}}{f} = \frac{0,22 + 0,16 + \dots + 1,46}{8(2 - 1)} = 0,564.$$

Для определения  $\sigma_{ad}^{*2}$  целесообразно составить таблицу:

N	$\hat{y}$	$\bar{y}$	$\Delta y$	$\Delta y^2$
1	3,46	1,93	1,53	2,34
2	4,80	3,18	1,62	2,61
3	...	5,30	...	...
4	...	3,94	...	...
5	...	4,75	...	...
6	...	3,40	...	...
7	...	4,71	...	...
8	...	14,20	...	...

Получим

$$\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2 = 24,46.$$

В качестве примера определим  $\bar{y}_1$ .

Получим

$$\bar{y}_1 = 5,18 + 1,21 \cdot (-1) + 1,72 \cdot (-1) + 1,67 \cdot (-1) + 1,37 \cdot (+1) + 0,64 \cdot (+1) + 0,88 \cdot (+1) = 3,46.$$

Дисперсия адекватности

$$\sigma_{ad}^{*2} = \frac{24,46}{4} = 6,12$$

и

$$F_{\mathcal{D}} = \frac{6,12}{0,564} = 11,0.$$

Табличное значение  $F_T$  находится для

$$f_1 = N - (k + 1) = 4, \quad f_2 = N \cdot (n - 1) = 8, \quad p = 0,05,$$

тогда  $F_T = 4,1$ .

Т.к. условие  $F_T > F_{\mathcal{D}}$  не выполняется, то гипотеза об адекватности не справедлива.

Можно уменьшать интервалы варьирования, изменять центр плана эксперимента или перейти к нелинейным моделям.

### *Проверка значимости коэффициентов*

Абсолютное значение коэффициента должно быть больше ошибки при его определении, т.е.

$$|b_j| > \Delta b_j, \quad \Delta b_j = \pm t \cdot \sigma_{bj}^*$$

Так как  $f = N \cdot (n - 1) = 8 \cdot (2 - 1) = 8$ , то для уровня значимости  $p = 0,05$  найдем  $t = 2,306$ .

Так как

$$\sigma_{bj}^{*2} = \frac{\sigma_y^2}{N} = \frac{0,564}{8} = 0,0705, \text{ то } \sigma_{bj}^* = 0,266.$$

Получим

$$\Delta b_j = \pm 2,306 \cdot 0,266 = 0,613.$$

Сравнение  $\Delta b_j$  с коэффициентами регрессии показывает, что все коэффициенты значимы.

## Л е к ц и я 24

### Крутое восхождение по поверхности отклика

#### Метод Бокса-Уилсона.

Это метод оптимизации на основе крутого восхождения по поверхности отклика.

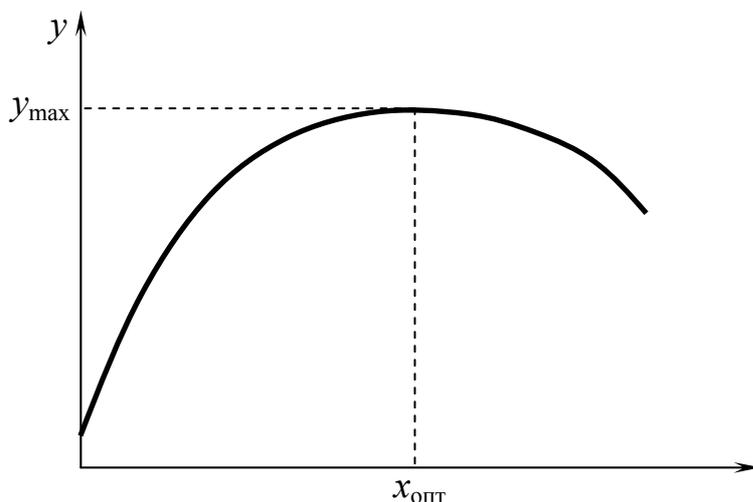


Рис. 24.1

Метод Бокса-Уилсона (крутого восхождения) использует свойства градиента функции и метода ПФЭ и ДФЭ.

Градиент функции  $y = f(x_1, x_2)$  имеет вид:

$$\nabla y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \vec{j}, \quad (24.1)$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  – единичные векторы (орты),  $\nabla y$  указывает направление наиболее быстрого изменения функции. Линейный полином будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (24.2)$$

где  $b_1, b_2$  – частные производные от функции по параметрам.

