

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра теоретической и прикладной механики

КУРСОВЫЕ РАБОТЫ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
МЕТОДИКА ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

КУРСОВЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Методика их выполнения

Составитель
НОВОЖИЛОВ Альберт Иванович

Составитель
А.И. НОВОЖИЛОВ

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В.Козырев

Подписано в печать 01.08
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. Тираж 300 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.

Владимир 2008

УДК 531.3
ББК 22.21

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
Л.М.Самсонов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Курсовые работы по теоретической механике: методика их выполнения / сост. А.И.Новожилов; Владим. гос. ун-т.- Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 36 с.

Содержат три курсовые работы по статике, кинематике и динамике с указанием методики их выполнения и даны примеры решения подобных заданий.

Предназначены для студентов всех форм обучения 1 – 2-го курсов для механических, машиностроительных, строительных и прочих технических специальностей университета.

Ил. 106, табл.2.Библиогр.: 3 назв.

УДК 531.3
ББК 22.21

Рекомендуемый библиографический список

- 1.Новожилов,А.И.** Краткий курс теоретической механики / А.И.Новожилов.– Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006, – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.
- 2.Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики / С.М.Тарг. –М.: Наука, 1970, – 369 с.
- 3.Яблонский,А.А.** Курс теоретической механики: В 2 т. / А.А.Яблонский, В.М.Никифорова. – М.: Высш.шк., 1971.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Замечания к выполнению и оформлению курсовой работы.....	3
Расчёт составной конструкции.....	4
Исследование движения механизма.....	14
Исследование движения материальной системы.....	23
Рекомендуемый библиографический список.....	35

Таблица данных

Номер варианта	P_A кН	P_B кН	P_D кН	P_E кН	R см	r см	α град	c кН/см	λ кН·м/ /рад	G кН	M кН·м
1	15	5	20	--	50	10	30°	--	2,5	--	--
2	20	10	30	--	50	25	--	0,1	--	--	--
3	40	10	20	--	20	--	--	1,0	--	--	--
4	10	20	30	--	30	--	--	0,8	--	--	--
5	50	--	30	--	20	--	--	--	2,0	--	--
6	20	30	50	--	40	--	--	--	5,0	--	--
7	50	20	50	--	20	--	--	0,7	--	--	--
8	30	30	50	--	50	40	--	--	1,6	--	8,0
9	10	15	30	--	60	30	--	--	12,0	--	--
10	20	10	30	--	40	20	--	1,0	--	50	--
11	50	20	50	30	50	25	--	1,6	--	--	--
12	10	50	30	30	40	20	--	--	2,4	--	--
13	30	20	20	40	30	10	--	0,2	--	--	--
14	50	20	40	--	40	20	30°	--	3,0	--	--
15	20	10	50	--	50	--	--	--	13,0	--	--
16	30	20	60	--	20	--	--	0,85	--	--	--
17	60	20	50	--	50	30	--	--	0,4	--	--
18	60	50	40	--	40	20	--	0,2	--	--	--
19	50	20	60	--	50	20	--	--	12,5	100	--
20	20	40	50	--	40	20	--	2,0	--	--	--
21	30	30	50	--	30	15	--	--	6,0	--	--
22	30	20	40	--	40	20	--	--	8,0	--	--
23	20	10	30	--	20	10	--	0,125	--	--	--
24	20	--	50	--	40	--	30°	0,6	--	--	--
25	40	20	30	--	50	15	--	--	10,0	50	--
26	30	30	50	--	50	30	--	1,8	--	--	7,0
27	40	30	50	30	60	50	--	--	6,5	--	15,0
28	60	20	--	--	--	25	--	1,25	--	--	--
29	30	50	30	--	20	--	--	1,33	--	--	--
30	40	40	60	--	40	20	--	--	5,3	--	--

Замечания к выполнению и оформлению курсовой работы

Отчёт о выполненной курсовой работе свидетельствует не только о знании теоретической механики и умении применять её теоремы, законы и принципы к решению практических задач, но и умению оформить своё решение и представить его к защите в стандартном виде.

Общие требования к отчёту таковы.

Текст и математическое решение выполняется на листах размера А4 с обязательной нумерацией страниц и полями 2,5 см по сторонам и наверху страницы и 3,5 см внизу.

Первый лист отчёта – титульный, выполненный в стандартном виде, с названием курсовой работы и номера варианта задания. Следует обратить особое внимание на высокое качество титульного листа. Текст должен быть выполнен чертёжным шрифтом или, лучше, на принтере компьютера.

Вторая страница - содержание задания курсовой работы со схемой механической системы и всеми необходимыми данными.

На следующих страницах – выполнение курсовой работы. Причём каждый следующий пункт задания нужно начинать с новой страницы.

Обращается особое внимание на аккуратность записи текста и формул. Чертежи при необходимости выполняются в масштабе, с указанием масштаба, с соблюдением общих правил и стандартных требований графики. Графическое изображение конструкций и их расчётных схем должно соответствовать формам и правилам, которые рекомендованы учебниками и лекциями.

Математическое решение, его уравнения и текст, сопровождается схемой или чертежом. Если чертёж требует точного выполнения и в крупном масштабе, то его следует чертить на отдельном листе чертёжной бумаги соответствующего размера.

Необходимо грамотное и подробное изложение решения, с необходимыми пояснениями и доказательствами, чтобы понятно было каким образом оно получено и какие использованы при этом теоремы и законы. В качестве примера правильного оформления задания, следует взять за основу и использовать примеры выполнения аналогичных задач в данном пособии и методические указания в нём.

Все изложенные требования к оформлению учитываются при защите и оценке курсовой работы.

РАСЧЁТ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Конструкция, состоящая из двух ломаных балок, соединённых шарниром D и стержнями, прикреплена к неподвижной поверхности заделкой одного конца какой-либо балки или двумя шарнирными опорами, неподвижной и подвижной. На конструкцию действуют три равные по величине силы F , распределённые силы с переменной интенсивностью q и пара сил с моментом M . Пример такой конструкции показан на рис. 1.

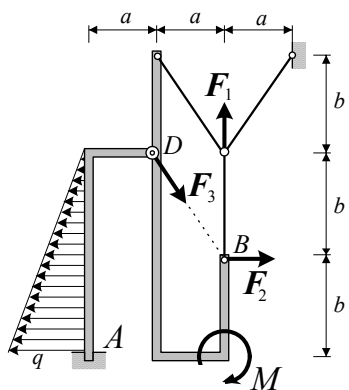


Рис. 1

Следует иметь в виду, что все горизонтальные размеры кратны a , а вертикальные – кратны b . Соответственно этим размерам определяются и все необходимые углы.

В задании требуется:

1. Привести все заданные силы к двум разным центрам, определить соответствующие главные векторы и главные моменты. Затем найти равнодействующую этих сил и линию действия её, используя оба центра приведения.

2. Определить реакции связей, рассмотрев равновесие отдельных частей конструкции и, если необходимо, всю её в целом. Оценить результаты расчётов,

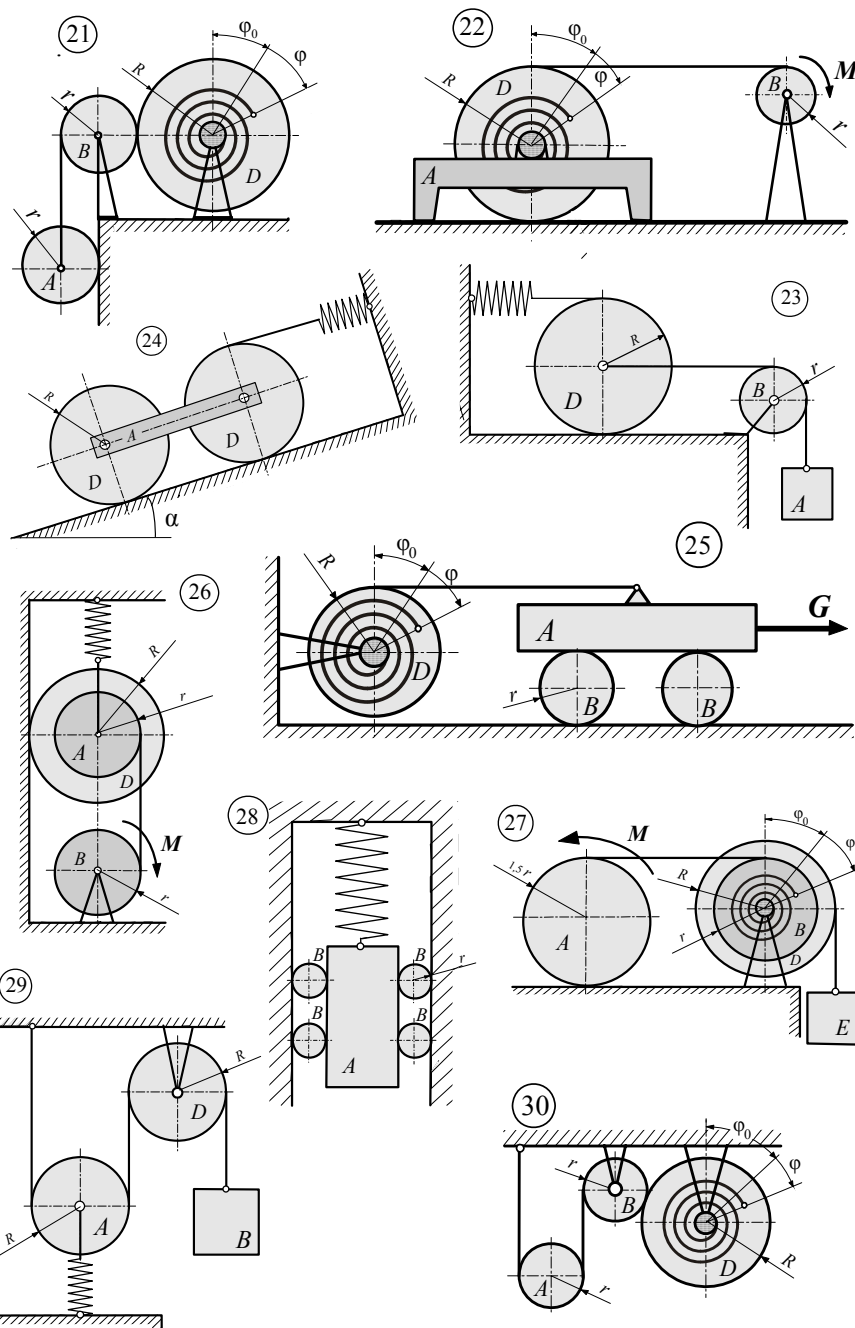
проверив равновесие двух балок вместе.

