Владимирский государственный университет

Л. В. ГРУНСКАЯ Д. А. МАЛЫШЕВА

МЕХАНИКА

Учебное пособие по физике для иностранных студентов

Владимир 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Л. В. ГРУНСКАЯ Д. А. МАЛЫШЕВА

МЕХАНИКА

Учебное пособие по физике
для иностранных студентов

Электронное издание

Владимир 2024

ISBN 978-5-9984-1887-7

УДК 536.7 + 539.1
ББК 22.36 + 22.317

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
О. Я. Бутковский

Кандидат технических наук, доцент
доцент Высшей школы промышленно-гражданского
и дорожного строительства
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
О. В. Маковецкая-Абрамова

Издаётся по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Грунская, Л. В. Механика [Электронный ресурс] : учеб. пособие по физике для иностр. студентов / Л. В. Грунская, Д. А. Малышева ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 147 с. – ISBN 978-5-9984-1887-7. – Электрон. дан. (4,06 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретические и практические материалы, посвящённые раскрытию физического смысла основных законов и понятий механики (кинематики и динамики), а также вопросы для самоконтроля и задания для самостоятельного выполнения.

Предназначено для иностранных студентов вузов инженерно-технических специальностей всех форм обучения, изучающих дисциплину «Физика».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 91. Табл. 2. Библиогр.: 31 назв.

ISBN 978-5-9984-1887-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии изложена наиболее важная лекционная информация по механике (кинематике и динамике, элементам специальной теории относительности, элементам механики жидкости и газа); приведены блок задач для решения на практических занятиях и примеры решения физических задач; основные вопросы, входящие в экзаменационные билеты; даны практические задания, вопросы, а также основные формулы механики для рейтинг-контроля; представлена программа по физике по разделу «Механика».

Форма учебного пособия имеет ряд специфических особенностей, необходимых для преподавания физики иностранным студентам, параллельно изучающим русский язык: выделение цветным шрифтом наиболее важных формул, понятий, формулировок законов.

Доступ к полному курсу лекций по разделу «Механика» можно получить по ссылке: https://dspace.www1.vlsu.ru/bitstream/123456789/8808/1/02107.pdf [1].

Чтение курса лекций по физике сопровождается физическими лекционными демонстрациями по механике, разработанными на кафедре общей и прикладной физики ВлГУ. Лекции представлены в издании А. Ф. Галкина, Л. В. Грунской, В. В. Дорожкова, доступ по ссылке: https://dspace.www1.vlsu.ru/handle/123456789/8307 [2].

При изучении курса общей физики по разделу «Механика» в получении наглядного представления о физических законах также может помочь видеокурс В. И. Гервидса: https://www.youtube.com/watch?v=9zIynk0LszA [3].

Развитие техники базируется на достижениях физики. Поэтому чёткое понимание физических законов необходимо для плодотворной деятельности современного инженера. Физика – наука опытная. Современные физические теории (квантовая физика) выглядят как сложные абстрактные математические конструкции. Однако все теории ориентируются на опыт. Далеко не всякое измерение – физический опыт.

На основе физических экспериментов формулируются физические законы. **Физический закон** – обобщение большой совокупности физических опытных факторов. Физические законы устанавливаются путём обобщения опытных данных, и их правильность проверяется из соответствия выводов из них с опытом. Физические законы выражают объективную внутреннюю связь между физическими явлениями и реально существующие зависимости между физическими величинами.

Физические законы, имеющие обширные области применения, называют **фундаментальными** (законы Ньютона, закон Кулона, закон всемирного тяготения). Их немного, но, пользуясь ими, можно объяснить и описать почти все физические явления.

Однако с помощью фундаментальных законов нельзя получить, например, закон Ома. **Эмпирические законы** (экспериментально полученные) – чисто математические закономерности, очень хорошо отражающие реальные физические процессы.

Физические величины. Физические величины подобно физическим законам различаются по степени фундаментальности.

Фундаментальные константы:

Скорость света в пустоте	$c = 299\ 792458$ м · с$^{-1}$
Планка постоянная	$h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн · м$^{-1}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}$ Ф · м$^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}$ м^3 · кг$^{-1}$ · с$^{-2}$
Заряд электрона (элементарный заряд)	$e = 1{,}60217733 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9{,}1093897 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}16726231 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса нейтрона	$m_n = 1{,}6749286 \cdot 10^{-27}$ кг

Общие физические понятия. Понятие бесконечно большого и малого в физике не такое, как в математике. В физике это понятие относительно. Например, длина волны красного света (6000 A^0) по сравнению с размером человека ничтожно мала, а по сравнению с размерами атома так велика, что считают, что амплитуда световой волны во всех точках атома одинакова.

Физические величины разделяют на макроскопические и микроскопические (атомные расстояния) (табл. 1). Любое макроскопическое явление объясняется совокупностью микроскопических явлений. Все окружающие нас тела состоят из элементов частиц трёх сортов: протонов, нейтронов и электронов.

Таблица 1

Шкала масштабов величин, исследуемых современной наукой

Масштаб, м	Область
Макромир	
10^{26}	Размер видимой части Вселенной
10^{24}	Расстояние между галактиками
10^{18}	Межзвёздное расстояние
10^{12}	Размер Солнечной системы
10^{6}	Размер Земли
10^{3}	Высота гор на Земле
1	Размер человека
10^{-6}	Предел микроскопа, размер вируса
Микромир	
10^{-9} – 10^{-12}	Размер атома
10^{-15}	Атомные ядра
10^{-18}	Структура элементарных частиц

В списке литературы [1 – 30] представлены курсы по общей физике и учебно-методические работы по физическим лекционным демонстрациям.

Единицы измерения. Изначально за единицу длины было принято брать 1/40 000 000 долю длины меридиана Земли. В настоящее время за *единицу длины* принято расстояние между рисками на иридиевой пластине, хранящейся в Международном бюро мер и весов; эта единица называется *международным метром* (м). За *единицу массы – килограмм* (кг) – принята масса тела из иридиевой пластины, хранящейся в Международном бюро мер и весов. Масса килограмма близка к массе 1000 см^3 чистой воды при 4 °С. За *единицу времени – секунду* (с) – принимают время, равное 1/86 400 доле средних солнечных суток.

Материалы пособия соответствуют программе по физике для высших учебных заведений. В первой части издания освещены вопросы программы по механике; во второй части – по молекулярной физике и термодинамике; в третьей части – по электричеству и магнетизму; в четвёртой части – по колебаниям, волнам и оптике.

ПРОГРАММА ПО ФИЗИКЕ

Раздел. Механика

1. **Введение.** Предмет физики. Методы физического исследования: опыт, гипотеза, эксперимент, теория. Диалектический материализм и физика. Важнейшие этапы истории физики. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики. Физика как культура моделирования. Компьютеры в современной физике. Роль физики в становлении инженера. Связь физики с другими науками. Успехи современной физики.

2. **Некоторые сведения из математики.** Роль математики в изучении физики. Функции и их производные. Интегрирование. О смысле производной и интеграла в приложении к физическим задачам. Элементы векторной алгебры: определение вектора, сложение векторов, умножение векторов, дифференцирование векторных величин. Дифференциальные уравнения. Элементарные сведения из теории вероятности.

3. **Кинематика поступательного движения.** Кинематика как раздел механики. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Материальная точка (частица). Система отсчёта. Инерциальные системы отсчёта. Радиус-вектор. Принцип относительности Галилея. Траектория. Радиус кривизны траектории. Линейная скорость и линейное ускорение. Тангенциальное и нормальное ускорения. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами. Поступательное движение твёрдого тела.

4. **Динамика поступательного движения.** Динамика как раздел механики. I закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчёта. II закон Ньютона и понятие силы, массы и импульса. Уравнение движения. III закон Ньютона и предел его применимости. Неинерциальные системы отсчёта. Абсолютные и относительные скорость и ускорение. Силы инерции. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.

5. **Вращательное движение твёрдого тела.** Понятие абсолютно твёрдого тела. Момент силы. Момент импульса. Момент инерции. Теорема Штейнера. Основной закон динамики вращательного движения. Уравнение вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси (уравнение моментов). Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Гироскопический эффект. Свободные оси.

6. **Законы сохранения.** Значение и содержание законов сохранения в механике. Закон сохранения импульса. Однородность пространства. Реактивное движение. Закон сохранения момента импульса. Изотропия пространства. Работа, энергия, мощность. Связь между потенциальной энергией и силой. Понятие силового поля. Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчёта. Консервативные и неконсервативные силы. Закон сохранения энергии в механике. Однородность времени. Консервативная и диссипативная системы. Внутренняя потенциальная энергия.

7. **Элементы специальной теории относительности.** Принцип относительности Эйнштейна. Роль скорости света. Постулат постоянства скорости света. Преобразование Лоренца. Пространство и время в специальной теории относительности. Инварианты преобразования. Лоренцово сокращение длины и замедление времени. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии. Столкновение и распад частиц. Дефект масс. Энергия связи. Соотношение между полной энергией и импульсом частицы. Понятие об общей теории относительности. Границы применимости классической (ньютоновской) механики. Философское толкование пространственно-временных отношений.

8. **Элементы механики жидкостей и газов.** Общие свойства жидкостей и газов. Задачи механики жидкостей и газов. Идеальная и вязкая жидкости. Уравнение Эйлера. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли. Системы уравнений газодинамики. Формула Пуазеля. Формула Стокса. Ламинарный и турбулентный режимы течения. Циркуляция скорости. Потенциальное и вихревое движения. Движение тел в жидкостях и газах. Теорема Жуковского.

ОСНОВНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЛЕКЦИОННОГО КУРСА

Тема 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

План

1. Система отсчёта.
2. Векторы и действия с векторами.
3. Скорость изменения вектора.
4. Производная единичного вектора.

1. Система отсчёта

Правильное понимание различных физических явлений тесно связано с корректным выбором системы координат и системы отсчёта.

Материальная точка – тело, размерами которого пренебрегают.

Твёрдое тело – абсолютно твёрдое тело, деформациями которого пренебрегают.

Механическое движение – изменение положения тела в пространстве с течением времени. Движение связано со скоростью. Всякое движение относительно.

Система отсчёта – совокупность неподвижных тел, относительно которых рассматриваются движение и часы в совокупности.

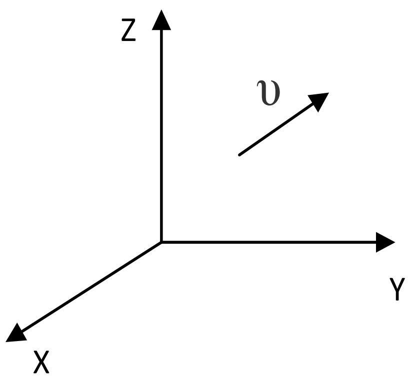


Рис. 1.1.1

Декартова координатная система содержит (рис. 1.1.1):

(См. Модель декартовой системы координат.)

1) начало координат $\{x = 0; y = 0; z = 0\}; t = 0;$

2) синхронизированные часы.

2. Векторы и действия с векторами

Вектор – количественная характеристика, имеющая не только числовое значение, но и направление.

Числовое значение вектора – модуль вектора

$|\overrightarrow{a}| = a.$

Векторы, направленные вдоль параллельных прямых, – **коллинеарные.**

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях, – **компланарные.**

Сложение векторов производится по правилу параллелограмма (рис. 1.1.2, *а*, *б*).

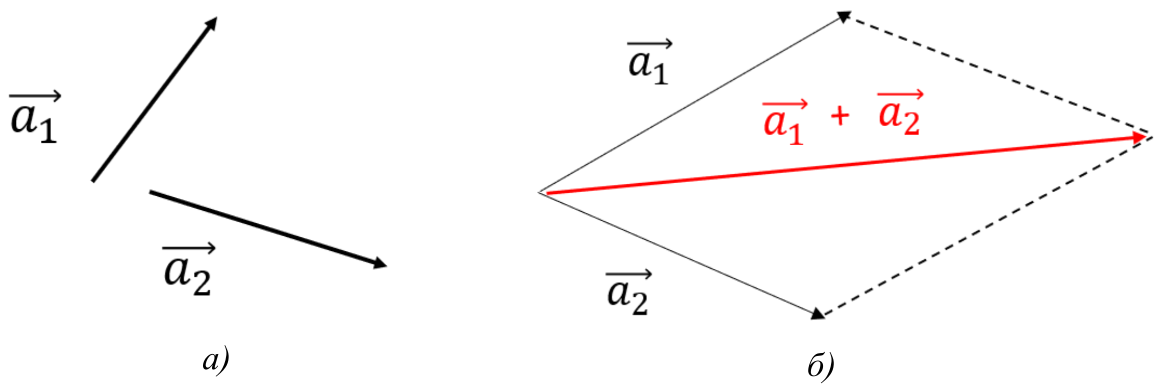


Рис. 1.1.2

При **сложении многих векторов** начало следующего вектора совмещается с концом предыдущего и т. д. (рис. 1.1.3).

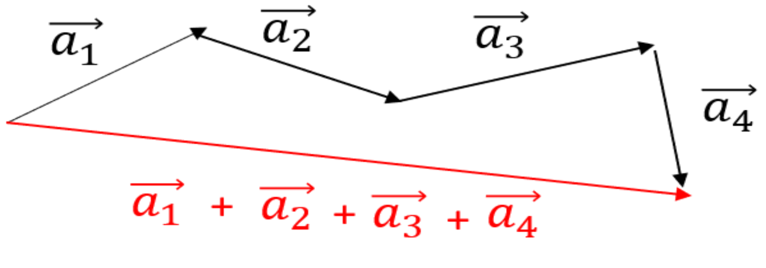
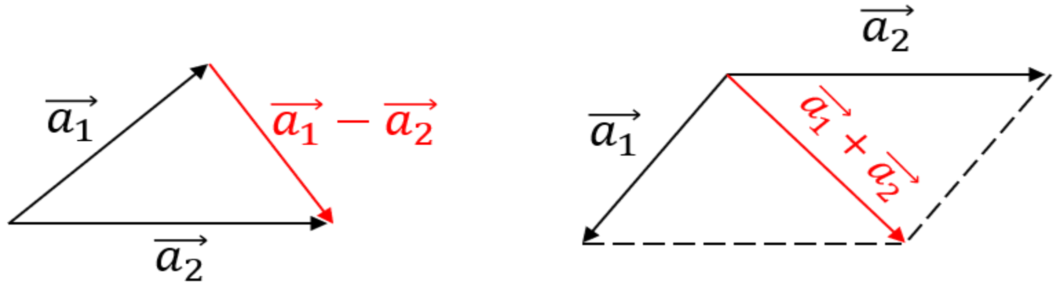


Рис. 1.1.3

Разность векторов (рис. 1.1.4, *а*, *б*)

$\overrightarrow{\Delta a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}.$



а) *б)*

Рис. 1.1.4

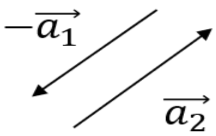


Рис. 1.1.5

Умножение вектора на скаляр

$\vec{b} = \alpha\vec{a}.$

Умножение вектора на –1 изменяет направление на обратное (рис. 1.1.5).

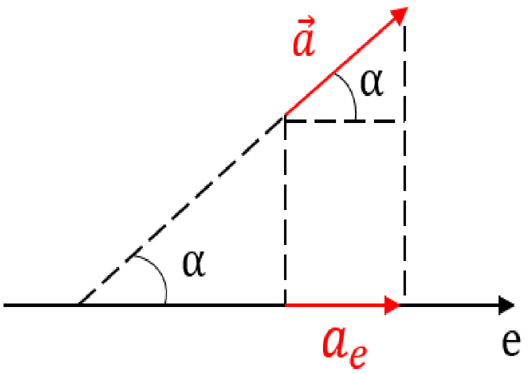


Рис. 1.1.6

Приращение вектора

$\Delta\vec{a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}.$

Единичный вектор

$\vec{a} = |\overrightarrow{a_1}|\overrightarrow{e_a} = a\overrightarrow{e_a},$

$|\overrightarrow{e_a}| = 1,$

где $\overrightarrow{e_a}$ – единичный вектор с модулем, равным единице, направленный так же, как и вектор $\vec{a}$.

Проекция вектора на ось координат (рис. 1.1.6)

$a_e = |\vec{a}|\cos\alpha = a\cos\alpha.$

Проекция вектора на о́си координат (рис. 1.1.7)

Орты координатных осей $\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\}$ – базисные координаты системы – это единичные векторы вдоль трёх осей координат.

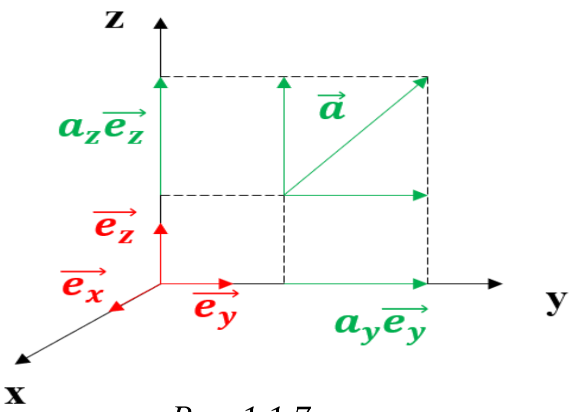


Рис. 1.1.7

Запись вектора через проекции на оси координат

$\vec{a} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z}$,

$\{a_x\overrightarrow{e_x}; a_y\overrightarrow{e_y}; a_z\overrightarrow{e_z}\}$ – **компоненты вектора**,

$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.

Радиус-вектором $\vec{r}$ некоторой точки называют вектор, проведённый из начала координат в эту точку (рис. 1.1.8)

$r_x = x$,
$r_y = y$,
$r_z = z$,
$\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$,
$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

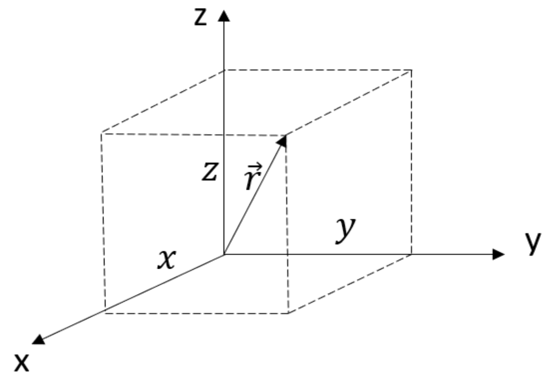


Рис. 1.1.8

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними

$\vec{a}\vec{b} = ab\cos\alpha$.

Под квадратом вектора всегда подразумевается скалярное произведение вектора на самого себя

$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = aa\cos 0 = a^2$.

Квадрат вектора равен квадрату его модуля. В частности, квадрат любого орта равен единице

$\overrightarrow{e_x}^2 = \overrightarrow{e_y}^2 = \overrightarrow{e_z}^2 = 1$.

Скалярное произведение **коммутативно**, т. е. не зависит от порядка сомножителей

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

Скалярное произведение вычисляется через проекции перемножаемых векторов

$\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$,

$\vec{a}\vec{b} = (a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z})(b_x\overrightarrow{e_x} + b_y\overrightarrow{e_y} + b_z\overrightarrow{e_z})$.

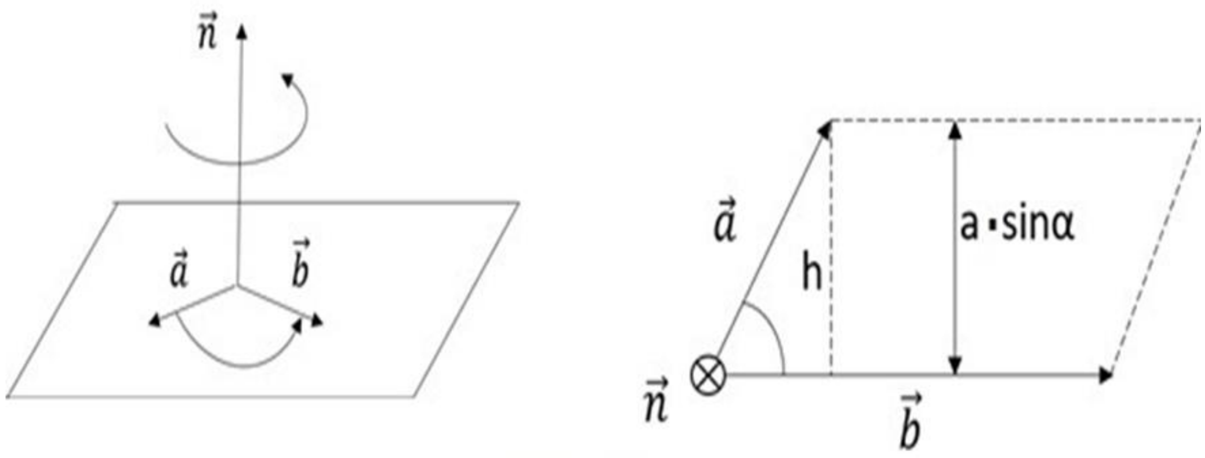
Векторное произведение

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$

$$\vec{c} = ab\sin\alpha\vec{n} = [\vec{a}\vec{b}] = \vec{a}\,\vec{b},$$

где a, b – модули перемноженных векторов; α – угол между векторами; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

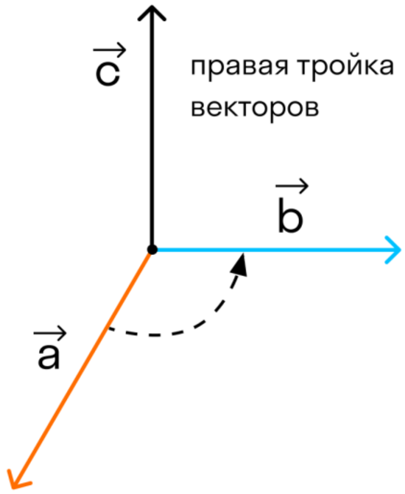
Направление вектора $\vec{n}$ (рис. 1.1.9, *а*, *б*) выбирают так, чтобы последовательность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ образовывала правовинтовую систему. Это значит, что если смотреть по направлению вектора $\vec{n}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет осуществляться по часовой стрелке.

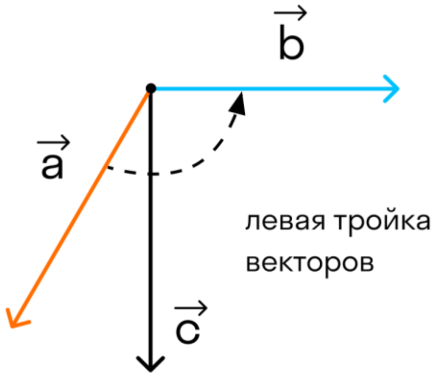


а) *б)*

Рис. 1.1.9

На рис. 1.1.10, *а* представлена правовинтовая система: при повороте от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по правилу правого винта третий вектор $\vec{c}$ будет направлен перпендикулярно этим векторам по направлению движения винта. На рис. 1.1.10, *б* дана левовинтовая система трёх векторов.





а) *б)*

Рис. 1.1.10

В правовинтовой системе одно направление, в левовинтовой системе противоположное.

Векторное произведение не обладает свойством коммутативности: перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное

$[\vec{b}\vec{a}] = -[\vec{a}\vec{b}]$.

Векторное произведение в виде матрицы

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приращение вектора

Вектор изменяется по закону $\vec{a}(t)$. Через проекции вектора на координатные оси

$$\vec{a}(t) = \vec{e_x}a_x(t) + \vec{e_y}a_y(t) + \vec{e_z}a_z(t).$$

За промежуток времени Δt вектор получит приращение $\Delta\vec{a}$, а проекции – Δa_x, Δa_y, Δa_z, поэтому

$$\Delta\vec{a} = \vec{e_x}\Delta a_x + \vec{e_y}\Delta a_y + \vec{e_z}\Delta a_z.$$

3. Скорость изменения вектора

Среднюю скорость изменения вектора $\vec{a}$ со временем характеризуют отношением $\Delta\vec{a}$ к Δt

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \overrightarrow{e_x}\frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \overrightarrow{e_y}\frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \overrightarrow{e_z}\frac{\Delta a_z}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость изменения вектора

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \overrightarrow{e_x}\frac{da_x}{dt} + \overrightarrow{e_y}\frac{da_y}{dt} + \overrightarrow{e_z}\frac{da_z}{dt}.$$

Проекции вектора $\frac{\overrightarrow{\Delta a}}{dt}$ на координатные оси равны производным по времени проекций вектора $\vec{a}$.

$$\dot{\vec{a}} = \overrightarrow{e_x}\dot{a}_x + \overrightarrow{e_y}\dot{a}_y + \overrightarrow{e_z}\dot{a}_z.$$

4. Производная единичного вектора

Рассмотрим орт $\overrightarrow{e_a}$ вектора $\vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{e_a}$ может измениться только по направлению. Пусть за малый промежуток времени Δt векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{e_a}$ поворачиваются на угол $\Delta\varphi$ (рис. 1.1.11).

Производная $\overrightarrow{e_a}$ по t по определению равна

$$\frac{d\overrightarrow{e_a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{e_a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\overrightarrow{e_\perp} = \omega\overrightarrow{e_\perp} = \overrightarrow{\frac{d\varphi}{dt}e_\perp},$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота единичного вектора; $\overrightarrow{e_\perp}$ – единичный вектор, перпендикулярный $\overrightarrow{e_a}$; ω – угловая скорость вращения $\vec{a}$.

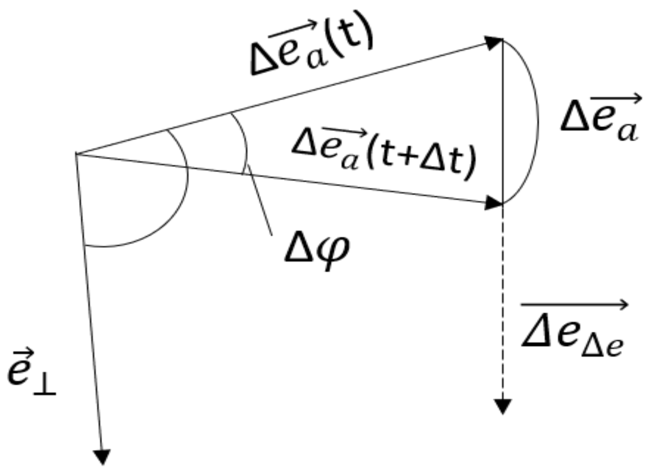


Рис. 1.1.11

Вопросы для самоконтроля

1. Что входит в понятие системы отсчёта?
2. Запишите формулу скалярного произведения векторов.
3. Запишите формулу векторного произведения векторов.
4. Запишите формулу векторного произведения с помощью матрицы.
5. Поясните с помощью рисунков правило правого винта и правило левого винта.
6. Какой вектор называют радиус-вектором?
7. Запишите формулу средней скорости изменения вектора.
8. Запишите формулу мгновенной скорости изменения вектора.
9. Что такое единичный вектор и какова его роль в декартовой системе координат?
10. Распишите вектор через его проекции на три оси координат.

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Элементы векторного анализа» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 2
КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

План

1. Траектория, путь, перемещение.
2. Вектор перемещения.
3. Скорость в физике, средняя скорость, мгновенная скорость.
4. Ускорение в физике.

1. Траектория, путь, перемещение

Задача кинематики – описать характер движения материальной точки, не рассматривая причины движения (силы исключены).

Перемещение – вектор, соединяющий начальную точку пути с конечной.

Траектория – линия, описываемая материальной точкой при своём движении**.**

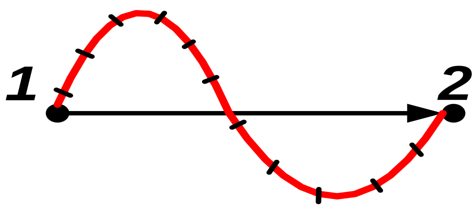


Рис. 1.2.1

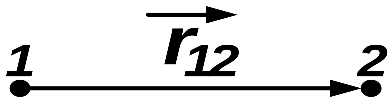


Рис. 1.2.2

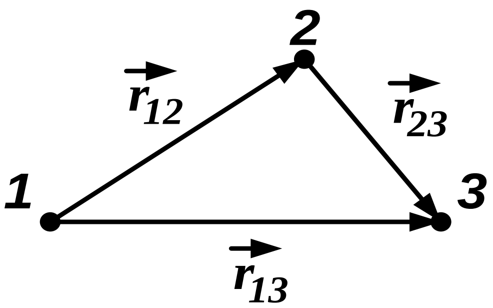


Рис. 1.2.3

Форма траектории может быть различной: прямой – движение прямолинейное; по окружности – движение криволинейное.

Расстояние, отсчитываемое от точки 1 до точки 2 вдоль траектории – путь материальной точки (S) (рис. 1.2.1).

Прямолинейный отрезок, соединяющий точку 1 и точку 2 – перемещение материальной точки ($\overrightarrow{r_{12}}$) (рис. 1.2.2).

2. Вектор перемещения

Перемещение – вектор.

Если частица совершает два перемещения, то результат этого представлен на рис. 1.2.3. Приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ происходит за промежуток времени Δt.