На рис. 24.2 для примера приведём график функции  $y = b_0 + b_1 x$ . Очевидно, что

$$b_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

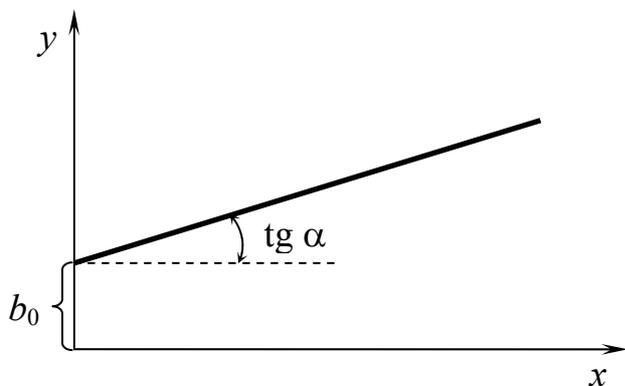


Рис. 24.2

Очевидно также, что

$$b_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Сравнивая (24.1) и (24.2), видим, что уравнение регрессии (24.2) указывает направление градиента. Коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  можно определить с использованием ПФЭ или ДФЭ. Если, изменять  $b_1x_1$  и  $b_2x_2$  пропорционально коэффициентам регрессии, то можно осуществить движение по градиенту.

Сначала выбирается начальное значение  $x_1$  и  $x_2$ , затем интервалы варьирования  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ , составляется матрица ПФЭ  $2^2$ .

$N$	$x_1$	$x_2$	$y$
1	–	–	$y_1$
2	–	+	$y_2$
3	+	–	$y_3$
4	+	+	$y_4$

Определим коэффициенты

$$b_1 = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4};$$

$$b_2 = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

Используя математическую модель (24.2) и изменяя слагаемые пропорционально  $b_1$  и  $b_2$ , двигаемся с выбранным шагом по градиенту в новую точку отсчета, где проводится мысленный (численный) эксперимент. Будем двигаться до тех пор, пока не начнется уменьшение  $y$ . Если во всех четырех точках при проведении ПФЭ значение функции окажется меньше, то экстремум обнаружен.

Для того чтобы более точно определить экстремум, надо провести ПФЭ при меньших интервалах варьирования или перейти к планам второго порядка.

*Пример.* Матрица планирования и расчет крутого восхождения.

Пусть  $y = f(x_1, x_2)$ . Начальные значения параметров, интервалы варьирования и уровни факторов приведены в табл. 24.1.

Таблица 24.1

Уровень	$x_1$	$x_2$
Основной	1,5	7,0
Интервал варьирования (J)	0,5	1,0
Верхний	2,0	8,0
Нижний	1,0	6,0

Результаты ПФЭ и движение по градиенту с использованием мысленных опытов (расчетов по математической модели) приведены в табл. 24.2.

Таблица 24.2

Опыты	Кодирование значений факторов		
	$x_1$	$x_2$	$y$
1	–	–	15,0
2	+1	–1	10,0
3	–1	+1	85,0
4	+1	+1	82,0
$b_i J_i$	$-2 \cdot 0,5 = -1$	–4,5	
шаг при изменении $x_2$ на 0,5	–0,11	–0,5	
Округление	–0,1	–0,5	

Коэффициенты регрессии

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{4} = \frac{15 + 10 + 85 + 82}{4} = 48, \quad b_1 = \frac{-15 + 10 - 85 + 82}{4} = -2, \quad b_2 = -4,5.$$

Следовательно, линейная математическая модель

$$y = 48 - 2x_1 - 4,5x_2$$

Для мысленного опыта 5, например, получим

$$x_1 = \frac{1,4 - 1,5}{0,5} = -0,2, \quad x_2 = \frac{6,5 - 7}{1} = -0,5,$$

$$y_5 = 48,0 - 2 \cdot (-0,2) - 4,5 \cdot (-0,5) = 48,0 + 0,4 + 2,25 = 50,65 \text{ и т.д.}$$

Движение по градиенту

5	1,4	6,5	50,65
6	1,3	6,0	...
7	1,2	5,5	95,15
8	1,1	5,0	...
9	1,0	4,5	...

$$y_7 = 48,0 - 2 \cdot x_1 - 4,5 \cdot x_2 = 95,15.$$

Расчеты (мысленные эксперименты) используются только для сокращения объема эксперимента. Параллельно с мысленными опытами проводится эксперимент, но он проводится не в каждой точке, и производится сравнение  $y_{\text{расч}}$  и  $y_{\text{эксп}}$ . Когда это расхождение становится значительным, то снова проведем ПФЭ для определения нового градиента.