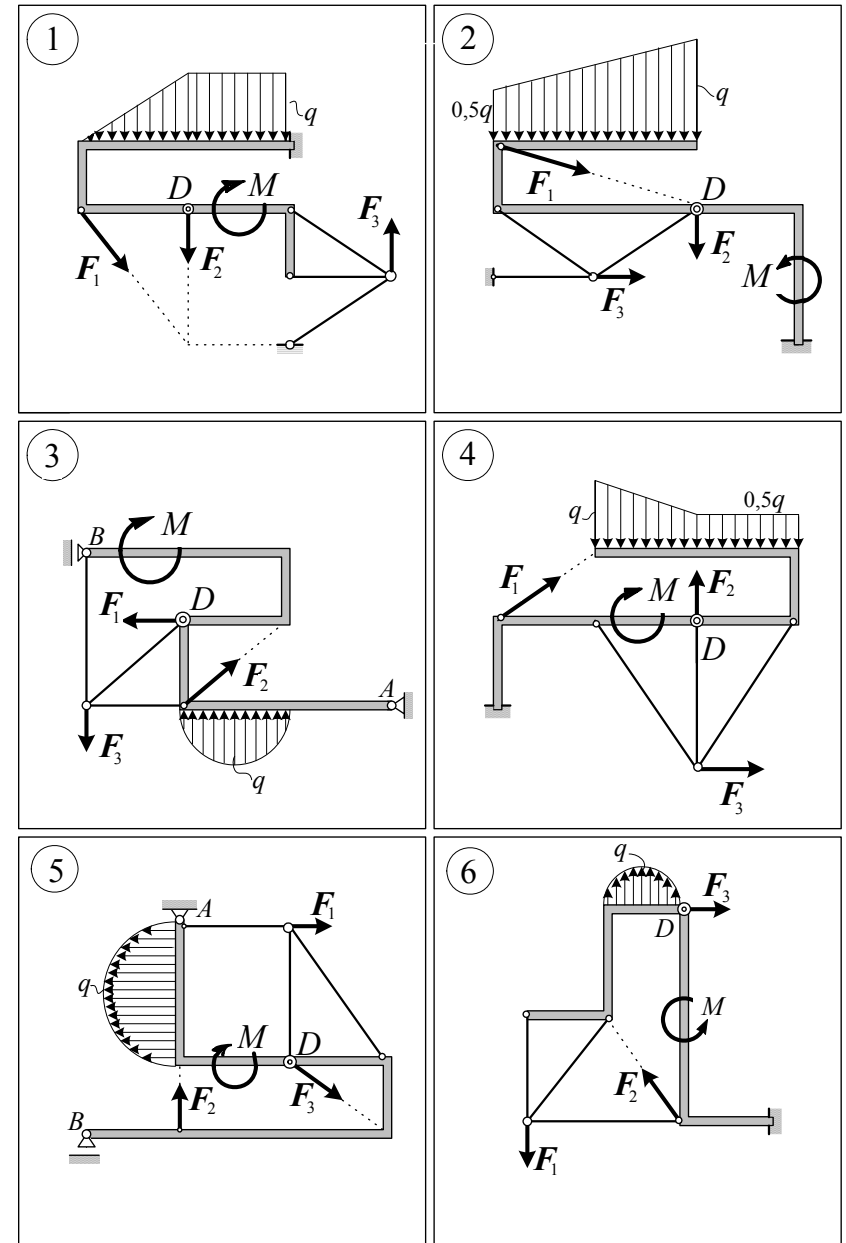
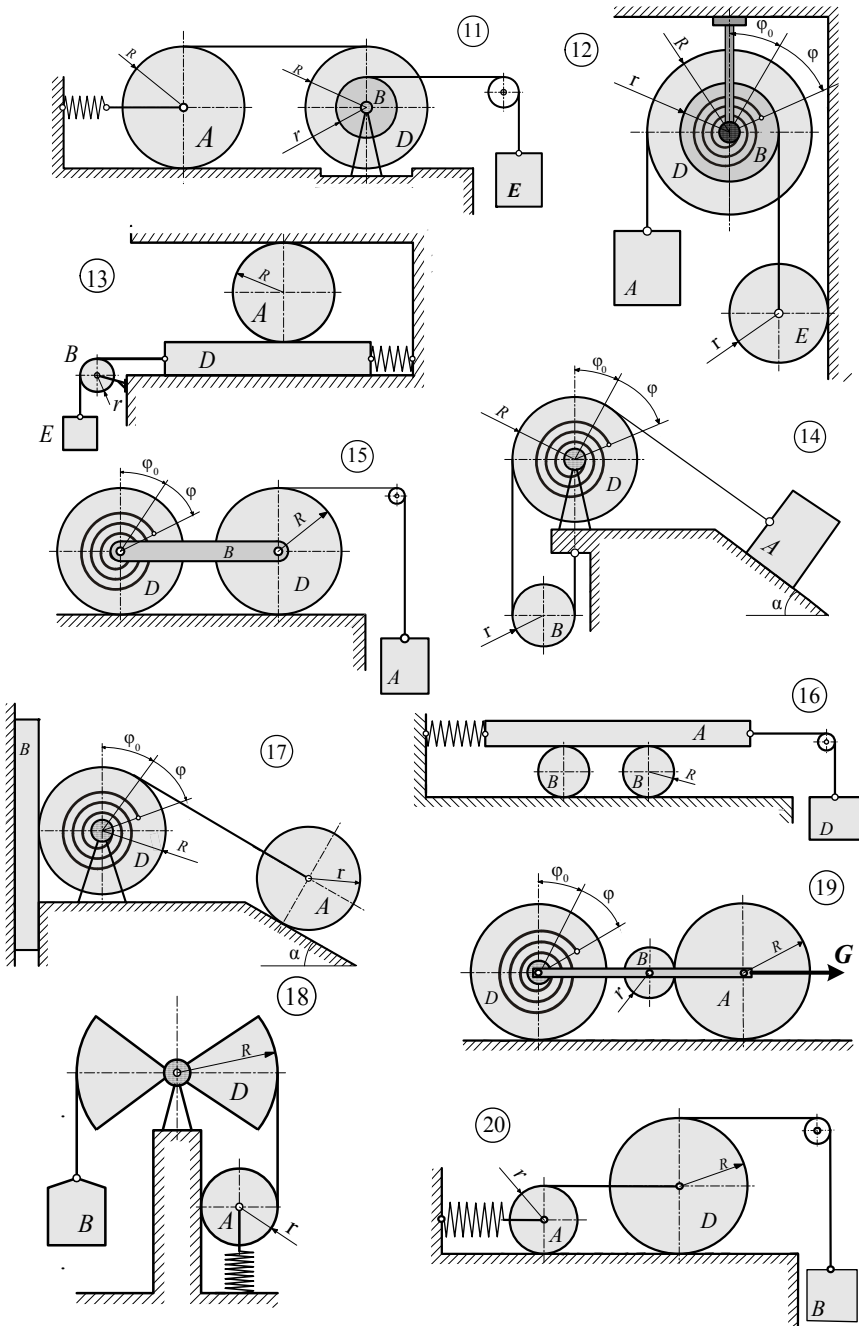
3. Найти центры тяжести каждой балки в отдельности и вместе, считая их однородными и постоянного сечения.

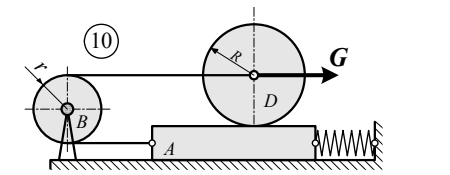
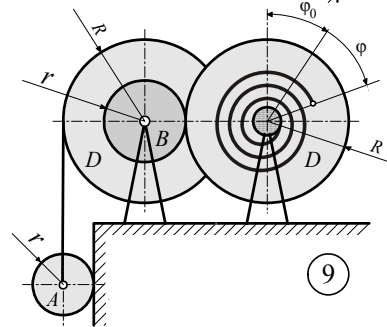
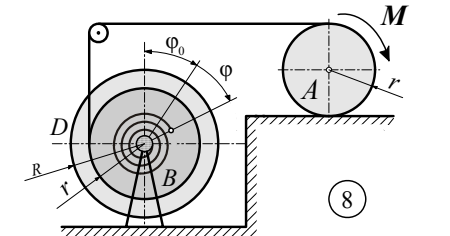
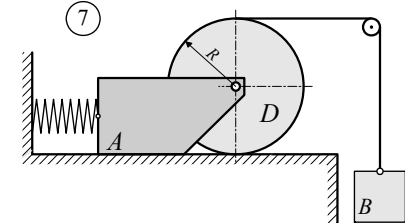
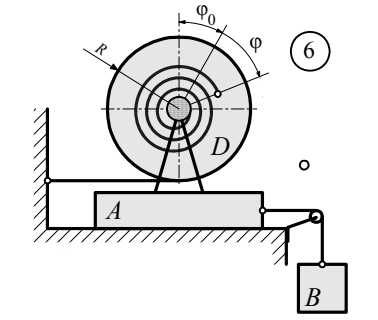
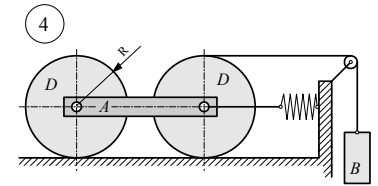
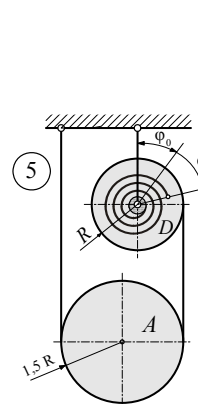
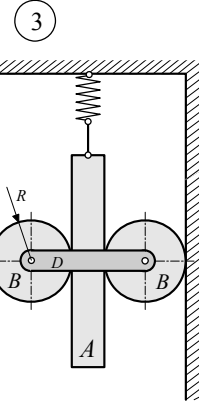
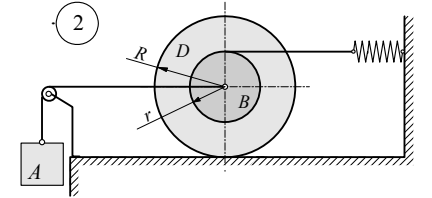
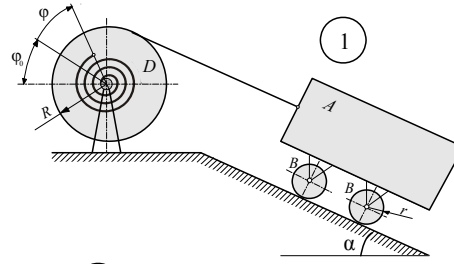
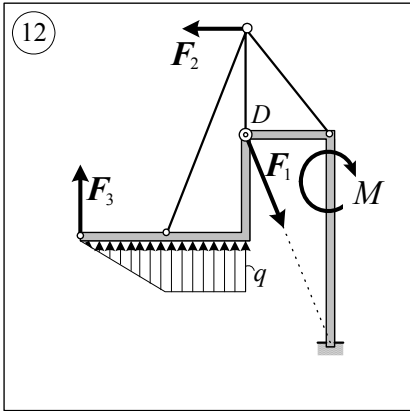
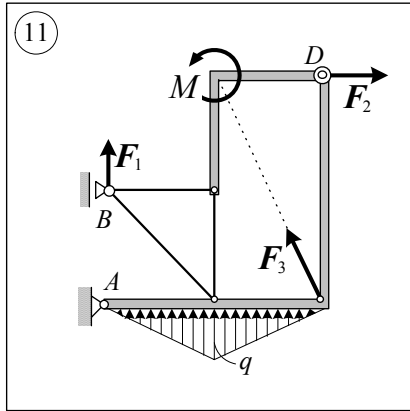
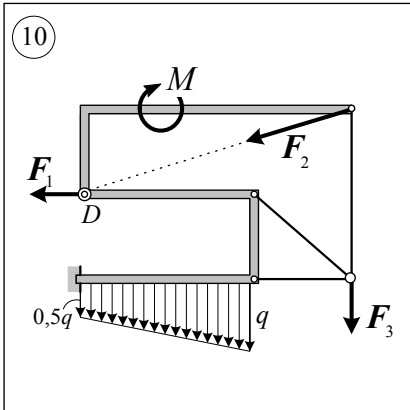
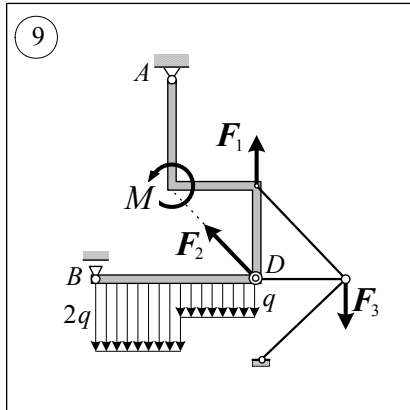
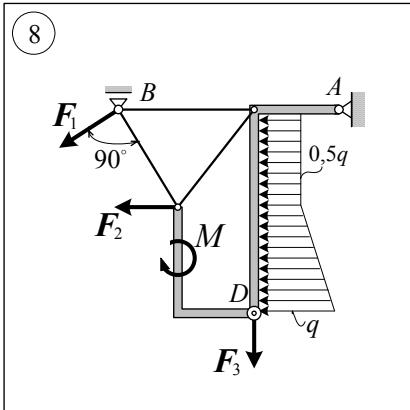
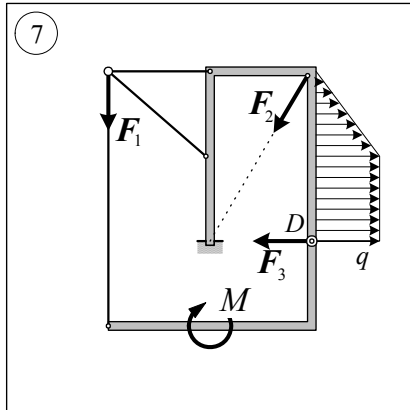
4. При защите курсовой работы найти реакции в одном из сечений балки, указанном преподавателем.