3. Скорость в физике, средняя скорость, мгновенная скорость

Пусть точка перемещается по некоторой траектории. Положение точки может быть задано с помощью радиус-вектора $\vec{r}(t)$. Формула движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При движении материальной точки радиус-вектор непрерывно меняется (рис. 1.2.4). (См. Поступательное и вращательное движение.)

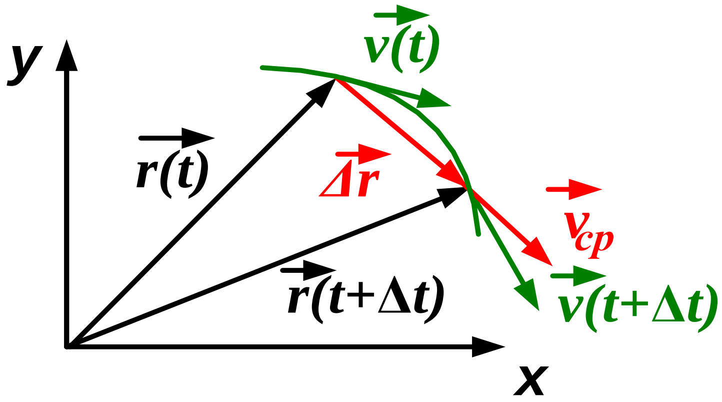


Рис. 1.2.4

Движение материальной точки можно описать и через её путь по траектории

$S = S(t)$.

Вектор перемещения

(См. Суперпозиция перемещений.)

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

В физике под **скоростью** понимают векторную величину, характеризующую быстроту перемещения материальной точки и направление перемещения.

Вектор средней скорости $\overrightarrow{v_{\text{ср}}}$ при перемещении между двумя точками определяют как вектор, совпадающий по направлению с перемещением и равный абсолютному значению вектора перемещения, поделённому на промежуток времени,

$$\overrightarrow{v_{\text{ср}}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор скорости через составляющие по осям координат

$$\vec{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора $\vec{v}$ на координатные оси.

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Проекция вектора $\vec{v}$ на координатную ось равна производной по времени соответствующей координаты

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x, v_y = \frac{dy}{dt} = y, v = \frac{dz}{dt} = z,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вектор скорости можно записать через единичный вектор

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_v},$$

где $\overrightarrow{e_v}$ или $\vec{\tau}$ – единичный вектор вдоль вектора $\overrightarrow{v}$,
тогда

$$\overrightarrow{v} = v\vec{\tau}.$$

Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории в конкретной точке.

Модуль скорости

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Модуль скорости – производная пути по времени.

Среднее значение модуля скорости за время от t_1 до t_2 равно

$$< v > = \frac{S}{t_2 - t_1},$$

$$< v > = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$

4. Ускорение в физике

Ускорение – это скорость изменения скорости материальной точки.

Пусть в моменты времени t и $t + \Delta t$ скорости соответствуют значения $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t+\Delta t)$. Изменение скорости $\Delta\vec{v}(t) = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$. На рис. 1.2.5 дан график изменения скорости.

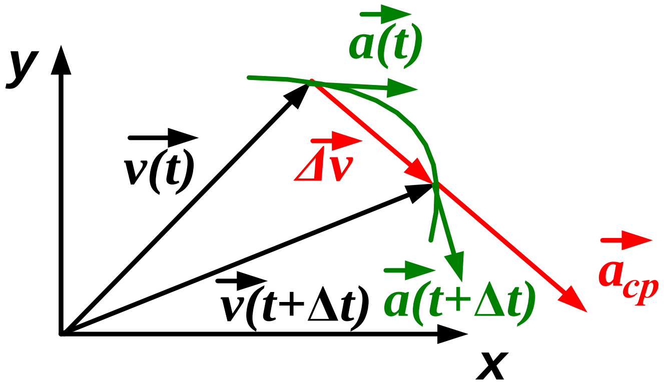


Рис.1.2.5

Среднее ускорение за время Δt

$$\overrightarrow{a_{\text{ср}}}(t,t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенное значение ускорения

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}.$$

Компоненты мгновенного ускорения

$$\vec{a} = \overrightarrow{e_x}\frac{d^2x}{dt^2} + \overrightarrow{e_y}\frac{d^2y}{dt^2} + \overrightarrow{e_z}\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\tau}\, v)}{dt},$$

где вектор $\vec{\tau}$ касателен к траектории движения и направлен в сторону $d\vec{v}$.

Таким образом, ускорение можно представить в виде двух компонент

$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}$, $\vec{a} = v\dot{\vec{\tau}} + \dot{v}\vec{\tau}$.

Следовательно, вектор $\vec{a}$ – сумма двух составляющих.

Одна из них коллинеарна $\vec{\tau}$ и направлена по касательной к траектории – это тангенциальная составляющая $\overrightarrow{a_\tau}$.

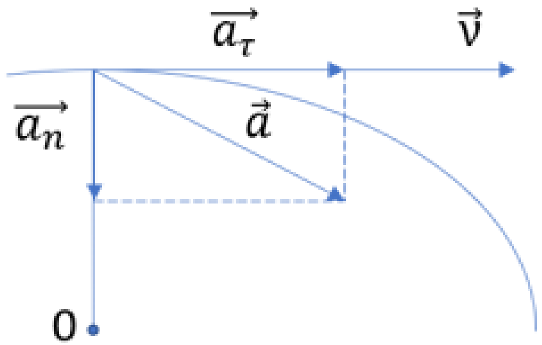


Рис. 1.2.6

Тангенциальная составляющая ускорения изменяет ускорение по величине (рис. 1.2.6)

$$\overrightarrow{a_\tau} = \dot{v}\vec{\tau}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Итак, **вектор полного ускорения**

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Изменение абсолютного значения скорости обусловлено только тангенциальной составляющей ускорения. Нормальная компонента ускорения не изменяет абсолютного значения скорости, а изменяет лишь её направление.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение трёх физических понятий: траектория, путь, перемещение.
2. Запишите формулы средней и мгновенной скоростей.
3. Запишите формулу мгновенной скорости через её составляющие по трём осям координат.
4. Запишите формулы среднего и мгновенного ускорения.
5. Запишите формулу мгновенного ускорения через его составляющие по трём осям координат.
6. Как определить направление вектора средней скорости?
7. Как определить направление вектора мгновенной скорости?
8. Запишите формулу полного ускорения.

9. Как направлена тангенциальная составляющая вектора полного ускорения?

10. Как направлена нормальная составляющая вектора полного ускорения?

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Кинематика поступательного движения» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 3
КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

План

1. Тангенциальное и нормальное ускорения.
2. Радиус кривизны траектории.
3. Угловая скорость. Вектор угла поворота. Угловое ускорение.
4. Связь линейной и угловой скоростей.

1. Тангенциальное и нормальное ускорения

Вектор мгновенного ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\tau}\, v)}{dt},$$

где вектор $\vec{\tau}$ касателен к траектории движения и направлен в сторону $d\vec{v}$.

Ускорение можно представить в виде двух компонент

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}, \vec{a} = v\dot{\vec{\tau}} + \dot{v}\vec{\tau}.$$

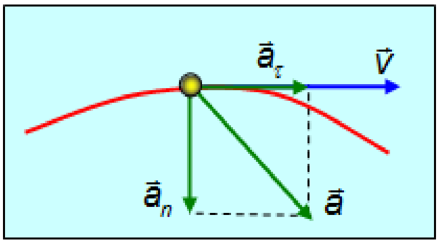


Рис. 1.3.1

Тангенциальная составляющая ускорения направлена так же, как мгновенная скорость, – по касательной к траектории и изменяет ускорение по величине (рис. 1.3.1).

$$\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt}.$$

Нормальная составляющая ускорения перпендикулярна тангенциальной составляющей и меняет направление скорости

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Вектор полного ускорения

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Изменение абсолютного значения скорости обусловлено только тангенциальной составляющей ускорения. Нормальная компонента ускорения не изменяет абсолютного значения скорости, а изменяет лишь её направление. (См. Поступательное и вращательное движение.)

Модуль полного вектора ускорения

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Нормальная и тангенциальная составляющие вектора ускорения

$$\overrightarrow{a_n} = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}, \overrightarrow{a_\tau} = \tau\frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

2. Радиус кривизны траектории

Радиус кривизны траектории – радиус окружности, которая сливается в данном месте траектории с кривой на бесконечно малом её участке (рис. 1.3.2). (См. Опыт с точилом.)

Радиус кривизны траектории равен

$$R = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}.$$

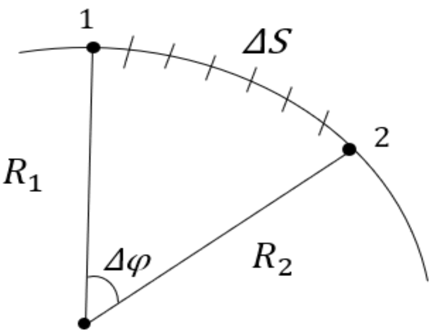


Рис. 1.3.2

3. Угловая скорость. Вектор угла поворота. Угловое ускорение

Любой поворот полностью определяется указанием оси вращения и угла поворота $\Delta\varphi$ относительно этой оси.

Если поворот осуществляется на малый угол $\Delta\varphi \ll 2\pi$, то можно ввести понятие вектора угла поворота.

Вектор угла поворота $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ направлен вдоль оси вращения, т. е. перпендикулярно плоскости, в которой происходит вращение (рис. 1.3.3).

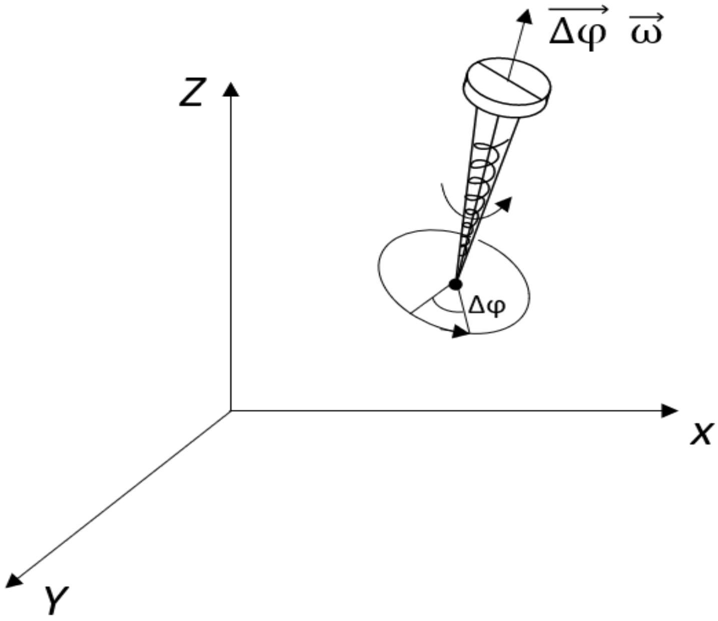


Рис. 1.3.3

Ориентацию этого вектора определяют с помощью правила правого винта (см. рис. 1.3.3).

Для того чтобы величина была вектором, она должна не только иметь направление и абсолютное значение, но и удовлетворять правилу сложения векторов (правилу параллелограмма).

Для малых углов при векторном сложении двух углов поворота правило параллелограмма не выполняется ($\Delta\varphi \ll 2\pi$, $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t)$). Такие векторы называют псевдовекторами.

Угловой скоростью называют вектор $\vec{\omega}$, который направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта (см. рис. 1.3.3).

Модуль вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ равен производной угла поворота по времени

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость в отличие от угла поворота является точным (полным) вектором.

Связь угловой скорости с периодом обращения (T) и частотой вращения (ν)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \nu = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi\nu, 1 \text{ оборот} = 2\pi,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ может изменяться как за счёт изменения скорости вращения тела вокруг оси (по величине), так и за счёт поворота оси вращения в пространстве (по направлению).

Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной углового ускорения

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Модуль углового ускорения измеряется в $\left[\frac{1}{\text{c}^2}\right]$.

Если движение равноускоренное, то направления обоих векторов совпадают $\vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$.

Если движение равнозамедленное, то направления векторов противоположные $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$. (См. Правое и левое вращение.)

4. Связь линейной и угловой скоростей

Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рис. 1.3.4).

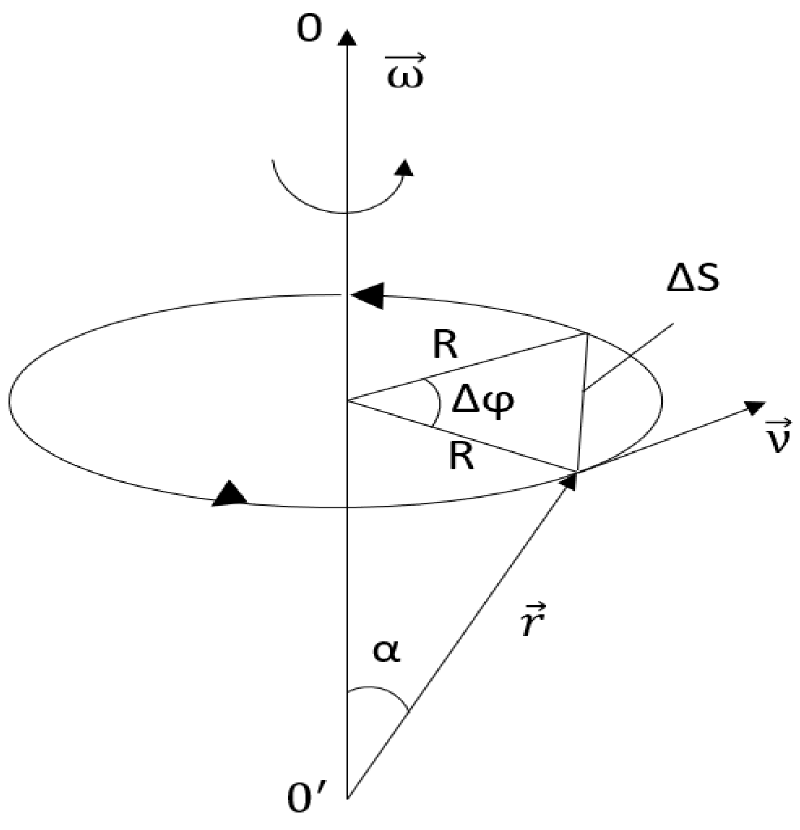


Рис. 1.3.4

Пусть точки за Δt совершают путь ΔS

$\Delta S = R\Delta\varphi,$

$\Delta S = |\overrightarrow{\Delta r}|.$

Модуль линейной скорости связан с угловой скоростью формулой

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\,\Delta\varphi}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) R = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

$$\boldsymbol{v = R\omega.}$$

Связь векторов линейной и угловой скоростей

Положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$.

Вектор скорости $\vec{v}$ из рис. 1.3.4 определяют как векторное произведение $\vec{\omega}$ на $\vec{r}$

$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}],$

$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] = \omega r \sin\alpha \vec{n}.$

(См. Правое и левое вращение.)

Изменение радиус-вектора $\vec{r}$ со временем только по направлению называют *прецессией*.

Основные формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик:

$$|\vec{a_n}| = \frac{v^2}{R}, v = \omega R, |\vec{a_n}| = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = \omega^2 R,$$

$$|\vec{a_\tau}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\beta,$$

$$|\vec{a_\tau}| = R\beta,$$

$$|\vec{a_n}| = \omega^2 R.$$

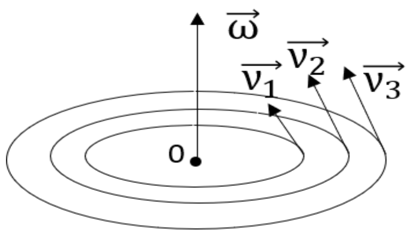


Рис. 1.3.5

Нормальное и тангенциальное ускорения растут линейно с увеличением расстояния точки от оси вращения, при этом угловая скорость остаётся величиной постоянной (рис. 1.3.5)

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_3}{R_3}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как направлено тангенциальное ускорение?
2. Как тангенциальное ускорение характеризует изменение линейной скорости?
3. Как направлено нормальное ускорение?
4. Как нормальное ускорение характеризует изменение линейной скорости?
5. Запишите формулы нормальной и тангенциальной составляющих вектора линейного ускорения.
6. Запишите формулу вектора полного линейного ускорения через две его составляющие.
7. Дайте определение радиуса кривизны траектории и запишите формулу.
8. Каково основное свойство псевдовекторов, отличающее их от полных векторов?
9. Перечислите ряд псевдовекторов.
10. Запишите формулу угловой скорости и углового ускорения.
11. Покажите на рисунке направление вектора угловой скорости и углового ускорения.
12. Запишите формулу связи линейной и угловой скоростей.
13. Запишите формулы связи векторов линейной и угловой скоростей.

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.
2. В тетради по лекциям в конце темы «Кинематика вращательного движения» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.
3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 4
ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

План

1. I закон Ньютона. Понятие инерциальной системы отсчёта.
2. II закон Ньютона. Уравнение движения. Сила, масса, импульс.
3. III закон Ньютона и предел его применимости.

1. I закон Ньютона. Понятие инерциальной системы отсчёта

Простейшее движение твёрдого тела – поступательное равномерное прямолинейное. Соответственно этому простейшее относительное движение системы – поступательное равномерное прямолинейное. Одну из систем считаем неподвижной (x, y, z).

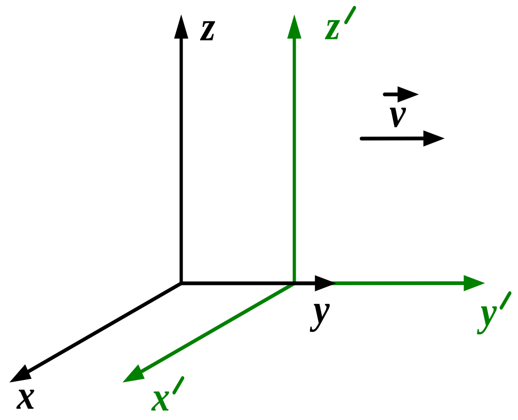


Рис. 1.4.1

Вторая система (x', y', z') движется относительно первой со скоростью $\vec{v}$ (рис. 1.4.1).

Принцип относительности Галилея

Во всех инерциальных системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно системы неподвижных звёзд и относительно друг друга, все механические явления протекают совершенно одинаково. Такие системы координат называют **инерциальными**, поскольку в них справедлив **закон инерции Ньютона**: тело, удалённое достаточно далеко от других тел, движется относительно систем координат равномерно и прямолинейно. Инерциальные системы – системы без ускорения.

Это утверждение впервые было высказано Галилеем. В настоящее время принцип относительности с большой точностью доказан экспериментально для механических и электромагнитных явлений.

I закон Ньютона гласит: тело, достаточно удалённое от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Этот закон выполняется только в инерциальных системах отсчёта и называется законом инерции.

Сохранение телом имеющейся у него скорости происходит в силу закона инерции. Этот закон следует рассматривать как первоначальный, основной, независимый – как постулат. (См. Опыт с инерцией гири.)

2. II закон Ньютона. Уравнение движения. Сила, масса, импульс

Для рассмотрения II закона Ньютона необходимо сформулировать понятия массы и силы.

Силой называют векторную величину, характеризующую воздействие на данное тело со стороны других тел. (См. Взаимодействие стального шарика с магнитом.)

Все силы, встречающиеся в природе и известные в настоящее время, сводятся к **силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам, сильным и слабым взаимодействиям** (это четыре вида фундаментальных взаимодействий). Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. Они действуют на малых расстояниях: сильные – 10^{-13} см, слабые – 10^{-16} см. Электромагнитные и гравитационные силы – дальнодействующие. Гравитационные и электромагнитные силы могут проявляться в виде статических сил: притяжение зарядов, материальных тел; эти силы в виде электромагнитных и гравитационных волн убывают обратно пропорционально квадрату расстояния между телами.

Сила – количественная мера интенсивности взаимодействия тел.

Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить его скорость. Это свойство называют *инертностью*.

Масса – мера инертности тела.

Одна и та же сила различным телам сообщает различные ускорения. Отношение силы к ускорению – одна и та же величина: масса m

$$\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m,$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{F}.$$

II закон Ньютона: скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{m}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

где $\vec{P} = m\vec{v}$ – импульс силы,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i},$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i},$$

где $\sum_i \vec{F_i}$ – сумма всех сил, действующих на тело.

Итак, понятие силы связывается с ускорением, а не со скоростью. В динамике Ньютона не скорость, а изменение скорости, т. е. ускорение, имеет причину возникновения.

Причина изменения скорости – сила.

II закон Ньютона даёт количественную формулировку соотношения между силой и ускорением. Этот закон экспериментальный (эмпирический), полученный в результате обобщения экспериментальных данных.

II закон Ньютона справедлив при $v \ll c$.

3. III закон Ньютона и предел его применимости

III закон Ньютона утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}, \left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{21}}\right|.$$

Силы возникают попарно. III закон Ньютона – закон парности взаимодействий. (См. Тележка на тележке.)

Итак, по второму закону Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$.

По III закону Ньютона

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}},$$

$$\left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{21}}\right|,$$

$$\frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt},$$

$$\frac{d(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2})}{dt} = 0,$$

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0.$$

Получаем ещё одну форму III закона Ньютона – **закон сохранения импульса**

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \text{const}.$$

При наличии в системе взаимодействующих тел только внутренних сил полный импульс системы остаётся величиной постоянной.

III закон Ньютона – закон сохранения импульса замкнутой системы тел.

Замкнутая физическая система тел – это система, сумма воздействия внешних сил на которую равна нулю.

III закон Ньютона справедлив лишь в инерциальных системах отсчёта. Отступления возникают при $v \approx c$. В рамках ньютоновской механики в инерциальных системах отсчёта III закон Ньютона всегда выполним.

На рис. 1.4.2 и 1.4.3 изображена взаимосвязь массы, силы тяжести и веса. Масса – величина абсолютная. Сила тяжести является абсолютной в пределе конкретного объекта Солнечной системы.

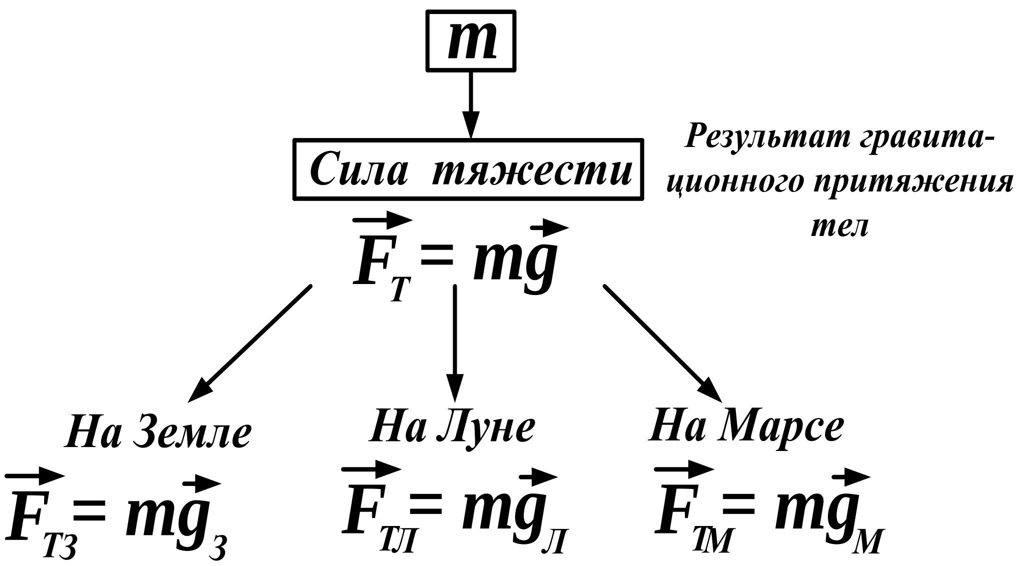


Рис. 1.4.2

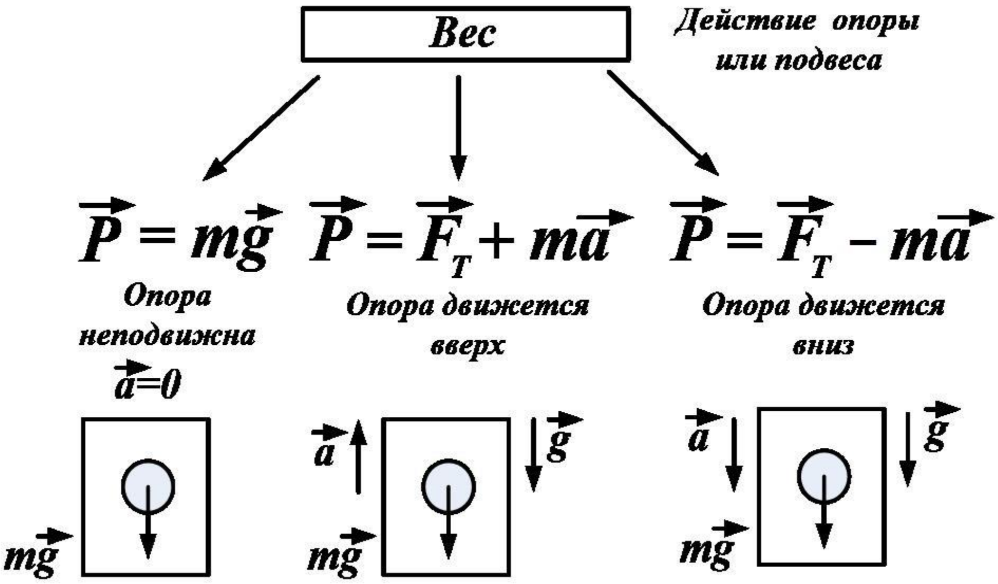


Рис. 1.4.3

Вес – величина относительная. На рис. 1.4.3 показано, как меняется формула для веса при неподвижной и движущейся опоре тела. (См. Взаимодействие тележек. Два мотора. Взаимодействие тележек. Разные массы. Расталкивание пружиной шаров разной массы.)

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте принцип относительности Галилея.
2. Сформулируйте I закон Ньютона.
3. Какие системы называют инерциальными?
4. Назовите четыре вида фундаментальных взаимодействий.
5. Сформулируйте понятие массы.
6. Сформулируйте II закон Ньютона. Запишите формулу.
7. Сформулируйте III закон Ньютона. Запишите формулу.
8. Чем различаются вес и сила тяжести?
9. Является ли масса абсолютной величиной?

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Динамика поступательного движения» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 5
МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

План

1. Центр масс абсолютно твёрдого тела. Центр инерции. Движение центра масс. Теорема о движении центра масс.
2. Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции материальной точки и тела.
3. Момент инерции сплошного диска.
4. Момент силы. Момент импульса.
5. Уравнение вращательного движения твёрдого тела.
6. Гироскопы.
7. Силы Кориолиса.

1. Центр масс абсолютно твёрдого тела. Центр инерции. Движение центра масс. Теорема о движении центра масс

«Абсолютно твёрдые» тела – это тела, деформациями которых мы можем пренебречь; при этом мы будем полагать, что расстояния между частицами тела остаются неизменными.

Вращательным движением называют такое движение, при котором все точки твёрдого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Твёрдое тело можно представить в виде суммы отдельных его частей массой m_i.

Центр масс твёрдого тела – точка с радиус-вектором $\overrightarrow{r_c}$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\, m_i,$$

где r_i – радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы.

В однородном поле сил тяжести центр масс твёрдого тела совпадает с центром тяжести.

Центром тяжести твёрдого тела (C) называют геометрическую точку, жёстко связанную с этим телом и являющуюся центром параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частицам тела (P_1, $P_2 \ldots P_n$) (рис. 1.5.1).

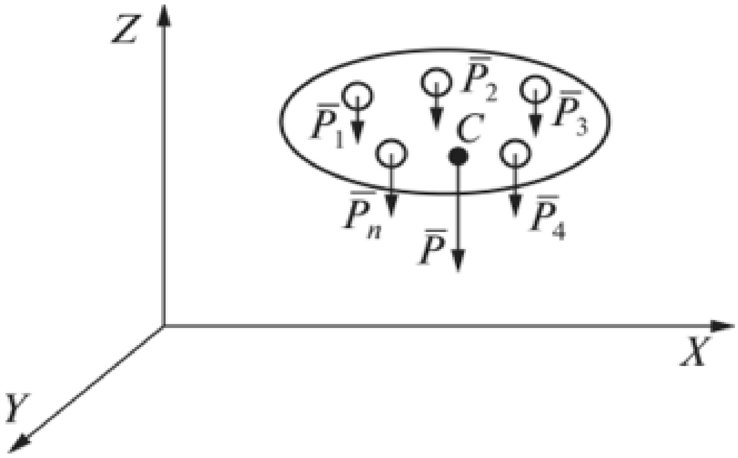


Рис. 1.5.1

Любая из элементарных масс может находиться под воздействием как внутренних, так и внешних (поле тяготения) сил.

Теорема о движении центра инерции

Для системы материальных точек выполняется уравнение

$$\frac{d\overrightarrow{p_\Sigma}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_i},$$

где $\overrightarrow{p_\Sigma}$ – суммарный импульс; $\sum \overrightarrow{F_i}$ – сумма всех сил.