## Лекция 25

### Планы второго порядка.

Если функция (24.1) нелинейная, а мы будем аппроксимировать линейной (24.2), то это приведёт к большой ошибке  $\varepsilon$ . Следовательно необходимо провести эксперимент ещё в одной точке, например, в начальной  $x_0$ .

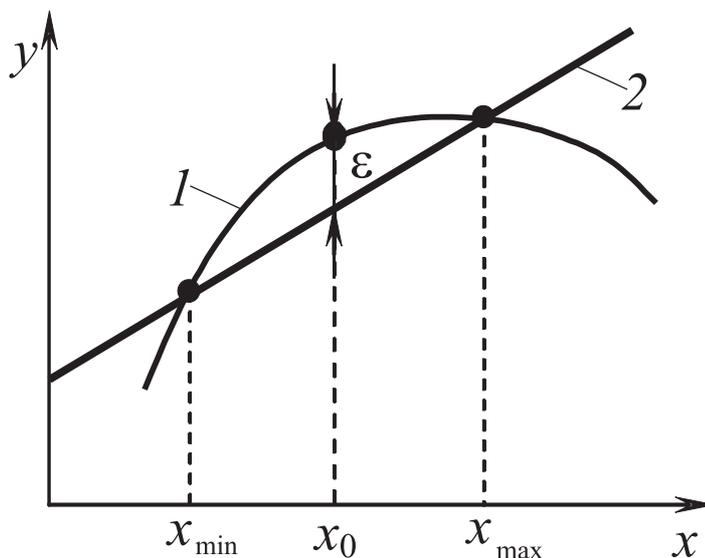


Рис.25.1

То есть, если модель нелинейна, то нужно строить планы  $3^k$ .

План  $3^2$ .

Таблица 25.1

N	$x_1$	$x_2$	$y$
1	–	–	$y_1$
2	–	+	$y_2$
3	+	–	$y_3$
4	+	+	$y_4$
5	0	+	$y_5$
6	+	0	$y_6$
7	+	–	$y_7$
8	–	0	$y_8$
9	+	0	$y_9$

Эксперимент  $3^k$  проводят редко из-за большого количества опытов. Сократить их количество можно, если воспользоваться композиционными планами Бокса–Уилсона.

Они делятся на:

- 1) композиционные ортогональные планы 2-го порядка,
  - 2) композиционные рототабельные планы 2-го порядка.
- Композиционные ортогональные планы 2-го порядка.

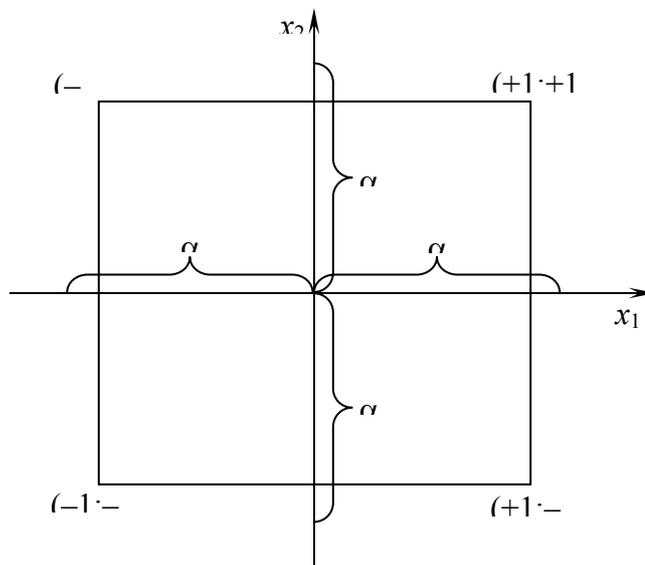


Рис. 24.2

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

При проведении такого эксперимента к точкам, в которых проводится ПФЭ или ДФЭ, добавляются т.н. «звездные точки».

Проводится эксперимент в этих точках, и записывается МПЭ, имеющая следующий вид:

N	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	Y
1	+	+	+	+	+	$y_1$
2	+	-	-	+	+	$y_2$
3	-	+	+	+	+	$y_3$
4	-	-	+	+	+	$y_4$
5	0	+2	0	0	$\alpha^2$	$y_5$
6	+2	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
7	0	-2	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
8	-2	0	0	$\alpha^2$	0	$y_8$
9	0	0	0	0	0	$y_9$

Для нелинейных коэффициентов выбирают звездные точки, которые удалены от центра эксперимента на  $\alpha$  ( $\alpha$  – плечо).