Номер схемы назначается преподавателем по рисункам на следующих страницах, а данные к схеме, одинаковые для всей группы, берутся из таблицы на странице 10.

При выполнении курсовой работы обратить особое внимание на качество чертежей, аккуратность исполнения и подробные пояснения.







Показав все силы, составляем по одному уравнению для каждого тела. Такие же как ранее при исследовании статического равновесия. Добавляются только силы инерции.

$$\text{Для тела } A: \quad \sum M_{C_A}(\vec{F}_i) = 0; \quad S_1 \cdot 2r - Qr \sin \delta + R_A^{\text{ин}} r + M_C^{\text{ин}} = 0.$$

$$\text{Для тела } B: \quad \sum X_i = 0; \quad S_1 - S_2 + G \sin \delta - R_B^{\text{ин}} = 0.$$

$$\text{Для тела } D: \quad \sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad -S_2 R + m + M_D^{\text{ин}} = 0.$$

Из первого уравнения определяем S_1 , из второго — S_2 . А третье, последнее, уравнение после подстановки численных значений всех найденных величин, должно обратиться в тождество. Конечно, если первый пункт был выполнен правильно.

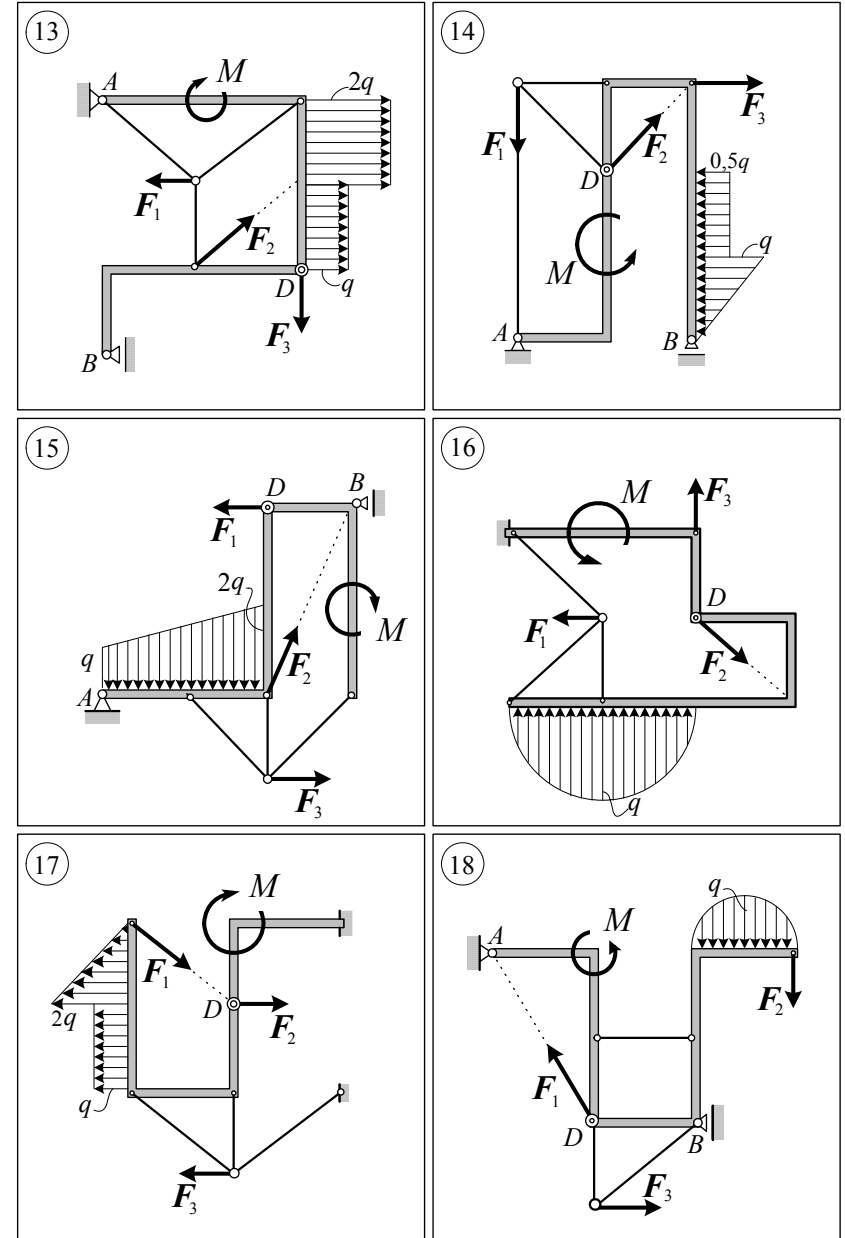
Последний, третий, пункт задания на составление уравнения Лагранжа для определения движения системы особых трудностей не представляет. Используя результаты, полученные в первом пункте задания, это уравнение легко составляется.

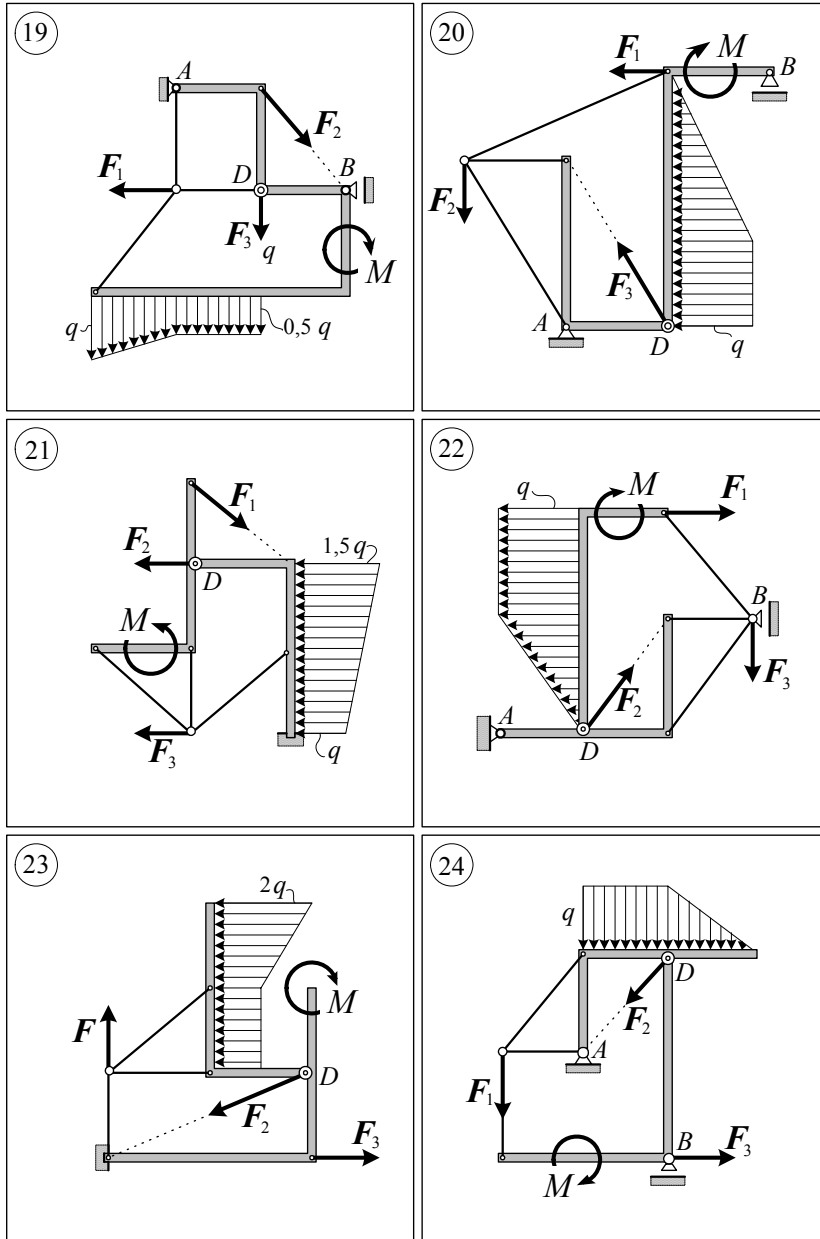
Назначив обобщённой координатой величину q , координату центра масс тела A , можно использовать уже вычисленную кинетическую энергию T , как функцию $\dot{q} = v_C$.