Продифференцируем $\overrightarrow{r_c}$ по t и найдём скорость центра масс

$$\frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p_i} = \frac{\overrightarrow{p_\Sigma}}{m},$$

где $\overrightarrow{v_i}$ – скорость частицы; $\overrightarrow{p_i}$ – импульс частицы; $\overrightarrow{p_\Sigma}$ – импульс системы.

Полный импульс системы

$$\frac{d\overrightarrow{p_\Sigma}}{dt} = m\frac{d^2\overrightarrow{r_c}}{dt^2}.$$

Теорема о движении центра масс

$$m\frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}.$$

Теорема о движении центра масс твёрдого тела: центр масс твёрдого тела двигается так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных сил (центр масс совпадает с центром тяжести тела в однородном поле сил тяжести). (См. Движение центра масс системы тел.)

2. Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции материальной точки и тела

Мысленно разобьём тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, на элементарные массы m_i; r_i – расстояние от массы до оси; $\vec{v_i}$ – линейная скорость i-й массы (рис. 1.5.2), m_i, r_i, v_i – модули.

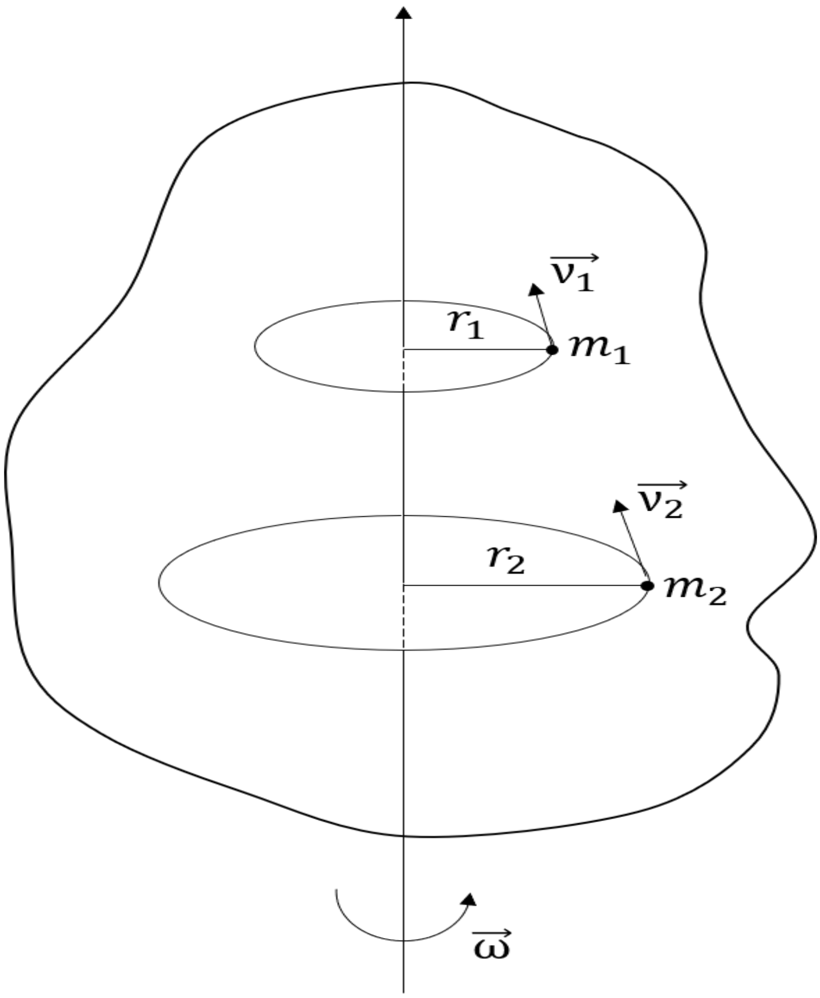


Рис. 1.5.2

Кинетическая энергия i-й точки равна

$$E_{кi} = \frac{m_i v_i^2}{2},$$

$$v_i = \omega r_i,$$

$$E_{кi} = \frac{m_i(\omega r_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Моментом инерции *i*-й материальной точки относительно оси вращения называют произведение массы материальной точки на квадрат её расстояния от оси вращения

$$J_i = m_i r_i^2.$$

Момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения складывается из суммы моментов инерции всех материальных точек, составляющих тело, относительно этой оси

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Тогда **кинетическая энергия вращательного движения** равна

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Момент инерции при вращательном движении является аналогом массы, т. е. это мера инертности тела при вращательном движении. (См. Человек с гантелями на скамье Жуковского. Человек на скамье Жуковского с велосипедным колесом.)

3. Момент силы. Момент импульса

Момент силы относительно точки опоры можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы на силу $\vec{F}$ (рис. 1.5.3, 1.5.4)

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

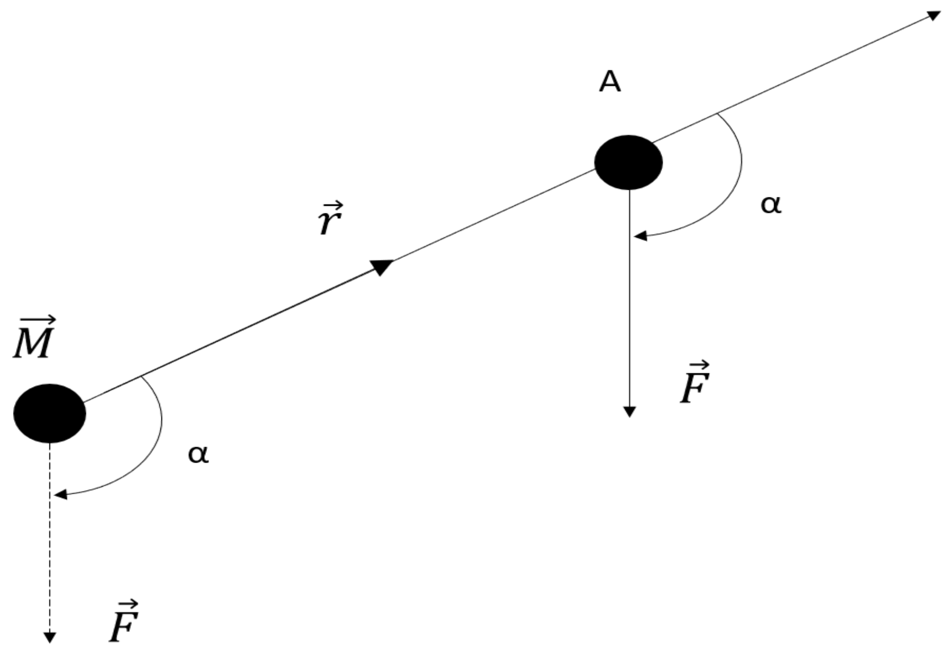


Рис. 1.5.3

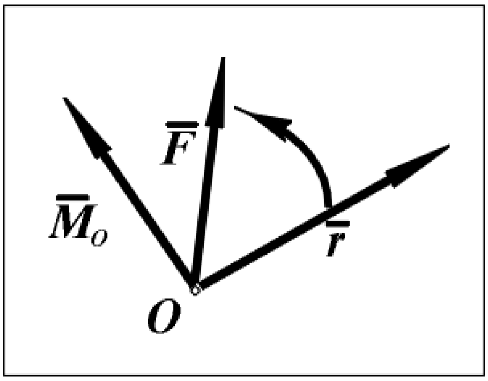


Рис. 1.5.4

Вектор момента силы $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат радиус-вектор $\vec{r}$ и сила $\vec{F}$, а направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу правого винта (за плоскость листа). Модуль момента силы равен

$$|\vec{M}| = rF\sin\alpha|\vec{n}|.$$

(См. Правое и левое вращение.)

Моментом импульса материальной точки относительно точки *O* называют векторную величину (рис. 1.5.5)

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение частицы относительно точки O, а $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс частицы.

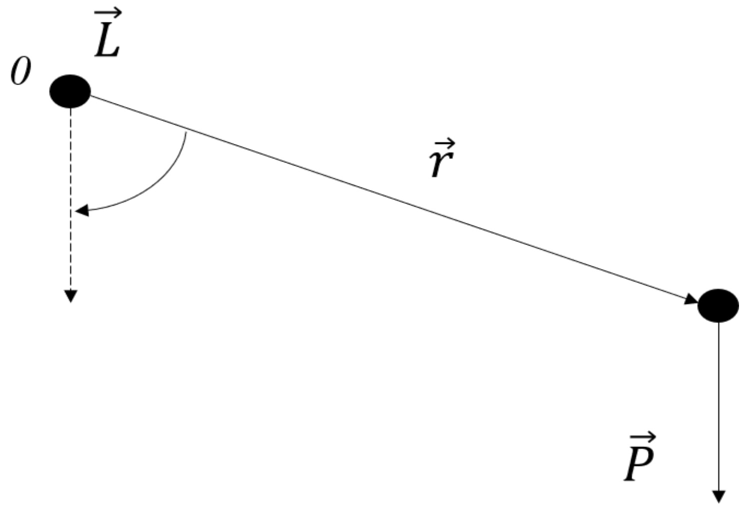


Рис. 1.5.5

Модуль момента импульса

$|\vec{L}| = rp\sin\alpha|\vec{n}|, L = J\omega.$

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{p}$ и $\vec{r}$, а его направление определяется по правилу правого винта (за плоскость листа).

4. Уравнение вращательного движения твёрдого тела

Для системы материальных точек основной **закон динамики вращательного движения**

$$\frac{d\overrightarrow{L_\Sigma}}{dt} = \overrightarrow{M_\Sigma}.$$

Для твёрдого тела, как и для системы материальных точек, производная момента импульса по времени равна суммарному моменту внешних сил, действующих на тело (основной закон динамики вращательного движения),

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

Это уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси можно записать так:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt.$$

Сравнение законов поступательного и вращательного движения

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
m	$J = mr^2$
$E_{к} = \dfrac{mv^2}{2}$	$E_{к.вр} = \dfrac{J\omega^2}{2}$
$\vec{F}_\Sigma = m\vec{a}$	$\vec{M}_\Sigma = [\vec{r}\vec{F}]$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$
$\vec{F_\Sigma} = \dfrac{d\vec{P_\Sigma}}{dt}$	$M = \dfrac{d\vec{L}_\Sigma}{dt}$

(См. Скатывание цилиндров с наклонной плоскости. Вращение стержня, подвешенного на нити. «Китайский волчок». Юла Максвелла на аркане.)

5. Гироскопы

Гироскопом (волчком) (рис. 1.5.6) называют симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. У симметричного тела направление $\vec{L}$ совпадает с $\vec{\omega}$. Гироскоп вращается относительно оси *OZ* (см. рис. 1.5.6), сила $\vec{F}$действует в течение времени *dt*.

(См. Гироскоп с перегрузками. «Колумбово яйцо». Подвешенный волчок. Велосипед с гироскопом на проволоке. Гирокомпас в кардановом подвесе. Опыт с большим гироскопом. Разрыв верёвки. Опыт с большим гироскопом. Гирокомпас.)

Момент импульса $\vec{L}$ получает приращение

$$d\vec{L} = \vec{M}dt,$$

где $\overrightarrow{M}$ – момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Новое значение момента импульса $\vec{L} + d\vec{L}$.

Тот факт, что приложение к быстро вращающемуся телу некоторой силы вызывает смещение оси вращения в направлении, перпендикулярном направлению действия силы, лежит в основе объяснения движения гироскопов.

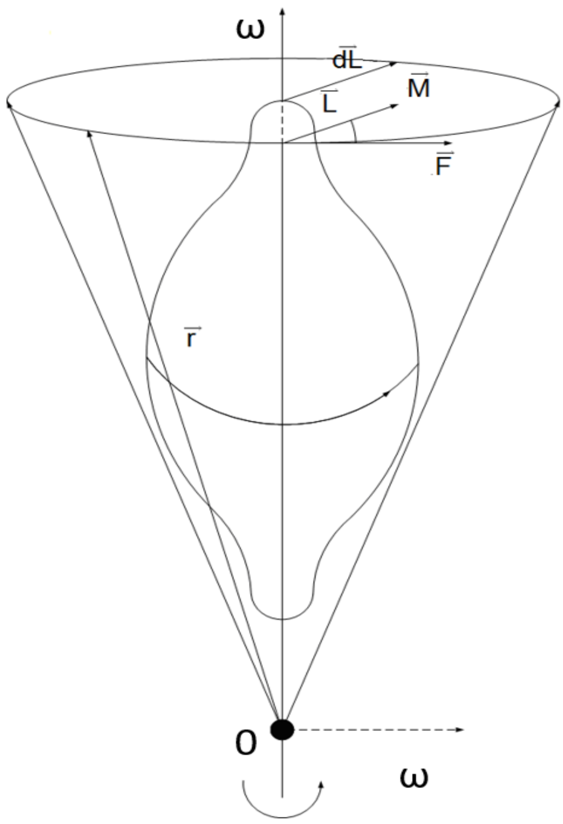


Рис. 1.5.6

6. Силы Кориолиса

Во вращающейся системе на тело, перемещающееся относительно этой системы, действует кроме центробежной силы ещё и добавочная сила. Эта сила, носящая название **кориолисовой силы**, зависит от скорости тела (v) относительно вращающейся системы и от угловой скорости вращения системы (β).

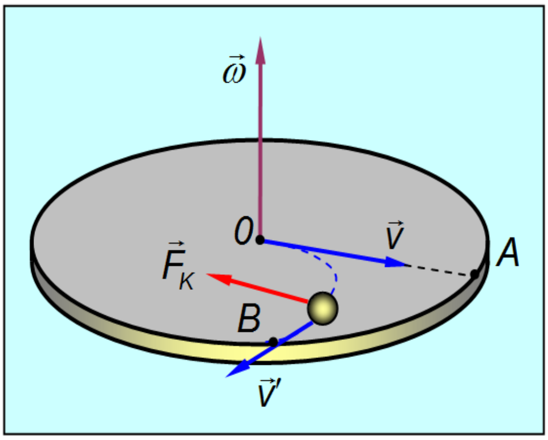


Рис. 1.5.7

Например, во вращающейся системе к телу, движущемуся вдоль радиуса вращения с определённой скоростью, приложена «инерциальная» сила ($F_к$), которая направлена перпендикулярно вектору скорости тела, – она и является силой Кориолиса (рис. 1.5.7)

$$F_к = 2v\beta m,$$

где m – масса тела.

Сила Кориолиса проявляется при движении по поверхности земного шара, обладающего угловой скоростью благодаря суточному вращению. Существованием силы Кориолиса объясняется подмывание реками в Северном полушарии правого, а Южном полушарии – левого берегов. Другой пример – это отклонение свободно падающих тел к востоку от вертикали и отклонение плоскости качания маятника.

(См. Отвесы на вращающейся платформе. Шарик, катящийся по вращающейся платформе. Модель маятника Фуко. Отвесы на вращающейся платформе. Выдёргивание тележки из-под тяжёлого груза.)

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулу центра масс твёрдого тела.
2. Сформулируйте теорему о движении центра масс твёрдого тела.
3. Запишите формулу кинетической энергии при вращательном движении.
4. Запишите формулы момента инерции материальной точки и тела.
5. Запишите формулу момента силы.
6. Запишите формулу момента импульса.
7. Запишите формулу основного закона динамики вращательного движения.
8. Какое тело называют гироскопом? Поясните основное свойство гироскопа.
9. Приведите примеры возникновения силы Кориолиса.

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Механика абсолютно твёрдого тела. Вращательное движение абсолютно твёрдого тела» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 6
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

План

1. Закон сохранения импульса.
2. Закон сохранения момента импульса.
3. Работа, мощность, кинетическая и потенциальная энергия. Консервативные и диссипативные силы.
4. Закон сохранения энергии в механике.

Силы, действующие на тела механической системы, делят на внутренние и внешние.

Внутренние силы – это силы, с которыми тела системы действуют друг на друга.

Внешние силы – это силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

Системы, в которых внешние силы отсутствуют или сумма всех внешних сил равна нулю, называют **замкнутыми** (изолированными).

Примеры:

внутренние силы: например, в Солнечной системе это силы всемирного тяготения; в системе двух соударяющихся шаров – силы упругости шаров;

внешние силы: например, на систему шаров действует сила тяготения; в Солнечной системе – сила тяготения со стороны центра Галактики.

Для замкнутых систем остаются постоянными три физические величины: **энергия**, **импульс**, **момент импульса**.

Соответственно, в замкнутых физических системах выполняются: **закон сохранения энергии**, **закон сохранения импульса** и **закон сохранения момента импульса**.

Эти законы имеют всеобщий характер (фундаментальный): их применяют не только по отношению к механическим явлениям, но и вообще ко всем явлениям в природе.

Законы сохранения базируются на принципах симметрии нашего пространства: **однородности пространства; изотропии пространства; однородности течения времени в нашем пространстве.**

(См. Маятник Галилея. Маятник Максвелла. Шарик в мёртвой петле. Финитное и инфинитное движения.)

1. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из n частиц:

$\overrightarrow{F_{ik}}$ – сила, где k-я частица действует на i-ю.

$\overrightarrow{F_i}$ – все внешние силы, действующие на i-ю частицу.

Запишем уравнения движения всех n частиц

$$\dot{\overrightarrow{p_1}} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{14}} + \ldots + \overrightarrow{F_{1n}} + \overrightarrow{F_1},$$

$$\dot{\overrightarrow{p_2}} = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{23}} + \overrightarrow{F_{24}} + \ldots + \overrightarrow{F_{2n}} + \overrightarrow{F_2},$$

....

$$\dot{\overrightarrow{p_n}} = \overrightarrow{F_{n1}} + \overrightarrow{F_{n2}} + \overrightarrow{F_{n3}} + \ldots + \overrightarrow{F_{n;\,n-1}} + \overrightarrow{F_n}.$$

Сложим полученные n уравнений.

Слева будем иметь сумму производных по времени импульсов

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_\Sigma} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p_i},$$

где $\overrightarrow{p_\Sigma}$ – суммарный импульс системы;

справа – сумму всех внутренних и внешних сил. Все внутренние силы можно попарно объединить (сила действия и сила противодействия), и по III закону Ньютона эти пары сил должны быть равны нулю

$$\left(\overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}}\right) + \left(\overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{31}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{F_{n-1;\,n}} + \overrightarrow{F_{n;\,n-1}}\right) = 0.$$

Согласно III закону Ньютона каждое слагаемое равно нулю.

Останется лишь сумма всех внешних сил

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_\Sigma} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}.$$

Если система замкнута, внешние силы отсутствуют, то

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_\Sigma} = 0,$$

$$\overrightarrow{p_\Sigma} = \text{const}.$$

Импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, протекающих в этой системе, – **закон сохранения импульса**.

В основе закона сохранения импульса лежит один из принципов симметрии нашего пространства – **однородность пространства**, т. е. одинаковость свойств пространства во всех его точках.

(См. Удар шаров (абсолютно упругий). Удар шаров (абсолютно неупругий). Нецентральный упругий удар. Движение центра масс системы тел. Отдача при выстреле. Снаряд свободен. Выстрел вперёд с движущейся тележки. Выстрел назад с движущейся тележки.)

2. Закон сохранения момента импульса

Основной закон динамики вращательного движения

$$\frac{d\overrightarrow{L_\Sigma}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{i\,\text{внутр}}} + \sum \overrightarrow{M_{i\,\text{внешн}}}$$

По III закону Ньютона $\sum \overrightarrow{M_{i\,\text{внутр}}} = 0$.

Если система замкнута, $\sum \overrightarrow{M_{i\,\text{внешн}}} = 0$, тогда

$$\frac{d\overrightarrow{L_\Sigma}}{dt} = 0,$$

и в результате закон сохранения момента импульса будет иметь вид

$$L_\Sigma = \text{const}.$$

Момент импульса замкнутой системы материальных точек остаётся постоянным независимо от процессов, происходящих внутри системы, – **закон сохранения момента импульса.**

В основе закона сохранения момента импульса лежит принцип симметрии нашего пространства – **изотропия пространства**, т. е. эквивалентность всех направлений в пространстве.

(См. Зависимость углового ускорения от момента сил 1. Зависимость углового ускорения от момента сил 2. Зависимость углового ускорения от момента инерции.)

3. Работа, мощность, кинетическая и потенциальная энергия. Консервативные и диссипативные силы

Для анализа закона сохранения энергии необходимо проанализировать понятия «работа», «энергия».

Под **работой** мы понимаем возможность совершать телом полезные действия за счёт запасённой энергии.

Энергия – количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи.

Виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная.

Элементарной работой dA силы $\overrightarrow{F}$ на перемещение $d\vec{r}$ называют скалярное произведение вектора $\overrightarrow{F}$ на вектор $d\vec{r}$ (рис. 1.6)

$dA = \vec{F}d\vec{r},$

$dA = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha,$

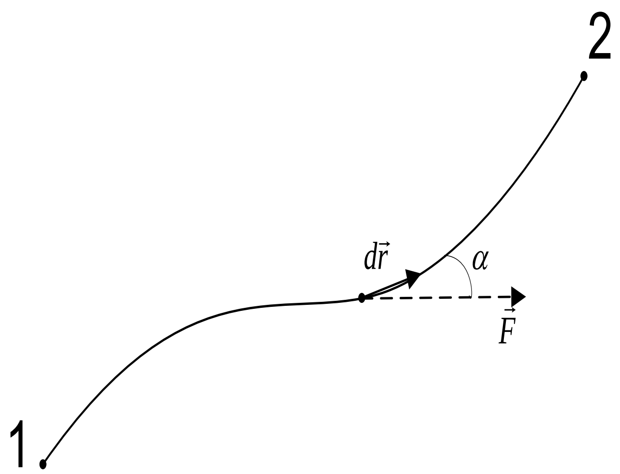


Рис. 1.6

Мощность выражают формулой

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{FV}.$$

Мощность – это работа за единицу времени [1 Вт = 1 $\frac{\text{Дж}}{\text{с}}$].

Мощность равна скалярному произведению силы на скорость перемещения точки приложения силы.

Существует два вида механической энергии: кинетическая и потенциальная.

Кинетическая энергия

Рассмотрим систему из одной материальной точки массой m, движущейся под действием сил со скоростью v.

Тогда **кинетическую энергию** можно выразить

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа в данном случае совершается за счёт изменения кинетической энергии

$dA = dT.$

$$E_к = \frac{mv^2}{2},$$

$p = mv$ – импульс,

$$T = E_к = \frac{p^2}{2m},$$

$$E_к = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия

Работа по перемещению объекта на определённую высоту *(h)* относительно поверхности Земли равноценна изменению **потенциальной энергии** тела

$E_п = mgh.$

Консервативные силы: сила тяжести, электростатические силы. Работа таких сил по замкнутому контуру равна нулю.

Диссипативные силы (неконсервативные) – это силы, работа которых зависит от траектории движения тела (трения, сопротивления).

Диссипативная система – это система, в которой часть механической энергии переходит в другие виды энергии (во внутреннюю).

Потенциальная энергия имеет два смысловых содержания (два вида): потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и потенциальная энергия взаимодействия частиц системы.

4. Закон сохранения энергии в механике

Закон сохранения полной механической энергии: в изолированной системе, в которой действуют только консервативные силы, сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна

$E_п + E_к = \text{const}.$

С учётом потенциальной энергии взаимодействия частиц ($E_{вз}$) системы запишем **закон сохранения**

$E = E_п + E_{вз} + E_к.$

Полная механическая энергия системы тел, на которые действуют лишь консервативные силы, остаётся постоянной – **закон сохранения механической энергии.**

Для **замкнутой системы**

$$E_{\text{вз}} + E_{\text{к}} = \text{const}.$$

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, постоянна.

При наличии неконсервативных сил полная механическая энергия не сохраняется (сила трения, сила сопротивления).

В основе закона сохранения энергии лежит принцип симметрии нашего пространства – **однородность времени:** равнозначность всех моментов времени заключается в том, что замена момента времени t_1 моментом t_2 без изменения координат и скоростей тел системы не изменяет механических свойств системы.

Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии выделяются среди всех физических законов своей всеобщностью, т. е. высшей степенью фундаментальности.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую физическую систему называют замкнутой?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса и укажите, какой принцип симметрии нашего пространства лежит в его основе.
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса и укажите, какой принцип симметрии нашего пространства лежит в его основе.
4. Сформулируйте закон сохранения энергии и укажите, какой принцип симметрии нашего пространства лежит в его основе.
5. Какие силы называют консервативными?
6. Какие силы называют диссипативными?

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Законы сохранения в механике» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 7
ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

План

1. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея.
2. Принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца.
3. Следствия из преобразований Лоренца.
4. Релятивистское выражение для энергии. Релятивистский импульс. Частицы с нулевой массой.
5. Эффект Доплера (продольный).

1. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

Формулировка принципа относительности Галилея: во всех системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно системы неподвижных звёзд и относительно друг друга, все механические явления протекают совершенно одинаково. Такие системы координат называют инерциальными. Пусть одна из систем отсчёта условно неподвижна (K), а вторая (K') движется относительно первой со скоростью $\vec{v}$ (рис. 1.7).

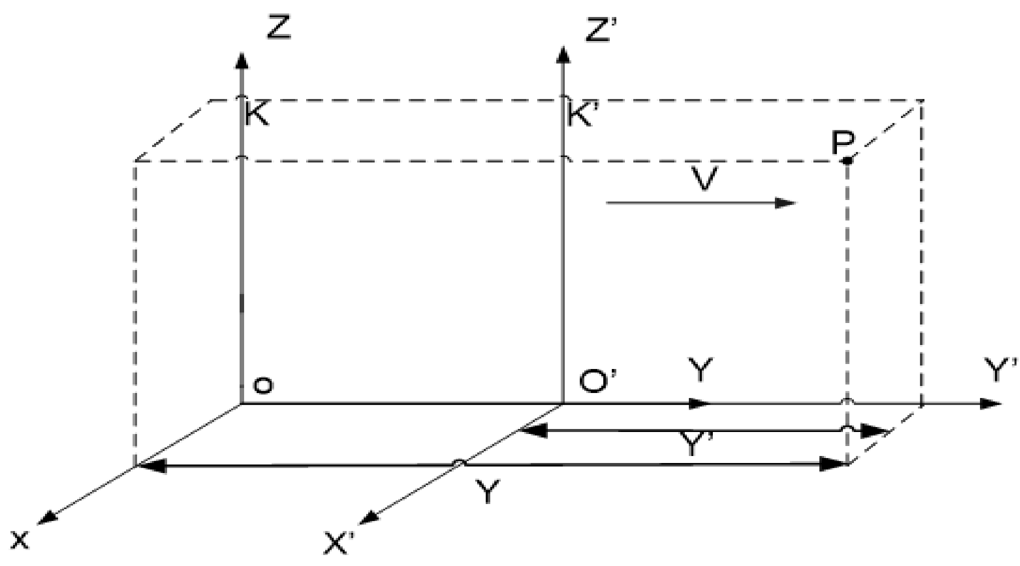


Рис. 1.7

Тогда координаты произвольной точки P в этих системах отсчёта будут подчиняться преобразованиям Галилея

$$y = y' + vt,$$
$$y' = y - vt,$$
$$x = x',$$
$$z = z',$$
$$t = t',$$

где t – время перемещения.

2. Принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца

Теория относительности подразделяется на специальную (частную) и общую (теорию гравитации).

Общую теорию относительности принято рассматривать как современную теорию тяготения, а специальную теорию относительности – как теорию пространства, времени и материи.

Специальная теория относительности основывается на принципе относительности, согласно которому законы физики не зависят от инерциальной системы отсчёта и её скорости, а также на принципе постоянства скорости света, согласно которому $c = \mathrm{const}$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

и она не зависит от скорости движения источников или приёмников света.

Принцип постоянства скорости света

Скорость света в вакууме не зависит от движения источников света и, следовательно, одинакова во всех инерциальных системах отсчёта. Впервые скорость света была измерена в 1676 году О. Ремером, она составила 300 000 км/с. Справедливость постоянной скорости света $c = \mathrm{const}$ была доказана А. Майкельсоном и Э. Морли в 1887 году.

Итак, c инвариантна (одинакова) во всех инерциальных системах координат.

На данном этапе исследований Вселенной считается, что скорость света – максимальная скорость в природе $c = \max$.

Существование предельной скорости приводит к тому, что понятие одновременности становится относительным.

Постулат постоянства скорости света в различных инерциальных системах отсчёта доказывает неправомерность преобразований Галилея.

Преобразования Галилея были заменены преобразованиями Лоренца.

Из однородности пространства и времени следует, что преобразования Лоренца линейные. Линейность преобразований означает введение постоянного коэффициента $\gamma = \text{const}$.

Пусть плоскость $y' = 0$ совпадает с $y = 0$, движение вдоль оси x.

Линейное преобразование

$x = x' + vt'$,

$x' = x - vt$,

$\gamma = \text{const}$,

$x = \gamma(x' + vt')$,

$x' = \gamma(x - vt)$,

$\gamma = \text{const}$.

Постоянный коэффициент можно выразить так:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Тогда **преобразования Лоренца** будут иметь вид

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}, x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}},$$

$$t = \frac{t' + ({v}/{c^2})x'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}, t' = \frac{t - ({v}/{c^2})x}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}.$$

В этих формулах перемешаны координаты и время, что говорит о фундаментальном свойстве нашего мира – теснейшей взаимосвязи пространства и времени.