Этот план становится ортогональным, если подобрать соответствующим образом плечо  $\alpha$ .

Характеристики ортогональных планов приведены в таблице.

Характеристика плана	Число факторов		
	2	3	4
ПФЭ	$2^2$	$2^3$	$2^4$
Число «звездных точек»	4	6	8
Число точек в центре	1	1	1
Общее число опытов	9	15	25
Плечо $\alpha$	1,0	1,215	1,414

Расчет коэффициентов регрессии проводится по формулам, приведенным в литературе.

Композиционные рототабельные планы 2-го порядка.

Критерием эффективности в ортогональных планах является ортогональность, а критерием рототабельности является одинаковая точность предсказания величины параметра оптимизации в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от центра плана.

Условием рототабельности плана является однородность дисперсии в указанных точках (по критерию Фишера).

$N$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
1	–	–	+	+	+	$\bar{y}_1$
2	+	–	–	+	+	$\bar{y}_2$
3	–	+	–	+	+	$\bar{y}_3$
4	+	+	+	+	+	$\bar{y}_4$
5	$+\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	$\bar{y}_5$
6	$-\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	$\bar{y}_6$
7	0	$+\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	$\bar{y}_7$
8	0	$-\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	$\bar{y}_8$
9	0	0	0	0	0	$\bar{y}_9$
10	0	0	0	0	0	$\bar{y}_{10}$
11	0	0	0	0	0	$\bar{y}_{11}$
12	0	0	0	0	0	$\bar{y}_{12}$
13	0	0	0	0	0	$\bar{y}_{13}$

Характеристика плана	Число факторов		
	2	3	4
Ядро плана	$2^2$	$2^3$	$2^4$
Число звездных точек	4	6	8
Число точек в центре	5	6	7
Общее число опытов	13	20	31
Плечо $\alpha$	1,414	1,682	2,00

Формулы для расчета коэффициентов приведены в книге Шахназарова С.Л., Кафарова В.В. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии. М.:Высш.шк., 1978.

### Введение в теорию массового обслуживания

Рассмотрим характерный пример и убедимся, как часто встречаются случаи, анализ которых целесообразно проводить применением теории массового обслуживания.

Пример – сборочные работы в цехах радиотехнического производства без использования конвейера. Сборку осуществляет бригада, располагающая несколькими рабочими местами. На сборку поступают детали в случайные моменты времени. Полный комплект, необходимый, для сборки, получается в случайные моменты времени. Поэтому рабочие могут простаивать в ожидании деталей или в очереди стоят несколько полных комплектов деталей. Поскольку детали имеют отклонения и у рабочих разная квалификация, то они затрачивают разное время для выполнения операции сборки, и выходной поток продукции бригады также случайный.

Итак, поток поступающих деталей, состояние загрузки рабочих, время выполнения операции, выходной поток продукции случайны. При наличии случайности, которая является нормальным состоянием технологического процесса, закономерности этого процесса являются вероятностными.

Можно привести и другие примеры, которые могут рассматриваться как система массового обслуживания (СМО).

**Система массового обслуживания и ее элементы.** Введем для модели системы массового обслуживания терминологию, позволяющую абстрагироваться от конкретных процессов. В рассмотренном примере приводился технологический процесс сборки, при этом детали, приходили на место сборки в случайные моменты времени и образовывали в совокупности случайный поток. Абстрагируясь от конкретных обстоятельств, будем считать, что работа (обслуживание) проводится над *входящим потоком заявок* (требований).

Таким образом, входящим потоком заявок на обслуживание будем называть совокупность заявок, поступающих на обслуживание в случайные (или неслучайные) моменты времени. В технологических процессах мы имеем дело с конкретным рабочим местом сборки и рабочим (бригадой). Рассматривая абстрактную модель, будем считать, что обслуживание заявки производится в одном “*канале обслуживания*”, то есть система массового обслуживания *одноканальная*. В многоканальных системах обслуживание происходит в двух или более каналах. Подходя к каналам обслуживания в случайный момент времени очередная заявка может застать все каналы уже занятыми. Тогда дальнейший путь заявки зависит от внутренней организации системы массового обслуживания. В *системах с отказами*

(потерями) вновь поступившая на обслуживание заявка, застав все каналы уже занятыми, покидает систему. В простейшей системе ожиданием заявки, заявка в очереди и ожидает обслуживания неограниченное время. При этом обслуживание осуществляется в соответствии с правилом “первый пришел – первый обслужен”. В системах с неограниченным временем ожидания заявок в очереди с ожиданием может быть различная дисциплина очереди (дисциплина отбора заявок). Под дисциплиной очереди понимают порядок поступления заявок из очереди в канал обслуживания, когда они освобождаются.