Так как исследуемая система - консервативная, то уравнение Лагранжа удобнее составлять по формуле $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$

Потенциальная энергия системы в исследуемом положении определяется как работа всех сил при возвращении системы из этого положения в нулевое, начальное, положение. Но эта работа уже была вычислена. Значит, для нашей системы потенциальная энергия будет равна этой работе, но с противоположным знаком $\Pi = -A = 2 \frac{\lambda}{R^2} q^2$.

После определения всех необходимых производных, уравнение Лагранжа получится таким: $\frac{1}{2g} (3Q + 8G + 4P) \ddot{q} + 4 \frac{\lambda}{R^2} q = 0$ или, если привести это дифференциальное уравнение к стандартному виду, получится точно такой же результат, что и в первом пункте задания: $\ddot{q} + k^2 q = 0$.





Осталось только выразить перемещение q_D тела D через перемещение центра масс тела A и подставить значение силы S , найденное ранее.

Дальнейшее решение задания аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере.

Для выполнения следующего, второго, пункта задания рассматриваем динамическое равновесие каждого тела системы. Всё очень похоже на то, что было сделано при определении статического равновесия (см. рис. 2).

Добавив силы инерции движущихся тел, получим расчётные схемы для определения реакций при движении системы (рис. 6). При этом следует иметь в виду, что зависимости между ускорениями такие же, как между соответствующими скоростями.

К телу A (рис. 6, а) надо приложить главный вектор сил инерции $R_A^{ин} = \frac{Q}{g} W_C$ и главный момент сил инерции относительно центральной оси

$$M_C^{ин} = J_C \varepsilon_A = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2 \frac{W_C}{r} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r W_C.$$

Тело B (рис. 6, б) движется поступательно, поэтому показываем только равнодействующую сил инерции $R_B^{ин} = \frac{G}{g} W_B = \frac{G}{g} \cdot 2W_C$.

Так как центр масс тела D (рис. 6, в) неподвижен, то добавляем только главный момент сил инерции относительно оси вращения $M_D^{ин} = J_D \varepsilon_D = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \cdot 2 \frac{W_C}{R} = \frac{P}{g} R W_C$.

Кроме того, следует иметь в виду, что момент спиральной пружины будет не m_0 , а другой:

$$m = \lambda (\zeta_0 + \zeta) = \lambda \left(2 \frac{q_0}{R} + 2 \frac{q}{R} \right) = 2 \frac{\lambda}{R} (q_0 + q).$$

Здесь величина q_0 уже была вычислена ранее, а координата q определяется для назначенного момента времени t_1 по уравнению колебательного движения системы $q = q(t)$.

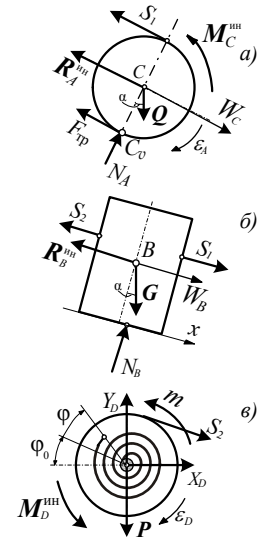


Рис. 6

Введя прежнее обозначение $k^2 = \frac{8\lambda g}{(3Q + 8G + 4P)R^2}$, получим:

$$v_c^2 = -k^2 q^2 + k^2 q_n^2. \quad (2)$$

Отсюда получаем уравнение $\frac{v_c^2}{(k q_n)^2} + \frac{q^2}{q_n^2} = 1$.

Это опять уравнение эллипса, определяющее фазовый портрет, характеризующий состояние системы (рис. 4).

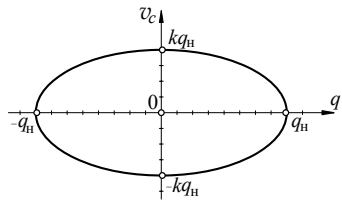


Рис. 4

А с помощью производной от уравнения (2) получим дифференциальное уравнение колебаний системы

$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

Проинтегрировав и подставив начальные условия (при $t = 0$ $v_c = \dot{q} = 0$, $q = q_n$) получим уравнение колебаний

$$q = q_n \cos kt.$$

Если в системе имеется винтовая пружина, а не спиральная, то решение задачи будет аналогичным. Изменится только вид деформации и работа упругой силы пружины.

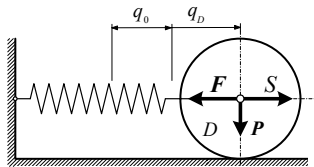


Рис. 5

На рис. 5 как пример показана часть некоторой системы, только её тело D , к которому присоединена пружина жесткости c .

Опять, рассмотрев положение равновесия системы, определяется сила S , действующая на пружину со стороны остальных тел, и соответствующие ей деформация пружины q_0 и положение центра тела D , от которого и будет отсчитываться координата q_D этого тела и вычисляться перемещение всех остальных тел системы.

Так как упругая сила, действующая на тело пропорциональна деформации пружины, равна $F = cq$, то деформация $q_0 = \frac{F_0}{c} = \frac{S}{c}$.

Работа упругой силы F пружины $A_{\text{уп}} = - \int_{q_0}^{q_0+q_D} cq dq = -\frac{1}{2}c[(q_0 + q_D)^2 - q_0^2] = -\frac{1}{2}c(2q_0q_D + q_D^2) = -\frac{1}{2}c\left(2\frac{S}{c}q_D + q_D^2\right) = -Sq_D - \frac{1}{2}cq_D^2$.

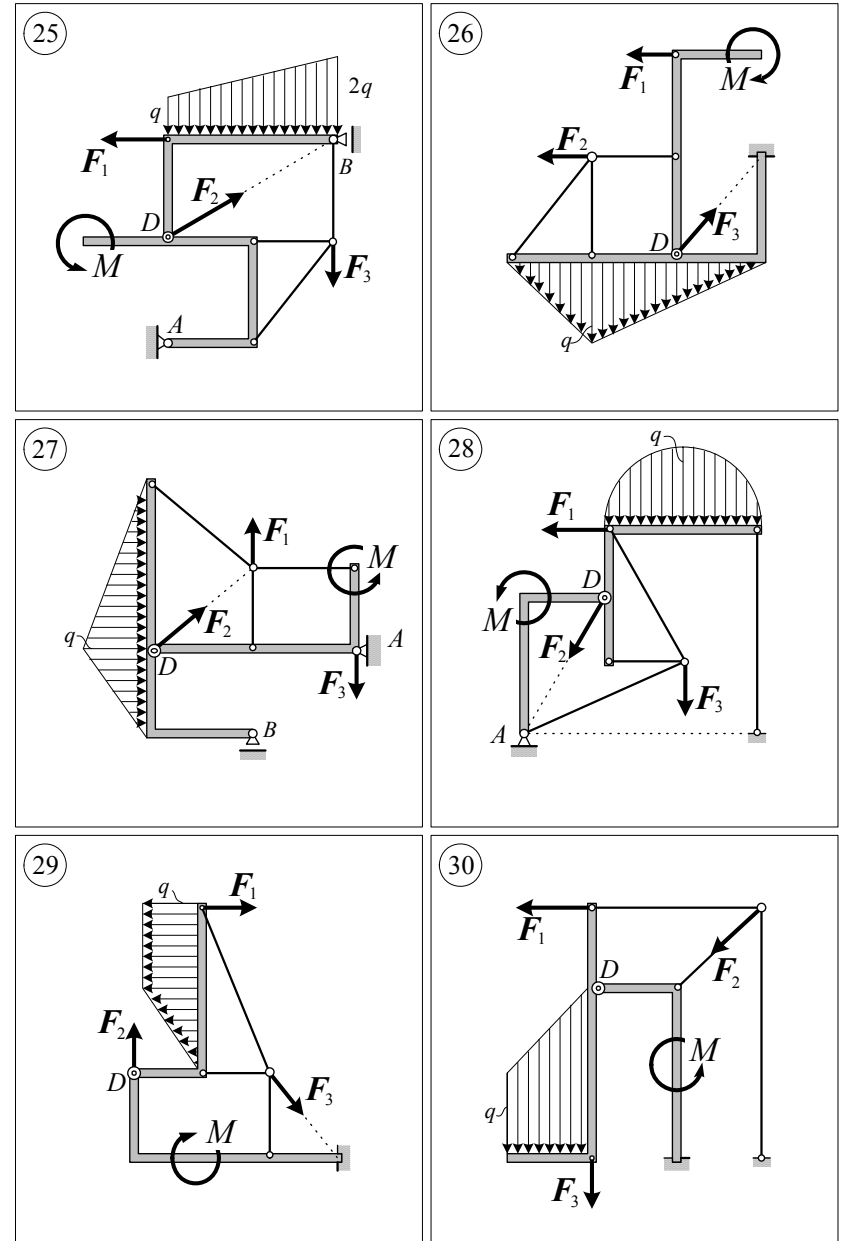


Таблица данных

Номер группы	a м	b м	F Н	q Н·м ⁻¹	M Н·м
1	2	3	10	3	40
2	3	2	15	4	50
3	1	2	20	5	50
4	2	1	15	10	30
5	3	4	10	5	60
6	4	3	20	5	30
7	4	2	5	2	20
8	2	4	10	3	40
9	3	1	5	2	20
10	1	3	20	5	50
11	5	3	12	4	40
12	2	4	10	3	30
13	3	5	8	3	60
14	4	3	16	4	20
15	2	5	18	5	50

Пример выполнения задания. Дана схема конструкции (рис. 1), размеры $a = 2$ м, $b = 3$ м, силы $F_1 = F_2 = F_3 = F = 10$ Н, $q = 4$ Н·м⁻¹ и $M = 20$ Н·м.

1. Приведение заданных сил к точкам A и B .

Главный вектор сил не зависит от точки приведения и по модулю равен $R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2}$, где его проекции на оси (рис.2)

$$R'_x = \sum X_i = -Q + F_2 + F_3 \sin \beta = -12 + 10 + 10 \cdot 0,555 = 3,55 \text{ Н,}$$

$$R'_y = \sum Y_i = F_1 - F_3 \cos \beta = 10 - 10 \cdot 0,832 = 1,68 \text{ Н.}$$

Здесь $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,832, \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,555$

и равнодействующая распределённых сил $Q = \frac{1}{2}q \cdot 2b = qb = 4 \cdot 3 = 12$ Н.

Поэтому $R' = \sqrt{3,55^2 + 1,68^2} = 3,93$ Н.