Допустив постоянство скорости света, мы приходим к выводу о различном ходе времени в покоящихся и движущихся системах.

При малых скоростях ${v^2}/{c^2} \ll 1$ преобразования Лоренца очень близки к преобразованиям Галилея.

3. Следствия из преобразований Лоренца

1. Относительность одновременности.

В системе K происходят одновременно два события. Координаты событий не совпадают

$t_1 = t_2 = t, x_1 \neq x_2.$

В системе K' движение происходит со скоростью $\vec{v}$ относительно системы K

$$t_1' = \frac{t - ({v}/{c^2})x_1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}, t_2' = \frac{t - ({v}/{c^2})x_2}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}},$$

$$t_1' \neq t_2'.$$

Значит, в системе K' эти события произойдут не одновременно. Понятие одновременности не имеет абсолютного значения, независимого от системы координат.

2. Замедление хода движущихся часов.

Пусть в движущейся системе K' в моменты t_1' и t_2' происходят два события в одной и той же точке x_0'. В неподвижной системе эти события зафиксируются в различные моменты

$$t_1 = \frac{t_1' + ({v}/{c^2})x_0'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}, x_1 = \frac{x_0' + vt_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t_2 = \frac{t_2' + (^v/_{c^2})x_0'}{\sqrt{1 - ^{v^2}/_{c^2}}}, x_2 = \frac{x_0' + vt_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и в различных точках x_1 и x_2

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - ^{v^2}/_{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - ^{v^2}/_{c^2}}},$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - ^{v^2}/_{c^2}}.$$

Таким образом, интервал времени, измеренный покоящимися часами, больше, чем интервал, измеренный часами в движущейся системе координат.

3. Длина тел в различных системах.

Стержень в K' покоится, его длина $l_0 = x_2' - x_1'$. Относительно K стержень движется со скоростью $\vec{v}$

$$x_1' = \frac{x_1 + v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$x_2' = \frac{x_2 + v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - ^{v_0^2}/_{c^2}}},$$

$$x_2' - x_1' = l_0,$$

$$l = l_0\sqrt{1 - ^{v_0^2}/_{c^2}},$$

где t – время, в которое в системе K зафиксировали координаты концов стержня.

Таким образом, длина стержня, измеренная в неподвижной системе, окажется меньше истинной.

Итак, у движущихся тел их размеры в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость их движения (Лоренцево сокращение).

4. Релятивистское выражение для энергии. Релятивистский импульс. Частицы с нулевой массой

Согласно теории относительности масса движущегося тела увеличивается с ростом скорости по сравнению с массой покоя

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

тогда II закон Ньютона будет иметь вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Релятивистский импульс равен

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Эйнштейн в качестве важнейшего следствия специальной теории относительности ввёл закон

$$E = mc^2,$$

где $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; E – полная энергия, заключённая в m.

Если $v = 0$, то $E_0 = m_0c^2$; E_0 – энергия покоя; m_0 – масса покоя.

Кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = c^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1\right).$$

Релятивистский импульс

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

Ньютоновская механика не допускает существования частиц с $m = 0$, но с точки зрения релятивистской механики такие частицы могут существовать при $v = c$

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}.$$

К частицам с $m_0 = 0$ относится фотон.

Полная энергия частиц

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}},$$

$$E_{\text{к}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-{v^2}/{c^2})}} - m_0c^2.$$

Неподвижная частица обладает энергией покоя. $E_0 = m_0c^2$ – это внутренняя энергия частицы.

Изменение энергии покоя приводит к изменению массы частицы $\Delta E_0 = \Delta mc^2$.

В ньютоновской механике полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергии. В релятивистской механике полная энергия равна сумме кинетической энергии и энергии покоя.

$E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя включает в себя энергию покоя всех частиц тела плюс энергию связи этих частиц между собой.

Потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле не входит в полную энергию релятивистской механики.

6. Эффект Доплера (продольный)

Эффект Доплера заключается в том, что воспринимаемая частота света, приходящая от движущегося источника, не совпадает с частотой колебаний света.

Эффект Доплера носит чисто релятивистский характер. Если угол между скоростью источника и направлением на приёмник равен 90°, чего согласно классической теории изменения частоты не должно быть, то с точки зрения специальной теории относительности произойдёт смещение частоты или длины волны в красную сторону

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Продольный эффект Доплера наблюдают в том случае, когда угол между скоростью и направлением на приёмник равен 0° и 180°.

Вопросы для самоконтроля

1. При каких скоростях движения тел справедлива ньютоновская механика?

2. Сформулируйте принцип относительности Галилея.

3. Запишите преобразования Галилея. В какой ситуации можно использовать эти преобразования?

4. Сформулируйте принцип относительности Эйнштейна.

5. Сформулируйте принцип постоянства скорости света.

6. Запишите преобразования Лоренца.
7. Допускает ли релятивистская механика существование частиц с нулевой массой? Приведите пример частицы с нулевой массой.
8. Запишите выражение для релятивистского импульса.
9. Запишите формулу полной энергии тела.
10. Что такое энергия покоя тела? Запишите её формулу.

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Элементы специальной теории относительности» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

Тема 8
ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

План

1. Сплошная среда, линии тока жидкости, трубка тока, условие неразрывности струи.
2. Уравнение Бернулли.
3. Ламинарное и турбулентное течения жидкости и газа. Число Рейнольдса.
4. Формула Стокса, сила лобового сопротивления.
5. Подъёмная сила.
6. Эффект Магнуса.

1. Сплошная среда, линии тока жидкости, трубка тока, условие непрерывности струи

Сплошная среда – это деформируемая среда с массой, сплошным образом распределённой в пространстве, и непрерывно распределёнными физическими параметрами. Сплошная среда близка к состоянию жидкости и газа.

Линии тока жидкости изображены на рис. 1.8.1.

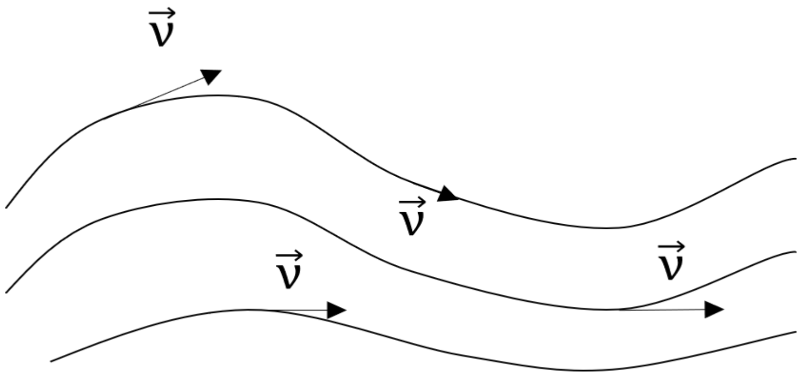


Рис. 1.8.1

Линия тока – это линия, касательная к которой, проведённая в каждой её точке, является вектором скорости.

Течение считают стационарным, если вектор скорости в каждой точке пространства остаётся постоянным.

Трубка тока – часть жидкости, ограниченная линиями тока (рис. 1.8.2).

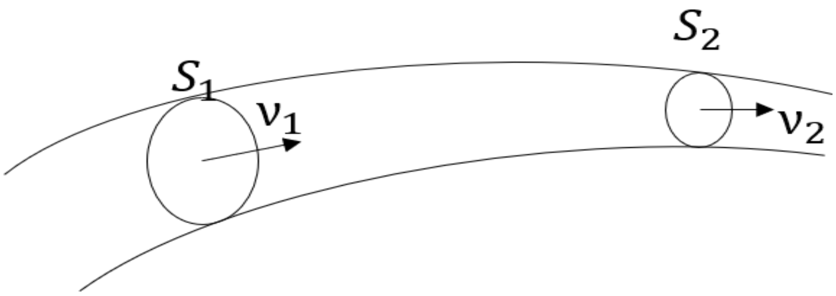


Рис. 1.8.2

Расчёты показывают, что жидкости и газы при движении со скоростями, меньшими, чем скорость звука, с достаточной степенью точности **несжимаемые**.

В любом сечении трубки тока для несжимаемой жидкости выполняется соотношение

Sv = const.

Это означает также **неразрывность струи.**

2. Уравнение Бернулли

Имеем трубку тока малого сечения (рис. 1.8.3). Возьмём объём жидкости или газа и зафиксируем его в двух положениях $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

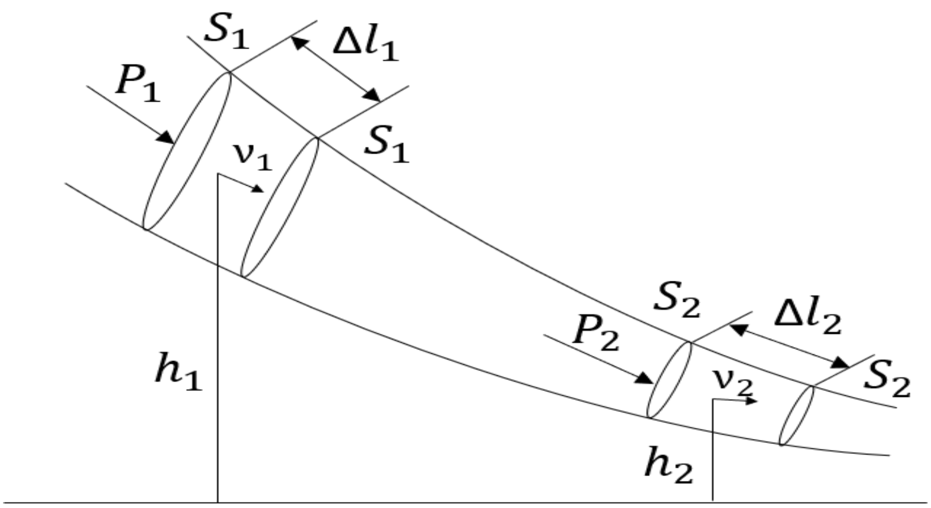


Рис. 1.8.3

Движение объёма жидкости из первого положения во второе происходит под действием силы атмосферного давления

$$P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Энергия объёма жидкости складывается из кинетической и потенциальной энергии.

Изменение энергии объёма ΔV при переходе из положения 1 в положение 2

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1\right).$$

Приращение энергии равно работе, совершаемой над ΔV силами давления

$$\Delta A = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_1 - P_2)\Delta V.$$

В результате мы получим следующее уравнение:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2.$$

В стационарно текущей несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}$$ – **это уравнение Бернулли.**

Для горизонтальной линии тока уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2.$$

Давление оказывается меньшим там, где скорость течения жидкости или газа в трубке тока (трубе) больше

$$P + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}.$$

3. Ламинарное и турбулентное течения жидкости и газа. Число Рейнольдса

Английский физик О. Рейнольдс установил, что характер течения жидкости и газа связан со значением безразмерной величины (числом Рейнольдса)

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; v – средняя скорость течения; l – характерный параметр поперечного сечения трубы (квадрат, круг); η – коэффициент динамической вязкости.

Малые значения числа Re говорят о ламинарном (медленном) течении, большие значения Re соответствуют турбулентному течению.

Например, для вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе

$$Re_{\text{критич}} = 2300.$$

Если $Re > 2300$, течение турбулентное; если $Re < 2300$, течение ламинарное.

4. Формула Стокса, сила лобового сопротивления

При малых числах Re, при небольших скоростях сопротивление среды обусловлено силами трения при движении тела.

Дж. Стокс установил, что сила сопротивления в этом случае пропорциональна: коэффициенту динамической вязкости η; v – скорости тела; l – характерному параметру трубки тока.

Для шарика малого радиуса r справедливо выражение для силы лобового сопротивления

$$F_{\text{л.с.}} = 6\pi\eta r v.$$

Возникновение силы лобового сопротивления продемонстрировано на рис. 1.8.4.

Тонкий слой жидкости (мономолекулярный) прилипает к телу и движется вместе с ним. Возникает трение между ним и окружающей жидкостью. Это *первая причина* возникновения силы лобового сопротивления.

Вторая причина связана с разностью давлений, возникающих под телом и над телом. Скорость обтекающих тело слоёв снизу оказывается меньше, чем сверху, так как в верхней части при движении тела вниз возникает вихревое движение слоёв ($v_2 < v_1$). В соответствии с уравнением Бернулли давление в нижней части тела будет больше, чем в верхней ($P_2 > P_1$). Возникает разница в давлении, и именно за счёт этого происходит торможение движения объекта.

Рис. 1.8.4

Итак, сила лобового сопротивления складывается из сил трения и сопротивления давления.

5. Подъёмная сила

На тело, движущееся внутри жидкости или газа, действуют сила лобового сопротивления и подъёмная сила (рис. 1.8.5). Величина этих сил зависит от формы и размеров тела, а также от формы обтекаемой поверхности.

Рассмотрим крыло в набегающем потоке жидкости или газа.

В верхней части крыла его поверхность выпуклая, и набегающий поток жидкости или газа мягко обтекает поверхность крыла. В нижней части крыла поток жидкости или газа вследствие вогнутого характера крыла будет тормозиться ($v_1 < v_2$).

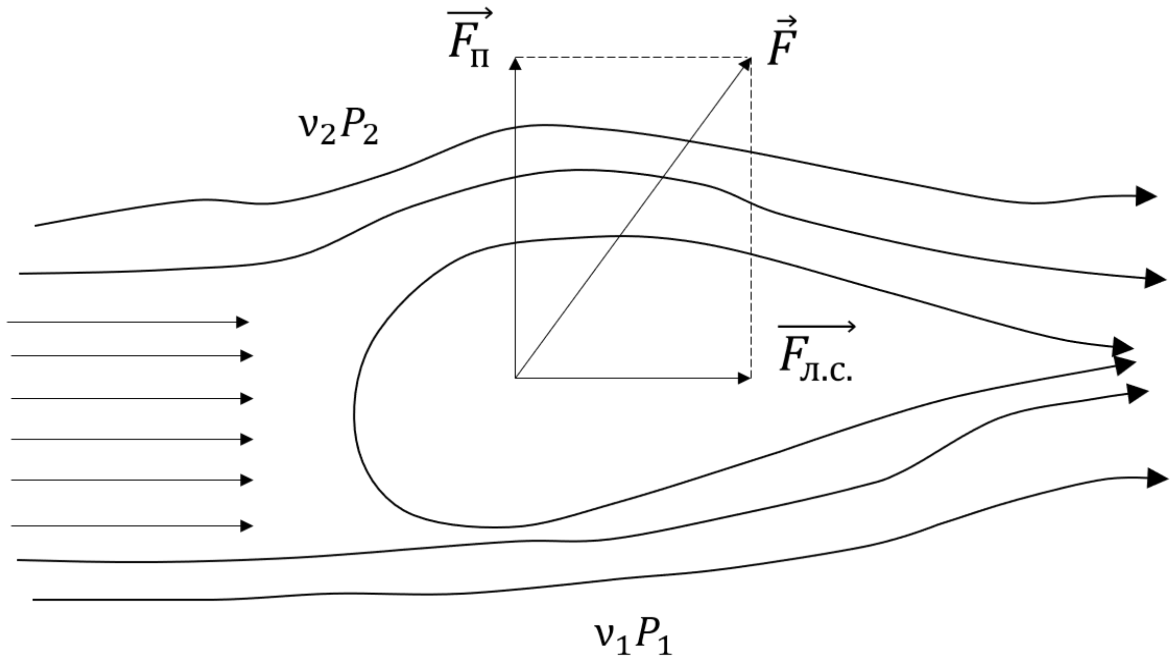


Рис. 1.8.5

Согласно уравнению Бернулли благодаря структуре крыла, находящегося в набегающем потоке жидкости или газа, так как

$$v_1 < v_2,$$

то

$$P_1 > P_2.$$

Вследствие разницы давлений сверху и снизу крыла возникает подъёмная сила F_n, направленная вверх (см. рис. 1.8.5). Также возникает и сила лобового сопротивления $F_{л.с.}$

При сложении векторов подъёмной силы и силы лобового сопротивления возникает результирующая сила F, за счёт которой в конечном итоге и происходит подъём крыла.

6. Эффект Магнуса

Возникновение поперечной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем потоке жидкости (газа) (рис. 1.8.6), называют эффектом Магнуса.

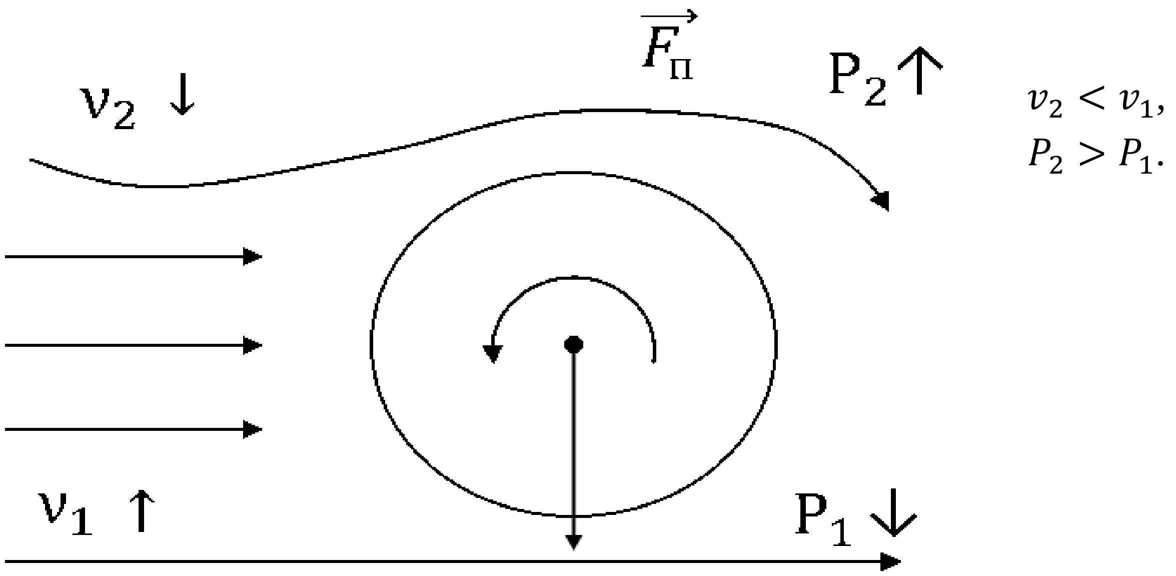


Рис. 1.8.6

Вследствие вязкости скорость течения увеличивается со стороны, где направления скорости v потока и скорости вращения цилиндра совпадают, и уменьшается со стороны, где они противоположны. Согласно уравнению Бернулли давление с одной стороны увеличивается, а с другой уменьшается. Разница давлений создаёт поперечную силу $F_п$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения физических понятий: сплошная среда, линии тока, трубка тока.
2. Запишите условие неразрывности струи.
3. Какие жидкости считают несжимаемыми?
4. Запишите уравнение Бернулли.
5. Что показывает число Рейнольдса?

6. Какое движение жидкости или газа называют ламинарным?

7. Какое движение жидкости или газа называют турбулентным?

8. Сформулируйте две причины возникновения силы лобового сопротивления.

9. Поясните возникновение подъёмной силы для крыла самолёта.

Задания

1. Проанализируйте материал данной темы: по полному курсу лекций по разделу «Механика» [1]; физическим лекционным демонстрациям по механике [2]. Эти материалы понадобятся вам на экзамене по физике.

2. В тетради по лекциям в конце темы «Элементы механики жидкости и газа» дайте письменно ответы на вопросы для самоконтроля.

3. По вопросам для самоконтроля подготовьтесь к опросу, который будет проведён в начале следующего занятия.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тема 1
КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Физические величины

Обозначение	Название	Единица измерения	Расшифровка
r	радиус-вектор	м	метр
t	время	с	секунда
v	скорость	м/с	метр в секунду
a	ускорение	м/с^2	метр на секунду в квадрате
a_τ	тангенциальное ускорение	м/с^2	метр на секунду в квадрате
a_n	нормальное ускорение	м/с^2	метр на секунду в квадрате
R	радиус кривизны	м	метр
φ	угол поворота	рад	радиан
ω	угловая скорость	рад/с	радиан на секунду
ε	угловое ускорение	рад/с^2	радиан на секунду в квадрате
T	период	с	секунда
ν	частота	с$^{-1}$	секунда в минус первой степени

Основные формулы

• Положение материальной точки в пространстве задаётся радиус-вектором

$$\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z},$$

где e_x, e_y, e_z – единичные векторы направлений (орты); x, y, z – координаты точки.

Модуль радиус-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- Вектор скорости материальной точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора $\vec{v}$ на координатные оси.

Проекция вектора $\vec{v}$ на координатную ось равна производной по времени соответствующей координаты

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

- Вектор ускорения материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Проекция вектора $\vec{a}$ на координатную ось равна производной по времени соответствующей скорости

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

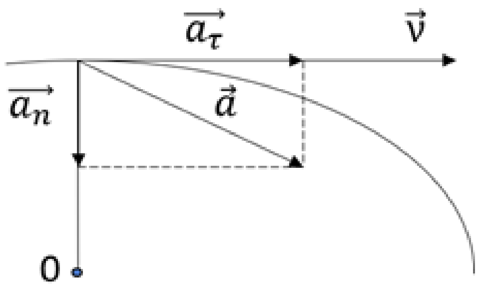


Рис. 2.1.1

- При криволинейном движении материальной точки ускорение можно представить, как сумму тангенциальной и нормальной составляющей (рис. 2.1.1)

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}.$$

Модуль тангенциального ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

Модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

- Вращательное движение

Угловая скорость

$\vec{\omega}(t) = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

Угловое ускорение

$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Угловая скорость и период обращения

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Угловая скорость и частота обращения

$\omega = 2\pi\nu$.

- Связь линейных и угловых характеристик

Связь линейной и угловой скорости

$v = R\omega$.

Связь тангенциального и углового ускорения

$a_\tau = R\varepsilon$.

Связь нормального ускорения и угловой скорости

$a_n = \omega^2 R$.

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки имеет вид $x = A + Bt + Ct^4$, где A = 1,0 м, B = 2,0 м/с, C = –0,5 м/с^4. Найдите координату, проекции скорости и ускорения точки в момент времени t = 3 с.

Решение

Дано
$x = A + Bt + Ct^4$,
A = 1,0 м,
B = 2,0 м/с,
C = –0,5 м/с^4,
t = 3 с.
x, v_x, a_x = ?

Координату точки x найдём, подставив числовые значения в уравнение движения

$x = 1 + 2 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 81 = -33{,}5$ м.

Проекция скорости точки

$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 4Ct^3$.

Проекция ускорения точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12Ct^2.$$

В момент времени t = 3 с

$v_x = 2{,}0 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 27 = -52{,}0$ м/с,

$a_x = -12 \cdot 0{,}5 \cdot 9 = -54{,}0$ м/с^2.

Следовательно, точка движется в отрицательном направлении оси *OX* ускоренно.

Ответ: x = –33,5 м; v_x = –52,0 м/с; a_x = –54,0 м/с^2.

Пример 2. Зависимость пройдённого телом пути по окружности радиусом R = 3 м задаётся уравнением $s = At^2 + Bt$ (A = 0,4 м/с^2, B = 0,1 м/с). Определите для момента времени t = 1 с после начала движения ускорение: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное.

Решение

Дано	
$s = At^2 + Bt$, A = 0,4 м/с^2, B = 0,1 м/с, R = 3 м, t = 1 с.	
$a_n, a_\tau, a = ?$	

Тело движется по окружности. Чтобы найти нормальное и тангенциальное ускорения, необходимо воспользоваться формулами

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Зависимость скорости тела от времени неизвестна, найдём её по формуле

$$v = \frac{ds}{dt} = 2At + B. \quad (3)$$

Подставим выражение (3) в формулы для нормального (1) и тангенциального (2) ускорений

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2At + B)^2}{R},$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Модуль полного ускорения точки можно найти по следующей формуле

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{(2A)^2 + (\frac{(2At + B)^2}{R})^2}.$$

Выполним числовую подстановку и запишем ответ

$$a_n = \frac{(2 \cdot 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}1)^2}{3} = 0{,}27 \text{ м/с}^2,$$

$$a_\tau = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a = \sqrt{0{,}27^{\,2} + 0{,}8^2} = 0{,}84 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 0{,}27$ м/с^2, $a_\tau = 0{,}8$ м/с^2, $a = 0{,}84$ м/с^2.

Пример 3. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом R = 12,5 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,5 см/с^2 (рис. 2.1.2). Определите: 1) момент времени, при котором вектор ускорения a образует с вектором скорости v угол α = 45°; 2) путь, пройдённый за это время движущейся точкой.

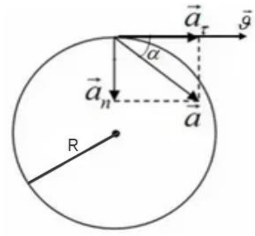


Рис. 2.1.2

Решение

R = 12,5 см = 0,125 м,
a_τ = 0,5 см/с^2 = 5 · 10^{-3} м/с^2,
α = 45°.

$t, s = ?$

Вектор скорости сонаправлен с вектором тангенциального ускорения, вектор нормального ускорения перпендикулярен вектору скорости, а следовательно, и тангенциальному ускорению. Значит, можно записать

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$

Нормальное ускорение найдём по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Скорость найдём, используя тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \mathrm{const} v = \int_0^t a_\tau dt = a_\tau \cdot t. \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1)

$$a_n = \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R}.$$

Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R}}{a_\tau} = \frac{a_\tau \cdot t^2}{R} t = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\alpha \cdot R}{a_\tau}}.$

Подставим числовые значения

$t = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}45 \cdot 0{,}125}{5 \cdot 10-3}} = 5$ с.

Найдём путь, пройдённый за это время движущейся точкой,

$$v = \frac{ds}{dt} s = \int_0^t v dt = \int_0^t a_\tau \cdot t\ dt = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2},$$

$s = \frac{0{,}5 \cdot 5^2}{2} = 6{,}25$ м.

Ответ: $t = 5$с, $s = 6{,}25$ м.

Пример 4. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2{,}0$ рад/с^2. Найдите полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0{,}10$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4{,}0$ с.

Решение

$\varphi = A + Bt + Ct^2$,
$A = 10$ рад,
$B = 20$ рад/с,
$C = -2{,}0$ рад/с^2,
$R = 0{,}10$ м,
$t = 4{,}0$ с.

$a = ?$

Полное ускорение a точки, движущейся по окружности, равно геометрической сумме тангенциального ускорения a_τ, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения a_n, направленного к центру окружности (рис. 2.1.3)

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}.$$

Поскольку векторы a_τ и a_n взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}. \qquad (1)$$

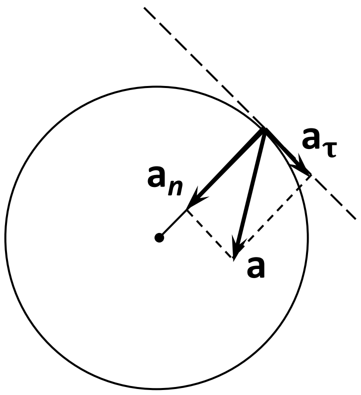


Рис. 2.1.3

Модули тангенциального и нормального ускорений точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon R, a_n = \omega^2 R, \qquad (2)$$

где β, ω – модули углового ускорения и угловой скорости.

Подставив выражения (2) в формулу (1), получим

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (3)$$

Угловую скорость ω найдём, взяв первую производную угла поворота по времени (см. условие задачи). Тогда в момент времени $t = 4{,}0$ с модуль угловой скорости

$\omega = d\varphi / dt = B + 2Ct = 4{,}0$ рад/с.

Угловое ускорение найдём, взяв первую производную от угловой скорости по времени,

$\varepsilon = d\omega / dt = 2C = -4{,}0$ рад/с^2.

Подставив числовые значения ω, ε и R в формулу (3), найдём $a = 1{,}6$ м/с^2.

Ответ: $a = 1{,}6$ м/с^2.

Пример 5. Твёрдое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = ct\vec{e_x} + bt^2\vec{e_y}$, где c = 0,5 рад/с^2, b = 0,06 рад/с^3, $\vec{e_x}$ и $\vec{e_y}$ – орты осей x и y. Найдите: 1) модули угловой скорости и углового ускорения в момент t = 10 с; 2) угол между векторами угловой скорости и углового ускорения в этот момент.

Решение

$\vec{\omega} = ct\vec{e_x} + bt^2\vec{e_y}$,
c = 0,5 рад/с^2,
b = 0,06 рад/с^3,
t = 10 с.
ω, ε, α = ?