Дисциплина очереди включает в себя: правила отбора требований на обслуживание, наличие или отсутствие приоритета, шкалу приоритета, правило применения приоритета. Существует система с ограниченным ожиданием, в которых участие заявки в очереди может ограничиться длиной очереди или временем ожидания, которые могут быть детерминированными или случайными величинами. В технологии радиоаппаратостроения чаще всего встречаются очереди без приоритета со следующей дисциплиной “первый пришел – первый обслужен”.

Заявки, прошедшие обслуживание, образуют *выходящий поток*, который может являться входящим для последующего канала обслуживания. Выходящий поток, как правило, тоже случайный.

Таким образом, входящий поток заявок, канал обслуживания, очередь и выходящий поток образуют теорию массового обслуживания.

Но схема системы массового обслуживания может быть более сложной. Если каналы расположены последовательно, то процесс обслуживания в одном канале является фазой всего процесса обслуживания. Такая система называется многофазной системой массового обслуживания. Еще более сложной является система, имеющая последовательно и параллельно (или наоборот) расположенные каналы, и система с сетевой структурой. Основной задачей изучения системы массового обслуживания является ее количественный анализ. Для этого устанавливаются зависимости между параметрами входящего потока, канала обслуживания, очереди и выходящего потока. Анализ позволяет определить в системе “слабые” звенья и их влияние на эффективность обслуживания, чтобы путем расширения “узких мест” добиться улучшения эффективности. Для решения такой задачи могут быть привлечены методы оптимизации.

Важной перспективой представляется и обратная задача – по заданным параметрам выходящего потока и канала обслуживания определить параметры входящего потока, который будет оптимально обслужен.

**Вероятностное описание функционирования одноканальной системы массового обслуживания.** Рассмотрев описание важнейших элементов системы массового обслуживания – входящего потока, времени об-

служивания и дисциплины очереди, перейдем к вероятностному описанию закономерностей функционирования системы.

Наиболее удобно для описания состояния системы взять вероятность того, что в системе находится  $k$  заявок  $P(k)$ . Пользуясь ею, можно найти другие характеристики системы: вероятность появления очереди, среднее время ожидания в очереди, среднее время обслуживания; функцию распределения времени ожидания и др.

Условимся вести рассмотрение при следующих ограничениях: входящий поток пуассоновский, время обслуживания экспоненциальное, система, состоящая из одного канала с ожиданием.

Рассмотрим вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta t$  в системе будет находиться  $k$  заявок  $P(k, t + \Delta t)$ . Но такая ситуация, когда через промежуток  $\Delta t$  в системе имеется  $k$  заявок, возможно в четырех случаях:

1. В момент  $t$  в системе было  $k$  заявок. За время  $\Delta t$  ни одна заявка не пришла, ни одна не ушла (обслуживание за  $\Delta t$  не было закончено). Если ни одна заявка не пришла, то это означает, что случайное время между заявками больше, чем интервал  $\Delta t$ . Вероятность такого случая для пуассоновского входящего потока

$$P(T_3 > \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \cong 1 - \lambda \Delta t.$$

Здесь  $e^{-\lambda \Delta t}$  мы разложили в степенной ряд и ограничились рассмотрением членов, содержащих  $\Delta t$  в первой степени.

Чтобы ни одна заявка не покинула канал обслуживания, нужно, чтобы  $t_{об} > \Delta t$ . В случае экспоненциального распределения времени обслуживания вероятность этого события равна

$$P(T_{об} > \Delta t) = e^{-\mu \Delta t} \cong 1 - \mu \Delta t.$$

Вероятность такого события, что в момент  $t$  в системе было  $k$  заявок, а за промежуток  $\Delta t$  ни одна заявка не пришла и не покинула систему, получается перемножением всех трех вероятностей по теореме умножения вероятностей

$$P(k, t)(1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t).$$

2. В момент  $t + \Delta t$  в системе будет  $k$  заявок при следующих условиях. В момент  $t$  в системе была  $(k - 1)$  заявка. За время  $\Delta t$  пришла одна заявка и не ушла ни одна. Вероятность такого события будет

$$P(k - 1, t)\lambda \Delta t(1 - \mu \Delta t).$$

Вероятность прихода хотя бы одной заявки получена как вероятность противоположного события такому событию, при котором не приходит ни одной заявки:

$$P(1, \Delta t) = 1 - P(0, \Delta t) = \lambda \Delta t.$$

3. В момент  $t$  в системе была  $(k + 1)$  заявка, и ни одна не пришла, одна ушла.