Главный момент сил относительно точки A :

$$M_A = \sum M_A(\vec{F}_i) = Q \cdot \frac{1}{3}2b - F_3 a \cos \beta - F_3 b \sin \beta + F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot b - M = -35,92 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Главный момент сил относительно точки B :

$$M_B = \sum M_B(\vec{F}_i) = -Q \cdot 1 - M = -32 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Взяв производную по времени от уравнения (1), получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$2v_c \frac{dv_c}{dt} = -k^2 \cdot 2q \frac{dq}{dt} \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0.$$

Это дифференциальное уравнение колебательного движения, решение которого $q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$. Так как $\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$ и начальные условия: при $t = 0$ $q = 0$, $\dot{q} = v_0$, то, определив постоянные интегрирования $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$, получим уравнение этого колебательного

движения системы $q = \frac{v_0}{k} \sin kt$. Амплитуда колебаний $a = \frac{v_0}{k}$, частота колебаний равна k и период колебаний $T = \frac{2\pi}{k}$.

Ускорение центра масс тела A можно определить из дифференциального уравнения: $W_C = \ddot{q} = -k^2 q$. Или из уравнения колебательного движения как функцию времени: $W_C = \ddot{q} = -v_0 k \sin kt$.

Начальные условия могут быть заданы и другими. Например, в начале движения центр масс тела A был смещён на величину q_n и отпущен без начальной скорости. При этом барабан был повернут на угол $\varphi_n = \frac{2q_n}{R}$ от положения равновесия.

В этом случае кинетическая энергия в начале движения $T_1 = 0$, а T_2 остаётся прежней $T_2 = \frac{1}{4g}(3Q + 8G + 4P)v_c^2$. Но работа сил изменится:

$$A = Q(q - q_n) \sin \beta + G \cdot 2(q - q_n) \sin \beta - \int_{\varphi_0 + \varphi_n}^{\varphi_0 + \varphi} m d\varphi = (Q + 2G)(q - q_n) \sin \beta - \int_{\varphi_0 + \varphi_n}^{\varphi_0 + \varphi} \lambda \varphi d\varphi =$$

$$= (Q + 2G)(q - q_n) \sin \beta - \frac{1}{2} \lambda \left[(\varphi_0 + \varphi)^2 - (\varphi_0 + \varphi_n)^2 \right]. \quad \text{И после подстановки значений } \varphi_0 \text{ и } \varphi_n, \text{ после преобразований и сокращений, окончательно получим} \quad A = -\frac{2\lambda}{R^2}(q^2 - q_n^2).$$

Составляем уравнение $T_2 - T_1 = A$:

$$\frac{1}{4g}(3Q + 8G + 4P)v_c^2 = -\frac{2\lambda}{R^2}(q^2 - q_n^2).$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_0^2 + \frac{1}{4} \frac{Q}{g} r^2 \frac{v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{G}{g} 4v_0^2 + \frac{1}{4} \frac{P}{g} R^2 4 \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{4g} (3Q + 8G + 4P) v_0^2.$$

Аналогичный результат для кинетической энергии получится и во втором положении, когда центр масс тела A пройдет расстояние q , а скорость его станет равной v_c , $T_2 = \frac{1}{4g} (3Q + 8G + 4P) v_c^2$.

Вычисляем работу сил на этом перемещении системы

$$A = Qq \sin \delta + G \cdot 2q \sin \delta - \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \psi} m d\psi = (Q + 2G)q \sin \delta - \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \psi} \lambda \psi d\psi = \\ = (Q + 2G)q \sin \delta - \frac{1}{2} \lambda \left[(\psi_0 + \psi)^2 - \psi_0^2 \right].$$

Произведя несложные алгебраические преобразования, подставив значения $\psi = \frac{2q}{R}$ и $\psi_0 = \frac{R}{2\lambda} (Q + 2G) \sin \delta$, уничтожив подобные члены с противоположными знаками, окончательно получим: $A = -2 \frac{\lambda}{R^2} q^2$.

Составляем уравнение $T_2 - T_1 = A$:

$$\frac{1}{4g} (3Q + 8G + 4P) v_c^2 - \frac{1}{4g} (3Q + 8G + 4P) v_0^2 = -2 \frac{\lambda}{R^2} q^2.$$

Обозначив $k^2 = \frac{8\lambda g}{(3Q + 8G + 4P)R^2}$, получим $v_c^2 = v_0^2 - k^2 q^2$ (1)

Подставив заданные числовые значения, можно определить скорость v_c центра масс тела A как функцию координаты q . Но удобнее получить графическую зависимость $v_c(q)$. Перенеся последний член $(-k^2 q^2)$ равенства (1) в левую часть его и поделив всё на v_0^2 , получим уравнение эллипса

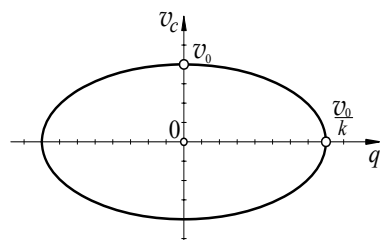


Рис. 3

Полученный график (рис. 3) называется фазовым портретом системы. Построенный в масштабе, он позволяет найти скорость центра масс тела A в любом положении системы, определяемом его координатой q .

с полуосями v_0 и $\frac{v_0}{k}$:

$$\frac{v_c^2}{v_0^2} + \frac{q^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1.$$

Полученный график (рис. 3) называется фазовым портретом системы. Построенный в масштабе, он позволяет найти скорость центра масс тела A в любом положении системы, определяемом его координатой q .

Главные векторы и главные моменты показаны на рис. 2. Линия действия равнодействующей R находится на расстояниях h_A и h_B от соответствующих точек приведения: $h_A = \frac{M_A}{R'} = 9,14$ м, $h_B = \frac{M_B}{R'} = 8,14$ м.

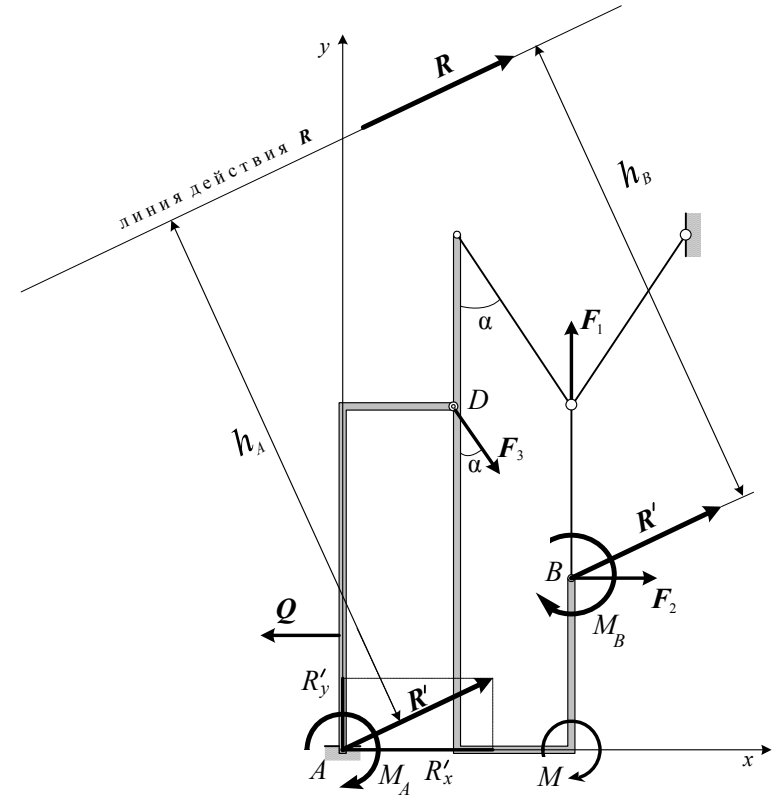


Рис. 2

2. Определение реакций связей

Рассматриваем сначала равновесие балки BD с двумя стержнями (рис.3,а), составив три уравнения,

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad F_1 \cdot a + F_2 \cdot b + S_3 \cdot a \cos \delta - M = 0,$$

$$\sum M_K(\vec{F}_i) = 0; \quad X_D \cdot b - F_3 \cdot b \sin \delta + F_1 \cdot a - M = 0,$$

$$\sum M_E(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_D \cdot a + F_3 \cdot a \cos \delta + F_2 \cdot b - M = 0.$$

Из этих уравнений находим три реакции: $S_3 = -18,03 \text{ Н}$, $X_D = 5,55 \text{ Н}$, $Y_D = 13,32 \text{ Н}$.

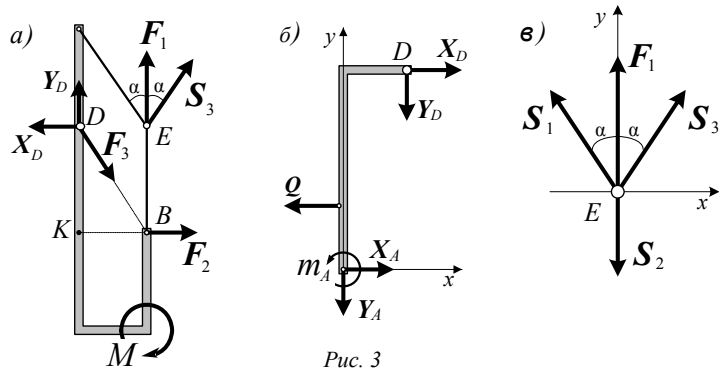


Рис. 3

Вырезав узел E (рис. 3, в), рассматриваем его равновесие и, составив два уравнения,

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0; & \quad -S_1 \sin \delta + S_3 \sin \delta = 0, \\ \sum Y_i = 0; & \quad F_1 + S_1 \cos \delta + S_3 \cos \delta - S_2 = 0, \end{aligned}$$

определяем ещё две силы: усилия в стержнях $S_2 = -20 \text{ Н}$ и $S_1 = -18,03 \text{ Н}$.

И, наконец, рассматриваем равновесие балки AD (рис. 3, б) и составим три уравнения:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; & \quad m_A + Q \cdot 2 - X_D \cdot 2b - Y_D \cdot a = 0, \\ \sum X_i = 0; & \quad X_A - Q + X_D = 0, \\ \sum Y_i = 0; & \quad -Y_A - Y_D = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим $m_A = 35,92 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $X_A = 6,45 \text{ Н}$, $Y_A = -13,32 \text{ Н}$.

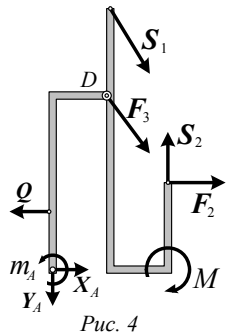


Рис. 4

Для проверки выполненного расчёта рассмотрим равновесие обеих балок вместе, составив такое уравнение, в которое вошло бы больше найденных реакций связей. Так как (рис.4)

$$\begin{aligned} \sum M_D(\vec{F}_i) = & -S_1 \cdot b \sin \delta + S_2 \cdot a + F_2 \cdot b - \\ & - M - Q \cdot 4 + X_A \cdot 2b + m_A + Y_A \cdot a = \\ = & 18,03 \cdot 3 \cdot 0,555 - 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 - 20 - 12 \cdot 4 + 35,92 + \\ & - 13,32 \cdot 2 = -0,00005 \approx 0, \end{aligned}$$

то реакции связей найдены правильно.