Задачи на кинематику вращательного движения решают подобно задачам на кинематику поступательного движения. Поэтому вектор угловой скорости можно представить в виде

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \omega_x\vec{e_x} + \omega_y\vec{e_y} + \omega_z\vec{e_z}.$$

Модуль угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Из условия $\omega_x = ct$, $\omega_y = bt^2$, $\omega_z = 0$.

$$\omega = \sqrt{(ct)^2 + (bt^2)^2},$$

$$\omega = \sqrt{(0{,}5 \cdot 10)^2 + (0{,}06 \cdot 10^2)^2} = 7{,}81 \text{ рад/с}.$$

Вектор углового ускорения находят как первую производную угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \varepsilon_x\vec{e_x} + \varepsilon_y\vec{e_y} + \varepsilon_z\vec{e_z}.$$

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}.$$

Найдём вектор углового ускорения и его модуль

$$\vec{\varepsilon} = c\vec{e_x} + 2bt\vec{e_y},$$

$$\varepsilon_x = c, \varepsilon_y = 2bt, \varepsilon_z = 0,$$

$$\varepsilon = \sqrt{(c)^2 + (2bt)^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{(0{,}5)^2 + (2 \cdot 0{,}06 \cdot 10)^2} = 1{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Найдём угол между вектором угловой скорости и вектором углового ускорения в момент времени t = 10 с через скалярное произведение векторов

$$\vec{\omega}\,\vec{\varepsilon} = \omega\,\varepsilon\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\omega}\,\vec{\varepsilon}}{\omega\,\varepsilon},$$
$$\vec{\omega}\,\vec{\varepsilon} = \left(ct\overrightarrow{e_x} + bt^2\overrightarrow{e_y}\right)\left(c\overrightarrow{e_x} + 2bt\overrightarrow{e_y}\right) = c^2t + 2b^2t^3,$$
$$\vec{\omega}\,\vec{\varepsilon} = (0{,}5)^2 \cdot 10 + 2 \cdot 0{,}06^2 \cdot 10^3 = 9{,}7,$$
$$\cos\alpha = \frac{9{,}7}{7{,}81 \cdot 1{,}3} = 0{,}955,$$
$$\alpha = \arccos(0{,}955) = 17°.$$

Ответ: $\omega = 7{,}81$ рад/с, $\varepsilon = 1{,}3$ рад/с^2, $\alpha = 17°$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\overrightarrow{e_x} + 3t^2\overrightarrow{e_y}$, где $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ – орты осей x и y. Определите для момента времени t = 1 с: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.

2. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\overrightarrow{e_x} + 3t\overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z}$. Определите: 1) скорость v; 2) ускорение a; 3) модуль скорости в момент времени t = 2 с.

3. Радиус-вектор точки A относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r} = ct\overrightarrow{e_x} - bt^2\overrightarrow{e_y}$, где c и b – положительные постоянные, $\overrightarrow{e_x}$ и $\overrightarrow{e_y}$ – орты осей x и y. Найдите: 1) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразите её график; 2) зависимости от времени векторов скорости v, ускорения a и модулей этих величин; 3) зависимость от времени угла α между векторами a и v.

4. Зависимость пройдённого телом пути s от времени t выражается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$ (A = 2 м/с, B = 3 м/с^2, C = 4 м/с^3). Запишите выражения для скорости и ускорения. Определите для момента времени t = 2 с после начала движения: 1) пройдённый путь; 2) скорость; 3) ускорение.

5. Кинетические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $B_1 = B_2$, $C_1 = -2$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^2. Определите: 1) момент времени, для которого скорости этих точек будут равны; 2) ускорение a_1 и a_2 для этого момента.

6. Частица движется в плоскости XY по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β – положительные постоянные. Найдите: 1) уравнение траектории частицы $y(x)$; 2) скорость v и ускорение a в зависимости от времени t.

7. Точка движется в плоскости XY по закону $x = b\sin\omega t$, $y = b(1 - \cos\omega t)$, где b и ω – положительные постоянные. Найдите: 1) путь s, проходимый точкой за время τ; 2) угол между векторами скорости и ускорения точки.

8. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом R = 4 м, задаётся уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ (A = 1 м/с^2, B = 6 м/с^3, C = 9 м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройдённый точкой за время t_1 = 5 с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени t_2 = 1 с.

9. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задаётся уравнением $v = At + Bt^2$ (A = 0,3 м/с^2; B = 0,1 м/с^3). Определите угол α, который образует вектор полного ускорения a с радиусом колеса через 2 с от начала движения.

10. Материальная точка движется по окружности радиусом R = 2,5 м с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 10 см/с^2. Найдите момент времени t, когда вектор полного ускорения a образует с вектором скорости v угол α = 45°. Определите полное ускорение точки a в этот момент времени.

11. Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе колеса, больше её тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол α = 30° с вектором её линейной скорости?

12. Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 5 см/с^2. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: 1) равно тангенциальному; 2) вдвое больше тангенциального?

13. Точка движется по окружности со скоростью $v = bt$, где b = 0,5 м/с^2. Найдите её полное ускорение в момент, когда она пройдёт 0,1 длины окружности после начала движения.

14. Точка движется по дуге окружности радиусом R. Её скорость зависит от пройдённого пути s по закону $v = b\sqrt{s}$, где b – постоянная. Найдите угол α между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от s.

15. Точка движется по плоскости так, что её тангенциальное ускорение $a_\tau = c$, а нормальное ускорение $a_n = bt^4$, где c и b – положительные постоянные, t – время. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найдите зависимости от пройдённого пути s радиуса кривизны R траектории точки и её полного ускорения a.

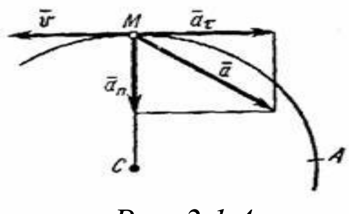


Рис. 2.1.4

16. Точка движется по дуге окружности радиусом R = 2 м по закону $s = 2\sin(\frac{\pi}{4}t)$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ (рис. 2.1.4). Определите скорость и ускорение точки в момент времени t = 1 с.

17. Тело бросили под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Найдите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения через время $t = 5$ с после начала движения тела.

18. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε = 3 рад/с. Определите радиус колеса, если через время t = 1 с после начала движения полное ускорение колеса равно a = 7,5 м/с^2.

19. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$рад/с^2. Через какое количество времени после начала вращения полное ускорение произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^\circ$ с её скоростью?

20. Диск радиусом R = 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задаётся уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2, D = 1 рад/с^3). Определите для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a.

21. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задаётся уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2 и D = 1 рад/с^3. Найдите радиус R колеса, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, нормальное ускорение $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

22. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задаётся уравнением $\varphi = At^2$ (A = 0,5 рад/с^2). Определите к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное ускорение a.

23. Колесо вращается вокруг неподвижной оси, при этом угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где β = 0,20 рад/с^2. Найдите полное ускорение a точки на ободе колеса в момент t = 2,5 с, если скорость точки в этот момент ϑ = 0,65 м/с.

24. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задаётся уравнением $\varphi = A + Bt^3$ (A = 2 рад; B = 4 рад/с^3). Определите для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение a_n в момент времени t = 2 с; 2) тангенциальное ускорение для этого же момента времени; 3) угол поворота φ, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45°$.

25. Частица A движется по окружности радиусом R = 50 см с постоянной угловой скоростью ω = 0,40 рад/с. Найдите модуль скорости частицы, а также модуль и направление вектора её полного ускорения.

26. Твёрдое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = 4t^2\overrightarrow{e_x} - 2t\overrightarrow{e_y}$, где $\overrightarrow{e_x}$ и $\overrightarrow{e_y}$ – орты осей x и y. Найдите: 1) момент времени, в который модули угловой скорости и углового ускорения будут равны; 2) угол между векторами угловой скорости и углового ускорения в этот момент.

27. Тело участвует в двух вращательных движениях, происходящих со скоростями $\vec{\omega}_1 = bt^2\overrightarrow{e_x}$ и $\vec{\omega}_2 = 2\mathrm{b}t^2\overrightarrow{e_y}$ (b = 1,0 рад/с^3). Определите: 1) на какой угол φ повернётся тело за первые 3,0 с; 2) какой угол составляет ось вращения, вокруг которой происходит поворот, с осью X.

28. Найдите радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии r = 5 см ближе к оси колеса.

29. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота меняется в зависимости от времени t по закону $\varphi = 2\pi(at - \frac{bt^2}{2})$($a > 0$, $b > 0$). Найдите момент времени, в который тело остановится, а также число полных оборотов тела N до остановки.

30. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Через некоторый промежуток времени t после начала движения угол между полным ускорением и радиусом окружности равен 45°. Чему равно угловое ускорение точки?

Тема 2
ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Физические величины

Обозначение	Название	Единица измерения	Расшифровка
F	сила	Н	ньютон
m	масса	кг	килограмм
p	импульс	кг · м/с	килограмм на метр в секунду
g	ускорение свободного падения	м/с^2	метр на секунду в квадрате
k	коэффициент жёсткости пружины	Н/м	ньютон на метр
μ	коэффициент трения	–	–
N	сила реакции опоры	Н	ньютон

Основные формулы

- Равнодействующая сила

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i},$$

где $\sum_i \vec{F_i}$ – сумма всех сил, действующих на тело.

- II закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{m}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

где m – масса тела, a – ускорение тела, v – скорость тела, p – импульс.

- Сила тяжести

$$F_{тяж} = mg,$$

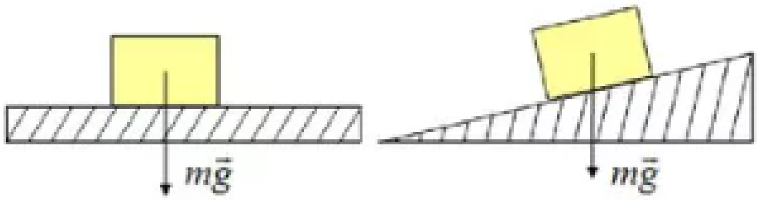
где g – ускорение свободного падения (g = 9,8 м/с^2 ≈ 10 м/с^2).

- Вес тела (рис. 2.2.1, *а, б*)

$P = mg$ – если опора неподвижна,

$P = mg - ma$ – если опора движется вертикально вниз,

$P = mg + ma$ – если опора движется вертикально вверх.



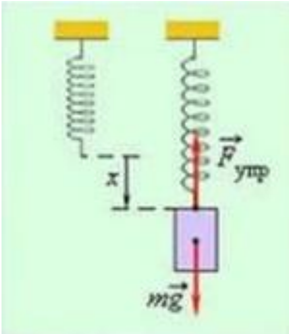
а) *б)*

Рис. 2.2.1

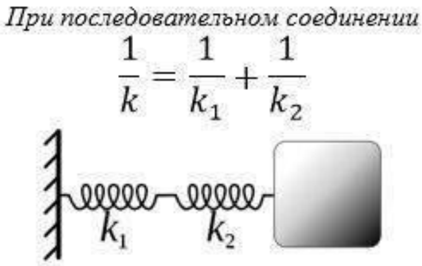
- Сила упругости (закон Гука) (рис. 2.2.2, *а, б, в*)

$F_{упр} = -kx,$

где k – коэффициент упругости (жёсткость в случае пружины), x – деформация тела.



а)



б) *в)*

Рис. 2.2.2

- Сила трения (рис. 2.2.3)

$F_{тр} = \mu N,$

где μ – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

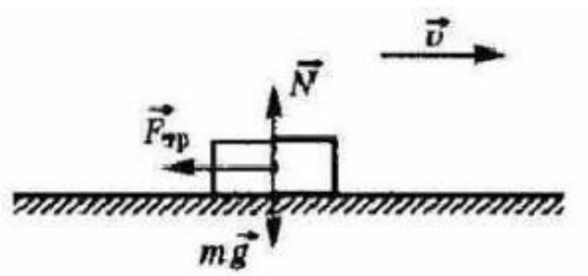


Рис. 2.2.3

- Закон всемирного тяготения (рис. 2.2.4)

$F_{тяг} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$

где G – гравитационная постоянная ($6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2); m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки или однородные шары).

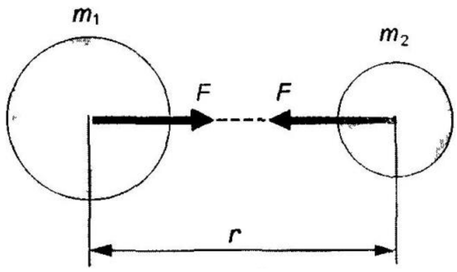


Рис. 2.2.4

Алгоритм решения задач на II закон Ньютона

1. Прочитайте внимательно условие задачи. Выясните, какое тело движется. Под действием каких сил? Каков характер движения?

2. Сделайте чертёж. Изобразите оси координат, тело, все действующие на тело силы, а также направление вектора ускорения.

3. Запишите уравнение II закона Ньютона в векторном виде.

4. Запишите уравнение II закона Ньютона для проекций на оси координат.

5. Найдите все величины, входящие в эти уравнения.

6. Решите систему уравнений относительно неизвестной величины.

Примеры решения задач

Пример 1. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найдите значения этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

Решение

$m = 2$ кг,
$x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$,
$C = 1$ м/с^2,
$D = -0{,}2$ м/с^3,
$t_1 = 2$ с,
$t_2 = 5$ с.

F_1, F_2, t_3 – ?

Согласно II закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{m}\right). \qquad (1)$$

Скорость материальной точки найдём по формуле

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) получим

$F = m \dfrac{d^2x}{dt^2},$

$$F = m(2C + 6Dt) \qquad (3)$$

$F_1 = 2(2 \cdot 1 + 6(-0,2)2) = -2,8$ Н,

$F_2 = 2(2 \cdot 1 + 6(-0,2)5) = -8$ Н.

Подставив в (3) значение $F = 0$, найдём время t_3

$0 = m(2C + 6Dt_3),$

$t_3 = -\dfrac{C}{3D} = -\dfrac{1}{3 \cdot (-0,2)} \approx 1,67$ с.

Ответ: $F_1 = -2,8$ Н, $F_2 = -8$ Н, $t_3 \approx 1,67$ с.

Пример 2. На частицу действует сила $\vec{F} = 10t\overrightarrow{e_x} + 3t^2\overrightarrow{e_y}$, где $\overrightarrow{e_x}$ и $\overrightarrow{e_y}$ – орты осей X, $У$. Найдите модуль импульса частицы в момент времени $t = 2,0$ с.

Решение

Дано	
$\vec{F} = 10t\overrightarrow{e_x} + 3t^2\overrightarrow{e_y}$,	Согласно II закону Ньютона
$t = 2,0$ с.	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}.$
$p - ?$	

Тогда

$d\vec{p} = \vec{F}dt,$

$\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_0^t (10t\overrightarrow{e_x} + 3t^2\overrightarrow{e_y})\,dt =$

$= \dfrac{10t^2}{2}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{3t^3}{3}\overrightarrow{e_y} = 5t^2\overrightarrow{e_x} + t^3\overrightarrow{e_y}.$

Модуль импульса можно найти по формуле

$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2},$

где $p_x = 5t^2$, $p_y = t^3$;

$p = \sqrt{(5t^2)^2 + (t^3)^2} = \sqrt{(5 \cdot 2^2)^2 + (2^3)^2} = 4\sqrt{29} \approx 21,5$ кг · м/с.

Ответ: 21,5 кг · м/с.

Пример 3. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой M = 2,0 кг, на котором находится брусок массой m = 1,0 кг. Оба бруска соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с постоянным ускорением $a = g / 2$? Коэффициент трения между брусками μ = 0,5. Трением между нижним бруском и столом пренебречь.

Решение

$M = 2{,}0$ кг, $m = 1{,}0$ кг, $a = g / 2$, $g = 9{,}8$ м/с^2, $\mu = 0{,}5$.	Горизонтальные силы, действующие на оба бруска, показаны на рис. 2.2.5. По III закону Ньютона сила трения $F_{тр1}$, действующая на брусок массой m, равна по величине и противоположна по направлению силе трения $F_{тр2}$, действующей на брусок массой M со стороны бруска массой m,
F – ?	$F_{тр} = F_{тр1} = F_{тр2}$.

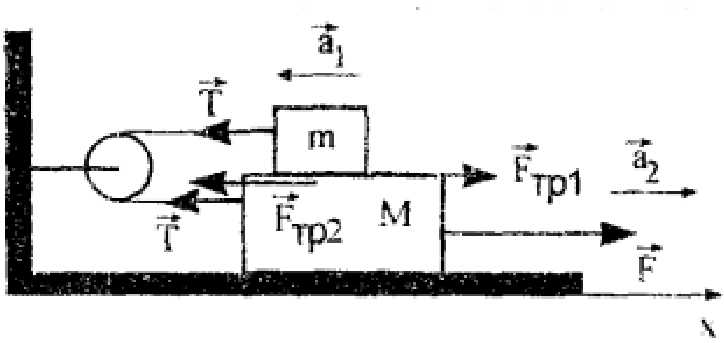


Рис. 2.2.5

Ускорения брусков одинаковы, так как они связаны нерастяжимой нитью

$a_1 = a_2 = a$.

Запишем II закон Ньютона для брусков массой M и m в векторном виде

$$\vec{F} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{тр}} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_{тяж1}} = M\vec{a},$$

$$\vec{T} + \overrightarrow{F_{тр}} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{тяж2}} = m\vec{a}.$$

Запишем II закон Ньютона для брусков массой M и m в проекциях на ось X

$$F - F_{тр} - T = Ma, \quad (1)$$

$$-T + F_{тр} = ma. \quad (2)$$

Сила трения, действующая на брусок m,

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (1) – (3), получим величину искомой силы

$F = a(M + m) + 2mg\mu$.

$F = 9{,}8 : 2(1{,}0 + 2{,}0) + 2 \cdot 1{,}0 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 24{,}5$ Н.

Ответ: $F = 24{,}5$ Н.

Пример 4. Тормозная система развивает силу тяги, пропорциональную времени $F = -ct$, где $c = \text{const}$. Пренебрегая трением, определите, через какое время от момента начала торможения автомобиль массой m остановится. Найдите тормозной путь. К моменту торможения автомобиль имел скорость v_0.

Решение

$F = -ct$,
$c = \text{const}$,
v_0,
m.

---

t_1, x_1 – ?

На автомобиль действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяги тормозной системы $\vec{F} = -ct\vec{i}$, где i – единичный орт направления оси OX (рис. 2.2.6). Согласно II закону Ньютона векторная сумма всех сил, действующих на автомобиль, равна скорости изменения импульса автомобиля

$$m\left(\frac{d\vec{v}(t)}{m}\right) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

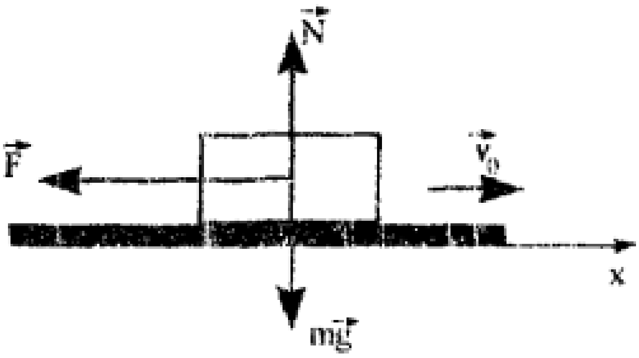


Рис. 2.2.6

В проекциях на ось OX имеем

$$m\left(\frac{dv(t)}{m}\right) = -ct.$$

Разделим переменные и проинтегрируем данное выражение с учётом начальных условий $v = v_0$ при $t_0 = 0$. Получим уравнение изменения скорости автомобиля с течением времени t

$$v = v_0 - \frac{ct^2}{2m}. \quad (1)$$

В момент остановки скорость автомобиля v = 0 м/с. Тогда время движения автомобиля до остановки t_1 может быть найдено из уравнения

$$0 = v_0 - \frac{ct_1^2}{2m}.$$

Отсюда найдём, что время до остановки определяется по формуле

$$t_1 = \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}. \quad (2)$$

Величину тормозного пути x_1 получим интегрированием выражения (1) для скорости, полагая, что $x_0 = 0$ при $t_0 = 0$

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (v_0 - \frac{ct^2}{2m})dt,$$

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{c{t_1}^3}{6m}. \quad (3)$$

Подставив в (3) выражение для времени остановки (2), получим:

$$x_1 = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}.$$

Ответ: $t_1 = \sqrt{\frac{2mv_0}{c}} x_1 = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}.$

Пример 5. Искусственный спутник Земли (ИЗС) имеет круговую орбиту, удалённую от поверхности Земли на расстояние $h = 260$ км. Определите период обращения спутника T относительно центра Земли. Радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ км.

Решение

$h = 2{,}60 \cdot 10^5$м,
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$м.
$T = ?$

На ИЗС действует только сила притяжения (тяготения) к Земле (силой тяготения со стороны Луны и Солнца пренебрегаем), которая сообщает спутнику нормальное (центростремительное) ускорение,

$$a_n = \frac{v^2}{R + h}, \quad (1)$$

где v – скорость спутника относительно центра Земли; $(R + h)$ – радиус круговой орбиты спутника.

Применим II закон Ньютона для ИЗС

$$ma_n = F_т, \tag{2}$$

где m – масса спутника; $F_т$ – сила тяготения, которая определяется законом всемирного тяготения.

Для данной задачи

$$F_т = G\frac{mM}{(R+h)^2}, \tag{3}$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли.

Учитывая (1) и (3), из II закона Ньютона (2) найдём

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}. \tag{4}$$

Применяя второй закон Ньютона к свободно падающему телу, находящемуся у поверхности Земли ($h = 0$), получим с учётом (3)

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{5}$$

Поделив (4) на (5), найдём скорость ИЗС

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}. \tag{6}$$

Полагая движение спутника по круговой орбите равномерным, запишем

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) найдём период обращения спутника

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g}}.$$

Если положить ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, то получим

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14(6{,}4 \cdot 10^6 + 2{,}60 \cdot 10^5)}{6{,}4 \cdot 10^6}\sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6 + 2{,}60 \cdot 10^5}{9{,}8}} = 90 \text{ мин.}$$

Ответ: 90 мин.

Задачи для самостоятельного решения

31. Тело движется прямолинейно под действием постоянной силы F = 15 Н. Зависимость координаты тела от времени имеет вид $x = 10 - 5t + 2t^2$ (м). Найдите массу тела.

32. Тело массой m = 0,5 кг движется прямолинейно, причём уравнение движения имеет вид $x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ (м), где C = 5 м/с^2 и D = 1 м/с^3. Найдите силу, действующую на тело в конце первой секунды.

33. Под действием силы F = 10 Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройдённого телом пути s от времени t даётся уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где C = 1 м/с^2. Найдите массу m тела. Определите изменение импульса тел за t = 2 с.

34. Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройдённого телом пути s от времени t даётся уравнением $s = A \cdot \sin(\omega t)$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найдите силу F, действующую на тело через время t = 1/6 с после начала движения.

35. Тело массой m движется в плоскости XOY по закону $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\sin(\omega t)$, где A, B и ω – постоянные. Определите модуль силы, действующей на тело.

36. Найдите удлинение буксирного троса с жёсткостью k = 100 кН/м при буксировке автомобиля массой m = 2 т с ускорением a = 0,5 м/с^2 (рис. 2.2.7).

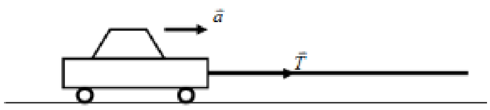


Рис. 2.2.7

37. Материальная точка массой m = 50 г, прикреплённая к пружине длиной l = 30 см, вращается в горизонтальной плоскости. Конец пружины закреплён в центре вращения (рис. 2.2.8). При какой частоте вращения пружина удлинится на Δl = 5 см, если жёсткость пружины K = 300 Н/м?

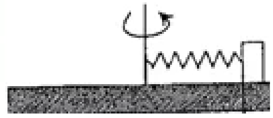


Рис. 2.2.8

38. Каким должен быть минимальный коэффициент трения, чтобы автомобиль, движущийся со скоростью v = 60 км/ч, смог сделать поворот с радиусом кривизны R = 200 м?

39. Найдите радиус кривизны моста, если автомобиль, движущийся со скоростью v = 19,6 м/с, оказался в состоянии невесомости на его середине.

40. Диск радиусом R = 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения равным μ = 0,4, найдите частоту n вращения, при которой кубик соскользнёт с диска.

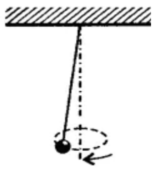


Рис. 2.2.9

41. Грузик, привязанный к шнуру длиной l = 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости (рис. 2.2.9). Какой угол φ образует шнур с вертикалью, если частота вращения n = 1 с$^{-1}$?

42. Грузик, привязанный к нити длиной l = 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости (см. рис. 2.2.9). Определите период T обращения, если нить отклонена на угол φ = 60° от вертикали.

43. На гладком столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязан шнур, ко второму концу которого приложена сила F = 10 Н, направленная параллельно поверхности стола (рис. 2.2.10). Найдите ускорение a бруска, если коэффициент трения бруска о поверхность равен μ = 0,05.

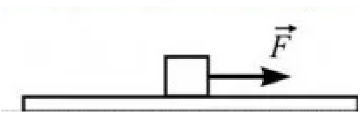


Рис. 2.2.10

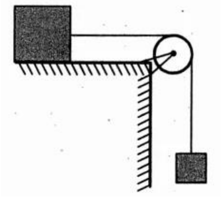


Рис. 2.2.11

44. На столе стоит ящик массой m_1 = 4 кг. К ящику привязан один конец шнура, перекинутого через блок (рис. 2.2.11). С каким ускорением a будет двигаться ящик, если к другому концу шнура привязать груз массой m_2 = 1 кг? Трением пренебречь.

45. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 3 кг (рис. 2.2.12). Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

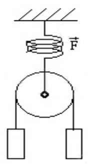


Рис. 2.2.12

46. Два бруска массами m_1 = 1 кг и m_2 = 4 кг, соединённые шнуром, лежат на столе. С каким ускорением a будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F = 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения T шнура, соединяющего бруски, если силу F = 10 Н приложить к первому бруску? Ко второму бруску? Трением пренебречь.

47. На гладком столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикреплённые к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг (рис. 2.2.13). Найдите ускорение a, с которым движется брусок, и силу натяжения T каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

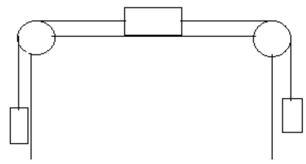


Рис. 2.2.13

48. На столе лежит доска массой M = 1 кг, а на доске – груз массой m = 2 кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской μ_1 = 0,25, а между доской и столом μ_2 = 0,5.

49. На тело массой m = 10 кг, находящееся на наклонной плоскости с α = 20°, действует горизонтально направленная сила F = 8,0 Н (рис. 2.2.14). Пренебрегая трением, определите: а) ускорение тела; б) силу, с которой тело давит на плоскость.

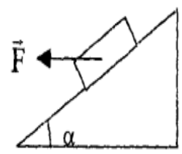


Рис. 2.2.14

50. Брусок массой m_1 = 1 кг покоится на бруске массой m_2 = 2 кг. На нижний брусок начала действовать горизонтальная сила $F = 3t$. В какой момент времени t верхний брусок начнёт проскальзывать? Коэффициент трения между брусками μ = 0,1. Трение между нижним бруском и опорой пренебрежимо мало.

51. Брусок массой m_2 = 5 кг может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нём находится другой брусок массой m_1 = 1 кг. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков μ = 0,3. Определите максимальное значение силы $F_{\max}$, приложенной к нижнему бруску, при которой начнётся соскальзывание верхнего бруска.

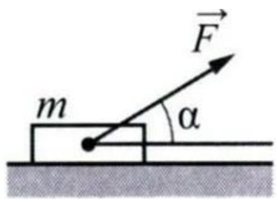


Рис. 2.2.15

52. Брусок движется вдоль горизонтальной поверхности под действием постоянной по величине силы, направленной под углом α к горизонту (рис. 2.2.15). Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен μ = 0,25. При каком значении угла α ускорение бруска вдоль поверхности будет максимальным?

53. На тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени t_0 = 0 начала действовать сила, зависящая от времени, $F = kt$, где k – постоянная величина. Направление этой силы всё время составляет угол α с горизонтом (см. рис. 2.2.15). Найдите: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту.

54. В установке, показанной на рис. 2.2.16, массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы. Трение в блоке не учитывать. Найдите ускорение a, с которым опускается тело массой m_0, и силу натяжения нити T, связывающей тела массами m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен μ.

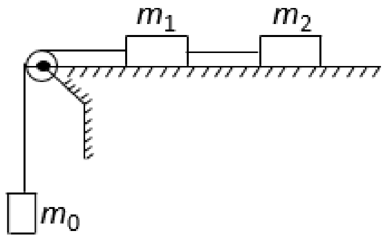


Рис. 2.2.16

55. Невесомый блок укреплён на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30°. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2$ = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок (рис. 2.2.17). Найдите ускорение a, с которым движутся

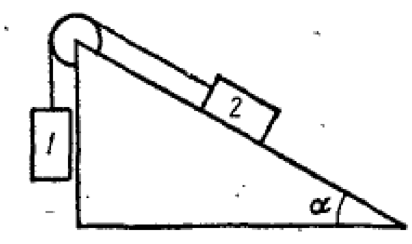


Рис. 2.2.17

гири, и силу натяжения нити T. Трением гири о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь.

56. Невесомый блок укреплён на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок (см. рис. 2.2.17). Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири 2 о наклонную плоскость равен $\mu = 0{,}1$.