Вероятность этого события

$$P(k + 1, t)(1 - \lambda\Delta t)\mu\Delta t.$$

4. В момент  $t$  было  $k$  заявок, одна пришла и одна ушла. Вероятность такого события равна

$$P(k, t)\lambda\Delta t\mu\Delta t.$$

Другие ситуации при данных условиях считаем невозможными, так как вероятность других переходов системы за промежутки  $\Delta t$  являются величинами высшего порядка малости. Рассмотренные выше ситуации друг от друга не зависимы, поэтому вероятность того, что через промежуток времени  $\Delta t$  в системе будет  $k$  заявок, по теореме сложения вероятностей равна сумме вероятностей каждого отдельного события

$$P(k, t + \Delta t) = P(k, t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t] + P(k - 1, t)\lambda\Delta t + P(k + 1, t)\mu\Delta t.$$

Здесь члены, содержащие  $\Delta t^2$ , отброшены как величины высшего порядка малости.

Перенесем слагаемые  $P(k, t)$  влево, разделим обе части уравнения на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ; получим

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P(k, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(k, t + \Delta t) - P(k, t)}{\Delta t}; \\ \frac{dP(k, t)}{dt} &= \lambda P(k - 1, t) - (\lambda + \mu)P(k, t) + \mu P(k + 1, t). \end{aligned}$$

Аналогично мы можем найти вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta t$  в системе не будет ни одной заявки, т.е.  $P(0, t + \Delta t)$ . Возможны две ситуации: первая – в момент времени  $t$  в системе не было заявок и за промежуток  $\Delta t$  в систему не пришла ни одна заявка, вторая – в момент  $t$  в системе была заявка, за время  $\Delta t$  она ушла.

Первая вероятность есть

$$P(0, t)(1 - \lambda\Delta t),$$

вторая

$$P(1, t)\mu\Delta t$$

и

$$P(0, t + \Delta t) = P(0, t)(1 - \lambda\Delta t) + P(1, t)\mu\Delta t.$$

Получаем

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(0, t + \Delta t) - P(0, t)}{\Delta t} = -\lambda P(0, t) + \mu P(1, t).$$

Таким образом, мы пришли к системе линейных однородных уравнений, называемых уравнениями Эрланга:

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = -\lambda P(0, t) + \mu P(1, t);$$

$$\frac{dP(k, t)}{dt} = \lambda P(k-1, t) - (\lambda + \mu)P(k, t) + \mu P(k+1, t);$$

с неизвестными функциями

$$P(0, t), P(1, t), \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Параметрами в решении системы уравнений будут выступать плотность входящего потока заявок  $\lambda$  и величина  $\mu$ , обратная среднему времени обслуживания. Произвольную постоянную, входящую в решение, можно определить из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k, t) = 1.$$

Система уравнений Эрланга может быть решена, однако, практическое использование этого решения связано с вычислительными трудностями. Если ограничиваться рассмотрением систем массового обслуживания только в установившемся режиме работы (опуская переходные режимы), то решение оказывается более простым. Доказано, что в рассматриваемых системах может существовать предельный режим при  $t \rightarrow \infty$  (установившийся режим), при котором все вероятности состояния системы  $P(0, t), P(1, t), \dots$  стремятся к постоянным пределам  $p_0, p_1, p_2, \dots$  и перестают зависеть от  $t$  и их производные, естественно обращаются в нуль.