Сначала определяем положение статического равновесия системы. Рассмотрим равновесие тела A (рис. 2, а) и составив уравнение равновесия

$$\sum M_{C_v}(\vec{F}_i) = 0; \quad S_1 \cdot 2r - Q \sin \delta \cdot r = 0,$$

находим натяжение нити $S_1 = \frac{1}{2} Q \sin \delta$.

Из уравнения равновесия для тела B (рис. 2, б)

$$\sum X_i = 0; \quad S_1 - S_2 + G \sin \delta = 0$$

следует $S_2 = S_1 + G \sin \delta = \frac{1}{2} (Q + 2G) \sin \delta$.

И, наконец, рассмотрим равновесие тела D, барабана с пружиной (рис. 2, в), из уравнения

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad -S_2 \cdot R + m_o = 0$$

находим момент пары, удерживающей барабан в положении равновесия: $m_o = S_2 R = \frac{R}{2} (Q + 2G) \sin \delta$ и соответствующий угол, на который этот барабан будет повернут, $\varphi_o = \frac{m_o}{\lambda} = \frac{R}{2\lambda} (Q + 2G) \sin \delta$.

На рис. 1 показываем найденные перемещения. Так как зависимость между скоростями $\varphi_A = \frac{v_C}{r}$, $v_B = 2v_C$, $\varphi_D = \frac{v_B}{R} = 2\frac{v_C}{R}$, то соответствующие зависимости и

между перемещениями будут аналогичными: $q_B = 2q$, $\varphi = \frac{q_B}{R} = 2\frac{q}{R}$.

Теперь можно найти значения координат в начале движения.

Так как $\varphi_o = 2\frac{q_o}{R}$, то $q_o = \frac{R}{2} \varphi_o = \frac{1}{4\lambda} (Q + 2G) R^2 \sin \delta$. От этих начальных координат φ_o и q_o при составлении уравнений будем отсчитывать и угол поворота φ барабана и определять координату q центра масс тела A.

Переходим к составлению уравнения движения системы, используя теорему об изменении кинетической энергии $T_2 - T_1 = A$.

Если в начале движения центру масс тела A сообщили скорость v_o , то кинетическая энергия

$$T_1 = T_A + T_B + T_D = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_o^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2 \varphi_o^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \varphi_o^2 =$$

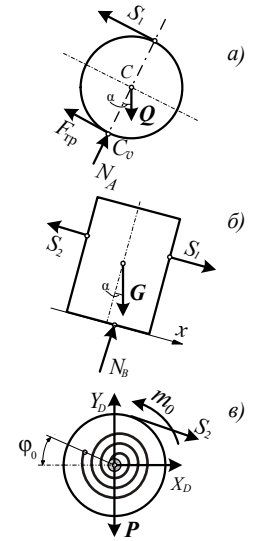


Рис. 2

ние центра масс тела A , от которого и будет отсчитываться соответствующая координата q .

Кинетическая энергия системы определяется по обычным, известным формулам и правилам, как функция скорости центра масс тела A

$$v_C = \frac{dq}{dt} = \dot{q}.$$

Работа упругих сил пружин, как переменных сил, вычисляется с помощью определённых интегралов. Так при перемещении системы из по-

$$\text{ложения равновесия работа соответствующих пружин будет } A = \int_{q_0}^{q_0+q} F dq$$

$$\text{или } A = \int_{\psi_0}^{\psi_0+\psi} m d\psi, \text{ где } q \text{ и } \psi \text{ - деформации пружин.}$$

A при перемещении из некоторого заданного начального положения

$$q_H \text{ или заданного начального угла поворота } \psi_H \text{ работа } A = \int_{q_0+q_H}^{q_0+q} F dq \text{ или}$$

$$\text{соответственно } A = \int_{\psi_0+\psi_H}^{\psi_0+\psi} m d\psi.$$

Кстати, в последнем случае и работа обычных сил изменится. Её придется вычислять на перемещении центра масс равном не q , а $(q - q_H)$. И, конечно, при наличии спиральной пружины угол поворота ψ надо затем выражать через координату q .

Пример выполнения задания

На рис. 1 дана схема конструкции, состоящей из трёх тел A , B и D . Причём, тело D соединено с опорой спиральной пружиной. В начале движения, в положении равновесия, центру масс тела A была сообщена скорость v_0 .

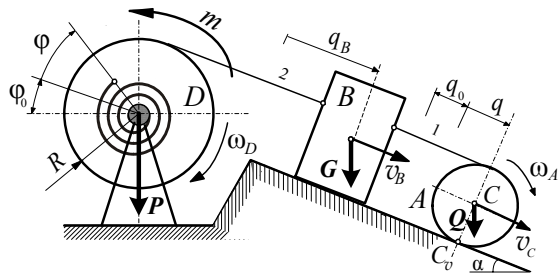


Рис. 1

Замечание о распределённых силах. Величина, модуль, Q распределённой силы численно равна её площади, изображенной на схеме, а вектор силы Q приложен к конструкции напротив центра тяжести эпюры, изображающей эту распределённую силу.

Если эта эпюра имеет сложную форму, полезно её разбить на более простые части (прямоугольники, прямоугольные треугольники), площади и центры тяжести которых легко определяются. Кстати, у силы, распределённой по закону полукруга или полуэллипса (рис. 5), сила $Q = 0,25\pi ql$.

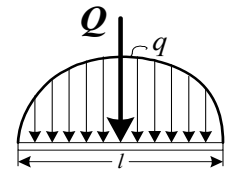


Рис. 5

3. Определение центров тяжести

Центр тяжести балки AD (рис. 6) находится в точке C_1 , координаты которой

$$x_{C_1} = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{2 \cdot 1}{6 + 2} = 0,25 \text{ м,}$$

$$y_{C_1} = \frac{\sum l_i y_i}{L} = \frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{8} = 3,75 \text{ м,}$$

где l_i - длины отдельных участков, x_i и y_i - координаты их центров тяжести.

Координаты центра тяжести C_2 балки BD :

$$x_{C_2} = \frac{9 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{9 + 2 + 3} = 2,57 \text{ м,}$$

$$y_{C_2} = \frac{9 \cdot 4,5 + 3 \cdot 1,5}{14} = 3,21 \text{ м.}$$

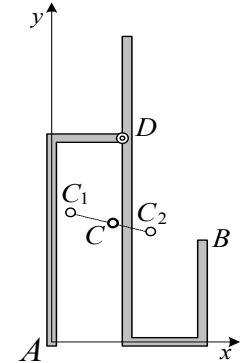


Рис. 6

Центр тяжести всей конструкции находится в точке C с координатами

$$x_C = \frac{2 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{22} = 1,73 \text{ м, } y_C = \frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 9 \cdot 4,5 + 3 \cdot 1,5}{22} = 3,41 \text{ м.}$$

Конечно, точка C должна находиться на одной прямой с точками C_1 и C_2 .

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Конструкция исследуемых механизмов состоит из прямолинейных звеньев, соединенных шарнирами, круглых дисков и других деталей определённых форм. Диски либо вращаются вокруг своих осей, либо катятся без скольжения по определённым поверхностям. В конструкции некоторых механизмов имеется звено скользящее внутри вращающейся муфты, обозначенной на схеме буквой E .

Движение механизмов определяется заданным уравнением движения одного из тел: $s = s_0 + 30 \cos^2 5t$ или $\varphi = \varphi_0 + 0,6 \sin 3t$.

Схемы механизмов даны на страницах 19, 20, 21 и 22. Причём, все они изображены в масштабе, указанном на странице 22, и в положении, соответствующем определённому моменту времени t . Это время, одинаковое для всех студентов группы, указывается преподавателем.

Требуется выполнить следующие пункты задания.

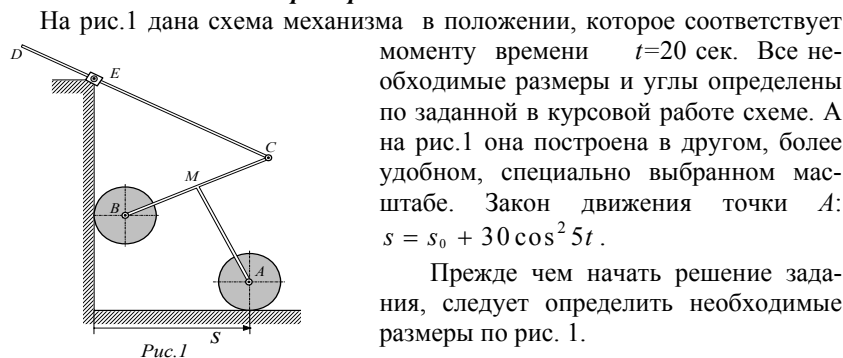
1) С помощью мгновенных центров скоростей деталей механизма определить их угловые скорости и скорости всех обозначенных буквами точек механизма.

2) Определить ускорения точек A и B и угловое ускорение звена, которому принадлежат эти точки.

3) Найти аналитическим методом ускорение точки M этого звена.

4) Отыскать мгновенный центр ускорений этого же звена, с его помощью определить вектор ускорения \vec{W}_M точки M и, используя найденные ранее в п.2 векторы ускорений \vec{W}_A и \vec{W}_B , убедиться, что задача решена правильно.

Пример выполнения задания



На рис.1 дана схема механизма в положении, которое соответствует моменту времени $t=20$ сек. Все необходимые размеры и углы определены по заданной в курсовой работе схеме. А на рис.1 она построена в другом, более удобном, специально выбранном масштабе. Закон движения точки A : $s = s_0 + 30 \cos^2 5t$.

Прежде чем начать решение задания, следует определить необходимые размеры по рис. 1.

Так радиусы дисков оказываются равными $r = 14$ см, а размеры $BC = 73$ см, $BM = MC = 37$ см, $AM = 54$ см, $CD = 130$ см. Муфта E

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Механическая система, состоящая из нескольких тел, движется под действием заданных сил. Предполагается, что скольжение тел по плоскости и между собой происходит без трения, а качение цилиндров — без скольжения и без сопротивления. На одно из тел действует пружина, винтовая или спиральная. Движение начинается из состояния равновесия, пока, с определёнными начальными условиями.

Схемы конструкции показаны на страницах 31, 32 и 33, а данные к схеме берутся из таблицы на странице 34.

1. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии определить зависимость скорости центра масс тела A от его координаты, построить фазовый портрет и вывести уравнение движения системы. Начальные условия (скорость центра масс тела A или его положение) согласовываются с преподавателем.

2. С помощью принципа Даламбера определить реакции связей между отдельными телами (усилия в нитях, реакции шарниров и т.п.) в положении системы соответствующему, заданному преподавателем моменту времени. Ускорение центра масс в этот момент определяется, используя данные пункта 1.