57. Невесомый блок укреплён на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

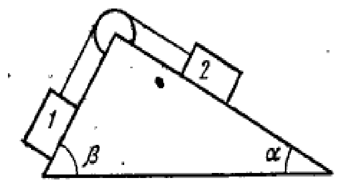


Рис. 2.2.18

58. Невесомый блок укреплён на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок (рис. 2.2.18). Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициенты трения гирь 1 и 2 о наклонные плоскости $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$.

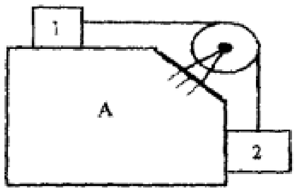


Рис. 2.2.19

59. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него (рис. 2.2.19)? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и телами равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

60. Два тела массами m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам приложены силы, модули которых изменя-

ются по законам $F_1 = ct$ (Н) и $F_2 = 2ct$ (Н), где c – постоянный коэффициент; t – время действия силы (рис. 2.2.20). Определите, в какой момент времени нить порвётся.

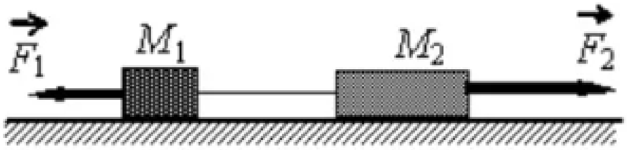


Рис. 2.2.20

61. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $F = F_0 \sin\omega t$, где F_0 и ω – постоянные величины. Найдите путь, пройдённый частицей, в зависимости от времени t.

62. На покоившуюся частицу массой m в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = bt\,(\tau - t)$, где b – постоянная величина, τ – время действия силы. Найдите: а) импульс частицы после окончания действия силы; б) путь, пройдённый частицей за время действия силы.

63. Моторная лодка массой $m = 400$ кг начинает двигаться по озеру. Сила тяги F мотора равна 0,2 кН. Считая силу сопротивления F_c пропорциональной скорости, определите скорость v лодки через $\Delta t = 20$ с после начала её движения. Коэффициент сопротивления $k = 20$ кг/с.

64. Начальная скорость v_0 пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время $t = 0{,}8$ с её скорость уменьшилась до $v = 200$ м/с. Масса пули равна $m = 10$ г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.

65. Кирпич массой m лежит на горизонтальном столе. Коэффициент трения между кирпичом и столом μ. К кирпичу приложена горизонтальная сила F: а) выразите аналитически и графически зависимость силы трения $F_{тр}$ и ускорения кирпича a от величины силы F; б) сделайте то же самое для случая, когда сила F направлена под углом α к плоскости стола (учитывая случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$).

Тема 3
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Физические величины

Обозначение	Название	Единица измерения	Расшифровка
M	момент силы	Н · м	ньютон на метр
J	момент инерции	кг · м^2	килограмм на метр в квадрате
L	момент импульса	кг · м^2/с	килограмм на метр в квадрате, делённый на секунду

Основные формулы

- Центр масс твёрдого тела – точка с радиус-вектором $\vec{r_c}$

$$\vec{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,m_i,$$

где $\vec{r_i}$ – радиус-вектор, определяющий положение этой элементарной массы.

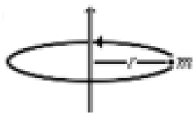
- Момент инерции твёрдого тела

$$J = \int r^2\,dm.$$

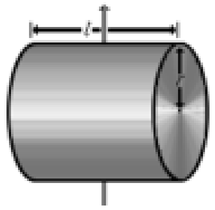
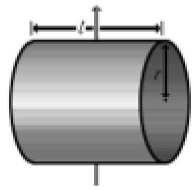
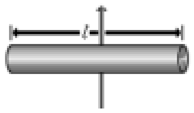
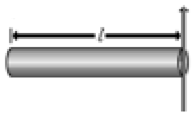
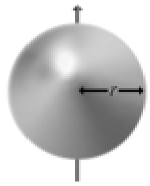
Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей вращения представлены в табл. 2.

Таблица 2

Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей вращения

Тело	Описание	Положение оси a	Момент инерции J_a
	Материальная точка массой m	На расстоянии r от точки, неподвижная	mr^2
	Полый тонкостенный цилиндр или кольцо радиусом r и массой m	Ось цилиндра	mr^2
	Сплошной цилиндр или диск радиусом r и массой m	Ось цилиндра	$\frac{1}{2}mr^2$

Окончание

Тело	Описание	Положение оси a	Момент инерции J_a
	Сплошной цилиндр длиной l, радиусом r и массой m	Ось перпендикулярна образующей цилиндра и проходит через его центр масс	$\frac{1}{4}m \cdot r^2 + \frac{1}{12}m \cdot l^2$
	Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) длиной l, радиусом r и массой m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его центр масс	$\frac{1}{2}m \cdot r^2 + \frac{1}{12}m \cdot l^2$
	Прямой тонкий стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его центр масс	$\frac{1}{12}ml^2$
	Прямой тонкий стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
	Шар радиусом r и массой m	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mr^2$

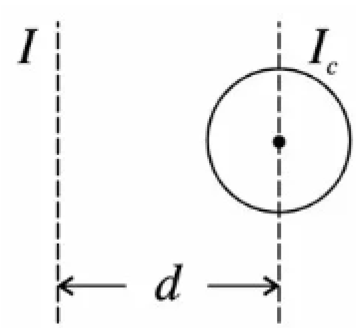


Рис. 2.3.1

- Теорема Гюйгенса – Штейнера

$$J = J_c + md^2,$$

где J – момент инерции тела относительно произвольной оси; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; m – масса тела; d – расстояние между осями

- Момент силы

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

$$|\vec{M}| = rF \sin\alpha\, |\vec{n}|,$$

$$M = J\varepsilon.$$

- Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}],$$

$$|\vec{L}| = rp\sin\alpha\,|\vec{n}|,$$

$$L = J\omega.$$

- Уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определите ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Решение

$m = 80$ г $= 0{,}08$ кг,
$m_1 = 100$ г $= 0{,}1$ кг,
$m_2 = 200$ г $= 0{,}2$ кг.
$a = ?$

Силы, действующие на каждый груз и на блок, изображены на рис. 2.3.2. Направим ось OY вертикально вниз и запишем для каждого груза уравнение движения (II закон Ньютона) в проекциях на эту ось.

Для первого груза

$$m_1g - T_1 = -m_1a, T_1 = m_1g + m_1a. \quad (1)$$

Для второго груза

$$m_2g - T_2 = m_2a, T_2 = m_2g - m_2a. \quad (2)$$

Под действием моментов сил T_1' и T_2' относительно оси Z, перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертёж, блок приобретает угловое ускорение ε. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения имеем

$$T_2'r - T_1'r = J_z\varepsilon, \quad (3)$$

где $\varepsilon = \frac{a}{r}$, $J_z = \frac{1}{2}mr^2$ – момент инерции блока относительно оси Z.

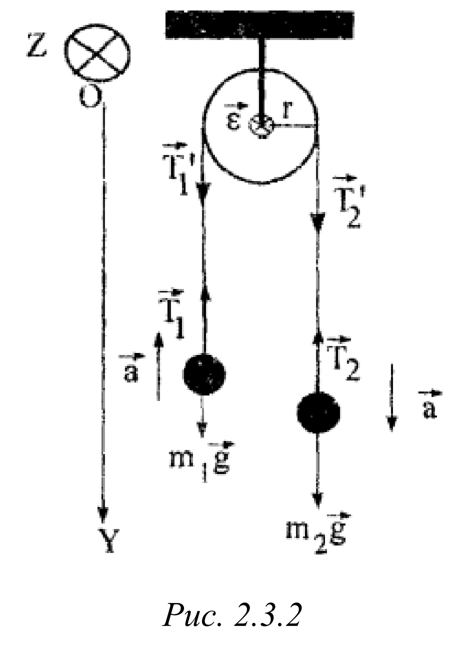


Рис. 2.3.2

Согласно III закону Ньютона, с учётом невесомости нити, имеем $\overrightarrow{T_1'} = -\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2'} = -\overrightarrow{T_2}$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T_1' и T_2' выражения для T_1 и T_2 из (1) и (2)

$$(m_2 g - m_2 a)r - (m_1 g + m_1 a)r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r},$$

откуда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g. \quad (4)$$

После подстановки числовых значений в формулу (4) получим $a = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}2 + \frac{0{,}08}{2}} 9{,}8 = 2{,}9$ м/с^2.

Ответ: $a = 2{,}9$ м/с^2.

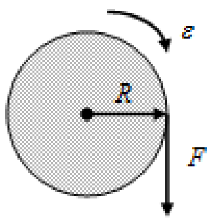


Рис. 2.3.3

Пример 2. К ободу колеса радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 85$ Н. Найдите угловое ускорение ε колеса (рис. 2.3.3). Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

$R = 0{,}5$ м,
$m = 50$ кг,
$F = 85$ Н,
$n = 100$ об/с.

$\varepsilon, t = ?$

Решение

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент касательной силы, приложенной к диску,

$$M = FR. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$M = J\varepsilon, \quad (2)$$

где $J = \frac{1}{2} m R^2$ – момент инерции диска.

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим

$$FR = \frac{1}{2} m R^2 \varepsilon = \frac{2F}{mR}.$$

Время найдём через угловую скорость ω

$$\omega = 2\pi n \text{ и } \omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t,$$

$$2\pi n = \varepsilon t = \frac{2\pi n}{\varepsilon} = \frac{\pi n m R}{F}.$$

Выполним подстановку

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 85}{50 \cdot 0{,}5} = 6{,}8 \text{ рад/с}^2,$$

$$t = \frac{3{,}14 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 0{,}5}{85} \approx 92 \text{ с.}$$

Ответ: $\varepsilon = 6{,}8$ рад/с^2, $t \approx 92$ с.

Пример 3. Во сколько раз уменьшится момент инерции однородного сплошного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции (точка O) и перпендикулярной к плоскости диска, если сделать круглый дисковый вырез, как показано на рис. 2.3.4?

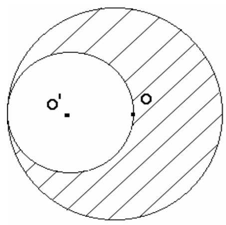


Рис. 2.3.4

Решение

Момент инерции – величина аддитивная. Поэтому момент инерции J_3 диска с вырезом относительно точки O равен разности момента инерции диска относительно точки O $J_1(O)$ и момента инерции малого диска $J_2(O)$, соответствующего вырезанной части, также относительно точки O, т. е. $J_3 = J_1(O) - J_2(O)$.

В задаче найдите отношение $\frac{J_1(O)}{J_3}$. Обозначим массу диска через m, а радиус диска через R. Тогда масса вырезанной части $m/4$, а радиус – $R/2$. Как известно, момент инерции диска относительно оси симметрии равен

$$J_1(O) = \frac{mR^2}{2}.$$

Для вычисления момента инерции $J_2(O)$ используем теорему Штейнера

$$J_2(O) = J_2(O') + \frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

где $J_2(O')$ – момент инерции малого диска, соответствующего вырезанной части, относительно оси симметрии этого диска, проходящего через точку O'.

Окончательно получим

$$J_2(O) = \frac{1}{2}\frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}mR^2.$$

Тогда

$$J_3 = \frac{mR^2}{2} - \frac{3}{32}mR^2 = \frac{13}{32}mR^2.$$

Таким образом, искомое отношение

$$\frac{J_1(O)}{J_3} = \frac{\frac{mR^2}{2}}{\frac{13}{32}mR^2} = \frac{16}{13}.$$

Ответ: момент инерции диска после сделанного выреза уменьшается в 16/13 раз.

Пример 4. На рис. 2.3.5 изображён тонкий однородный стержень длиной l = 0,6 м и массой $2m$, на концах которого прикреплены однородные шары из разных материалов массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$ и радиусами R_1 = 0,2 м и R_2 = 0,3 м. Найдите положение центра масс.

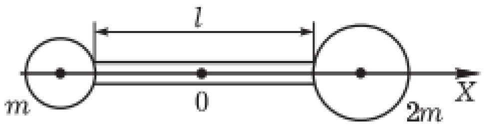


Рис. 2.3.5

Решение

l = 0,6 м, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_{ст} = 2m$, R_1 = 0,2 м, R_2 = 0,3 м.	
$x_c = ?$	

Определим положение центра масс относительно середины стержня. Поскольку шары однородные, центры масс находятся в их геометрических центрах. Координатную ось X проведём вдоль стержня, за начало отсчёта выберем его середину. Координата центра масс стержня в этом случае равна нулю, координаты центров шаров будут

$$x_1 = -\left(\frac{l}{2} + R_1\right), x_2 = \left(\frac{l}{2} + R_2\right).$$

Координату центра масс системы этих тел определим по формуле

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m},$$

$$x_c = \frac{-\left(\frac{l}{2} + R_1\right)m + 2m0 + 2m\left(\frac{l}{2} + R_2\right)}{m + 2m + 2m} =$$

$$= \frac{-\left(\frac{l}{2} + R_1\right) + 2\left(\frac{l}{2} + R_2\right)}{5},$$

$$x_c = \frac{\frac{l}{2} - R_1 + 2R_2}{5} = \frac{\frac{0,6}{2} - 0,2 + 2 \cdot 0,3}{5} = 0,14 \text{ м}.$$

Ответ: центр масс находится правее середины стержня на расстоянии 0,14 м.

Пример 5. Система состоит из частицы 1 массой 1,0 г, расположенной в точке с координатами (1, 1, 1) м, частицы 2 массой 2,0 г, расположенной в точке с координатами (–2, 2, 2) м, частицы 3 массой 3,0 г, расположенной в точке с координатами (–1, 3, –2) м, частицы 4 массой 4,0 г, расположенной в точке с координатами (3, –3, 3) м. Найдите радиус-вектор $\overrightarrow{r_c}$ центра масс системы и его модуль.

Решение

$m_1 = 1{,}0$ г,
$m_1 = 2{,}0$ г,
$m_3 = 3{,}0$ г,
$m_4 = 4{,}0$ г,
$A_1 = (1,1,1)$ м,
$A_2 = (-2,2,2)$ м,
$A_3 = (-1,3,-2)$ м,
$A_4 = (3,-3,3)$ м.
$\overrightarrow{r_c}, r_с = ?$

Запишем выражение для радиус-вектора каждой частицы, используя формулу

$$\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z},$$

$$\overrightarrow{r_2} = -2\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z},$$

$$\overrightarrow{r_3} = -\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + (-2)\overrightarrow{e_z},$$

$$\overrightarrow{r_4} = 3\overrightarrow{e_x} + (-3)\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}.$$

Положение центра масс системы определим выражением

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где m_i – масса i-й частицы системы; $\overrightarrow{r_i}$ – радиус-вектор i-й частицы системы.

Отсюда для радиус-вектора центра масс рассматриваемой системы получим

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\overrightarrow{r_1}m_1 + \overrightarrow{r_2}m_2 + \overrightarrow{r_3}m_3 + \overrightarrow{r_4}m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} =$$

$$= \frac{\begin{array}{c}1{,}0\left(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}\right) + 2{,}0\left(-2\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z}\right) + \\ + 3{,}0\left(-\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + (-2)\overrightarrow{e_z}\right) + 4{,}0(3\overrightarrow{e_x} + (-3)\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z})\end{array}}{1{,}0 + 2{,}0 + 3{,}0 + 4{,}0} =$$

$$= \frac{6\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y} + 11\overrightarrow{e_z}}{10{,}0} = 0{,}6\overrightarrow{e_x} + 0{,}2\overrightarrow{e_y} + 1{,}1\overrightarrow{e_z}.$$

Найдём модель радиус-вектора

$$r_c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}2^2 + 1{,}1^2} = 1{,}27 \text{ м}.$$

Ответ: $\overrightarrow{r_c} = 0{,}6\overrightarrow{e_x} + 0{,}2\overrightarrow{e_y} + 1{,}1\overrightarrow{e_z}$, $r_c = 1{,}27$ м.

Задачи для самостоятельного решения

66. Тело вращается с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Момент инерции тела $J = 24$ кг · м^2. Чему равен момент импульса?

67. Материальная точка массой $m = 1{,}0$ кг движется по окружности радиусом $R = 0{,}5$ м со скоростью $v = 2{,}0$ м/с. Чему равен момент импульса материальной точки?

68. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, $J = 25$ кг · м^2. Ось вращения параллельна оси, проходящей через центр масс, и расположена на расстоянии $l = 1$ м от неё. Чему равен момент инерции тела относительно оси вращения, если масса тела $m = 10$ кг?

69. Определите момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, если радиус диска $R = 5$ м, а его масса $m = 2$ кг?

70. Найдите момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения.

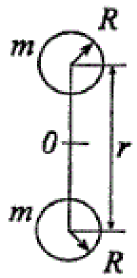


Рис. 2.3.6

71. Два шара одинакового радиуса $R = 5$ см закреплены на концах невесомого стержня (рис. 2.3.6). Расстояние между шарами $r = 0{,}5$ м. Масса каждого шара $m = 1$ кг. Найдите: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции J_2 системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах.

72. Определите момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l = 30$ см и массой $m = 100$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на 1/3 его длины.

73. Вычислите момент инерции J проволочного прямоугольника со сторонами a = 12 см и b = 16 см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон (рис. 2.3.7). Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью τ = 0,1 кг/м.

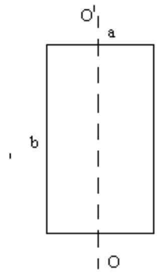


Рис. 2.3.7

74. Два однородных тонких стержня: AB длиной l_1 = 40 см и массой m_1 = 900 г и CD длиной l_2 = 40 см и массой m_2 = 400 г скреплены под прямым углом (рис. 2.3.8). Определите момент инерции J системы стержней относительно оси OO', проходящей через конец стержня AB параллельно стержню CD. Решите эту задачу для случая, когда ось OO' проходит через точку A перпендикулярно плоскости чертежа.

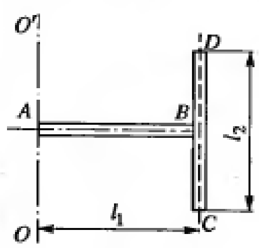


Рис. 2.3.8

75. В однородном диске массой m = 1 кг и радиусом r = 30 см вырезано круглое отверстие диаметром d = 20 см, центр которого находится на расстоянии l = 15 см от оси диска (рис. 2.3.9). Найдите момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

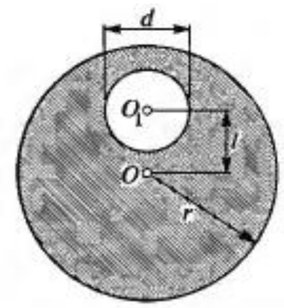


Рис. 2.3.9

76. Из сплошного однородного цилиндра радиусом R сделали полый, удалив внутреннюю часть радиусом R / 2 от оси симметрии. Во сколько раз изменится момент инерции тела относительно указанной оси?

77. Из сплошного однородного цилиндра сделали полый, удалив половину его массы. Как изменится момент инерции J цилиндра относительно его оси и во сколько раз? Как и во сколько раз изменится момент импульса указанных цилиндров, если они вращаются с одинаковой угловой скоростью?

78. В сплошном однородном диске радиусом R просверлили сквозное отверстие радиусом R / 2 от оси симметрии. Во сколько раз изменится момент инерции тела относительно указанной оси?

79. На тело действует сила F = 10 Н. Найдите момент M силы F, если угол между направлением силы и радиус-вектором $\vec{r}$, направленным от центра вращения к центру тяжести тела, равен 30°? Модуль $|\vec{r}|$ = 5 м.

80. Тело вращается под действием момента сил M = 30 Н · м. Если момент инерции тела J = 15 кг · м^2, с каким угловым ускорением движется тело?

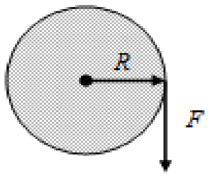


Рис. 2.3.10

81. Сила F = 3 Н действует на диск по касательной к ободу диска (рис. 2.3.10). Радиус диска R = 2 м. Чему равен момент силы F? Куда он направлен?

82. На тело действуют два противоположно направленных момента сил, равных по модулю M_1 = 10 Н · м, M_2 = 20 Н · м. С каким угловым ускорением будет вращаться тело, если его момент инерции равен J = 10 кг · м^2?

83. К ободу однородного диска радиусом R = 0,2 м приложена касательная сила F = 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр}$ = 98,1 Н · м. Найдите массу m дисков, если известно, что диск вращается с угловым ускорением ε = 100 рад/с^2.

84. Тело вращается с угловой скоростью со ω = 5 + 4t (рад/с). Момент инерции тела J = 20 кг · м^2. Найдите приложенный к этому телу момент сил.

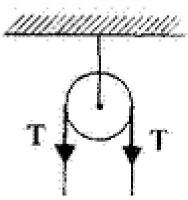


Рис. 2.3.11

85. Через блок массой m = 10 кг и радиусом R = 0,5 м перекинута нить, силы натяжения которой с обеих сторон блока равны T_1 = 2 Н, T_2 = 3 Н (рис. 2.3.11). С каким угловым ускорением вращается блок? Блок считать сплошным диском.

86. На сплошной однородный цилиндр радиусом R = 10 см и массой m_1 = 9,0 кг плотно намотана нить, к концу которой привязан груз массой m_2 = 2,0 кг (рис. 2.3.12). Найдите угловое ускорение цилиндра.

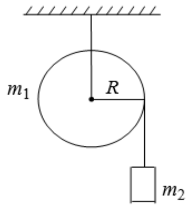


Рис. 2.3.12

87. Блок, имеющий форму диска массой m = 0,4 кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,7 кг. Определите силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

88. Нить с привязанными к её концам грузами массами m_1 = 50,0 г и m_2 = 60,0 г перекинута через блок диаметром D = 4,0 см. Определите момент инерции J блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение ε = 1,5 рад/с^2. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

89. Сплошной диск массой m = 0,2 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс под действием момента сил $M = 0{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н · м. Закон вращения имеет вид $\varphi = 5{,}0 - 1{,}0t + 2{,}0t^2$ (рад). Определите радиус R диска.

90. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра m_1 = 12 кг. На цилиндр намотан шнур, к которому привязана гиря массой m_2 = 1 кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири?

91. На обод маховика диаметром D = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2,0 кг. Определите момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t = 3,0 с приобрёл угловую скорость ω = 9,0 рад/с.

92. Два однородных цилиндра с одинаковыми высотами h и равными массами m вращаются относительно своих осей симметрии. Соотношение плотностей материалов цилиндров $\rho_1 = (3/4)\rho_2$. Сравните

вращающие моменты сил, если угловые ускорения цилиндров одинаковы, а моменты сил трения $M_{тр}$ равны.

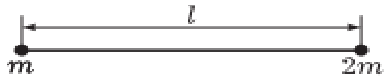


Рис. 2.3.13

93. На рисунке изображён тонкий однородный стержень длиной l = 0,6 м, на концах которого прикреплены маленькие шарики. Стержень невесомый, а массы шариков равны m и $2m$ (рис. 2.3.13). Определите положение их общего центра масс.

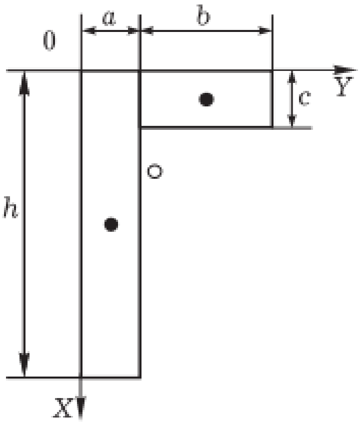


Рис. 2.3.14

94. Найдите положение центра масс буквы Г, вырезанной из однородной металлической пластины (рис. 2.3.14). Размеры её частей, указанных на рисунке, таковы: h = 14 см, a = c = 2 см, b = 6 см.

95. Система состоит из частицы 1 массой m_1 = 0,1 г, частицы 2 массой m_2 = 0,2 г и частицы 3 массой m_3 = 0,3 г. Частица 1 помещается в точке с координатами (1, 2, 3), частица 2 – в точке с координатами (2, 3, 1), частица 3 – в точке с координатами (3, 1, 2) (значения координат даны в метрах). Найдите радиус-вектор r центра масс системы и его модуль.

Тема 4
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Физические величины

Обозначение	Название	Единица измерения	Расшифровка
$E_к$	кинетическая энергия	Дж	джоуль
$E_п$	потенциальная энергия	Дж	джоуль
A	работа	Дж	джоуль
P	мощность	Вт	ватт

Основные формулы

- Закон сохранения импульса

$$\sum \mathrm{P}_i = \mathrm{const}.$$

Импульс замкнутой системы тел (или частиц) остаётся постоянным, т. е. не меняется со временем. Для двух тел (i = 2)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где v_1, v_2 – скорости тел до взаимодействия; u_1, u_2 – скорости тел после взаимодействия.

- Работа, совершаемая силой F при перемещении частицы из точки 1 в точку 2,

$$A = \int_1^2 F ds = \int_1^2 F ds \cos\alpha.$$

где ds – элементарное перемещение частицы; α – угол между перемещением ds и силой F.

- Механическая мощность

$$P = \frac{A}{t}.$$

- Кинетическая энергия частицы

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

- Связь кинетической энергии с работой

$$A = \Delta E_к = E_{к2} - E_{к1},$$

где A – работа всех сил, действующих на частицу; $\Delta E_к$ – приращение кинетической энергии частицы; $E_{к1}$, $E_{к2}$ – кинетическая энергия частицы в моменты времени t_1 и t_2. Выражение обобщается на механическую систему: работа всех сил (внутренних и внешних) равна приращению кинетической энергии системы.

- Потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины

$$E_п = \frac{kx^2}{2};$$

б) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$E_п = mgh,$$

где h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой. Формула справедлива при $h \ll R$, где R – радиус Земли.

- Связь потенциальной энергии с работой консервативных сил

$$A = E_{п1} - E_{п2},$$

где $E_{п1}$, $E_{п2}$ – потенциальная энергия в точках 1 и 2 консервативного поля (например, поля тяжести Земли). Для механической системы под $E_{п1}$, $E_{п2}$следует понимать потенциальную энергию системы в двух её положениях, или конфигурациях (начальном $E_{п1}$ и конечном $E_{п2}$).

- Закон сохранения энергии

$$E = E_к + E_п = \text{const}.$$

Полная механическая энергия E системы, находящейся под действием консервативных сил, сохраняется с течением времени.

- Закон сохранения момента импульса тела и системы тел

$$I\omega_Z = \text{const}.$$

Для системы тел: I – суммарный момент инерции системы; ω_Z – проекция угловой скорости на ось Z.

- Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2}.$$

- Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела

$$E_к = \frac{I_C\omega^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2},$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; v_C – скорость центра масс.

Примеры решения задач

Пример 1. Лодка массой m стоит неподвижно на поверхности озера. На корме и на носу лодки на расстоянии l друг от друга сидят два рыбака массами m_1 и m_2. Для улучшения клёва рыбаки меняются местами. В какую сторону и на какое расстояние переместится лодка?

Решение

m,
m_1,
m_2,
l.

$s = ?$

Система «лодка – рыбаки» не является замкнутой, так как на неё действуют внешние силы: сила тяжести и сила Архимеда. Эти силы уравновешивают друг друга, а сила трения лодки о воду пренебрежимо мала по сравнению с силами взаимодействия рыбаков с лодкой (внутренние силы). Поэтому можно применить закон сохранения импульса. Импульс системы до начала движения рыбаков равен нулю. Следовательно, после начала движения суммарный импульс также равен нулю

$$m\vec{v} + m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ – скорости лодки и рыбаков относительно воды.

Допустим, $m_1 > m_2$ и лодка движется в направлении перемещения рыбака с меньшей массой m_2 (рис. 2.4.1: где цифрами 1 и 2 обозначены положения рыбаков после перемещения лодки). Тогда равенство (1) в проекциях на ось X запишется

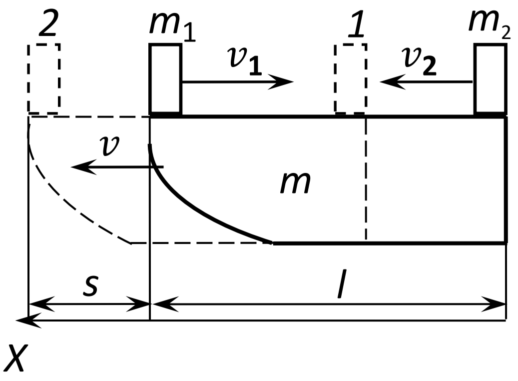


Рис. 2.4.1

$$mv - m_1v_1 + m_2v_2 = 0. \qquad (2)$$

Из рис. 2.4.1 видно

$$v = \frac{s}{t},\ v_1 = \frac{l - s}{t},\ v_2 = \frac{l + s}{t}, \qquad (3)$$

где s – модуль перемещения лодки; t – время движения лодки и рыбаков, которое одинаково для всех тел. Подставляя (3) в (2), найдём

$$s = \frac{(m_1 - m_2)l}{m + m_1 + m_2}.$$

При условии $m_1 < m_2$ и для выбранного направления оси X имеем

$$s = \frac{(m_2 - m_1)l}{m + m_1 + m_2}.$$

Полученные решения можно объединить в одну формулу, если ввести проекцию перемещения лодки на ось *X*,

$$s_x = \frac{(m_1 - m_2)l}{m + m_1 + m_2}.$$

Ответ: при $m_1 > m_2$ проекция $s_x > 0$ и лодка перемещается влево. При $m_1 < m_2$ проекция $s_x < 0$ и лодка перемещается в противоположную сторону.