Короче, существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Система дифференциальных уравнений Эрланга переходит при этом в систему алгебраических уравнений с неизвестными  $p_0, p_1, p_2, \dots$ , которые определить гораздо проще. Итак, для установившегося режима

$$\mu p_1 - \lambda p_0 = 0;$$

$$\mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} - (\lambda + \mu) p_k = 0.$$

Из второго уравнения системы нетрудно образовать формулу рекуррентности, которую можно использовать для решения системы уравнений

$$p_{k+1} = \frac{1}{\mu} [(\lambda + \mu) p_k - \lambda p_{k-1}].$$

Все известные вероятности в стационарном режиме, как и в нестационарном, связаны условием

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Вернемся к решению системы. Из первого уравнения следует

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0.$$

Из формулы рекуррентности

$$p_2 = \frac{1}{\mu} [(\lambda + \mu) p_1 - \lambda p_0] = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0; \quad p_3 = \frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0.$$

Не трудно усмотреть закономерность. Для любого  $k$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0.$$

Так как сумма всех вероятностей равна единице, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1.$$

Получаем

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Предполагается, что  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ . Кроме того

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Окончательно получаем

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Последнее выражение есть закон распределения количества в одноканальной системе с ожиданием, и называется формулой Эрланга. В формулах часто встречается отношение  $\lambda/\mu$ , поэтому удобно его обозначить одной буквой  $\alpha = \lambda/\mu$ . Она выражает отношение среднего количества поступающих в систему заявок, приходящихся на одну обслуженную заявку (или к среднему времени обслуживания одной заявки), и называется при-

веденной плотностью потока заявок (также интенсивностью нагрузки системы). Пользуясь полученной формулой, рассмотрим основные закономерности функционирования одноканальной системы. Результаты расчета для разных  $\alpha$  даны в табл. 1 и на рис. 1.

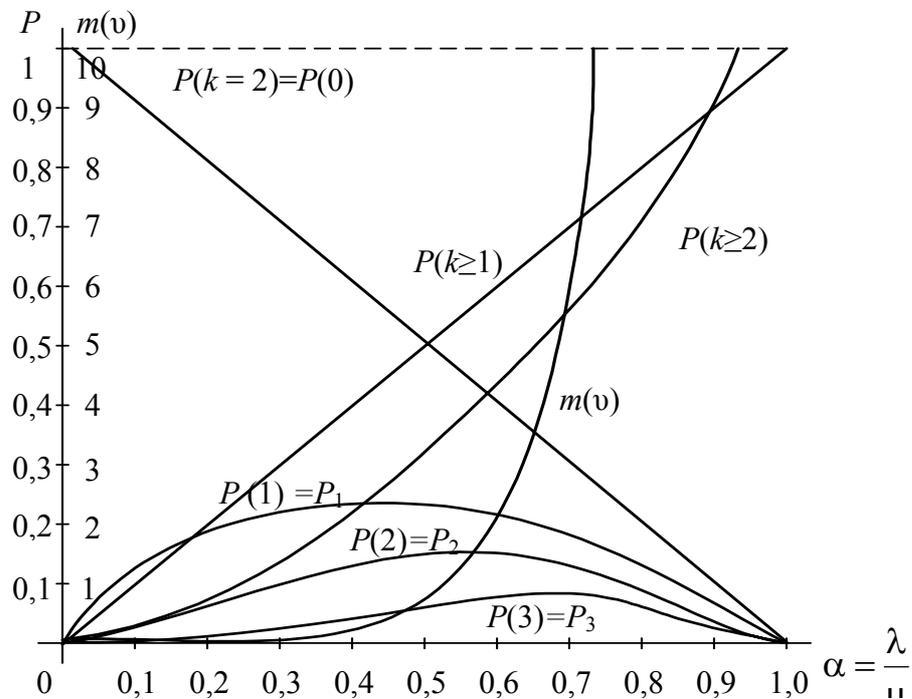


Рис. 1.

Таблица 1

$\alpha$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p(k \geq 1)$	$p(k \geq 2)$	$m(v)$
0	1	0	0	0	0	0	0
0,1	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,1	0,01	0,01
0,2	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,2	0,04	0,05
0,3	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,3	0,09	0,13
0,4	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,4	0,16	0,27
0,6	0,4	0,24	0,144	0,0864	0,5	0,36	0,9
0,7	0,3	0,26	0,147	0,1029	0,7	0,49	1,63
0,8	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,8	0,64	3,2
0,9	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,9	0,81	8,1
1	0	0	0	0	1	1	$\infty$

Очередь не образуется при поступлении заявки, когда в системе нет ни одной заявки (но тогда канал обслуживания находится на простое), и она отсутствует, когда в системе находится одна заявка и вторая не поступила (один канал загружен). Вероятность образования очереди

$$P(k \geq 2) = 1 - (p_0 + p_1).$$

Можно построить кривую среднего количества заявок, находящихся в очереди  $\nu$ . Чтобы в очереди была одна заявка, необходимо в системе иметь две заявки (одна в очереди, одна в канале обслуживания). Вероятность такого состояния системы согласно формуле Эрланга

$$p_2 = \alpha^2(1 - \alpha) = P(k = 2).$$

Вероятность того, чтобы в очереди находилось две заявки, равна

$$p_3 = \alpha^3(1 - \alpha) = P(k = 3).$$

По определению

$$m(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu P(k=1+\nu) = 1p_2 + 2p_3 + \dots = \alpha^2(1-\alpha) + 2\alpha^3(1-\alpha) + \dots = \alpha^2(1+\alpha+\alpha^2+\dots) = \frac{1}{1-\alpha},$$

так как  $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha}$ .