Рассмотрев динамическое равновесие последнего тела, сделать проверку выполненных расчётов.

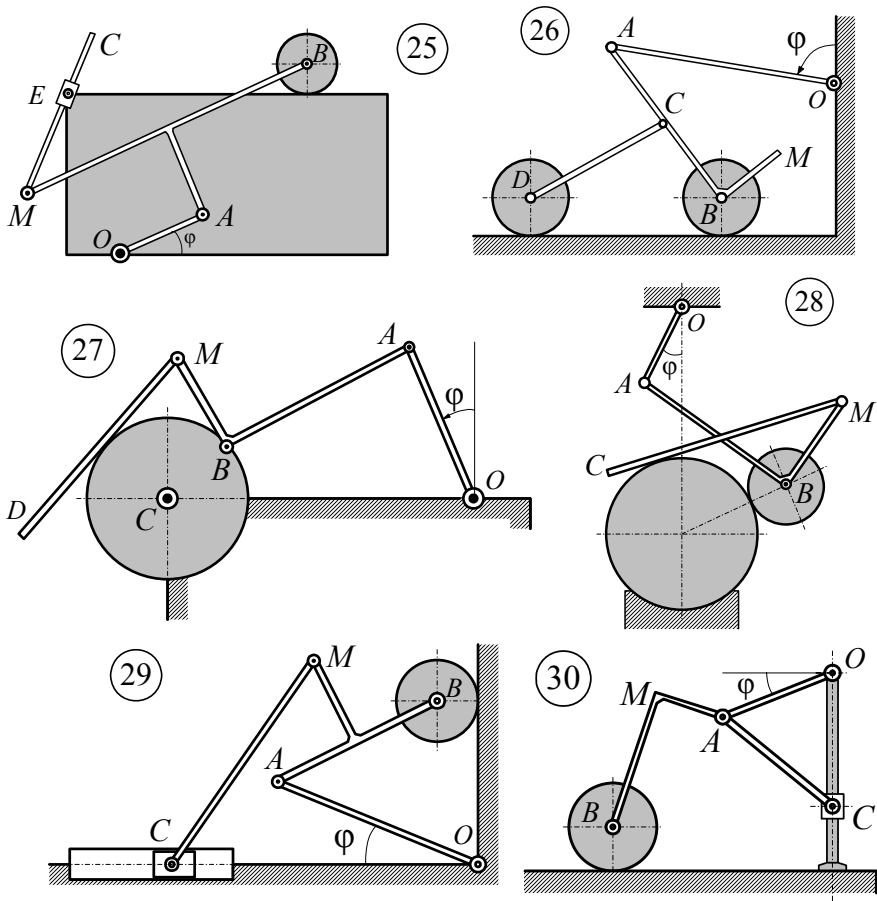
3. Составить уравнение движения системы с помощью уравнения Лагранжа. Сравнить решение с результатом пункта 1.

Методические советы по выполнению задания.

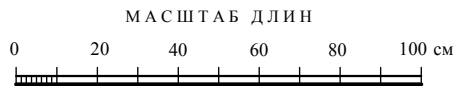
Перед выполнением первого пункта необходимо определить положение равновесия системы и вычислить деформацию пружины в этом положении. Для этого надо рассмотреть положение равновесия каждого тела и составить необходимые уравнения равновесия. Кстати, это можно выгоднее и проще сделать с помощью принципа возможных перемещений.

При определении деформации пружины надо иметь в виду, что величина упругой силы F винтовой пружины или момента m спиральной пружины пропорциональны их деформациям: $F = cq$ и $m = \lambda \varphi$ (координату, определяющую положение центра масс тел рекомендуется обозначать латинской буквой q).

Определив силы, действующие на пружины, вычисляется их деформация в состоянии равновесия: $q_0 = \frac{F_0}{c}$ или $\varphi_0 = \frac{m_0}{\lambda}$. Используя эти начальные значения деформации пружин, определяется начальное положение



Все схемы механизмов выполнены в одном масштабе:



находится на высоте 120 см, а центр диска B - на высоте 50 см. Расстояние s , соответствующее заданному закону для момента $t = 20$ сек, получается равным 72 см.

1. *Определение скоростей с помощью мгновенных центров скоростей*
Для выполнения этого пункта необходимо сделать специальный чертёж механизма в большем масштабе (рис. 2).

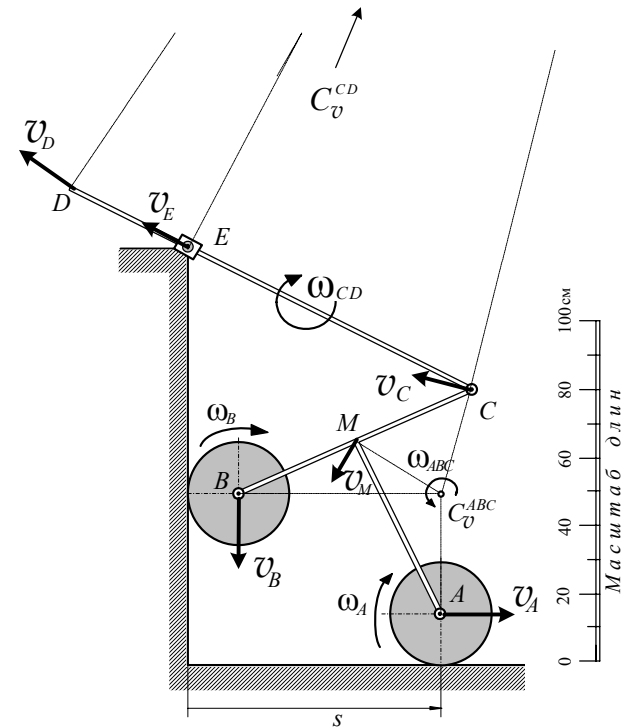


Рис. 2

Мгновенные центры скоростей колёс, дисков, находятся в точках касания их с неподвижными плоскостями.

Определяем сначала скорость точки A , движение которой задано:

$$v_A = \frac{ds}{dt} = -150 \sin 10t.$$
 А при $t = 20$ с $v_A = -150 \sin 200 = 131 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и вектор \vec{v}_A будет направлен горизонтально вправо.

Имея направления векторов скоростей точек A и B , определяем мгновенный центр скоростей C_v^{ABC} звена ABC как точку пересечения прямых перпендикулярных векторам \vec{v}_A и \vec{v}_B . Соединяя точки M и C прямыми линиями с центром C_v^{ABC} , определяем направление векторов скоростей и этих двух точек. А вычислив затем угловую скорость звена ABC

$$\omega_{ABC} = \frac{v_A}{AC_v^{ABC}} = \frac{131}{36} = 3,64 \text{ с}^{-1}, \text{ находим и величину скоростей трёх точек:}$$

$$v_B = BC_v^{ABC} \cdot \omega_{ABC} = 58 \cdot 3,64 = 211,12 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$v_C = CC_v^{ABC} \cdot \omega_{ABC} = 31 \cdot 3,64 = 112,84 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$v_M = MC_v^{ABC} \cdot \omega_{ABC} = 29 \cdot 3,64 = 105,56 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Угловые скорости колёс также легко определяются:

$$\omega_A = \frac{v_A}{r} = \frac{131}{14} = 9,36 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_B = \frac{211,12}{14} = 15,08 \text{ с}^{-1}.$$

Имея направления векторов скоростей точек C и E звена CD , находим его мгновенный центр скоростей C_v^{CD} и направление вектора \vec{v}_D . Так как мгновенный центр скоростей находится довольно далеко, то угловая скорость звена CD получится небольшой $\omega_{CD} = \frac{v_C}{CC_v^{CD}} = \frac{112,84}{478} = 0,24 \text{ с}^{-1}$,

а скорости всех точек этого звена будут почти одинаковы, например: $v_E = EC_v^{CD} \cdot \omega_{CD} = 468 \cdot 0,24 = 112,32 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $v_D = DC_v^{CD} \cdot \omega_{CD} = 470 \cdot 0,24 = 112,8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. (Расстояния от точек C, D и E до мгновенного центра скоростей C_v^{CD} , который оказался за пределами чертежа, можно определить, приложив дополнительный лист бумаги)

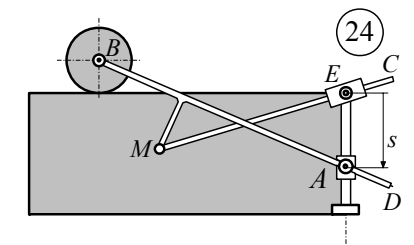
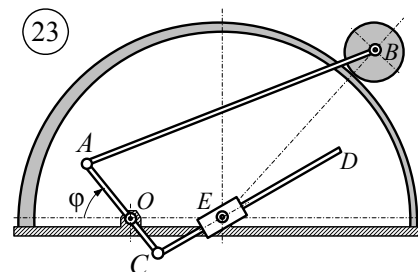
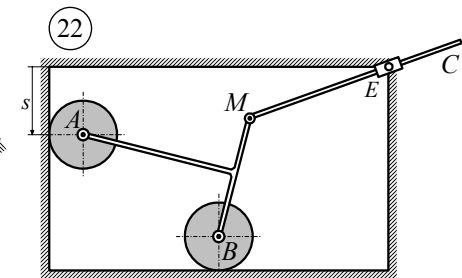
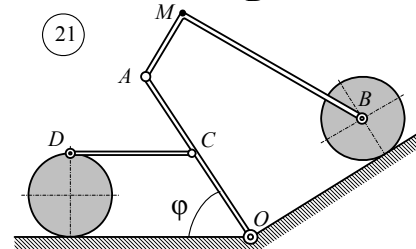
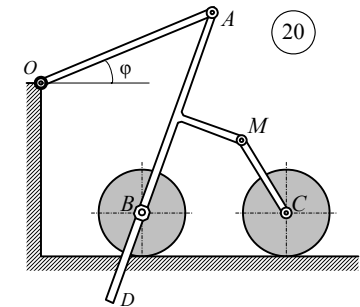
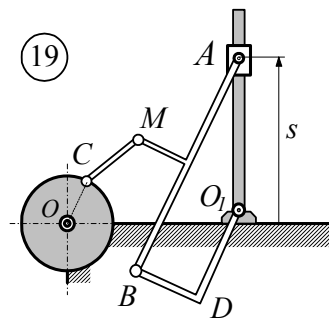
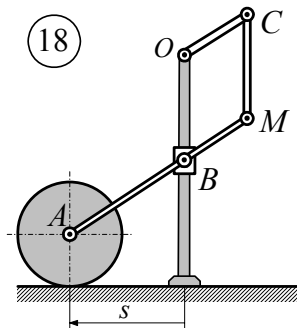
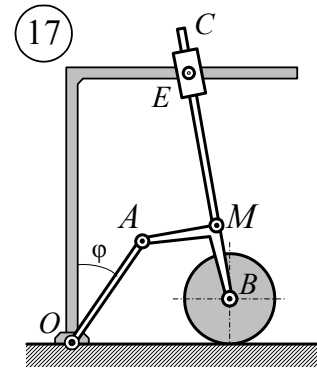
2. Определение ускорений точек звена ABC