Пример 2. Снаряд массой m = 10,0 кг летит горизонтально со скоростью v = 200 м/с и разрывается на две части (осколки). Одна часть массой m_1 = 3,0 кг летит вперёд под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью v_1 = 400 м/с. С какой скоростью и в каком направлении летит вторая часть снаряда?

Решение

m = 10,0 кг,	
m_1 = 3,0 кг,	
v = 200 м/с,	
v_1 = 400 м/с,	
$\alpha = 60°$.	
$v_2 = ?$	
β = ?	

Система «снаряд – осколки» не является замкнутой, так как на тела системы действует сила тяжести. Если рассматривать суммарный импульс осколков сразу после разрыва, то он будет равен импульсу снаряда непосредственно до разрыва. Это следует из того, что за время разрыва снаряда импульсы осколков практически не изменяются. Таким образом, к нашей системе можно применить закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (1)$$

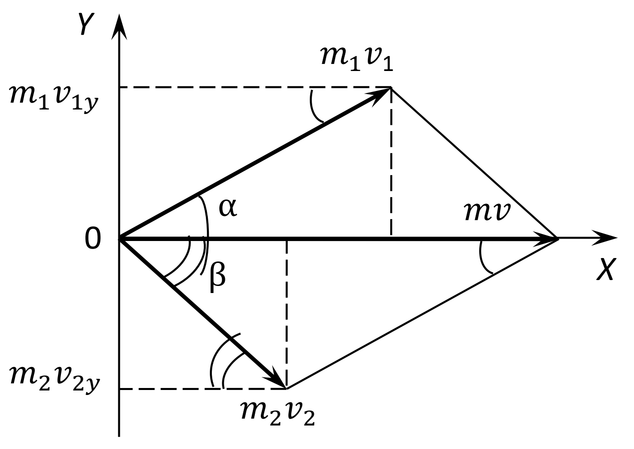


Рис. 2.4.2

где mv – импульс снаряда до разрыва; m_1v_1 , m_2v_2 – импульсы осколков.

Импульсы осколков и снаряда, показаны на рисунке в соответствии с законом сохранения им пульса системы «снаряд – осколки». Спроектируем (1) на оси координат (рис. 2.4.2).

$$mv = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos\beta, \quad (2)$$

$$m_1v_1\sin\alpha - m_2v_2\sin\beta = 0, \quad (3)$$

где β – искомый угол, под которым летит к горизонту вторая часть снаряда, – находится из уравнений (2) и (3)

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{mv - m_1 v_1 \cos\alpha}. \qquad (4)$$

Скорость второй части найдём из уравнения (3)

$$v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{m_2 \sin\beta}. \qquad (5)$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{3 \cdot 400 \cdot \sin 60°}{10 \cdot 200 - 3 \cdot 400 \cdot \cos 60°}\right) = \mathrm{arctg}(0{,}742) = 36{,}6°,$$

$$v_2 = \frac{3 \cdot 400 \cdot \sin 60°}{7 \cdot \sin 36{,}6°} = 250 \text{ м/с}.$$

Подставив числовые данные задачи в (4), найдём $\beta = 36{,}6°$. Тогда из формулы (5) найдём v_2 = 250 м/с.

Задачу можно решить также с использованием теоремы косинусов. Из рис. 2.4.2 видно, что

$$m_2 v_2 = \sqrt{(mv)^2 + (m_1 v_1)^2 - 2mm_1 vv_1 \cos\alpha},$$

откуда найдём v_2. Угол β найдём также из теоремы косинусов

$$(m_1 v_1)^2 = (mv)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2mm_2 vv_2 \cos\beta,$$

откуда

$$\cos\beta = \frac{(mv)^2 + (m_2 v_2)^2 - (m_1 v_1)^2}{2mm_2 vv_2}.$$

При этом закон сохранения импульса (1) используется при построении треугольников, к которым применялась теорема косинусов.

Ответ: $\beta = 36{,}6°$, v_2 = 250 м/с.

Пример 3. Два шара, один массой m_1 = 2 кг, второй m_2 = 3 кг, на горизонтальной плоскости движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях и сталкиваются абсолютно неупруго. Найдите после соударения скорость шаров, направление скорости и часть механической энергии шаров, перешедшей во внутреннюю энергию шаров. До соударения скорость первого шара v_1 = 5 м/с, второго – v_2 = 3 м/с.

Решение

Дано	
$m_1 = 2$ кг,	
$m_2 = 3$ кг,	
$v_1 = 5$ м/с,	
$v_2 = 3$ м/с.	
$v = ?$	
$\dfrac{Q}{E_{к1}} = ?$	

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса системы. Выберем систему координат так, как указано на рис. 2.4.3: ось x совпадает с направлением скорости v_1 тела массой m_1, ось y направлена вдоль скорости v_2 тела массой m_2. После слипания тела полетят со скоростью v, причём

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_x \text{ и } m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_y.$$

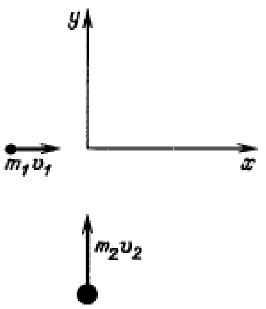


Рис. 2.4.3

До соударения кинетическая энергия системы была равна

$$E_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы после соударения (слипания) тел станет равной

$$E_{к2} = \frac{(m_1 + m_2)(v_x^2 + v_y^2)}{2} = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Таким образом, в результате соударения выделится количество теплоты, равное

$$Q = E_{к1} - E_{к2} = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$\frac{Q}{E_{к1}} = \frac{\frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}}{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}} = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}.$$

$$\frac{Q}{E_{к1}} = \frac{2 \cdot 3(5^2 + 3^2)}{(2 + 3)(2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 3^2)} = \frac{6 \cdot 34}{5 \cdot 77} = 0{,}53.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{(m_1 + m_2)}.$$

$$v = \frac{\sqrt{(2 \cdot 5)^2 + (3 \cdot 3)^2}}{2 + 3} = 2{,}69 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 2{,}69$ м/с, 47 % механической энергии перейдёт во внутреннюю.

Пример 4. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости ω_1 и ω_2 (рис. 2.4.4). После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начнут через некоторое время вращаться как единое целое. Найдите: а) установившуюся угловую скорость вращения дисков; б) работу, которую совершили при этом силы трения.

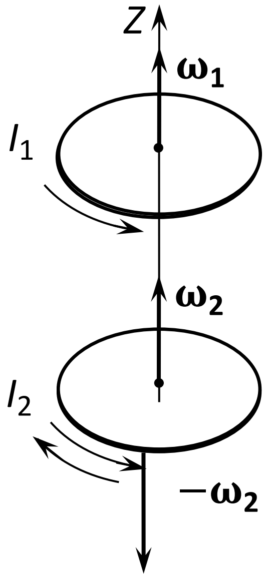


Рис. 2.4.4

Решение

I_1, I_2,
ω_1, ω_2.
ω = ?
$A_{тр}$ = ?

На диски действуют внешние моменты сил тяжести и реакции опор. Относительно вертикальной оси вращения Z сумма моментов этих сил равна нулю. Следовательно, к данной системе тел можно применить закон сохранения момента импульса. Сумма моментов импульса двух дисков $L_1 + L_2$, вращающихся отдельно друг от друга, равна моменту импульса дисков L, вращающихся как единое целое,

$$L_1 + L_2 = L. \tag{1}$$

С учётом формулы момента импульса $L = I\omega$ и свойства аддитивности момента инерции $I = I_1 + I_2$ закон сохранения момента импульса (1) запишется

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega,$$

откуда искомая угловая скорость

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}. \tag{2}$$

Если диски в начальный момент времени вращались в одну сторону, то проекция угловой скорости на ось Z (см. рис. 2.4.4)

$$\omega_z = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Если в разные стороны, то

$$\omega_z = \frac{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Работа сил трения равна приращению кинетической энергии системы

$$A_{тр} = E_{к2} - E_{к1}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия системы до падения верхнего диска на нижний $E_{к1}$ и после падения $E_{к2}$ соответственно равна

$$E_{к1} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \tag{4}$$

$$E_{к2} = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{5}$$

С учётом свойства аддитивности $I = I_1 + I_2$ и формулы (2) имеем

$$E_{к2} = \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}. \tag{6}$$

Подставив (4) и (6) в формулу (3), найдём работу сил трения

$$A_{тр} = -\frac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}.$$

Знак «минус» означает, что силы трения уменьшают кинетическую энергию дисков (диссипация энергии), т. е. работа сил трения отрицательная.

Ответ: $\omega_z = \frac{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{I_1 + I_2} A_{тр} = -\frac{I_1 I_2(\omega_1-\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$.

Пример 5. Однородный цилиндр массой m = 10 кг и радиусом r = 5 см свободно скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости высотой h = 1,0 м. Определите угловую скорость движения цилиндра ω и момент импульса цилиндра L при переходе цилиндра с наклонной плоскости на горизонтальную плоскость. Начальная скорость цилиндра равна нулю.

Решение

m = 10 кг,
r = 5 см,
h = 1,0 м.
ω = ?
L = ?

В начальный момент движения скорость цилиндра равна нулю и его полная механическая энергия равна потенциальной $E_п$. При переходе на горизонтальную плоскость полная механическая энергия цилиндра равна сумме кинетической энергии $E_к$ и потенциальной энергии $E'_п$ цилиндра. По закону сохранения полной механической энергии получается

$$E_п = E_к + E'_п. \tag{1}$$

Потенциальная энергия цилиндра определяется положением центра масс цилиндра над горизонтальной плоскостью. Поэтому

$E_п = mg(r + h)$, $E'_п = mgr$,

где g – ускорение свободного падения.

Как известно, качение цилиндра по плоской поверхности можно рассматривать как поворот с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения, проходящей по линии соприкосновения цилиндрической поверхности и плоскости. На рис. 2.4.5 мгновенная ось вращения проходит через точку M перпендикулярно плоскости рисунка.

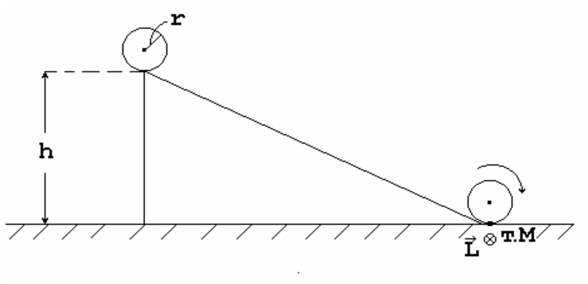


Рис. 2.4.5

Следовательно, кинетическая энергия определяется выражением

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

где I – момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения.

Из известного выражения для момента инерции цилиндра относительно оси симметрии и теоремы Штейнера получается

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2. \qquad (3)$$

Выражение (1) с учётом формул (2) и (3) примет вид

$$mg(r + h) = \frac{3}{2}mr^2\frac{\omega^2}{2} + mgr. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) для угловой скорости ω следует

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4gh}{3}} = \frac{1}{0{,}05}\sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 1}{3}} = 72\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Момент импульса L при переходе цилиндра на горизонтальную плоскость направлен вдоль мгновенной оси вращения, как показано на рисунке. Модуль момента импульса равен

$$L = I\omega = \frac{3}{2}mr^2\omega = \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot (0{,}05)^2 \cdot 72 = 2{,}7\,\text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: $\omega = 72\frac{\text{рад}}{\text{с}}, L = 2{,}7\,\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Задачи для самостоятельного решения

96. Из ружья массой m_1 = 5 кг вылетает пуля массой m_2 = 5 г со скоростью v_2 = 600 м/с. Найдите скорость v_1 отдачи ружья.

97. Человек массой m_1 = 60 кг, бегущий со скоростью v_1 = 8 км/ч, догоняет тележку массой m_2 = 80 кг, движущуюся со скоростью v_2 = 2,9 км/ч, и вскакивает на неё. С какой скоростью будет двигаться тележка? С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек будет бежать ей навстречу?

98. Из орудия массой m_1 = 5 т вылетает снаряд массой m_2 = 100 кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $E_{к2}$ = 7,5 МДж. Какую кинетическую энергию $E_{к1}$ получает орудие вследствие отдачи?

99. Тело массой m = 3 кг движется со скоростью v_1 = 4 м/с и ударяется о неподвижное тело, имеющее такую же массу. Считая удар центральным и неупругим, найдите количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

100. Тело массой m_1 = 5 кг ударяется о неподвижное тело массой m_2 = 2,5 кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией $E'_{к2}$ = 5 Дж. Считая удар центральным и упругим, найдите кинетическую энергию $E_{к1}$ и $E'_{к1}$ первого тела до и после удара.

101. Деревянный шарик массой m = 0,1 кг падает с высоты h_1 = 2 м. Коэффициент восстановления при ударе шарика о пол k = 0,5. Найдите высоту h_2, на которую поднимется шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившейся при ударе. (Коэффициентом восстановления материала тела называют отношение скорости после удара к его скорости до удара.)

102. Насколько переместится относительно воды лодка длиной l = 3,5 м и массой m_1 = 200 кг, если человек массой m_2 = 80 кг перейдёт с кормы на нос лодки?

103. Тело массой m_1 = 2,0 кг упруго сталкивается с покоящимся телом, при этом его скорость уменьшается в n = 2 раза и изменяется по направлению на угол α = 90°. Найдите массу m_2 второго тела.

104. Граната летит горизонтально и разрывается на два осколка. Скорость одного осколка v_1 = 30 м/с и направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Скорость другого осколка v_2 = 60 м/с и направлена вертикально вниз. Найдите скорость гранаты до разрыва. Во сколько раз масса одного осколка больше другого?

105. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль оси X. Масса первого шара m_1 = 0,20 кг, масса второго шара m_2 = 0,30 кг. До столкновения проекции скоростей шаров на ось равны v_{1x} = 1 м/с, v_{2x} = –1 м/с. Найдите проекции скоростей шаров v'_{1x} и v'_{2x} после центрального абсолютного упругого соударения.

106. Сплошной цилиндр катится по горизонтальной поверхности в течение времени t = 3 с и останавливается, пройдя расстояние s = 9 м. Определите коэффициент трения, считая его постоянным. Постройте качественно зависимость кинетической энергии тела как функцию времени движения.

107. Вал массой m = 50 кг и радиусом R = 5 см вращается с частотой n = 10 об/с. К его цилиндрической поверхности прижимают тормозную колодку с силой F = 30 Н, и через 8 с после начала торможения вал остановился. Определите коэффициент трения, считая его постоянным. Постройте график зависимости угловой скорости и углового ускорения вала как функцию времени на интервале торможения.

108. Шар и сплошной диск имеют одинаковые массы и катятся без проскальзывания по горизонтальной поверхности с одинаковыми постоянными скоростями. Кинетическая энергия шара E_1 = 70 Дж. Определите кинетическую энергию диска E_2. Найдите отношение проекций момента импульса тел Lz_1 / Lz_2 на мгновенную ось вращения, если R_1 / R_2 = 0,7.

109. Тело массой M подвешено на нити длиной l. В тело попадает пуля массой m и застревает в нем, нить после этого отклоняется на угол α. Найдите скорость пули v. Считать, что вся масса тела M сосредоточена на расстоянии l от точки подвеса.

110. Сколько времени будет скатываться цилиндр с наклонной плоскости длиной l = 2 м и высотой h = 0,1 м, если считать, что проскальзывания нет? Качественно постройте зависимость кинетической $E_к$ и потенциальной $E_п$ энергии цилиндра как функцию времени.

111. Камень падает с некоторой высоты в течение времени t = 1,43 с. Найдите кинетическую $E_к$ и потенциальную $E_п$ энергии камня в средней точке пути. Масса камня m = 2 кг.

112. Камень брошен со скоростью v_0 = 15 м/с под углом α = 60° к горизонту. Найдите кинетическую $E_к$, потенциальную $E_п$ и полную E энергии камня: а) через время t = 1 с после начала движения; б) в высшей точке траектории. Масса камня m = 0,2 кг.

113. Диск массой m = 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v = 4 м/с. Найдите кинетическую энергию $E_к$ диска.

114. Диск диаметром D = 60 см и массой m = 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой n = 20 об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

115. При подъёме груза массой m = 2 кг на высоту h = 1 м сила F совершает работу A = 78,5 Дж. С каким ускорением поднимается груз?

116. Какую работу A надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой m = 2 кг: а) увеличить скорость с v_1 = 2 м/с до v_2 = 5 м/с; б) остановиться при начальной скорости v_0 = 8 м/с?

117. Найдите работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой m = 1 т от v_1 = 2 м/с до v_2 = 6 м/с на пути s = 10 м. На всем пути действует сила трения $F_{тр}$ = 2 Н.

118. Якорь мотора вращается с частотой n = 1500 мин$^{-1}$. Определите вращающий момент M, если мотор развивает мощность P = 500 Вт.

119. Человек массой M стоит на льду и толкает в горизонтальном направлении санки массой m, сообщая им скорость v, при этом он откатывается назад. Какую работу совершает при этом человек?

120. Спортсмен массой m_1 = 60 кг, стоя на коньках, бросает тело массой $m_2 = 2{,}0$ кг под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью v_2 = 5,0 м/с. На какое расстояние откатится спортсмен после броска, если коэффициент трения коньков о лёд $\mu = 0{,}10$? Перемещение спортсмена во время броска не учитывать.

121. Какую работу надо совершить, чтобы тело массой m = 10 кг втащить по наклонной плоскости высотой h = 1,5 м и основанием a = 2,5 м? Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$.

122. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой h = 90 см. Какую линейную скорость будет иметь шар в тот момент, когда он скатится с наклонной плоскости? Момент инерции шара $J = 0{,}4mR^2$.

123. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n_1 = 14 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек переходит в центр платформы, частота возрастает до n_2 = 25 мин$^{-1}$. Масса человека m = 70 кг. Определите массу платформы. Момент инерции человека рассчитайте как для материальной точки.

124. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой n_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от J_1 = 2,94 до J_2 = 0,98 кг · м^2? Считать платформу однородным диском.

125. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом r = 5 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы V_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Тема 5
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Основные формулы

• Линейные размеры тела (длина стержня), движущегося относительно инерциальной системы отсчёта (ИСО) со скоростью v,

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{1}$$

где l_0 – собственные размеры тела, или собственная длина стержня; c – скорость света в вакууме. Из (1) видно, что линейные размеры тела уменьшаются в направлении его движения.

• Собственный интервал времени, измеренный по часам, движущимся вместе с телом,

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{2}$$

где Δt – интервал времени, измеренный по часам в ИСО, относительно которого тело движется со скоростью v. Из (2) видно, что $\Delta\tau < \Delta t$. Это означает, что движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные, т. е. существует эффект замедления хода движущихся часов.

• Релятивистское выражение для импульса тела, движущегося со скоростью v относительно ИСО,

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m – масса тела, постоянная во всех ИСО, т. е. не зависящая от скорости тела. При $v \ll c$ релятивистский импульс переходит в классическое выражение $P = mv$.

• Энергия покоя тела

$$E_0 = mc^2.$$

• Кинетическая энергия тела

$$E_к = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2.$$

• Полная энергия тела

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

• Связь между импульсом и кинетической энергией тела

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2mc^2\right)}.$$

Из этого соотношения при $E_к << mc^2$ получается формула $P = \sqrt{2mE_к}$, которую используют в механике Ньютона.

Примеры решения задач

Пример 1. Частица, движущаяся со скоростью v = 0,99 c (c – скорость света в вакууме) в неподвижной системе отсчёта K, пролетела от места своего рождения до точки распада расстояние l = 3,0 км. Определите собственное время жизни частицы τ.

Решение

v = 0,99 c,	
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с,	
$l = 3{,}0$ км $= 3{,}0 \cdot 10^3$ м.	
τ = ?	

Используем относительность времени в специальной теории относительности (СТО)

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1)$$

где t – время, измеренное по часам, находящимся в неподвижной системе отсчёта K (лабораторная система); τ – собственное время (в задаче собственное время жизни частицы), измеряется по часам, движущимся вместе с частицей, с которой связана подвижная система отсчёта K'.

Учитывая, что $t = l / v$, найдём из (1) собственное время жизни частицы

$$\tau = \frac{l}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2)$$

$$\tau = \frac{3{,}0 \cdot 10^3}{0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8}\sqrt{1 - \frac{(0{,}99c)^2}{c^2}} = 1{,}4 \text{ мкс}.$$

Ответ: 1,4 мкс.

Пример 2. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость частицы массой m = 1,0 кг от v_1 = 0,60c до v_2 = 0,80c ($c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме)? Сравните полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

Решение

m = 1,0 кг,	
ϑ_1 = 0,60 c,	
ϑ_2 = 0,80 c.	
$A_р$ = ?	
A = ?	

Искомая работа равна приращению кинетической энергии частицы

$$A = E_{к2} - E_{к1}. \quad (1)$$

Скорость частицы сравнима со скоростью света, поэтому надо использовать релятивистскую формулу

$$E_к = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} - mc^2.$$

С учётом этой формулы работа (1) запишется

$$A_{\text{р}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}\right).$$

После вычислений получим

$A_{\text{р}} = 3{,}8 \cdot 10^{16}$ Дж.

Если использовать нерелятивистскую формулу кинетической энергии $E_{\text{к}} = mv^2/2$, то получим величину работы в три раза меньшую

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 1{,}3 \cdot 10^{16} \text{ Дж}.$$

Ответ: $1{,}3 \cdot 10^{16}$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

126. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы отсчёта K. При каком значении скорости длина стрежня в этой системе отсчёта будет на $\eta = 0{,}5$ % меньше его собственной длины?

127. Имеется прямоугольный треугольник с катетом $a = 5{,}0$ м и углом между этим катетом и гипотенузой $\alpha = 30°$. Найдите в системе отсчёта K', движущейся относительно этого треугольника со скоростью $v = 0{,}866\ c$ вдоль катета a (c – скорость света в вакууме): а) соответствующее значение угла α'; б) длину l' гипотенузы и её отношение к собственной длине l_0.

128. Найдите собственную длину стержня l_0, если в системе отсчёта K (лабораторная система) его длина $l = 1{,}0$ м, угол между стержнем и направлением движения $\alpha = 45°$ и скорость $v = c / 2$, где c – скорость света в вакууме.

129. С какой скоростью двигались в системе отсчёта K часы, если за время $t = 5{,}0$ с (в K-системе) они отстали от неподвижных часов этой системы на $\Delta t = 0{,}10$ с?

130. Собственное время жизни нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчёта, где её время жизни $\Delta t = 20$ нс?

131. В пунктах A и B на Земле, удалённых друг от друга на расстояние l = 10 км, произошли одновременно два события. Найдите время, разделяющее эти события, с точки зрения наблюдателя на космическом корабле, удаляющегося от Земли вдоль прямой AB со скоростью $v = 0{,}8c$ (c – скорость света в вакууме).

132. Релятивистская частица с массой m и кинетической энергией $E_к$ налетает на покоящуюся частицу с такой же массой. Найдите массу составной частицы, образовавшейся в результате соударения.

133. Найдите скорость частицы, кинетическая энергия которой $E_к$ = 500 МэВ и импульс P = 865 МэВ/c*, где c – скорость света.

134. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна её энергии покоя?

135. Найдите скорость, при которой релятивистский импульс частицы в n = 2 раза превышает её ньютоновский импульс.

136. Сколько энергии (в расчёте на единицу массы) надо затратить, чтобы сообщить первоначально покоившемуся космическому кораблю скорость $v = 0{,}980c$ (c – скорость света в вакууме)?

137. Полная энергия мезона в n = 8 раз больше его энергии покоя. Найдите скорость мезона.

138. Вычислите импульс протона с кинетической энергией $E_к$ = 500 МэВ.

* Импульс релятивистской частицы обычно выражают в единицах: энергия/c, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Например, если энергия выражается в МэВ (1 МэВ = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж), то импульс выражается в МэВ/c. Использование такой единицы импульса упрощает многие расчёты.

Тема 6
МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Физические величины

Обозначение	Название	Единица измерения	Расшифровка
ρ	плотность	кг/м^3	килограмм на метр в кубе
P	давление	Па	паскаль
η	коэффициент динамической вязкости	Па · с	паскаль на секунду
S	площадь	м^2	метр в квадрате

Основные формулы

- Уравнение Бернулли (рис. 2.6.1)

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const},$$

где ρ – плотность жидкости, v – скорость течения жидкости в данном сечении трубы, h – высота данного сечения трубы над некоторым уровнем, P – давление.

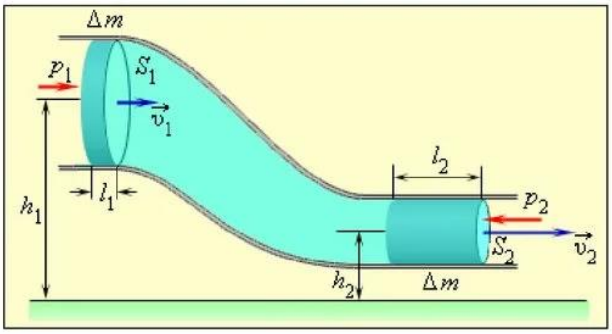


Рис. 2.6.1

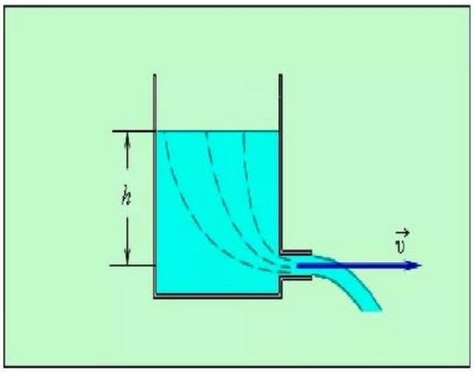


Рис. 2.6.2

- Скорость вытекания жидкости из малого отверстия (формула Торричели) (рис. 2.6.2)

$$\vartheta = \sqrt{2gh},$$

где h – высота поверхности жидкости над отверстием.

• Уравнение неразрывности струи (рис. 2.6.3)

$S_1 v_1 = S_2 v_2$,

где S – площадь поперечного сечения трубы; v – скорость жидкости.

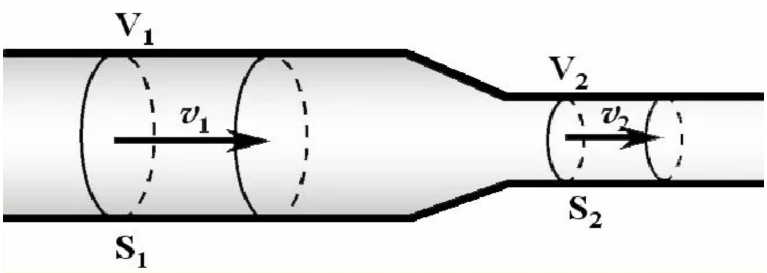


Рис. 2.6.3

• Число Рейнольдса (определяет характер движения жидкости или газа)

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; v – средняя скорость течения; l – характерный параметр поперечного сечения трубы (квадрат, круг); η – коэффициент динамической вязкости.

• Сила лобового сопротивления (формула Стокса)

$$F_{\text{л.с}} = 6\pi\eta r v,$$

где η – коэффициент динамической вязкости; r – характерный размер тела; v – скорость движения тела относительно жидкости. Формула справедлива только для ламинарного течения.

• При ламинарном течении объём жидкости (газа), протекающей за время t через капиллярную трубку радиусом r и длиной l, определяется формулой Пуазейля

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta},$$

где η – коэффициент динамической вязкости; ΔP – разность давлений на концах трубки.

Примеры решения задач

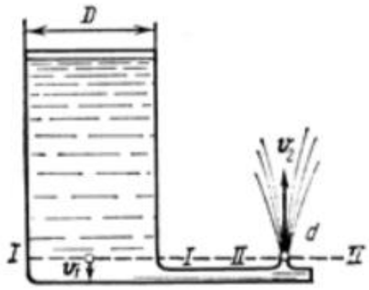


Рис. 2.6.4

Пример 1. Вода подаётся в фонтан из большого цилиндрического бака (рис. 2.6.4) и бьёт из отверстия *II – II* со скоростью v_2 = 12 м/с. Диаметр бака D = 2 м, диаметр сечения *II – II* d = 2 см. Найдите: 1) скорость v_1 понижения воды в баке; 2) давление p_1, под которым вода подаётся в фонтан; 3) высоту h_1 уровня воды в баке и высоту h_2 струи, выходящей из фонтана.

Решение

v_2 = 12 м/с,
D = 2 м,
d = 2 см.
v_1 – ?
p_1 – ?
h_1 – ?