Зависимость  $m(\nu)$  приведена на рис. 1. Если приведенная плотность потока заявок  $\alpha = 0,5$ , то вероятность загрузки системы  $P(k \geq 1) = 0,5$  и вероятность простоя системы  $p_0 = 0,5$ , т.е. довольно большая. При этом вероятность образования очереди равна  $0,25$  и среднее количество заявок в очереди  $0,5$  (см. рис. 1). Можно, изменяя  $\lambda/\mu$ , добиться, чтобы очереди практически не было, но тогда система будет работать почти только на простое (см. кривую  $p_0$  на рис. 1). И наоборот, если довести  $\alpha$ , например до  $0,8$ , то  $p_0$  уменьшится до  $0,2$ , т.е. вероятность простоя мала, но в очереди будет в среднем стоять  $3,2$  заявки.

Из изложенного выше можно сделать очень важный вывод. Если нельзя исключить элемент случайности в потоке отказов (в поступлении деталей на сборку) и в процессе обслуживания (в процессе сборки), то неизбежен простой и неизбежна очередь. Можно путем увеличения производственных мощностей практически исключить очереди, если обеспечить малое  $\alpha = \lambda/\mu$ . Но это не всегда экономически выгодно, так как связано с большими простоями. При  $\alpha > 1$  длина очереди непрерывно увеличивается и становится бесконечно большой, следовательно, система так и не приходит к стационарному режиму. Об этом свидетельствует поведение средней длины очереди  $m(\nu)$  в районе абсциссы  $\alpha \cong 1$ . Полученные выше зависимости дают представление о том, с какой вероятностью в системе может возникать то или иное состояние. Причем оказывается, что вероятность образования очереди при реальных  $\alpha$  - значительна. В этой связи большой интерес представляет определение того, сколько времени находится заявка в очереди, ожидая обслуживания. Для этого найдем закон распределения времени ожидания и среднее время ожидания заявки в системе.

Опуская выводы, можно записать закон распределения

$$P(T_{\text{ож}} > t_{\text{ож}}) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t_{\text{ож}}}.$$

По известной формуле теории вероятностей определяем среднее время ожидания в очереди

$$m(t_{\text{ож}}) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Среднее время нахождения в системе тех заявок, которые сразу не попадают на обслуживание, равно

$$m(t_{\text{ож}} + t_{\text{об}}) = m(t_{\text{ож}}) + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

где  $1/\mu$  - среднее время обслуживания заявки в канале.

Таким образом, имея в своем распоряжении два параметра  $\lambda$  и  $\mu$  и пользуясь приведенными выше аналитическими выражениями, можно получить все вероятностные закономерности, описывающие систему в целом. Это очень много дает для практики. Действительно, для определения  $\lambda$  и  $\mu$  с достаточной точностью нужно иметь по 50-100 наблюдений; а для определения закона распределения методами математической статистики без использования аналитических результатов теории массового обслуживания необходимо выполнить 1000-10000 наблюдений.

## Рекомендуемая литература

1. Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1991. – 380 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
3. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976 – 278 с.
4. Голинкевич Т.А. Прикладная теория надежности: Учебник для ВУЗов. – М.: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1985 – 168 с.
5. Фомин А.В. и др. Допуски в РЭА. – М.: Сов. радио, 1973 – 128 с.
6. Оптимизация радиоэлектронной аппаратуры / А.Я. Маслов, А.А. Чернышов, В.В. Ведерников и др.; под ред. А.Я. Маслова, А.А. Чернышова. – М.: Радио и связь, 1982 – 200 с.
7. Талицкий Е.Н. Анализ точности электронных средств / Метод. указания к лаб. работам. – ВлГУ, 2002, 72 с.
8. Талицкий Е.Н. Вероятностно-статистические методы при проектировании электронных средств / Метод. указания к лаб. работам. – ВлГУ, 2003, 48с.