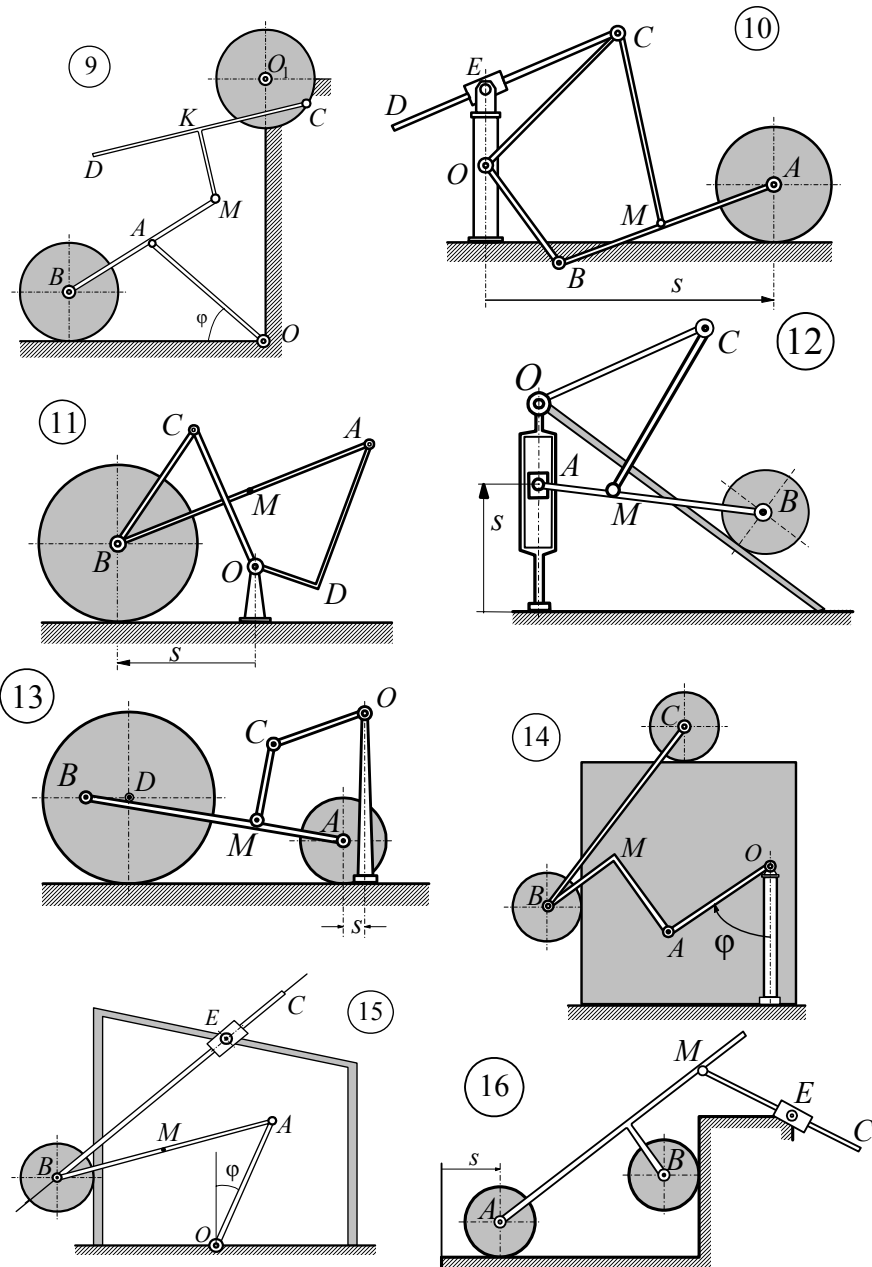
Для определения ускорений точек звена достаточно рассмотреть движение только этого звена ABC и сделать чертёж лишь соответствующей части механизма (рис. 3).

Нетрудно найти ускорение точки A , центра колеса. Эта точка движется по горизонтальной прямой, по заданному закону. Поэтому её ускорение $W_A = \frac{dv_A}{dt} = -1500 \cos 10t$. И при $t = 20 \text{ с}$ $W_A = -1500 \cos 200 = -730,78 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Величина ускорения получилась отрицательной, значит вектор \vec{W}_A направлен противоположно вектору скорости \vec{v}_A , влево.

Звено совершает плоскопараллельное движение. Значит, выбрав за полюс точку A , ускорение $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^n + \vec{W}_{BA}^\phi$. Показываем эти векторы на чертеже у точки B . Направление и модуль вектора \vec{W}_{BA}^n определяются.





Так модуль $W_{BA}^n = AB \cdot \omega_{ABC}^2 = 68 \cdot 3,64^2 = 901 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Направлением неизвестных векторов \vec{W}_B и \vec{W}_{BA}^ϕ задаёмся (см. рис. 3). Причём, величина ускорения $W_{BA}^\phi = AB \cdot \varepsilon_{ABC}$. Проектируя предыдущее векторное равенство на две оси, получим два скалярных уравнения. Чтобы они содержали по одной неизвестной, эти оси x_1 и y_1 направим перпендикулярно неизвестным векторам.

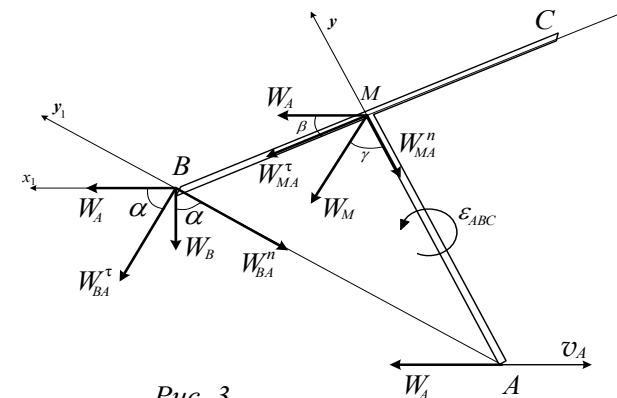


Рис. 3

Уравнения получатся такими:

$$0 = W_A - W_{BA}^n \sin \bar{\delta} + W_{BA}^\phi \cos \bar{\delta};$$

$$-W_B \cos \bar{\delta} = W_A \sin \bar{\delta} - W_{BA}^n.$$

Из первого уравнения находим, определив по чертежу угол $\bar{\delta} = 60^\circ$,

$$W_{BA}^\phi = \frac{1}{\cos \bar{\delta}} (W_{BA}^n \sin \bar{\delta} - W_A) = \frac{1}{0,5} (901 \cdot 0,87 - 730,78) = 106,18 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Из второго уравнения находим ускорение точки B:

$$W_B = \frac{1}{\cos \bar{\delta}} (W_{BA}^n - W_A \sin \bar{\delta}) = \frac{1}{0,5} (901 - 730,78 \cdot 0,87) = 530,44 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

$$\text{Угловое ускорение звена } ABC \quad \varepsilon_{ABC} = \frac{W_{BA}^\phi}{AB} = \frac{106,18}{68} = 1,56 \text{ с}^{-2}.$$

Теперь нетрудно найти и ускорение точки M с помощью уравнения $\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^n + \vec{W}_{MA}^\phi$, где $W_{MA}^n = AM \cdot \omega_{ABC}^2 = 54 \cdot 3,64^2 = 715,48 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, а $W_{MA}^\phi = AM \cdot \varepsilon_{ABC} = 54 \cdot 1,56 = 84,24 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Показав взаимно перпендикулярные оси x и y (рис. 3), находим проекции вектора ускорения \vec{W}_M :

$$W_x = -W_A \cdot \cos \beta - W_{MA}^\phi = -730,78 \cdot \cos 24^\circ - 84,24 = -751,84 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$W_y = W_A \sin \beta - W_{MA}^n = 730,75 \cdot \sin 24^\circ - 715,48 = -418,26 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Модуль ускорения точки M :

$$W_M = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{751,84^2 + 418,26^2} = 860,35 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Вектор ускорения \vec{W}_M будет направлен вниз, под углом ε к оси y ,

$$\text{тангенс которого } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{W_x}{W_y} = \frac{751,84}{418,26} = 1,8. \text{ Значит угол } \varepsilon = 60,9^\circ.$$

Теперь нужно проверить выполненное решение. Для этого надо сделать новый чертеж звена ABC (рис. 4).

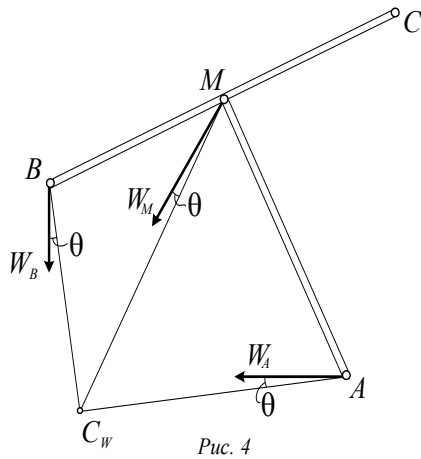


Рис. 4

Найдём мгновенный центр ускорений этого звена с помощью ускорения точки A .

$$\begin{aligned} \text{Сначала определим расстояние } AC_W &= \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon_{ABC}^2 + \psi_{ABC}^4}} = \\ &= \frac{730,78}{\sqrt{1,56^2 + 3,64^4}} = 54,78 \text{ см}. \end{aligned}$$

Затем находим угол и тангенсу

$$\operatorname{tgi} = \frac{\varepsilon_{ABC}}{\psi_{ABC}^2} = \frac{1,56}{3,64^2} = 0,12.$$

Значит $i = 6,7^\circ$. Направив пря-

мую AC_W под этим углом от вектора \vec{W}_A по направлению ε_{ABC} , получим мгновенный центр ускорений C_W .

Определим ускорение точки M с помощью мгновенного центра ускорений: $\vec{W}_M = \vec{W}_{MC_W}^n + \vec{W}_{MC_W}^\phi$, где $W_{MC_W}^n = MC_W \cdot \psi_{ABC}^2 = 64,5 \cdot 3,64^2 = 854,6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, $W_{MC_W}^\phi = MC_W \cdot \varepsilon_{ABC} = 64,5 \cdot 1,56 = 100,6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Модуль ускорения $W_M = \sqrt{(W_{MC_W}^n)^2 + (W_{MC_W}^\phi)^2} = \sqrt{854,6^2 + 100,6^2} = 860,5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Направлен вектор ускорения \vec{W}_M под углом $\varepsilon = 6,7^\circ$, найденным выше, к прямой MC_W .

Показав на рис.4 векторы найденных ускорений точек A, B и M , убеждаемся, что углы между этими векторами и прямыми, соединяющими точки с мгновенным центром ускорений, одинаковы. Значит задание выполнено правильно.