1. Проведём сечение *I – I* в баке на уровне сечения *II – II* фонтана. Поскольку площадь S_1 сечения *I – I* много больше площади S_2 сечения *II – II*, то высоту h_1 уровня воды в баке можно считать для малого промежутка времени постоянной, а поток – установившимся. Для установившегося потока справедливо условие неразрывности струи

$S_1 v_1 = S_2 v_2$,

откуда

$$v_1 = S_2 v_2 / S_1, \text{ или } v_1 = v_2 (d/D)^2. \qquad (1)$$

Подставив значения заданных величин в (1) и произведя вычисления, найдём $v_1 = 12(0{,}02/2)^2 = 0{,}0012$ м/с.

С такой же скоростью будет понижаться уровень в баке. Как видно, эта скорость очень мала по сравнению со скоростью струи.

2. Давление p_1, под которым вода подаётся в фонтан, найдём по уравнению Бернулли. В случае горизонтальной трубки тока оно имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2. \qquad (2)$$

С учётом того, что $p_2 = 0$ (под давлением подразумевается избыточное над атмосферным давление), из уравнения (2) получим

$$P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}. \qquad (3)$$

Поскольку $v_1 << v_2$, то из равенства (3) следует

$$P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

После вычислений, произведённых по этой формуле, найдём $p_1 = \frac{1000 \cdot 12^2}{2} = 72$ кПа.

3. Высоту h_1 уровня воды в баке найдём из соотношения $P_1 = \rho g h_1$, откуда

$$h_1 = \frac{P_1}{g\rho}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдём $h_1 = \frac{72000}{9{,}8 \cdot 1000} =$ $= 7{,}35$ м.

Зная скорость v_2, с которой вода выбрасывается фонтаном, найдём высоту h_2, на которую она будет выброшена

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = 7{,}35 \text{ м}.$$

Подчеркнём, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимается фонтан воды (по правилу сообщающихся сосудов). Это замечание справедливо, если пренебречь сопротивлением воздуха.

Ответ: $v_1 = 0{,}0012$ м/с; $p_1 = 72$ кПа; $h_2 = 7{,}35$ м.

Пример 2. В сосуде с глицерином падает свинцовый шарик. Определите максимальное значение диаметра шарика, при котором движение слоёв глицерина, вызванное падением шарика, является ещё ламинарным ($Re = 0{,}5$). Движение считать установившимся.

Решение

Если в вязкой жидкости движется тело, то вместе с ним как одно целое движется и прилипший к телу слой жидкости. Этот слой вследствие внутреннего трения увлекает за собой и соседние слои. Возникающее при этом движение жидкости является ламинарным или турбулентным в зависимости от размеров, формы тела и его скорости. Характер движения зависит также от свойств жидкости и определяется безразмерным числом Рейнольдса.

Если тело, движущееся в жидкости, имеет форму шара диаметром d, то число Рейнольдса определяется по формуле

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}. \tag{1}$$

Скорость v выразим, исходя из следующих соображений. На свинцовый шарик, падающий в глицерине, действуют три силы (рис. 2.6.5):

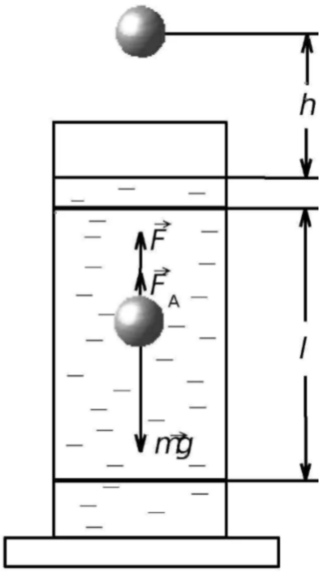


Рис. 2.6.5

1) сила тяжести шарика

$F_{тяж} = mg = \rho_{св}Vg,$

где $\rho_{св}$ – плотность свинца; V – объем шарика;

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi d^3}{6};$$

2) выталкивающая сила, определяемая по закону Архимеда,

$$F_A = \rho_{гл}Vg = \rho_{гл}\frac{\pi d^3}{6}g,$$

где $\rho_{гл}$ – плотность глицерина;

3) сила внутреннего трения, определяемая по формуле Стокса,

$$F_{л.с} = 6\pi\eta rv = 3\pi\eta dv.$$

При установившемся движении шарика в жидкости (v = const) сила тяжести шарика уравновешивается суммой выталкивающей силы и силы внутреннего трения, т. е.

$$F_{тяж} = F_A + F_{л.с}.$$

$$\rho_{св}\frac{\pi d^3}{6}g = \rho_{гл}\frac{\pi d^3}{6}g + 3\pi\eta dv,$$

откуда

$$v = \frac{(\rho_{св} - \rho_{гл})gd^2}{18\eta}.$$

Решив совместно уравнения относительно d, найдём

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 Re}{\rho_{гл}(\rho_{св} - \rho_{гл})g}}.$$

Подставив сюда табличные значения величин h = 1,48 Па · с; Re = 0,5; $\rho_{св}$ = 11300 кг/м^3; $\rho_{гл}$ = 1260 кг/м^3 и произведя вычисления, получим d = 5,29 мм.

Ответ: d = 5,29 мм.

Задачи для самостоятельного решения

139. Найдите скорость v течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время t = 30 мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа m = 0,51 кг. Плотность газа p = 7,5 кг/м^3. Диаметр трубы D = 2 см.

140. В дне цилиндрического сосуда диаметром D = 0,5 м имеется круглое отверстие диаметром d = 1 см. Найдите зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найдите значение этой скорости для высоты h = 0,2 м.

141. На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h_1 от дна сосуда и на расстоянии h_2 от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии l от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случае, если: а) h_1 = 25 см, h_2 = 16 см; б) h_1 = 16 см, h_2 = 25 см?

142. Сосуд, наполненный водой, сообщается с атмосферой через стеклянную трубку, закреплённую в горлышке сосуда. Кран K находится на расстоянии h_2 = 2 см от дна сосуда (рис. 2.6.6). Найдите скорость v вытекания воды из крана в случае, если расстояние между нижним концом трубки и дном сосуда: а) h_1 = 2 см; б) h_1 = 7,5 см; в) h_1 = 10 см.

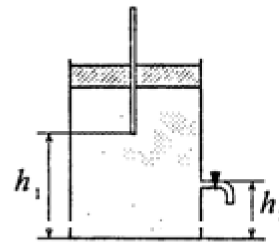


Рис. 2.6.6

143. Цилиндрический бак высотой h = 1 м наполнен до краёв водой. За какое время t вся вода выльется через отверстие, расположенное у дна бака, если площадь S_2 поперечного сечения отверстия в 400 раз меньше площади поперечного сечения бака? Сравните это время с тем, которое понадобилось бы для вытекания того же объёма воды, если бы уровень воды в баке поддерживался постоянным на высоте h = 1 м от отверстия.

144. В сосуд льётся вода, причём за единицу времени наливается объём воды V_1 = 0,2 л/с. Каким должен быть диаметр d отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нём держалась на постоянном уровне h = 8,3 см?

145. Какое давление p создаёт компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью v = 25 м/с? Плотность краски $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

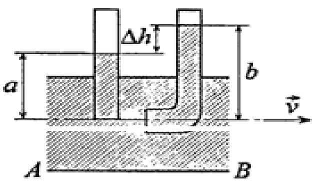


Рис. 2.6.7

146. По горизонтальной трубе AB течёт жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубах a и b равна Δh = 10 см. Диаметры трубок a и b одинаковы (рис. 2.6.7). Найдите скорость v течения жидкости в трубе AB.

147. Воздух продувается через трубку AB. За единицу времени через трубку AB протекает объём воздуха V_t = 5 л/мин. Площадь поперечного сечения широкой части трубки AB равна S_1 = 2 см^2, а узкой её части и трубки abc равна S_2 = 0,5 см^2. Найдите разность уровней Δh воды, налитой в трубку abc. Плотность воздуха ρ = 1,32 кг/м^3.

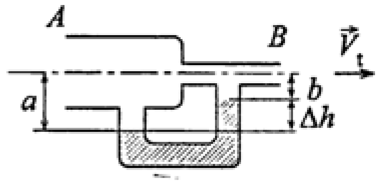


Рис. 2.6.8

148. Шарик всплывает с постоянной скоростью v в жидкости, плотность ρ_1 которой в 4 раза больше плоскости материала шарика. Во сколько раз сила трения $F_{тр}$, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести mg, действующей на этот шарик?

149. Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром d = 0,3 мм, если динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па $\cdot$ с?

150. Стальной шарик диаметром d = 1 мм падает с постоянной скоростью v = 0,185 см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Найдите динамическую вязкость η касторового масла.

151. Смесь свинцовых дробинок с диаметрами d_1 = 3 мм и d_2 = 1 мм опустили в бак с глицерином высотой h = 1 м. На сколько позже

упадут на дно дробинки меньшего диаметра по сравнению с дробинками большего диаметра? Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}47$ Па · с.

152. Пробковый шарик радиусом $r = 5$ мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Найдите динамическую и кинематическую вязкость касторового масла, если шарик всплывает с постоянной скоростью $v = 3{,}5$ см/с.

153. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом $R = 2$ см вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого $r = 1$ мм, а длина $l = 2$ см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}2$ Па · с. Найдите зависимость скорости v понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Найдите значение этой скорости при $h = 26$ см.

154. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого $r = 1$ мм и длина $l = 1{,}5$ см. В сосуд налит глицерин, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}0$ Па · с. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 0{,}18$ м выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объём глицерина $V = 5$ см^3?

155. На столе стоит сосуд, в боковую поверхность которого вставлен горизонтальный капилляр на высоте $h_1 = 5$ см от дна сосуда. Внутренний радиус капилляра $r = 1$ мм и длина $l = 1$ см. В сосуд налито машинное масло, плотность которого $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, а динамическая вязкость $\eta = 0{,}5$ Па · с. Уровень масла в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h_2 = 50$ см выше капилляра. На каком расстоянии L от конца капилляра (по горизонтали) струя масла падает на стол?

156. Стальной шарик падает в широком сосуде, наполненном трансформаторным маслом, плотность которого $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, а динамическая вязкость $\eta = 0{,}8$ Па · с. Считая, что закон Стокса имеет место при числе Рейнольдса $Re \leq 0{,}5$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр шарика), найдите предельное значение диаметра D шарика.

157. Вода течёт по трубе, причём за единицу времени через поперечное сечение трубы протекает объём воды V_t = 200 см^3/с. Динамическая вязкость воды η = 0,001 Па · с. При каком предельном значении диаметра D трубы движение воды остаётся ламинарным? (Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса $Re \leq 3000$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр трубы)).

158. Латунный шарик диаметром d = 0,5 мм падает в глицерине. Определите: 1) скорость v установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

159. Вода течёт по круглой гладкой трубе диаметром d = 5 см со средней по сечению скоростью v = 10 см/с. Определите число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе и укажите характер течения жидкости.

ВОПРОСЫ, ВХОДЯЩИЕ В ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

1. Методы физического исследования. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики.

2. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Система отсчёта. Базис координатной системы. Радиус-вектор.

3. Материальная точка (частица). Траектория. Радиус кривизны траектории. Линейная скорость и линейное ускорение. Поступательное движение твёрдого тела.

4. Тангенциальное и нормальное ускорения. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.

5. I закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчёта. II закон Ньютона и понятие силы, массы и импульса. Уравнение движения.

6. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.

7. Понятие абсолютно твёрдого тела. Момент инерции тела.

8. Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения.

9. Гироскопический эффект. Свободные оси.

10. Закон сохранения импульса и III закон Ньютона.

11. Закон сохранения момента импульса.

12. Работа и энергия в механике. Кинетическая и потенциальная энергия.

13. Закон сохранения механической энергии.

14. Консервативные и неконсервативные силы. Консервативная и диссипативная системы.

15. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.

16. Ламинарный и турбулентный режимы течения.

17. Принцип относительности Эйнштейна. Роль скорости света. Постулат постоянства скорости света. Преобразования Лоренца.

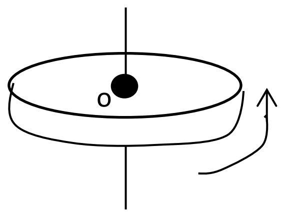
18. Лоренцево сокращение длины и замедление времени.

19. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕЙТИНГ-КОНТРОЛЯ

Задание № 1

Однородный диск вращается с замедлением вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска. Укажите на рисунке направления векторов угловой скорости $\vec{\omega}$, момента импульса $\vec{L}$, углового ускорения $\vec{\beta}$, момента силы $\vec{M}$.



Задание № 2

Человек стоит на вращающейся скамье Жуковского со стержнем в руках, расположенным горизонтально. Если стержень повернуть в вертикальное положение, то:

а) уменьшится момент инерции системы;

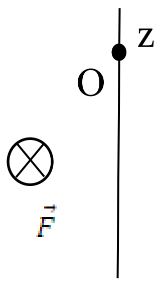
б) уменьшится угловая скорость;

в) момент импульса системы не изменится;

г) уменьшится кинетическая энергия системы.

Задание № 3

Что называют моментом силы? Укажите на рисунке направление вектора момента силы относительно точки O. Укажите также момент силы относительно оси Z.



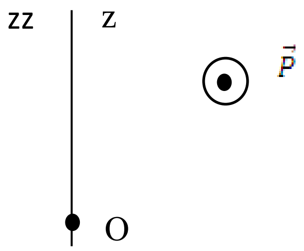
Задание № 4

Какие пункты следующего утверждения справедливы? Момент инерции тела относительно оси вращения зависит:

а) от положения оси вращения;
б) момента силы;
в) массы тела;
г) углового ускорения тела.

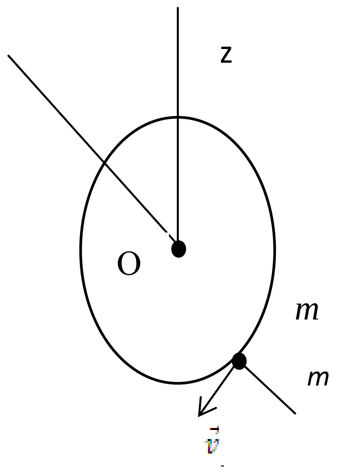
Задание № 5

Что называют моментом импульса? Укажите на рисунке вектор момента импульса относительно точки *O*, а также его проекцию на ось *Z*.



Задание № 6

Частица массой *m* движется замедленно по окружности с центром в точке *O* со скоростью $\vec{v}$. Укажите на рисунке направления векторов угловой скорости $\vec{\omega}$, момента импульса $\vec{L}$ относительно точки *O*, проекцию момента импульса $\vec{L}$ на ось *z*, нормальное ускорение a_n, тангенциальное ускорение a_t и полное ускорение *a*.

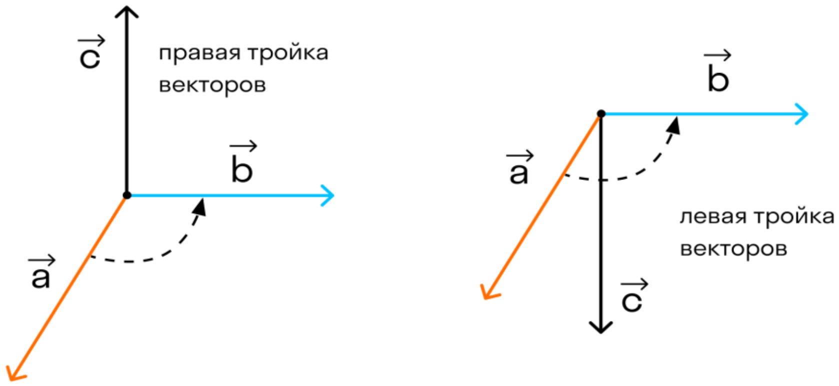


Задание № 7

Векторное произведение двух векторов даётся уравнением

$\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$.

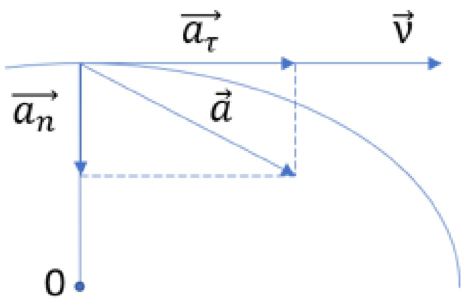
Покажите на рисунке, какой вариант (*а* или *б*) соответствует векторному произведению двух векторов.



а) *б)*

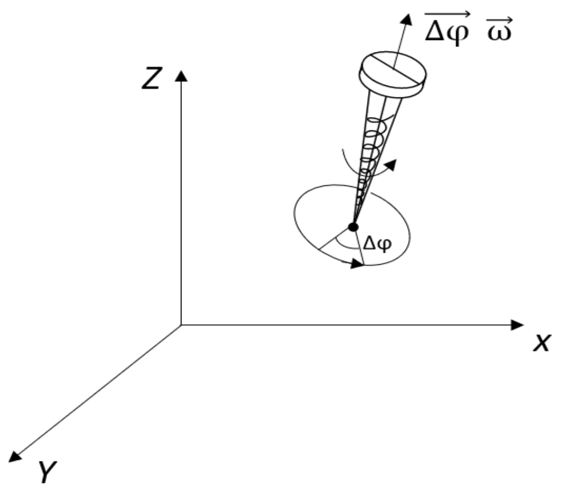
Задание № 8

Запишите формулы для тангенциальной составляющей вектора полного ускорения, нормальной составляющей и вектора полного ускорения. Поясните по рисунку, как меняет скорость тангенциальная составляющая и как меняет скорость нормальная составляющая вектора полного ускорения.



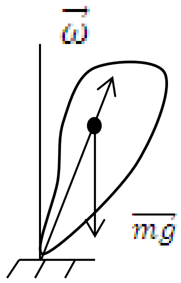
Задание № 9

Поясните на рисунке направление вектора угла поворота винта и направление вектора угловой скорости. Покажите на рисунке направление вектора угловой скорости вращения винта в двух ситуациях: вращение равноускоренное и вращение равнозамедленное.



Задание № 10

Укажите на рисунке направление угловой скорости прецессии гироскопа $\overrightarrow{\omega'}$, если известна угловая скорость гироскопа $\vec{\omega}$. Поясните решение.



ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ РЕЙТИНГ-КОНТРОЛЯ

1. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Система отсчёта. Принцип относительности Галилея. Радиус-вектор.
2. Материальная точка (частица). Траектория. Радиус кривизны траектории. Линейная скорость и линейное ускорение. Поступательное движение твёрдого тела.
3. Тангенциальное и нормальное ускорения. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.
4. I закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчёта. II закон Ньютона и понятие силы, массы и импульса. Уравнение движения. III закон Ньютона.
5. Неинерциальные системы отсчёта. Абсолютные и относительные скорости и ускорения. Силы инерции.
6. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.
7. Понятие абсолютно твёрдого тела. Момент инерции тела.
8. Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения.
9. Гироскопический эффект. Свободные оси.
10. Закон сохранения импульса и III закон Ньютона.
11. Закон сохранения момента импульса.
12. Работа и энергия в механике. Энергия кинетическая и потенциальная.
13. Закон сохранения механической энергии.
14. Консервативные и неконсервативные силы. Консервативная и диссипативная системы.
15. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.
16. Ламинарный и турбулентный режимы течения. Число Рейнольдса.
17. Принцип относительности Эйнштейна. Роль скорости света. Постулат постоянства скорости света. Преобразования Лоренца.
18. Лоренцево сокращение длины и замедление времени.
19. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии.
20. Соотношение между полной энергией и импульсом частицы.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕХАНИКИ ДЛЯ РЕЙТИНГ-КОНТРОЛЯ

1. Запись вектора через проекции на оси координат
$\vec{a} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z}$.
2. Радиус-вектором $\vec{r}$ некоторой точки называют вектор
$\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$.
3. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют скаляр
$\vec{a}\vec{b} = ab\cos\alpha$.
4. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор
$\vec{c} = ab\sin\alpha\ \vec{n} = [\vec{a}\vec{b}]$.
5. Производная $\overrightarrow{e_a}$ по t по определению равна

$$\frac{d\overrightarrow{e_a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{e_a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\overrightarrow{e_\perp} = \omega\overrightarrow{e_\perp} = \overrightarrow{\frac{d\varphi}{dt}e_\perp}.$$

6. Вектор перемещения
$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.
7. Средняя скорость

$$\overrightarrow{v_{\text{ср}}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

8. Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

9. Среднее ускорение за время Δt

$$\overrightarrow{a_{\text{ср}}}(t,t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

10. Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\tau}v)}{dt}.$$

11. Мгновенное ускорение в виде двух компонент

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v + \vec{\tau}\frac{dv}{dt},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

12. Импульс тела
$\vec{p} = m\vec{v}$.

13. Кинетическая энергия поступательного движения

$$E_{к} = \frac{mv^2}{2}.$$

14. Радиус кривизны траектории

$$R = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}.$$

15. Модуль вектора угловой скорости $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

16. Угловое ускорение

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

17. Связь линейной и угловой скоростей

$$v = R\omega,$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}] = \omega r \sin\alpha \vec{n}.$$

18. I закон Ньютона: тело, достаточно удалённое от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

19. II закон Ньютона: скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{m}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

20. III закона Ньютона – закон сохранения импульса

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \text{const}.$$

21. Замкнутой физической системой тел называют систему, сумма воздействия внешних сил на которую равна нулю.

22. Центр масс твёрдого тела – точка с радиус-вектором $\overrightarrow{r_c}$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}\, m_i.$$

23. Момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

24. Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

25. Момент силы относительно точки опоры

$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = rF\sin\alpha|\vec{n}|$.

26. Момент импульса материальной точки

$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = r\,p\sin\alpha|\vec{n}|, L = J\omega$.

27. Основной закон динамики вращательного движения

$$\frac{d\overrightarrow{L_\Sigma}}{dt} = \overrightarrow{M_\Sigma}.$$

28. Закон сохранения импульса: импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, протекающих в этой системе

$\overrightarrow{p_\Sigma} = \text{const}$.

29. Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы материальных точек остаётся постоянным независимо от процессов, происходящих внутри системы

$L_\Sigma = \text{const}$.

30. Элементарная работа dA силы $\overrightarrow{F}$ на перемещение $d\vec{r}$

$dA = \vec{F}d\vec{r}$.

31. Мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{FV}.$$

32. Потенциальная энергия тела

$E_п = mgh$.

33. Закон сохранения полной механической энергии

$E_п + E_к = \text{const}$.

34. Релятивистское выражение для массы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

35. Релятивистский импульс

$$\overrightarrow{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

36. Внутренняя энергия частицы

$E_0 = m_0c^2$.

37. В любом сечении трубки тока для несжимаемой жидкости выполняется уравнение неразрывности струи

$Sv = \text{const}$.

38. Уравнение Бернулли: в стационарно текущей несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}.$$

39. Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}.$$

40. Формула Стокса: для шарика малого радиуса r справедливо выражение для силы лобового сопротивления

$$F_{\text{л.с}} = 6\pi\eta r v.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии была представлена наиболее важная лекционная информация по механике. Лекционный материал составлен в соответствии с программой по физике для высших учебных заведений и сопровождается вопросами для самоконтроля студентов, задачами с примерами их выполнения и заданиями по каждой теме. Рекомендательный библиографический список содержит ссылки на основные курсы по физике для студентов высших учебных заведений, а также учебно-методические пособия по лекционным демонстрациям по физике.

Планируется продолжение издания представленного учебного пособия, которое будет содержать материалы по молекулярной физике и термодинамике, основам молекулярно-кинетической теории; элементам классической статистики; основным законам реальных газов; фазовым переходам; явлениям переноса.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Грунская, Л. В.* Лекции по физике : Механика [Электронный ресурс] / Л. В. Грунская ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 120 с. – ISBN 978-5-9984-1180-9. – URL: https://dspace.www1.vlsu.ru/bitstream/123456789/8808/1/02107.pdf (дата обращения: 22.06.2024).

2. *Галкин, А. Ф.* Физика в лекционных демонстрациях [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / А. Ф. Галкин, Л. В. Грунская, В. В. Дорожков ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 171 с. – ISBN 978-5-9984-0957-8. – URL: https://dspace.www1.vlsu.ru/handle/123456789/8307 (дата обращения: 21.06.2024).

3. *Гервидс, В. И.* Лекционные демонстрации по физике [Электронный ресурс] / В. И. Гервидс. – URL: https://www.youtube.com/watch?v=9zIynk0LszA (дата обращения: 25.06.23).

4. *Иродов, И. Е.* Физика макросистем. Основные законы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 6-е изд. (эл.). – Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 210 с.). – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – ISBN 978-5-9963-2589-4. – (Технический университет. Общая физика). – Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

5. *Савельев, И. В.* Курс общей физики : учеб. пособие. В 3 т. Т. 1 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1977. – 432 с.

6. *Матвеев, А. Н.* Механика и теория относительности : учеб. для вузов / А. Н. Матвеев. – 3-е изд. – М. : Оникс, 2003. – 432 с. – ISBN 5-329-00742-9.

7. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – 520 с.

8. *Зисман, Г. А.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М. : Наука, 1969. – 340 с.

9. *Трофимова, Т. И.* Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М. : Академия, 2006. – 560 с. – ISBN 5-7695-2629-7.

10. *Кунин, В. Н.* Конспект лекций по трудным разделам физики / В. Н. Кунин ; Владим. политехн. ин-т. – Владимир, 1982. – 52 с.

11. Физика. Программа, методические указания и задачи для студентов-заочников (с примерами решения) / сост.: А. Ф. Галкин [и др.] ; под ред. А. А. Кулиша ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2002. – 128 с.

12. Методические указания для самостоятельной работы по физике / сост.: Е. В. Орлик, Э. Д. Корж, В. Г. Прокошев ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1988. – 48 с.

13. *Матвеев, А. Н.* Механика и теория относительности : учеб. пособие / А. Н. Матвеев. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 324 с. – ISBN 978-5-8114-0965-5.

14. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – 6-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2022. – 560 с. – ISBN 978-5-9221-1512-4.

15. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. В 5 т. Т. 1. Механика : учеб. пособие для студентов вузов / И. В. Савельев. – 5-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 352 с. – ISBN 978-5-8114-1207-5.

16. *Гершензон, Е. М.* Курс общей физики. Механика : учеб. пособие для студентов пед. вузов по специальности 03.22.00 – Физика / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов, А. Н. Мансуров. – М. : Академия, 2001. – 378 с. – ISBN 5-7695-0349-1.

17. *Зисман, Г. А.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – 7-е изд., стер. – М. : Лань, 2007. – 352 с. – ISBN 978-5-8114-4101-3.

18. *Айзенцон, А. Е.* Курс физики : учеб. пособие / А. Е. Айзенцон. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 2009. – 374 с. – ISBN 978-5-06-004873-5.

19. *Детлаф, А. А.* Курс физики : учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 718 с. – ISBN 5-06-003556-5.

20. *Ландсберг, Г.С.* Элементарный учебник физики. В 3 т. Т. 3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика / Г. С. Ландсберг. – 13-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 656 с. – ISBN 978-5-9221-0351-0.

21. *Фриш, С. Э.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – 13-е изд., стер. – М. : Лань, 2009. – 480 с. – ISBN 975-5-8114-0662-3.

22. *Ремизов, А. Н.* Курс физики : учеб. для вузов / А. Н. Ремизов, А. Я. Потапенко. – 2-е изд., стер. – М. : Дрофа, 2004. – 720 с. – ISBN 5-7107-8221-1.

23. *Путилов, К. А.* Курс физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов. – 11-е изд., стер. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 560 с.

24. *Хайкин, С. Э.* Общий курс физики. Механика / С. Э. Хайкин. – М. : ГИТТЛ, 1940. – Т. 1. – 372 с.

25. *Стрелков, С. П.* Общий курс физики. Механика / С. П. Стрелков. – 3-е изд., стер. – М. : Наука, 1975. – 560 с.

26. *Хвольсон, О. Д.* Курс физики. В 5 т. Т. 1 / О. Д. Хвольсон. – 7-е изд., доп. – Л. : ГТТИ, 1933. – 656 с.

27. *Киттель, Ч.* Берклеевский курс физики. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – 3-е изд., стер. – М. : Лань, 2005. – 480 с. – ISBN 5-8114-0644-4.

28. *Чертов, А. С.* Задачник по физике : учеб. пособие для втузов. – 7-е изд., перераб. и доп. / А. С. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2001. – 640 с. – ISBN 5-94052-032-4.

29. *Волькенштейн, В. С.* Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие / В. С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М. : Гл. ред. физ.-матем. лит., 1985. – 384 с.

30. *Голованова, Т. Н.* Сборник задач по физике и примеры их решения. В 2 ч. Ч. 1. / Т. Н. Голованова, А. М. Штеренберг. – Самара : Сам. гос. техн. ун-т, 2015. – 79 с.

Учебное электронное издание

ГРУНСКАЯ Любовь Валентиновна
МАЛЫШЕВА Дарья Алексеевна

МЕХАНИКА

Учебное пособие по физике для иностранных студентов

Редактор Е. А. Платонова
Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов
Компьютерная вёрстка Л. В. Макаровой
Корректор О. В. Балашова
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 9 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и электроники
кафедра общей и прикладной физики
grunsk@vlsu.ru